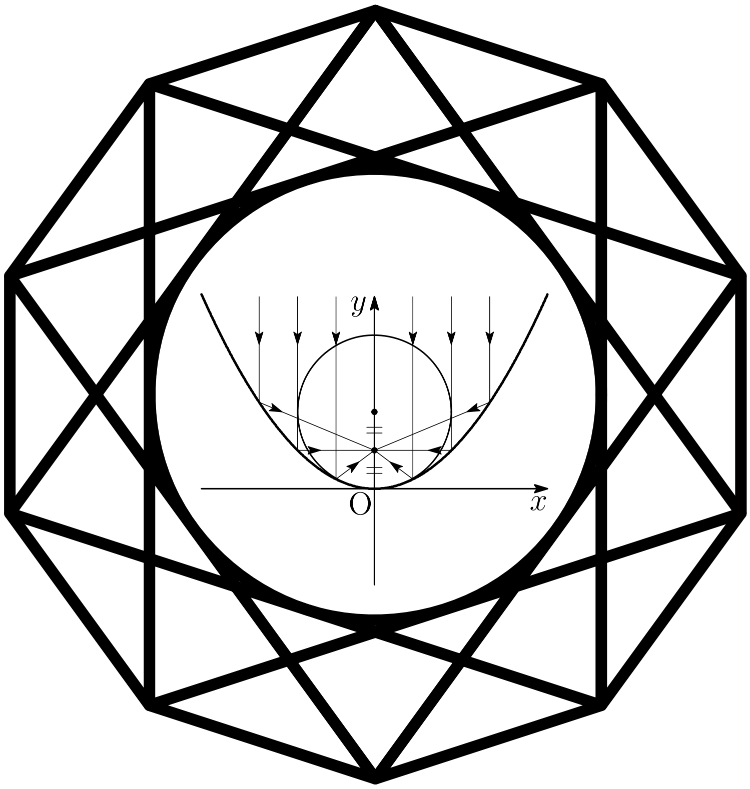
高校生の

就 職 へ の 数 学



Typed by LaTeX 2ε

序

高等学校卒業者の就職率は，昭和 40 年には 6 割を超えていたのが，近年では 2 割を下回る水準にまで低下した．当時は事務職や販売職等での募集も多く見られたが，最近では事務職・販売職での求人が減少し，結果として求人職種の大半がサービス業と中小企業の技能工に偏ることとなっている．その要因として大企業を中心に安価な労働力を求めてその生産拠点を海外移転されたこと，IT 化と業務のアウトソーシング (外部委託) の傾向も強まる中でホワイトカラー分野の職種は大卒者等の高学歴人材へシフトしたことなどがあげられる．このような状況にあっても，ただ職にありつくことを目標にすれば，割と容易に解決できるようである．しかし堅実で将来性のある職場，自分の才能や志望を満たす職種などと条件をつけて選ぶとすると，決して容易ではない．

激変する社会状況の下で，企業は求人数の絞り込みと併せて，採用する人材に対して「即戦力」志向を強めたり，高度な専門的知識・技術に柔軟に対応しうる資質，能力のある人材を求める傾向にある．中でも，柔軟で精緻な思考力の母体となる数学的素養は，特に高く評価され，採否の重要な判断材料となっている．

本書は，企業が要求する数学的知識とはどのようなものであるかを紹介するとともに，就職を希望する者にとって何を学んでおくべきか．またどのような受験対策をとるべきであるか．これに対する編者の解答である．

本書の編集にあたり，以下の点に留意した．

1. 就職試験対策用の問題集として，基礎から応用までを本書で学習できるように編集した．
2. **例**をかかげ，知識や公式の理解に効果があがるように工夫した．
3. **例題**をかかげ，考え方，基本事項の使い方，答案の書き方を例示した．
4. 問題は過去に出題された中から精選し，関連性を重視して配列した．
5. 本書および関連する教材を次のサイトから入手することができるようにした．

http://www1.ocn.ne.jp/~oboetene/plan/

平成 19 年 1 月　編者

目 次

第 0 章　数の計算と計量

0.1　数の計算

0.1.1　有理数

例 0.1　$21 \times 31 + 38 \times 31 + 17 \times 31 + 24 \times 31$　(JFE ホールディングス)

$$\begin{aligned} &= (21 + 38 + 17 + 24) \times 31 \\ &= 100 \times 31 \\ &= 3100 \end{aligned}$$

0.1 次の計算をせよ.

(1) $4261 - 2193 + 1029$　(住友金属工業)

(2) $1222 - 514 + 1105$　(住友金属工業)

(3) $4953 - 892 + 2015$　(JFE ホールディングス)

(4) $45 + 25 \times 6 - 50 \div 2$　(ダイハツ工業)

(5) $15 + 45 \times 5 - 30 + 12 \div 3$　(ダイハツ工業)

(6) $16 + 4 \times 3 \div 6 - 20 \div 5$　(凸版印刷)

(7) $273 + 35 \times 22 - 45 + 12 \div 4$　(東武鉄道)

(8) $(6 + 48) \div 6$　(ブラザー工業)

(9) $18 + 6 \times 3 - (20 - 4 \div 2)$　(三洋電機)

(10) $48 - 3\{(26 - 8) \div 3 + 8\}$　(トヨタ自動車)

(11) $49 \times 675 \div 63$　(住友金属工業)

(12) $448 \div 168 \times 135$　(住友金属工業)

例 0.2 $0.64+1.5\times0.5=0.64+0.75$ (ダイハツ工業)
$=1.39$

0.2 次の計算をせよ．

(1) $0.6-0.079$ (菱電運輸)

(2) $0.75+0.5\times0.5$ (トヨタ車体)

(3) $(0.04+0.3\times0.2)\times10$ (トヨタ車体)

(4) $0.45+0.3-0.34+0.2$ (ダイハツ工業)

(5) $0.64+1.2\times0.3$ (ダイハツ工業)

(6) $2.6\times0.4\div0.8$ (デンソー)

(7) $7.2+1.8\div0.03$ (ダイハツ工業)

(8) $3.5\times0.11\div0.2+0.36$ (東化工)

(9) $28.7\div1.4+7.15\times3.6$ (新日本石油)

(10) $5.96+0.75\times4.6-17.44\div3.2$ (新日本石油)

例 0.3 $(-9)-(-8)\div 2+6\times(-3)+5$ (西日本鉄道)

$=-9+4-18+5$

$=-18$

0.3 次の計算をせよ.

(1) $5+4-(-12)$ (ダイエー)

(2) $23+8-(5-12)-29$ (デンソー)

(3) $-8\div 4-5\times(-2)$ (アリエス)

(4) $2-(-6)\div 3$ (住友電気工業)

(5) $(-29)-4\times 7\div(-1)$ (ヤマハ発動機)

(6) $(-6)+(-2)(-4)-(-5)\times 3$ (きんでん)

(7) $9-\{2+(7-8\div 2)\times(2+9\div 3)-9\}$ (三井化学)

(8) $[(-3)+\{(-2)+6\}]\div\{7-(-2)\times(5-9)\}$ (ニチレイ)

(9) $4\times 2+6\times(6\div 3-8)-65+3\times\{(21-3)\times 2\}$ (東急車輌製造)

(10) $4.36+2\times 1.86-21.9$ (富士通ビジネスシステム)

(11) $\{1+(0.6-1.5)\}\times(-0.3)$ (トヨタ車体)

(12) $2-\{(2\times 3-6\div 1.5)\times(-1)\}$ (東京ガス)

(13) $-(-0.5)+(-2.4)\div(-0.8)\times(+1.5)$ (トヨタ自動車)

例 0.4　$4-2\times(-3)^2+2\times(-4)^2\div(-2)^3$　(セガミ)
$=4-2\times 9+2\times 16\div(-8)$
$=4-18-4=-18$

0.4 次の計算をせよ.

(1) 0.25×10^3　(ブラザー工業)

(2) $2^3\times 3^2$　(スズキ)

(3) $5^3+3^4-2^5$　(ダイハツ工業)

(4) $3^{10}\times 3^5\div 3^{12}$　(住友金属工業)

(5) $5+(-3)^2-7$　(デンソー)

(6) $-3^2+7-(-2)^2$　(住友金属工業)

(7) $5^2+(-3)^3-8$　(トヨタ自動車)

(8) $7\times 3-4^2+6\times 4\div(-8)$　(ダイハツ工業)

(9) $(-2)^3+(-3)^3-(-7)-(-2)^2$　(川崎汽船)

(10) $-1^2-(4-1)\times(1-3)-(-2)^2$　(きんでん)

(11) $(-4)^3+4\times(-3)^2$　(ダイハツ工業)

(12) $4+3(-2)^3+(2^2)^2$　(旭化成)

(13) $(-3^2)^2\div 9\times(-2)^3$　(デンソー)

(14) $(-5)^3\div(-5)^2+5\times(-5)$　(トヨタ自動車)

(15) $(-2)^3\div(-4)\times 2-(-5)$　(日本電気)

(16) $-3^2\times(-2)^3\times(-5)\div 6$　(JFE ホールディングス)

(17) $(-2)^2\times(-6)-9\times(-8)\div(-12)$　(デンソー)

(18) $(-5)^2-(-2)^3\times(-4)^2\div(-1)^6$　(住友倉庫)

(19) $2\times(-2)^3\div 2+2\div 2^2\times(-2)$　(安川電機)

(20) $(-0.1)^3\times 10^4+(-10)^2\times 0.5$　(ニコン)

例 0.5 次の計算をせよ. (きんでん)

$$
\begin{aligned}
2\text{時間}\,47\text{分}\,49\text{秒}\times 5 &= (2\text{時間}+47\text{分}+49\text{秒})\times 5\\
&= 2\text{時間}\times 5+47\text{分}\times 5+49\text{秒}\times 5\\
&= 10\text{時間}+235\text{分}+245\text{秒}\\
&= 10\text{時間}+235\text{分}+4\text{分}\,5\text{秒}\\
&= 10\text{時間}+239\text{分}+5\text{秒}\\
&= 10\text{時間}+3\text{時間}\,59\text{分}+5\text{秒}\\
&= 13\text{時間}\,59\text{分}\,5\text{秒}
\end{aligned}
$$

0.5 次の計算をせよ.

(1) 320cm + 3.1km − 420 m (mで示せ) (住友金属工業)

(2) 9800 g + 79.8kg + 0.8974 t (kg で示せ) (JFE ホールディングス)

(3) 3 時間 31 分 57 秒× 7 (きんでん)

(4) 11 時間 25 分 13 秒− 7 時間 52 分 48 秒 (JFE ホールディングス)

(5) 午前 10 時 12 分 38 秒から午後 1 時 20 分 12 秒までは (　　) 秒である. (トヨタ自動車)

0.6 次の問いに答えよ．

(1) $x=-2$ のとき，x^3-x^2-6x の値を求めよ． (デンソー)

(2) $a=2,\ b=-3,\ c=1$ のとき，$a^3+b^3+c^3-3abc$ の値を求めよ． (富士精密)

(3) $m=-3,\ n=-1$ のとき，$-m(m^2+n)$ の値を求めよ． (日本精工)

0.7 次の数字と数字の間に $+,\ -,\ \times,\ \div$ を記入し，正しい等式にせよ． (ダイハツ工業)

(1) $15\ (\quad)\ 3 = 36\ (\quad)\ 3$　(2) $3\ (\quad)\ 8 = 96\ (\quad)\ 4$

(3) $15\ (\quad)\ 3 = 1\ (\quad)\ 5$　(4) $76\ (\quad)\ 4 = 24\ (\quad)\ 48$

(5) $16\ (\quad)\ 5 = 22\ (\quad)\ 2$

0.8 次の □ の中に適する数字を入よ． (トヨタ自動車)

(1)
$$\begin{array}{rcccc} & 6 & \square & 4 & 5 \\ +) & \square & 7 & 6 & \square \\ \hline & 9 & 3 & 1 & 3 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcccc} & & \square & 8 & \square \\ \times) & & & & 3 \\ \hline & \square & 1 & 6 & 1 \end{array}$$

0.9 次の式で正しいものには○，間違っているものには×をつけよ． (愛知時計電機)

(1) 正数 + 正数 = 正数　(2) 正数 − 正数 = 正数

(3) 正数 − 負数 = 正数　(4) 正数 ÷ 負数 = 正数

(5) 負数 × 正数 = 負数　(6) 負数 ÷ 正数 = 負数

(7) 負数 × 負数 = 負数　(8) 負数 + 負数 = 負数

例 0.6

(1) $2\dfrac{7}{15}-1\dfrac{5}{6}=\dfrac{37}{15}-\dfrac{11}{6}$ (日産自動車)

$$=\frac{74}{30}-\frac{55}{30}=\frac{19}{30}$$

(2) $\dfrac{5}{12}\div 3\dfrac{1}{8}\div\dfrac{8}{15}=\dfrac{5}{12}\div\dfrac{25}{8}\div\dfrac{8}{15}$ (東武鉄道)

$$=\frac{5}{12}\times\frac{8}{25}\times\frac{15}{8}=\frac{1}{4}$$

(3) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{4}\times\left(-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{8}$ (新日本製鐵)

$$=\frac{8}{40}-\frac{5}{40}=\frac{3}{40}$$

(4) $3.5\div 0.6\times\dfrac{3}{7}\times 0.4=\dfrac{35}{10}\div\dfrac{6}{10}\times\dfrac{3}{7}\times\dfrac{4}{10}$ (KDDI)

$$=\frac{7}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=1$$

(5) $\left(-\dfrac{8}{9}\right)\times\dfrac{1}{12}\div\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2-\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{8}{9}\times\dfrac{1}{12}\div\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{3}$ (デンソー)

$$=-\frac{8}{9}\times\frac{1}{12}\times\frac{9}{4}+\frac{1}{3}$$

$$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

0.10 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{6}$ (ダイハツ工業)

(2) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}$ (きんでん)

(3) $\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{5}\right)$ (新日本製鐵)

(4) $1\dfrac{7}{8}+4\dfrac{1}{6}-2\dfrac{5}{12}$ (住友金属工業)

(5) $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{6}\div\dfrac{5}{3}\times\dfrac{2}{5}$ (きんでん)

(6) $\dfrac{5}{12}\div\dfrac{3}{7}\times\dfrac{9}{14}\div 3\dfrac{1}{8}$ (トクヤマ)

(7) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}$　(トヨタ車体)

(8) $\dfrac{5}{6}\div 1\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{5}$　(ダイハツ工業)

(9) $\dfrac{7}{10}\div\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}$　(新日本製鐵)

(10) $\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{3}\right)\div\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{3}\right)$　(安川電機)

(11) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\div\dfrac{1}{3}$　(きんでん)

(12) $\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{3}\div\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{5}\times\dfrac{9}{2}$　(住友金属工業)

(13) $\dfrac{7}{12}\times\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\div\dfrac{1}{2}$　(きんでん)

(14) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{7}{12}\div\dfrac{1}{3}$　(京浜急行)

(15) $\dfrac{7}{18}\div 0.6\times 1\dfrac{2}{7}\div\dfrac{5}{6}$　(ニコン)

(16) $0.5\times 0.3\times\dfrac{1}{20}\div 3\div 0.05$　(住友倉庫)

(17) $4\dfrac{1}{2}-\left(1.25-1\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\right)$　(トヨタ自動車)

(18) $\left(2\dfrac{7}{13}-1\dfrac{4}{5}\right)\div(0.2\div 1.25)$　(小田急電鉄)

(19) $1\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{3}-2\dfrac{1}{2}$　(東陶機器)

(20) $(-4)\times\left(-\dfrac{1}{8}\right)$　(富士重工業)

(21) $\left\{\dfrac{2}{17}\div\left(-6\dfrac{1}{2}\right)\right\}\times\left(-9\dfrac{3}{4}\right)\div\dfrac{2}{34}$　(住友電気工業)

(22) $\dfrac{2}{3}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{1}{2}$　(住友金属工業)

(23) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\div\dfrac{3}{5}$　(東京ガス)

(24) $\dfrac{14}{3} \div \dfrac{7}{2} + \dfrac{2}{3} \times \left(-\dfrac{5}{4}\right)$ (アマダ)

(25) $\dfrac{1}{12} \times (-3) + 3 \div \left(-\dfrac{3}{2}\right)$ (JFE ホールディングス)

(26) $\dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{5} \times \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{3}\right) \div \left(-\dfrac{3}{7}\right)$ (デンソー)

(27) $-\left(\dfrac{7}{11} - \dfrac{3}{22}\right) \times 4 \div \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{6}$ (大同特殊鋼)

(28) $1\dfrac{1}{2} \div \left(-\dfrac{1}{6}\right) \times \dfrac{1}{3} - 3 \times (-2)$ (いすゞ自動車)

(29) $\dfrac{7}{10} - \left[\dfrac{4}{15} \times \dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{12} \div \left\{\dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{5}{6} - \dfrac{2}{3}\right) \div \dfrac{1}{9}\right\}\right]$ (コスモ石油)

(30) $\dfrac{1}{3}\left(-2\dfrac{1}{7}\right) \div 0.5 + (-5)\left(-\dfrac{3}{7}\right)$ (愛知時計電機)

(31) $3 - \left(-2\dfrac{1}{7}\right) \div (-0.5) - \left\{1 - \dfrac{3}{4} \div \left(-1\dfrac{1}{6}\right)\right\}\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ (ダイハツ工業)

(32) $\left(-\dfrac{8}{9}\right) \times \dfrac{1}{12} \div \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2$ (JFE ホールディングス)

(33) $-2^3 + (-3)^2 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2$ (きんでん)

(34) $\{(-2)^2 + (-4)^2 - (-5)^2\} \div \left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2\right\}$ (ブラザー工業)

(35) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2 \div (-0.3)^2 \times \left(-4\dfrac{4}{5}\right)$ (住友金属工業)

(36) $1.5 \div \left(-\dfrac{1}{6}\right)^2 - 2\dfrac{1}{4} \times (-2)^3$ (日産ディーゼル)

(37) $1\dfrac{1}{3} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 \div (-0.375) - 0.6 \times \left(-1\dfrac{2}{3}\right)$ (JFE ホールディングス)

例題 0.7 次の繁(はん)分数を簡単にせよ.

(1) $\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{4}}$ (大日本セロファン)

(2) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}$ (ニコン)

(3) $\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}}$ (スズキ)

【解】 (1)
$$\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{4}}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\div\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{3}{10}\div\frac{17}{20}=\frac{6}{17}$$

(2)
$$1-\frac{1}{1-\dfrac{1}{3}}=1-1\div\left(1-\frac{1}{3}\right)$$
$$=1-1\div\frac{2}{3}=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

(3)
$$\frac{1}{3-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}}=1\div\left(3-\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}}\right)$$
$$=1\div\left\{3-1\div\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=1\div\left(3-1\div\frac{1}{2}\right)=1$$

0.11 次の繁分数を簡単にせよ.

(1) $\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}}$ (きんでん)

(2) $\dfrac{\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{8}}{\dfrac{8}{5}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}}$ (商船三井)

(3) $\dfrac{\dfrac{1}{5}}{1\dfrac{1}{3}+1\dfrac{1}{2}}$ (三井化学)

(4) $\dfrac{1}{6}-3+\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}\right)\times 2+\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{4}}$ (デンソー)

(5) $\dfrac{8}{21}+\dfrac{1}{4-2\dfrac{1}{4}}\times\dfrac{5}{3}$ (キヤノン)

(6) $\dfrac{1+\dfrac{3}{7}}{2-\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{3}}}$ (豊田通商)

(7) $\dfrac{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}}$ (新日本石油)

(8) $1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}$ (新日本石油)

(9) $\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}-1}}$ (住友倉庫)

0.1.2 最大公約数と最小公倍数

例題 0.8 次の各組の整数の最大公約数・最小公倍数を求めよ.

(1) 54, 36 (トヨタ自動車)

(2) 12, 24, 30 (武田薬品工業)

【解】 (1)

$$\begin{array}{r|r} 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 54 &= 2^1 \times 3^3 \\ 36 &= 2^2 \times 3^2 \\ \text{最大公約数} &= 2^1 \times 3^2 = 18 && \leftarrow \text{低い方の指数} \\ \text{最小公倍数} &= 2^2 \times 3^3 = 108 && \leftarrow \text{高い方の指数} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 12 &= 2^2 \times 3^1 \\ 24 &= 2^3 \times 3^1 \\ 30 &= 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \\ \text{最大公約数} &= 2^1 \times 3^1 = 6 && \leftarrow \text{最も低い指数} \\ \text{最小公倍数} &= 2^3 \times 3^1 \times 5^1 = 125 && \leftarrow \text{最も高い指数} \end{aligned}$$

0.12 次の各組の整数の最大公約数・最小公倍数を求めよ.

(1) 27, 63 (東陶機器)

(2) 24, 12, 6 (東陶機器)

(3) 30, 24, 15 (ツムラ)

(4) 20, 30, 36 (宝ホールディングス)

(5) 30, 36, 42 (クラレ)

(6) 12, 36, 54 (日本スピンドル製造)

(7) 210, 770, 231 (ダイハツ工業)

例題 0.9 ある数で 79 を割っても，91 を割っても 7 余る．ある数はいくらか．
(アマダ)

【解】 $79-7=72$, $91-7=84$ なので，72 と 84 の約数で 7 よりも大きい数であればよいので，答えは 12.

0.13 次の問いに答えよ.

(1) はがき (縦 15cm，横 10cm) を何枚か同じ向きに並べて，最も小さい正方形をつくりたい．何枚のはがきが必要か. (萬有製薬)

(2) 32 で割っても 48 で割っても 13 余る最小の数を求めよ. (今西組)

(3) ある数で 123 を割れば 21 余り，73 を割れば 5 余るという．ある数はいくらか.
(三菱ガス化学)

(4) 12，16，18 のどの数で割っても余りが 7 になる最小の数は何か．(山崎鉄工所)

最大公約数・最小公倍数

整数 (または整式)A, B の最大公約数を G，最小公倍数を L とする．
A, B を G で割った商をそれぞれ a, b とすると，次が成り立つ．

［1］ $A = Ga$, $B = Gb$

［2］ a, b は互いに素 (1 以外に共通の約数を持たない)

［3］ $L = Gab$

［4］ $GL = AB$

例題 0.10 積が 300 で最小公倍数が 60 である 2 つの整数を求めよ． (東京ガス)

【解】 求める 2 つの整数 A，B の最大公約数を G，最小公倍数を L とし，$A = Ga$, $B = Gb$ とする．$GL = AB$ により

$$G \times 60 = 300 \quad \text{これを解いて} \quad G = 5$$

$G = 5$，$L = 60$ を $L = Gab$ 代入すると

$$60 = 5ab \quad \text{すなわち} \quad ab = 12$$

このとき，a，b は互いに素であるから，a，b の組み合わせは

$$1,\ 12 \quad \text{または} \quad 3,\ 4$$

よって，$A = Ga$，$B = Gb$ により求める 2 数は

$$5,\ 60 \quad \text{または} \quad 15,\ 20$$

0.14 次の問いに答えよ．

(1) 最大公約数が 12，最小公倍数が 420 となる 2 数を求めよ． (大日製紙)

(2) 2 つの整数がある．その積は 360 で，最小公倍数は 120 である．この 2 数を求めよ． (フジクラ)

0.2 基本的な文章題

0.2.1 割合に関する問題

例題 0.11 食塩 40g を 160g の水に溶かすと何%の食塩水ができるか．(石塚硝子)

解説 濃度 (%) $= \dfrac{\text{食塩の質量}}{\text{全体の質量}} \times 100$，食塩の質量 $=$ 全体の質量 $\times \dfrac{\text{濃度 (\%)}}{100}$

【解】 全体の質量は，$40 + 160 = 200$(g)

濃度 $= \dfrac{40}{200} \times 100 = 20$(%)　(答) 20%

0.15 次の問いに答えよ．

(1) 20g の食塩を 80g の水に溶かした時の濃度を求めよ．(東陶機器)

(2) 100g の水に 25g の食塩を加えると，何%の食塩水ができるか．(日本化薬)

(3) 5%の食塩水 200g と 10%の食塩水 300g を混ぜると，何%の食塩水ができるか．(日産自動車)

(4) 3%の食塩水 100g がある．それから半分すてて 6%の食塩水 50g を加えると何%の食塩水ができるか．(本田技研工業)

例題 0.12 次の (　　) の中に適当な数値を記入せよ．

(1) $\dfrac{3}{4}$ を歩合で表すと (　　) であり，百分率では (　　) である．　(大丸)

(2) (　　) の 9 割 5 分は 190 である．　(京浜急行電鉄)

(3) 465 人は (　　) 人の 15%である．　(三共)

(4) 500 円の 20% は (　　) 円の $\dfrac{5}{8}$ である．　(箱根登山鉄道)

【解】 (1) $\dfrac{3}{4} = 0.75$ なので，歩合で 7 割 5 分，百分率で 75% ．

(2) (未知数 $\to x$，の $\to \times$，は $\to =$) に直して方程式をつくる．

$x \times 0.95 = 190$　これを解いて　$x = 200$

(3) 未知数を x とすると　$465 = x \times 0.15$　これを解いて　$x = 3100$

(4) 未知数を x とすると　$500 \times 0.2 = x \times \dfrac{5}{8}$　これを解いて　$x = 160$

0.16 次の (　　) の中に適当な数値を記入せよ．

(1) $\dfrac{2}{25}$ は (　　)% である．　(東京ガス)

(2) 500 円の 20% は (　　) 円の $\dfrac{1}{4}$ である．　(新阪急ホテル)

(3) (　　) の 5 分 5 厘は 6,380 である．　(トヨタカローラ)

(4) 1,200 の 3 割 2 分は (　　) である．　(トヨタカローラ)

(5) 56 の 6.2% は (　　) の 2% である．　(日本鉄塔工業)

(6) (　　) の 1.2% は 10.68 である．　(東陶機器)

(7) $\dfrac{1}{6}$ の (　　)% は $\dfrac{8}{15}$ である．　(日本鉄塔工業)

(8) 3 日の 16% は (　　) 時間 (　　) 分 (　　) 秒である．　(近鉄百貨店)

(9) 165 人は (　　) 人の 30% である．　(太平洋セメント)

(10) 5kg は 80kg の (　　)% である．　(東武鉄道)

(11) 160 人は 100 人の (　　)% である．　(京浜急行電鉄)

例題 0.13 次の (　　) の中に適当な数値を記入せよ.

(1) 780 円の 2 割 5 分引は (　　) 円である. (新日本石油)

(2) 9610 円は (　　) 円の 2 割 4 分増である. (コカ・コーラボトリング)

(3) 90 円は 120 円の (　　) 割 (　　) 分引にあたる. (雪印乳業)

【解】 (1) 2 割 5 分引 $\to 1 - 0.25 = 0.75$

未知数を x とすると　$780 \times 0.75 = x$　よって　$x = 585$

(2) 2 割 4 分増 $\to 1 + 0.24 = 1.24$

未知数を x とすると　$9610 = x \times 1.24$　これを解いて　$x = 7750$

(3) 90 円は 120 円の 30 円引であり，30 円は 120 円の 2 割 5 分にあたるので，求める答は 2 割 5 分引.

0.17 次の (　　) の中に適当な数値を記入せよ.

(1) (　　) 円の 3 割引は 1050 円である. (ジュンテンドー)

(2) $2,970$ 円は (　　) 円の 3 割 5 分増である. (日本スピンドル製造)

(3) (　　) リットルの 3 割減が 12.6 リットルである. (日産自動車)

(4) $2,250$ 円は (　　) 円の 2 割 5 分増である. (三菱電機)

(5) 900 円の本を 720 円で売ると (　　) 割引になる. (ダイエー)

(6) 635 円の (　　) 割引は 508 円である. (住友大阪セメント)

(7) 900 円の本を (　　) 割引で売ると 765 円になる. (アマダ)

0.18 次の問いに答えよ．

(1) 7リットルの30% は何ccか．　(東陶機器)

(2) 1000円の1割引はいくらか．　(高田工業所)

(3) $\dfrac{1}{40}$ を百分率で表せ．　(豊生ブレーキ工業)

(4) 378人は3643人の何%か．小数第2位を四捨五入して答えよ．(ダイハツ工業)

(5) 女子社員が144人で，総社員の1割2分である．総社員は何人か．
(日本鉄塔工業)

(6) 受験者500名のうち200名が不合格となった．このときの合格率は何% か．
(東陶機器)

(7) ある町の総人口の60%は$5,520$人．残り40% は何人か．　(九州武蔵精密)

(8) 6日間かかって $\dfrac{2}{3}$ を仕上げた．全部仕上げるのに何日かかるか．
(豊生ブレーキ工業)

(9) aがbの20% であるとき，bはaの何倍か．　(ダイエー)

(10) 仕入れ値段A円の品物を1割5の利益を見込み，B円で売った．BとAの関係式を求めよ．　(新日本石油)

(11) 原価100円の品物に20%の利益を見込んで定価をつけたが売れなかったので，定価の2割引とした．損得はいくらか．　(武蔵精密)

例題 0.14 5 人で 25 日かかる仕事を，x 人で y 日で仕上げるとき，y を x の式で表せ. (三共)

【解】 仕事にかかる延べ人数は，$5 \times 25 = 125$ なので，

$$xy = 125 \quad \text{から} \quad y = \frac{125}{x}$$

0.19 次の問いに答えよ.

(1) 12 人ならば 20 日で仕上げる予定の仕事を，予定より 4 日早く仕上げるには，何人増やせばよいか. (凸版印刷)

(2) 1 冊の本を，毎日 23 ページずつ読むと 26 日目に読み終わり，また 34 ページずつ読めば，17 日目に読み終わる．毎日 14 ページずつ読めば何日目に読み終わるか. (安川電機)

0.20 次の空欄に適する語句や数字を記入して表を完成せよ. (ダイエー)

小　数	分　数	百分率	歩　合
0.45			4 割 5 分
	$\frac{5}{4}$		
		65%	
	$\frac{1}{1000}$		1 厘

日歩の計算

- 日歩 a 銭 $\cdots$ 100 円につき 1 日の利子が a 銭
  例）0.04 円 $=$ 4 銭，0.123 円 $=$ 12 銭 3 厘
  例）A 円を日歩 2 銭で 60 日間借りたとき利子 (利息) は

$$A \times \frac{0.02}{100} \times 60 \text{ (円)}$$

- 日歩を年利に換算する方法
  例）日歩 5 銭 $\Rightarrow$ 1 年に 5 銭 $\times$ 365(日) $=$ 1825 銭 $=$ 18.25 円
  $\Rightarrow$ 100 円につき 18.25 円の利子
  $\Rightarrow$ 18.25 円 $\div$ 100 円 $=$ 0.1825 $=$ 1 割 8 分 2 厘 5 毛

例題 0.15 10 万円を日歩 4 銭で 150 日借りると利息はどれだけか．　(雪印乳業)

【解】 4 銭 $=$ 0.04 円

$$\text{利息} = 100,000 \times \frac{0.04}{100} \times 150 = 6,000 \text{ 円}$$

0.21 次の問いに答えよ．

(1) 元金 70,000 円を日歩 2 銭で 30 日預けたときの利息はいくらか．
(コカ・コーラボトリング)

(2) 元金 1,200,000 円を日歩 5 銭で 60 日間借りると利子はいくらか．　(石原産業)

(3) 80 万円を日歩 2 銭 5 厘で 65 日預けたときの元利合計を求めよ．　(丸一鋼管)

(4) 日歩 3 銭 2 厘は年利ではいくらか．　(東芝)

0.2.2 速さに関する問題

例題 0.16 12km 間を行きは時速 4km，帰りは時速 6km で歩いたとしたら，平均時速はいくらか． (中国電力)

【解】 行きに要する時間は $12 \div 4 = 3$(時間)

帰りに要する時間は $12 \div 6 = 2$(時間)

よって，往復 24km に 5 時間を要したので， $24 \div 5 = 4.8$ (km/時)

0.22 次の問いに答えよ．

(1) CIVIC で 1 周 6km のコースを 5 分で走ったときの平均時速はいくらか． (本田技研工業)

(2) 片道 60km の道を自動車で，往きは時速 30km，帰りは時速 20km で往復した．自動車の平均時速を求めよ． (トヨタ自動車)

(3) 行きは時速 40km，帰りは時速 60km で行く車の平均時速を求めよ． (九州産交)

0.23 次の問いに答えよ．

(1) 長さ 75m の列車が 175m の駅を 9 秒で通り過ぎるときの時速を求めよ． (京セラ)

(2) 秒速 25m の列車が 1400m のトンネルをぬけるのに 1 分かかった．列車の長さは何 m か． (山崎製パン)

(3) 電車が 240m の橋を渡りきるのに 16 秒かかり，電車の一番前が通るのに 12 秒かかった．電車の長さと時速を求めよ． (平田機工)

(4) 長さ 75m の列車が時速 54km の速さで走っている．この列車が，トンネルに入る 15 秒前に汽笛をならしてから 2 分 45 秒後に完全にトンネルを出た．トンネルの長さは何 m か． (富士通ビジネスシステム)

例題 0.17 A1 人なら 20 日，B1 人なら 30 日かかる仕事がある．この仕事を 2 人ですると何日かかるか．　(本田技研工業)

解説　［1］1 人で a 日で仕上げる　$\Longleftrightarrow$　1 人で 1 日に全体の $\dfrac{1}{a}$ だけ仕上げる

［2］$\left\{\begin{array}{l}\text{甲だけで } a \text{ 日,} \\ \text{乙だけで } b \text{ 日で} \\ \text{仕上げる}\end{array}\right\}$　$\Longleftrightarrow$　共同で 1 日に $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ だけ仕上げる

【解】 2 人で 1 日に仕事全体の $\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}=\dfrac{1}{12}$ だけ仕上げる．

したがって，2 人ですると 12 日かかる．　(答) 12 日

0.24 次の問いに答えよ．

(1) A は 10 日で，B は 15 日で仕事を終える．二人ですると何日かかるか．　(佐伯建設工業)

(2) A は札束を数えるのに 3 時間かかり，B は 2 時間かかる．二人が一緒に数えると何時間何分で終わるか．　(今西組)

(3) A，B2 人ですると 20 日かかる仕事を，A1 人ですると 30 日かかるという．B1 人では何日かかるか．　(ブラザー工業)

(4) ある仕事を A が 30 日で，B が 20 日で，C が 15 日で仕上げるという．このとき，A と B がそれぞれ 8 日間仕事をしたとすれば，C が何日仕事をすれば仕上がるか．　(日本航空)

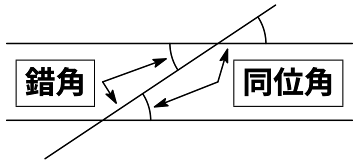
(5) ある器の中へ A 管で注水すると 50 分，B 管では 20 分かかる．A 管で 30 分注水し，その後 B 管だけで注水すればあと何分で満水になるか．(本田技研工業)

0.3　計量

0.3.1　図形と角度

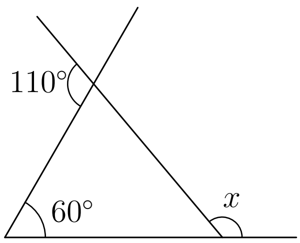
図形と角度

- **多角形の内角の和と外角の和**
  n 角形の内角の和 $\cdots (n-2) \times 180^\circ$　　n 角形の外角の和 $\cdots 180^\circ$
- **平行線と角度**
  平行な 2 直線に 1 つの直線が交わるとき，同位角は等しい．
  また，錯角も等しい．

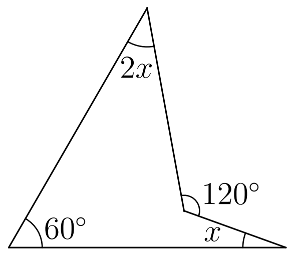


0.25 次の図で，x を求めよ．

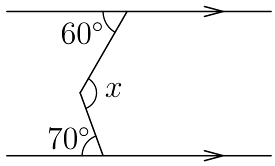
(1)　(日本電気)



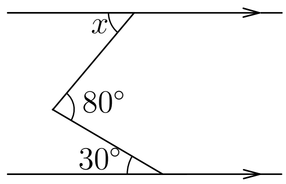
(2)　(日産自動車)



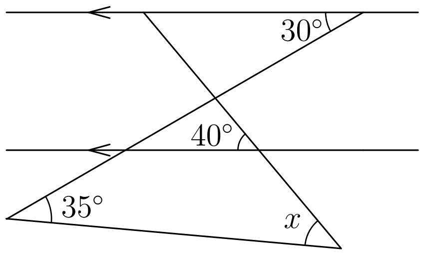
(3)　(セントラル自動車)



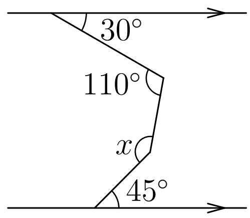
(4)　(トヨタオート)



(5)　(トヨタ車体)



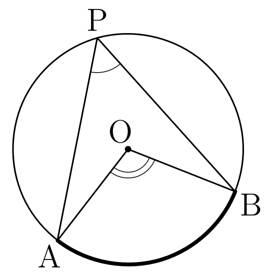
(6)　(JFE ホールディングス)



円周角の定理

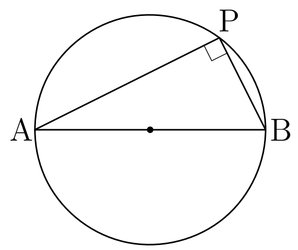
1つの弧に対する円周角は一定であり，その弧に対する中心角の半分である．たとえば，右の図の円Oにおいて

$$\angle \mathrm{APB} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}$$



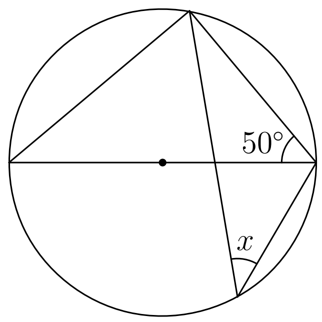
また，次のことがいえる．

線分ABを直径とする円の周上にA，Bと異なる点Pをとるとき，$\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$ である．逆に，$\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$ のとき，点Pは線分ABを直径とする円の周上にある．

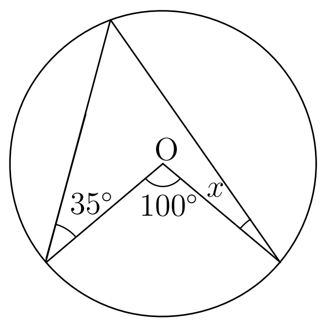


0.26 次の図で，x，y を求めよ．

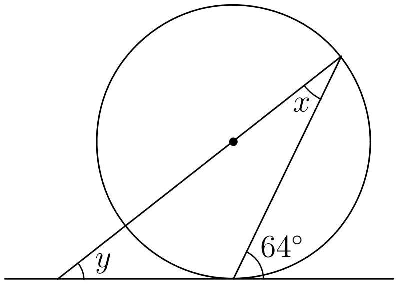
(1)　(住友金属工業)



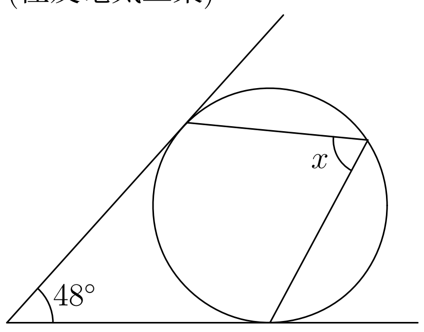
(2)　(JFEホールディングス)



(3)　(いすゞ自動車)



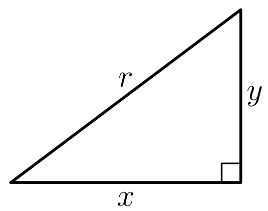
(4)　(住友電気工業)



三平方の定理

直角三角形の斜辺の長さを r，直角をはさむ 2 辺の長さを x，y とするとき，3 辺の間に次の関係が成り立つ．

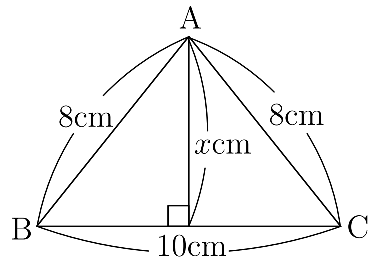
$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$$



0.27 右の図の △ABC について，次の問いに答えよ． (日産自動車)

(1) x を求めよ．

(2) △ABC の面積を求めよ．



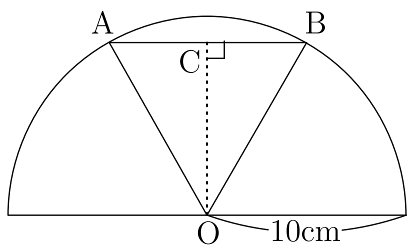
0.28 半径 10cm の半円に内接する △AOB で ∠AOB $= 60^\circ$ とするとき，次の問いに答えよ． (ホシザキ電機)

(1) AB の長さを求めよ．

(2) OC の長さを求めよ．

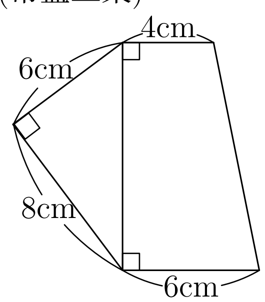
(3) △AOB の面積を求めよ．

(4) 弧 AB の長さを求めよ．

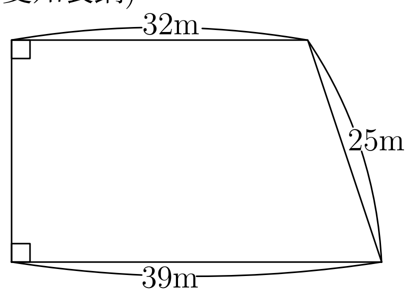


0.29 次の図形の面積を求めよ．

(1) (常盤工業)



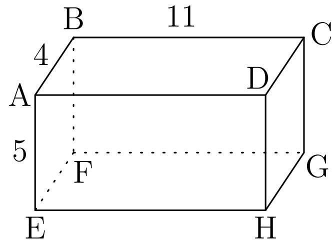
(2) (愛知製鋼)



例 0.18 右の図の直方体における AG の長さ　(神戸製鋼所)

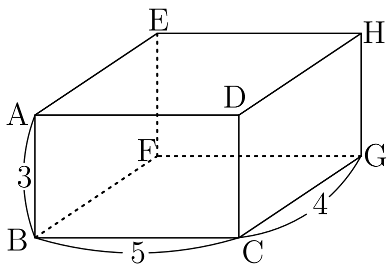
$$\begin{aligned}AG^2 &= AC^2 + CG^2\\ &= AB^2 + BC^2 + CG^2\\ &= 4^2 + 11^2 + 5^2\\ &= 162\end{aligned}$$

よって　$AG = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$

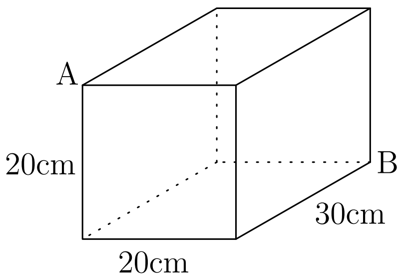


0.30 次の問いに答えよ.

(1) 右の図において AG の長さを求めよ.　(間組)



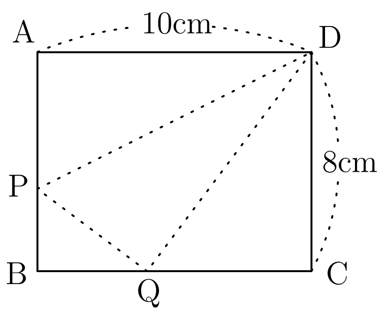
(2) 立方体の面上を点 A から点 B を結ぶときの最短距離を求めよ.　(京セラ)



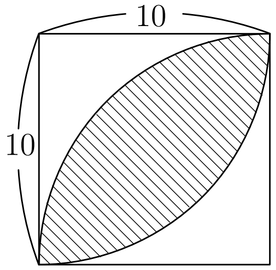
0.31 右の図のように，長方形を折り返し，A が BC 上にくるようにし，その点を Q とする．このとき，次の問いに答えよ.　(中国電力)

(1) QC の長さを求めよ.

(2) △DPQ の面積を求めよ.



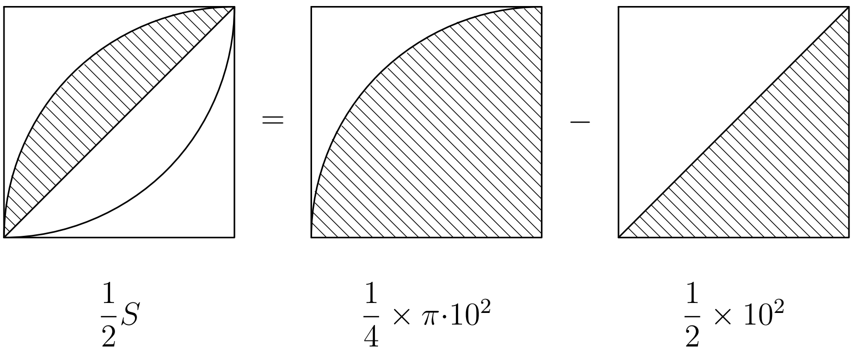
例題 0.19 図の斜線部分の面積を求めよ. (日立造船)



【解】 求める面積を S とすると，下の図からわかるように

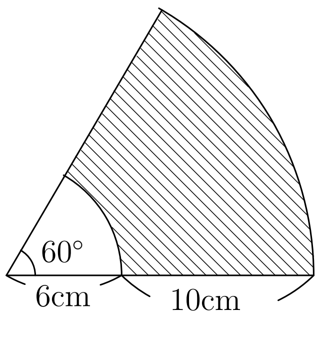
$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{4} \times \pi{\cdot}10^2 - \frac{1}{2} \times 10^2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2}S = 25\pi - 50$$

したがって，求める面積は $S = 50\pi - 100$

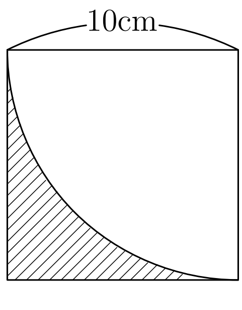


0.32 次の図の斜線部分の面積を求めよ.

(1) (山陽設計工業)

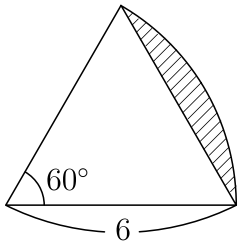


(2) (日立製作所)

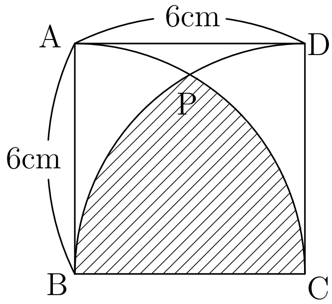


0.33 次の問いに答えよ.

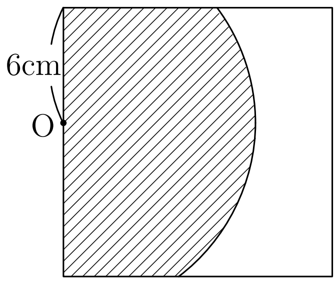
(1) 次の図の斜線部分の面積を求めよ. (東芝)



(2) 次の図で, ABCD は正方形, APC, BPD はそれぞれ B, C の中点とする 4 分円の弧である. 斜線部分の面積を求めよ. (レナウン)



(3) 次の図のように, 点 O を中心とする半径 10cm の円と 1 辺が 14cm の正方形が交わった斜線部分の面積を求めよ. (リコーテクノシステムズ)



実践問題 1

綜合警備保障

(1) 次の計算をしなさい．

$$\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\div\left(-\frac{3}{8}\right)$$

(2) 次の計算をしなさい．

$$\frac{3}{2}(4x-2)-\frac{2}{3}(3x+9)$$

(3) 30 で割っても，18 で割っても余りが 10 となる正の整数のうち，最小のものを求めなさい．

(4) 分母と分子の和が 61 である分数がある．この分数の分母は，分子の 2 倍より 14 小さい．この分数を求めなさい．

(5) 5 枚の硬貨を投げたとき，表・裏の出方は全部で何通りあるか求めなさい．

【答】 (1) 1　(2) $4x-9$　(3) 100　(4) $\dfrac{25}{36}$　(5) 32 通り

実践問題 2

トヨタ車体

1 次の計算をしなさい.

(1) $(-2)^3 \div (-4) \times 2 - (-5)$

(2) $\sqrt{81} - 2\sqrt{8}$

(3) $\begin{cases} 3x + 2y = -9 \\ 9x - 8y = 15 \end{cases}$

(4) $\{1 + (0.6 - 1.5)\} \times (-0.3)$

2 次の数列の空欄をうめなさい.

(1) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ (\quad\quad),\ 36,\ 49, \cdots$

(2) $\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{6},\ (\quad\quad),\ 1\dfrac{1}{2},\ 1\dfrac{5}{6}, \cdots$

(3) $\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ (\quad\quad),\ 4\sqrt{2}, \cdots$

3 子供達に鉛筆を配るとき，1 人に 6 本ずつ配ると 18 本余り，9 本ずつ配ると 1 人には 3 本足りなくなる．子供の人数を求めなさい.

【答】

1 (1) 9　(2) $9 - 4\sqrt{2}$　(3) $x = -1,\ y = -3$　(4) -0.03

2 (1) 25　(2) $1\dfrac{1}{6}$　(3) 4

3 7 人

第 1 章　方程式と不等式

1.1　式の計算

1.1.1　多項式の加法と減法

多項式の整理

多項式に含まれる同類項は，係数の和を計算して，1 つの項にまとめ，ふつう次数の高い項から順 (降べきの順) に並べて整理しておく.

例 1.1 次の多項式の同類項をまとめよ.

$$5x^2-3x+1-2x^2+7x-4$$

【解】
$$\begin{aligned}&5x^2-3x+1-2x^2+7x-4\\&=(5-2)x^2+(-3+7)x+(1-4)\\&=3x^2+4x-3\end{aligned}$$

同類項をまとめる

$$\boldsymbol{ma+na=(m+n)a}$$

1.1 次の多項式の同類項をまとめよ.

(1) $3x^2-x+3+x^2+2x$　　(2) $-3a^2+2a+1+3a^2+4a-2$

(3) $3x^2+3x-2+2x^2-5x+3$　　(4) $a^2+ab-4b^2-3a^2+2ab+4b^2$

例 1.2 次の多項式を x について降べきの順に整理せよ.

$$3ax+x^2+2a-4-x$$

【解】
$$\begin{aligned}&3ax+x^2+2a-4-x\\&=x^2+(3a-1)x+2a-4\end{aligned}$$

1.2 次の多項式を，x について降べきの順に整理せよ.

(1) $3ax-2a^2-x-5a$　　(2) $x^2+3xy-y^2+2x+4y-1$

(3) $ax^2+3ax+3a^2-2x^2+4x$　　(4) $3x^2y+4xy+y^2-x^2-5x+2y$

多項式 A，B の加法と減法

$A+B$　……　A と B の項をすべてたして，同類項をまとめる．
$A-B$　……　$A+(-B)$ と考え，B の各項の符号を変えたものを A にたして，同類項をまとめる．

例題 1.3 $A=x^2+3x-2$，$B=2x^2-5x+7$ とするとき，$A+B$ と $A-B$ を計算せよ．

【解】

$$\begin{aligned} A+B &= (x^2+3x-2)+(2x^2-5x+7) \\ &= x^2+3x-2+2x^2-5x+7 \\ &= (1+2)x^2+(3-5)x+(-2+7) \\ &= 3x^2-2x+5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A-B &= (x^2+3x-2)-(2x^2-5x+7) \\ &= x^2+3x-2\boldsymbol{-2x^2+5x-7} \\ &= (1-2)x^2+(3+5)x+(-2-7) \\ &= -x^2+8x-9 \end{aligned}$$

符号を変える

1.3 次の多項式 A と B について，$A+B$ と $A-B$ を計算せよ．

(1) $A=4x^2+3x-1$，$B=x^2-x-2$

(2) $A=6a^2-7a+5$，$B=-2a^2+4a-3$

(3) $A=3y^3-y^2+8$，$B=5y^3+2y^2-6y-10$

1.4 次の計算をせよ．

(1) $(3x^2-5x+2)+(x^2+3x-4)$　(ニコン)

(2) $(4x^2-6x+3)+(2x^2-4+4x)$　(新日本石油)

(3) $(5x+7y-4)-(5x-7y+2)$　(ダイハツ工業)

(4) $(ax-3by+cz)-(2cz-4by-2ax)$　(大同特殊鋼)

1.1.2　多項式の乗法

指数法則

m，n を正の整数とするとき，次が成り立つ．

1 $\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$　　**2** $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$　　**3** $\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$

例 1.4　(1) $-3a^4b \times 5a^2b^3 = -3 \times 5 \times a^{4+2} \times b^{1+3} = -15a^6b^4$

(2) $(-2xy^2)^3 = (-2)^3 \times x^3 \times (y^2)^3 = -8x^3y^6$

(3) $x^3y \times (-5xy^3)^2 = x^3y \times 25x^2y^6 = 25x^5y^7$

1.5 次の式を計算せよ．

(1) $x \times x^3 \times x^5$　(日産自動車)

(2) $(-2a^2b)^2 \times (-3a^2b^3)$　(葵精機)

(3) $2a^2b \times (-ab^2)^3$　(ダイハツ工業)

(4) $(a^2b)^3 \times (ab^2)^2$　(三井化学)

(5) $(2x)^3 \times (-3x^2y)^2$　(富士通ビジネスシステム)

(6) $(-x^2)^2(-x^3y)^3(x^2y^3)$　(トヨタ車体)

(7) $(-a^2) \times (-a^3)^2 \times (-a)^4$　(ダイヘン)

分配法則

$$\boldsymbol{A}(B+C)=\boldsymbol{A}B+\boldsymbol{A}C \qquad (A+B)\boldsymbol{C}=A\boldsymbol{C}+B\boldsymbol{C}$$

例 1.5 分配法則を使った積の計算

(1) $\boldsymbol{2x^2}(x^2-3x+5)=\boldsymbol{2x^2}\times x^2+\boldsymbol{2x^2}\times(-3x)+\boldsymbol{2x^2}\times 5$
$\quad =2x^4-6x^3+10x^2$

(2) $(3a^2+2a-1)\,\boldsymbol{a}=3a^2\times\boldsymbol{a}+2a\times\boldsymbol{a}+(-1)\times\boldsymbol{a}$
$\quad =3a^3+2a^2-a$

1.6 次の式を計算せよ.

(1) $x(2x-5)-(x^2+2x-1)$ (アマダ)

(2) $-2a(ab-c-abc)-(-a^2b+2ac+a^2bc)$ (凸版印刷)

(3) $6(x+2)-\{x(3+8x)-2(4x^2-1)-3\}-18$ (マツダ)

例 1.6 $(2x-3)(x^2-4x+5)$ を展開せよ.

【解】 $(2x-3)(x^2-4x+5)$
$=2x(x^2-4x+5)-3(x^2-4x+5)$
$=2x^3-8x^2+10x-3x^2+12x-15$
$=2x^3-11x^2+22x-15$

1.7 次の式を展開せよ.

(1) $(3x-1)(2x^2+3)$

(2) $(a^2+2a-3)(a-1)$

(3) $(x+4)(3x^2-2x+1)$

(4) $(x^3+x^2+x+1)(x-1)$ (日本特殊機器)

展開の公式

1 $\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

2 $\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

3 $\boldsymbol{(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab}$

例 1.7 (1) $(3x+1)^2 = (3x)^2 + 2{\cdot}3x{\cdot}1 + 1^2 = 9x^2 + 6x + 1$

(2) $(2x-5y)^2 = (2x)^2 - 2{\cdot}2x{\cdot}5y + (5y)^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$

(3) $(3x+2y)(3x-2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$

(4) $(x+3)(x-5) = x^2 + \{3 + (-5)\}x + 3{\cdot}(-5) = x^2 - 2x - 15$

1.8 次の式を展開せよ.

(1) $(a+b)^2 - (a-b)^2$ (ダイキン工業)

(2) $(2x-3y)^2$ (日本電気)

(3) $(3x^2+4)^2$ (日産工機)

(4) $(2x-3)^2 - 4x(x-3)$ (いすゞ自動車)

(5) $(a-b)(a+b)$ (日産ディーゼル)

(6) $(2p+3)(2p-3)$ (キャプティ)

(7) $(a-b)(a+b) - (a+b)^2 + 2b^2$ (トヨタ車体)

(8) $(x-2)(x-5)$ (不二高圧コンクリート)

(9) $(x+1)(x-9)$ (山崎製パン)

(10) $(a+5)(a-3)$ (三菱電機)

(11) $(m-7)(m-8)$ (三菱電機)

(12) $(x+3)(x-2) - x^2 + 6$ (デンソー)

展開の公式

4 $\boldsymbol{(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd}$

例題 1.8 次の式を展開せよ．

(1) $(2x+5)(3x+1)$ (2) $(3x-2y)(5x+4y)$

【解】 (1) $(2x+5)(3x+1)=2\cdot 3x^2+(2\cdot 1+5\cdot 3)x+5\cdot 1$

$=6x^2+17x+5$

(2) $(3x-2y)(5x+4y)=3\cdot 5x^2+\{3\cdot 4+(-2)\cdot 5\}xy+(-2)\cdot 4y^2$

$=15x^2+2xy-8y^2$

1.9 次の式を展開せよ．

(1) $(2x+5)(3x+4)$ (キャプティ)

(2) $(3x+2)(5x-3)$ (ニコン)

(3) $(2x-5)(7x+8)$ (東京ガス)

(4) $(3x+3)(2x-5)$ (三菱電機)

(5) $(2x+3)(3x-5)$ (日本精工)

(6) $(2x-4)(3x+6)$ (トヨタ自動車)

(7) $(3x+1)(x-4)$ (トヨタ車体)

(8) $(3x+2y)(2x-5y)$ (きんでん)

(9) $(2a+b)(4a-3b)$ (東芝)

(10) $(2x+3)^2-2(x+2)(2x-3)$ (神戸製鋼所)

(11) $(2x+y)(x+2y)-2(x-y)^2$ (東洋ガラス)

(12) $(2a+b)^2-(a+2b)(2a-b)$ (トヨタ自動車)

展開の公式

5　$\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}$

$\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$

例 1.9　(1)　$(a+3)(a^2-3a+9)=(a+3)(a^2-a\cdot 3+3^2)$

$=a^3+3^3=a^3+27$

(2)　$(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=(x-2y)\{x^2+x\cdot 2y+(2y)^2\}$

$=x^3-(2y)^3=x^3-8y^3$

1.10　次の式を展開せよ.

(1)　$(x+2)(x^2-2x+4)$　(愛知製鋼)

(2)　$(x^2+x+1)(x-1)$　(東芝)

(3)　$(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$　(ニコン)

(4)　$(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$　(デンソー)

展開の公式

6　$\boldsymbol{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

$\boldsymbol{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

例 1.10　(1)　$(2x+1)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 1+3\cdot 2x\cdot 1^2+1^3$

$=8x^3+12x^2+6x+1$

(2)　$(3x-2y)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2-(2y)^3$

$=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

1.11　次の式を展開せよ.

(1)　$(x+2)^3$　(九州電力)

(2)　$(2x-3y)^3$　(東芝)

(3)　$(x-1)^3-(y-1)^3$　(日本水産)

(4)　$(a+b)^3-(a^3+b^3)+(a+b)(a^2+b^2)-5ab(a+b)$　(コスモ石油)

式の展開の工夫

式を展開する場合，式の形に応じた工夫をすることにより，展開の公式を適用できることがある．

例題 1.11　次の式を展開せよ．

(1) $(a+b-c)^2$　　(2) $(x+y-z)(x-y+z)$

(3) $(x+3)^2(x-3)^2$

【解】 (1)
$$\begin{aligned}(a+b-c)^2 &= \{(a+b)-c\}^2\\ &= (a+b)^2-2(a+b)c+c^2\\ &= a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2\\ &= a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(x+y-z)(x-y+z) &= \{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}\\ &= x^2-(y-z)^2\\ &= x^2-y^2+2yz-z^2\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(x+3)^2(x-3)^2 &= \{(x+3)(x-3)\}^2\\ &= (x^2-9)^2\\ &= (x^2)^2-2x^2\cdot 9+9^2\\ &= x^4-18x^2+81\end{aligned}$$

1.12　次の式を展開せよ．

(1) $(x-y-2)^2$　(セガエンタープライゼス)

(2) $(2x-3y-5)^2$　(日産車体)

(3) $(x^2-x+1)^2$　(旭化成)

(4) $(x+y+z)^2-(x+y-z)^2$　(日本特殊機器)

(5) $(a+b-c)(a+b+c)$　(旭化成)

(6) $(a+b+4)(a+b-6)$　(三菱電機)

(7) $(x+2y+3)(x+5+2y)$　(三井化学)

(8) $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$　(九州電力)

(9) $(x-3)^3(x+3)^3$　(藤木工務店)

例題 1.12 次の式を展開せよ．

$$(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)$$

【解】

$$\begin{aligned}
&(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)\\
&=(x-1)(x+2)\times(x-3)(x+4) \qquad \longleftarrow -1+2=-3+4\\
&=\{(x^2+x)-2\}\{(x^2+x)-12\}\\
&=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24\\
&=x^4+2x^3-13x^2-14x+24
\end{aligned}$$

1.13 次の式を展開せよ．

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ 　(コニカミノルタホールディングス)

(2) $(x-3)(x-2)(x+2)(x+3)$ 　(ノリタケカンパニーリミテド)

(3) $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$ 　(石川島播磨重工業)

(4) $(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$ 　(石川島播磨重工業)

1.14 $A=a+b$, $B=a-b$ のとき，次の式を a, b で表せ．　(住友金属工業)

(1) A^2+B^2

(2) A^3-B^3

1.15 次の式の $\boxed{}$ の中をうめよ．

(1) $(x-3)(x+\boxed{})=x^2+x-\boxed{}$ 　(住友大阪セメント)

(2) $(2x-\boxed{})(\boxed{}x+2)=6x^2-\boxed{}x-10$ 　(小田急電鉄)

(3) $2x^2+12x+\boxed{}=2(x+\boxed{})^2$ 　(三菱ガス化学)

1.1.3　因数分解

共通因数による因数分解

多項式の各項に共通な因数があれば，その共通因数をかっこの外にくくり出して，式を因数分解することができる．

$$\boldsymbol{A}B + \boldsymbol{A}C = \boldsymbol{A}(B + C)$$

$\boldsymbol{A}$ が共通因数

例 1.13　次の式を因数分解せよ．

(1) $xy + 3x$　　(2) $a^2b - 2ab^2$

【解】 (1) $xy + 3x = x{\cdot}y + x{\cdot}3 = x(y + 3)$

(2) $a^2b - 2ab^2 = ab{\cdot}a + ab{\cdot}(-2b) = ab(a - 2b)$

1.16　次の式を因数分解せよ．

(1) $8ab - 4ac - 2ad$　(日鉱金属)

(2) $x^2 - ax^2$　(日本電産)

(3) $3x^2y - 6xy^2$　(ダイエー)

(4) $a^3 - 3a^2 - a$　(東京電力)

(5) $4a^2bc - 8ab^2c - 6abc^2$　(JR)

(6) $6a^3b^2c - 8ab^3c^2$　(JFE ホールディングス)

(7) $(a + b)^3 + (a - b)^3$　(デンソー)

(8) $(a + b)^3 - (a - b)^3$　(新日本製鐵)

例題 1.14 次の式を因数分解せよ.

$$ax + bx + ay + by$$

【解】 $ax + bx + ay + by = (a+b)x + (a+b)y$ $\longleftarrow$ $(a+b)$ が共通因数

$\qquad\qquad\qquad\qquad = (a+b)(x+y)$

1.17 次の式を因数分解せよ.

(1) $x(a-b) + y(a-b)$ (ユーディケー)

(2) $a(x-y) + b(y-x)$ (オークマ)

(3) $a(x-y) - x + y$ (日本ミシン)

(4) $x(y-1) - y + 1$ (日本特殊陶業)

(5) $xy + 2x - 2y - 4$ (小松製作所)

(6) $ax - bx + by - ay$ (コロムビアミュージックエンタテインメント)

(7) $a^3 + b^3 + a^2b + ab^2$ (大同特殊鋼)

因数分解の公式

1 $\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2, \quad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}$

2 $\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$

3 $\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)}$

例 1.15 (1) $x^2+10x+25=x^2+2{\cdot}x{\cdot}5+5^2=(x+5)^2$

(2) $16x^2-8xy+y^2=(4x)^2-2{\cdot}4x{\cdot}y+y^2=(4x-y)^2$

(3) $25x^2-9y^2=(5x)^2-(3y)^2=(5x+3y)(5x-3y)$

(4) $x^2+7x+12=x^2+(3+4)x+3{\cdot}4$
$=(x+3)(x+4)$

1.18 次の式を因数分解せよ.

(1) x^2+2x+1 (日産車体)

(2) x^2+6x+9 (JR)

(3) $x^2-10x+25$ (電源開発)

(4) $4x^2-4x+1$ (日立プラント建設)

(5) $9x^2+6x+1$ (ダイハツ工業)

(6) $9x^2-6x+1$ (京王電鉄)

(7) $49x^2-28xy+4y^2$ (TDK)

(8) $x^4+2x^2y^2+y^4$ (日本電気)

(9) $x^2y^2-10xy+25$ (協和電設)

(10) a^3-4a^2+4a (きんでん)

(11) $x^4+2x^3+x^2$ (富士通)

(12) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2$ (間組)

1.19 次の式を因数分解せよ.

(1) $4x^2 - 9y^2$ (シチズン時計)

(2) $4x^2 - 25y^2$ (東芝)

(3) $4x^2 - 1$ (マリネックス)

(4) $3x^2 - 3y^2$ (東京ガス)

(5) $3x^2 - 75$ (石川島播磨重工業)

(6) $abx^2 - a^3b$ (キヤノン)

(7) $x^4 - x^2y^2$ (ヤマハ発動機)

(8) $x^2 + 8x + 15$ (日立建設)

(9) $x^2 + 6x + 8$ (富士通)

(10) $x^2 + 2x - 24$ (協和電設)

(11) $x^2 - 8x + 15$ (セントラル自動車)

(12) $x^2 - 7x + 10$ (JR)

(13) $x^2 - 5x + 6$ (ユーディケー)

(14) $x^2 - 6x + 5$ (凸版印刷)

(15) $x^2 - 2x - 3$ (富士通)

(16) $x^2 - 10x + 9$ (ダイハツ工業)

(17) $x^2 - 6x - 16$ (ヤマハ発動機)

(18) $x^2 - 8x + 12$ (安川電機)

(19) $x^2 - x - 12$ (日本電気)

(20) $x^2 + 20x + 84$ (ダイハツ工業)

(21) $x^2 + 6x - 91$ (日本電気)

(22) $x^3 + 3x^2 + 2x$ (日本電気)

(23) $ab^2 - 7ab + 10a$ (東芝)

(24) $x^3y - 3x^2y - 4xy$ (関西電力)

因数分解の公式

4　$\boldsymbol{acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)}$

例題 1.16 次の式を因数分解せよ.

(1) $2x^2 - 7x + 3$　　(2) $6x^2 - 7ax - 5a^2$

【解】 (1) $2x^2 - 7x + 3 = (x-3)(2x-1)$

(2) $6x^2 - 7ax - 5a^2 = (2x+a)(3x-5a)$

(1)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -3 & \longrightarrow & -6 \\ 2 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline 2 & & 3 & & -7 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ccccc} 2 & & 1a & \longrightarrow & 3a \\ 3 & & -5a & \longrightarrow & -10a \\ \hline 6 & & -5a^2 & & -7a \end{array}$$

1.20 次の式を因数分解せよ.

(1) $3x^2 + 4x + 1$ (ダイハツ工業)

(2) $3x^2 - 7x + 2$ (パナホーム)

(3) $2x^2 - x - 15$ (JR)

(4) $3x^2 + 11x + 10$ (東芝エレベータ)

(5) $2x^2 + 5x - 3$ (東武鉄道)

(6) $3x^2 + 5x - 12$ (昭和シェル石油)

(7) $2x^2 + 13x - 24$ (麒麟麦酒)

(8) $5x^2 + 9x - 2$ (ブラザー工業)

(9) $8a^2 + 2a - 3$ (きんでん)

(10) $6x^2 + 11x - 10$ (凸版印刷)

(11) $6x^2 - 11x - 35$ (日立ソフトウェアエンジニアリング)

(12) $3x^2 + 17xy - 6y^2$ (トクヤマ)

(13) $4x^2 - 5xy - 6y^2$ (大日本インキ化学工業)

(14) $6a^2 + ab - 2b^2$ (新日本製鐵)

(15) $3x^2 + 7xy - 20y^2$ (日立製作所)

因数分解の公式

5　$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$
　　$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$

例題 1.17 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^3 + 27$　(2) $16a^3 - 54b^3$　(3) $x^6 + 1$　(4) $a^6 - b^6$

【解】 (1) $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - x\cdot 2 + 2^2)$
$= (x+3)(x^2 - 2x + 4)$

(2) $16a^3 - 54b^3 = 2(8a^3 - 27b^3) = 2\{(2a)^3 - (3b)^3\}$
$= 2(2a - 3b)\{4a^2 + 2a\cdot 3b + (3b)^2\}$
$= 2(a - 2b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$

(3) $x^6 + 1 = (x^2)^3 + 1^3 = (x^2+1)\{(x^2)^2 - x^2\cdot 1 + 1^2\}$
$= (x^2+1)(x^4 - x^2 + 1)$

(4) $a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$
$= (a+b)(a^2 - ab + b^2)(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

1.21 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^3 + 27$　(東京急行電鉄)

(2) $a^3 - 1$　(日本電気)

(3) $27a^3 + 8b^3$　(ニコン)

(4) $8x^3 - 27y^3$　(青木あすなろ建設)

(5) $81x^3 - 24y^3$　(TDK)

(6) $8x^4 - x$　(富士通)

(7) $2a^4 - 16ab^3$　(協和電設)

(8) $a^6 + b^6$　(小松製作所)

(9) $x^6 - y^6$　(日本工具機械)

(10) $x^6 - 1$　(新日本石油)

(11) $x^6 - y^3$　(日本精工)

いろいろな因数分解

複雑な式を因数分解する場合，式の形の特徴に着目して式の変形や文字のおき換えを行うと，因数分解の公式を利用できることがある．

例題 1.18 次の式を因数分解せよ．

(1) x^4-81　　(2) $(x-5)^2+12(x-5)+36$

(3) $(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$　　(4) $x^2-6x+9-y^2$

【解】 (1) $x^2=X$ とおくと

$$\begin{aligned} x^4-81 &= (x^2)^2-81 = X^2-81 \\ &= (X+9)(X-9) = (x^2+9)(x^2-9) \\ &= (x+3)(x-3)(x^2+9) \end{aligned}$$

(2) $x-5=X$ とおくと

$$\begin{aligned} (x-5)^2+12(x-5)+36 &= X^2+12X+36 = (X+6)^2 \\ &= \{(x-5)+6\}^2 = (x+1)^2 \end{aligned}$$

(3) $x^2+x=X$ とおくと

$$\begin{aligned} (x^2+x-2)(x^2+x-12)+24 &= (X-2)(X-12)+24 \\ &= X^2-14X+48 = (X-6)(X-8) \\ &= (x^2+x-6)(x^2+x-8) \\ &= (x-2)(x+3)(x^2+x-8) \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} x^2-6x+9-y^2 &= (x^2-6x+9)-y^2 = (x-3)^2-y^2 \\ &= \{(x-3)+y\}\{(x-3)-y\} \\ &= (x+y-3)(x-y-3) \end{aligned}$$

1.22 次の式を因数分解せよ．

(1) x^4-y^4　　(東北電力)

(2) x^8-1　　(アマダ)

(3) a^4-2a^2+1　　(トヨタ自動車)

(4) $36x^4-13x^2+1$　　(きんでん)

(5) $(x^2+1)^2-4x^2$　　(京阪電気鉄道)

1.23 次の式を因数分解せよ.

(1) $(x-4y)^2-25$ (北海道電力)

(2) $2(x-y)^2-(x-y)-3$ (日本空港給油)

(3) $(a+b)^2+4(a+b)+4$ (デンソー)

(4) $(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$ (味の素)

(5) $x^2+2xy+y^2-3x-3y-40$ (富士電機ホールディングス)

(6) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)-4$ (KDDI)

(7) $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)-4$ (ダイハツ工業)

(8) $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)-3y^4$ (ニコン)

(9) $x^2+2xy+y^2-1$ (トヨタ自動車)

(10) $a^2+b^2-c^2+2ab$ (日下歯車製作所)

(11) $a^2+b^2-c^2-2ab$ (東芝物流)

(12) $x^2-y^2-z^2-2yz$ (栗本鐵工所)

(13) $a^2-b^2-c^2+2bc$ (旭化成)

(14) x^2-y^2+2y-1 (中越パルプ工業)

(15) a^2-b^2-4b-4 (アマダ)

(16) $(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2$ (三菱電機)

例題 1.19 次の式を因数分解せよ.

$$x^2 + ax - ay - y^2$$

【解】 $x^2 + ax - ay - y^2 = (x-y)a + (x^2 - y^2)$　← 次数の最も低い文字 a について整理

$$= (x-y)a + (x+y)(x-y)$$

$$= (x-y)\{a + (x+y)\}$$

$$= (x-y)(a+x+y)$$

1.24 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2y + x^2 - y - 1$　(東芝)

(2) $a^2b - ab - a + 1$　(デンソー)

(3) $ax^2 - x^2 - a + 1$　(富士通)

(4) $ab + b^2 - bc - ca$　(東芝機械)

(5) $x^2 + xy - yz - xz$　(中部電力)

(6) $ax^3 + x^2 + ax + 1$　(東芝)

(7) $ab^2 - a^2b - 2bx + 2ax$　(コニカミノルタホールディングス)

(8) $x^3 - 2ax^2 - 4x + 8a$　(住友大阪セメント)

(9) $x^3 - 3ax^2 - 4x + 12a$　(トヨタ自動車)

(10) $x^3 + 2x^2y - x - 2y$　(松田組)

(11) $x^2 - xz - y^2 - yz$　(KDDI)

(12) $a^2b + 2ac - a^2 - 2abc$　(デンソー)

(13) $a^2 + 3ab + 2b^2 + ac + bc$　(富士ゼロックス)

(14) $x^3 + 3x^2 + 2x + 3xy + x^2y + 2y$　(日産自動車)

例題 1.20 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2+3xy+2y^2+3x+4y+2$ (大同特殊鋼)

(2) $2x^2-xy-y^2-7x+y+6$ (豊田工機)

【解】 x に着目して因数分解する.

(1)
$$\begin{aligned}
&x^2+3xy+2y^2+3x+4y+2\\
=&x^2+(3y+3)x+2(y+1)^2\\
=&\{x+(y+1)\}\{x+2(y+1)\}\\
=&(x+y+1)(x+2y+2)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & y+1 & \longrightarrow & y+1\\
1 & & 2(y+1) & \longrightarrow & 2y+2\\
\hline
1 & & 2(y+1)^2 & & 3y+3
\end{array}$$

(2)
$$\begin{aligned}
&2x^2-xy-y^2-7x+y+6\\
=&2x^2+(-y-7)x-(y+2)(y-3)\\
=&\{x-(y+2)\}\{2x+(y-3)\}\\
=&(x-y-2)(2x+y-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & -(y+2) & \longrightarrow & -2y-4\\
2 & & y-3 & \longrightarrow & y-3\\
\hline
2 & & -(y+2)(y-3) & & -y-7
\end{array}$$

1.25 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2-y^2-2x+4y-3$ (安川電機)

(2) $x^2-2xy-3y^2-4y-1$ (シチズン時計)

(3) $2x^2+8x+6+y^2+3xy+5y$ (川崎重工業)

(4) $2x^2+8xy+6y^2-x+y-1$ (武田薬品工業)

(5) $2x^2-2y^2+3xy-x+3y-1$ (いすゞ自動車)

(6) $2x^2-5xy-3y^2+x+11y-6$ (富士通コミュニケーション・システムズ)

例題 1.21 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ を因数分解せよ. (リコー)

【解】 特定の文字に注目して (ここでは a), 整理する.

$$
\begin{aligned}
&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\
=&a^2(b-c)+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2\\
=&a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)\\
=&a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)\\
=&(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\
=&(b-c)(a-b)(a-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}
$$

1.26 次の式を因数分解せよ.

(1) $a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$ (デンソー)

(2) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ (YKK)

(3) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$ (ニコン)

(4) $(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$ (JFE ホールディングス)

例題 1.22 平方差をつくり，次の式を因数分解せよ．

(1) x^4+x^2+1 (沖電気工業，九州電力，デンソー，日産自動車)

(2) x^4-6x^2+1 (東陶機器)

(3) a^4+5a^2+9 (オークマ)

(4) a^4+4b^4 (川崎重工業)

(5) $(x^2-1)(y^2-1)-4xy$ (九州電力)

【解】 (1)
$$\begin{aligned} x^4+x^2+1 &= x^4+2x^2+1-x^2 \\ &= (x^2+1)^2-x^2 \\ &= \{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\} \\ &= (x^2+x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} x^4-6x^2+1 &= x^4-2x^2+1-4x^2 \\ &= (x^2-1)^2-(2x)^2 \\ &= \{(x^2-1)+2x\}\{(x^2-1)-2x\} \\ &= (x^2+2x-1)(x^2-2x-1) \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} a^4+5a^2+9 &= a^4+6a^2+9-a^2 \\ &= (a^2+3)^2-a^2 \\ &= \{(a^2+3)+a\}\{(a^2+3)-a\} \\ &= (a^2+a+3)(a^2-a+3) \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} a^4+4b^4 &= a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2 \\ &= (a^2+2b^2)^2-(2ab)^2 \\ &= \{(a^2+2b^2)+2ab\}\{(a^2+2b^2)-2ab\} \\ &= (a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2) \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} &(x^2-1)(y^2-1)-4xy \\ &= x^2y^2-x^2-y^2+1-4xy \\ &= x^2y^2-2xy+1-x^2-2xy-y^2 \\ &= (xy-1)^2-(x+y)^2 \\ &= \{(xy-1)+(x+y)\}\{(xy-1)-(x+y)\} \\ &= (xy+x+y-1)(xy-x-y-1) \end{aligned}$$

1.27 次の式を因数分解せよ.

(1) $a^4 + a^2 + 1$ (東芝物流)

(2) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ (日本電気，本田技研工業，三井化学)

(3) $x^4 - 3x^2 + 1$ (九州電力，東芝，島津製作所)

(4) $x^4 - 7x^2 + 9$ (協和電設)

(5) $a^4 + 5a^2 + 9$ (オークマ)

(6) $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$ (九州電力)

(7) $x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4$ (ダイハツ工業)

(8) $x^4 + 4$ (石川島播磨重工業)

(9) $x^4 + 4y^4$ (新日本製鐵)

(10) $4x^4 + 11x^2 + 9$ (日本工具製作)

(11) $x^8 + x^4 + 1$ (いすゞ自動車)

(12) $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) + 4abxy$ (トヨタ自動車)

1.1.4 整式の最大公約数と最小公倍数

整式 $f(x)$，$g(x)$ について，$f(x) = g(x)h(x)$ を満たす整式 $h(x)$ が存在するとき，$f(x)$ を $g(x)$ の**倍数**，$g(x)$ を $f(x)$ の**約数**という．

たとえば，$f(x) = (x+1)(x+2)$ について，1，$x+1$，$x+2$，$(x+1)(x+2)$ は $f(x)$ の約数であるが，$g(x) = 3(x+1)$ も $f(x)$ の約数であることが，整式 $h(x) = \frac{1}{3}(x+2)$ が存在することから分かる．そこで，整式の倍数や約数を表すときは最高次の係数が 1 である整式だけを扱うのが一般的である．

2 つ以上の整式について，共通する倍数で最も次数の低いものを**最小公倍数**といい，共通する約数の中で最も次数の高いものを**最大公約数**という．とくに，共通の約数を持たないときは，最大公約数は 1 である．

例題 1.23 次の各組の整式の最大公約数・最小公倍数を求めよ．

(1) $18xy^3$，$24x^3y$ (KDDI)

(2) ab^2c^3，a^3b^4c，a^4c (黒崎播磨)

(3) $x^2 - x - 6$，$x^2 - 5x + 6$ (住友電装)

(4) $x^3 - x$，$x^4 + 2x^3 + x^2$

【解】 (1)
$$\begin{aligned} 18xy^3 &= 18x\ y^3 \\ 24x^3y &= 24x^3y \\ \text{最大公約数} &= \quad x\,y \\ \text{最小公倍数} &= \quad x^3y^3 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} ab^2c^3 &= a\ b^2c^3 \\ a^3b^4c &= a^3b^4c \\ a^4c &= a^4 \times c \\ \text{最大公約数} &= a\ \times c\ = ac \\ \text{最小公倍数} &= a^4b^4c^3 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &= (x+2)(x-3) \\ x^2 - 5x + 6 &= \qquad\quad (x-3)(x-2) \\ \text{最大公約数} &= \qquad\quad x-3 \\ \text{最小公倍数} &= (x+2)(x-3)(x-2) \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} x^3 - x &= x(x+1)\ (x-1) \\ x^4 + 2x^3 + x^2 &= x^2(x+1)^2 \\ \text{最大公約数} &= x(x+1) \\ \text{最小公倍数} &= x^2(x+1)^2(x-1) \end{aligned}$$

1.28 次の各組の整式の最大公約数・最小公倍数を求めよ.

(1) $6a^3b^2c,\ 3a^2b^3$ (トヨタ自動車)

(2) $4a^2,\ 12ax,\ 6x^2$ (富士通ビジネスシステム)

(3) $12x^3y,\ -9x^2y^2,\ 6x^4y$ (東京ガス)

(4) $7xy,\ 21x^2y^2,\ 28x^4y^4$ (商船三井)

(5) $5x^2-2x-3,\ x^2-2x+1$ (トヨタ自動車)

(6) $a(a-1)-2,\ a+a(a+3)+3$ (アサヒビール)

(7) $x^3-1,\ (x^2+1)^2-x^2$ (JFE ホールディングス)

(8) $x^2-6x-16,\ 2x^2+9x+10,\ 4x^2+9x+2$ (京王電鉄)

(9) $x^3+1,\ x^4+2x^3+x^2,\ x^2-2x-3$ (富士通カスタマエンジニアリング)

1.2 実数

1.2.1 実数

実数と絶対値

- 実数の分類

$$\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\\ \text{有限小数}\\ \text{循環小数}\end{cases}\\ \text{無理数}\cdots\text{循環しない無限小数}\end{cases}$$

- 絶対値

a が正の数のとき $|a| = a$
a が負の数のとき $|a| = -a$ $(|0| = 0)$

小数第何位かで終わる小数を**有限小数**といい，限りなく続く小数を**無限小数**という．無限小数のうち，ある位以下では数字の同じ並びが繰り返される小数を**循環小数**という．

例 1.24 次の分数を小数に直し，循環小数の表し方で書け．

(1) $\dfrac{2}{9}$ (2) $\dfrac{8}{55}$

【解】 (1) $\dfrac{2}{9} = 0.222\cdots = 0.\dot{2}$ (2) $\dfrac{8}{55} = 0.1454545\cdots = 0.1\dot{4}\dot{5}$

1.29 次の分数を小数に直し，循環小数の表し方で書け．

(1) $\dfrac{2}{3}$ (2) $\dfrac{15}{22}$ (3) $\dfrac{5}{7}$

例 1.25 次の値を求めよ．

(1) $|3|$ (2) $|2-5|$

【解】 (1) $|3| = 3$ (2) $|2-5| = |-3| = 3$

1.30 次の値を求めよ．

(1) $|5|$ (2) $|6-2|$ (3) $|3-5|$

1.31 次の値を求めよ．

(1) $a = 2$ のとき $|a+2| + |a-4|$ (九州電力)

(2) $|4-5| - |2-3| + |5+(-2)|$ (きんでん)

(3) $|(-2)^3| - |(-1)^2| - |5-(-2)|$ (きんでん)

1.2.2　根号を含む式の計算

根号を含む式の計算

- $a,\ b$ が正の数のとき

　1　$\boldsymbol{\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}}$　　　**2**　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$

- $a,\ k$ が正の数のとき　　$\boldsymbol{\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}}$

例 1.26 (1) $\sqrt{49}-2\sqrt{9}=\sqrt{7^2}-2\sqrt{3^2}$

$$=7-2\cdot3=1$$

(2) $\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{27}=\sqrt{2^2\cdot3}+\sqrt{4^2\cdot3}-\sqrt{3^2\cdot3}$

$$=2\sqrt{3}+4\sqrt{3}-3\sqrt{3}$$
$$=(2+4-3)\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

(3) $(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-3\sqrt{2})$

$$=2\sqrt{3}(\sqrt{3}-3\sqrt{2})+\sqrt{2}(\sqrt{3}-3\sqrt{2})$$
$$=2\sqrt{3}\sqrt{3}-2\cdot3\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}-3\sqrt{2}\sqrt{2}$$
$$=6-6\sqrt{6}+\sqrt{6}-6=-5\sqrt{6}$$

1.32 次の問いに答えよ.

(1) $\sqrt{2}=1.4$ であれば $\sqrt{200}$ はいくらか.　　(三菱電機)

(2) $\sqrt{3}=1.73$ のとき $\sqrt{300}$ はいくらか.　　(日本情報管理システム)

1.33 次の計算をせよ.

(1) $\sqrt{100}+\sqrt{16}$　　(ダイキン工業)

(2) $\sqrt{49}-5\sqrt{25}$　　(ユニチカ)

(3) $\sqrt{81}-2\sqrt{16}$　　(東芝エレベータ)

(4) $\sqrt{3}-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}$　　(デンソー)

1.34 次の計算をせよ.

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ (チバコー)

(2) $3\sqrt{2}-\sqrt{8}$ (JFE ホールディングス)

(3) $3\sqrt{20}-2\sqrt{80}$ (トヨタオート)

(4) $\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$ (トヨタ自動車)

(5) $\sqrt{50}-\sqrt{18}-\sqrt{2}$ (中外製薬)

(6) $\sqrt{3}+\sqrt{27}-4\sqrt{3}$ (日本電気)

(7) $\sqrt{12}+\sqrt{27}-4\sqrt{3}$ (大日本住友製薬)

(8) $2\sqrt{3}-\sqrt{75}+\sqrt{27}$ (三井化学)

(9) $\sqrt{72}-\sqrt{8}-\sqrt{32}$ (京セラ)

(10) $2\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{72}$ (トーエネック)

(11) $\sqrt{12}-5\sqrt{3}+2\sqrt{27}$ (三菱重工)

(12) $\sqrt{200}-3\sqrt{18}+\sqrt{8}$ (フジテック)

(13) $\sqrt{72}-3\sqrt{2}+2\sqrt{8}$ (きんでん)

(14) $3\sqrt{75}-2\sqrt{27}+\sqrt{12}$ (ニコン)

(15) $\sqrt{500}-\sqrt{80}+\sqrt{20}$ (日産自動車)

(16) $\sqrt{108}+\sqrt{27}-\sqrt{192}$ (きんでん)

(17) $\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{48}-5\sqrt{3}$ (葵精機)

(18) $\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{50}+\sqrt{18}$ (九州電力)

(19) $5\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{2}$ (愛知製鋼)

(20) $\sqrt{12}+\sqrt{32}-3\sqrt{48}$ (トプコン)

(21) $\sqrt{36}+\sqrt{72}+\sqrt{50}-3\sqrt{2}$ (九州産交整備)

(22) $3\sqrt{12}-5\sqrt{8}+\sqrt{48}-4\sqrt{32}$ (新日本石油)

1.35 次の計算をせよ.

(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$ (SKR)

(2) $\sqrt{3} \times \sqrt{9}$ (チバコー)

(3) $\sqrt{9}\sqrt{80}$ (住友電気工業)

(4) $2\sqrt{3} \times \sqrt{27}$ (日産ディーゼル)

(5) $\sqrt{25} \times \sqrt{8} \div \sqrt{2}$ (豊和工業)

(6) $\sqrt{42} \div \sqrt{6} \times 2\sqrt{7}$ (住友金属工業)

(7) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{10}$ (富士重工業)

(8) $\sqrt{45} \times \sqrt{27} \div \sqrt{20} \times \sqrt{12}$ (JFE ホールディングス)

(9) $\sqrt{6} \div \sqrt{2} \times \sqrt{3} - 1$ (デンソー)

(10) $\sqrt{6} \times \sqrt{18} - \sqrt{27}$ (東陶機器)

(11) $2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} + 4\sqrt{6}$ (アイシン機工)

(12) $(\sqrt{6} \times \sqrt{12} - \sqrt{2}) \div 5$ (デンソー)

(13) $(\sqrt{27} - \sqrt{12}) \div \sqrt{3}$ (愛知製鋼)

(14) $\sqrt{10}(\sqrt{8}\sqrt{20} - \sqrt{40})$ (日本無線)

(15) $3\sqrt{15}(\sqrt{8}\sqrt{30} - \sqrt{135})$ (日本無線)

(16) $(\sqrt{18} - \sqrt{8})(2\sqrt{2} - 1)$ (ダイハツ工業)

1.36 次の計算をせよ.

(1) $(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$ (デンソー)

(2) $(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$ (きんでん)

(3) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})(4\sqrt{5}-2\sqrt{2})$ (大和ハウス)

(4) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$ (川崎重工業)

(5) $(\sqrt{6}+3\sqrt{2})^2$ (京セラ)

(6) $(\sqrt{2}-1)^2+\sqrt{8}$ (凸版印刷)

(7) $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2+2\sqrt{35}$ (トヨタ自動車)

(8) $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2+\sqrt{60}$ (昭和シェル石油)

(9) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ (山崎製パン)

(10) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ (三共工業)

(11) $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})$ (昭和シェル石油)

(12) $(4-2\sqrt{3})(4+\sqrt{12})$ (日本新金属)

分母の有理化

1 $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$

2 $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

$\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

例 1.27 次の数の分母を有理化せよ.

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$　(2) $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$　(3) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

【解】 (1) $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

(2) $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \dfrac{2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})} = \dfrac{2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-3} = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$

(3) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \dfrac{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{5-3}$

$= \dfrac{8+2\sqrt{15}}{2} = 4+\sqrt{15}$

1.37 次の計算をせよ.

(1) $3\sqrt{12} - \dfrac{24}{\sqrt{3}} + \sqrt{27}$　(KDDI)

(2) $\sqrt{18} - \sqrt{32} + 5\sqrt{\dfrac{1}{2}}$　(ダイハツ工業)

(3) $\dfrac{10\sqrt{2}-\sqrt{50}}{\sqrt{10}}$　(新日本石油)

(4) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$　(新日本製鐵)

(5) $\dfrac{18}{\sqrt{6}} - \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$　(葵精機)

1.38 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (アツギ)

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ (武田薬品工業)

(3) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (日産ディーゼル)

(4) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$ (東亞合成)

(5) $\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ (旭化成)

(6) $\dfrac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ (新日本製鐵)

(7) $\dfrac{\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}-1}$ (新日本製鐵)

(8) $\dfrac{2\sqrt{5}-4\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (凸版印刷)

(9) $(\sqrt{6}+\sqrt{3})\div(\sqrt{6}-\sqrt{3})$ (中国電力)

(10) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\sqrt{3}$ (住友電気工業)

1.39 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ (日立研究所)

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (日本水産)

(3) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (きんでん)

(4) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ (本田技研工業)

(5) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ (大阪ガス)

(6) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ (本田技研工業)

(7) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (トヨタ車体)

(8) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ (日産自動車)

(9) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ (シチズン時計)

(10) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (島津製作所)

例題 1.28 次の式を簡単にせよ.

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$ (2) $\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

【解】 (1)
$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\} \\
&= (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2 \\
&= 2+2\sqrt{6}+3-5 = 2\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\{(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}{\{(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}\}} \\
&= \frac{\{(1-\sqrt{3})+\sqrt{2}\}\{(1-\sqrt{3})-\sqrt{2}\}}{(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{(1-\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}{1-2\sqrt{2}+2-3} = \frac{1-2\sqrt{3}+3-2}{-2\sqrt{2}} = \frac{2-2\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

1.40 次の計算をせよ.

(1) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$ (豊田工機)

(2) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4})$ (協和発酵)

(3) $(\sqrt{5}-\sqrt{3}+2)(\sqrt{5}+\sqrt{3}-2)$ (東洋紡績)

(4) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ (NEC フィールディング)

(5) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (NEC フィールディング)

(6) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}$ (ダイハツ工業)

根号を2重に含む式について考えてみよう．

たとえば，$\sqrt{3}+\sqrt{2}>0$，$\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$ であるから

$$\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2},\quad \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

である．ここで

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2=(3+2)+2\sqrt{3\cdot 2}$$
$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{3}\sqrt{2}+2=(3+2)-2\sqrt{3\cdot 2}$$

であるから，次のことが成り立つ．

$$\sqrt{(3+2)+2\sqrt{3\cdot 2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$
$$\sqrt{(3+2)-2\sqrt{3\cdot 2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

一般に，次のことが成り立つ．

2重根号

$\boldsymbol{a>0,\ b>0}$　**のとき**　$\boldsymbol{\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$\boldsymbol{a>b>0}$　**のとき**　$\boldsymbol{\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

例題 1.29 次の式を，2重根号をはずして簡単にせよ．

(1) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$　　(2) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$　　(2) $\sqrt{4+\sqrt{15}}$

【解】 (1) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\cdot 3}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7-2\sqrt{2^2\cdot 3}}=\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4\cdot 3}}$
$=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{4+\sqrt{15}}=\sqrt{\dfrac{8+2\sqrt{15}}{2}}=\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$

1.41 次の式を計算せよ.

(1) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$ (マツダ)

(2) $\sqrt{11+2\sqrt{18}}$ (大阪ガス)

(3) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$ (日本電気)

(4) $\sqrt{14-2\sqrt{48}}$ (JR)

(5) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$ (三菱電機エンジニアリング)

(6) $\sqrt{5-\sqrt{24}}$ (マツダ)

(7) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ (デンソー)

(8) $\sqrt{17-4\sqrt{15}}$ (ニコン)

(9) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ (九州電力)

(10) $\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (東芝)

(11) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{28-2\sqrt{75}}$ (シチズン時計)

(12) $\sqrt{4-\sqrt{15}}$ (東芝)

(13) $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$ (東ソー)

1.42 次の問いに答えよ.

(1) $\sqrt{2}=a,\ \sqrt{3}=b$ のとき $\sqrt{7+\sqrt{24}}$ を $a,\ b$ を用いて表せ. (NEXCO)

(2) $x=\sqrt{2}$ のとき $\dfrac{\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-2x}}{\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-2x}}$ の値を求めよ. (東京ガス)

(3) $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $\dfrac{1-a}{1-\sqrt{1+a}}+\dfrac{1+a}{1+\sqrt{1-a}}$ の値を求めよ. (NTT)

例題 1.30 $x=\sqrt{2}+1$ のとき x^3-x^2-x+1 の値を求めよ. (東亜道路工業)

【解】 $x-1=\sqrt{2}$ であるから，両辺を平方すると

$$x^2-2x+1=2 \quad すなわち \quad x^2=2x+1$$

したがって

$$\begin{aligned} x^3-x^2-x+1 &= x^2(x-1)-x+1 \\ &= (2x+1)(x-1)-x+1=2x^2-2x \\ &= 2(2x+1)-2x=2x+2 \\ &= 2(\sqrt{2}+1)+2=2\sqrt{2}+4 \end{aligned}$$

1.43 次の問いに答えよ.

(1) $x=\sqrt{2}-1$ のとき x^3+2x^2-x+1 の値を求めよ. (ニコン)

(2) $x=2+\sqrt{3}$ のとき $\dfrac{x^3+x^2-4x+1}{2x}$ の値を求めよ. (三菱化工機)

例題 1.31 $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$, $y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ のとき，次の値を求めよ.

(1) $x+y$ (2) xy (3) x^2+y^2 (4) x^3+y^3

【解】 (3)，(4) は，(1)，(2) の結果を利用する.

(1) $x+y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{(\sqrt{5}+1)^2+(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=3$

(2) $xy=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\times\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=1$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\cdot 1=7$

(4) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=3^3-3\cdot 3\cdot 1=18$

1.44 $x = \dfrac{1}{2}(\sqrt{10}+\sqrt{2}),\ y = \dfrac{1}{2}(\sqrt{10}-\sqrt{2})$ のとき，次の値を求めよ．(三井化学)

(1) $x+y$ (2) xy (3) x^2-xy+y^2 (4) x^3+y^3

1.45 次の問いに答えよ．

(1) $x = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2},\ y = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ のとき x^2+xy+y^2 を求めよ． (佐世保重工業)

(2) $x = \dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2},\ y = \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ のとき x^2+xy+y^2 の値を求めよ．(三菱重工)

(3) $x = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}},\ y = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき，x^2+y^2，$(x-y)^2$ の値を求めよ．

(ボッシュ)

(4) $x = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},\ y = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ のとき $x^3+y^3,\ x^2+3xy+y^2$ の値を求めよ．

(日本鉄塔工業)

1.46 次の問いに答えよ．

(1) $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{3}}{x+y}+\sqrt{xy}$，$x^2y+xy^2$ の値を求めよ．

(トヨタ自動車)

(2) $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{5}$，$y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{5}$ のとき $\sqrt{x^2-xy+y^2}$ の値を求めよ．

(ダイハツ工業)

例題 1.32 $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$ の整数部分が a，小数部分が b のとき，次の問いに答えよ．

(1) a，b の値を求めよ．　　(2) $\dfrac{a}{b}$ の値を求めよ．

【解】 (1) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\sqrt{5}+1$

$2<\sqrt{5}<3$ であるから　$3<\sqrt{5}+1<4$ より　$a=3$

$a+b=\sqrt{5}+1$ より　$b=(\sqrt{5}+1)-a=\sqrt{5}-2$

(2) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=3\sqrt{5}+6$

1.47 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，b の値を求めよ．また，$(a+b)^2-ab$ の値を求めよ．

(トヨタ自動車)

1.3 方程式と不等式

1.3.1 1次方程式と1次不等式

等式の性質

1 $A = B$ ならば $A + C = B + C$

2 $A = B$ ならば $A - C = B - C$

3 $A = B$ ならば $AC = BC$

4 $A = B$ ならば $\dfrac{A}{C} = \dfrac{B}{C}$ (ただし $C \neq 0$)

例 1.33 1次方程式 $5x - 4 = 11$ を解け.

【解】 $5x - 4 = 11$

移項すると $5x = 11 + 4$

すなわち $5x = 15$

両辺を5で割って $x = 3$

$5x\underline{\mathbf{-4}} = 11$

移項 → **符号が変わる**

$5x \quad = 11\underline{\mathbf{+4}}$

1.48 次の1次方程式を解け.

(1) $3x + 2 = 2x + 3$ (住友電気工業)

(2) $3x + 5 = 10 + 2x$ (小松製作所)

(3) $5x - 2 + 3x = 14$ (コクヨ)

(4) $5x - 7 = 2x + 29$ (ダイハツ工業)

(5) $5x - 8 = 2x - 2$ (セガミ)

(6) $5x - 4 = -9x + 38$ (太平洋セメント)

(7) $x - 3 = 3x - 15$ (ニホンゲンマ)

(8) $-8x - 30 = -3x$ (日産自動車)

(9) $3 - 7x = 3x - 2$ (タイトー)

(10) $0.5x + 3.5 = 0.25x + 3$ (凸版印刷)

1.49 次の 1 次方程式を解け.

(1) $4(x-3)=3(x-2)$ (住友ゴム工業)

(2) $2(x+1)=3x+4$ (東京ガス)

(3) $3(x-2)-5=-x+1$ (住友金属工業)

(4) $5x-2(4x-3)=18$ (昭和シェル石油)

(5) $2x-4=7x-(x-8)$ (東京ガス)

(6) $2x-2\{x-(1-x)\}=3x-8$ (いすゞ自動車)

(7) $3x-[8x+6-\{7x-(5x+12)\}]=0$ (三共)

(8) $0.5(3-x)-4(0.3x+0.65)+7.9=0$ (ヤマハ発動機)

(9) $(2x+5):(2x-5)=13:3$ (石川島播磨重工業)

(10) $x(x-3)=x(x-6)+9$ (沖電気工業)

(11) $(x-1)^2+2=(x-1)(x-3)$ (東亞合成)

(12) $\dfrac{2x+1}{3}=\dfrac{1+x}{2}$ (三菱電機)

(13) $1-\dfrac{x-2}{6}=3-\dfrac{x}{2}$ (ジェイティービー)

(14) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{4-x}{3}=\dfrac{5}{6}$ (マリネックス)

(15) $\dfrac{6x+2}{3}-\dfrac{4x-4}{6}=1$ (日産自動車)

(16) $\dfrac{2x-8}{11}-\dfrac{2x-6}{12}=\dfrac{5}{6}$ (住友倉庫)

(17) $\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{2(x+5)}{7}=-x+1$ (トヨタ自動車)

(18) $\dfrac{3x-5}{5}-\dfrac{7x-13}{6}=3-\dfrac{x+3}{2}$ (沖電気工業)

例題 1.34 $1-\dfrac{x+b}{3}=2x$ の解が $x=-1$ のとき，b の値を求めよ.　(三共)

【解】 $x=-1$ は $1-\dfrac{x+b}{3}=2x$ の解であるから

$$1-\frac{-1+b}{3}=2\cdot(-1)\quad\text{を解いて}\quad b=10$$

1.50 次の問いに答えよ.

(1) $3ax+a-1=25$ の解が $x=4$ のとき，a の値を求めよ.　(京王電鉄)

(2) $\dfrac{ax-2}{3}-\dfrac{x-3a}{5}=1$ の解が $x=-3$ のとき a の値を求めよ.　(新日本製鐵)

方程式 $ax=b$ の解

[1] $a\neq 0$　**のとき**　$x=\dfrac{b}{a}$

[2] $a=0,\ b\neq 0$　**のとき**　**解なし**

[3] $a=0,\ b=0$　**のとき**　**すべての数**

例題 1.35 x の方程式 $a^2x+1=x+a$ を解け.　(日立マクセル)

【解】

$$\begin{aligned}a^2x+1&=x+a\\(a^2-1)x&=a-1\\(a+1)(a-1)x&=a-1\end{aligned}$$

$$\text{したがって}\quad\begin{cases}a\neq 1,\ -1 & \text{のとき}\quad x=\dfrac{1}{a+1}\\ a=-1 & \text{のとき}\quad \text{解なし}\\ a=1 & \text{のとき}\quad \text{すべての数}\end{cases}$$

1.51 x の方程式 $(a-4)(a-1)x=a-2(x+1)$ を解け.　(ニコン)

不等式の性質

1　$A < B$　ならば　$A + C < B + C$

2　$A < B$　ならば　$A - C < B - C$

3　$A < B,\quad C > 0$　ならば　$AC < BC,\quad \dfrac{A}{C} < \dfrac{B}{C}$

4　$A < B,\quad C < 0$　ならば　$AC > BC,\quad \dfrac{A}{C} > \dfrac{B}{C}$

「不等式の性質」の **1**〜**3** は，69 ページにある「等式の性質」の **1**〜**4** での等号 $=$ を不等号 $<$ にそのまま変えただけである．

しかし，**4** についてはそうではないので，注意しよう．

例 1.36　1 次不等式 $3x + 11 > 7x - 1$ を解け．

【解】　　$3x + 11 > 7x - 1$

移項すると　$3x - 7x > -1 - 11$

整理すると　$-4x > -12$

両辺を -4 で割ると　$x < 3$　　$\longleftarrow$ 不等号の向きに注意

1.52　次の 1 次不等式を解け．

(1)　$x + \dfrac{1}{2} > 1$　(大日本インキ化学工業)

(2)　$-x + 3 < -1$　(富士通ビジネスシステム)

(3)　$-3x + 2 < 5$　(東芝)

(4)　$3x + 5 < x - 2$　(石川島播磨重工業)

(5)　$x + 3 > -3x + 7$　(デンソー)

(6)　$x - 6 < 4x - 3$　(山武)

(7)　$4x - 3 > 7x - 6$　(トーエネック)

1.53 次の 1 次不等式を解け.

(1) $2(x+1) \leqq 4(x+2)$ (富士電機ホールディングス)

(2) $30 + \dfrac{5}{6}x \leqq x + 14$ (デンソー)

(3) $-\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{3} < \dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{12}$ (住友軽金属)

(4) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{3}x < 26 - \dfrac{3}{5}x$ (日本毛織)

(5) $\dfrac{x+1}{2} > 2(x+1)$ (YKK)

(6) $\dfrac{x-3}{4} + \dfrac{6-x}{2} > x$ (アマダ)

(7) $\dfrac{x+3}{5} - \dfrac{4x-2}{15} + 2x > 0$ (日本電線工業)

(8) $\dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{5-x}{2} > \dfrac{2}{3} + \dfrac{7(x-2)}{6}$ (ニコン)

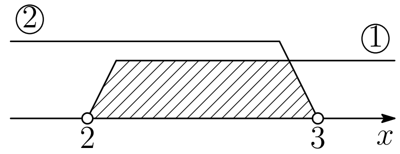
例題 1.37 次の連立不等式を解け. ((1) 東京ガス, (2) 中川電機)

(1) $\begin{cases} 2x-3>x-1 \\ x+5>4x-4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5x+7<6x-3 \\ 3x-5 \geqq 5x+3 \end{cases}$

【解】 (1) $2x-3>x-1$ から $x>2$ $\cdots$①

$x+5>4x-4$ から $x<3$ $\cdots$②

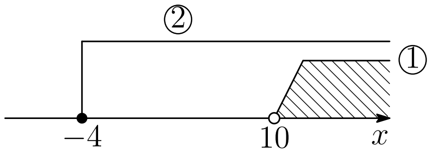
① と ② の共通範囲を求めて $2<x<3$



(2) $5x+7<6x-3$ から $x>10$ $\cdots$①

$3x-5 \geqq 5x+3$ から $x \geqq -4$ $\cdots$②

① と ② の共通範囲を求めて $x>10$



1.54 次の連立不等式を解け.

(1) $\begin{cases} 2x+4>x-5 \\ 3x+5>2x+7 \end{cases}$ (中川電機)

(2) $\begin{cases} 27-5x<60+6x \\ 7x+6<5x+10 \end{cases}$ (ダイハツ工業)

(3) $\begin{cases} 2x+3 \geqq 5x-15 \\ \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x}{3}>3 \end{cases}$ (愛知製鋼)

(4) $\begin{cases} \dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{6} \geqq \dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2} \\ 6-\dfrac{x}{3}>2-\dfrac{x}{7} \end{cases}$ (大阪ガス)

(5) $\begin{cases} 3x+8 \geqq 5x+2 \\ x-\dfrac{2}{3}<3(x-1)+\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (東京ガス)

(6) $\begin{cases} \dfrac{x-16}{3}>\dfrac{x-10}{7} \\ 4+x>x+\dfrac{x-12}{3} \end{cases}$ (日立家電販売)

(7) $4x-6<3x+5<8x+5$ (ニコン)

1.3.2　絶対値と方程式・不等式

55 ページの絶対値の性質をもとに，絶対値を含む方程式，不等式について考えよう．実数 a の絶対値 $|a|$ は，その定義より，次のようになる．

絶対値 $|\,\boldsymbol{a}\,|$ の意味

$a \geqq 0$ のとき $|\,\boldsymbol{a}\,| = \boldsymbol{a}$,　　$a < 0$ のとき $|\,\boldsymbol{a}\,| = -\boldsymbol{a}$

例 1.38　(1) $|\,3-\sqrt{5}\,| = 3-\sqrt{5}$　　$\longleftarrow 3-\sqrt{5}>0$

$|\,1-\sqrt{2}\,| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2}$　　$1-\sqrt{2}<0$

(2) $|\,x-1\,|$ の絶対値記号をはずす．

$x-1 \geqq 0$ のとき　$|\,x-1\,| = x-1$

$x-1 < 0$ のとき　$|\,x-1\,| = -(x-1) = -x+1$

よって　$x \geqq 1$ のとき　$|\,x-1\,| = x-1$

$x < 1$ のとき　$|\,x-1\,| = -x+1$

例 1.38(2) の結果を利用して，次の方程式を解いてみよう．

例題 1.39　方程式 $|\,x-1\,| = 2-3x$ を解け．　　(ブラザー工業)

【解】 $x \geqq 1$ と $x < 1$ の場合に分けて方程式を解く．

[1]　$x \geqq 1$ のとき，$|x-1| = x-1$ であるから

方程式は　$x-1 = 2-3x$

これを解いて　$x = \dfrac{3}{4}$

これは，$x \geqq 1$ に反するから，解ではない．

[2]　$x < 1$ のとき，$|x-1| = -x+1$ であるから

方程式は　$-x+1 = 2-3x$

これを解いて　$x = \dfrac{1}{2}$

これは，$x < 1$ を満たすから，解である．

したがって，求める解は　$x = \dfrac{1}{2}$

例題 1.40 方程式 $|x+3|+|2-x|=x+4$ を解け. (九州電力)

【解】 $|2-x|=|-(x-2)|=|x-2|$ であるから，次の方程式を解けばよい.

$$|x+3|+|x-2|=x+4$$

[1] $x<-3$ のとき，$|x+3|=-x-3$，$|x-2|=-x+2$ であるから
方程式は $(-x-3)+(-x+2)=x+4$
これを解いて $x=-\dfrac{5}{3}$
これは，$x<-3$ に反するから，解ではない.

[2] $-3 \leqq x < 2$ のとき，$|x+3|=x+3$，$|x-2|=-x+2$ であるから
方程式は $(x+3)+(-x+2)=x+4$
これを解いて $x=1$
これは，$-3 \leqq x < 2$ を満たすから，解である.

[3] $2 \leqq x$ のとき，$|x+3|=x+3$，$|x-2|=x-2$ であるから
方程式は $(x+3)+(x-2)=x+4$
これを解いて $x=3$
これは，$2 \leqq x$ を満たすから，解である.

したがって，求める解は $x=1,\ 3$

1.55 次の方程式を解け.

(1) $3x+2|x|=5$ (日立製作所)

(2) $|x-1|=2x$ (武田薬品工業)

(3) $|x-5|=7-3x$ (日立家電販売)

(4) $|x+4|+2|x-2|=9$ (NHK)

(5) $|x-2|+3|x+1|=13$ (大同特殊鋼)

$|\,x\,|$ は数直線上で x に対応する点と原点との距離であるから，次のことがいえる．

絶対値を含む方程式・不等式

$c>0$ のとき

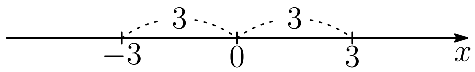
方程式 $\boldsymbol{|\,x\,|=c}$ **の解は**　　$\boldsymbol{x=\pm c}$

不等式 $\boldsymbol{|\,x\,|<c}$ **の解は**　　$\boldsymbol{-c<x<c}$

不等式 $\boldsymbol{|\,x\,|>c}$ **の解は**　　$\boldsymbol{x<-c,\ \ c<x}$

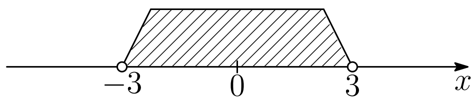
例 1.41　(1) 方程式 $|\,x\,|=3$ の解は

$$x=\pm 3$$



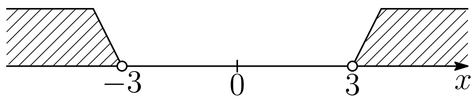
(2) 不等式 $|\,x\,|<3$ の解は

右の図より　$-3<x<3$



(3) 不等式 $|\,x\,|>3$ の解は

右の図より　$x<-3,\ 3<x$



例題 1.42 次の方程式，不等式を解け．

(1)　$|\,x-2\,|=3$　　　(2)　$|\,x-2\,|<3$　　　(3)　$|\,x-2\,|>3$

【解】
(1)　$x-2=\pm 3$ から　　$x=5,\ \ -1$
(2)　$-3<x-2<3$ から　　$-1<x<5$
(3)　$x-2<-3,\ \ 3<x-2$ から　　$x<-1,\ \ 5<x$

1.56 次の不等式を解け．

(1)　$|\,x-1\,|<3$　　(東芝)

(2)　$|\,x-2\,|<5$　　(清水建設)

(3)　$|\,2x-1\,|<3$　　(旭化成)

(4)　$|\,x-1\,|-\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{1}{2}x$　　(東京ガス)

[解説] 1.56(4) は　$|\,x-1\,|\leqq\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ であるから

$$-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\leqq x-1\leqq\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

を解けばよい．

1.3.3　2次方程式

数の積の性質

$$AB = 0 \quad \text{ならば} \quad A = 0 \quad \text{または} \quad B = 0$$

例 1.43 2次方程式 $x^2 - 2x - 15 = 0$ を解け.

【解】 左辺を因数分解すると　$(x+3)(x-5) = 0$

よって　$x + 3 = 0$　または　$x - 5 = 0$

したがって，解は　$x = -3,\ 5$

1.57 次の2次方程式を解け.

(1) $x^2 + 4x = 0$　(関西電力)

(2) $x^2 + 3x = 0$　(ブラザー工業)

(3) $x^2 - x - 12 = 0$　(ダイハツ工業)

(4) $x^2 - 4x + 3 = 0$　(京浜急行電鉄)

(5) $x^2 + 5x + 6 = 0$　(デンソー)

(6) $x^2 - 8x + 15 = 0$　(住友金属工業)

(7) $x^2 + 3x - 40 = 0$　(大隅鉄工)

(8) $x^2 - 13x + 36 = 0$　(西日本プラント工業)

(9) $x^2 - 2x + 1 = 0$　(山崎製パン)

(10) $x^2 + 2x + 1 = 0$　(富士通)

(11) $x^2 + 2x - 20 = 4$　(豊田工機)

(12) $x^2 - 16x = 36$　(ダイハツ工業)

(13) $x^2 - 3x + 1 = 5$　(東芝)

(14) $2x^2 - 10x + 12 = 0$　(ダイハツ工業)

(15) $(x+4)(x+3) = 6$　(京阪電気鉄道)

(16) $28 + (2x+8)(x-5) = (3x+3)(2x+4)$　(東京急行電鉄)

例 1.44 2 次方程式 $3x^2+5x-2=0$ を解け.

【解】 左辺を因数分解すると $(x+2)(3x-1)=0$

よって $x+2=0$ または $3x-1=0$

したがって，解は $x=-2,\ \dfrac{1}{3}$

1.58 次の 2 次方程式を解け.

(1) $2x^2+5x+2=0$ (トヨタ自動車)

(2) $2x^2-5x+2=0$ (オリエント時計)

(3) $2x^2+x-1=0$ (東芝)

(4) $2x^2-5x-12=0$ (日本水産)

(5) $2x^2-9x+4=0$ (住友金属工業)

(6) $2x^2+11x-6=0$ (東芝機械)

(7) $2x^2+15x+7=0$ (日本毛織)

(8) $3x^2+2x-5=0$ (きんでん)

(9) $3x^2-7x+2=0$ (共栄工業)

(10) $5x^2+18x-8=0$ (きんでん)

(11) $5x^2-17x-12=0$ (トーエネック)

(12) $6x^2-5x+1=0$ (きんでん)

(13) $6x^2+5x-6=0$ (日本無線)

(14) $6x^2+19x+10=0$ (愛知機械工業)

(15) $6x^2-13x+6=0$ (玉野エンジニアリング)

(16) $8x^2-3x+1=2x^2+4x+6$ (住友電気工業)

(17) $0.3x^2-0.5x-1.2=0$ (コニカミノルタホールディングス)

(18) $(x+1)(2x+3)=4x^2+5$ (小田急電鉄)

平方根の考えを使う解き方

$a>0$ のとき，$x^2=a$ の解は　$\boldsymbol{x=\pm\sqrt{a}}$

例 1.45 次の 2 次方程式を解け.

(1) $9x^2=5$　　(2) $(x-5)^2=121$

【解】 (1) $9x^2=5$ の解は，$x^2=\dfrac{5}{9}$ から

$$x=\pm\sqrt{\frac{5}{9}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

(2) $(x-5)^2=121$ の解は，$x-5=\pm11$ から

$$x=5\pm11=16,-6$$

1.59 次の 2 次方程式を解け.

(1) $(x-2)^2=9$ (日産自動車)

(2) $(x-1)^2=144$ (三菱鉛筆)

例題 1.46 次の 2 次方程式を，$(x+m)^2=a$ の形に変形して解け.

$$x^2+6x-391=0$$

【解】

$$x^2+2{\cdot}3x=391$$　① $[x^2+2mx=$ 定数$]$ の形にする.

$$x^2+2{\cdot}3x+3^2=391+3^2$$　② 両辺に m^2 をたす.

$$(x+3)^2=400$$　③ $(x+m)^2=a$ の形にする.

$$x+3=\pm20$$

$$x=17,-23$$

1.60 次の 2 次方程式を解け.

(1) $x^2+2x-255=0$ (電源開発)

(2) $x^2-2x-255=0$ (電源開発)

(3) $x^2-x-3.75=0$ (日本ビクター)

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は，$b^2 - 4ac \geqq 0$ のとき解をもち，その解は

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

とくに $b = 2b'$ ならば $\boldsymbol{x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}}$

例 1.47 次の 2 次方程式を解け.

(1) $3x^2 - 5x - 1 = 0$　(2) $x^2 + 8x + 9 = 0$

【解】 (1) $x = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4{\cdot}3{\cdot}(-1)}}{2{\cdot}3} = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$

(2) $x^2 + 2{\cdot}4x + 9 = 0$ より $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 1{\cdot}9}}{1} = -4 \pm \sqrt{7}$

1.61 次の 2 次方程式を解け.

(1) $x^2 - 7x + 11 = 0$ (富士重工業)

(2) $2x^2 + 7x - 3 = 0$ (愛知時計電機)

(3) $3x^2 - 10x + 5 = 0$ (日野自動車)

(4) $2x^2 - 5x + 1 = 0$ (日本タングステン)

(5) $3x^2 - 8x + 2 = 0$ (日本無線)

(6) $0.5x^2 + 0.25x = 1.25$ (住友電気工業)

(7) $(3x - 1)(x + 3) = 1$ (石川島播磨重工業)

(8) $3(x^2 + 1) = 11x$ (凸版印刷)

例題 1.48 x の2次方程式 $x^2 - ax + 2a - 4 = 0$ が3を解にもつとき，定数 a の値と他の解を求めよ．

【解】 3がこの方程式の解であるから

$$3^2 - a \cdot 3 + 2a - 4 = 0$$

これを解くと　$a = 5$
このとき，方程式は　$x^2 - 5x + 6 = 0$
左辺を因数分解すると　$(x-2)(x-3) = 0$
したがって　$x = 2,\ 3$　(答) $a = 5$，他の解 2

1.62 次の問いに答えよ．

(1) 2次方程式 $x^2 + 3x - a = 0$ の1つの解が3のとき，もう1つの解を求めよ．
(JFE ホールディングス)

(2) $x = -1$ が $x^2 + ax + 2 = 0$ の解であるとき，この方程式のもう1つの解を求めなさい．
(新日本製鐵)

(3) 2次方程式 $2x^2 - ax - 6 = 0$ の1つの解が $-\dfrac{1}{2}$ であるとき，他の1つの解を求めよ．
(シャープ)

(4) x に関する2次方程式 $x^2 - mx - 3(m+5) = 0$ の1つの解が3であるとき，他の1つの解を求めよ．
(ニコン)

(5) x に関する2次方程式 $(a-1)x^2 - (a^2+1)x + 2(a+1) = 0$ の1つの解が2であるとき，a の値と他の解を求めよ．
(日産自動車)

2 次方程式の係数と実数の解

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数の解は，b^2-4ac の符号によって次のように分類される．$b^2-4ac=0$ のときは，2 つの解が重なったものと考えて，この解を**重解**という．

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数の解と b^2-4ac の符号			
b^2-4ac の符号	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
実数の解	$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (異なる 2 つの解)	$-\dfrac{b}{2a}$ (重解)	ない

[注意] $D=b^2-4ac$ とおくと，$b=2b'$ のとき
$D=(2b')^2-4ac=4(b'^2-ac)$　すなわち　$D/4=b'^2-ac$

例題 1.49 x の 2 次方程式 $x^2+mx+2m-3=0$ が重解をもつとき，定数 m の値を求めよ．

【解】 重解をもつための条件は，係数について

$$m^2-4\cdot1\cdot(2m-3)=0 \qquad \longleftarrow D=b^2-4ac=0$$
$$m^2-8m+12=0$$

が成り立つことである．
これを解いて　　$m=2,\ 6$

1.63 次の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $x^2+2kx+8k+9=0$ が重解をもつように，k の値を定めよ．
(ニコン)

(2) $(m+2)x^2+(m-3)x+(2m-3)=0$ が重解をもつように，m の値を定めよ．
(神戸製鋼所)

(3) $x^2-2(2k-1)x+k^2-2k+2=0$ が重解をもつように，k の値を定めよ．
(川崎重工業)

(4) 2 次方程式 $x^2-2m(x-4)-15=0$ が重解をもつように，m の値を定めよ．
(いすゞ自動車)

例題 1.50 正方形の縦の長さを3cm長くし，横の長さを2cm短くした長方形の面積が 50cm^2 のとき，もとの正方形の1辺の長さを求めよ．

【解】 もとの正方形の1辺の長さを x cm とすると，長方形の縦の長さは $(x+3)$cm，横の長さは $(x-2)$cm であるから

$$(x+3)(x-2)=50$$

整理すると　$x^2+x-56=0$

よって　$(x+8)(x-7)=0$

したがって　$x=-8,\ 7$　$\cdots$ ①

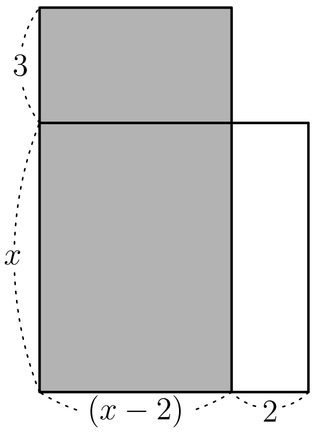
辺の長さは正であるから

$$x>0 \text{ かつ } x+3>0 \text{ かつ } x-2>0$$

よって　$x>2$

① のうち，$x>2$ に適するのは　$x=7$

よって，もとの正方形の1辺の長さは　7cm



1.64 次の問いに答えよ．

(1) 長さ24cmの針金を折り曲げて長方形をつくり，その面積が 27cm^2 となるようにするには，2辺の長さをそれぞれいくらにすればよいか．(日産ディーゼル)

(2) ある2つの正方形を合わせた土地がある．その広さは 369m^2 で，その大きい方の正方形の1辺は，小さい方の正方形の1辺より3mだけ長いという．この2つの正方形の土地の1辺の長さは，それぞれ何mか．(武田薬品工業)

(3) 横の長さが縦の長さより4mだけ短い長方形がある．この長方形の横，縦の長さをいずれも3mずつ短くするとその面積はもとの面積の半分よりも 9m^2 だけ小さくなるという．もとの長方形の面積を求めよ．(昭和電線電纜)

(4) 横が縦より5cm短い長方形の四隅を3cm×3cmずつ切り離し，フタのない箱を作った時の容量は 72cm^3 だった．このとき，長方形の縦と横の長さを求めなさい．(日立研究所)

1.3.4 連立方程式

例題 1.51 次の連立方程式を解け.

((1) ダイハツ工業，(2) キャプティ，(3) きんでん)

(1) $\begin{cases} x+y=8 \\ x-2y=-1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x+2y=13 \\ 5x-3y=9 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} \dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{2}=4 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=12 \end{cases}$

【解】 (1) $x+y=8\cdots$①，$x-2y=-1\cdots$② とおく.

①－② から

$$\begin{array}{rrrl} & x\ +y= & 8 & \cdots① \\ -) & x\ -2y= & -1 & \cdots② \\ \hline & 3y= & 9 & \end{array}$$

ゆえに $y=3$

これを ① に代入して $x+3=8$ すなわち $x=5$

よって $x=5$，$y=3$

(2) $3x+2y=13\cdots$①，$5x-3y=9\cdots$② とおく.

①$\times 3+$②$\times 2$ から

$$\begin{array}{rrrl} & 9x\ +6y= & 39 & \cdots①\times 3 \\ +) & 10x\ -6y= & 18 & \cdots②\times 2 \\ \hline & 19x\qquad = & 57 & \end{array}$$

ゆえに $x=3$

これを ① に代入して $3{\cdot}3+2y=13$ すなわち $y=2$

よって $x=3$，$y=2$

(3) 第 1 式に 10 を掛けたものを，第 2 式に 6 を掛けたものを，それぞれ

$2x-5y=40\cdots$①，$2x-3y=72\cdots$② とおく.

①－② から

$$\begin{array}{rrrl} & 2x\ -5y= & 40 & \cdots① \\ -) & 2x\ -3y= & 72 & \cdots② \\ \hline & -2y= & -32 & \end{array}$$

ゆえに $y=16$

これを ① に代入して $2x-5{\cdot}16=40$ すなわち $x=60$

よって $x=60$，$y=16$

1.65 次の連立方程式を求めよ.

(1) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ y = 3 - x \end{cases}$ (住友大阪セメント)

(2) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{cases}$ (トヨタ車体)

(3) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (日産車体)

(4) $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ (住友金属工業)

(5) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$ (オーツタイヤ)

(6) $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 6x + 3y = 27 \end{cases}$ (メイテック)

(7) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 6y = 14 \end{cases}$ (ダイキン工業)

(8) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$ (JFE ホールディングス)

(9) $\begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ 2x + 3y = 19 \end{cases}$ (きんでん)

(10) $\begin{cases} 2x + 3y = 1.5 \\ 8x - 9y = -15 \end{cases}$ (東洋電装)

(11) $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{3}y = 5 \\ \dfrac{1}{2}x + y = 4 \end{cases}$ (コニカミノルタホールディングス)

(12) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{3} - x = -4 \\ 5x - 6y = 37 \end{cases}$ (日本建工)

例題 1.52　連立方程式 $\begin{cases} \dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{y}=2 \\ \dfrac{15}{x}+\dfrac{6}{y}=2\dfrac{1}{2} \end{cases}$ を解け.　(NEC システム建設)

【解】 $\dfrac{1}{x}=a,\ \dfrac{1}{y}=b$ とおくと

$$\begin{cases} 5a+3b=2 & \cdots ① \\ 15a+6b=2\dfrac{1}{2} & \cdots ② \end{cases}$$

①, ② を解いて　$a=-\dfrac{3}{10},\ b=\dfrac{7}{6}$

辺々の逆数をとって　$x=-\dfrac{10}{3},\ y=\dfrac{6}{7}$

1.66 次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}=3 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=15 \end{cases}$　(シャープ)

(2) $\begin{cases} \dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=3 \\ \dfrac{15}{x}+\dfrac{3}{y}=4 \end{cases}$　(間組)

(3) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-5}+\dfrac{1}{y+6}=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{3}{x-5}+\dfrac{2}{y+6}=1 \end{cases}$　(九電工)

3文字を含む1次方程式を3つ組み合わせた連立方程式を**連立3元1次方程式**という．連立3元1次方程式の解き方は，次のようになる．

連立3元1次方程式の解き方

① 1文字を消去して，残りの2文字の連立方程式を導く．

② 2文字の連立方程式を解く．

③ 残りの1文字の値を求める．

例題 1.53 次の連立方程式を解け． ((1) シチズン時計，(2) ダイフク)

(1) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y+4z=13 \\ x+3y+9z=24 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x-y+z=6 \\ x+3y+2z=13 \end{cases}$

【解】 (1) $x+y+z=6 \cdots$①，$x+2y+4z=13 \cdots$②，$x+3y+9z=24 \cdots$③ とおく

$$\begin{array}{rrrrl} & x & +2y & +4z = & 13 & \cdots ② \\ -) & x & +y & +z = & 6 & \cdots ① \\ \hline & & y & +3z = & 7 & \cdots ④ \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrl} & x & +3y & +9z = & 24 & \cdots ③ \\ -) & x & +2y & +4z = & 13 & \cdots ② \\ \hline & & y & +5z = & 11 & \cdots ⑤ \end{array}$$

④，⑤ を解くと $y=1,\ z=2$

これらを ① に代入して $x=3$

よって $x=3,\ y=1,\ z=2$

(2) $x+2y-z=5 \cdots$①，$2x-y+z=6 \cdots$②，$x+3y+2z=13 \cdots$③ とおく

$$\begin{array}{rrrrl} & x & +2y & -z = & 5 & \cdots ① \\ -) & 2x & -y & +z = & 6 & \cdots ② \\ \hline & 3x & +y & = & 11 & \cdots ④ \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrl} & 4x & -2y & +2z = & 12 & \cdots ② \times 2 \\ -) & x & +3y & +2z = & 13 & \cdots ③ \\ \hline & 3x & -5y & = & -1 & \cdots ⑤ \end{array}$$

④，⑤ を解くと $x=3,\ y=2$

これらを ② に代入して $z=2$

よって $x=3,\ y=2,\ z=2$

1.67 次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} a-b-c=2 \\ a+b+c=-4 \\ a-b+c=-8 \end{cases}$ (きんでん)

(2) $\begin{cases} z+2x=10 \\ y+2z=16 \\ x+2y=10 \end{cases}$ (大末建設)

(3) $\begin{cases} 3x+3y=9 \\ 2x+3z=11 \\ 3y+2z=12 \end{cases}$ (凸版印刷)

(4) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y+z=7 \\ x+3y-2z=1 \end{cases}$ (名鉄自動車整備)

(5) $\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x+3y+z=18 \\ x+2y+z=14 \end{cases}$ (日本設備工業)

(6) $\begin{cases} 3x+y+z=-5 \\ 4x+3y-z=-2 \\ 5x+4y+z=6 \end{cases}$ (三菱自動車)

(7) $\begin{cases} x+2y+4z=15 \\ x+y+z=9 \\ x+3y+9z=23 \end{cases}$ (九州電力)

(8) $\begin{cases} 6x+2y-3z=10 \\ 2x+7y+2z=28 \\ 8x-4y-z=12 \end{cases}$ (ヤマハ発動機)

(9) $\begin{cases} 2x+3y+6z=48 \\ 9x+6y+z=56 \\ 5x+4y+3z=46 \end{cases}$ (近畿コンクリート工業)

(10) $\begin{cases} x-2y+3z=18 \\ 3x+y-2z=6 \\ 2x-3y+z=12 \end{cases}$ (ニチボー)

1.68 次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x-y=3 \\ y=z-1 \end{cases}$ (日産自動車)

(2) $\begin{cases} x+y+z=-8 \\ 3x=2y+z \\ x-2y+3z=2 \end{cases}$ (デンソー)

(3) $\begin{cases} x+y+z=30 \\ \frac{x}{8}=\frac{y}{5}=\frac{z}{2} \end{cases}$ (日本電気)

(4) $\dfrac{4x+3y}{4}=\dfrac{3y+2z}{3}=\dfrac{x+2z}{2}=5$ (味の素)

(5) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=11 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=6 \\ \dfrac{3}{z}+\dfrac{1}{x}=12 \end{cases}$ (日立造船)

(6) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=9 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}+\dfrac{2}{z}=28 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{5}{z}=19 \end{cases}$ (前田建設工業)

例題 1.54 連立方程式 $\begin{cases} x+y+z=11 & \cdots ① \\ y+z+u=17 & \cdots ② \\ z+u+x=15 & \cdots ③ \\ u+x+y=14 & \cdots ④ \end{cases}$ を解け. (日本硝子工業)

【解】 ① から ④ の辺々を加えると

$$3x+3y+3z+3u=57$$

ゆえに $x+y+z+u=19 \quad \cdots ⑤$

①, ⑤ から $u=8$, ②, ⑤ から $x=2$,

③, ⑤ から $y=4$, ④, ⑤ から $z=5$

よって $x=2,\ y=4,\ z=5,\ u=8$

1.69 次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x+y=7 \\ y+z=12 \\ z+x=13 \end{cases}$ (戸田建設)

(2) $\begin{cases} x+y=9 \\ 2y+2z=14 \\ 3x+3z=24 \end{cases}$ (東芝)

(3) $\begin{cases} a+b+c=13 \\ b+c+d=10 \\ c+d+a=7 \\ d+a+b=15 \end{cases}$ (九州電力)

(4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=30 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=40 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=50 \end{cases}$ (リコー)

(5) $\begin{cases} \dfrac{6}{x+y}-\dfrac{1}{y+z}=1 \\ \dfrac{4}{y+z}+\dfrac{2}{z+x}=2 \\ \dfrac{4}{z+x}+\dfrac{3}{x+y}=-3 \end{cases}$ (明電舎)

例題 1.55 連立方程式 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ を解け. (富士通)

【解】 第 1 式から $x=y+2 \quad \cdots ①$

① を第 2 式に代入すると

$$(y+2)^2+y^2=20$$

整理すると $y^2+2y-8=0$

よって $(y+4)(y-2)=0$

したがって $y=-4,\ 2$

これらを ① に代入して $(x,\ y)=(-2,-4),\ (4,\ 2)$

1.70 次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=x^2+x-3 \end{cases}$ (ムトウ)

(2) $\begin{cases} y=2x-5 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ (京成電鉄)

(3) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=6 \end{cases}$ (昭和シェル石油)

(4) $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x-y=2 \end{cases}$ (ダイヘン)

(5) $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2-2xy+y=2 \end{cases}$ (デンソー)

(6) $\begin{cases} y-2x=1 \\ y^2+y-11x=8 \end{cases}$ (ヤマハ発動機)

(7) $\begin{cases} x+2y=1 \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$ (きんでん)

(8) $\begin{cases} x=y^2 \\ y=|x-2| \end{cases}$ (ダイハツ工業)

x，y を解とする 2 次方程式

x，y を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$(t-x)(t-y)=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{t^2-(x+y)t+xy=0}$$

［注意］ 2 数の和が p，積が q である 2 数は，方程式 $t^2-pt+q=0$ の解である．

例題 1.56 次の連立方程式を解け．

(1) $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y+3xy=23 \\ x+y-2xy=-7 \end{cases}$

【解】 (1) x，y は 2 次方程式 $t^2-6t+4=0$ の解であるから

$t^2+2\cdot(-3)t+4=0$ を解いて　$t=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot4}}{1}=3\pm\sqrt{5}$

よって　　$(x,\ y)=(3+\sqrt{5},\ 3-\sqrt{5}),\ (3-\sqrt{5},\ 3+\sqrt{5})$

(2) $x+y=p$，$xy=q$ とおくと

$\begin{cases} p+3q=23 \\ p-2q=-7 \end{cases}$　これを解いて　$p=5,\ q=6$

x，y は，2 次方程式 $t^2-5t+6=0$ の解であるから

$(t-2)(t-3)=0$　ゆえに　$t=2,\ 3$

よって　　$(x,\ y)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

1.71 次の連立方程式をとけ．

(1) $\begin{cases} x+y=-11 \\ xy=28 \end{cases}$　(日産車体)

(2) $\begin{cases} 2(x+y)+3xy=-4 \\ 3(x+y)-2xy=7 \end{cases}$　(九州電力)

(3) $\begin{cases} xy+(x+y)=5 \\ 2xy-(x+y)=1 \end{cases}$　(トヨタ自動車)

1.3.5　式の値

例題 1.57 次の問いに答えよ．

(1) $a+b=6$，$ab=3$ のとき a^2+b^2 の値を求めよ．

(2) $x+y=4$，$xy=1$ のとき x^3+y^3 の値を求めよ．

【解】 (1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ であるから

$$a^2+b^2=6^2-2\cdot3=30$$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ であるから

$$x^3+y^3=4^3-3\cdot1\cdot4=52$$

1.72 次の問いに答えよ．

(1) $a+b=5$，$ab=2$ のとき，a^2+b^2 の値を求めよ．　(豊和工業)

(2) $x^2+y^2=8$，$x+y=3$ のとき，xy の値を求めよ．　(日本無線)

(3) $x+y=5,\ xy=1$ のとき x^3+y^3 の値を求めよ．　(ソトー)

(4) $a+b=2$，$a^3+b^3=38$ のとき，ab の値を求めよ．　(中国電力)

例題 1.58 $2x=3y$ のとき $\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ の値を求めよ．　(三共)

【解】 $2x=3y \iff x:y=3:2 \iff x=3k,\ y=2k$ (k は比例定数) であるから

$$\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(3k)^2+(2k)^2}{3k\cdot2k}=\frac{13k^2}{6k^2}=\frac{13}{6}$$

1.73 次の問いに答えよ．

(1) $x:y=1:3$ のとき $\dfrac{5xy}{x^2+y^2}$ の値を求めよ．　(トヨタ自動車)

(2) $2x=5y$ のとき，$\dfrac{x}{x+2y}+\dfrac{y}{x-y}$ の値を求めよ．　(小田急電鉄)

例題 1.59 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$ のとき $\dfrac{x+y-z}{x+y+z}$ の値を求めよ.　(西日本プラント工業)

【解】 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}=k$ とおくと　$x=2k,\ y=3k,\ z=4k$

よって　$$\frac{x+y-z}{x+y+z}=\frac{2k+3k-4k}{2k+3k+4k}=\frac{k}{9k}=\frac{1}{9}$$

1.74 次の問いに答えよ.

(1) $a:b:c=3:4:5$ のとき $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ の値を求めよ.　(トヨタ自動車)

(2) $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{2}$ のとき $\dfrac{(2x+y)^2-48z^2}{(2x+5y-14z)^2}$ の値を求めよ.　(東芝機械)

例題 1.60 $\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{y+z}{6}=\dfrac{z+x}{7}$ のとき $x:y:z$ を求めよ.　(東京ガス)

【解】 (与式) $=k$ とおくと
$$x+y=5k \quad \cdots ①$$
$$y+z=6k \quad \cdots ②$$
$$z+x=7k \quad \cdots ③$$

3 式の辺々を加えて　$2x+2y+2z=18k$

すなわち　$x+y+z=9k \quad \cdots ④$

① と ④ から $z=4k$,　② と ④ から $x=3k$,　③ と ④ から $y=2k$

よって　$x:y:z=3k:2k:4k=3:2:4$

1.75 次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{x+y}{7}=\dfrac{y+z}{8}=\dfrac{z+x}{9}$ のとき $x:y:z$ を求めよ.　(トクヤマ)

(2) $\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ 4x-5y+3z=0 \end{cases}$ のとき $x:y:z$ を求めよ.　(富士通ゼネラル)

(3) $\dfrac{x+2y}{2}=\dfrac{y+3z}{3}=\dfrac{z+4x}{4}$ のとき $x:y:z$ を求めよ.　(商船三井)

1.4　文章題

1.4.1　和と差に関する問題

例題 1.61　連続する3つの偶数の和は1122であるという．この真ん中の数を求めよ．　(大平製作所)

【解】 求める数をxとすると，連続する3つの偶数は，$x-2$，x，$x+2$

したがって　$(x-2)+x+(x+2)=1122$　これを解いて　(答) $x=374$

1.76 次の問いに答えよ．

(1) ある数から7を引いて3倍したら81になった．ある数を求めよ．(日産自動車)

(2) ある数を平方するのを，誤って2倍したために答が35小さくなった．その正しい答を求めよ．　(山之内製薬)

(3) 分子と分母の差が105で，約分すると$\dfrac{13}{6}$となる分数を求めよ．　(旭産業)

(4) 連続する2つの整数の平方の和が613である．この2数を求めよ．(九州電力)

(5) 大きい数と小さい数との差は6で，大きい数を5倍にすると，小さい数の10倍より2だけ大きくなるという．この2数を求めよ．　(スズキ)

(6) 2つの整数がある．大きい数を小さい数で割ると，商が3，余りが4となる．また，小さい数の7倍を大きい数で割ると，商は2，余りは9となる．この2つの整数を求めよ　(東京計器工業)

例題 1.62 2 けたの整数がある．その十の位の数字と一の位の数字の和は 10 であり，十の位の数字と一の位の数字を入れ替えると，もとの数より 18 小さくなる．この 2 けたの整数を求めよ．　(住友金属工業)

【解】 求める 2 桁の整数の十の位の数を x，一の位の数を y とすると

$$x + y = 10 \quad \cdots ①$$

元の数は $10x + y$，位を入れ替えた数は $10y + x$ なので，題意より

$$\begin{aligned}(10y + x) &= (10x + y) - 18 \\ -9x + 9y &= -18 \\ -x + y &= -2 \quad \cdots ②\end{aligned}$$

① , ② を解いて，$x = 6,\ y = 4$　　(答) 64

1.77 次の問いに答えよ．

(1) 2 桁の整数がある．それに 36 を加えると数字の順序が逆になり，また，その数の十位と一位の数字の和を 4 倍すれば，もとの数に等しくなる．この数を求めよ．　(住友ゴム工業)

(2) 2 桁の整数がある．その各位の数字の和は 12 で，一の位と十の位の数字を入れかえるともとの数より 18 大きくなるという．もとの数を求めよ．　(アマダ)

(3) ある 2 桁の整数は，その十の位の数と一の位の数との積の 2 倍に等しくなっている．この整数を求めよ．　(三菱重工)

(4) 3 桁の整数がある．各々の位の数字の和は 14，十の位の数字は百の位の数字と一の位の数字との和に等しく，また，百の位の数字と一の位の数字を入れかえて作った数は，もとの数より 99 大きいという．もとの整数を求めよ．　(武田薬品工業)

例題 1.63 A 君の年令は妹より 3 才年上です．母と妹との年を合計すると 49 才です．7 年後，母の年令は A 君と妹との年令の和と同じです．母の年令はいくつですか． (トヨタ自動車)

【解】 妹の年齢を x 才とすると，A 君の年齢は $(x+3)$ 才，母親の年齢は $(49-x)$ 才．

7 年後の 3 人の年齢は，妹 $(x+7)$ 才，A 君 $(x+10)$ 才，母親 $(56-x)$ 才

このとき $56-x=(x+10)+(x+7)$

これを解いて $x=13$

したがって，妹 13 才，A 君 16 才，母親 36 才． (答) 36 才

1.78 次の問いに答えよ．

(1) 父が 28 才，息子が 6 才である．何年後に父の年令が息子の年令の 2 倍になるか． (日産ディーゼル)

(2) 今年は母が 42 才，子供は 18 才，母の年令が子供の 5 倍であったのは今から何年前か． (石塚硝子)

(3) 現在母の年令は 41 才，子供の年令は 17 才である．母の年令が子供の年齢の 3 倍であるのはいつか． (トヨタ自動車)

(4) 父の年令は子供の年令の 3 倍である．あと 13 年たつと父の年令は子供の年令の 2 倍になる．現在の父の年令と子供の年令を求めよ． (ダイハツ工業)

(5) 現在，父の年令は 45 才，3 人の子供の年令はそれぞれ 11 才，7 才，5 才である。父の年令が，3 人の子供の年令の和の 3 倍となるのはいつか． (麒麟麦酒)

(6) 父と母と子の年令の和は 62 才である。父は母より 7 才年上で、母は子の 5 倍の年令である。3 人の年令をそれぞれ求めよ。 (中京海運)

(7) 父と 3 人の子供がいる．父と長子との年令の和は 66，父と末子との年令の和は 62，長子と次子との年令の和は 38，次子と末子との年令の和は 34 であるという．それぞれの年令を求めよ． (第一製薬)

> **例題 1.64** みかん1個50円，りんご1個80円を合わせて13個買い，150円のかごに入れてもらい，全部で950円払った．それぞれ何個買ったか．
>
> (住友電気工業)

【解】 みかんを x 個，りんごを y 個買ったとすると

個数から $\quad x + y = 13 \quad \cdots ①$

金額から $\quad 50x + 80y + 150 = 950$

整理して $\quad 5x + 8y = 80 \quad \cdots ②$

①，② を解いて，$x = 8,\ y = 5$ (答) みかん8個，りんご5個

1.79 次の問いに答えよ．

(1) 5円硬貨の数は，10円硬貨の数の5倍で，金額の合計は210円である．それぞれ何枚あるか． (東京ガス)

(2) 40円の切手と60円の切手を買った．全部で100枚，値段が4900円であった．それぞれの切手の枚数を求めよ． (大豊工業)

(3) 1個15円のみかんと1個20円のりんごをとりまぜて20個箱に入れ，箱代30円を含めて360円にしたい．みかんとりんごを何個ずつ入れればよいか．
(中越パルプ工業)

(4) ノート3冊と鉛筆2本で510円．またノート2冊と鉛筆1本で310円である．それぞれの金額を求めよ． (日産車体)

(5) AとBの缶詰があり，Aを2個，Bを1個で420 gである．また，Aを3個とBを4個で930 gである．A，Bそれぞれ何gか． (電源開発)

(6) 100円のジュースと120円のジュースがある．その日のジュースの売上が13,280円である．100円のジュースの方が120円のジュースより2倍と24本多く売れた．それぞれ何本ずつ売れたか． (JFEホールディングス)

(7) 切手を10円，20円，25円の3種類を合わせて75枚買った．1225円の予定であったが，10円切手と20円切手を取り違えたので，1325円になった．予定の切手の枚数を求めよ． (山崎製パン)

(8) 10円，50円，100円硬貨が合わせて30個ある．その金額の合計は1700円である．100円硬貨は50円硬貨より4個多いという．おのおのの個数を求めよ．
(アツギ)

例題 1.65 子供に柿を分配するのに，1人5個ずつ分ければ10個余り，7個ずつ分ければ6個不足するという．子供の人数と柿の個数を求めよ． (芦森工業)

【解】 子供の人数を x 人，柿の個数を y 個とすると

$$y = 5x + 10, \qquad y = 7x - 6$$

と表せる．上の2式から $x = 8,\ y = 50$ (答) 子供8人，柿50個

1.80 次の問いに答えよ．

(1) 鉛筆を1人7本ずつ配れば11本余り，1人9本ずつ配れば最後の1人は6本しかもらえない．さて鉛筆の数は何本か． (王子製紙)

(2) 鉛筆を1人7本ずつ配ると17本余り，9本ずつ配ると3本だけ足りなくなる．人数と鉛筆の総数を求めよ． (横浜ゴム)

(3) 子供達に鉛筆を配るのとき，1人に6本ずつ配ると18本余り，9本ずつ配ると最後の1人には3本足りなくなる．子供の人数を求めなさい． (第一貨物)

(4) ある寄宿舎で生徒を1室に5人ずつ入れると12人余り，7人ずつ入れると1室は6人で，なお1室は空室になるという．生徒の人数および室数を求めよ．(ジェイティーピー)

(5) 生徒を講堂に入れて，1つの腰掛けに4人ずつ掛けさせたら25人の生徒が掛けられなくなった．そこで1つの腰掛けに5人ずつ掛けさせると，腰掛けが8脚余った．腰掛けの数と生徒の数を求めよ． (山之内製薬)

(6) 会合の費用を集めるのに1000円ずつ集めれば200円余り，950円ずつ集めれば300円足りない．人数は何人か． (ダイハツ工業)

(7) ある会社の採用試験で受験生を部屋に入れるのに，45人ずつ入れると15人余り，35人ずつ入れると45人ずつ入れるより1部屋多く使ってもなお10人余ることになる．受験生は何人か．ただし，部屋の人数はすべて同じである．(トヨタ自動車)

(8) ノートを生徒に3冊ずつ配ると12冊余るが，6冊ずつ配ると最後の1人は1冊以上6冊未満になる．生徒は何人いるか． (電源開発)

(9) 自動車のある部品を加工するのに，専用機3台と汎用機2台を使用すると，5時間に295個加工することができる．また専用機6台を3時間，汎用機4台を7時間使用すると418個加工することができる．専用機，汎用機おのおの1台で1時間に何個加工することができるか． (日産自動車)

1.4.2 割合に関する問題

例題 1.66 ある会社の従業員は 1260 名で，これは前年の 5%の増加となる．男女別にみると男子は 10%の増加，女子は 20%の減少となる．現在の男子および女子はおのおの何人か． (アマダ)

【解】 前年の男子を x 人，女子を y 人とすると

$$x + y = 1200 \quad \cdots ①$$

今年の前年に対する増減をみると，男子は $+0.1x$，女子は $-0.2y$ なので

$$0.1x + (-0.2y) = 60$$
$$x - 2y = 600 \quad \cdots ②$$

① , ② を解いて，$x = 1000,\ y = 200$ であるので，今年の男子は，1000 人の 10% 増より 1100 人，今年の女子は，200 人の 20% 減より 160 人．

(答) 男子 1100 人，女子 160 人

1.81 次の問いに答えよ．

(1) ある学年の今年の生徒数は，昨年より 24%増えて 434 人である．昨年の生徒数は何人であったか． (中越パルプ工業)

(2) 去年のある会社の社員が，男女あわせて 3750 人であった．今年は去年より男子が 5%減り，女子が 10%増え，全体で 2%減った． (京阪電気鉄道)

(i) 去年の男，女の数を求めよ． (ii) 今年の男子社員数を求めよ．

(3) ある学校の生徒数は $1,335$ 名で，これを昨年度と比較すると，男子は 3%増加し，女子は 4%減少したため，総数で昨年度より 10 名増加になる．現在のこの学校の男女生徒はそれぞれ何名か． (コスモ石油)

(4) ある会社の昨年の生徒数が 780 人で，今年は男子が 8%，女子が 10%増加した．また今年は昨年より男女合わせて 72 人増加していた．今年の男子と女子の人数を求めなさい． (富士通四国インフォテック)

(5) ある企業の従業員数は 5300 名で昨年に比べて 6%増加している．そのうち男子は昨年の男子数の 15%増加して，女子は 10%減少している．現在の男子と女子の従業員数を求めよ． (トヨタ自動車)

例題 1.67 甲，乙2人の1ヶ月の収入の比は $7:5$，支出の比は $13:9$ であって残高は共に7500円である．両人の1ヶ月の収入はそれぞれいくらか．

(富士通ビジネスシステム)

【解】 甲の収入を $7x$，乙の収入を $5x$ とし，甲の支出を $13y$，乙の支出を $9y$ とすると

$$7x-13y=5x-9y=7500$$

これを解いて $x=15,000,\ y=7,500$

したがって 甲の収入は，$7\times 15,000=105,000$ 円，

乙の収入は，$5\times 15,000=75,000$ 円．

(答) 甲の収入 $105,000$ 円，乙の収入 $75,000$ 円．

1.82 次の問いに答えよ．

(1) A村，B村，C村の人口の比が $3:5:6$ で，A村の人口が5400人であるとき，他の村の人口はそれぞれ何人か． (住友大阪セメント)

(2) 糸を2つに切って，それらの長さの比を $5:3$ とするとき，2つの糸の長さの差は6cmである．もとの糸の長さを求めよ． (日産ディーゼル)

(3) 甲，乙2人の収入の比は $5:3$ で、支出の比は $9:5$ であって，1年間にともに60万円の貯金をしたという．甲，乙2人の1年間の収入および支出はそれぞれいくらか． (雪印乳業)

(4) 自動車会社A，B両社はいずれも乗用車とトラックを生産している．ある日の両社の生産実績を比較してみたら，総生産台数の比率は $7:9$ であり，そのうち乗用車のみの生産台数の比率は $6:5$，またトラックの生産台数はそれぞれ300台，820台であった．両社の総生産台数を求めよ． (トヨタ自動車)

例題 1.68 A 高校のあるクラスの卒業生のうち，$\dfrac{1}{4}$ は進学し，残りの $\dfrac{5}{6}$ は就職し，残りの 6 人は家事につきました．このクラスの卒業生は全部で何人か．(リコー)

【解】 クラスの卒業生数を x 人とすると

進学者数は　$\dfrac{1}{4}x$

就職者数は　$\left(1-\dfrac{1}{4}\right)x \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{8}x$

よって　$\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{8}x + 6 = x$ を解いて　$x = 48$　(答) 48 人

1.83 次の問いに答えよ．

(1) 棒の長さを測るのに，ひもを 3 つ折にしたら 7cm 余り，4 つ折にしたら 4cm 不足した．棒の長さとひもの長さを求めよ．
(コロムビアミュージックエンタテインメント)

(2) ある家庭で主人の月給の $\dfrac{1}{10}$ を家賃に，$\dfrac{1}{2}$ を食費に、$\dfrac{1}{4}$ を衣料その他の諸経費に当て残額 45,000 円を預金するように予算をたてた．主人の月給はいくらか．
(コクヨ)

(3) あるひもを $\dfrac{3}{5}$ 使い，その残りを $\dfrac{3}{4}$ 使うと，その残りが 6cm である．ひもの長さを求めよ．
(小松製作所)

(4) A 君は最初の店で所持金の $\dfrac{1}{4}$ で品物を買い，次の店で残りの $\dfrac{4}{9}$ で品物を買ったところ 2000 円残った．最初の所持金はいくらであったか．
(デンソー)

(5) 生徒の $\dfrac{2}{3}$ が進学し，その残りの $\dfrac{1}{3}$ が就職し，余りが 8 人であった．クラス全体の人数を求めよ．
(東芝)

(6) あるクラスの卒業生のうち $\dfrac{1}{3}$ が進学，残りの $\dfrac{3}{4}$ は会社へ就職し，その残りの 9 人が家業を継いだ．卒業生は何人か．
(日産ディーゼル)

(7) ある学校の去年の生徒数は男女合わせて 1000 人であったが，今年は女子が $\dfrac{1}{6}$ 増となり，男子は $\dfrac{1}{8}$ 減となって，合計 980 人になった．現在の男女の生徒数は何人か．
(東京ガス)

例題 1.69 15%の食塩水300gを10%の濃度にするには何gの水が必要か.
(本田技研工業)

【解】 15%の食塩水300g中の食塩の質量は,

$$300 \times 0.15 = 45(\mathrm{g})$$

水 x gを加えて10%の食塩水になるとすれば,

$$\begin{aligned} 45 &= (300 + x) \times 0.1 \\ 450 &= 300 + x \\ x &= 150 \qquad \text{(答) } 150\mathrm{g} \end{aligned}$$

1.84 次の問いに答えよ.

(1) 12%の食塩水200gを8%の食塩水にするには水を何g加えればよいか.
(丸一鋼管)

(2) 8%の食塩水50gにどれだけの水を入れたら4%になるか. (豊田紡織)

(3) 4%の食塩水120gを2%にしたい. あと水を何g入れると2%になるか.
(田中土建工業)

(4) 4%の食塩水が120gある. これに水を加えて濃度を3%にしたい. 水を何g加えればよいか. (日本空港給油)

(5) 5%の食塩水が200gある. これを水で薄めて2%の食塩水にするには何gの水を加えればよいか. (小松製作所)

(6) 8%の食塩水150gを6%の食塩水にするには水何gが必要か. (大日本印刷)

(7) 8%の食塩水540gがある. これを9%の食塩水にするにはいくらの水を蒸発させればよいか. (三菱電機)

(8) 10%の食塩水100gがある. これを20%の溶液にするには, さらに食塩を何g入れればよいか. (世紀東急工業)

(9) 4%の食塩水400gがある. これに10%の食塩水を加えて6%の食塩水を作るとき, 10%の食塩水は何g必要か. (YKK)

(10) 10%の食塩水400gがあります. これを4%以上8%以下の食塩水にするにはどれほどの水を加えればよいか. (三井造船)

例題 1.70 8%の食塩水と3%の食塩水を合わせて，5%の食塩水600g をつくりたい．それぞれ何 g ずつ入れればよいか． (デンソー)

【解】 8%の食塩水を x g，3%の食塩水を y g 入れるとする．

食塩水の質量から $x+y=600$ $\cdots$①

食塩の質量から $0.08x+0.03y=600\times 0.05$

100 を掛けて $8x+3y=3000$ $\cdots$②

①，② を解いて，$x=240,\ y=360$ (答) 8%を 240g，3%を 360g

1.85 次の問いに答えよ．

(1) 8%の食塩水と20%の食塩水を混ぜ合わせて10%の食塩水600g をつくりたい．8%の食塩水と20%の食塩水を何 g とればよいか． (JR)

(2) 5%と10%の食塩水を混ぜあわせて8%の食塩水を500g つくりたい．それぞれ何 g ずつ混ぜればよいか． (三菱マテリアル)

(3) 5%の食塩水と8%の食塩水を混ぜて6%の食塩水を3kg 作りたい．それぞれどれだけ混ぜるとよいか． (テイケイ気化器)

(4) 6%の食塩水と3%の食塩水がそれぞれ500g ずつある．この2つの食塩水をまぜて5%の食塩水を500g つくるにはそれぞれの食塩水をどれだけずつ混ぜればよいか． (ニチコン)

(5) 10%の食塩水に5%の食塩水を混ぜて6%の食塩水を作ろうと思ったところ，5%の食塩水のかわりに誤って同量の水を入れてしまった．できたのは何%の食塩水か． (トヨタ自動車)

(6) 食塩水がA，Bそれぞれの容器に500g 入っている．A，Bから200g ずつ取り出し，混ぜ合わせたら10%の食塩水ができた．さらにBの残りの300g の食塩水に水を150g 入れたら，Aの食塩水と同じ濃度になった．A，Bそれぞれ何%の食塩水か． (日本製紙)

(7) A，B2つの食塩水がそれぞれ1kg，2kg ある．AからBへ100g 移し，よく混ぜた後，Bの100g をとってAに移すと，Aは9%，Bは18%の濃度になるという．もとのA，Bの濃度はいくらか． (マツダ)

(8) 甲，乙，丙の3つの容器に濃度未知の食塩水が入っている．甲，乙，丙の容器から等量ずつ取り出して，これを混合すると10%の食塩水となり，甲と乙から重量で2 : 3の割合で取り出して混合すると7%，乙と丙から重量で3 : 2の割合で取り出して混合すると9%の食塩水になるという．甲，乙，丙の食塩水の濃度を求めよ． (共同印刷)

例題 1.71 A, B, C, D の平均身長は171cmで，A は D より8cm高く，C は D より7cm高く，B は A と D の平均より5cm高い．D の身長を求めよ．
(田中土建工業)

【解】 題意より
$$\frac{A+B+C+D}{4}=171$$
すなわち
$$A+B+C+D=684 \quad \cdots①$$
また
$$A=D+8 \quad \cdots②$$
$$C=D+7 \quad \cdots③$$
$$B=\frac{A+D}{2}+5 \quad \cdots④$$
② を ④ に代入して
$$B=D+9 \quad \cdots⑤$$
② , ③ , ⑤ を ① に代入して
$$(D+8)+(D+9)+(D+7)+D=684$$
$$4D+24=684$$
$$D=165$$
(答)165cm

1.86 次の問いに答えよ．

(1) 兄と弟の身長の平均が172cmで，弟の身長が158cmとするとき，兄の身長を求めよ．
(日産ディーゼル)

(2) 8回のテストの平均点が84.5点であった．9回目に何点とれば平均点が85点になるか．
(第一産業)

(3) A，B，C，D4人の平均身長は171cmで，AはDより8cm高く，BはAとDの平均身長より5cm高く，CはDより7cm高い．このとき，Bの身長を求めなさい．
(富士通)

(4) ある会社の採用試験の受験者数は合格者の9倍であった．試験の成績では不合格者の平均点が52点で，受験者全体の平均点は合格者の平均点より20点低かった．このときの合格者の平均点は何点であったか．
(リコーエレメックス)

(5) ある会社の入社試験で，受験者の25%が合格した．合格者の平均点は合格基準点より15点高く，不合格者の平均点は合格基準点より25点低い．また，受験者の平均点は60点であった．合格基準点は何点か．
(東芝機械)

例題 1.72 次の問いに答えよ．

(1) 定価 $1,200$ 円の商品を 1 割引で売っても原価の 2 割の利益がある．原価はいくらか． (リコー)

(2) 原価 $6,500$ 円の品物を定価より 1 割 5 分引いて 300 円の利益を得たい．定価はいくらにすればよいか． (ビックカメラ)

【解】 (1) 原価を x 円とする．売価＝定価の 1 割引＝ 1200 円× 0.9 ＝ 1080 円．
2 割の利益があるので，売価は原価の 2 割増であるから

$1080 = x \times 1.2$　これを解いて　(答) $x = 900$ 円

(2) 定価を x 円とする．売価＝定価の 1 割 5 分引＝ $x \times 0.85 = 0.85x$．
利益＝売価－原価であるから

$300 = 0.85x - 6500$　これを解いて　(答) $x = 8,000$ 円

1.87 次の問いに答えよ．

(1) 原価 $1,600$ 円の品物で 20% の利益を得たい．売価をいくらにすればよいか． (マツヤデンキ)

(2) 定価 900 円の品物を 2 割引にして売ってもなお 2 割の利益がある．この品物の原価と，定価は原価の何割増か． (横浜ゴム)

(3) 原価の 2 割の利益を見込んで定価をつけた．この定価の 1 割引が $10,800$ 円だった．原価はいくらか． (日本飛行機)

(4) 原価の 2 割増で定価を決めたが，実際には 120 円引いて $1,680$ 円となった．原価はいくら． (JFE ホールディングス)

(5) ある商品を利益 3 割 5 分の定価とし，定価の 2 割引でなお 32 円の利益がある．原価はいくらか． (日本毛織)

(6) 原価の 2 割の利益を見込んで定価をつけた商品を，定価の 1 割引で売り，240 円の利益を得た．原価はいくらか． (新阪急ホテル)

(7) 原価 800 円の品物を定価の 1 割引で売っても，なお 8 分の利益があるようにするには，はじめの定価をいくらにつけたらよいか． (ヤマハ発動機)

(8) 原価 800 円の品物を定価の 2 割引で売っても，なお 3 割の利益がある．定価はいくらか． (パナソニック コミュニケーションズ)

例題 1.73 次の問いに答えよ．

(1) 定価で売れば2割5分のもうけのある品物を，損得なしに売るには定価の何割引で売ればよいか．　(宝ホールディングス)

(2) 定価の2割引で売っても2割の利益があるようにするには，定価は原価の何割増にすればよいか．　(ホテル日航)

【解】 (1) 原価を A 円，定価を B 円とする．定価は原価の2割5分増なので，

$$B = A \times 1.25$$

となる．損得なしに売るので，売価は A 円．上式より

$$A = B \times 0.8$$

となるので，売価は定価の2割引．　(答) 2割引

(2) 原価を A 円，定価を B 円，売価を C 円とする．

2割の利益 $\Longleftrightarrow$ 売価は原価の2割増

$$C = A \times 1.2$$

売価は定価の2割引なので，

$$C = B \times 0.8$$

となる．上の2式より

$$\begin{aligned} B \times 0.8 &= A \times 1.2 \\ B &= A \times 1.5 \end{aligned}$$

であるから，定価は原価の5割増．　(答) 5割増

1.88 次の問いに答えよ．

(1) 原価の3割増の定価をつけた商品を定価の3割引で売った．原価の何% の損失か．　(富士通ビジネスシステム)

(2) 定価の2割引で売っても，なお1割2分の利益があるように定価をつけるは，定価は原価の何割増につけておいたらよいか．　(国精工業)

例題 1.74 定価の1割引で売ると200円の利益がある．定価の2割引で売ると100円の損失がある．原価を求めよ． (コカ・コーラボトリング)

【解】 原価をA円，定価をB円とする．

売価を定価の1割引とするとき

$$0.9B - A = 200 \qquad \Longleftarrow \text{売価－原価＝利益}$$

売価を定価の2割引とするとき

$$0.8B - A = -100 \qquad \Longleftarrow \text{売価－原価＝利益}$$

上の2式より，$A = 2500$, $B = 3000$. (答)2500円

1.89 次の問いに答えよ.

(1) ある商品を定価の5% 引いて売る約束で3000円を受け取り，おつりとして625円渡すところを誤って725円渡した．結局，定価の何% 引いて売ったことになるか． (日本毛織)

(2) ある商品が先月は定価で40個売れたが，今月は定価の1割引にしたところ60個売れて，売上金は先月よりも7000円増加した．この商品の定価はいくらか． (オカモト理研)

(3) ある商品がある．この商品を定価で売れば70円の利益があるが，これを定価の1割引で売れば，2割引で売ったときより3倍の利益があるという．この商品の原価を求めよ． (日本特殊陶業)

(4) Yシャツ150枚を仕入れ，原価の2割増(定価)で8割売り，残りを定価の1割引で売ったら利益は$13,200$円であった．このYシャツ1枚の原価はいくらか． (富士紡ホールディングス)

(5) ある人が，$10,000$円で甲，乙2つの商品を仕入れ，どちらも2割の利益を見込んで定価をつけた．ところが買い手がなかったので，甲は定価の2割引，乙は定価の1割引で売った．それでも440円の利益があったという．甲，乙の原価を求めよ． (トヨタ自動車)

1.4.3 速さに関する問題

例題 1.75 甲はある距離を毎時 4km で行った．乙は毎時 5km の速さで行ったので，甲よりも 2 時間早く着いた．距離を求めよ．(村田機械)

【解】 距離を $x$km とすると，甲，乙の要する時間はそれぞれ $\dfrac{x}{4}$，$\dfrac{x}{5}$ であるから

$$\frac{x}{4}-\frac{x}{5}=2 \quad \text{これを解いて} \quad x=40 \qquad \text{(答) 40km}$$

1.90 次の問いに答えよ．

(1) ある距離を 30km/h で走ると 1 時間遅れて，36km/h で走ると 30 分早く着く．この距離を求めよ．(本田技研工業)

(2) 25km/h で行くと 1 時間遅れ，30km/h で行くと 1 時間早く着く．この時の距離とどれくらいの速さで行けば時間どおりに着くか．(日産自動車)

(3) A 地点から B 地点へ行くのに，行きは 3km/h，帰りは 5km/h の速さで往復すると時間が 4 時間かかった．AB 間の距離を求めよ．(富士通四国インフォテック)

(4) A，B 地区間 60km あるところを往復する自動車がある．帰りには毎時の速さ 5km/h だけ増加したため，往きよりも 24 分早く着いた．自動車の往きの速度はいくらか．(青木あすなろ建設)

例題 1.76 20km 先を時速 10km で進んでいる自転車を時速 50km の自動車で追いかける．自動車が出発してから何分で追いつくか．(アマダ)

【解】 x 時間後に追いつくとき

$$50x=20+10x \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{1}{2}\ \text{(時間)}$$

したがって　$\dfrac{1}{2}\times 60=30$ (分)　　(答) 30 分

1.91 普通列車は時速 75km，急行列車は時速 100km で走る．いま普通列車が A 駅を発車したのち，6 分遅れて急行列車が発車した．急行列車が普通列車に追いつくのは A 駅から何 km 離れた地点か．また，普通列車に追いつくのは急行列車が A 駅を発車して何分後か．(京阪急行電鉄)

例題 1.77 A 君は甲地から 7km 離れた乙地へ行くのに，はじめ自転車で毎時 10km の速さで行ったが，途中で自転車がこわれた．それで毎時 4km の速さで歩いて行ったので，全体で 1 時間かかった．自転車のこわれた地点は甲地から何 km の地点か． (三共)

【解】 甲地から自転車のこわれた地点までの距離を $x$km，こわれた地点から乙地までの距離を $y$km とすると

距離から　$x+y=7 \quad \cdots①$

時間から　$\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{4}=1 \quad \cdots②$

①，② を解いて，$x=5$, $y=2$　　(答) 5km

1.92 次の問いに答えよ．

(1) 4km 離れた駅に行くのに，初めは毎分 60m の速さで歩いたが，遅くなりそうなので途中から毎分 85m の速さで歩き，50 分かかって駅に着いた．速度を変えてから何 km 歩いたか． (三共)

(2) ある列車が A 駅を出て 40km のところで機関車に故障を起こしたため，その後は速さを毎時 20km だけ落した．そのため A 駅から 120km 離れた B 駅へ予定より 40 分遅れて着いた．この列車の初めの速さを求めよ． (京王帝都電鉄)

(3) 山田君は家から 30km 離れた A 公園にサイクリングに出かけた．出発したのは午前 8 時で，最初は毎時 10km の速さで走っていたが，途中でパンクしたので 15 分間の手間がかかった．そこで修理後は毎時 15km の速さで走ったが，目的地の 5km 手前の橋を通過した際は，ちょうど 10 時 5 分であった．パンクした場所は家から何 km の地点か． (クボタ)

(4) ある汽車が長さ 150m ある鉄橋にさしかかって全て通過するまでに 17 秒かかる．また，420m のトンネルにさしかかって全て通過するまでに 35 秒かかる．汽車の時速と長さを求めよ． (JFE 物流)

例題 1.78 流れの速さが毎時 5km の川上にある甲町と川下の乙市間を通っている定期船で，乙市から甲町に行くのには 8 時間，甲町から乙市は 6 時間かかる．船の速さと，甲乙間の距離を求めよ． (東陶機器)

解説 船の速さを毎時 $x$km とすると，流速は毎時 5km なので，上りの速さは $(x-5)$km，下りの速さは $(x+5)$km

【解】 船の速さを毎時 x km，甲乙間の距離を y km とすると

$$y = 8(x-5) = 6(x+5)$$

これを解いて　$x = 35,\ y = 240$

(答) 船の速さは毎時 35km，甲乙間の距離は 240km

1.93 次の問いに答えよ．

(1) 流れの速さが毎時 8km の川を，汽船が A 町から B 町まで運行している．A 町から B 町まで下りで 5 時間かかり，川をさかのぼって B 町から A 町へ行くのに 15 時間かかった．この船の静水での速さは毎時何 km か．また，A 町と B 町の距離はいくらか． (大同特殊鋼)

(2) ある舟が 96km の川を往復するのに，下りは 8 時間，上りは 12 時間かかったという．この舟の静水での速さと流速を求めよ． (佐世保重工業)

(3) 川下の甲地より 12km 川上にある乙地まで，時速 5km の船で往復して 5 時間かかった．川の流れは一定であるとするとき，川の流れは時速何 km か． (日本化薬)

(4) 川に沿って 12km 離れた 2 つの町がある．この間を時速 7km の船が上下するのに 3 時間 44 分要した．川の流れが一定であるとして，このとき川の流速を求めよ． (宇部興産)

(5) 流速 3km/h の川で片道 5km を往復するのに 1 時間 15 分かかったという．この船の時速を求めよ． (積水化学工業)

(6) 流れの速さが毎時 2km の川で，16km の距離を船で往復するのに 2 時間 20 分かかるという．船の静水での速さを求めよ． (日本水産)

(7) 流れの速さが毎時 3km の川で 20km 離れた上流，下流の地点 A，B 間を船で往復するのに 7 時間かかったという．この船の静水での速さを求めなさい． (三洋化成工業)

例題 1.79 ある仕事をなしとげるのにA君，B君，C君が一緒にすれば5日かかり，A君とB君とでやれば6日かかり，B君とC君ならば10日かかる．A君，B君，C君が1人でやれば何日かかるか． (タツタ電線)

【解】 A君，B君，C君が1人でやれば，それぞれa日，b日，c日かかるとすると，A君，B君，C君はそれぞれ1日に仕事全体の$\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$だけするから

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} &= \frac{1}{5} \quad \cdots ① \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad &= \frac{1}{6} \quad \cdots ② \\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c} &= \frac{1}{10} \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

①と②から　$c=30$

①と③から　$a=10$　　これを②に代入して　$b=15$

(答) A君10日，B君15日，C君30日

1.94 次の問いに答えよ．

(1) 水槽に水を入れるのに，A，B2管を使うと3時間，B，C2管を使うと4時間，A，C2管を使うと6時間で満水となる．A，B，C3管を同時に使えば，何時間で満水にできるか． (新日本石油)

(2) ある石油タンクに重油を満たすのに，ポンプA，B，Cの3つが使えるが，それぞれ単独に使った場合にはAでは30分，Bでは24分，Cでは18分かかる．いまポンプAで注油し始めたが，12分たったところで故障してしまった．直ちに今度はBとCの2つのポンプに切り換えて注油を終わった．Aで注油し始めてから満タンになるまで，何分かかったことになるか． (昭和シェル石油)

(3) A，B，C3人共同してある工事に取りかかり，8日でその半分を終えた後Cが去った．A，B共同でなお8日間働いて残りの$\dfrac{3}{5}$を終えた後Bもまた去った．よってその残りをAだけで完成させるのに12日を要した．A，B，Cおのおの単独ではこの工事を幾日で仕上げることができるか． (横河ブリッジ)

例題 1.80 甲1人で働くと60日，乙1人で働くと40日かかる仕事がある．これを甲が初め働いて途中で乙に代わって働くと50日かかる．甲と乙はそれぞれ何日働いたか． (日本電気)

【解】 甲，乙は，それぞれ1日に仕事全体の $\dfrac{1}{60}$，$\dfrac{1}{40}$ だけ仕上げる．

甲は x 日，乙は y 日働いたとすると

$$x + y = 50 \ \cdots ① , \quad \frac{1}{60}x + \frac{1}{40}y = 1 \ \cdots ②$$

①，② を解いて，$x = 30,\ y = 20$ (答) 甲30日，乙20日

1.95 甲1人なら20日かかり，乙1人なら30日かかる仕事を，最初甲1人で何日か働いて，その残りを乙1人で引き受け，乙は甲より10日多く働いて仕上げた．甲は何日働いたことになるか． (中越パルプ工業)

例題 1.81 短針と長針が6時から7時の間で重なる時刻を秒単位まで求めよ． (ソニー)

解説 x 分間に回転する角度：長針 $(6x)^\circ$，短針 $\left(\dfrac{1}{2}x\right)^\circ$

【解】 6時 x 分に重なるとすると，題意より

$$6x = 180 + \frac{1}{2}x \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{360}{11} = 32\frac{8}{11}$$

よって，6時 $32\dfrac{8}{11}$ 分＝6時32分 $\dfrac{480}{11}$ 秒＝6時32分 $43\dfrac{7}{11}$ 秒

1.96 4時と5時との間で，時計の両針が重なる時刻を求めよ． (味の素)

1.4.4　図形に関する問題

> **例題 1.82** ある長方形の周囲は 42m であり，面積は 80m^2 であった．2 辺の長さを求めよ．　(愛知電機)

【解】 縦を xm，横を ym とすると，題意より

$$x + y = 21, \quad xy = 80$$

これを解いて，$(x,\ y) = (5,\ 16),\ (16,\ 5)$　(答) 5m と 16m

1.97 次の問いに答えよ．

(1) 周囲 40m の長方形がある．いまその縦を 2m 増し，横を 2m 減らすと正方形になるという．もとの長方形の縦と横の長さを求めよ．　(旭産業)

(2) 26cm の長さの針金を使って長方形をつくるとき，面積が 42cm^2 になるようにするには縦と横の長さをいくらにすればよいか．　(王子製紙)

(3) 長さ 24cm の針金を折り曲げて長方形をつくり，その面積が 27cm^2 となるようにするには，2 辺の長さをそれぞれいくらにすればよいか．(日産ディーゼル)

> **例題 1.83** 周囲が 14m で対角線の長さが 5m の長方形がある．この長方形の面積を求めよ．　(東京ガス)

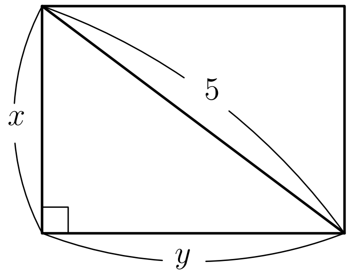
【解】 縦の長さを x m，横の長さを y m とすると

題意より　$x + y = 7 \quad \cdots ①$

三平方の定理より　$x^2 + y^2 = 5^2 \quad \cdots ②$

① , ② を解いて　$(x,\ y) = (3,\ 4),\ (4,\ 3)$

よって，面積は，$3 \times 4 = 12\text{m}^2$　(答) 12m^2



1.98 次の問いに答えよ．

(1) 周囲の長さが 70cm で対角線の長さが 25cm である長方形の短辺と長辺の長さを求めよ．(凸版印刷)

(2) 一辺が 3m，4m の 2 つの正方形の面積の和に等しい面積をもつ正方形の一辺の長さを求めよ．(旭産業)

(3) ある 2 つの正方形を合わせた土地がある．その広さは $369\mathrm{m}^2$ で，その大きい方の正方形の 1 辺は，小さい方の正方形の 1 辺より 3m だけ長いという．この 2 つの正方形の土地の 1 辺の長さは，それぞれ何 m か．(武田薬品工業)

(4) 縦 1m，横 2m のテーブルがある．これに広さが 3 倍である長方形のテーブル掛けをかけて，縦も横も同じ長さだけたれ下がるようにしたい．テーブル掛けの縦，横の長さをいくらにすればよいか．(安川電機)

(5) 横の長さが縦の長さより 4m だけ短い長方形がある．この長方形の横，縦の長さをいずれも 3m ずつ短くするとその面積はもとの面積の半分よりも $9\mathrm{m}^2$ だけ小さくなるという．もとの長方形の面積を求めよ．(昭和電線電纜)

(6) 長方形の縦の長さは横の長さより 2cm 短い．また，縦を 3cm，横を 4cm おのおの延長すると，元の面積より $53\mathrm{cm}^2$ 大きくなります．元の長方形の縦と横の長さを求めて下さい．(大阪鋼材)

(7) 周囲 80m の長方形の土地がある．縦を 5m 短くし，横を 2m 伸ばしても元の面積と同じです．元の長方形の縦の長さは何 m であるか．(キャプティ)

(8) 直角をはさむ二辺のうち一辺が 25cm，他の一辺が斜辺より 5cm 短い直角三角形がある．他の一辺と斜辺を求めよ．(松下電工)

例題 1.84 直角三角形がある．その周の長さは 48cm^2，面積は 96cm^2 である．3 辺の長さを求めよ．　(ダイハツ工業)

【解】 直角をはさむ 2 辺を x cm，y cm，斜辺を z cm とすると，題意より

三平方の定理により　$x^2+y^2=z^2$

$$(x+y)^2-2xy=z^2 \quad \cdots ①$$

周の長さから　$x+y+z=48$

$$x+y=z-48 \quad \cdots ②$$

面積から　$\dfrac{1}{2}xy=96$

$$xy=192 \quad \cdots ③$$

②，③ を ① に代入すると

$$\begin{aligned} (48-z)^2-2\cdot 192&=z^2 \\ 48^2-2\cdot 48z+z^2-8\cdot 48&=z^2 \\ 48^2-2\cdot 48z-8\cdot 48&=0 \\ 48-2z-8&=0 \\ z&=20 \end{aligned}$$

$z=20$ を ② に代入して　$x+y=28 \quad \cdots ④$

③，④ から $(x,\ y)=(12,\ 16),\ (16,\ 12)$　　(答) 12cm，16cm，20cm

1.99 次の問いに答えよ．

(1) 面積が 30cm^2 の直角三角形の斜辺が，他の 2 辺の和より 4cm 短いという．斜辺の長さを求めよ．　(東邦ガス)

(2) 横が縦より 5cm 短い長方形の四隅を 3cm×3cm ずつ切り離し，フタのない箱を作った時の容量は 72cm^3 だった．このとき，長方形の縦と横の長さを求めなさい．　(日立研究所)

実践問題 3

住友金属工業

1 次の計算をしなさい.

(1) $4261-2193+1029$

(2) $448\div 168\times 135$　(割り切れない場合は分数にて解答のこと)

(3) $\dfrac{2}{3}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{1}{2}$

(4) $-3^2+7-(-2)^2$

(5) $\sqrt{42}\div\sqrt{6}\times 2\sqrt{7}$

(6) $5(x-2)-2(3x-1)$

(7) $a^2b^3\times a^3b^4\times\dfrac{1}{ab^2}$

(8) $\sin 30^\circ+\cos 60^\circ$

(9) 次の式を因数分解しなさい.

$$x^2+5x+6$$

(10) 次の式を因数分解しなさい.

$$3x^2+5x+2$$

2 次の方程式を解きなさい.

(1) $3(x-2)-5=-x+1$

(2) $\begin{cases} 4x-3y=6 \\ x+3y=9 \end{cases}$

(3) $2x^2-9x+4=0$

【答】

1 (1) 3097　(2) 360　(3) $\dfrac{5}{6}$　(4) -6　(5) 14
(6) $-x-8$　(7) a^4b^5　(8) 1　(9) $(x+2)(x+3)$　(10) $(3x+2)(x+1)$

2 (1) $x=3$　(2) $x=3,\ y=2$　(3) $x=4,\dfrac{1}{2}$

第 2 章　2次関数

2.1　2次関数とグラフ

2.1.1　関数とグラフ

関数

　2つの変数 x，y について，x の値を決めるとそれに応じて y の値がただ1つ定まるとき，y は x の**関数**であるという．また，その変数 x のとりうる値の範囲を，その関数の**定義域**といい，x の値に対応して y がとる値の範囲を**値域**という．
　x の関数を $\boldsymbol{f(x)}$ とか $\boldsymbol{g(x)}$ などと書くことがある．関数 $f(x)$ の x に数 k を代入した値を $\boldsymbol{f(k)}$ で表す．

例 2.1 時速50kmで x 時間走った車の走行距離を y km とするとき

$$y = 50x \ (x > 0)$$

2.1 次の y を x の式で表し，y が x の2次関数であるものを選べ．

(1) 半径が x cm の円の面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とする．

(2) 面積が $80\,\mathrm{cm}^2$ の長方形の縦の長さを x cm，横の長さを y cm とする．

(3) 周の長さが 20 cm の長方形の縦の長さを x cm，面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とする．

例 2.2 関数 $f(x) = 2x - 3$，$g(x) = x^2 - 2x + 1$ において，次の値を求めよ．

(1) $f(4)$　　　　(2) $g(-3)$

【解】 (1) $f(4) = 2\cdot4 - 3 = 8 - 3 = 5$　　(2) $g(-3) = (-3)^2 - 2\cdot(-3) + 1 = 16$

2.2 次の値を求めよ．

(1) $f(x) = -3x + 2$ のとき，$f(2)$，$f(-1)$，$f(0)$ の値

(2) $g(x) = 2x^2 + x + 1$ のとき，$g(1)$，$g(-2)$，$g(0)$ の値

1次関数のグラフと値域

- 1次関数 $y=ax+b$ のグラフは，傾きが a，y 軸上の切片が b の直線．
  $a>0$ ならば右上がり，$a<0$ ならば右下がり．
- 1次関数 $y=ax+b$ $(p \leqq x \leqq q)$ の値域は，$x=p$，$x=q$ のときの y の値に注目し，グラフを利用して求めることができる．

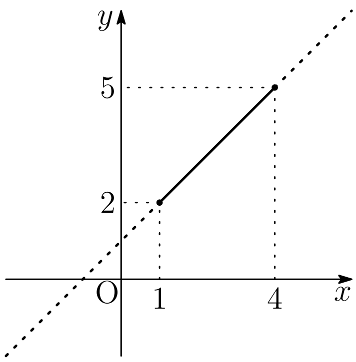
例題 2.3 関数 $y=x+1$ $(1 \leqq x \leqq 4)$ のグラフをかけ．また，その値域を求めよ．

【解】 この関数のグラフは，$y=x+1$ のグラフのうち，$1 \leqq x \leqq 4$ に対応する部分である．

$x=1$ のとき　　$y=1+1=2$

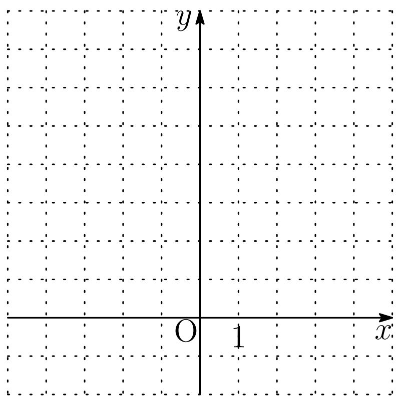
$x=4$ のとき　　$y=4+1=5$

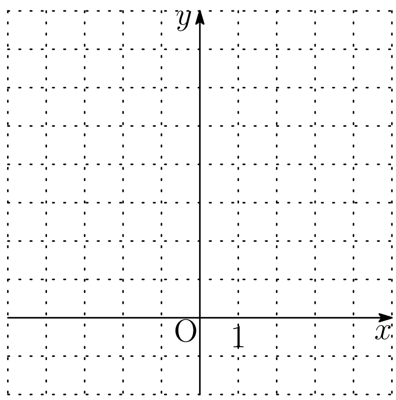
よって，グラフは右の図の実線部分である．
値域は　　$2 \leqq y \leqq 5$



2.3 次の関数のグラフをかけ．また，その値域を求めよ．

(1) $y=x+4$ $(-3 \leqq x \leqq 2)$　　　(2) $y=-2x+5$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$





1 次関数の最大・最小

1 次関数 $y = ax + b$ $(p \leqq x \leqq q)$ の場合

$a > 0$ ならば　$x = p$ で最小値，$x = q$ で最大値をとる．

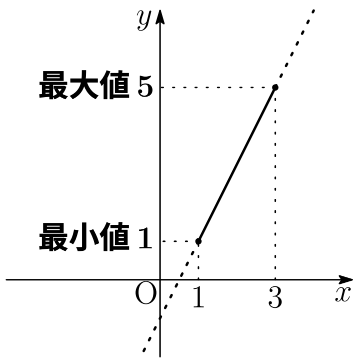
$a < 0$ ならば　$x = p$ で最大値，$x = q$ で最小値をとる．

例題 2.4 関数 $y = 2x - 1$ $(1 \leqq x \leqq 3)$ の値域を求めよ．また，関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ．

【解】 この関数のグラフは，$y = 2x - 1$ のグラフのうち，$1 \leqq x \leqq 3$ に対応する部分である．

$x = 1$ のとき　　$y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$x = 3$ のとき　　$y = 2 \cdot 3 - 1 = 5$



関数のグラフは右の図の実線部分である．
よって，関数の値域は $1 \leqq y \leqq 5$ である．
したがって　最大値は5，最小値は1 である．

2.4 次の関数の値域を求めよ．また，関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ．

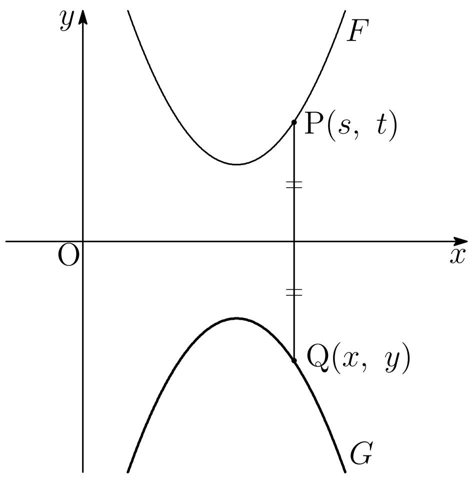
(1) $y = 3x + 1$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$

(2) $y = -2x + 3$ $(0 \leqq x \leqq 4)$

2.1.2　グラフの対称移動・平行移動

グラフの対称移動

図形上の各点を，直線または点に関して対称な位置に動かすことを，直線または点に関して**対称移動**するという．



関数 $y=f(x)$ のグラフ F を，x 軸に関して対称移動するとき，移動後の放物線を G とする．

F 上に点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ をとり，この対称移動によって，点 P 上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ へ動くとすると

$$t=f(s) \qquad \cdots ①$$
$$x=s,\ y=-t \qquad \cdots ②$$

② より $s=x$，$t=-y$ である．これを ① に代入すると

$$-y=f(x)$$

一般に，関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸，y 軸，原点それぞれに関して対称移動すると，移動後の放物線の方程式は，次のようになる．

x 軸：$-y=f(x)$　　y 軸：$y=f(-x)$　　原点：$-y=f(-x)$

直線 $y=2x+4\cdots①$ のグラフの，y 軸，原点それぞれに関する対称移動後の直線の方程式は，次のようになる．

x 軸に関する対称移動では

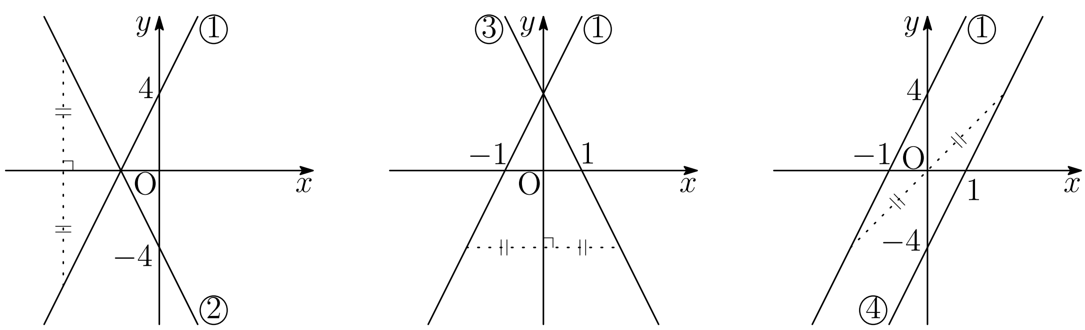
$-y=2x+4$　　すなわち　$y=-2x-4\cdots②$

y 軸に関する対称移動では

$y=2(-x)+4$　　すなわち　$y=-2x+4\cdots③$

原点に関する対称移動では

$-y=2(-x)+4$　すなわち　$y=2x-4\cdots④$



関数の対称移動について

[1] x 軸に関する対称移動をした関数は　$\boldsymbol{y \to -y}$
[2] y 軸に関する対称移動をした関数は　$\boldsymbol{x \to -x}$
[3] 原点に関する対称移動をした関数は　$\boldsymbol{x \to -x,\ y \to -y}$

と置き換えることで求めることができる.

例 2.5 直線 $-3x+4y+12=0$ を, x 軸, y 軸, 原点それぞれに関する対称移動後の直線の方程式は, 次のようになる.

x 軸に関する対称移動では

$-3x+4(-y)+12=0$　すなわち　$-3x-4y+12=0$

y 軸に関する対称移動では

$-3(-x)+4y+12=0$　すなわち　$3x+4y+12=0$

原点に関する対称移動では

$-3(-x)+4(-y)+12=0$　すなわち　$3x-4y+12=0$

2.5 直線 $2x-3y+6=0$ と x 軸に関して対称な直線の方程式を求めよ.

(九州電力)

2.6 直線 $2x+3y=6$ について, 次の問いに答えよ.　(きんでん)

(1) x 軸との交点の座標
(2) y 軸との交点の座標
(3) x 軸に関して対称な方程式
(4) y 軸に関して対称な方程式

2.7 直線 $3x+2y=6$ について, 次の問いに答えよ.　(JFE ホールディングス)

(1) x 軸との交点の座標
(2) y 軸との交点の座標
(3) x 軸に関して対称な方程式

グラフの平行移動

2次関数 $y=2x^2$ のグラフ F を，x 軸方向に1，y 軸方向に3だけ平行移動することを，グラフ上の点の移動で考えてみよう．移動後の放物線を G とする．

F 上に点 $\mathrm{P}(s,t)$ をとり，この平行移動によって，点Pが G 上の点 $\mathrm{Q}(x,y)$ へ動くとすると

$t=2s^2$ $\cdots$ ①

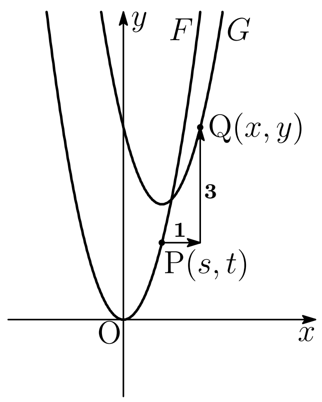
$x=s+1,\ y=t+3$ $\cdots$ ②

が成り立つ．② から

$s=x-1,\ t=y-3$

① に代入すると　$y-3=2(x-1)^2$

すなわち　$y=2(x-1)^2+3$



この2次関数のグラフが，放物線 G である．

一般に，関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，移動後の関数のようになる．

$$\boldsymbol{y-q=f(x-p)}$$

たとえば，$y=2x^2+3x+1$ のグラフを，x 軸方向に1，y 軸方向に3だけ平行移動すると，移動後の放物線の方程式は

$$y-3=2(x-1)^2+3(x-1)+1$$

すなわち　$y=2x^2-x+3$

x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した関数を求めるには，

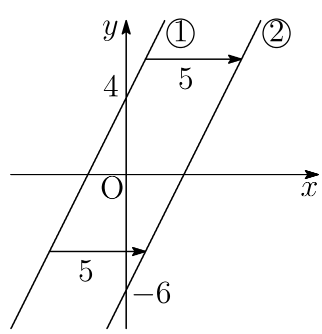
$$\boldsymbol{x\to x-p,\quad y\to y-q}$$

と置き換えることによって求めることができる．

例 2.6 $y=2x+4\cdots$① を x 軸方向に5だけ平行移動したものは

$y=2(x-5)+4$

すなわち　$y=2x-6\cdots$②



2.8 直線 $y = 2x + 3$ について，次の問いに答えよ．　(日本電気)

(1) x 軸方向に 3 だけ平行移動した方程式

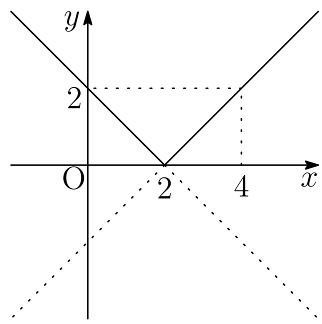
(2) y 軸に関して対称移動した方程式

(3) 点 $(2, -2)$ を通り，垂直な直線 (256 ページを参照)

例 2.7 $y = |x - 2|$ のグラフ

$x \geqq 2$ のとき　$y = x - 2$

$x < 2$ のとき　$y = -x + 2$



2.9 次の関数のグラフをかけ．

(1) $y = |x|$　(JFE ホールディングス)

(2) $y = |x + 1|$　(三菱自動車)

(3) $y = 1 - |x - 3|$　(四日市倉庫)

(4) $y = \dfrac{x + |x|}{2}$　(沖電気工業)

(5) $y = |2x + 3| - |x - 1|$　(アンリツ)

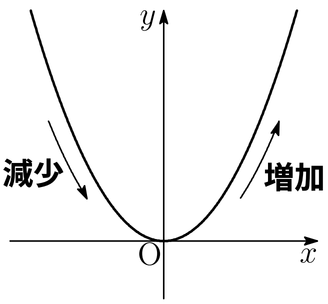
(6) $y = |x| + |x - 1| + |x - 2|$　(日野自動車)

2.1.3　2次関数のグラフ

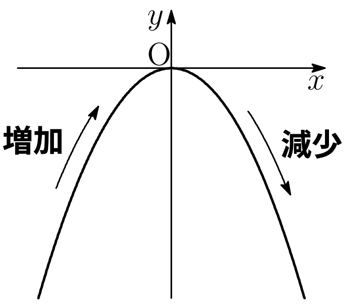
2次関数 $y = ax^2$ のグラフ

放物線で，軸は y 軸，頂点は原点.

$a > 0$ のとき　下に凸

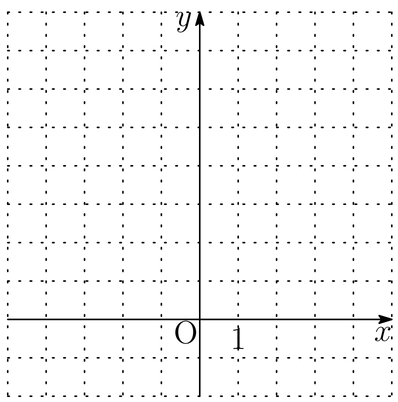


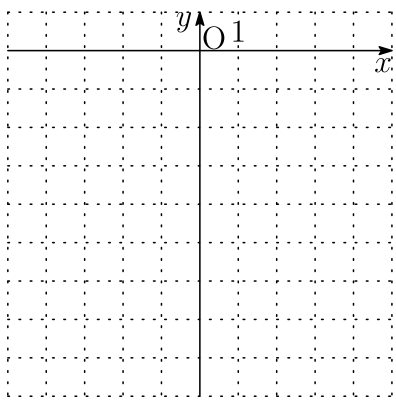
$a < 0$ のとき　上に凸



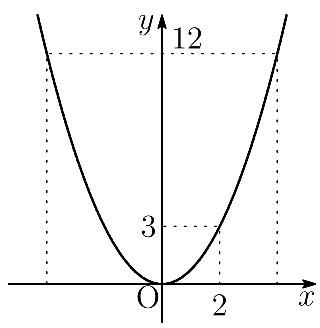
2.10 次の関数のグラフをかけ．また，その放物線は上に凸，下に凸のどちらであるか.

(1)　$y = 2x^2$　　　　(2)　$y = -\dfrac{1}{2}x^2$





2.11 右の放物線 $y = ax^2$ について，a の値を求めよ．また $y = 12$ のときの x の値を求めよ.
(YKK)



124 ページのグラフの平行移動により，2次関数 $y = ax^2$ のグラフを，y 軸方向に q だけ平行移動させたものは

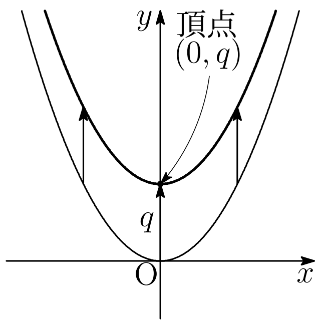
$$y - q = ax^2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = ax^2 + q}$$

のグラフである．

$y = ax^2 + q$ のグラフ

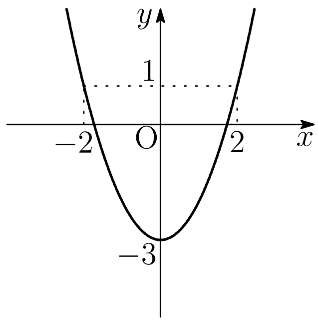
2次関数 $y = ax^2 + q$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを，点 $(0, q)$ が頂点となるように平行移動した放物線である．その軸は y 軸である．

図形上の各点を一定の方向に一定の距離だけ動かす移動を**平行移動**という．



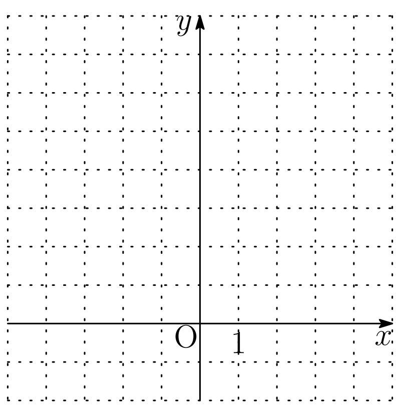
例 2.8 関数 $y = x^2 - 3$ のグラフをかけ．
(東横システム電建)

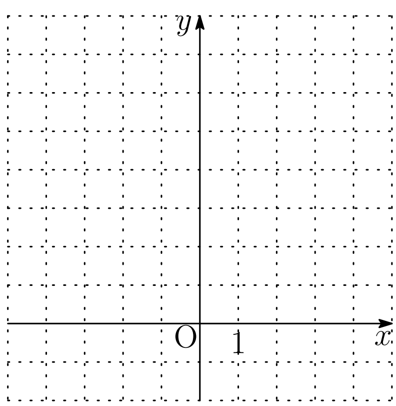
【解】 $y = x^2 - 3$ のグラフは，$y = x^2$ のグラフを点 $(0, -3)$ が頂点になるように平行移動した放物線で，右の図のようになる．



2.12 次の関数のグラフをかけ．また，その頂点を求めよ．

(1)　$y = 2x^2 + 1$　　　(2)　$y = x^2 - 1$　(シチズン時計)





124 ページのグラフの平行移動により，2次関数 $y=ax^2$ のグラフを，x 軸方向に p だけ平行移動させたものは

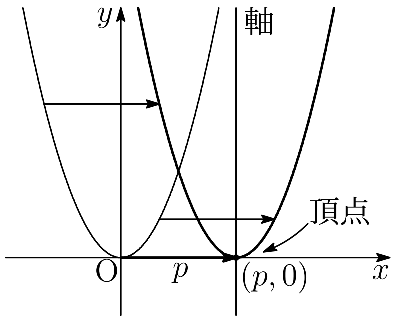
$$\boldsymbol{y=a(x-p)^2}$$

のグラフである．

$y=a(x-p)^2$ のグラフ

2次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを，点 $(p,0)$ が頂点となるように平行移動した放物線である．その軸は 直線 $x=p$ である．

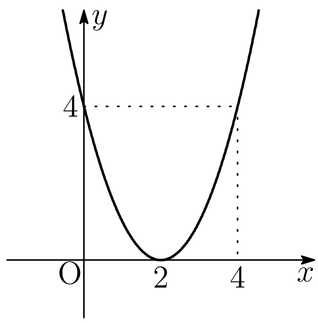
［注意］ 点 $(p,0)$ を通り y 軸に平行な直線を，**直線 $\boldsymbol{x=p}$** という．



例 2.9 次の関数のグラフをかけ．

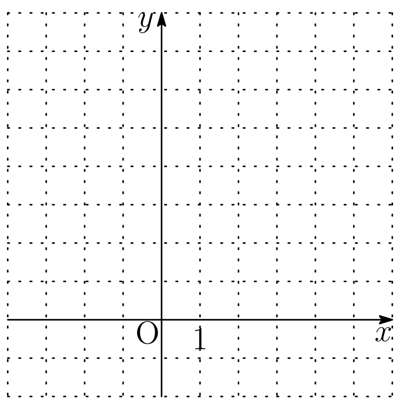
$$y=(x-2)^2$$

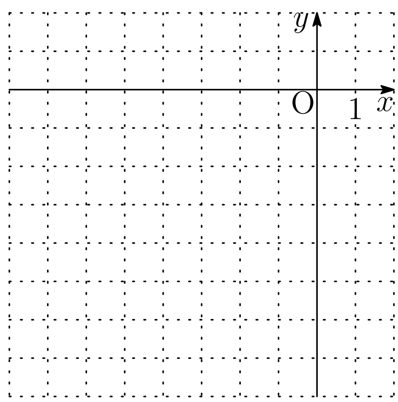
【解】 $y=(x-2)^2$ のグラフは，$y=x^2$ のグラフを点 (2, 0) が頂点になるように平行移動した放物線で，右の図のようになる．



2.13 次の関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

(1)　$y=2(x-1)^2$　　　(2)　$y=-2(x+3)^2$





124 ページのグラフの平行移動により，2 次関数 $y = ax^2$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動させたものは

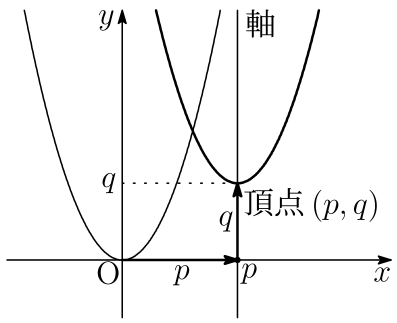
$$y - q = a(x-p)^2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = a(x-p)^2 + q}$$

のグラフである．

$\boldsymbol{y = a(x-p)^2 + q}$ のグラフ

2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを，点 (p, q) が頂点となるように平行移動した放物線である．その軸は 直線 $x = p$ である．

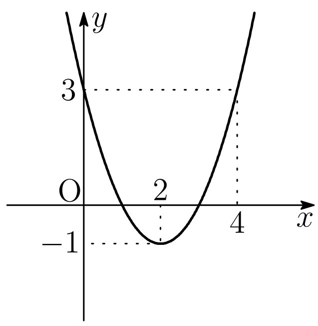
2 次関数 $y = ax^2$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動させたものが，$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフである．



例 2.10 次の関数のグラフをかけ．

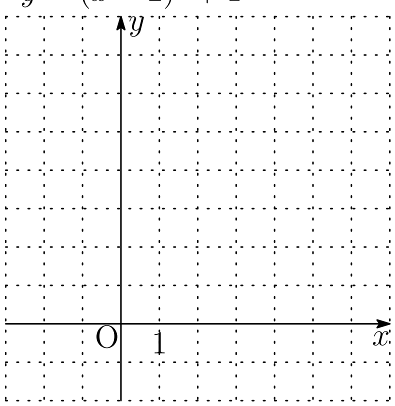
$$y = (x-2)^2 - 1$$

【解】 $y = (x-2)^2 - 1$ のグラフは，$y = x^2$ のグラフを点 $(2, -1)$ が頂点になるように平行移動した放物線で，右の図のようになる．

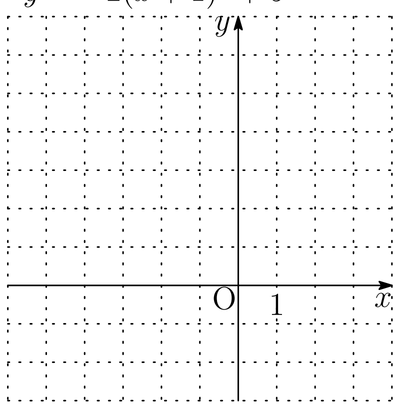


2.14 次の関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

(1) $y = (x-2)^2 + 1$



(2) $y = -2(x+1)^2 + 5$



2.15 2 次関数 $y = x^2$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動させると，どのような 2 次関数のグラフになるか．その関数の式を求めよ．

(トヨタ自動車)

ax^2+bx+c の平方完成

2次式を平方完成するときは，次の変形を使うと考えやすい．

$$x^2+\blacksquare x=\left(x+\frac{\blacksquare}{2}\right)^2-\left(\frac{\blacksquare}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a(x^2+\blacksquare x)+c\\&=a\left\{\left(x+\frac{\blacksquare}{2}\right)^2-\left(\frac{\blacksquare}{2}\right)^2\right\}+c\\&=a\left(x+\frac{\blacksquare}{2}\right)^2-a\left(\frac{\blacksquare}{2}\right)^2+c\end{aligned}$$

平方完成

$a(x+\square)^2+\bigcirc$ の形の2次式に表すこと

例 2.11 2次式 $2x^2+8x+3$ を平方完成せよ．

【解】

$$\begin{aligned}2x^2+8x+3&=2(x^2+4x)+3\\&=2\{(x+2)^2-2^2\}+3\\&=2(x+2)^2-2\cdot 2^2+3\\&=2(x+2)^2-5\end{aligned}$$

① x^2，x を含む項だけを x^2 の係数2でくくる．
② $x^2+4x=(x+2)^2-2^2$
③ 2をかけて｛　｝をはずす．

2.16 次の2次式を平方完成せよ．

(1) x^2+6x　　(2) x^2-4x

(3) x^2+2x-2　　(4) x^2-6x+5

(5) $2x^2+4x+3$　　(6) $-x^2-6x-4$

(7) $2x^2+6x+1$　　(8) $-3x^2+3x-1$

$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

- $y = ax^2$ のグラフを平行移動した放物線.
- 平方完成により，$y = a(x-p)^2 + q$ の形に変形して，頂点や軸を求める.

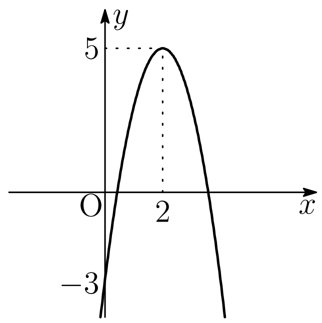
例題 2.12 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ.

$$y = -2x^2 + 8x - 3$$

【解】
$$\begin{aligned} -2x^2 + 8x - 3 &= -2(x^2 - 4x) - 3 \\ &= -2\{(x-2)^2 - 2^2\} - 3 \\ &= -2(x-2)^2 + 5 \end{aligned}$$

よって　$y = -2(x-2)^2 + 5$

したがって，この関数のグラフは右の図のような放物線である．頂点は点 $(2,\ 5)$，軸は直線 $x = 2$ である.



2.17 次の $\boxed{}$ をうめよ.

(1) $y = x^2 + 8x + 15$ の頂点の座標は $(\boxed{},\ \boxed{})$ である.　(積水ハウス)

(2) 2 次関数 $y = 3 - 2x - x^2$ のグラフは，放物線 $y = \boxed{}$ のグラフを平行移動したもので，頂点の座標は $(\boxed{},\ \boxed{})$ である.　(東邦ガス)

2.18 次の放物線の頂点の座標および軸の方程式を求めよ.

(1) $y = \dfrac{3}{2}(x-4)^2 + 5$　(大同特殊鋼)

(2) $y = 2x^2 + 6x + 1$　(きんでん)

(3) $y = (1 + 2x)(2 - x)$　(JFE ホールディングス)

(4) $y + 2x^2 - 8x + 4 = 0$　(旭ガラス)

(5) $y = 3x^2 + 7x + 6$　(横河ブリッジ)

(6) $y = \dfrac{x^2 + 4x}{2}$　(日本特殊機器)

2.19 次の問いに答えよ． (スズキ)

(1) $y = -2x^2 + 5$ と x 軸に関して対称な方程式を求めよ．

(2) $y = x^2 - 4x$ と原点に関して対称な方程式を求めよ．

2.20 $y = 3x^2 - 6x + 7$ について次の問いに答えよ． (ボッシュ)

(1) 頂点の座標を求めよ．

(2) 原点に関して対称な方程式を求めよ．

2.21 $y = 2x^2 - 4x - 1$ について次の問いに答えよ． (トクヤマ)

(1) 頂点の座標

(2) 原点に関して対称な方程式

(3) x 軸の正の方向に 4，y 軸の負の方向に 3 だけ平行移動した方程式

2.22 放物線 $y = x^2 + 2x - 3$ がある．これを次のように移動したときの放物線の式を求めよ． (石川島汎用機械)

(1) 頂点が原点と一致するように平行移動する．

(2) 頂点が $(0, -2)$ となるように平行移動する．

2.23 $y = x^2 - 2x - 3$ のグラフを k とするとき，次の問いに答えよ． (曙ブレーキ)

(1) k を y 軸方向に平行移動し，原点を通る 2 次関数を求めよ．

(2) k を x 軸方向に平行移動し，原点を通る 2 次関数を求めよ．

2.24 次の関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

(1) $y = x^2 + 2x + 3$ (シチズン時計)

(2) $y = x^2 + 2x - 3$ (シチズン時計)

(3) $y = x^2 - 2x + 2$ (豊和工業)

(4) $y = x^2 - 2x - 3$ (小田急電鉄)

(5) $y = 2x^2 - 4x - 6$ (ブラザー工業)

(6) $y = -2x^2 + x + 10$ (住友電気工業)

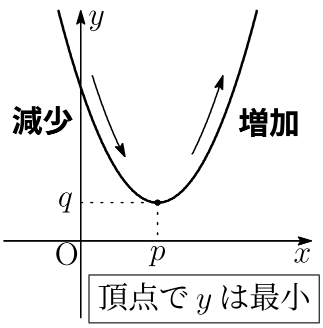
2.2　2次関数の値の変化

2.2.1　2次関数の最大・最小

2次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ の最大・最小

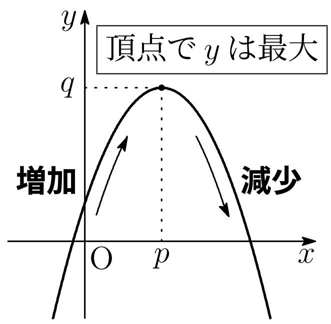
$a > 0$ のとき，$x = p$ で最小値 q をとる．最大値はない．
$a < 0$ のとき，$x = p$ で最大値 q をとる．最小値はない．

$a > 0$ のとき



y はいくらでも大きな値をとる

$a < 0$ のとき



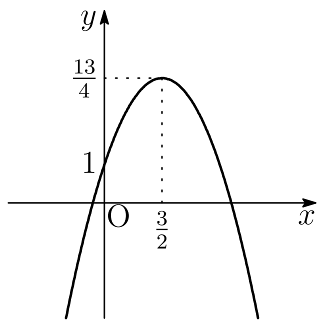
y はいくらでも小さな値をとる

例題 2.13 $y = -x^2 + 3x + 1$ に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

【解】 $-x^2 + 3x + 1 = -\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{13}{4}$

よって　　$y = -\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{13}{4}$

したがって，y は $x = \dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{13}{4}$ をとる．
最小値はない．



2.25 次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1) $y = x^2 - 4x - 1$　　(佐世保重工業)

(2) $y = -4x^2 + 16x + 32$　　(愛知時計電機)

2.26 次の放物線の頂点，軸および最大値または最小値を求めよ．(トヨタ自動車)

(1)　$y = x^2 + x$　　(2)　$y = -x^2 + 4x + 1$

2.27 $y = x^2 - 2mx + 2n$ が $x = 6$ のとき最小値 14 である．m，n の値を求めよ．

(ホシザキ電機)

2.28 $y = 2x^2 + 8x + a$ の最小値が 10 となるように，a の値を求めよ．

(新日本石油)

2.29 $y = x^2 - 2ax + a - 1$ について次の問いに答えよ．(トヨタ自動車)

(1) $a = 5$ のとき，最小値を求めよ．

(2) 頂点の y 座標が -3 になるとき，a の値を求めよ．

2.30 次の問いに答えよ．(島津製作所)

(1) x の 2 次関数 $2x^2 + 3mx + 2m$ の最小値 y は，m のどんな関数か．

(2) この m の関数 y は m のどんな値に対して最大となるか．また，その最大値を求めよ．

2.31 毎秒 20m の速さで投げ上げた物体の t 秒後の高さを ym とすれば，$y = 20t - 5t^2$ で与えられる．何秒後に最高の高さに達するか．またそのときの高さはどれだけか．

(神鋼電機)

$y = ax^2 + bx + c$ $(m \leqq x \leqq n)$ の最大・最小

グラフをかき，頂点の位置，定義域の両端における y の値に注目して，最大・最小を求める．

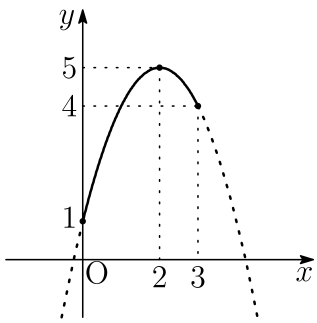
例題 2.14　関数 $y = -x^2 + 4x + 1$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

【解】 $-x^2 + 4x + 1 = -(x-2)^2 + 5$ であるから

$$y = -(x-2)^2 + 5$$

$0 \leqq x \leqq 3$ でのグラフは，右の図の実線部分である．よって，y は

$x = 2$ で最大値 5 をとり，
$x = 0$ で最小値 1 をとる．



2.32 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1) $y = -x^2 + 3$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$　(新日本製鐵)

(2) $y = x^2 - 2x + 2$ $(0 \leqq x \leqq 3)$　(JR)

(3) $y = x^2 - 4x + 3$ $\left(\frac{1}{2} \leqq x \leqq 4\right)$　(小松製作所)

(4) $y = x^2 - 4x + 3$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$　(JFE ホールディングス)

(5) $y = 1 - 4x - x^2$ $(-3 \leqq x \leqq 2)$　(九州電力)

2.33 $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$72 - 14x - x^2$ の最大値と最小値を求めよ．(小田急電鉄)

2.34 $-2 \leqq x \leqq 4$ のとき $(2x-1)(5-x)$ の値の範囲を求めよ．　(太平洋セメント)

2.35 放物線 $y = 3x^2 - 18x + 25$ は (　　) に凸で，頂点の座標は (　　,　　) である．この曲線において $2 \leqq x \leqq 5$ での最大値は (　　) である．さらにこの放物線を原点において接するようにするためには，この放物線を x 軸方向に (　　)，y 軸方向に (　　) だけ平行移動しなければならない．　(マツダ)

2.36 $y = ax^2 + bx + 2a^2$ で $x = 1$ のとき，最大値 1 である．次の問いに答えよ．
(日立製作所)

(1) a，b の値を求めよ．

(2) $2 \leqq x \leqq 4$ で最大値，最小値を求めよ．

2.37 x の 2 次関数 $f(x) = -x^2 + ax + b$ は $f(1) = 3$ で，最大値は 4 である．a，b の値を求めよ．　(太平洋セメント)

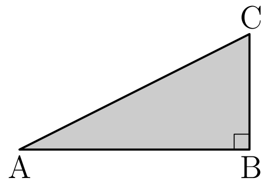
最大・最小の応用 (文章題)

① 何を変数 (x) にするかを決め，その変数の範囲 (定義域) を定める．

② 最大・最小を考えるもの (y) を，変数 (x) を用いて表す．

③ 定義域に注意して，② の最大・最小を求める．

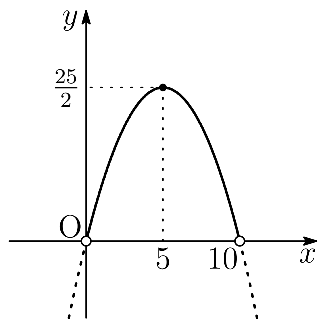
例題 2.15 直角三角形 ABC において，直角をはさむ 2 辺 AB，BC の長さの和が 10cm であるとする．このような三角形の面積の最大値を求めよ．



【解】 $\mathrm{AB}=x$ とすると　$\mathrm{BC}=10-x$

$x>0$ かつ $10-x>0$ から

$$0<x<10 \quad \cdots ①$$



三角形の面積を $y\ \mathrm{cm}^2$ とすると

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\cdot x(10-x) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-10x) \\ &= -\frac{1}{2}\{(x-5)^2-5^2\} \\ &= -\frac{1}{2}(x-5)^2+\frac{25}{2} \end{aligned}$$

① において，y は $x=5$ で最大値 $\dfrac{25}{2}$ をとる．　(答) $\dfrac{25}{2}\ \mathrm{cm}^2$

2.38 直角三角形の直角をはさむ 2 辺の和が 24cm のとき，　(日本毛織)

(1) その面積が最大となるのは，どんなときか．

(2) その斜辺が最小となるときは，どんなときか．

2.39 長さ ℓ なる針金を曲げ扇形を作る．この面積を最大にするには，どのようにすればよいか．またこのときの面積を求めよ．　(島津製作所)

[解説] 扇の半径を r とすると

$$\text{扇の面積}=\text{円の面積}\times\frac{\text{円弧}}{\text{円周}}=\pi r^2\times\frac{\text{円弧}}{2\pi r}=\frac{1}{2}\times\text{半径}\times\text{円弧}$$

例題 2.16 $2x+y=10$ のとき，次の値を求めよ．

(1) x^2+y^2 の最小値　　(2) xy の最大値

【解】 $2x+y=10$ から　$y=10-2x$　$\cdots$①

(1) ① より

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 &= x^2+(10-2x)^2 \\
&= 5x^2-40x+100 \\
&= 5(x-4)^2+20
\end{aligned}
$$

よって　　$x=4$ で最小値 20 をとる．

このとき　$y=10-2\cdot4=2$

ゆえに　　$x=4$，$y=2$ のとき 最小値 20

(2) ① より

$$
\begin{aligned}
xy &= x(10-2x) \\
&= -2x^2+10x \\
&= -2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}
\end{aligned}
$$

よって　　$x=\dfrac{5}{2}$ で最大値 $\dfrac{25}{2}$ をとる．

このとき　$y=10-2\times\dfrac{5}{2}=5$

ゆえに　　$x=\dfrac{5}{2}$，$y=5$ のとき 最大値 $\dfrac{25}{2}$

2.40 次の問いに答えよ．

(1) $x+y=2$ のとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ．　(いすゞ自動車)

(2) $x+y=5$ のとき，x^2+3y^2 の最小値を求めよ．　(新日本石油)

例題 2.17 ある商品は売価 15 円のき，平均 500 個の売上がある．これを 1 円値上げするごとに 20 個ずつ売上個数が減っていくものとすれば，最高の売上金額を得るには，売価をいくらにすればよいか．　(三井金属鉱業)

【解】 x 円値上げしたとき，売価は $(15+x)$ 円，売上個数は $(500-20x)$ 個であるから，売上金額は $(15+x)(500-20x)$ となる．

ゆえに
$$\begin{aligned}(15+x)(500-20x) &= -20(x+15)(x-25)\\ &= -20(x^2-10x)+7500\\ &= -20\{(x-5)^2-5^2\}+7500\\ &= -20(x-5)^2+8000\end{aligned}$$

したがって，5 円値上げしたとき，売上が最大となる．

よって，売価を 20 円にすればよい．

2.41 次の問いに答えよ．

(1) ある品物の売値が 50 円のとき，1200 個の売上がある．品物が 1 円上がるごとに 20 個ずつ売上が減っていく．1 個をいくらで売れば売上金額が最大になるか．　(ダイフク)

(2) ある品物の売値が 1 個 100 円のとき，1 日 300 個の売上がある．売値を 1 個につき 10 円値上げすると 15 個の割合で売上が減る．1 日の売上金額を最大にするには売値をいくらにしたらよいか．　(東陶機器)

(3) 1 個の原価 70 円の商品を 1 個につき 100 円で売ると，1ヶ月あたりの売上は 1600 個である．もし値上げすると，単価 1 円の値上げにつき，20 個の割合で売上が減少するという．利益を最大にするには，売価はいくらにすればよいか．　(マツダ)

(4) ある製品を売り出すのに定価を 1 個 2 万円とすれば 1ヶ月に平均 1000 個売れるという．いま，この製品を値上げしたいが，値上高 25 円について 1 個の割合で売上が減少することが予想される．売上金額を最大にするためには 1 個の売価をいくらにすればよいか．　(ニコン)

2.2.2　2 次関数の決定

放物線の軸や頂点から関数を決定

2 次関数を決定する問題で，その軸や頂点がわかっているときは，
$y=a(x-p)^2+q$ の形を利用するとよい．

例題 2.18 グラフが次の条件を満たすような 2 次関数を求めよ．

(1) 頂点が点 $(1,\ 2)$ で，点 $(3,\ 6)$ を通る．

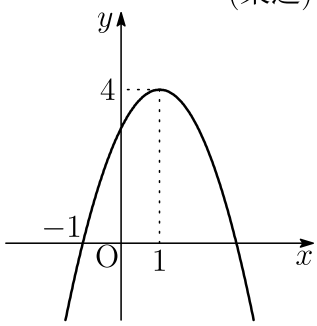
(2) 直線 $x=-1$ を軸とし，2 点 $(1,\ 1)$，$(-2,\ 4)$ を通る．

【解】 (1) 頂点が $(1,\ 2)$ であるから，求める関数は $y=a(x-1)^2+2$ とおける．
このグラフが $(3,6)$ を通るから　$6=4a+2$　ゆえに　$a=1$
よって　$y=(x-1)^2+2$　すなわち　$y=x^2-2x+3$

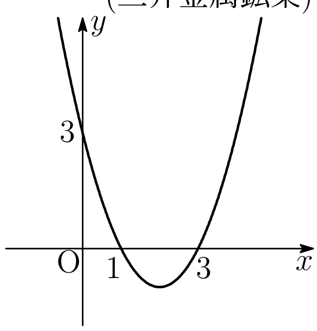
(2) 直線 $x=-1$ を軸とするから，求める関数は $y=a(x+1)^2+q$ とおける．
このグラフが 2 点 $(1,\ 1)$，$(-2,\ 4)$ を通るから
$1=4a+q,\ 4=a+q$　これを解くと　$a=-1,\ q=5$
よって　$y=-(x+1)^2+5$　すなわち　$y=-x^2-2x+4$

2.42 頂点が $(3,-5)$ で，点 $(5,3)$ を通る放物線の方程式を求めよ．　(日本無線)

2.43 次の放物線の方程式を求めよ．　(東芝)



2.44 右の放物線のグラフの方程式と頂点の座標を求めよ．　(三井金属鉱業)



放物線上の 3 点から関数を決定

2 次関数を決定する問題で，グラフの通る 3 点が与えられた場合には,
$y = ax^2 + bx + c$ の形を利用する.

例題 2.19 2 次関数のグラフが 3 点 $(1,\ 0)$，$(2,\ 3)$，$(-1,\ 6)$ を通るとき,
この 2 次関数を求めよ.

【解】 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする.
グラフが 3 点 $(1,\ 0)$，$(2,\ 3)$，$(-1,\ 6)$ を通るから

$$0 = a + b + c \qquad \cdots ①$$
$$3 = 4a + 2b + c \qquad \cdots ②$$
$$6 = a - b + c \qquad \cdots ③$$

② − ① から　$3a + b = 3$　$\cdots$ ④

① − ③ から　$2b = -6$　$\cdots$ ⑤

④，⑤ を解くと　$b = -3$，$a = 2$

これらを ① に代入して　$c = 1$

よって，求める 2 次関数は　$y = 2x^2 - 3x + 1$

2.45 $y = x^2 + mx + n$ のグラフが 2 点 $(-2, -1)$, $(2, 7)$ を通るとき，m, n の値，およびこの関数の最大値または最小値を求めよ. (石川島播磨重工業)

2.46 次の問いに答えよ.

(1) $y = ax^2 + bx + c$ が 3 点 $\left(2,\ \dfrac{7}{2}\right)$，$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(-2,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通るとき，a, b, c の値を求めよ. (九州電力)

(2) 3 点 $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(2, 4)$ を通る放物線の方程式を求めよ. (ユニチカ)

(3) 3 点 $(1, 6)$, $(-3, 2)$, $(2, 12)$ を通る放物線の方程式を求めよ. (日産自動車)

2.47 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の最大値は $-3a$ に等しく，かつ，この 2 次関数グラフは 2 点 $(-1, -2)$, $(1, 6)$ を通るという. a, b, c の値を求めよ.
(神戸製鋼所)

2.3 2次不等式

2.3.1 2次関数のグラフと x 軸の位置関係

2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，共有点の x 座標は，$y = 0$ となる x の値，すなわち2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解である．

例題 2.20 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ．

(1) $y = x^2 - 2x - 4$　　(2) $y = -x^2 + 4x - 4$

【解】 (1) 共有点の x 座標は，2次方程式

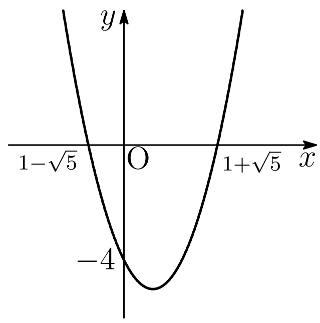
$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

の解である．

これを解くと　$x = 1 \pm \sqrt{5}$

よって，求める共有点の座標は

$(1 - \sqrt{5},\ 0)$，$(1 + \sqrt{5},\ 0)$



(2) 共有点の x 座標は，2次方程式

$$-x^2 + 4x - 4 = 0$$

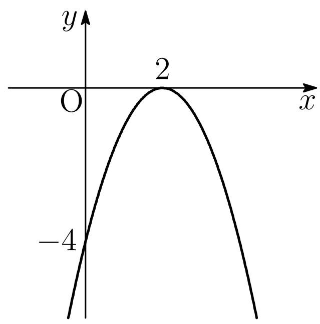
の解である．

両辺に -1 をかけて　$x^2 - 4x + 4 = 0$

これを解くと　$x = 2$

よって，求める共有点の座標は

$(2,\ 0)$



2.48 $y = 2x^2 - 4x - 6$ のグラフについて，次の(　)をうめよ．　(シチズン時計)

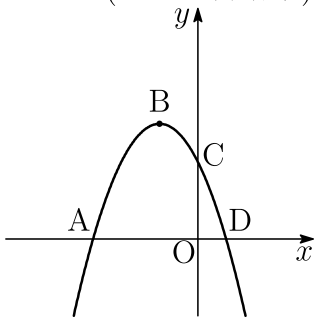
(1) y 軸との交点を求めるには，与式に $x = (\quad)$ を代入して，$y = (\quad)$ を得る．

(2) x 軸との交点を求めるには，与式に $y = (\quad)$ を代入して，$x = (\quad)$，$(\quad)$ を得る．

(3) 軸を求めるには，$y = \{x - (\quad)\}^2 - 8$ と変形できるから，$x = (\quad)$ を得る．

(4) (3) の変形から y は最(　)値をもつことがわかり，それは $x = (\quad)$ のとき，(　) である．

2.49 右の図は $y = -x^2 - 2x + 2$ のグラフである．A，B，C，D の座標を求めよ．
(トヨタ自動車)



2.50 2 次関数 $y = x^2 + 4x - 5$ のグラフについて次の問いに答えよ．(川崎重工業)

(1) 最大値または最小値を求めよ．

(2) y 軸との交点の座標を求めよ．

(3) x 軸との交点の座標を求めよ．

(4) (1)〜(3) をもとにグラフをかけ．

2.51 3 点 $(-2, 48)$，$(1, 6)$，$(6, 16)$ を通る放物線がある．これについて，次の問いに答えよ．
(JFE ホールディングス)

(1) その放物線の式を求めよ．

(2) その放物線の x 軸との交点の座標を求めよ．

(3) その放物線の頂点の座標を求めよ．

2.52 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが 3 点 $(0, -2)$，$(-1, 3)$，$(3, 7)$ を通るとき，次の問いに答えなさい．
(日産自動車)

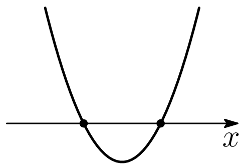
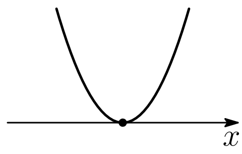
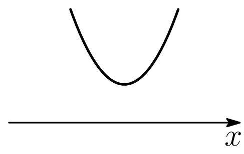
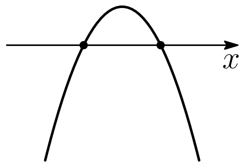
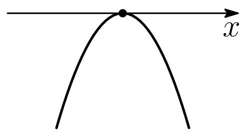
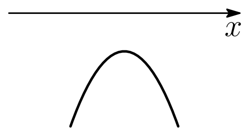
(1) a，b，c の値を求めよ．

(2) このグラフと x 軸，y 軸との交点を結んで得られる三角形の面積はいくらか．

(3) y の最小値はいくらか．

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の位置関係

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の位置関係は，次の表にまとめられる．

$b^2 - 4ac$ の符号	$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
x 軸との 位置関係	異なる 2 点で 交わる	接する	共有点を もたない
x 軸との 共有点の個数	2 個	1 個	0 個
$a > 0$ のとき			
$a < 0$ のとき			
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数の解	$\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$-\dfrac{b}{2a}$	ない

[注意] 上の $b^2 - 4ac$ を D で表すことがある．

例題 2.21　2 次関数 $y = x^2 - mx + 25$ のグラフが x 軸に接するとき，定数 m の値を求めよ．また，そのときの接点の座標を求めよ．

【解】 このグラフが x 軸に接するための条件は，係数について

$$(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0 \qquad \text{すなわち} \qquad m^2 - 100 = 0$$

ゆえに，m の値は　　$m = \pm 10$

接点の x 座標は　　$x = -\dfrac{-m}{2 \cdot 1} = \dfrac{m}{2}$　　　$\leftarrow x = -\frac{b}{2a}$

よって，接点の座標は　$m = 10$ のとき $(5,\ 0)$，$m = -10$ のとき $(-5,\ 0)$

2.53　$y = x^2 - ax + 1$ が x 軸と接するときの a の値を求めよ．また，接点の座標を求めよ．　(全日本空輸)

放物線と直線の共有点

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と直線 $y = mx + n$ の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases}$$

の解で与えられる．2 次方程式 $ax^2 + bx + c = mx + n$ が実数解をもつとき共有点が存在し，とくに**重解**をもつとき，放物線と直線は**接する**.

例題 2.22 次の放物線と直線の共有点の座標を求めよ.

(1)　$y = x^2 - 4x + 5$，$y = x + 1$

(2)　$y = x^2 - 4x + 5$，$y = 2x - 4$

(3)　$y = -x^2 + 1$，$y = -x + 2$

【解】 (1) y を消去して　$x^2 - 4x + 5 = x + 1$

式を整理すると　$x^2 - 5x + 4 = 0$

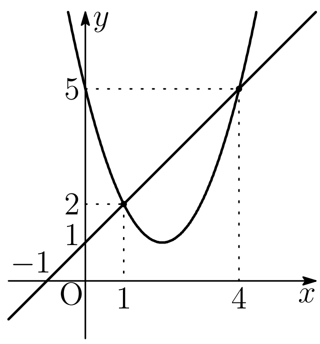
これを解いて　$x = 1,\ 4$

$y = x + 1$ に代入すると

$x = 1$ のとき　$y = 1 + 1 = 2$

$x = 4$ のとき　$y = 4 + 1 = 5$

よって，共有点の座標は　$(1,\ 2)$，$(4,\ 5)$



(2) y を消去して　$x^2 - 4x + 5 = 2x - 4$

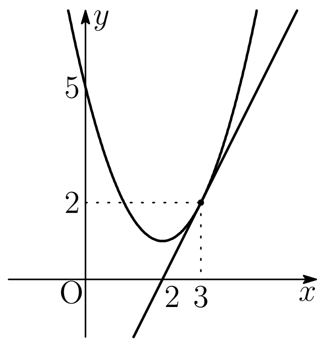
式を整理すると　$x^2 - 6x + 9 = 0$

これを解いて　$x = 3$

$y = 2x - 4$ に代入すると

$y = 2{\cdot}3 - 4 = 2$

よって，共有点の座標は　$(3,\ 2)$

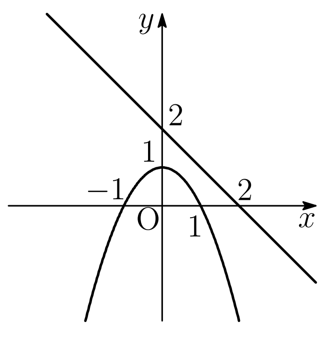


(3) y を消去して　$-x^2 + 1 = -x + 2$

式を整理すると　$x^2 - x + 1 = 0$

ここで　$D = (-1)^2 - 1{\cdot}1 = -1 < 0$

ゆえに，共有点はない.



2.54 次の放物線と直線の共有点があれば，その座標を求めよ．

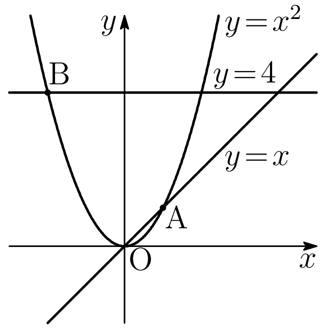
(1) $y=x^2-2x+1$，$y=-2x+5$ (富士電機ホールディングス)

(2) $y=x^2-2x-3$，$y=-x+3$ (日本電気)

(3) $y=x^2+x-3$，$y=2x+3$ (日本精工)

2.55 右図において，2 点 A，B の座標を求めよ．

(YKK)



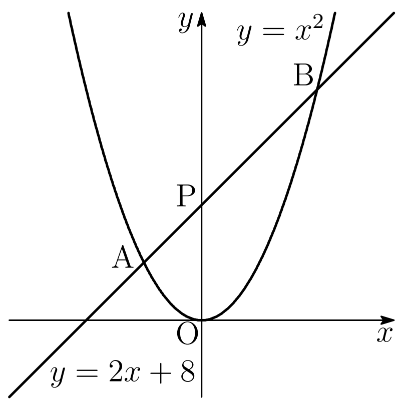
2.56 右の図のように 2 次関数 $y=x^2$ と 1 次関数 $y=2x+8$ のグラフが 2 点 A，B で交わっているとき，次の問いに答えよ．

(沖電気工業)

(1) A，B の座標

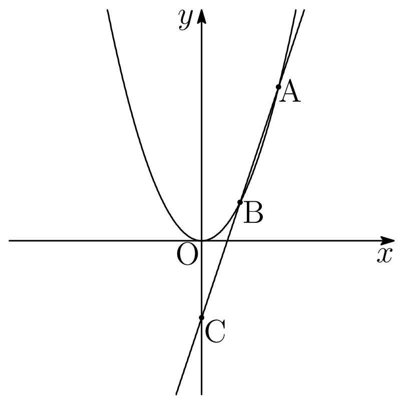
(2) 線分 AB の長さ

(3) △OAP と △OBP の面積比



2.57 右の図は $y=x^2$ $\cdots$ ① と $y=ax+b$ $\cdots$ ② のグラフで，① と②の交点 A，B のうち，A の座標は $(2,4)$，② と y 軸との交点 C の座標は $(0,-2)$ であるという．a，b の値および交点 B の座標を求めよ．

(日産自動車)

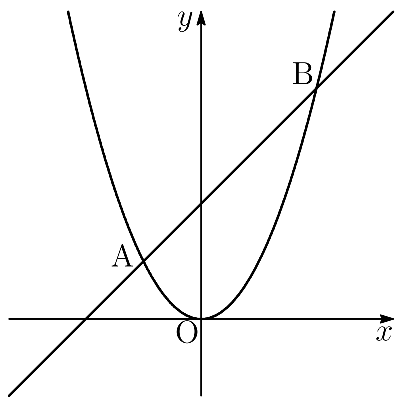


2.58 $y = ax + b$, $y = mx^2$ を同一平面上に描いたもので，交点 B の座標は $(4, 12)$ である．次の問いに答えよ．(愛知製鋼)

(1) m の値を求めよ．

(2) 点 A の x 座標が -2 であるとき，A の y 座標を求めよ．

(3) 2 点 A，B を通る直線の方程式を求めよ．

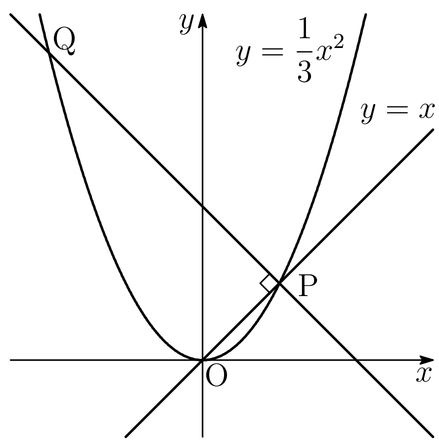


2.59 次の問いに答えよ．(JR)

(1) 点 P の座標を求めよ．

(2) 直線 PQ の方程式を求めよ．

(3) △OPQ の面積を求めよ．

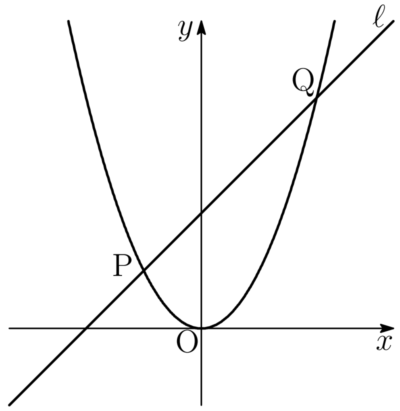


2.60 図のように，放物線と直線 ℓ が P，Q で交わっている．ℓ の傾きが 2，P の座標が $(-1, 2)$ であるとき，次の問いに答えよ．(住友金属工業)

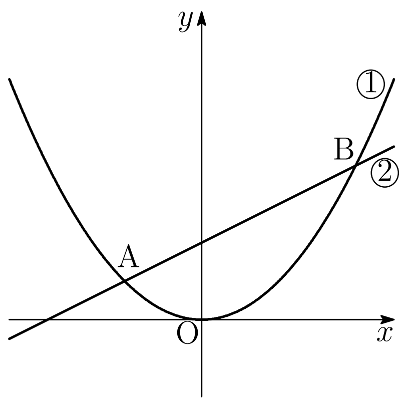
(1) 放物線の方程式を求めよ．

(2) 直線 ℓ の式を求めよ．

(3) 点 Q の座標を求めよ．



2.61 右の図のように放物線 $y = ax^2 \quad \cdots①$ と直線 $y = \dfrac{1}{2}x + b \quad \cdots②$ が 2 点 A，B で交わっている．点 B の座標が $(4, 4)$ のとき，次の問いに答えよ．(新日本製鐵)



(1) a，b の値を求めよ．

(2) 線分 AB の中点を通り，② の直線と垂直に交わる直線の式を求めよ．

(3) 放物線 ① 上に四角形 OCBA が台形となるような点 C をとる．この点 C の座標を求めよ．

2.62 放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ と直線 $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ との交点を A，B とする．以下の問いに答えよ．(新日本製鐵)

(1) 点 A，B の座標を求めよ．(ただし，点 A の x 座標 $<$ 点 B の x 座標)

(2) 原点 O と点 A，B を結んで作る $\triangle$OAB の面積を求めよ．

(3) 点 B を頂点とし，原点 O を通る放物線の方程式を求めよ．

2.63 $y = 2x^2 + 5x - 3$ について次の各問いに答えよ．(富士電機総合研究所)

(1) x 軸と交わる点の座標を求めよ．

(2) $y = x + 3$ との交点の座標を求めよ．

2.64 次の問いに答えよ．(新日本製鐵)

(1) 関数 $y = x^2 - 4x + 4$ のグラフを書け．

(2) y 軸上の点 A$(0, 16)$ と $y = x^2 - 4x + 4$ 上の点 B を結ぶ線分 AB が x 軸に平行なとき，点 B の座標を求めよ．(ただし，$x \geqq 0$ とする)

(3) (2) のとき，この曲線上に AC $=$ BC となる点 C をとるとき，点 C の座標を求めよ．

例題 2.23 放物線 $y = x^2 - x + 1$ と直線 $y = ax - 3$ が接するような定数 a の値を求めよ.

【解】 放物線と直線の方程式から y を消去すると

$$x^2 - x + 1 = ax - 3$$

ゆえに　$x^2 - (a+1)x + 4 = 0$

放物線と直線が接するとき，$D = 0$ であるから

$$\{-(a+1)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

整理すると　$a^2 + 2a - 15 = 0$

$$(a-3)(a+5) = 0$$

よって　$a = 3, -5$

2.65 放物線 $y = x^2 - 2x + 11$ の頂点の座標と，これに接する直線 $y = ax + 2$ の a の値を求めよ. (日立製作所)

2.66 直線 $y = mx - 5$ が放物線 $y = x^2 - 4x + 4$ に接するとき，m の値を求めよ. (日立製作所)

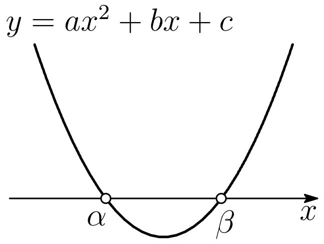
2.3.2　2 次不等式

2 次不等式の解

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c\ (a > 0)$ のグラフと x 軸が異なる 2 点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ で交わるとき

$ax^2 + bx + c > 0$ の解は　$x < \alpha,\ \beta < x$

$ax^2 + bx + c < 0$ の解は　$\alpha < x < \beta$



[注意] $\alpha < \beta$ のとき　$(x-\alpha)(x-\beta) > 0$ の解は　$x < \alpha,\ \beta < x$

$(x-\alpha)(x-\beta) < 0$ の解は　$\alpha < x < \beta$

例 2.24 次の 2 次不等式を解け．

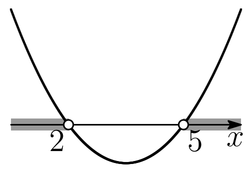
(1)　$(x-2)(x-5) > 0$　　(2)　$x^2 - x - 2 \leqq 0$

【解】 (1) $(x-2)(x-5) = 0$ を解くと　$x = 2,\ 5$

$y = (x-2)(x-5)$ のグラフと x 軸の位置関係は，右の図のようになる．

よって，$(x-2)(x-5) > 0$ の解は

$x < 2,\ 5 < x$

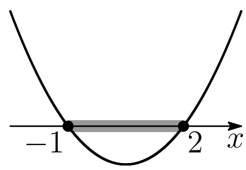


(2) $x^2 - x - 2 = 0$ を解くと　$x = -1,\ 2$

$y = x^2 - x - 2$ のグラフと x 軸の位置関係は，右の図のようになる．

よって，$x^2 - x - 2 \leqq 0$ の解は

$-1 \leqq x \leqq 2$



2.67 次の 2 次不等式を解け．

(1)　$x(x-1) < 0$　(東横システム電建)

(2)　$x^2 - 3x - 4 < 0$　(本田技研工業)

(3)　$x^2 - 3x - 4 > 0$　(アキレス)

(4)　$x^2 + 5x - 6 < 0$　(シチズン時計)

(5)　$x^2 - 5x - 6 \leqq 0$　(ダイハツ工業)

(6) $x^2+3x-10>0$ (リコー)

(7) $x^2-3x-10>0$ (王子製紙)

(8) $x^2-x-6<0$ (住友精化)

(9) $x^2-4x-5>0$ (いすゞ自動車)

(10) $x^2-x-12>0$ (いすゞ自動車)

(11) $x^2+2x-3<0$ (本田技研工業)

(12) $x^2-3x-54<0$ (日産ディーゼル)

(13) $(x-5)(2x+1)<0$ (昭和シェル石油)

(14) $2x^2-9x-5>0$ (小松製作所)

(15) $2x^2+7x+3<0$ (ヤマハ発動機)

(16) $2x^2-5x+2>0$ (大阪ガス)

(17) $2x^2-7x-4<0$ (中越パルプ工業)

(18) $6x^2-7x-5>0$ (ヤマハ発動機)

(19) $6x^2-x-12\leqq 0$ (日本輸送機)

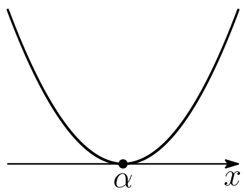
(20) $2x^2+4x-1>0$ (富士通ヴィエルエスアイ)

解の範囲が特別な 2 次不等式

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが点 $(\alpha,\ 0)$ で x 軸に接するとき $(b^2 - 4ac = 0)$，x 軸と共有点をもたないとき $(b^2 - 4ac < 0)$ について，$a > 0$ の場合について次のとおりである．

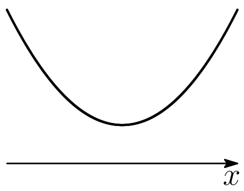
- **$b^2 - 4ac = 0$ のとき**

  $ax^2 + bx + c \geqq 0$ の解は　すべての実数
  $ax^2 + bx + c > 0$ の解は　α 以外のすべての実数
  $ax^2 + bx + c \leqq 0$ の解は　$x = \alpha$
  $ax^2 + bx + c < 0$ の解は　ない



- **$b^2 - 4ac < 0$ のとき**

  $ax^2 + bx + c \geqq 0$ の解は　すべての実数
  $ax^2 + bx + c > 0$ の解は　すべての実数
  $ax^2 + bx + c \leqq 0$ の解は　ない
  $ax^2 + bx + c < 0$ の解は　ない



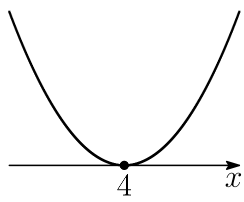
例 2.25 次の 2 次不等式を解け．

(1) $x^2 - 8x + 16 > 0$　　(2) $x^2 - 8x + 16 \leqq 0$　　(3) $x^2 - 8x + 16 < 0$

【解】 $x^2 - 8x + 16 = 0$ を解くと　$x = 4$

$y = x^2 - 8x + 16$ のグラフは，右の図のように
x 軸と点 $(4,\ 0)$ で接する．したがって，

(1)　$x^2 - 8x + 16 > 0$ の解は　4 以外のすべての実数
(2)　$x^2 - 8x + 16 \leqq 0$ の解は　$x = 4$
(3)　$x^2 - 8x + 16 < 0$ の解は　ない



2.68 次の 2 次不等式を解け．

(1)　$4x^2 - 12x + 9 \geqq 0$　　(2)　$4x^2 - 12x + 9 > 0$

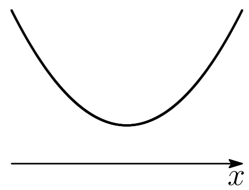
(3)　$4x^2 - 12x + 9 \leqq 0$　　(4)　$4x^2 - 12x + 9 < 0$

例 2.26 次の2次不等式を解け．

(1) $x^2+3x+5 \geqq 0$　(2) $x^2+3x+5>0$　(3) $x^2+3x+5<0$

【解】 係数について　$3^2-4\cdot1\cdot5=-11<0$

$y=x^2+3x+5$ のグラフは，右の図のように x 軸と共有点をもたない．したがって，



(1)　$x^2+3x+5 \geqq 0$ の解は　すべての実数

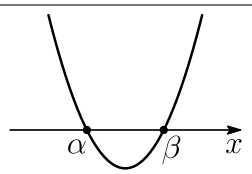
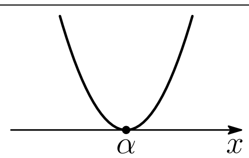
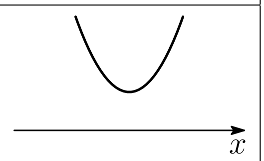
(2)　$x^2+3x+5>0$ の解は　すべての実数

(3)　$x^2+3x+5<0$ の解は　ない

2.69 次の2次不等式を解け．

(1)　$x^2-2x+3 \geqq 0$　(2)　$x^2-2x+3>0$

(3)　$x^2-2x+3 \leqq 0$　(4)　$x^2-2x+3<0$

2次不等式の解についてのまとめ　($a>0$ の場合)			
b^2-4ac の符号	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係			
$ax^2+bx+c=0$ の実数の解	$x=\alpha,\ \beta$	$x=\alpha$	ない
$ax^2+bx+c>0$ の解	$x<\alpha,\ \beta<x$	α 以外のすべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c \geqq 0$ の解	$x \leqq \alpha,\ \beta \leqq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c<0$ の解	$\alpha<x<\beta$	ない	ない
$ax^2+bx+c \leqq 0$ の解	$\alpha \leqq x \leqq \beta$	$x=\alpha$	ない

一般の 2 次不等式の解き方

① $ax^2+bx+c>0$ などの形に変形する．なお，$a<0$ のときは，不等式の両辺に -1 をかけて x^2 の係数を正にする (不等号の向きが変わる)．

② ax^2+bx+c が因数分解できない場合は，b^2-4ac の符号に注意して解を求める (154 ページの表を参照)．

例題 2.27 2 次不等式 $-x^2+5x+6<0$ を解け．

【解】 両辺に -1 をかけると　$x^2-5x-6>0$

よって　$(x+1)(x-6)>0$

したがって　$x<-1,\ 6<x$

2.70 次の 2 次不等式を解け．

(1) $x(1-x)<0$　(東横システム電建)

(2) $72+14x-x^2>0$　(小田急電鉄)

(3) $9x^2-3x-12 \leqq 0$　(大日本インキ化学工業)

(4) $-4x^2-4x+3 \leqq 0$　(東京機器)

(5) $2x^2-6x+15>x^2+x+3$　(アサヒビール)

(6) $8x^2-3x+1>2x^2+4x+6$　(名古屋鉄道)

(7) $10x-3x^2>3$　(ブラザー工業)

(8) $4(x^2-1)<3(x-1)$　(マツダ)

(9) $x(1-x)<x(2+x)$　(JFE ホールディングス)

(10) $(x-1)^2 \geqq 25$　(トヨタ自動車)

(11) $x^2 \leqq 2x+5$　(日本毛織)

(12) $x^2-4x+4>0$　(テザック)

(13) $x^2-2x+1 \leqq 0$　(トヨタ自動車)

(14) $x^2-2x+2<0$　(テザック)

例題 2.28 次の 2 次不等式を満たす整数 x をすべて求めよ.

(1) $x^2+x-2<0$　　(2) $7x-3 \geqq 2x^2$

【解】 (1) $(x+2)(x-1)<0$ より　$-2<x<1$

この不等式を満たす整数 x は　$-1,\ 0$

(2) 式を整理すると　$2x^2-7x+3 \leqq 0$

$(x-3)(2x-1) \leqq 0$

よって　$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 3$

この不等式を満たす整数 x は　$1,\ 2,\ 3$

2.71 不等式 $4x-x^2>3$ を満たす整数 x をすべて求めよ.　(トヨタ自動車)

2.72 2 次不等式 $3x^2-11x-20 \leqq 0$ を満たす整数 x の個数を求めよ.

(トヨタ自動車)

2.73 $y=2x^2-5x-12$ のとき，次の問いに答えよ.　(帝国石油)

(1) この関数の値が 0 になる x の値を求めよ.

(2) この関数の値が正になる x の範囲を求めよ.

(3) この関数の最小値を求めよ.

例題 2.29 $y = |x^2 - 2x - 3|$ のグラフをかけ.　(日本ペイント)

【解】 $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ であるから

$x^2 - 2x - 3 \geqq 0$ の解は　$x \leqq -1,\ 3 \leqq x$

$x^2 - 2x - 3 < 0$ の解は　$-1 < x < 3$

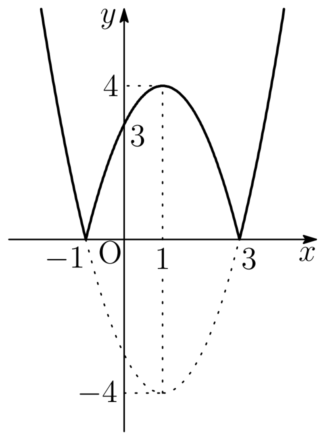
ゆえに　$x \leqq -1,\ 3 \leqq x$ のとき

$$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$$

$-1 < x < 3$ のとき

$$y = -(x^2 - 2x - 3) = -(x-1)^2 + 4$$

よって，グラフは右の図の実線部分のようになる.



2.74 次のグラフをかけ.

(1) $y = |x^2 - 1|$　(大阪ガス)

(2) $y = |x^2 + 4x + 3|$　(マツダ)

2.75 $y = |x^2 - 2x - 3|$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ における最大値および最小値を求めよ.
(オークマ)

例題 2.30 次が成り立つように，実数 a，b の値を定めよ．

(1) 2次不等式 $x^2+ax+b<0$ の解が $-1<x<2$

(2) 2次不等式 $ax^2+bx+3<0$ の解が $x<-3,\ \dfrac{1}{2}<x$

【解】 (1) $-1<x<2$ を解にもつ2次不等式の1つは

$$(x+1)(x-2)<0$$

左辺を展開して　$x^2-x-2<0$

これが $x^2+ax+b<0$ と一致するから

係数を比較して　$a=-1$，$b=-2$

(2) $x<-3,\ \dfrac{1}{2}<x$ を解にもつ2次不等式の1つは

$$(x+3)(2x-1)>0$$

左辺を展開して　$2x^2+5x-3>0$

ゆえに　$-2x^2-5x+3<0$

これが $ax^2+bx+3<0$ と一致するから

係数を比較して　$a=-2$，$b=-5$

2.76 次の問いに答えよ．

(1) 2次不等式 $ax^2+5x+b>0$ の解が $2<x<3$ であるとき，a，b の値を求めよ．

(小田急電鉄)

(2) 2次不等式 $-6x^2+px+q<0$ の解が $x<\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}<x$ となる p，q の値を求めよ．

(トヨタ自動車)

例題 2.31 次の問いに答えよ.

(1) 2 次方程式 $x^2+ax-a+3=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき, a の値の範囲を求めよ. (きんでん)

(2) 2 次方程式 $x^2+6x+2k+1=0$ が実数解をもつとき, k の値の範囲を求めよ. (トヨタ自動車)

【解】 (1) 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつため条件は, $D>0$ であるから

$$a^2-4\cdot 1\cdot(-a+3)>0$$

式を整理して $\quad a^2+4a-12>0$

ゆえに $\quad (a+6)(a-2)>0$

したがって $\quad a<-6,\ 2<a$

(2) 2 次方程式が実数解をもつための条件は, $D/4 \geqq 0$ であるから

$$3^2-1\cdot(2k+1)\geqq 0$$

式を整理して $\quad 9-2k-1\geqq 0$

したがって $\quad k\leqq 4$

2.77 次の問いに答えよ.

(1) 2 次方程式 $4x^2+(k-1)x+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき, k の値の範囲を求めよ. (トヨタ自動車)

(2) 2 次方程式 $x^2-2(k-4)x+2k=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき, k の値の範囲を求めよ. (川崎重工業)

(3) 2 次方程式 $x^2+6x+2k-1=0$ が実数解をもつとき, k の値の範囲を求めよ. (トヨタ自動車)

(4) 放物線 $y=x^2-2x-8$ と直線 $y=2x+m$ が相異なる 2 点を共有するとき, m の値の範囲を求めよ. (ニコン)

例題 2.32 連立不等式 $\begin{cases} x^2 - 8x + 7 < 0 & \cdots ① \\ x^2 - 7x + 10 \leqq 0 & \cdots ② \end{cases}$ を解け.

【解】 ① から　　$(x-1)(x-7) < 0$

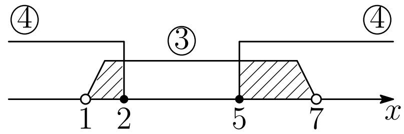
これを解くと　　$1 < x < 7 \quad \cdots ③$

② から　　$(x-2)(x-5) \geqq 0$

これを解くと　　$x \leqq 2,\ 5 \leqq x \quad \cdots ④$

③ と ④ の共通範囲を求めて

$$1 < x \leqq 2, \quad 5 \leqq x < 7$$



2.78 次の連立不等式を解け.

(1) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{4} \leqq x + 1 \\ x^2 + 3x - 4 < 0 \end{cases}$　(マツダ)

(2) $\begin{cases} x^2 - 7x + 10 < 0 \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{cases}$　(殖産住宅)

(3) $\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0 \\ x^2 - 2x \geqq 0 \end{cases}$　(愛知製鋼)

(4) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}$　(九州電力)

(5) $\begin{cases} x^2 - 2x - 35 < 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$　(ジェクト)

(6) $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ x^2 - 8x - 9 > 0 \end{cases}$　(ニチボー)

(7) $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 < 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geqq 0 \end{cases}$　(小松製作所)

(8) $\begin{cases} x^2 > x + 6 \\ x^2 - x < 20 \end{cases}$ (京三製作所)

(9) $\begin{cases} x^2 < x + 20 \\ x^2 + x > 2 \end{cases}$ (トヨタ自動車)

(10) $2x < x + 3 < 2x^2$ (きんでん)

(11) $\begin{cases} 3x^2 - 4x - 4 > 0 \\ \dfrac{4-x}{3} < \dfrac{8-x}{5} \end{cases}$ (三菱重工)

(12) $\begin{cases} x^2 + x - 20 < 0 \\ 2x^2 + x - 15 > 0 \end{cases}$ (東洋紡績)

(13) $\begin{cases} x^2 - 8x + 7 < 0 \\ 2x^2 - 13x + 15 \geqq 0 \end{cases}$ (中国電力)

(14) $\begin{cases} x^2 + 2x - 35 < 0 \\ 6x^2 - 7x - 5 > 0 \end{cases}$ (ニコン)

(15) $\begin{cases} 8x - 3x^2 > 4 \\ 2x^2 - 7x > -6 \end{cases}$ (安川電機)

(16) $-5 < x^2 + 2x - 8 < 7$ (日本毛織)

(17) $\begin{cases} x^2 - 7x + 10 > 0 \\ x^2 - 8x - 12 < 0 \end{cases}$ (東亜燃料工業)

(18) $\begin{cases} x^2 + 2x - 25 < 0 \\ 6x^2 - 7x - 5 > 0 \end{cases}$ (大日本住友製薬)

2.79 2 つの 2 次方程式 $x^2 + 4x - m^2 - 5m = 0,\ x^2 - 2mx + 2m^2 - 16 = 0$ がいずれも異なる 2 つの実数解をもつとき，m の値の範囲を求めよ．(東芝)

145 ページの表によると，2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の値は，$D = b^2 - 4ac < 0$ のとき定符号になることがわかる．

2次式の定符号

$a \neq 0$，$D = b^2 - 4ac$ とすると

常に $\boldsymbol{ax^2 + bx + c > 0 \iff a > 0,\ D < 0}$

常に $\boldsymbol{ax^2 + bx + c < 0 \iff a < 0,\ D < 0}$

[注意] **常に** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c \geqq 0 \iff a > 0,\ D \leqq 0}$

常に $\boldsymbol{ax^2 + bx + c \leqq 0 \iff a < 0,\ D \leqq 0}$

例題 2.33 2次関数 $y = ax^2 - (a-1)x + (a-1)$ のグラフが常に x 軸の上側にあるための a の値の範囲を求めよ． (トヨタ自動車)

【解】 2次関数のグラフが常に x 軸の上側にあるための条件は，

x^2 の係数および D の符号について

$$\begin{cases} a > 0 \\ \{-(a-1)\}^2 - 4a(a-1) < 0 \end{cases}$$

第2式から　$3a^2 - 2a - 1 > 0$

$(3a+1)(a-1) > 0$

よって　$a < -\dfrac{1}{3},\ 1 < a$

したがって，第1式および第2式の結果から　$a > 1$

2.80 次の問いに答えよ．

(1) すべての実数 x に対して $x^2 - 2cx + 3c > 0$ となる c の値の範囲を求めよ．

(トヨタ自動車)

(2) $x^2 - 2ax + 1 > 0$ が常に成立するとき，整数 a の値を求めよ． (ニコン)

(3) $(m-3)x^2 - mx - 1$ が x のすべての実数値に対して常に負であるための m の値の範囲を求めよ． (神戸製鋼所)

例題 2.34 次の方程式，不等式を解け.

(1) $|x^2-2|=x$

(2) $x^2-3|x|+2>0$ (石川島播磨重工業)

【解】 (1) $|x^2-2|=x$ から $x \geqq 0$ $\cdots$①

このとき $x^2-2=\pm x$

［1］ $x^2-2=x$ のとき

すなわち $(x+1)(x-2)=0$

① に注意して $x=2$

［2］ $x^2-2=-x$ のとき

すなわち $(x-1)(x+2)=0$

① に注意して $x=1$

［1］，［2］ から $x=1,\ 2$

(2) $x^2-3|x|+2>0$ から $|3x|<x^2+2$ ← $3|x|=|3x|$

$$-(x^2+2)<3x<x^2+2$$

よって，次の連立不等式を解けばよい.

$$\begin{cases} -(x^2+2)<3x \\ 3x<x^2+2 \end{cases}$$

第 1 式から $x^2+3x+2>0$

$(x+1)(x+2)>0$

ゆえに $x<-2,\ -1<x$ $\cdots$①

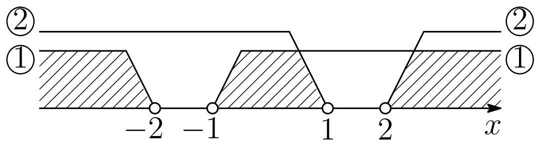
第 2 式から $x^2-3x+2>0$

$(x-1)(x-2)>0$

ゆえに $x<1,\ 2<x$ $\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて

$x<-2,\ -1<x<1,\ 2<x$



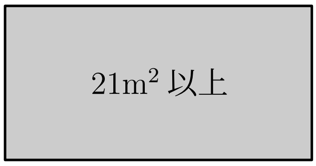
2.81 次の方程式，不等式を解け.

(1) $|x^2-4|=3x$ (キヤノン)

(2) $|x^2+3x-4|<x+4$ (デンソー)

(3) $x^2+2|x|-3<0$ (東芝)

例題 2.35 周りの長さが 20m で，面積が $21\mathrm{m}^2$ 以上の長方形状の囲いを作りたい．
短い方の辺の長さをどのような範囲にとればよいか．



【解】 短い方の辺の長さを x m とすると，他方の辺の長さは $(10-x)$ m である．$x>0$ かつ $x<10-x$ から

$$0<x<5 \qquad \cdots ①$$

長方形の面積が $21\mathrm{m}^2$ なので　$x(10-x) \geqq 21$

式を変形すると　$x^2-10x+21 \leqq 0$

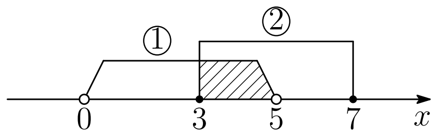
すなわち　$(x-3)(x-7) \leqq 0$

これを解くと　$3 \leqq x \leqq 7 \qquad \cdots ②$

① と ② の共通範囲を求めて

$$3 \leqq x < 5$$

(答) 3m 以上 5m 未満



2.82 次の問いに答えよ．

(1) 周囲の長さが 26cm の長方形の面積が $40\mathrm{cm}^2$ より小さくなるようにするには，辺の長さをどのようにすればよいか．　(スズキ)

(2) 周囲の長さが 50cm の長方形で，面積が $100\mathrm{cm}^2$ 以上にするには，1 辺の長さを何 cm から何 cm までにすればよいか．　(JFE ホールディングス)

実践問題 4

住友金属工業

1 次の問に答えなさい.

(1) さいころを 1 つ投げたとき，6 の目が出る確率を求めよ.

(2) さいころを 2 つ投げたとき，両方の目がそれぞれ 6 となる確率を求めよ.

(3) さいころを 2 つ投げたとき，2 つの目の和が 4 となる確率を求めよ.

(4) さいころを 2 つ投げたとき，2 つの目の和が 4 でない確率を求めよ.

2 次の問に答えなさい.

(1) 積が 72 で最小公倍数が 24 となるような 2 つの自然数を求めよ.

(2) ある自然数に 4 を加えて 2 乗したら，もとの数より 76 大きくなった. このとき，もとの自然数を求めよ.

(3) 100 円硬貨と 50 円硬貨があわせて 37 枚あり，金額の合計は，2900 円である. このとき，それぞれの硬貨は何枚あるか.

(4) 異なる 2 つの数があって，その和を 4 で割ると 9 になり，2 つの数の差を 2 倍すると 8 になる. この 2 つの数を求めよ.

【答】

1 (1) $\frac{1}{6}$　(2) $\frac{1}{36}$　(3) $\frac{1}{12}$　(4) $\frac{11}{12}$

2 (1) 3 と 24　(2) 5　(3) 100 円 21 枚，50 円 16 枚　(4) 20 と 16

実践問題 5

きんでん

次の式を計算しなさい.

(1) $(-3)^2 - (1-4)^2 + (1-3) \times (-2)^3$

(2) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$

(3) $(2x+3y)(2x-3y)$

(4) $\left\{3 - \frac{1}{3} \div \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\right\} \div \left(-\frac{1}{2}\right)$

(5) $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$

(6) $(15-\sqrt{169})^2$

(7) $(3\sqrt{8}+4\sqrt{2}) \times \sqrt{2}$

(8) $\dfrac{1}{2x^2-xy-3y^2} \div \dfrac{1}{2x^2-5xy+3y^2}$

(9) $\dfrac{a-b}{ab} + \dfrac{b-c}{bc} + \dfrac{a+c}{ac}$

(10) $\dfrac{x}{x+y} - \dfrac{y}{x-y} + \dfrac{2y^2}{x^2-y^2}$

(11) $2\sqrt{6} \div \sqrt{2} \times \sin 60^\circ$

(12) $(-3x^3y^3)^2 \div (-x^2y^2)^3$

(13) $(3x^2+6xy-5x-4y+2) \div (x+2y-1)$

(14) $|(-1)^3| + |(-2)^3| - |(1-4)^2|$

(15) 2 時間 17 分 23 秒 ×11

【答】

(1) 16　(2) x^4-16　(3) $4x^2-9y^2$　(4) -2　(5) -5

(6) 4　(7) 20　(8) $\dfrac{x-y}{x+y}$　(9) $\dfrac{2}{c}$　(10) $\dfrac{x-y}{x+y}$

(11) 3　(12) -9　(13) $3x-2$　(14) 0　(15) 25 時間 11 分 13 秒

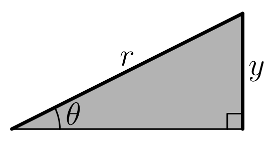
第 3 章　図形と計量

3.1　三角比

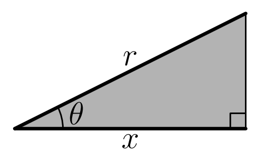
3.1.1　三角比

三角比の定義

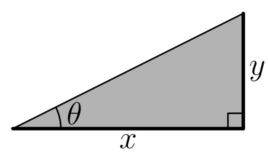
$\boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{y}{r}}$



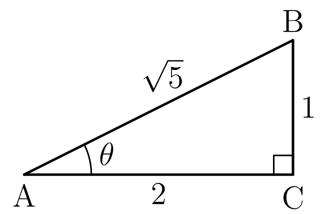
$\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{x}{r}}$



$\boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{y}{x}}$



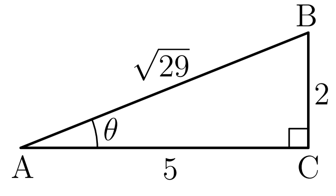
例 3.1 右の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ．



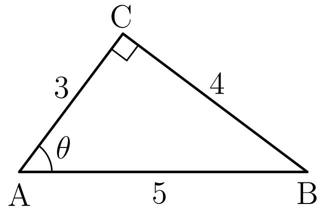
【解】 $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$,　$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$,　$\tan\theta = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{1}{2}$

3.1 下の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ．

(1)

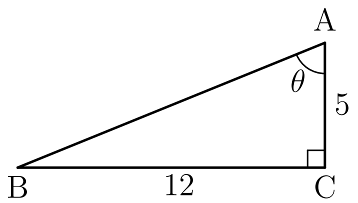


(2)

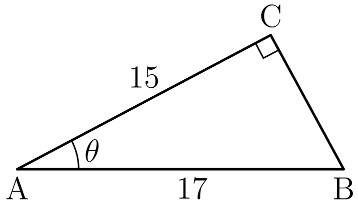


3.2 下の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ．

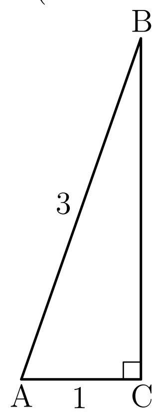
(1)



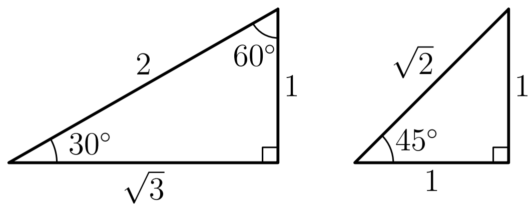
(2)



3.3 右の図において，$\sin A$，$\tan A$ の値を求めよ．　(大阪ガス)



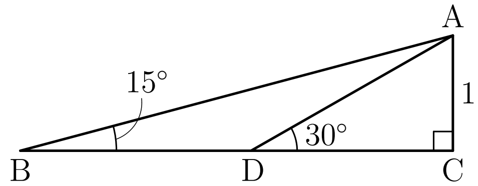
3.4 下の図から $\tan 30^\circ$，$\sin 45^\circ$，$\cos 60^\circ$ の値を求めよ．



3.5 30°，45°，60° の三角比の値を答えよ．　(豊田工機)

θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$			
$\cos\theta$			
$\tan\theta$			

3.6 次の図から $\tan 15^\circ$ の値を求めよ．　(アマダ)



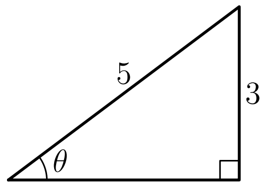
3.7 次の値を392ページの三角比の表から求めよ．

(1) $\sin 36°$ (2) $\cos 54°$ (3) $\tan 15°$

3.8 三角比の表を用いて，次の等式を満たす鋭角 θ の値を求めよ．

(1) $\sin\theta = 0.3907$ (2) $\cos\theta = 0.7986$ (3) $\tan\theta = 1.2349$

例 3.2 右の図における θ のおよその大きさを求めよ．



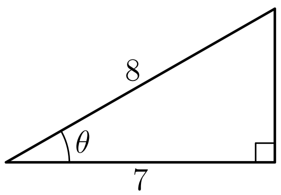
【解】 図から $\sin\theta = \dfrac{3}{5} = 0.6$

三角比の表から，$\sin\theta$ の値が 0.6 に近い θ を求めると $\theta \fallingdotseq 37°$

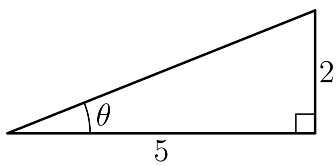
[注意] $a \fallingdotseq b$ は,「a と b がほぼ等しい」ということを意味する．

3.9 下の図における θ のおよその大きさを求めよ．

(1)

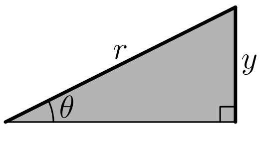


(2)

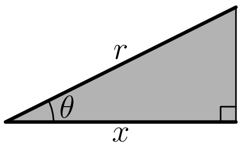


三角比の応用

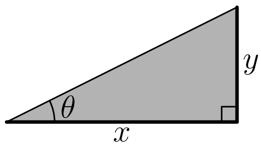
167 ページの三角比の定義から次が成り立つ．



$y = r \times \sin\theta$

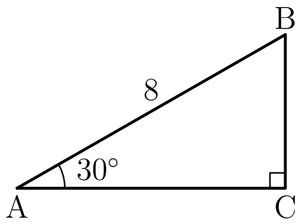


$x = r \times \cos\theta$



$y = x \times \tan\theta$

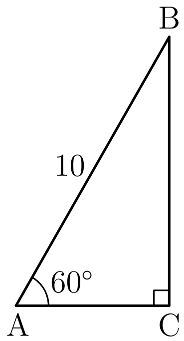
例 3.3 右の図において，辺 BC，AC の長さを求めよ．



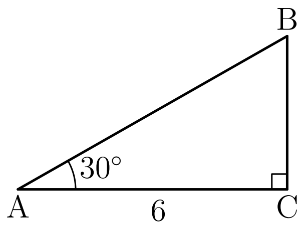
【解】 $\mathrm{BC} = 8 \times \sin 30^\circ = 8 \times \dfrac{1}{2} = 4$,　$\mathrm{AC} = 8 \times \cos 30^\circ = 8 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

3.10 下の図において，次の辺の長さを求めよ．

(1)　辺 BC，AC

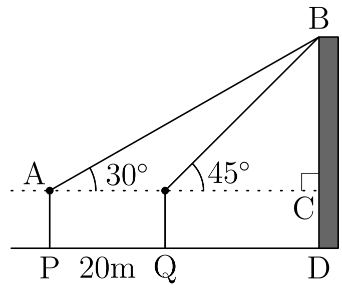


(2)　辺 BC



3.11 長さ 5m のはしごが建物に立てかけてある．はしごと地面のつくる角は 65° である．はしごの上端は地面から何 m のところにあるか．小数第 1 位まで求めよ．ただし，$\sin 65^\circ = 0.9063$，$\cos 65^\circ = 0.4226$，$\tan 65^\circ = 2.1445$ である．(トヨタ自動車)

例題 3.4 図のように，地点Pから塔の先端の仰角が 30° であった．さらに塔に向かって 20m 歩いた地点Qからの仰角は 45° であった．この塔の高さ BD を求めよ．ただし，目の高さを 1.6m，$\sqrt{3}=1.732$ とし，小数第2位を四捨五入せよ．



【解】 BC を x m とすると，AC は $(20+x)$ m となる．

$\triangle$ABC において $\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\tan 30^\circ$ であるから

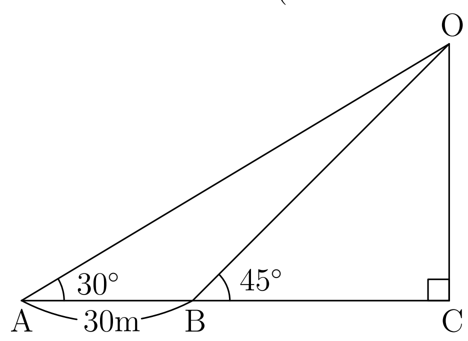
$$x=(20+x)\times\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{整理して} \quad (\sqrt{3}-1)x=20$$

したがって

$$x=\frac{20}{\sqrt{3}-1}=10(\sqrt{3}+1)=10\times 2.732=27.32 \fallingdotseq 27.3$$

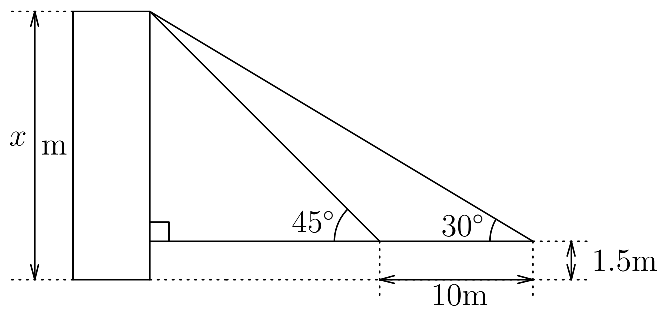
よって，塔の高さ BD は　$27.3+1.6=28.9$ (m)

3.12 次の図において，OC 間の距離を求めよ．　(阪神土木工業)



3.13 次の建物の高さ x を求めよ．ただし，m 以下小数第1位まで求めよ．

(大木建設)



3.1.2 三角比の相互関係

三角比の相互関係

1 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ **3** $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

2 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

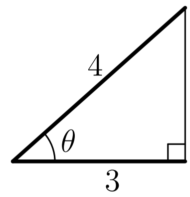
[注意] $(\sin\theta)^2$，$(\cos\theta)^2$，$(\tan\theta)^2$ を，それぞれ $\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$，$\tan^2\theta$ と書く．

例題 3.5 $\cos\theta = \dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．
ただし，θ は鋭角とする．

【解】 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

$\cos\theta = \dfrac{3}{4}$



$\sin\theta > 0$ であるから

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

また $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \div \dfrac{3}{4} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

3.14 $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．ただし，θ は鋭角とする．

3.15 $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$ のとき，$\cos\theta$ の値を求めよ． (日本無線)

例題 3.6 $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ．
ただし，θ は鋭角とする．

【解】 $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \tan^2\theta}$$

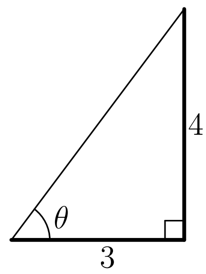
$$= 1 \div \left\{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right\} = \frac{9}{25}$$

$\cos\theta > 0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

また　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{5}$

$\tan\theta = \dfrac{4}{3}$



3.16 $\tan\theta = 3$ のとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．ただし，θ は鋭角とする．

3.17 $\tan\theta = \dfrac{3}{2}$ のとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．ただし，θ は鋭角とする．

$90° - \theta$ の三角比

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$$
$$\tan(90° - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

例 3.7 次の三角比を $45°$ 以下の角の三角比で表せ.

(1) $\sin 50°$　(2) $\cos 65°$　(3) $\tan 80°$

【解】 (1) $50° = 90° - 40°$ であるから

$$\sin 50° = \cos 40°$$

(2) $65° = 90° - 25°$ であるから

$$\cos 65° = \sin 25°$$

(3) $80° = 90° - 10°$ であるから

$$\tan 80° = \frac{1}{\tan 10°}$$

3.18 次の三角比を $45°$ 以下の角の三角比で表せ.

(1) $\sin 55°$　(2) $\cos 70°$　(3) $\tan 63°$

3.19 次の値を求めよ.

(1) $\sin 30° + \cos 60°$　(YKK)

(2) $\tan 45° - \cos 60°$　(トプコン)

(3) $\sin 30° + \cos 60° + \tan 45°$　(日本特殊機器)

(4) $\tan 45° \sin 60°$　(第一貨物)

(5) $4(\sin 30°)(\cos 45°)$　(日本製紙ケミカル)

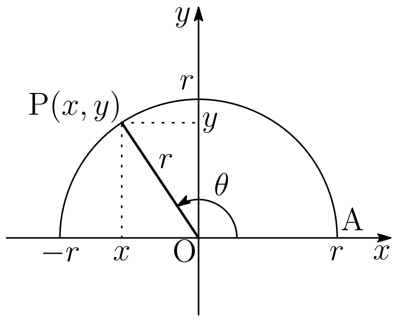
(6) $(1 + \sin 45° + \sin 30°)(1 - \cos 45° + \cos 60°)$　(商船三井)

(7) $\dfrac{\sin 45° - \sin 30°}{\cos 45° + \cos 60°}$　(日本電気エンジニアリング)

(8) $\sin^2 23° + \sin^2 67°$　(アピサーク)

3.1.3　三角比の拡張

座標を用いた三角比の定義



$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲にある θ に対して，$\angle\mathrm{AOP} = \theta$ となる点 P をこの半円上にとり，点 P の座標を (x, y) とする．このとき，次のように定義される．

$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{y}{r},\ \ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \ \tan\theta = \frac{y}{x}}$$

［注意］ $\theta = 90^\circ$ のときは，$x = 0$ であるから，$\tan\theta$ は定義されない．

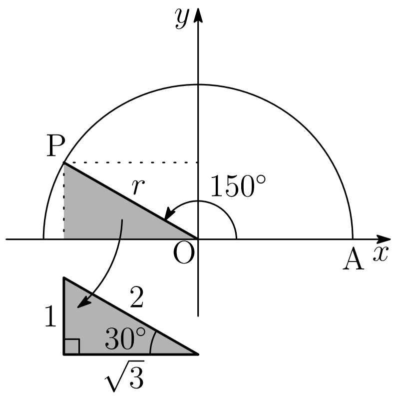
例 3.8 150° の正弦，余弦，正接の値を求めよ．

【解】 右の図で，$\angle\mathrm{AOP} = 150^\circ$ とする．
半円の半径を $r = 2$ にとると，
点 P の座標は $(-\sqrt{3},\ 1)$ である．
そこで $x = -\sqrt{3}$，$y = 1$ として

$$\sin 150^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



3.20 次の角の正弦，余弦，正接の値を求めよ．

(1)　120°　　(2)　135°　　(3)　0°　　(4)　180°

3.21 $\sin 90^\circ$ の値を求めよ．　(マツダ)

三角比の符号については，次のようになる．

θ	0°	**鋭角**	90°	**鈍角**	180°
$\sin\theta$	0	$+$	1	$+$	0
$\cos\theta$	1	$+$	0	$-$	-1
$\tan\theta$	0	$+$		$-$	0

θ が鋭角のとき
$0^\circ < \theta < 90^\circ$

θ が鈍角のとき
$90^\circ < \theta < 180^\circ$

$180^\circ - \theta$ の三角比

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$$

$\bigcirc + \square = 180^\circ$

$\sin\bigcirc = \sin\square$
$\cos\bigcirc = -\cos\square$
$\tan\bigcirc = -\tan\square$

例 3.9 次の値を，三角比の表を用いて求めよ．

(1) $\sin 125^\circ$　(2) $\cos 160^\circ$　(3) $\tan 110^\circ$

【解】 (1) $\sin 125^\circ = \sin 55^\circ = 0.8192$ $\quad\leftarrow 125^\circ + 55^\circ = 180^\circ$

(2) $\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ = -0.9397$ $\quad\leftarrow 160^\circ + 20^\circ = 180^\circ$

(3) $\tan 110^\circ = -\tan 70^\circ = -2.7474$ $\quad\leftarrow 110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$

3.22 次の値を，三角比の表を用いて求めよ．

(1) $\sin 130^\circ$　(2) $\cos 144^\circ$　(3) $\tan 123^\circ$

3.23 次の値を求めよ． (日本無線)

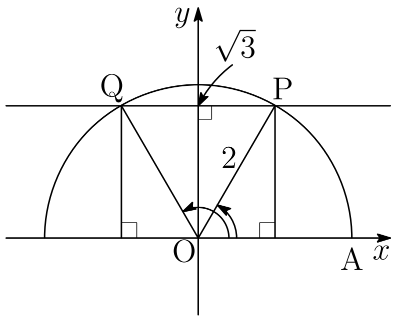
$$\frac{\cos 135^\circ}{\sin 120^\circ + \sin 30^\circ} - \frac{\sin 135^\circ}{\cos 120^\circ + \cos 30^\circ}$$

例 3.10 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次のような θ を求めよ．

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

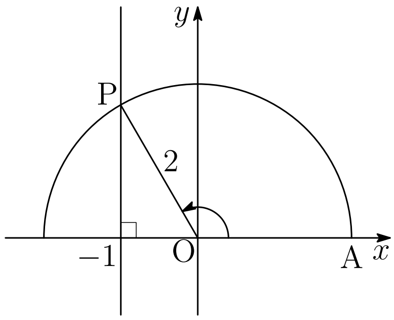
【解】 (1) 半径 2 の半円上で，y 座標が $\sqrt{3}$ である点は 2 つある．求める θ は，右の図で $\angle\mathrm{AOP}$ と $\angle\mathrm{AOQ}$ である．

よって $\theta = 60°,\ 120°$



(2) 半径 2 の半円上で，x 座標が -1 である点は 1 つある．求める θ は，右の図で $\angle\mathrm{AOP}$ である．

よって $\theta = 120°$



3.24 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次のような θ を求めよ．

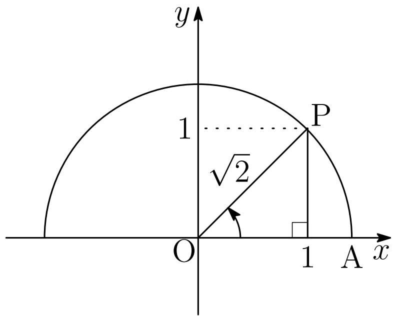
(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

例 3.11 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次のようなθを求めよ．

(1) $\tan\theta = 1$　　(2) $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

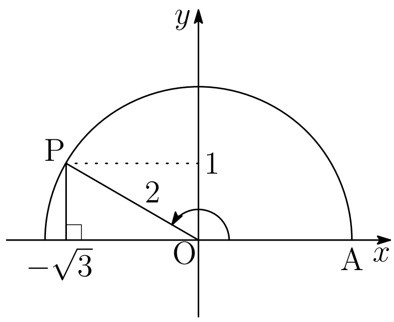
【解】 (1) $1 = \dfrac{1}{1}$ であるから，求めるθは右の図で $\angle\mathrm{AOP}$ である．

よって　$\theta = 45^\circ$



(2) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{-\sqrt{3}}$ であるから，求めるθは右の図で $\angle\mathrm{AOP}$ である．

よって　$\theta = 150^\circ$



3.25 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次のようなθを求めよ．

(1) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(2) $\tan\theta = -1$

172 ページで示した三角比の相互関係は，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲にある角 θ についても，そのまま成り立つ．

三角比の相互関係

1 $\boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$　　**3** $\boldsymbol{1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

2 $\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

例題 3.12 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうち，1 つが次の値をとるとき，各場合について他の 2 つの値を求めよ．

(1) $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$　　(2) $\tan\theta = -2$

【解】 (1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から　$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

$\sin\theta > 0$ であるから　$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$

また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{3}{5} \div \left(-\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{3}{5} \times \left(-\dfrac{5}{4}\right) = -\dfrac{3}{4}$

(2) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5}$$

$\tan\theta < 0$ であるから θ は鈍角で，$\cos\theta < 0$ である．

よって　$\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{1}{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

また　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = (-2) \times \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

3.26 次の問いに答えよ．

(1) $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ $(90^\circ < \theta < 180^\circ)$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．　(九州電力)

(2) $\cos\theta = 0.8$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．　(東京ガス)

(3) $\tan\theta = -\dfrac{1}{2}$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ．

例題 3.13 次の等式を証明せよ.

(1) $(\sin\theta + 2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta - \cos\theta)^2 = 5$

(2) $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$

[証明] (1) 左辺 $= (\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta) + (4\sin^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

$= 5(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 5 \times 1 = 5$

よって　$(\sin\theta + 2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta - \cos\theta)^2 = 5$

(2) 左辺 $= \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta = \left(\dfrac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)\sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$

よって　$\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$

[証終]

3.27 $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$ を簡単にせよ.　(日本特殊機器)

例題 3.14 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ のとき, 次の式の値を求めよ.

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$

【解】 (1) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ の両辺を2乗すると

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 2$$

よって　$1 + 2\sin\theta\cos\theta = 2$

したがって　$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

$= (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$

$= \sqrt{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3.28 次の問いに答えよ.

(1) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ.　(日本無線)

(2) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$5\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ.　(日本電気)

(3) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin^3\theta + \cos^3\theta$ の値を求めよ.　(九州電力)

3.29 $\sin\theta + \cos\theta = a$ のとき，次の式を a を用いて表せ.　(葵精機)

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta}$

(3) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$

3.30 次の問いに答えよ.

(1) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin^4\theta + \cos^4\theta$ の値を求めよ.　(富士通)

(2) $\sin\alpha = 1 - \sin\beta$，$\cos\alpha = -\cos\beta$ のとき，$\sin\beta$ の値を求めよ.

(都市再生機構)

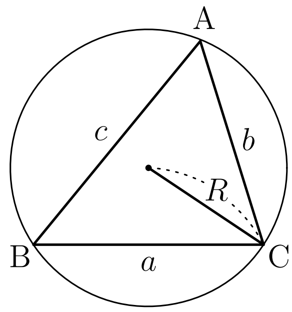
3.2　正弦定理と余弦定理

3.2.1　正弦定理

正弦定理

$\triangle$ABC の外接円の半径を R とすると，次が成り立つ．

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}} = \boldsymbol{2R}$$



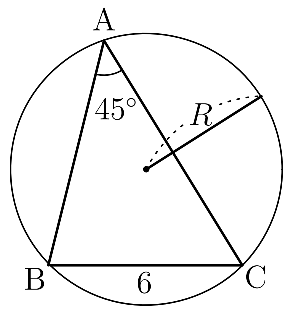
例 3.15　$\triangle$ABC において，$a=6$，$A=45°$ のとき，$\triangle$ABC の外接円の半径 R を求めよ．

【解】 正弦定理により

$$\frac{6}{\sin 45°} = 2R$$

が成り立つから

$$R = \frac{1}{2} \times \frac{6}{\sin 45°} = \frac{1}{2} \times 6 \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$



3.31 次のような $\triangle$ABC において，外接円の半径 R を求めよ．

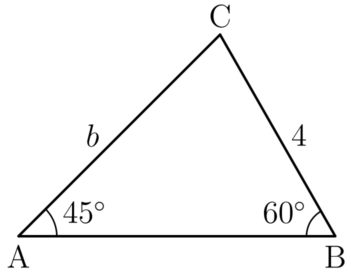
(1)　$a=3$，$A=60°$　　(2)　$b=5$，$B=30°$

(3)　$c=\sqrt{2}$，$C=135°$　　(4)　$a=4$，$B=45°$，$C=15°$

3.32 $a=8$ である $\triangle$ABC において，外接円の半径が $R=4$ のとき，角 A を求めよ．

例題 3.16　△ABC において，$a=4$，$A=45^\circ$，$B=60^\circ$ であるとき，辺 CA の長さ b を求めよ．

【解】 正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$



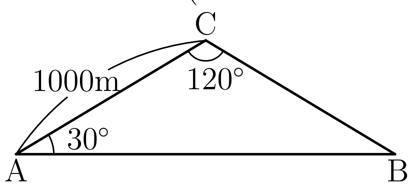
よって　$\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=\dfrac{b}{\sin 60^\circ}$

$$b\sin 45^\circ = 4\sin 60^\circ$$

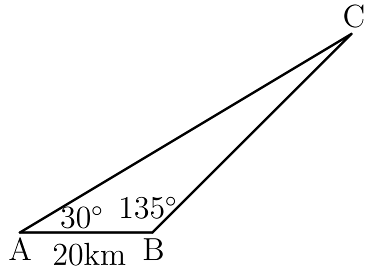
$$b\times\frac{1}{\sqrt{2}}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって　$b=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=2\sqrt{6}$

3.33　次の図において，AB 間の距離を求めよ．　(日鉄エレックス)



3.34　A 地から B 地を通り山頂 C までドライブすることになった．A 地から B 地と山頂を見込む角は 30° であったが，A 地から 20km 離れた B 地に着いてから，A 地と山頂 C を見込む角を測ったら 135° であった．B 地から山頂 C までの距離を求めよ．ただし，$\sin 15^\circ = 0.25$ とする．　(トヨタ自動車)



3.35　△ABC で，$A=120^\circ$，$a=2\sqrt{3}$，$b=2$ のとき，B と c を求めよ．

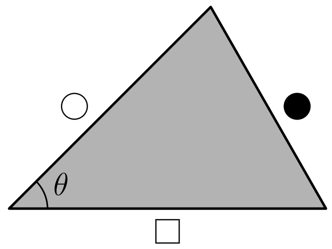
(日本原子力研究開発機構)

3.2.2　余弦定理

余弦定理

△ABC において，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$
$$\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B}$$
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

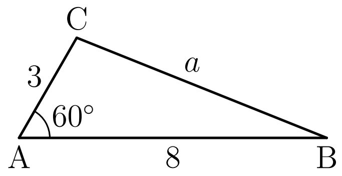


$●^2 = ○^2 + □^2 - 2\,○□\cos\theta$

例題 3.17　△ABC において，$b = 3$，$c = 8$，$A = 60°$ であるとき，辺 BC の長さ a を求めよ．

【解】 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 3^2 + 8^2 - 2\cdot3\cdot8\cos 60° \\ &= 9 + 64 - 2\cdot3\cdot8\cdot\frac{1}{2} \\ &= 49 \end{aligned}$$



$a > 0$ であるから　　$a = 7$

3.36 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ．

(1) $b = 4$，$c = 3$，$A = 60°$ のとき，辺 BC の長さ a

(2) $a = 1 + \sqrt{3}$，$c = \sqrt{2}$，$B = 45°$ のとき，辺 CA の長さ b

(3) $a = 3$，$b = 5$，$C = 120°$ のとき，辺 AB の長さ c

3.37 △ABC において，次の関係があるとき，a を求めよ．　(三井化学)

(1) $A = 30°$，$B = 45°$，$b = 7$ cm

(2) $A = 120°$，$b = 13$ cm，$c = 9$ cm

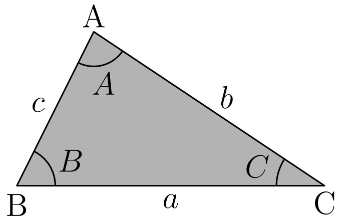
三角形の角の余弦を表す式

余弦定理によると，△ABC において，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$\boldsymbol{\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}$$

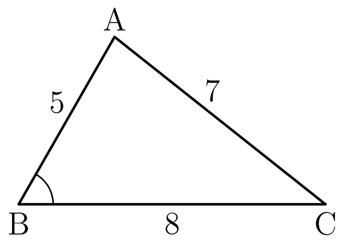
$$\boldsymbol{\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$



例題 3.18　△ABC において，$a=8$，$b=7$，$c=5$ のとき，$\cos B$ の値と角 B を求めよ．

【解】 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ &= \frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8}\\ &= \frac{40}{80}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$



また，$\cos B = \dfrac{1}{2}$ を満たす B は　　$B=60°$

3.38 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ．

(1) $a=\sqrt{37}$，$b=4$，$c=7$ のとき，$\cos A$ の値と角 A

(2) $a=7$，$b=5$，$c=4\sqrt{2}$ のとき，$\cos B$ の値と角 B

(3) $a=3$，$b=5$，$c=7$ のとき，$\cos C$ の値と角 C

3.39 $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=3\sqrt{13}$，$\mathrm{CA}=9$ の △ABC について，次の問いに答えよ．

(トヨタ自動車)

(1) 角 A の大きさを求めよ．

(2) △ABC の外接円の半径 R を求めよ．

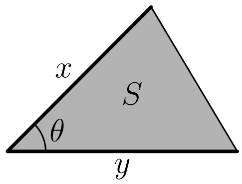
3.3　図形の計量

3.3.1　三角形の面積

三角形の面積

2辺の長さが x，y で，その間の角の大きさが θ である三角形の面積 S は

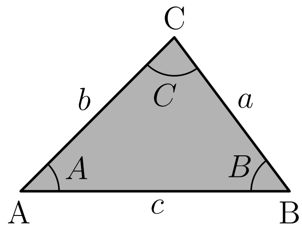
$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}xy\sin\theta}$$



[注意] $\triangle$ABC の面積 S は，次の式で表される．

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A, \quad S = \frac{1}{2}ca\sin B,$$

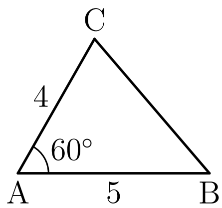
$$S = \frac{1}{2}ab\sin C$$



例 3.19 $b = 4$，$c = 5$，$A = 60°$ である $\triangle$ABC の面積 S を求めよ．

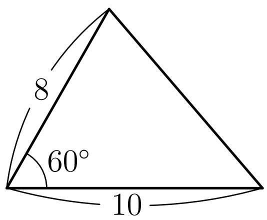
【解】 $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\sin 60°$

$$= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

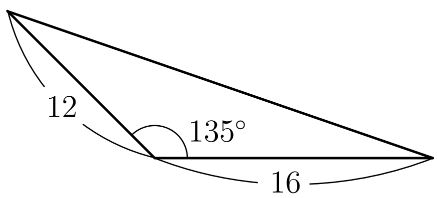


3.40 次の三角形の面積を求めよ．

(1)　(トヨタ自動車)



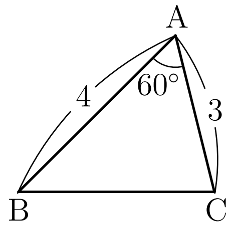
(2)　(東芝)



3.41 $\triangle$ABC で $A = 30°$, $b = 17$, $c = 15$ の面積を求めよ．　(三菱電機)

3.42 次の $\triangle$ABC について，次の問いに答えよ．　(トヨタ自動車)

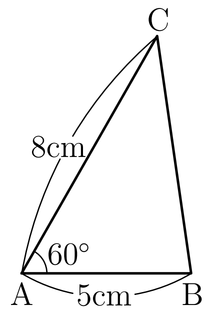
(1) $\triangle$ABC の面積を求めよ．



(2) BC の長さを求めよ．

3.43 $\triangle$ABC で $\angle A = 60^\circ$，$AB = 5$cm，$AC = 8$cm とする．　(中国電力)

(1) $\triangle$ABC の面積を求めよ．



(2) BC の長さを求めよ．

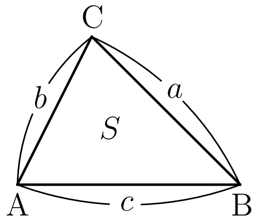
(3) $\angle$B, $\angle$C の正弦を求めよ．

3辺が与えられた三角形の面積は，次のヘロンの公式を用いて求めることもできる．

ヘロンの公式

$2s = a + b + c$ のとき，面積 S は

$$\boldsymbol{S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$



[証明] $2S = bc\sin A$ の両辺を平方して

$$4S^2 = b^2c^2\sin^2 A = b^2c^2(1-\cos^2 A) = bc(1+\cos A)\cdot bc(1-\cos A)$$

ここで　$2bc(1+\cos A) = 2bc + 2bc\cos A = 2bc + (b^2+c^2-a^2)$
$= (b+c)^2 - a^2 = (b+c+a)(b+c-a)$
$= 2s(2s-2a) = 4s(s-a)$

同様に　$2bc(1-\cos A) = 2bc - (b^2+c^2-a^2)$
$= a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c)$
$= (2s-2c)(2s-2b) = 4(s-b)(s-c)$

よって　$4S^2 = 2s(s-a)\cdot 2(s-b)(s-c)$

これから，ヘロンの公式が得られる．　**[証終]**

例 3.20 3辺が3，6，7である三角形の面積を求めよ．

【解】 $2s = 3+6+7$ とすると　$s = 8$

ゆえに，求める面積を S とすると

$$S = \sqrt{8(8-3)(8-6)(8-7)} = 4\sqrt{5}$$

3.44 3辺が次の長さの三角形の面積 S を求めよ．

(1) $a = 10$cm，$b = 7$cm，$c = 13$cm　(日本特殊機器)

(2) 4cm，5cm，6cm　(大阪金属)

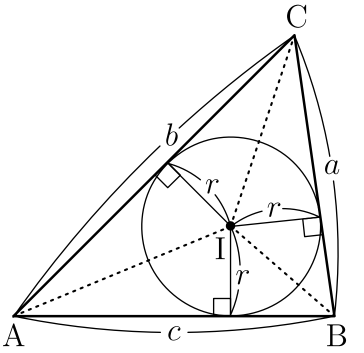
内接円の半径

三角形 ABC の内接円の中心を I，内接円の半径を r，$2s = a + b + c$ とする．このとき，△IBC，△ICA，△IAB の面積はそれぞれ

$$\frac{1}{2}ar,\quad \frac{1}{2}br,\quad \frac{1}{2}cr$$

であり，三角形 ABC の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c) = rs \end{aligned}$$



例題 3.21　3 辺が 5，6，7 である三角形の内接円の半径 r を求めよ．

【解】 $2s = 5 + 6 + 7$ とすると　　$s = 9$

ゆえに，三角形の面積を S とすると

$$S = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}$$

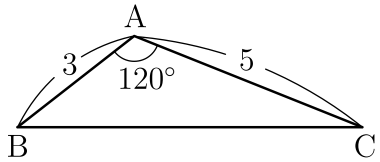
これらを $S = rs$ に代入して

$$6\sqrt{6} = r \cdot 9$$

よって　　$r = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

3.45 右の図の △ABC において，外接円の半径 R と内接円の半径 r を求めよ．

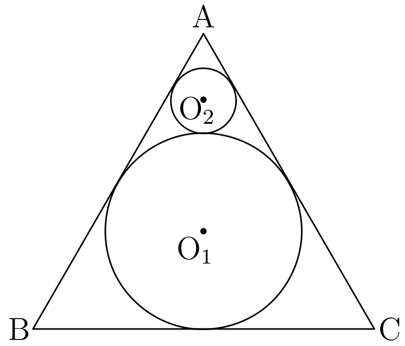
(日本電気)



例題 3.22 $\triangle$ABC は，1辺の長さ a の正三角形である．右の図のように円 O_1 は $\triangle$ABC に内接し，円 O_2 は AB，AC，円 O_1 に内接している．

(1) 円 O_1 の半径 R を求めよ．

(2) 円 O_2 の半径 r を求めよ．

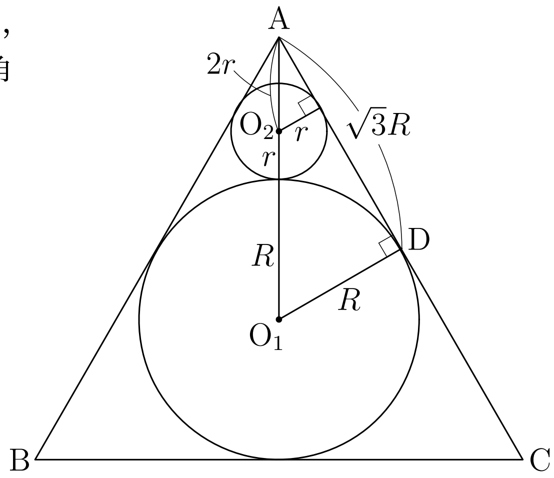


【解】 (1) O_1 と辺 AC の接点を D とすると，$\triangle DAO_1$ は $\angle A = 30°$ の直角三角形であるから

$$AD = \sqrt{3}R$$

D は AC の中点であるから

$$\sqrt{3}R = \frac{a}{2} \text{ より } \quad R = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$



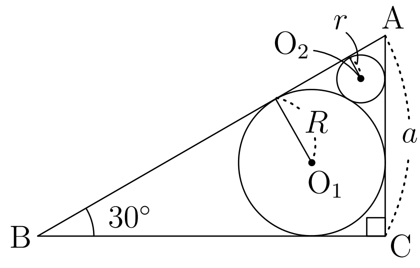
(2) $AO_1 = 2R$ から　$2r + r + R = 2R$　これを解いて　$r = \dfrac{1}{3}R$

よって，(1) の結果から　$r = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a}{6\sqrt{3}}$

3.46 右の図のように円 O_1 は $\triangle$ABC に内接し，円 O_2 は AB，AC，円 O_1 に内接している．このとき次の問いに答えよ．　(エルモ社)

(1) O_1 の半径 R を求めよ．

(2) O_2 の半径 r を求めよ．



3.3.2 相似な図形の面積の比・体積の比

相似な図形の面積の比

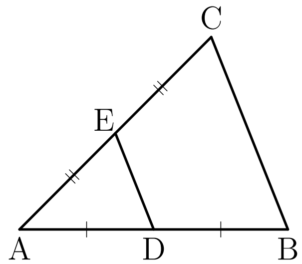
1　相似比が $k:1$ である図形の面積の比は，$k^2:1$ である．

2　相似比が $m:n$ である図形の面積の比は，$m^2:n^2$ である．

例 3.23 右の図で，△ABC と △ADE は相似である．

(1)　△ABC と △ADE の相似比を求めよ．

(2)　△ABC と △ADE の面積の比を求めよ．

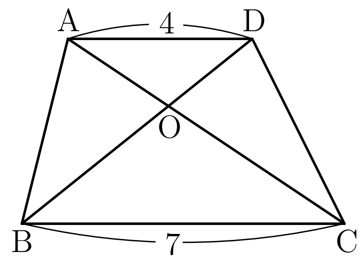


【解】 (1)　△ABC と △ADE の相似比は　$2:1$

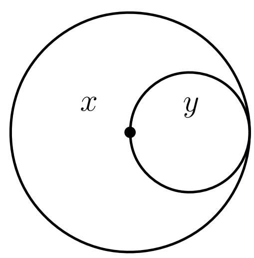
(2)　△ABC と △ADE の面積の比は　$2^2:1=4:1$

3.47 次の図形の面積比を求めよ．

(1) AD//BC のとき，△AOD と △BOC の面積の比(アドバンスト・ディスプレイ)



(2) x と y の面積の比　(大日本印刷)



相似な立体の表面積の比と体積の比

1 相似比が $k:1$ の立体について

表面積の比は，$k^2:1$，体積の比は $k^3:1$ である．

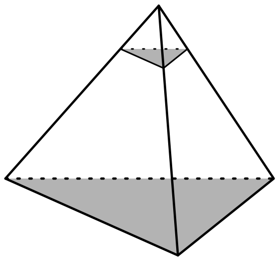
2 相似比が $m:n$ の立体について

表面積の比は $m^2:n^2$，体積の比は $m^3:n^3$ である．

例題 3.24 四面体 P を，上から $\frac{1}{4}$ の高さのところで，底面に平行な平面で切ると，上に小さい四面体 Q ができる．

(1) P と Q の表面積の比を求めよ．

(2) P と Q の体積の比を求めよ．



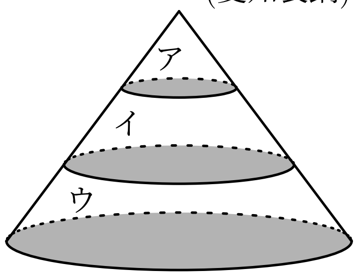
【解】 (1) P と Q の相似比は　$4:1$

よって，P と Q の表面積の比は　$4^2:1^2=16:1$

(2) P と Q の体積の比は　$4^3:1^3=64:1$

3.48 次の図は円錐の高さを三等分し，底面に平行な平面で切り取ったところを表している．切断された3つの立体ア・イ・ウの部分の体積の比を求めよ．

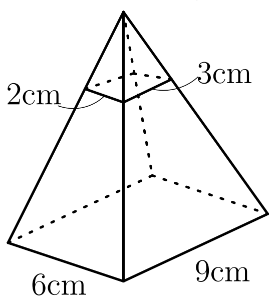
(愛知製鋼)



3.49 右の図のような四角すいがある．この高さは15cmで，底面は縦6cm，横9cmの長方形である．このとき，次の問いに答えよ．(アマダ)

(1) この四角すいを底面に平行に切ったときの切り口は縦2cm，横3cmの長方形である．角すい台の高さは何cmになるか．

(2) 小さい角すいともとの角すいとの体積の比を求めよ．



3.3.3　空間図形の計量

球の体積と表面積

半径が r の球の体積 V と表面積 S は

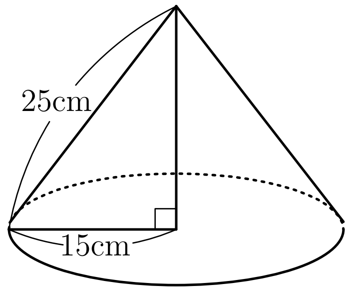
$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3} \qquad \boldsymbol{S = 4\pi r^2}$$

例 3.25 半径が 2 の球の体積と表面積を求めよ．

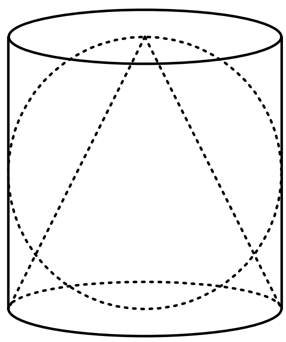
【解】 体積は　$\dfrac{4}{3}\pi\cdot 2^3 = \dfrac{32}{3}\pi$,　　表面積は　$4\pi\cdot 2^2 = 16\pi$

3.50 次の問いに答えよ．

(1) 次の円錐の体積を求めよ．　(本田技研工業)



(2) 次の図のような底面の直径 a，高さ a の直円柱の体積を V_1 とする．この直円柱にちょうど入る球および直円すいの体積をそれぞれ V_2，V_3 とするとき，$V_1 : V_2 : V_3$ の比を求めよ．　(大阪ガス)

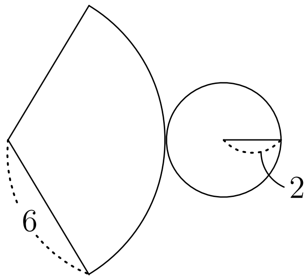


例題 3.26 右の図は円錐の展開図である．次の問いに答えよ．

(1) 円錐の表面積を求めよ．

(2) 円錐の高さを求めよ．

(3) 円錐の体積を求めよ．



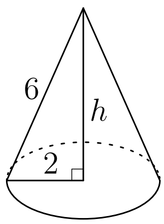
【解】 (1) 円弧の長さは，円周に等しいから $2\pi \cdot 2 = 4\pi$

ゆえに表面積は $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4\pi + \pi \cdot 2^2 = 16\pi$

(2) 高さを h とすると，三平方定理により

$$2^2 + h^2 = 6^2$$

よって $h = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$



(3) $\frac{1}{3} \times \pi \cdot 2^2 \times 4\sqrt{2} = \frac{16}{3}\sqrt{2}\pi$

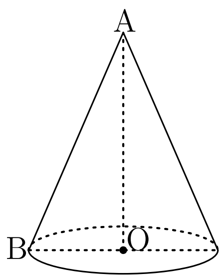
3.51 図のような AB = 5cm，BO = 2cm の円錐がある．次の問に答えよ．

(住友金属工業)

(1) 高さ AO を求めよ．

(2) この円錐の体積を求めよ．

(3) この円錐の表面積を求めよ．



実践問題6

きんでん

1 次の式を因数分解しなさい.

(1) $6x^2+7x+2$

(2) x^4-5x^2+4

(3) $x^3+6x^2+11x+6$

2 次の不等式を解きなさい.

(1) $x^2+5x-6>0$

(2) $x(x-2) \leqq 0$

(3) $x^2-3x+1 \leqq 0$

3 方程式 $x^2+ax+b=0$ の2つの解が1と α，方程式 $x^2+bx+a=0$ の2つの解が -3 と β であるとき，定数 a，b の値を求めよ．また，α，β の値を求めよ.

【答】

1 (1) $(2x+1)(3x+2)$　(2) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$　(3) $(x+1)(x+2)(x+3)$

2 (1) $x<-6,\ 1<x$　(2) $0 \leqq x \leqq 2$　(3) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

3 $a=-3,\ b=2,\ \alpha=2,\ \beta=1$

実践問題 7

JR 九州

次の問いに答えなさい.

(1) $2x^2 - x - 15$ を因数分解しなさい.

(2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 6 \end{cases}$ の連立方程式を解きなさい.

(3) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ の範囲 $(0 \leqq x \leqq 3)$ での最大値と最小値を求めなさい.

【答】

(1) $(x-3)(2x+5)$　(2) $x = 1,\ y = -1,\ z = 2$

(3) $x = 3$ のとき最大値 5, $x = 1$ のとき最小値 1

第 4 章　式と証明

4.1　式と計算

4.1.1　多項式の割り算

多項式 A を多項式 B で割る

① A，B を降べきの順に整理する．

② 整式の割り算と同様に，縦がき計算を行う．

例 4.1 x^3-5x+9 を x^2-3+2x で割った商と余りを求めよ．

【解】

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & & x & -2 \\ \hline
x^2+2x-3 & x^3 & & -5x & +9 \\
 & x^3 & +2x^2 & -3x & \\ \hline
 & & -2x^2 & -2x & +9 \\
 & & -2x^2 & -4x & +6 \\ \hline
 & & & 2x & +3
\end{array}
$$

← 割られる式で，ある次数の項がない場合は，その場所を空けておくと，計算しやすい．

(答)　商 $x-2$，余り $2x+3$

4.1 次の計算をせよ．

(1) $(2x^3+3x^2+x+4)\div(x+2)$ (きんでん)

(2) $(x^3+3x^2-2x-1)\div(x-3)$ (富士電機ホールディングス)

(3) $(3x^3-4x^2+2x-1)\div(x-1)$ (大阪ガス)

(4) $(p^3+p^2-4p-4)\div(p-2)$ (新日本石油)

(5) $(x^3+x+3)\div(x^2+2x-1)$ (テザック)

(6) $(8x^3-18x^2+11x-8)\div(4x^2-3x+1)$ (小田急電鉄)

(7) $(8a^2+a^3-a^4-11a+3)\div(3-2a-a^2)$ (JFE ホールディングス)

(8) $(2x^3-3x^2y+2xy^2-8y^3)\div(x-2y)$ (JFE ホールディングス)

割り算の等式

多項式 A を多項式 B で割った商が Q，余りが R のとき

$$\boldsymbol{A = BQ + R}$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad Q \\ \cline{2-2} B\,) & \quad A \\ & \cdots\cdots \\ \cline{2-2} & \qquad R \end{array}$$

ただし，R は 0 か B より次数の低い多項式

例題 4.2 多項式 $3x^3-4x^2+6x+8$ を多項式 B で割ると，商が $3x+2$，余りが $x+2$ であるという．B を求めよ．

【解】 この割り算について，次の等式が成り立つ．

$$3x^3-4x^2+6x+8 = B\times(3x+2)+x+2$$

整理すると

$$3x^3-4x^2+5x+6 = B\times(3x+2)$$

よって，$3x^3-4x^2+5x+6$ は $3x+2$ で割り切れて，その商が B である．

右の計算により　　$B = x^2-2x+3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & x^2 & -2x & +3 & \\ \cline{2-5} 3x+2\,) & 3x^3 & -4x^2 & +5x & +6 \\ & 3x^3 & +2x^2 & & \\ \cline{2-5} & & -6x^2 & +5x & \\ & & -6x^2 & -4x & \\ \cline{3-5} & & & 9x & +6 \\ & & & 9x & +6 \\ \cline{4-5} & & & & 0 \end{array}$$

4.2 次の条件を満たす多項式 A，B を求めよ．

(1) A を $x-3$ で割ると，商が x^2+2x-1，余りが 2

(2) $2x^3-7x^2+8x+1$ を B で割ると，商が $2x-1$，余りが $-3x+5$

4.3 最大公約数が $x-1$，最小公倍数が $2x^3+9x^2+4x-15$ である2つの2次の整式を求めよ．　　　　(いすゞ自動車)

4.1.2 分数式とその計算

分数式の性質

$$\boldsymbol{C \neq 0} \text{ **のとき** } \quad \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{A \times C}}{\boldsymbol{B \times C}}, \quad \frac{\boldsymbol{A \times \cancel{C}}}{\boldsymbol{B \times \cancel{C}}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$$

例 4.3 (1) $\dfrac{15a^2b^5}{10a^3b^3} = \dfrac{3b^2 \cdot \cancel{5a^2b^3}}{2a \cdot \cancel{5a^2b^3}} = \dfrac{3b^2}{2a}$

(2) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \dfrac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \dfrac{x+3}{x+1}$

分数式の分母と分子をその共通な因数で割ることを**約分**するという．例 4.3 で約分して得られた分数式のように，それ以上約分できない分数を**既約**（きやく）分数式という．

4.4 次の分数式を約分して，既約分数式で表せ．

(1) $\dfrac{54a^{10}b^6c^8}{-162a^{14}b^2cd}$ (東洋紡績)

(2) $\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$ (新菱エコビジネス)

(3) $\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$ (旭硝子)

(4) $\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-6x+4}$ (ブラザー工業)

(5) $\dfrac{(x^2+3x+2)(x^2+x-2)}{(x^2-2x+1)(x+2)(x-3)}$ (日立建機)

(6) $\dfrac{ax^2+bx^2-a-b}{bx+ax-b-a}$ (日本航空)

分数式の乗法・除法

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

例 4.4　(1) $\dfrac{x^2}{x-1}\times\dfrac{x^2-1}{2x}=\dfrac{x^2(x+1)(x-1)}{(x-1)\cdot 2x}=\dfrac{x(x+1)}{2}$

(2) $\dfrac{x^2-x}{x^2-7x+12}\div\dfrac{x^2+5x}{x^2+2x-15}=\dfrac{x(x-1)}{(x-3)(x-4)}\times\dfrac{(x-3)(x+5)}{x(x+5)}$

$$=\frac{x(x-1)(x-3)(x+5)}{(x-3)(x-4)\cdot x(x+5)}=\frac{x-1}{x-4}$$

4.5 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{3x^2y}{4a^2b^3}\times\dfrac{8a^3b}{9x^3y^2}$　(日本水産)

(2) $\dfrac{4xy^5}{3x^2y^3}\div\dfrac{2x^3y}{3xy^2}$　(武田薬品工業)

(3) $\dfrac{5a^2}{6xy}\div\left(\dfrac{2a^2}{9x^2y^2}\right)^2$　(NOK)

(4) $\dfrac{(-2ab)^2}{(xy)^2}\times\dfrac{x^2y^2}{(-a^2b)^3}$　(日本水産)

(5) $\dfrac{2x-1}{x}\times\dfrac{3x}{4x-2}$　(大阪製紙)

(6) $\dfrac{x-1}{x}\times\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$　(愛知製鋼)

(7) $\dfrac{x+1}{x^2-4}\div\dfrac{x^2-1}{x-2}$　(富士電機ホールディングス)

4.6 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{x^2-13x+36}{x^2-16} \div \dfrac{x-9}{x+4}$ (日産自動車)

(2) $\dfrac{x^2-4}{x^2-16} \times \dfrac{x^2-2x-8}{x^2+4x+4}$ (マツダ)

(3) $\dfrac{a^2-11a+30}{a^2-6a+9} \times \dfrac{a^2-3a}{a^2-5a}$ (小田急電鉄)

(4) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4} \times \dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4x+3}$ (オリンパス)

(5) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-9} \div \dfrac{x^2-6x+8}{2x^2-5x-3}$ (三村化学工業)

(6) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} \times \dfrac{xy+y^2}{x^2-xy}$ (九州電力)

(7) $\dfrac{x^2-9y^2}{x^2+6xy+9y^2} \times \dfrac{x+3y}{x^2-xy-6y^2}$ (雪印乳業)

(8) $\dfrac{x-3}{x^2-3x} \div \dfrac{x^2-1}{x^3-8} \times \dfrac{x^2+x}{x^2+2x+4}$
(コロムビアミュージックエンタテインメント)

(9) $\dfrac{x^2-x-2}{6x-15} \times \dfrac{6x^2-7x-20}{x^2-4} \div \dfrac{3x^2+7x+4}{x^2+2x}$ (三菱マテリアル)

例題 4.5 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{3x-1}{x-1}+\dfrac{1+x}{1-x}$　　(2) $\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}-\dfrac{3x-2}{x^2-4}$

【解】 (1) $\dfrac{3x-1}{x-1}+\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{3x-1}{x-1}+\dfrac{1+x}{-(x-1)}=\dfrac{(3x-1)-(1+x)}{x-1}$

$$=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

(2) $\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}-\dfrac{3x-2}{x^2-4}=\dfrac{2x-3}{(x-1)(x-2)}-\dfrac{3x-2}{(x+2)(x-2)}$

$$=\frac{(2x-3)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-2)}-\frac{(3x-2)(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{(2x^2+x-6)-(3x^2-5x+2)}{(x-1)(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{-x^2+6x-8}{(x-1)(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{-(x-2)(x-4)}{(x-1)(x+2)(x-2)}=-\frac{x-4}{(x-1)(x+2)}$$

4.7 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{b-a}$ (アマダ)

(2) $\dfrac{2x-1}{x-3}+\dfrac{x+2}{3-x}$ (クボタ)

(3) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{1}{1-x^2}$ (ニコン)

(4) $\dfrac{x+1}{x^2-4}-\dfrac{3}{(x+2)(x-2)}$ (松田組)

(5) $\dfrac{a^2}{a-1}+\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{a^2}{a+1}-\dfrac{1}{a-1}$ (中越パルプ工業)

4.8 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x^2-4}$　(雪印乳業)

(2) $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{8}{x^2-16}$　(日産自動車)

(3) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}$　(NEC エンジニアリング)

(4) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{8}{4-x^2}$　(三井造船)

(5) $\dfrac{2}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{2x}{x^2-y^2}$　(豊和産業)

(6) $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}+\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$　(横浜ゴム)

(7) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$　(シチズン時計)

(8) $1+\dfrac{b}{a-b}$　(平田機工)

(9) $x-\dfrac{x^2}{x+1}$　(昭和シェル石油)

4.9 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{a+b}{ab}-\dfrac{b+c}{bc}-\dfrac{a+c}{ac}$ (きんでん)

(2) $\dfrac{3}{x^2+x-2}-\dfrac{2}{x^2-1}$ (日本スピンドル製造)

(3) $\dfrac{1}{x^2-4x+3}-\dfrac{4}{x^2+2x-15}+\dfrac{3}{x^2+4x-5}$ (トヨタ自動車)

(4) $\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}$ (日本輸送機)

(5) $\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}-\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}$ (コスモ石油)

(6) $\dfrac{x+2y}{xy-x^2}+\dfrac{2x-5y}{x^2-3xy+2y^2}-\dfrac{x-3y}{x^2-2xy}$ (ニコン)

(7) $\dfrac{x-2}{2x^2-5x+3}+\dfrac{3x-1}{2x^2+x-6}-\dfrac{5-2x}{x^2+x-2}$ (JR)

(8) $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+x}\times\dfrac{x+1}{x^2+5x}+\dfrac{3x^2-x+3}{x^2+3x}\div\dfrac{x}{x+3}$ (大日本住友製薬)

例題 4.6 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{a}{5(a-5)}+\dfrac{5}{a(5-a)}$ (東芝)

(2) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$ (東京計器工業)

【解】 (1) $\dfrac{a}{5(a-5)}+\dfrac{5}{a(5-a)}=\dfrac{a}{5(a-5)}+\dfrac{5}{-a(a-5)}$

$$=\frac{a^2}{5a(a-5)}-\frac{25}{5a(a-5)}$$

$$=\frac{a^2-25}{5a(a-5)}=\frac{(a+5)(a-5)}{5a(a-5)}=\frac{a+5}{5a}$$

(2) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

$$=\frac{a}{(a-b)\{-(c-a)\}}+\frac{b}{(b-c)\{-(a-b)\}}+\frac{c}{(c-a)\{-(b-c)\}}$$

$$=-\frac{a}{(a-b)(c-a)}-\frac{b}{(b-c)(a-b)}-\frac{c}{(c-a)(b-c)}$$

$$=\frac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$$

4.10 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{1}{a^2-ab}+\dfrac{1}{b^2-ab}$ (ホシザキ電機)

(2) $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$ (日本毛織)

例 4.7　(日本電気)

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}$$
$$=\frac{1+x}{(1-x)(1+x)}+\frac{1-x}{(1+x)(1-x)}+\frac{2}{1+x^2}$$
$$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}$$
$$=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}+\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)}=\frac{4}{1-x^4}$$

4.11 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2+1}$　(フジテック)

(2) $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}$　(トクヤマ)

例 4.8　(JFE ホールディングス)

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}$$
$$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}$$
$$=\frac{(x+3)(x+4)+(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$
$$=\frac{2(x^2+5x+7)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

4.12 次の計算をせよ.　(テレビ朝日)

$$\frac{x+4}{x-1}-\frac{x+3}{x-2}-\frac{x+2}{x-3}+\frac{x+1}{x-4}$$

例題 4.9 次の式を計算せよ．

(1) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\div\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)$ (小田急電鉄)

(2) $\left(\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2}{x+1}\right)\div\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x-4}{x-2}\right)$ (ムトウ)

【解】 (1) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\div\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{b+a}{ab}\div\dfrac{a^2-b^2}{ab}$

$$=\frac{a+b}{ab}\times\frac{ab}{(a+b)(a-b)}=\frac{1}{a-b}$$

(2) $\left(\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2}{x+1}\right)\div\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x-4}{x-2}\right)$

$$=\frac{x(x+1)+2(x-2)}{(x-2)(x+1)}\div\frac{x(x-2)-(x-4)(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$=\frac{x^2+3x-4}{(x-2)(x+1)}\div\frac{x+4}{(x+1)(x-2)}$$

$$=\frac{(x-1)(x+4)}{(x-2)(x+1)}\times\frac{(x+1)(x-2)}{x+4}=x-1$$

4.13 次の計算をせよ．

(1) $(a^2-b^2)\div\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ (日産自動車)

(2) $\left(1+\dfrac{2y}{x-y}\right)\div\left(1-\dfrac{2y}{x+y}\right)$ (トヨタ自動車)

(3) $\left(\dfrac{1}{x^2+4x+3}+\dfrac{1}{2x+6}\right)\left(2+\dfrac{4}{3x+1}\right)$ (JR)

(4) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)$ (トヨタ自動車)

(5) $\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}\times\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}\right)\div\left(\dfrac{x+y}{y}+\dfrac{y}{x-y}\right)$ (日新製鋼)

例題 4.10 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{\dfrac{2a+b}{a+b}-1}{1-\dfrac{b}{a+b}}$ (トヨタ自動車)

(2) $\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{x-\dfrac{1}{x}}$ (三菱電機)

(3) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ (栗本鐵工所)

(4) $\dfrac{t-1}{t-\dfrac{2}{t+1}}$ (大同特殊鋼)

【解】 (1) $$\dfrac{\dfrac{2a+b}{a+b}-1}{1-\dfrac{b}{a+b}}=\dfrac{\left(\dfrac{2a+b}{a+b}-1\right)\times(a+b)}{\left(1-\dfrac{b}{a+b}\right)\times(a+b)}=\dfrac{(2a+b)-(a+b)}{(a+b)-b}=\dfrac{a}{a}=1$$

(2) $$\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{x-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\times x}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\times x}=\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{x+1}$$

(3) $$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1\times x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\times x}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}$$
$$=\dfrac{(x+1)+x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$$

(4) $$\dfrac{t-1}{t-\dfrac{2}{t+1}}=\dfrac{(t-1)\times(t+1)}{\left(t-\dfrac{2}{t+1}\right)\times(t+1)}=\dfrac{(t-1)(t+1)}{t(t+1)-2}$$
$$=\dfrac{(t-1)(t+1)}{t^2+t-2}=\dfrac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t+2)}=\dfrac{t+1}{t+2}$$

4.14 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{a-\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{1}{a}}$ (三菱電機，日本電気)

(2) $\dfrac{\dfrac{6}{x}-x-5}{1-\dfrac{1}{x}}$ (東邦テナックス)

(3) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}$ (日立エンジニアリング・アンド・サービス)

(4) $\dfrac{\dfrac{4ab}{a+b}-2a}{\dfrac{4ab}{a+b}-2b}$ (マツダ)

(5) $\dfrac{x+5+\dfrac{12}{x-3}}{x+\dfrac{2}{x-3}}$ (日産車体)

(6) $\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-1}}$ (新菱エコビジネス)

(7) $\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{1+x}}$ (トヨタ自動車)

(8) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}$ (電源開発)

例題 4.11 次の計算をせよ.

(1) $$\frac{\dfrac{x+y}{x}+\dfrac{x-y}{y}}{\dfrac{x-y}{x}-\dfrac{x+y}{y}}$$ (大同特殊鋼)

(2) $$\frac{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}}$$ (日立製作所)

【解】 (1) $$\frac{\dfrac{x+y}{x}+\dfrac{x-y}{y}}{\dfrac{x-y}{x}-\dfrac{x+y}{y}}=\frac{\left(\dfrac{x+y}{x}+\dfrac{x-y}{y}\right)\times xy}{\left(\dfrac{x-y}{x}-\dfrac{x+y}{y}\right)\times xy}=\frac{y(x+y)+x(x-y)}{y(x-y)-x(x+y)}$$
$$=\frac{x^2+y^2}{-x^2-y^2}=\frac{x^2+y^2}{-(x^2+y^2)}=-1$$

(2) $$\frac{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}}=\frac{\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}\right)\times(1-x)(1+x)}{\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)\times(1-x)(1+x)}$$
$$=\frac{(1+x)+(1-x)}{(1+x)-(1-x)}=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$$

4.15 次の式を計算せよ.

(1) $$\frac{\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}}$$ (山武)

(2) $$\frac{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}$$ (トヨタ自動車)

例題 4.12 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}}$ (日産ディーゼル)

(2) $\dfrac{1}{c-\dfrac{1}{c+\dfrac{1}{c}}}$ (日本無線)

【解】 (1)
$$\frac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}}=\frac{\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right)\times(a+b)^2(a-b)}{\left\{1-\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\right\}\times(a+b)^2(a-b)}$$
$$=\frac{\{(a+b)^2-(a-b)^2\}(a+b)}{\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}(a-b)}=\frac{4ab(a+b)}{2ab(a-b)}=\frac{2(a+b)}{a-b}$$

(2)
$$\frac{1}{c-\dfrac{1}{c+\dfrac{1}{c}}}=\frac{1}{c-\dfrac{1\times c}{\left(c+\dfrac{1}{c}\right)\times c}}=\frac{1}{c-\dfrac{c}{c^2+1}}=\frac{1\times(c^2+1)}{\left(c-\dfrac{c}{c^2+1}\right)\times(c^2+1)}$$
$$=\frac{c^2+1}{c(c^2+1)-c}=\frac{c^2+1}{c^3}$$

4.16 次の計算をせよ. (阪急電鉄)

$$\frac{1}{a-\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a}}}-\frac{1}{a+\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a}}}$$

例題 4.13　$1-\cfrac{A}{A+2-\cfrac{A+1}{A+\cfrac{1}{A+2}}}$ を計算せよ.　(NEC エンジニアリング)

【解】 $1-\cfrac{A}{A+2-\cfrac{A+1}{A+\cfrac{1}{A+2}}}=1-\cfrac{A}{A+2-\cfrac{(A+1)\times(A+2)}{\left(A+\cfrac{1}{A+2}\right)\times(A+2)}}$

$$=1-\cfrac{A}{A+2-\cfrac{(A+1)(A+2)}{A(A+2)+1}}$$

$$=1-\cfrac{A}{A+2-\cfrac{(A+1)(A+2)}{(A+1)^2}}$$

$$=1-\cfrac{A}{A+2-\cfrac{A+2}{A+1}}$$

$$=1-\cfrac{A\times(A+1)}{\left(A+2-\cfrac{A+2}{A+1}\right)\times(A+1)}$$

$$=1-\frac{A(A+1)}{(A+2)(A+1)-(A+2)}=1-\frac{A(A+1)}{A(A+2)}$$

$$=1-\frac{A+1}{A+2}=\frac{(A+2)-(A+1)}{A+2}=\frac{1}{A+2}$$

4.17 次の計算をせよ.　(住友ゴム工業)

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}}$$

4.18 $a>b>c>0$ のとき, $\dfrac{1}{ab}$, $\dfrac{1}{bc}$, $\dfrac{1}{ca}$ の大小関係をいえ.　(日本鉄塔工業)

4.19 $x=a+\dfrac{1}{a}$, $y=a-\dfrac{1}{a}$ のとき, $\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$ を a を用いて表せ.　(日立製作所)

4.20 次の問いに答えよ.

(1) $x = 11,\ y = 15$ のとき，次の値を求めよ. (デンソー)

$$\frac{2x^2 - x - 3}{2y^2 - 5y - 3} \div \frac{6x^2 - 7x - 3}{y^2 - y - 6}$$

(2) $a = \dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{a-b}{a+b}}{1 - \dfrac{2ab}{(a+b)^2}}$ の値を求めよ. (トヨタ自動車)

(3) $a + b = 4,\ ab = 1$ のとき，$a^2 + b^2$ および $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ の値を求めよ. (九州電力)

(4) $x + y = 3,\ xy = 1$ のとき，$\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{x}{y^2}$ の値を求めよ. (本田技研工業)

4.21 次の問いに答えよ.

(1) $x + \dfrac{1}{x} = 2$ のとき，$x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ の値を求めよ. (東芝プロセスソフトウェア)

(2) $x - \dfrac{1}{x} = 1$ のとき，$x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ の値を求めよ. (ローレルバンクマシン)

(3) $x + \dfrac{1}{x} = 1$ のとき，$x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ の値を求めよ. (日立製作所)

(4) $x - \dfrac{1}{x} = 1$ のとき，$x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ の値を求めよ. (松田組)

4.22 $x = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ のとき，次の値を求めよ．(三井造船)

(1) $x+y$　(2) $x-y$　(3) xy　(4) x^2+y^2　(5) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

4.23 次の問いに答えよ．

(1) $x = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ のとき $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$ の値を求めよ．(富士通)

(2) $x = \sqrt{3+\sqrt{5}}$, $y = \sqrt{3-\sqrt{5}}$ のとき $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}$ の値を求めよ．(電源開発)

(3) $x+\dfrac{1}{x} = 3$ $(x>0)$ のとき $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ の値を求めよ．(NTT)

4.1.3 恒等式

文字を含む等式において，文字にどのような値を代入しても成り立つ等式を，その文字についての**恒等式**という．

恒等式の性質

1 $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ が x についての恒等式である

$$\iff \quad a = a', \quad b = b', \quad c = c'$$

2 $ax^2 + bx + c = 0$ が x についての恒等式である

$$\iff \quad a = b = c = 0$$

例題 4.14 等式 $ax(x+1) + bx(x-1) + c(x+1)(x-1) = x^2 + 3$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

【解】 等式の左辺を整理すると

$$(a+b+c)x^2 + (a-b)x - c = x^2 + 3$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$a+b+c = 1,\ \ a-b = 0,\ \ -c = 3$$

これらを解いて　　$a = 2$，$b = 2$，$c = -3$

4.24 次の問いに答えよ．

(1) $A(x-2)(x+3) + B(x-1) + C = 2x^2 - 3x + 5$ が x についての恒等式となるように，定数 A, B, C の値を求めよ．　(シグマ・ゲイン)

(2) $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$ がどのような x に対しても常に成り立つように，定数 a, b の値を求めよ．　(エクセディ)

(3) 次式が x についての恒等式となるとき，A, B, C の値を求めよ．　(きんでん)

$$\frac{3x-9}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

4.2　等式・不等式の証明

4.2.1　等式の証明

条件つきの等式の証明

条件式を等式に代入して証明する.

例題 4.15 $a+b+c=0$ のとき，等式 $a^2-b^2=2bc+c^2$ を証明せよ.

[証明] $c=-a-b$ であるから

$$\begin{aligned} a^2-b^2-(2bc+c^2) &= a^2-b^2-2b(-a-b)-(-a-b)^2 \\ &= a^2-b^2+2ab+2b^2-(a^2+2ab+b^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって　　$a^2-b^2=2bc+c^2$ 　**[証終]**

4.25 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ.　(三菱電機)

$$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$$

4.26 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ.　(平田機工)

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$$

例題 4.16 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ．

$$\frac{a+3c}{b+3d}=\frac{2a-3c}{2b-3d}$$

[証明] $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　　$a=bk$，$c=dk$

よって　$$\frac{a+3c}{b+3d}=\frac{bk+3dk}{b+3d}=\frac{k(b+3d)}{b+3d}=k$$

$$\frac{2a-3c}{2b-3d}=\frac{2bk-3dk}{2b-3d}=\frac{k(2b-3d)}{2b-3d}=k$$

したがって　$$\frac{a+3c}{b+3d}=\frac{2a-3c}{2b-3d}$$ **[証終]**

4.27 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ．　(ニコン)

$$\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$$

4.28 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$ のとき，次の等式を証明せよ．　(JFE ホールディングス)

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{x^2-xy+y^2}{a^2-ab+b^2}$　　(2) $\dfrac{pa+rx}{qa+sx}=\dfrac{pb+ry}{qb+sy}$

4.2.2　不等式の証明

実数の平方

1　実数 a について　　$\boldsymbol{a^2 \geqq 0}$

等号が成り立つのは，$a=0$ のときである．

2　実数 a，b について　　$\boldsymbol{a^2+b^2 \geqq 0}$

等号が成り立つのは，$a=0$，$b=0$ のときである．

例題 4.17 次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．

$$a^2+b^2 \geqq 4(a-b-2)$$

[証明]

$$\begin{aligned} a^2+b^2-4(a-b-2) &= a^2-4a+4+b^2+4b+4 \\ &= (a-2)^2+(b+2)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

したがって　　$a^2+b^2 \geqq 4(a-b-2)$

等号が成り立つのは，$a-2=0$ かつ $b+2=0$，
すなわち $a=2$，$b=-2$ のときである．　**[証終]**

4.29 次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．

(1) $a^2+b^2 \geqq 2(a+b-1)$　(アツギ)

(2) $a^2-ab+b^2 \geqq 0$　(昭和電工)

(3) $x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$　(日新製鋼)

2数 a，b に対して，$\dfrac{a+b}{2}$ を a と b の**相加平均**という．
また，$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{ab}$ を a と b の**相乗平均**という．

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき $\qquad \boldsymbol{\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}}$

等号が成り立つのは，$a=b$ のときである．

[注意] この不等式は $\boldsymbol{a+b \geqq 2\sqrt{ab}}$ の形で使うことが多い．

例 4.18 $a>0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a+\frac{9}{a} \geqq 6$$

[証明] $a>0$，$\dfrac{9}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{9}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{9}{a}} = 2\sqrt{9} = 6$$

よって $\qquad a+\dfrac{9}{a} \geqq 6$ **[証終]**

4.30 次の不等式を証明せよ．

(1) $a>0$ のとき $a+\dfrac{1}{a} \geqq 2$ (ダイハツ工業)

(2) $a>0$, $b>0$ のとき $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 4$ (ダイハツ工業)

(3) $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ のとき $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right) \geqq 4$ (横河電機)

実践問題 8

三菱電機

1 次の式を展開しなさい．

(1) $(a+5)(a-3)$

(2) $(m-7)(m-8)$

(3) $(3x+3)(2x-5)$

(4) $(a+b+4)(a+b-6)$

(5) $(2x+3y)^3$

2 次の (　　) の中に適当な数値を入れなさい．

(1) $-4,\ -2,\ (\quad),\ 5,\ 10,\ 16$

(2) $19,\ 20,\ 18,\ 21,\ 17,\ 22,\ (\quad)$

(3) $\sqrt{2}=1.4$ であれば $\sqrt{200}=(\quad)$

(4) $19,481$ 円は，$84,700$ 円の (　　)% である．

(5) $x:y=6:7$，$y:z=3:2$ のとき $x:y:z=(\quad)$ である．

(6) $2\sqrt{3x+1}=x+3$ の 2 根の和は (　　) である．

(7) 関数 $y=x^2+3x-4$ について，x が -1 から 2 まで変化するときの平均変化率は (　　) である．

(8) 2m の 8% は (　　)cm である．

(9) $\log_8 0.25=(\quad)$

(10) $\log_7 1=(\quad)$

【答】

1 (1) $a^2+2a-15$　(2) $m^2-15m+56$　(3) $6x^2-9x-15$
(4) $a^2+2ab+b^2-2a-2b-24$　(5) $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

2 (1) 1　(2) 16　(3) 14　(4) 23　(5) 18 : 21 : 14
(6) 6　(7) 4　(8) 16　(9) $-\dfrac{2}{3}$　(10) 0

第 5 章　複素数と方程式

5.1　複素数と方程式の解

5.1.1　複素数とその計算

複素数とその相等

1 2 乗して -1 になる新しい数を 1 つ考え，これを文字 $\boldsymbol{i}$ で表す．
i を**虚数単位**という．

2 実数 a，b を用いて $\boldsymbol{a+bi}$ の形で表される数を**複素数**という．

3 a，b，c，d が実数のとき

$$\boldsymbol{a+bi=c+di} \iff \boldsymbol{a=c} \text{ かつ } \boldsymbol{b=d}$$

とくに　$$\boldsymbol{a+bi=0} \iff \boldsymbol{a=0} \text{ かつ } \boldsymbol{b=0}$$

例 5.1 次のような実数 a，b を求めよ．　(東芝)

$$(3+2i)a-(1-i)b=1+4i$$

【解】 左辺を整理すると　$(3a-b)+(2a+b)i=1+4i$

$3a-b$，$2a+b$ は実数であるから　$3a-b=1$，$2a+b=4$

これを解いて　$a=1$，$b=2$

5.1 次のような実数 x，y を求めよ．

(1) $3x+(2-3i)y=17-12i$　(新日本石油)

(2) $(x+5i)+(7-2y\,i)=5-i$　(トヨタ自動車)

(3) $(1-i)x+(1+i)y=-4$　(トヨタ自動車)

例 5.2 次の計算をせよ.

(1) $(3+2i)+(4-3i)$　　(2) $(1+2i)(3-2i)$

(3) $(3+2i)^2$　　(4) $(2+3i)(2-3i)$

【解】 (1) $(3+2i)+(4-3i)=(3+4)+(2-3)i=7-i$

(2) $$\begin{aligned}(1+2i)(3-2i)&=3-2i+6i-4i^2\\&=\{3-4\cdot(-1)\}+(-2+6)i=7+4i\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}(3+2i)^2&=9+12i+4i^2\\&=\{9+4\cdot(-1)\}+12i=5+12i\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}(2+3i)(2-3i)&=2^2-(3i)^2=4-9i^2\\&=4-9\cdot(-1)=13\end{aligned}$$

5.2 次の計算をせよ.

(1) $(4+3i)(1+i)$　(ニコン)

(2) $(2+3i)(4-2i)$　(北陸電力)

(3) $(4-3i)(3+5i)$　(NEC フィールディング)

(4) $(5-3i)(4+i)$　(東芝)

(5) $(4-i)(4+i)$　(ニチボー)

(6) $(3-2i)(6+4i)$　(北陸電力)

(7) $(-i)^3$　(アツギ)

(8) $5i^3\times 5i^5$　(日本ペイント)

(9) $i-i^2+i^3-i^4+i^5$　(オリンパス)

(10) $(1+i-i^3)^2$　(昭和シェル石油)

(11) $(\sqrt{7}-\sqrt{3}\,i)(\sqrt{7}+\sqrt{3}\,i)$　(トヨタ自動車)

(12) $(2+\sqrt{3}\,i)(3-\sqrt{27}\,i)$　(トヨタ自動車)

(13) $(1+i)^3$　(日立ソフトウェアエンジニアリング)

(14) $(-1+\sqrt{3}\,i)^3$　(三井化学)

2 つの複素数 $a+bi$，$a-bi$ を，互いに**共役**(きょうやく)**な複素数**という．
複素数の除法では，分母と共役な複素数を，分母，分子にかけて計算する．

例 5.3 $\dfrac{4+3i}{1-3i}$ を計算せよ．

【解】 $\dfrac{4+3i}{1-3i}=\dfrac{(4+3i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\dfrac{4+12i+3i+9i^2}{1^2+3^2}$

$$=\frac{-5+15i}{10}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$$

5.3 $\dfrac{2-i}{4-3i}$ を $a+bi$ の形で表せ．（九州電力）

5.4 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{2+3i}{4i}$ （日産ディーゼル工業）

(2) $\dfrac{1+i}{1-i}$ （ダイハツ工業）

(3) $\dfrac{2+i}{1+i}$ （東芝）

(4) $\dfrac{1-i}{2+i}$ （日本ペイント）

(5) $\dfrac{i-1}{2-3i}$ （安川電機）

(6) $\dfrac{2-3i}{3+2i}$ （石川島播磨重工業）

(7) $\dfrac{1+i}{i-1}$ （東陶機器）

(8) $\dfrac{(1-i)(1+3i)}{2+i}$ （新日本石油）

(9) $\dfrac{(3-i)(4+3i)}{3+i}$ （キヤノン）

(10) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{i}{1+i}+\dfrac{1+i}{2+i}$ （NEC フィールディング）

負の平方根

$a > 0$ とする.

1 $\boldsymbol{\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i}$　とくに　$\boldsymbol{\sqrt{-1} = i}$

2 $\boldsymbol{-a}$ の平方根は　$\boldsymbol{\pm\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a}\,i}$

例 5.4　次の問いに答えよ.

(1) -24 の平方根　(2) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9}$ を計算せよ

(3) 方程式 $x^2 = -5$ の解　(4) 方程式 $(x-1)^2 = -4$ の解

【解】 (1) $\pm\sqrt{-24} = \pm\sqrt{24}\,i = \pm 2\sqrt{6}\,i$

(2) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} = 2i \times 3i = 6i^2 = -6$

(3) $x = \pm\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}\,i$

(4)
$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= -4 \\ x-1 &= \pm\sqrt{-4} \\ x &= 1 \pm 2i \end{aligned}$$

5.5 次の計算をせよ.

(1) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-25}$　(安川電機)

(2) $\sqrt{-2} \times \sqrt{-18}$　(京王電鉄)

(3) $(1 + \sqrt{-2})(2 - \sqrt{-2})$　(JFE ホールディングス)

(4) $(\sqrt{-8} + \sqrt{6})^2$　(小田急電鉄)

5.6 2次方程式 $(2t-3)^2 + 9 = 0$ を解け.　(マツダ)

5.1.2　2次方程式の解

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を複素数の範囲で考えると，数学Iで学んだ解の公式は，b^2-4ac の符号に関係なく成り立つ．

2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

とくに $b=2b'$ ならば　$$\boldsymbol{x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}}$$

例 5.5　次の2次方程式を解け．

(1) $3x^2+5x+4=0$　　(2) $2x^2-6x+5=0$

【解】 (1) $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot3\cdot4}}{2\cdot3}=\dfrac{-5\pm\sqrt{-23}}{6}=\dfrac{-5\pm\sqrt{23}\,i}{6}$

(2) $2x^2+2\cdot(-3)+5=0$ より

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-2\cdot5}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-1}}{2}=\frac{3\pm i}{2}$$

5.7 次の2次方程式を解け．

(1) $5x^2+4x+17=0$　(神戸製鋼所)

(2) $3x^2+\sqrt{5}\,x+1=0$　(マツダ)

(3) $y-3=\dfrac{3}{4}y(y+2)$　(三井化学)

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ がどんな種類の解であるかを判別するには，解における根号の中の $\boldsymbol{b^2-4ac}$ の値を調べればよい．この b^2-4ac を2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**判別式**といい，ふつう $\boldsymbol{D}$ で表す．

2次方程式の解の種類の判別

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，その解について次のことが成り立つ．

$\boldsymbol{D>0} \iff$ **異なる2つの実数解**

$\boldsymbol{D=0} \iff$ **重解　(実数解)**

$\boldsymbol{D<0} \iff$ **異なる2つの虚数解**

[注意] $D \geqq 0 \iff$ 実数解

例 5.6　2次方程式の解の種類を判別する．

(1)　2次方程式 $2x^2+x-3=0$ の判別式は

$$D=1^2-4\cdot2\cdot(-3)=25>0$$

よって，この2次方程式は異なる2つの実数解をもつ．

(2)　2次方程式 $9x^2-12x+4=0$ の判別式は

$$D/4=(-6)^2-9\cdot4=0$$

よって，この2次方程式は重解をもつ．

(3)　2次方程式 $2x^2-3x+4=0$ の判別式は

$$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot4=-23<0$$

よって，この2次方程式は異なる2つの虚数解をもつ．

5.8 次の2次方程式の解の種類を判別せよ．

(1) $x^2-2x-1=0$　　(東芝)

(2) $x^2-4x-5=0$　　(ソトー)

(3) $4x^2-12x+9=0$　　(新日本石油)

(4) $x^2+x+1=0$　　(新日本石油)

(5) $2x^2+4x+3=0$　　(小松製作所)

(6) $4x^2-12mx+9m^2=0$ (m は実数)　　(三井化学)

例題 5.7 次の問いに答えよ.

(1) 2 次方程式 $x^2 + ax - a + 3 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ. (きんでん)

(2) 2 次方程式 $x^2 + 2kx + 8k + 9 = 0$ が重解をもつとき，定数 k の値を求めよ. (ニコン)

(3) 2 次方程式 $x^2 - (a + 2)x + 4 = 0$ が異なる 2 つの虚数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ. (大同特殊鋼)

(4) 2 次方程式 $x^2 + 6x + 2k + 1 = 0$ が実数解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ. (トヨタ自動車)

【解】 (1) 2 次方程式 $x^2 + ax - a + 3 = 0$ の判別式は

$$D = a^2 - 4{\cdot}1{\cdot}(-a + 3) = a^2 + 4a - 12 = (a + 6)(a - 2)$$

2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつのは $D > 0$ のときである.

よって　$(a + 6)(a - 2) > 0$

これを解いて　$a < -6$，$2 < a$

(2) 2 次方程式 $x^2 + 2kx + 8k + 9 = 0$ の判別式は

$$D/4 = k^2 - 1{\cdot}(8k + 9) = k^2 - 8k - 9 = (k + 1)(k - 9)$$

2 次方程式が重解をもつのは $D = 0$ のときである.

よって　$(k + 1)(k - 9) = 0$

これを解いて　$k = -1, 9$

(3) 2 次方程式 $x^2 - (a + 2)x + 4 = 0$ の判別式は

$$D = \{-(a + 2)\}^2 - 4{\cdot}1{\cdot}4 = a^2 + 4a - 12 = (a + 6)(a - 2)$$

2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつのは $D < 0$ のときである.

よって　$(a + 6)(a - 2) < 0$

これを解いて　$-6 < a < 2$

(4) 2 次方程式 $x^2 + 2{\cdot}3x + 2k + 1 = 0$ の判別式は

$$D/4 = 3^2 - 1{\cdot}(2k + 1) = -2k + 8$$

2 次方程式が実数解をもつのは $D \geqq 0$ のときである.

よって　$-2k + 8 \geqq 0$

これを解いて　$k \leqq 4$

5.9 次の問いに答えよ.

(1) 2 次方程式 $4x^2+(k-1)x+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ. (トヨタ自動車)

(2) 2 次方程式 $x^2-2(k-4)x+2k=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ. (川崎重工業)

(3) 2 次方程式 $x^2+ax+2a-3=0$ が重解をもつとき，定数 a の値を求めよ.
(トヨタ自動車)

(4) 2 次方程式 $kx^2-2kx-k+1=0$ が異なる 2 つの虚数解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ. (いすゞ自動車)

(5) 2 次方程式 $x^2+6x+2k-1=0$ が実数解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ. (トヨタ自動車)

5.1.3　解と係数の関係

解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

例 5.8 2 次方程式 $3x^2+x-6=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{3},\qquad \alpha\beta=\frac{-6}{3}=-2$$

5.10 次の 2 次方程式の 2 つの解の和と積を，それぞれ求めよ．

(1) $x^2-2x+3=0$ (NTT)

(2) $3x^2+2x-5=0$ (小松製作所)

(3) $\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}=0$ (小松製作所)

例題 5.9 2 次方程式 $x^2+3x+4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2+\beta^2$　(2) $\alpha^3+\beta^3$　(3) $(\alpha-\beta)^2$　(4) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$

【解】 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-3$，$\alpha\beta=4$

(1) $$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(-3)^2-2\cdot4=1\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=(-3)^3-3\cdot4\cdot(-3)=9\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=(-3)^2-4\cdot4=-7\end{aligned}$$

(4) $$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2}{\alpha\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{1}{4}$$

5.11 次の問いに答えよ.

(1) 2 次方程式 $x^2+4x+1=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ. (NTT)

(i) $\alpha+\beta$　(ii) $\alpha\beta$　(iii) $\alpha^2+\beta^2$

(2) 2 次方程式 $3x^2+5x+1=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ. (平田機工)

(i) $\alpha+\beta$　(ii) $\alpha\beta$　(iii) $\alpha^2+\beta^2$

(3) 2 次方程式 $x^2-2x+2=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ. (トヨタ自動車)

(i) $\alpha+\beta$　(ii) $\alpha\beta$　(iii) $\alpha^2+\beta^2$　(iv) $(\alpha-\beta)^2$

(4) 2 次方程式 $x^2-x+1=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ の値を求めよ. (三井造船)

(5) 2 次方程式 $2x^2-3x+4=0$ の解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ.

(日本特殊機器)

(i) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　(ii) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

(6) 2 次方程式 $4x^2+12x+5=0$ の解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ. (新日本製鐵)

(i) $(\alpha+\beta)^4$　(ii) $(\alpha-\beta)^4$

(7) 2 次方程式 $2x^2+6x-1=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，$\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ の値を求めよ. (NTT)

(8) 2 次方程式 $2x^2-3x+5=0$ の 2 つの解を α, β としたとき，$\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\left(\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}\right)$ の値を求めよ. (電源開発)

例題 5.10 2 次方程式 $x^2 + 7x + m = 0$ の 2 つの解が次の条件を満たすとき，定数 m の値と 2 つの解を，それぞれ求めよ．

(1) 2 つの解の比が $3:4$ である．

(2) 2 つの解の差が 3 である．

【解】 (1) 2 つの解は 3α，4α と表すことができる．

解と係数の関係から　$3\alpha + 4\alpha = -7$，$3\alpha \cdot 4\alpha = m$

すなわち　$7\alpha = -7$，$12\alpha^2 = m$

よって　$\alpha = -1$，$m = 12(-1)^2 = 12$

また，2 つの解は　$3\alpha = 3(-1) = -3$，$4\alpha = 4(-1) = -4$

(答) $m = 12$，2 つの解は -3，-4

(2) 2 つの解は α，$\alpha + 3$ と表すことができる．

解と係数の関係から　$\alpha + (\alpha + 3) = -7$，$\alpha(\alpha + 3) = m$

すなわち　$2\alpha + 3 = -7$，$\alpha(\alpha + 3) = m$

よって　$\alpha = -5$，$m = -5(-5 + 3) = 10$

また，他の解 $\alpha + 3$ は　$\alpha + 3 = -5 + 3 = -2$

(答) $m = 10$，2 つの解は -5，-2

5.12 次の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $x^2 + 3x + k = 0$ において，2 つの解の差が 2 であるとき，k の値を求めよ．(武田薬品工業)

(2) 2 次方程式 $x^2 - mx + m + 2 = 0$ の 1 つの解が他の解の 2 倍であるとき，m の値を求めよ．(JFE ホールディングス)

(3) 2 次方程式 $x^2 + ax + 14 - a = 0$ の解の比が $2:3$ であるとき，a の値および解を求めよ．(帝人)

例題 5.11 2 次方程式 $2x^2 + px + q = 0$ が $\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$ と $\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$ を解にもつとき，p，q の値を求めよ．

【解】 解と係数の関係により

$$\frac{3+\sqrt{7}}{2} + \frac{3-\sqrt{7}}{2} = -\frac{p}{2}, \qquad \frac{3+\sqrt{7}}{2} \times \frac{3-\sqrt{7}}{2} = \frac{q}{2}$$

よって　$p = -6$，$q = 1$

5.13 次の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が 2 と 5 を解にもつとき，p，q の値を求めよ．

(シチズン時計)

(2) 2 次方程式 $2x^2 + ax - b = 0$ の 2 つの解が $-3+\sqrt{5}$，$-3-\sqrt{5}$ であるとき，a，b の値を求めよ． (横河電機)

α，β を解とする 2 次方程式

2 数 α，β を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0}$$

[注意] 2 数の和が p，積が q である 2 数は，方程式 $x^2 - px + q = 0$ の解である．

例 5.12 2 数 $3+2i$，$3-2i$ を解とする 2 次方程式を作る．

解の和は　$(3+2i) + (3-2i) = 6$

解の積は　$(3+2i)(3-2i) = 9 - 4i^2 = 13$

よって，このような解をもつ 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

5.14 2 と −3 を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ． (武田薬品工業)

例題 5.13 2次方程式 $x^2-3x+5=0$ の2つの解を α，β とするとき，2数 $\alpha+2$，$\beta+2$ を解とする2次方程式を1つ作れ．

【解】 2次方程式 $x^2-3x+5=0$ の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=5$$

ここで $(\alpha+2)+(\beta+2)=(\alpha+\beta)+4=3+4=7$

$$(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=5+2\cdot 3+4=15$$

よって，$\alpha+2$，$\beta+2$ を解とする2次方程式の1つは

$$x^2-7x+15=0$$

5.15 次の問いに答えよ．

(1) $5x^2-2x-4=0$ の2つの解を α，β とするとき，$\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$ を2解とする2次方程式を1つ作れ． (万有製薬)

(2) 2次方程式 $x^2-7x+5=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の2数を解とする2次方程式を1つ作れ． (三菱重工)

(i) 2α，2β (ii) $\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$

(3) $3x^2-4x+5=0$ の2つの解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta$，$\alpha+\beta^2$ を2つの解とする2次方程式を1つ作れ． (積水化学工業)

5.16 $x^2-2px+3p=0$ の2解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ を最小にするような p の値を求めよ． (三井化学)

5.2　高次方程式

5.2.1　剰余の定理と因数定理

剰余の定理

多項式 $P(x)$ を $x-k$ で割った余りは，$P(k)$ に等しい.

[注意] $P(x)$ を $ax+b$ で割った余りは，$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ に等しい.

例 5.14 (1)　$P(x)=x^3-2x+3$ を $x-1$ で割った余りは $P(1)$ で

$$P(1)=1^3-2\cdot1+3=2$$

(2)　$P(x)=2x^3+5x^2+x+4$ を $x+2$ で割った余りは $P(-2)$ で

$$P(-2)=2\cdot(-2)^3+5\cdot(-2)^2+(-2)+4=6$$

5.17 次の問いに答えよ.

(1) $x^3+5x^2-2x-24$ を $x+3$ で割った余りを求めよ.　(ニコン)

(2) x^3-2x^2+2x-1 を $2x-3$ で割った余りを求めよ.　(マツダ)

(3) $8x^4-6x^2-7$ を $2x+3$ で割った余りを求めよ.　(トヨタ自動車)

例題 5.15 x^3-mx+4 が $x+2$ で割り切れるとき，定数 m の値を求めよ．(NTT)

【解】 $P(x)=x^3-mx+4$ とおくと，$P(-2)=0$ であるから

$(-2)^3-m\cdot(-2)+4=0$ 　　これを解いて　　$m=2$

5.18 次の問いに答えよ．

(1) x^3-x^2-ax+2 を $x+1$ で割ったときの余りが 1 であるとき，定数 a の値を求めよ． (NTT)

(2) $x^3+px^2+11x+6$ を $x-2$ および $x-3$ で割ったときの余りは等しいという．定数 p の値と，そのときの余りを求めよ． (大阪ガス)

(3) $x^4-px^3+px^2-4$ が $x+2$ で割り切れるように，定数 p の値を定めよ． (住友ゴム工業)

(4) x^3-px^2+2x+4 が $x-p$ で割り切れるように，定数 p の値を定めよ． (三井化学)

例題 5.16　x^3+ax^2+x+b が x^2+x-2 で割り切れるとき，定数 a，b の値を求めよ．

【解】 $P(x)=x^3+ax^2+x+b$ とおく．$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ であるから，$P(x)$ が $(x-1)(x+2)$ で割り切れるための条件は

$$P(1)=0 \quad \text{かつ} \quad P(-2)=0$$

$P(1)=0$ から　　$1^3+a\cdot 1^2+1+b=0$

整理すると　　$a+b=-2$　　$\cdots$①

$P(-2)=0$ から　　$(-2)^3+a\cdot(-2)^2+(-2)+b=0$

整理すると　　$4a+b=10$　　$\cdots$②

①，② を解いて　　$a=4$，$b=-6$

5.19 次の問いに答えよ．

(1) x^3+3x^2+ax+b は $x-2$ で割り切れ，$x+3$ で割ると5余るという．定数 a，b の値を求めよ．(トヨタ自動車)

(2) x^3+px^2+qx-5 が x^2-1 で割り切れるとき，定数 p，q の値を求めよ．(NHK)

(3) $2x^3+ax^2+bx-18$ が x^2+x-6 で割り切れるとき，定数 a，b の値を求めよ．(武田薬品工業)

例題 5.17 多項式 $P(x)$ を $x-2$，$x+1$ で割った余りがそれぞれ -7，5 である．$P(x)$ を $(x-2)(x+1)$ で割った余りを求めよ．

【解】 $P(x)$ を 2 次式 $(x-2)(x+1)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$P(x)=(x-2)(x+1)Q(x)+ax+b$$

この等式より　　$P(2)=2a+b$，$P(-1)=-a+b$

また，$x-2$ で割った余りが -7 であるから　$P(2)=-7$

$x+1$ で割った余りが 5 であるから　　$P(-1)=5$

よって　　$2a+b=-7$，$-a+b=5$

これを解くと　　$a=-4$，$b=1$

したがって，求める余りは　　$-4x+1$

5.20 次の問いに答えよ．

(1) $x-2$ で割ると 3 余り，$x-5$ で割ると 6 余る多項式がある．この多項式を $(x-2)(x-5)$ で割ると余りはいくらか．　(マツダ)

(2) 整式 $f(x)$ を x^2+2x-3 で割ったときの余りは $2x+1$ であり，$x+2$ で割ったときの余りは 1 であるという．$f(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ．　(トヨタ自動車)

因数定理

多項式 $P(x)$ が1次式 $x-k$ を因数にもつ　$\Longleftrightarrow$　$P(k)=0$

例 5.18 $2x^3+3x^2-5x-6$ の因数分解

$P(x)=2x^3+3x^2-5x-6$ とすると

$$P(-1)=2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-6=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$2x^3+3x^2-5x-6=(x+1)(2x^2+x-6)$$

したがって

$$2x^3+3x^2-5x-6=(x+1)(x+2)(2x-3)$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+x-6 \\ \hline
x+1 & 2x^3+3x^2-5x-6 \\
 & 2x^3+2x^2 \\ \cline{2-2}
 & \phantom{2x^3+{}}x^2-5x \\
 & \phantom{2x^3+{}}x^2+x \\ \cline{2-2}
 & -6x-6 \\
 & -6x-6 \\ \cline{2-2}
 & \phantom{2x^3+3x^2-6x-{}}0
\end{array}
$$

5.21 次の式を因数分解せよ．

(1) x^3-3x+2　(JFE ホールディングス)

(2) x^3-3x-2　(三菱重工)

(3) x^3-3x^2+x+1　(日産自動車)

(4) x^3-4x^2+5x-2　(トヨタ自動車)

(5) x^3-2x^2-6x+7　(シチズン時計)

(6) x^3+x^2-5x-6　(ケイライン ロジスティックス)

(7) x^3-2x^2-5x+6　(日産自動車)

(8) x^3-4x^2-8x+8　(九州電力)

(9) $x^3+5x^2-2x-24$　(コマツ西日本)

(10) $2x^3-3x^2-11x+6$　(神戸製鋼所)

(11) $3x^3-5x^2-4x+4$　(日立ソフトウェアエンジニアリング)

(12) $x^4-x^3-7x^2+x+6$　(東陶機器)

5.2.2 高次方程式

例 5.19 次の方程式を解け.

(1) $x^3+8=0$　　(2) $x^4+3x^2-4=0$

(3) $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3=0$

【解】 (1) $x^3+8=0$　から　$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

ゆえに　$x+2=0$　または　$x^2-2x+4=0$

したがって　$x=-2,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$

(2) $x^4+3x^2-4=0$　から　$(x^2-1)(x^2+4)=0$

ゆえに　$x^2-1=0$　または　$x^2+4=0$

したがって　$x=\pm 1,\ \pm 2i$

(3) $x^2+2x=X$ とおくと　$X^2-2X-3=0$

$(X+1)(X-3)=0$

ゆえに　$(x^2+2x+1)(x^2+2x-3)=0$

$(x+1)^2(x-1)(x+3)=0$

したがって　$x=-1(2\text{重解}),\ 1,\ -3$

5.22 次の方程式を解け.

(1) $x^3-1=0$　(太陽日酸)

(2) $x^4-3x^2-4=0$　(名機製作所)

(3) $x^4+2x^2-8=0$　(石川島播磨重工業)

(4) $x^4+9=10x^2$　(日本毛織)

(5) $(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8=0$　(電源開発)

(6) $(x^2-3x)^2-8(x^2-3x)-20=0$　(トヨタ自動車)

(7) $(x+1)(x+2)(x-5)(x-6)=44$　(大阪ガス)

例題 5.20 方程式 $x^3+4x^2+3x-2=0$ を解け. (ニチボー)

【解】 $P(x)=x^3+4x^2+3x-2$ とすると

$$P(-2)=(-2)^3+4\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)-2=0$$

よって，$P(x)$ は $x+2$ を因数にもち

$$P(x)=(x+2)(x^2+2x-1)$$

$P(x)=0$ から

$$x+2=0 \quad \text{または} \quad x^2+2x-1=0$$

したがって　$x=-2,\ -1\pm\sqrt{2}$

5.23 次の方程式を解け.

(1) $x^3-3x+2=0$ (昭和アルミ)

(2) $2x^3-6x^2+4=0$ (東芝)

(3) $x^3-4x^2+5x-2=0$ (小田急電鉄)

(4) $x^3-2x^2-5x+6=0$ (東京計器工業)

(5) $x^3-6x^2+11x-6=0$ (ニチボー)

(6) $x^3-8x^2+17x-10=0$ (TDK)

(7) $x^3+x^2+x+6=0$ (NEC フィールディング)

(8) $3x^3-13x^2+13x-3=0$ (日本毛織)

例題 5.21 x の方程式 $x^3+4x^2+ax+b=0$ が 1 と -3 を解にもつという.
(1) 定数 a, b の値を求めよ. (2) 他の解を求めよ.

【解】 (1) 1, -3 がこの方程式の解であるから

$$1^3+4{\cdot}1^2+a{\cdot}1+b=0$$
$$(-3)^3+4{\cdot}(-3)^2+a{\cdot}(-3)+b=0$$

式を整理すると

$$a+b+5=0,\ \ -3a+b+9=0$$

これを解いて $a=1$, $b=-6$

(2) (1) より，方程式は

$$x^3+4x^2+x-6=0$$

左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x+3)(x+2)=0$$

したがって，求める他の解は -2

5.24 $x^3-x^2+ax+5=0$ について，次の問いに答えよ. (トヨタ自動車)

(1) 1つの解が -1 のとき，a の値を求めよ.

(2) (1) のとき，残りの2つの解を求めよ.

5.25 $x^4+x^3+ax+b=0$ の2つの解が $-1, -2$ である. a, b の値を求めよ. また，残りの解を求めよ. (日立製作所)

5.3　分数方程式・無理方程式

5.3.1　分数方程式

分数方程式の解き方

① 両辺の分母を分母を払う (最小公倍数を掛ける).

② その整方程式を解く.

③ 解の吟味. ② の解で，原方程式の分母を 0 にしないものをとる.

例題 5.22 分数方程式 $\dfrac{x^2-3x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x-1}+4=0$ を解け.　(大阪ガス)

【解】 分母払うと　$(x^2-3x)+(x+1)+4(x^2-1)=0$

整理して　$5x^2-2x-3=0$

すなわち　$(x-1)(5x+3)=0$

ゆえに　$x=1,\ -\dfrac{3}{5}$

$x=1$ は，原方程式の分母を 0 にするので，解ではない.

よって　$x=-\dfrac{3}{5}$

5.26 次の分数方程式を解け.

(1) $\dfrac{x-2}{x+3}=-1$　(NTT)

(2) $\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{x-3}=0$　(豊田工機)

(3) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{2x-3}=0$　(京王電鉄)

(4) $\dfrac{2x-1}{x+2}=\dfrac{2x+1}{x}$　(日本飛行機)

(5) $\dfrac{x-2}{x+6}=\dfrac{2x-7}{x+9}$　(新日本石油)

(6) $\dfrac{10}{x+2}-\dfrac{11}{x+3}=\dfrac{3}{4}$　(松田組)

(7) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+3}{x-2}=2$　(安川電機)

(8) $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x}{x^2-1}+3$ (積水化学工業)

(9) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}=\dfrac{1}{x-2}$ (日本毛織)

(10) $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{7}{x-2}=\dfrac{20}{x^2-4}$ (マツダ)

(11) $\dfrac{x-5}{x^2-1}+3=\dfrac{2}{1-x}$ (西日本鉄道)

(12) $\dfrac{3(x-1)}{x+1}-\dfrac{2(x+1)}{x-1}=5$ (シチズン時計)

(13) $\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}=\dfrac{x+1}{x-1}+1$ (国精工業)

(14) $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{2}$ (武田薬品工業)

(15) $x+\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{5x-4}{x^2-1}$ (ブラザー工業)

(16) $\dfrac{3x}{x-3}-\dfrac{16}{x^2-9}=\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{2x}{9-x^2}$ (松田組)

例題 5.23 甲，乙2人で働けばある日数で完成する仕事がある．今この仕事を甲だけですれば18日遅れ，乙だけですれば32日遅れるという．このとき，甲だけで完成するには何日かかかるか．また，乙だけで完成するには何日かかるか．

(クボタ)

【解】 2人で n 日で完成すると，甲1人では $n+18$ 日，乙1人では $n+32$ 日で完成するから

甲は1日に仕事全体の $\dfrac{1}{n+18}$，　乙は1日に仕事全体の $\dfrac{1}{n+32}$

だけ仕上げ，2人では1日に仕事全体の $\dfrac{1}{n}$ だけ仕上げる．

したがって　$$\frac{1}{n+18}+\frac{1}{n+32}=\frac{1}{n}$$

この両辺に $n(n+18)(n+32)$ を掛けると

$$n(n+32)+n(n+18)=(n+18)(n+32)$$
$$2n^2+50n=n^2+50n+18\times 32$$
$$n^2=24^2$$

$n>0$ より　$$n=24$$

よって，甲だけで，$24+18=42$(日)，$24+32=56$(日)

(答) 甲42日，乙56日

5.27 A，Bの機械がある．2台の機械を使ってある日数で仕上げる仕事がある．Aだけを使うと4日遅れ，Bだけを使うと9日遅れて完成する．Aだけを使うと何日かかるか．

(前田建設工業)

5.3.2 無理方程式

無理方程式の解き方

① 適当に移項し，両辺を平方 (2 乗) して，整方程式を導く．

② その整方程式を解く．

③ 解の吟味．② の解で，原方程式を満たすものをとる．

例題 5.24 無理方程式 $\sqrt{x+5}+1=x$ を解け． (NTT)

【解】 移項すると $\sqrt{x+5}=x-1$

両辺を平方して $x+5=x^2-2x+1$

整理すると $x^2-3x-4=0$

すなわち $(x+1)(x-4)=0$

ゆえに $x=-1,\ 4$

$x=-1$ を原方程式に代入すると，左辺 $\neq$ 右辺となるので，解ではない．

$x=4$ を原方程式に代入すると，左辺 $=$ 右辺となるので，解である．

よって $x=4$

5.28 次の無理方程式を解け．

(1) $\sqrt{x-1}=5$ (トヨタ車体)

(2) $1+\sqrt{x+1}=5$ (長谷川製作所)

(3) $\sqrt{x}=x-6$ (平田機工)

(4) $x-3=\sqrt{x-3}$ (富士重工業)

(5) $\sqrt{x+1}=x-1$ (NTT)

(6) $\sqrt{x+3}=x-3$ (ローレルバンクマシン)

(7) $\sqrt{x-1}=3-x$ (デンソー)

(8) $\sqrt{5x+10}=8-x$ (きんでん)

(9) $\sqrt{x^2-x+4}=2x$ (オリンパス)

(10) $x-\sqrt{x+6}=0$ (凸版印刷)

(11) $x-\sqrt{x+3}=9$ (アマダ)

(12) $x+\sqrt{x+1}=5$ (JFE ホールディングス)

(13) $x+\sqrt{x+3}=3$ (富士通)

(14) $\sqrt{25-x^2}-x=1$ (神戸製鋼所)

(15) $\sqrt{25-x^2}+x-1=0$ (ヤマハ発動機)

例題 5.25 無理方程式 $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2$ を解け. (住友倉庫)

【解】 移項すると $\sqrt{x+4}=2+\sqrt{6-x}$

両辺を平方して $x+4=4+4\sqrt{6-x}+(6-x)$

整理して $x-3=2\sqrt{6-x}$

さらに平方して $x^2-6x+9=4(6-x)$

整理して $x^2-2x-15=0$

すなわち $(x+3)(x-5)=0$

ゆえに $x=-3,\ 5$

$x=-3$ を原方程式に代入すると，左辺 $\neq$ 右辺となるので，解ではない.

$x=5$ を原方程式に代入すると，左辺 $=$ 右辺となるので，解である.

よって $x=5$

5.29 次の無理方程式を解け.

(1) $\sqrt{4x+9}-2\sqrt{x}=1$ (スズキ)

(2) $\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+3}=1$ (東芝プロセスソフトウェア)

実践問題 9

ダイハツ工業

1 次の計算をしなさい.

(1) $7 \times 3 - 4^2 + 6 \times 4 \div (-8)$

(2) $x^2 + x - 12 = 0$

(3) $\dfrac{2}{3}ab - \dfrac{1}{6}ab + \dfrac{1}{3}ab$

(4) $(5x + 7y - 4) - (5x - 7y + 2)$

(5) $0.45 + 0.3 - 0.34 + 0.2$

2 2 点 $(-2, -3)$, $(2, -5)$ を通る直線の式を求めよ.

3 ある工場で部品をつくるのに A の機械 3 台と B の機械 6 台とを使用したら 1 時間で 1,200 個, A の機械 2 台と B の機械 3 台とを使用したら 1 時間で 680 個つくれた.

(1) A の機械, B の機械の 1 時間あたりの生産個数を求めよ.

(2) A の機械 4 台と B の機械 3 台を使用して 2,000 個の部品をつくるのに何時間かかるか.

【答】

1 (1) 2　(2) $x = -4,\ 3$　(3) $\dfrac{5}{6}ab$　(4) $14y - 6$　(5) 0.61

2 $y = -\dfrac{1}{2}x - 4$

3 (1) A : 160 個, B : 120 個　(2) 2 時間

実践問題10

大同特殊鋼

1 次の計算をしなさい．

(1) $2\dfrac{1}{3} \div \left(-\dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{8}{9} \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)$

(2) $-0.3^2 \times 10^2 \div (-3) - (-2) + (-2)^2$

(3) $\dfrac{\frac{3}{5} - \frac{1}{15}}{1 - \frac{1}{3}}$

(4) $a^2 \times a^3 - (-b^2)^3 \times \dfrac{1}{b^2}$

(5) $(-2)^3 \times 3^2$

(6) $\sqrt{\dfrac{4}{15}} \times \sqrt{\dfrac{5}{7}} \div \dfrac{6}{\sqrt{14}}$

2 $\angle A$ が鋭角で $\cos A = \dfrac{4}{5}$ のとき，$\sin A$，$\tan A$ の値を求めなさい．

3 次の各問いに答えなさい．

(1) 7% と 2% の食塩水を混ぜて 3% の食塩水を 400g 作りたい．それぞれ何 g づつ混ぜればよいか．

(2) ある正の数の 2 乗を計算するのに誤って 2 倍したので，正しい答よりも 8 だけ小さくなった．正しい答えはいくらか．

(3) 原価 2400 円の品物に r 割の利益を見込んで定価をつけたが，売れなかったので定価の r 割引で売ったら 216 円の損をした．r の値を求めなさい．

【答】

1 (1) $-\dfrac{17}{6}$　(2) 9　(3) $\dfrac{4}{5}$　(4) $a^5 + b^4$　(5) -72　(6) $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

2 $\sin A = \dfrac{3}{5}$，$\tan A = \dfrac{3}{4}$

3 (1) 7% : 80g, 2% : 320g　(2) 16　(3) 3

第 6 章　図形と方程式

6.1　点と直線

6.1.1　直線上の点

直線上の点

1　2 点 A(a)，B(b) 間の距離 AB

$$\mathbf{AB} = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|$$

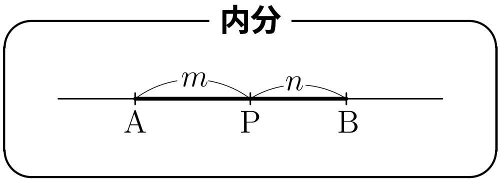
2　内分点・外分点の座標

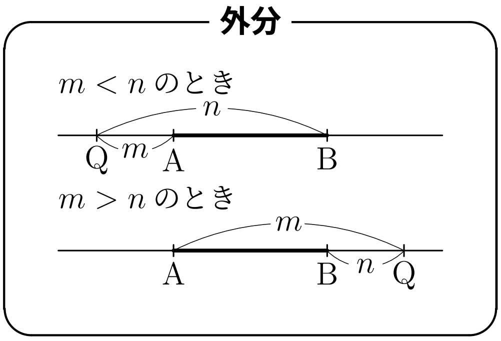
2 点 A(a)，B(b) を結ぶ線分 AB を，$m : n$ に内分する点を P，外分する点を Q とする．

点 P の座標は　$\dfrac{\boldsymbol{na+mb}}{\boldsymbol{m+n}}$

点 Q の座標は　$\dfrac{\boldsymbol{-na+mb}}{\boldsymbol{m-n}}$

とくに，中点の座標は　$\dfrac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}}$





例 6.1　次の 2 点間の距離を求めよ．

(1) 原点 O，点 A(5)　　(2) A(4)，B(−3)

【解】 (1)　$\mathrm{OA} = |5| = 5$　　(2)　$\mathrm{AB} = |-3-4| = |-7| = 7$

6.1　次の 2 点間の距離を求めよ．

(1)　原点 O，A(−3)　　(2)　A(2)，B(7)　　(3)　A(6)，B(−4)l

例 6.2　2点A(1)，B(6)を結ぶ線分ABについて，次の点の座標を求めよ．

(1)　3 : 2に内分する点P　　　3 : 4に外分する点Q

(3)　中点M

【解】(1)　点Pの座標は　$\dfrac{2\times1+3\times6}{3+2}=\dfrac{20}{5}=4$

(2)　点Qの座標は　$\dfrac{-4\times1+3\times6}{3-4}=\dfrac{14}{-1}=-14$

(3)　中点Mの座標は　$\dfrac{1+6}{2}=\dfrac{7}{2}$

6.2　2点A(−2)，B(6)を結ぶ線分ABについて，次の点の座標を求めよ．

(1)　3 : 5に内分する点P

(2)　2 : 1に外分する点Q

(3)　3 : 7に外分する点R

(4)　中点M

6.1.2 平面上の点

2 点間の距離

2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ 間の距離 AB は

$$\mathbf{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

とくに，原点 O と点 A$(x_1,\ y_1)$ との距離 OA は

$$\mathbf{OA} = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}$$

例 6.3 2 点 A$(2, -3)$，B$(5, 1)$ の距離 AB は

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(5-2)^2 + \{1-(-3)\}^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

原点 O と点 A$(-4, -2)$ の距離 OA は

$$\mathrm{OA} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

6.3 次の 2 点間の距離を求めよ．

(1) A$(7,\ 5)$，B$(4,\ 1)$ (東洋倉庫)

(2) A$(-3,\ 2)$，B$(3, -6)$ (東洋倉庫)

(3) A$(-12,\ 0)$，B$(0,\ 16)$ (武田薬品工業)

(4) A$(8, -7)$，B$(-4, -2)$ (東洋倉庫)

6.4 平面上の 3 点の座標をそれぞれ A$(5,\ 2)$，B$(-1,\ 3)$，C$(0, -3)$ とするとき，△ABC の 3 辺の長さを求めよ． (東北電力)

6.5 次の各点を頂点とする △ABC はどんな形の三角形か.

(1) A(6, 5), B(5, 0), C(−2, 4) (デンソー)

(2) A(−1, 1), B(1, −1), C(5, 3) (トヨタ自動車)

例題 6.4 2点 A(3, 1), B(2, 6) から等距離にある y 軸上の点 P の座標を求めよ.

【解】 P は, y 軸上にあるから, P の座標を $(0,\ y)$ とする.
このとき, PA = PB すなわち $\mathrm{PA}^2 = \mathrm{PB}^2$ であるから

$$(3-0)^2 + (1-y)^2 = (2-0)^2 + (6-y)^2$$

整理すると $10y = 30$ よって $y = 3$
したがって, 点 P の座標は $(0,\ 3)$

6.6 2点 A(2, −1), B(6, 3) から等距離にある x 軸上の点 C の座標を求めよ.
(ダイハツ工業)

6.7 M(3, 4) と直線 $y = x + 2$ 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ を結ぶとき, 最短距離を求めよ. また, このときの点 P の座標を求めよ. (愛知機械工業)

内分点・外分点の座標

2点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を，$m:n$ に内分する点を P，外分する点を Q とすると

$$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{nx_1+mx_2}{m+n}},\ \boldsymbol{\frac{ny_1+my_2}{m+n}}\right),\ \mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\frac{-nx_1+mx_2}{m-n}},\ \boldsymbol{\frac{-ny_1+my_2}{m-n}}\right)$$

とくに，線分 AB の中点の座標は $\left(\boldsymbol{\frac{x_1+x_2}{2}},\ \boldsymbol{\frac{y_1+y_2}{2}}\right)$

例 6.5　2点 A(8, 7)，B(2, −8) を結ぶ線分 AB について

1 : 2 に内分する点 P の座標は

$$\left(\frac{2\cdot8+1\cdot2}{1+2},\ \frac{2\cdot7+1\cdot(-8)}{1+2}\right)\quad\text{より}\quad(6,2)$$

3 : 2 に外分する点 Q の座標は

$$\left(\frac{-2\cdot8+3\cdot2}{3-2},\ \frac{-2\cdot7+3\cdot(-8)}{3-2}\right)\quad\text{より}\quad(-10,-38)$$

6.8 次の問いに答えよ．

(1) 2点 A(3, 2)，B(8, 5) を結ぶ線分 AB を 3 : 2 に内分および外分する点の座標を求めよ．　(京阪電気鉄道)

(2) 2点 A(−4, 0)，B(0, 3) がある．線分 AC の中点が B であるとき，点 C の座標を求めよ．　(間組)

(3) 2点 A(−7, 0)，B(3, −5) を結ぶ線分 AB を 3 : 2 に内分する点 C，及び AB 間の距離を求めよ．　(日産自動車)

(4) 2点 A(−1, 3)，B(5, 0) について次を求めよ．　(日本電気)

(i) AB 間の距離

(ii) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点の座標

(iii) 線分 AB を 1 : 4 に外分する点の座標

6.1.3 直線の方程式

直線の方程式 (1)

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り傾きが m の直線の方程式は

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

例 6.6 点 $(2, -5)$ を通り傾きが 3 の直線の方程式は

$$y - (-5) = 3(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = 3x - 11$$

6.9 次の直線の方程式を求めよ．

(1) 点 $(1, 5)$ を通り，傾きが 3 の直線 (日産ディーゼル)

(2) 点 $(0, -1)$ を通り，傾きが 2 の直線 (日立造船)

(3) 傾きが $\dfrac{1}{2}$ で，点 $(0, 3)$ を通る直線 (愛知製鋼)

(4) 傾きが $-\dfrac{1}{2}$ で，点 $(1, 2)$ を通る直線 (近畿コンクリート工業)

(5) 傾きが $-\dfrac{1}{3}$ で，点 $(1, -5)$ を通る直線 (日本飛行機)

(6) 点 $(5, 2)$ を通り，x 軸の正の向きとなす角が 60° である直線 (富士通)

直線の方程式 (2)

異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

$x_1 \neq x_2$ のとき　$\boldsymbol{y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$

$x_1 = x_2$ のとき　$\boldsymbol{x = x_1}$

例 6.7 2 点 $(1,\ 4)$，$(2,\ 7)$ を通る直線の方程式を求めよ．　(新日本製鐵)

$$y - 4 = \frac{7-4}{2-1}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y = 3x + 1$$

6.10 次の直線の方程式を求めよ．

(1) 2 点 $(2,\ 3)$，$(5,\ 0)$ を通る直線　(日本飛行機)

(2) 2 点 $(-2,\ 5)$，$(4,\ 1)$ を通る直線　(NTT)

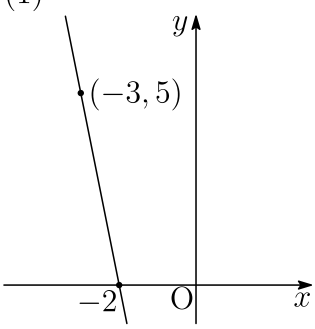
(3) 2 点 $(2,\ 3)$，$(5,\ 7)$ を通る直線　(日本特殊機器)

(4) 2 点 $(4,\ 5)$，$(1,\ 7)$ を通る直線　(富士通ヴィエルエスアイ)

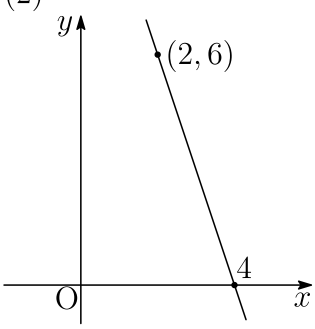
(5) 点 $(10,\ 2)$ および点 $(2, -2)$ を通る直線　(トプコン)

6.11 次の直線の方程式を求めよ．　(愛知製鋼)

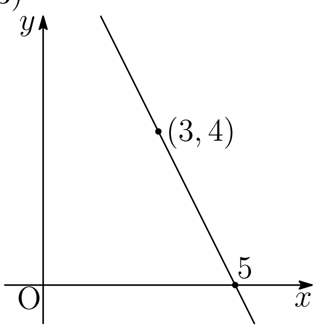
(1)



(2)



(3)



6.1.4　2 直線の関係

2 直線の平行，垂直

異なる 2 直線 $y = m_1x + k_1$，$y = m_2x + k_2$ について

$$\boldsymbol{m_1 = m_2} \iff \textbf{2 直線が平行}$$

$$\boldsymbol{m_1m_2 = -1} \iff \textbf{2 直線が垂直}$$

6.12 次の直線のうち平行となるものと，垂直になるものを 2 組ずつあげよ.

(西日本新聞)

(1) $2x = 3y - 5$　(2) $3x + 2y = 5$　(3) $3x - 5y = 8$

(4) $x - 3y = 5$　(5) $6y = 2x + 7$　(6) $y = \dfrac{2}{3}x$

6.13 次の直線の方程式を求めよ.

(1) 点 $(2, -3)$ を通り，直線 $y = 2x + 3$ に平行な直線　(シチズン時計)

(2) 2 点 $\mathrm{A}(-4,\ 2)$，$\mathrm{B}(4, -5)$ を通る直線に平行で $\mathrm{P}(3, 4)$ を通る直線　(カネカ)

(3) 点 $(3,\ 2)$ を通り，直線 $y = 4x - 1$ に垂直な直線　(きんでん)

(4) 点 $(2,\ 2)$ を通り，直線 $x + 4y + 8 = 0$ と直交する直線　(NEXCO)

(5) 直線 $2x + 3y - 3 = 0$ と垂直に交わり，点 $(4,\ 6)$ を通る直線　(トヨタ自動車)

(6) 点 $(2,\ 5)$ を通り，2 点 $(-3, -3)$，$(1,\ 5)$ を通る直線に垂直な直線

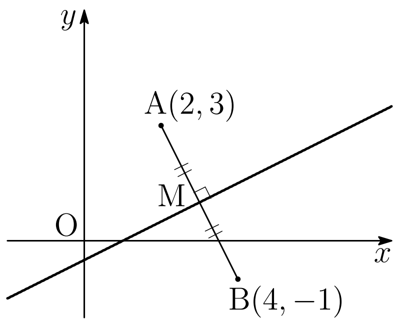
(ノリタケカンパニーリミテド)

6.14 2 直線 $mx - y - 7 = 0$，$(2m - 3)x - y + 5 = 0$ が平行となるような m の値を求めよ．また，垂直に交わるような m の値を求めよ.　(トヨタ自動車)

例題 6.8 2点 A$(2, 3)$，B$(4, -1)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ．

【解】 線分 AB の中点 M の座標は

$$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{3+(-1)}{2}\right) \quad \text{より} \quad (3,\ 1)$$



線分 AB の傾きは

$$\frac{-1-3}{4-2} = -2$$

線分 AB に垂直な直線の傾き m は

$$-2m = -1 \quad \text{ゆえに} \quad m = \frac{1}{2}$$

よって，求める直線の方程式は

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-3) \quad \text{すなわち} \quad x - 2y - 1 = 0$$

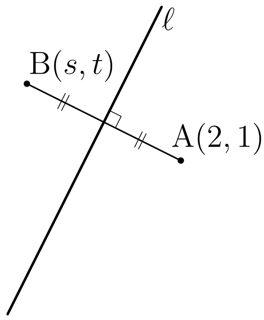
6.15 次の問いに答えよ．

(1) A，B の座標をそれぞれ $(0,\ 2)$，$(4, -1)$ とするとき，線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ．　(シチズン時計)

(2) 2点 A$(2,\ 0)$，B$(4,\ 3)$ の垂直二等分線の方程式を求めよ．　(NTT)

例題 6.9 直線 $2x-y+2=0$ を ℓ とする．直線 ℓ について点 A(2, 1) と対称な点 B の座標を求めよ．

【解】 点 B の座標を $(s,\ t)$ とする．



［1］直線 ℓ の傾きは 2，直線 AB の傾きは $\dfrac{t-1}{s-2}$ である．

AB$\perp\ell$ であるから

$$2\cdot\frac{t-1}{s-2}=-1$$

すなわち　$s+2t-4=0$　$\cdots$①

［2］線分 AB の中点 $\left(\dfrac{s+2}{2},\ \dfrac{t+1}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$$2\cdot\frac{s+2}{2}-\frac{t+1}{2}+2=0$$

すなわち　$2s-t+7=0$　$\cdots$②

①，② を連立させた方程式を解くと　$s=-2,\ t=3$

したがって，点 B の座標は　$(-2,\ 3)$

6.16 直線 $3x-y+1=0$ を ℓ とする．直線 ℓ について点 A$(-2,\ 5)$ と対称な点 B の座標を求めよ．

例題 6.10 直線 $(3k+2)x-(4k-1)y+5k-4=0$ は，実数 k の値にかかわらず，定点を通る．この定点の座標を求めよ．

[注意] k の値にかかわらず成り立つ式は，k についての恒等式である．

【解】 直線の方程式を k について整理すると

$$(3x-4y+5)k+(2x+y-4)=0 \quad \cdots ①$$

① が実数 k の値にかかわらず成り立つための条件は

$$3x-4y+5=0, \quad 2x+y-4=0$$

これを解いて　$x=1$，$y=2$
したがって，求める定点の座標は　$(1,\ 2)$

6.17 次の問いに答えよ．

(1) 直線 $kx-y+2(1-k)=0$ が k の値に関係なく定点を通る．この定点の座標を求めよ． (関西電力)

(2) 直線 $y=mx+(3m+1)$ は，m の値にかかわらず定点を通る．この定点の座標を求めよ． (トヨタ自動車)

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$\boldsymbol{d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

例 6.11 点 $(2,\ 1)$ と直線 $4x+3y-1=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|4\cdot 2+3\cdot 1-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|10|}{\sqrt{25}}=\frac{10}{5}=2$$

6.18 次の問いに答えよ．

(1) 原点から直線 $x-4y-5=0$ までの距離を求めよ． (NTT)

(2) 2 点 $(5,\ 3)$，$(2, -1)$ を通る直線の原点との距離を求めよ． (NTT)

6.2 円

6.2.1 円の方程式

円の方程式

1 点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

2 原点を中心とする半径 r の円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2=r^2}$$

6.19 次の方程式を求めよ.

(1) 中心が $(1, -2)$ で，半径 3 の円 (富士電機ホールディングス)

(2) 中心 $(1, -2)$，半径 4 の円 (日本電気)

(3) 中心 $(1,\ 2)$ で，半径 $\sqrt{5}$ の円 (トヨタ自動車)

(4) 点 $(3,\ 0)$ を中心とし，原点を通る円 (NHK)

(5) 中心 $(3, -4)$ で，点 $(7, -7)$ を通る円 (トヨタ自動車)

(6) 中心が $(3,\ 4)$ で，y 軸に接する円 (エルモ社)

> **例題 6.12**　2 点 A(3, 4)，B(5, −2) を直径の両端とする円の方程式を求めよ．

【解】 求める円の中心を C，半径を r とする．

C は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{3+5}{2},\ \frac{4+(-2)}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (4,\ 1)$$

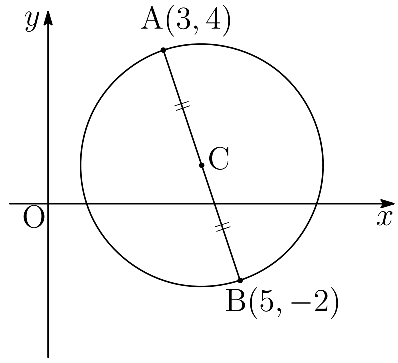
また

$$r = \mathrm{CA} = \sqrt{(3-4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$$

この円の方程式は

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{10})^2$$

すなわち　$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$



6.20 次の円の方程式を求めよ．

(1) 2 点 A(−3, 4)，B(5, 2) を結ぶ線分 AB を直径とする円　(東邦ガス)

(2) 2 点 (3, 1)，(−1, −5) を直径の両端とする円　(マツダ)

(3) 2 点 (2, 3)，(4, −5) を直径の両端とする円　(合同製鐵)

例 6.13 方程式 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ はどのような図形を表すか.

【解】 方程式を変形すると

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 20 + 1 + 4 \qquad \longleftarrow \text{平方完成と同じ}$$

すなわち　$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$

これは，中心が点 $(-1,\ 2)$，半径が 5 の円である.

6.21 次の方程式はどのような図形を表すか.

(1) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ (JFE ホールディングス)

(2) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$ (日産自動車)

(3) $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$ (三井化学)

(4) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 31 = 0$ (福岡道路エンジニア)

(5) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$ (デンソー)

(6) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ (東芝)

(7) $x^2 + y^2 + 4x = 0$ (東京急行電鉄)

(8) $x^2 + y^2 = x + y$ (三菱ガス化学)

6.22 円 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ と中心が同じで，点 $(4, -1)$ を通る円の方程式を求めよ. (豊田中央研究所)

例題 6.14 次の 3 点を通る円の方程式を求めよ．

A$(-1,\ 7)$，B$(2, -2)$，C$(6,\ 0)$

【解】 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする．

点 A を通るから　$(-1)^2+7^2-l+7m+n=0$

点 B を通るから　$2^2+(-2)^2+2l-2m+n=0$

点 C を通るから　$6^2+6l+n=0$

整理すると

$$-l+7m+n+50=0$$

$$2l-2m+n+8=0$$

$$6l+n+36=0$$

これを解くと　$l=-4,\ m=-6,\ n=-12$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-4x-6y-12=0$

6.23 次の 3 点を通る円の方程式を求めよ．

(1) $(0,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(-1,\ 2)$ (安川電機)

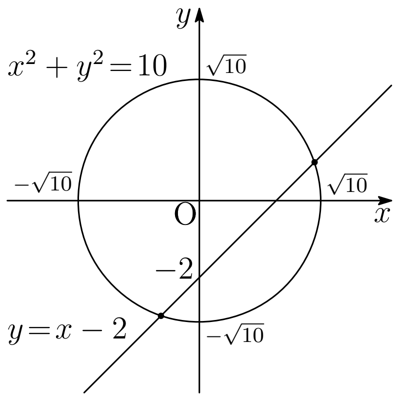
(2) $(3, -5)$, $(3,\ 1)$, $(4,\ 0)$ (三井化学)

6.2.2　円と直線

例題 6.15 円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=x-2$ の共有点の座標を求めよ.

【解】 次の連立方程式を解く.

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots① \\ y=x-2 & \cdots② \end{cases}$$



② を ① に代入して

$$x^2+(x-2)^2=10$$

整理すると　　$x^2-2x-3=0$

これを解くと　　$x=-1,\ 3$

② に代入して

$x=-1$ のとき　$y=-3$,　$x=3$ のとき　$y=1$

よって，共有点の座標は　　$(-1,-3)$，$(3,\ 1)$

6.24 次の問いに答えよ.

(1) 円 $x^2+y^2=25$ と直線 $2x+y=10$ の交点の座標を求めよ.　　(京阪電気鉄道)

(2) 次の 2 つの図形の交点を結ぶ線分の長さを求めよ.　　(沖電気工業)

$$x^2+y^2=25,\ 2x-y=5$$

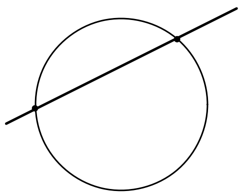
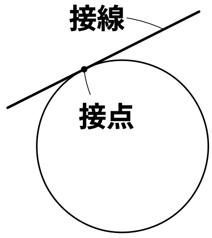
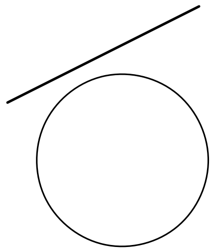
(3) 直線 $x+2y=1$ が，原点を中心とする半径 1 の円によって切りとられる線分の長さを求めよ.　　(石川島播磨重工業)

(4) 直線 $x+2y=2$ が円 $x^2+y^2=1$ によって切りとられる弦の中点の座標を求めよ.　　(トヨタ自動車)

(5) 円 $(x-1)^2+(y-2)^2=8$ と直線 $x+y=3$ が交わってできる弦の中点の座標を求めよ.　　(日立製作所)

円と直線の位置関係 (1)

円の方程式と直線の方程式から y を消去して，x の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が得られるとき，その判別式を $D=b^2-4ac$ とする．このとき，円と直線の位置関係は，次のようになる．

D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	異なる 2つの実数解	重解 (ただ1つ)	なし
円と直線の 位置関係	異なる 2点で交わる 	接する 	共有点を もたない 
共有点の個数	2個	1個	0個

例題 6.16 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=mx+5$ が接するとき，定数 m の値を求めよ．

【解】 $x^2+y^2=5$ と $y=mx+5$ から y を消去して整理すると

$$(m^2+1)x^2+10mx+20=0$$

判別式は　$D/4=(5m)^2-(m^2+1)\cdot 20=5(m^2-4)$

この円と直線が接するのは，$D=0$ のときである．

よって，$m^2-4=0$ を解いて　$m=\pm 2$

6.25 次の問いに答えよ．

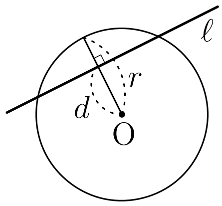
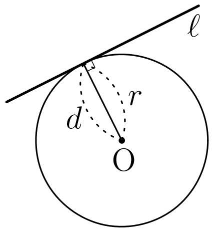
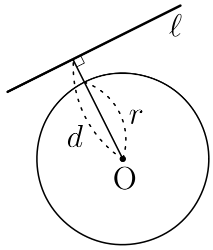
(1) 円 $x^2+y^2=4$ に接し，x 軸の正の向きと 60° の角をつくる直線の方程式を求めよ．(NEC フィールディング)

(2) 原点から円 $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ に引いた接線のうち，傾きが正である方程式を求めよ．(トヨタ自動車)

(3) 原点から円 $x^2+y^2-10x-2y+18=0$ に引いた接線の方程式を求めよ．(トヨタ自動車)

円と直線の位置関係 (2)

点 O を中心とする半径 r の円と直線 ℓ の位置関係は，円の中心 O と直線 ℓ の距離を d とするとき，次のようになる．

d と r の大小	$d < r$	$d = r$	$d > r$
円と直線の位置関係	異なる 2 点で交わる 	接する 	共有点をもたない 

例題 6.17 円 $x^2+y^2=9$ と直線 $4x+3y+k=0$ が接するとき，k の値を求めよ．

【解】 円の中心は原点であり，半径 r は 3

原点と直線 $4x+3y+k=0$ の距離 d は

$$d = \frac{|4{\cdot}0+3{\cdot}0+k|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|k|}{5}$$

円と直線が接するのは $d=r$ のときである．

よって，$\dfrac{|k|}{5}=3$ を解いて　$k=\pm 15$

6.26 次の問いに答えよ．

(1) 直線 $3x+4y=a$ と円 $x^2+y^2=1$ が接するような a の値を求めよ．

(帝国石油)

(2) 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x-2y=c$ が 2 点で交わるような c の値の範囲を求めよ．

(トヨタ自動車)

円上の点における接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{ax+by=r^2}$$

例題 6.18 点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ．

【解】 接点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，P は円上にあるから

$$a^2+b^2=1 \cdots ①$$

また，P における円の接線の方程式は

$$ax+by=1$$

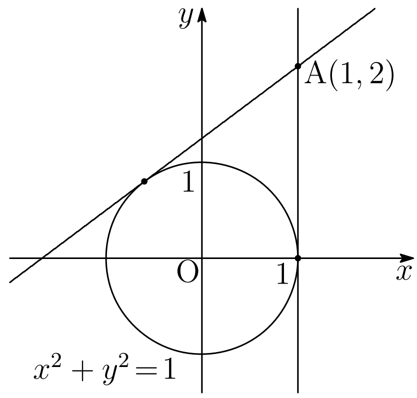
で，この直線が点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通るから

$$a+2b=1 \cdots ②$$

①，② から a を消去して整理すると

$$5b^2-4b=0$$

これを解くと　$b=0,\ \dfrac{4}{5}$



② に代入して

$$b=0 \text{ のとき} \quad a=1, \qquad b=\frac{4}{5} \text{ のとき} \quad a=-\frac{3}{5}$$

よって，接点の座標と接線の方程式は，次のようになる．

点 $(1,\ 0)$ における接線は $1\cdot x+0\cdot y=1$ すなわち $x=1$

点 $\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ における接線は $-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y=1$ すなわち $-3x+4y=5$

6.27 次の問いに答えよ．

(1) 点 $(3,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=5$ に接する直線の方程式を求めよ．

(新日本製鐵)

(2) 点 $(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ．

(ブラザー工業)

6.3 軌跡と領域

6.3.1 軌跡と方程式

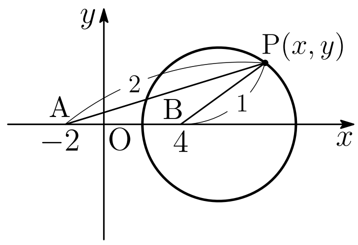
軌跡の求め方

1 条件を満たす点Pの座標を $(x,\ y)$ として，Pに関する条件を x，y の方程式で表し，この式が表す図形を調べる．

2 **1** で求めた図形上のすべての点Pが，与えられた条件を満たすことを確かめる．

例題 6.19 2点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 0)$ からの距離の比が $2:1$ である点Pの軌跡を求めよ．

【解】 点Pの座標を $(x,\ y)$ とする．



Pに関する条件は

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:1$$

これより　$2\mathrm{BP}=\mathrm{AP}$

すなわち　$4\mathrm{BP}^2=\mathrm{AP}^2$

$$\mathrm{AP}^2=(x+2)^2+y^2,\quad \mathrm{BP}^2=(x-4)^2+y^2$$

を代入すると　$4\{(x-4)^2+y^2\}=(x+2)^2+y^2$

整理すると　$x^2-12x+y^2+20=0$

すなわち　$(x-6)^2+y^2=4^2$

よって，点Pは円 $(x-6)^2+y^2=4^2$ 上にある．
逆に，この円上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす．
したがって，求める軌跡は，点 $(6,\ 0)$ を中心とする半径4の円である．

6.28 原点Oからの距離と点 $\mathrm{A}(5,\ 0)$ からの距離の比が $3:2$ である点Pの軌跡を求めよ．

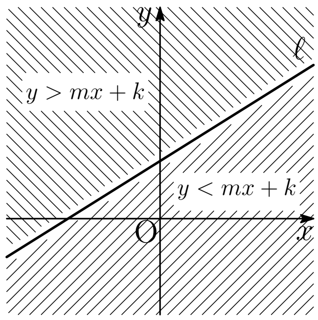
6.3.2 不等式の表す領域

直線と領域

直線 $y = mx + k$ を ℓ とする.

1 $y > mx + k$ の表す領域は，直線 ℓ の上側

2 $y < mx + k$ の表す領域は，直線 ℓ の下側

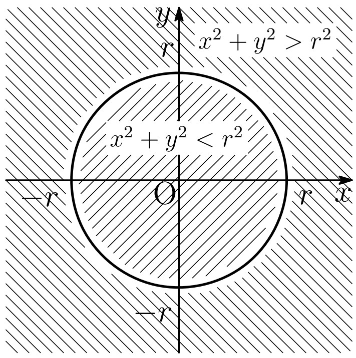


[注意] $y \geqq mx + k$ や $y \leqq mx + k$ の表す領域は，直線 ℓ を含む.

円と領域

1 $x^2 + y^2 < r^2$ の表す領域は，
円 $x^2 + y^2 = r^2$ の**内部**.

2 $x^2 + y^2 > r^2$ の表す領域は，
円 $x^2 + y^2 = r^2$ の**外部**



[注意] $x^2 + y^2 \leqq r^2$ や $x^2 + y^2 \geqq r^2$ の表す領域は，円 $x^2 + y^2 = r^2$ を含む.

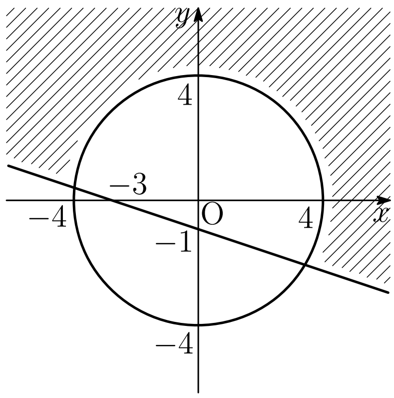
例題 6.20 次の連立不等式表す領域を図示せよ.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 16 \\ x + 3y + 3 > 0 \end{cases}$$

【解】 この領域は

円 $x^2 + y^2 = 16$ の外部と
直線 $y = -\dfrac{1}{3}x - 1$ の上側

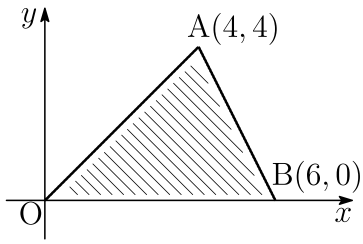
の共通する部分である．すなわち，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない.



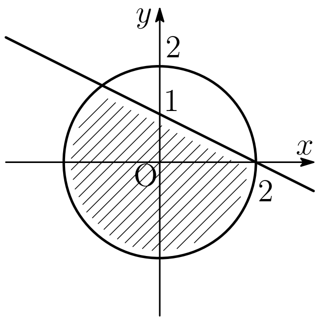
6.29 次の問いに答えよ.

(1) 次の斜線部を不等式で表せ．ただし，境界線は含まないものとする.

(東洋紡績)

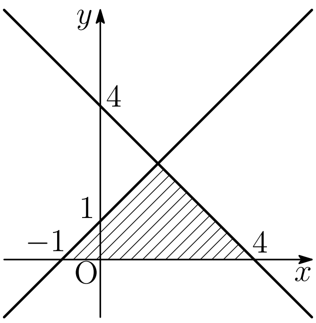


(2) 右の斜線部分を不等式を用いて表せ．ただし，境界線は含まない.　(マツダ)

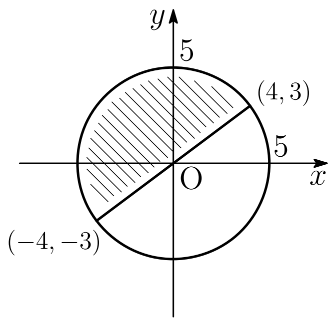


(3) 次の斜線をつけた部分を不等式で表せ.　(コスモ石油)

(i)　境界線を含む



(ii)　境界線を含まない

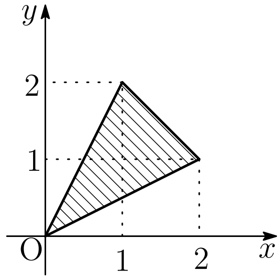


(4) 右図の斜線で示された領域について，次の問いに答えよ．ただし，境界を含む.

(トヨタ車体)

(i) 連立不等式で表せ.

(ii) 面積を求めよ.



6.30 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

(1) $\begin{cases} x < 4 \\ 2y - x < 2 \\ 4x + 3y > 12 \end{cases}$ (新日本石油)

(2) $\begin{cases} y \leqq x \\ x - 2y \leqq 2 \\ x + 2y \leqq 4 \end{cases}$ (JFE ホールディングス)

(3) $1 < x^2 + y^2 < 4$ (葵精機)

(4) $\begin{cases} y \geqq x^2 \\ y \leqq x + 2 \end{cases}$ (九州電力)

(5) $\begin{cases} y \geqq x^2 - 2x - 3 \\ y \leqq x - 3 \end{cases}$ (いすゞ自動車)

(6) $\begin{cases} y \geqq x^2 - 2x \\ y \leqq -x^2 + 4x \end{cases}$ (いすゞ自動車)

例題 6.21　次の不等式の表す領域を図示せよ．

$$(x+y)(3x-y-1)>0$$

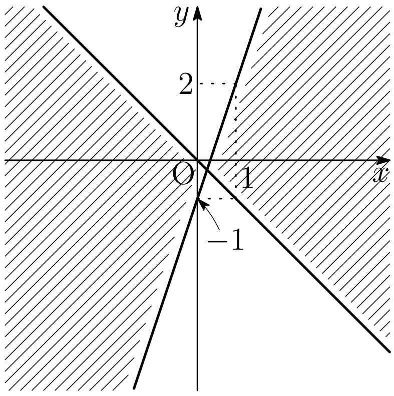
【解】 不等式 $(x+y)(3x-y-1)>0$ は

$$\begin{cases} x+y>0 \\ 3x-y-1>0 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} x+y<0 \\ 3x-y-1<0 \end{cases}$$

が成り立つことと同じである．
よって，求める領域は右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．



6.31 次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1) $(y-x^2)(y-x-2)<0$　　(ダイハツ工業)

(2) $(x^2+y^2-4)(x+y)<0$　　(トプコン)

(3) $(x^2+y^2-4)(x^2-y)>0$　　(安川電機)

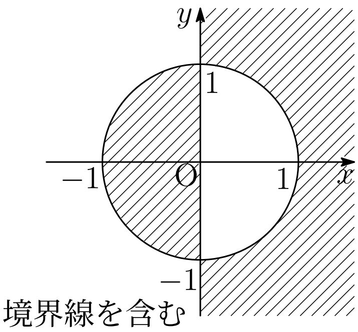
6.32 次の図の斜線部分に含まれる点 (x, y) は，次のうちどの条件を満足するものといえるか．次のア〜エから 1 つ選び，記号で答えよ．　　(トヨタ自動車)

ア．$x \geqq 0$ かつ $x^2+y^2 \leqq 1$

イ．$x \geqq 0$ または $x^2+y^2 \leqq 1$

ウ．$(x \geqq 0$ または $x^2+y^2 \geqq 1)$ かつ
　$(x \leqq 0$ または $x^2+y^2 \leqq 1)$

エ．$x(x^2+y^2-1) \geqq 0$



例題 6.22　x, y が 4 つの不等式

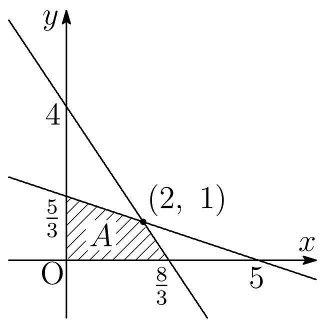
$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad x + 3y \leqq 5,\quad 3x + 2y \leqq 8$$

を同時に満たすとき，$x + y$ の最大値，最小値を求めよ．

【解】 与えられた連立不等式の表す領域を A とする．
領域 A は 4 点

$$(0, 0),\ \left(\frac{8}{3},\ 0\right),\ (2,\ 1),\ \left(0,\ \frac{5}{3}\right)$$

を頂点とする四角形の周および内部である．



$$x + y = k \quad \cdots ①$$

とおいて，直線 ① が領域 A の点を通るときの k の値を調べる．

$(0, 0)$ を通るとき　$k = 0$,　$\left(\frac{8}{3},\ 0\right)$ を通るとき　$k = \frac{8}{3}$

$(2, 1)$ を通るとき　$k = 3$,　$\left(0,\ \frac{5}{3}\right)$ を通るとき　$k = \frac{5}{3}$

これ以外で領域 A の点を通るとき　$0 < k < 3$

したがって，$x + y$ は

$x = 2$, $y = 1$ のとき最大値 3 をとり，
$x = 0$, $y = 0$ のとき最小値 0 をとる．

6.33　x, y が 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad 3x + y \leqq 9,\quad x + 2y \leqq 8$$

を同時に満たすとき，$x + y$ の最大値，最小値を求めよ．

実践問題 11

大同特殊鋼

1 次のような直線の式を求めなさい.

(1) y 切片が -2 で傾きが 3 の直線

(2) 2 点 $(-1,2)$, $(2,-7)$ を通る直線

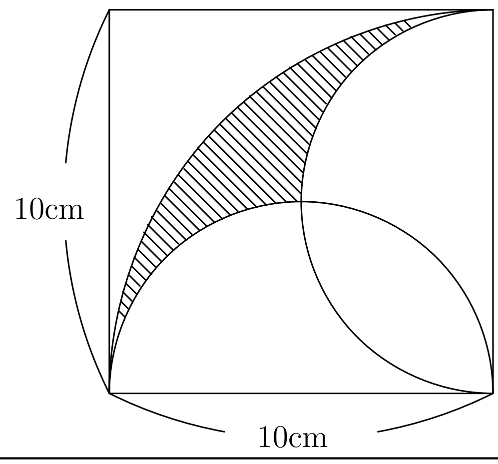
(3) 直線 $y=-\dfrac{2}{3}x+4$ に平行で点 $(1,2)$ を通る直線

2 次の問いに答えなさい.

(1) 2 つのサイコロを同時に投げるとき，目の和が 6 になる確率を求めよ.

(2) a,b,c,d,e の 5 人の中から 3 人の代表を選ぶとき，その中に a が入っている確率を求めよ.

3 次の斜線部の面積を求めよ.



【答】

1 (1) $y=3x-2$　(2) $y=-3x-1$　(3) $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$

2 (1) $\dfrac{5}{36}$　(2) $\dfrac{3}{5}$

3 $\dfrac{25}{2}\pi-25[\mathrm{cm}^2]$

第 7 章　三角関数

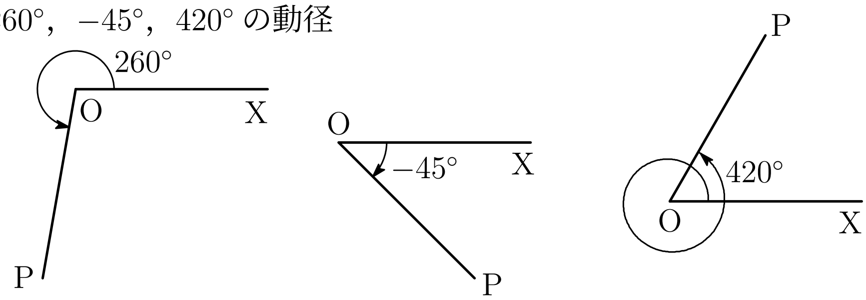
7.1　三角関数

7.1.1　角の拡張

θ の動径

一般角 θ に対して，始線 OX から角 θ だけ回転した位置にある動径 OP を，**θ 動径**という．

例 7.1 260°，−45°，420° の動径



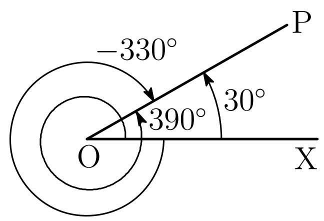
7.1 次の角の動径を図示せよ．

(1) 225°　　(2) −270°　　(3) 660°

例 7.2 330°，390°，690°，−30°，−330°，−690° のうち，その動径が 30° の動径と同じ位置にある角はどれか．

【解】

$$390^\circ = 30^\circ + 360^\circ,$$
$$-330^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times (-1)$$
$$-690^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times (-2)$$



したがって，求める角は　390°，−330°，−690°

7.2 480°，840°，−240°，−480°，−840° のうち，その動径が 120° と同じ位置にある角はどれか，

弧度法

$$1\ \textbf{ラジアンは}\ \left(\frac{\mathbf{180}}{\boldsymbol{\pi}}\right)^{\circ},\qquad \mathbf{180^{\circ}}\ \textbf{は}\ \boldsymbol{\pi}\ \textbf{ラジアン}$$

例 7.3　135° を弧度法で表せ.

【解】　$\dfrac{\pi}{180}\times 135=\dfrac{3}{4}\pi$

7.3 次の角を，弧度は度数に，度数は弧度に書き直せ.

(1)　15°　　(2)　-60°　　(3)　$\dfrac{8}{5}\pi$　　(4)　$\dfrac{5}{12}\pi$

弧度法を用いると，扇形について，次のことが成り立つ.

扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ(ラジアン) の扇形の弧の長さ l，面積 S は

$$\boldsymbol{l=r\theta},\qquad \boldsymbol{S=\frac{1}{2}r^{2}\theta}\quad \text{または}\quad \boldsymbol{S=\frac{1}{2}lr}$$

例 7.4 半径 8，中心角 $\dfrac{\pi}{4}$ の扇形の弧の長さと面積を求めよ.

【解】弧の長さは　$8\times\dfrac{\pi}{4}=2\pi$　　面積は　$\dfrac{1}{2}\times 8^{2}\times\dfrac{\pi}{4}=8\pi$

7.4 次のような扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ.

(1)　半径 8，中心角 $\dfrac{\pi}{8}$　　(2)　半径 10，中心角 $\dfrac{2}{5}\pi$

7.1.2　三角関数とそのグラフ

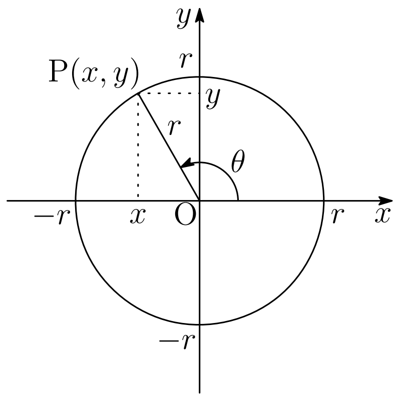
三角関数の定義

右の図のように，角 θ の動径と原点を中心とする半径 r の円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とするとき

$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{y}{r}} \quad \textbf{(正弦)}$$

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{x}{r}} \quad \textbf{(余弦)}$$

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{y}{x}} \quad \textbf{(正弦)}$$



例 7.5　$-\dfrac{\pi}{3}$ の正弦，余弦，正接の値を求めよ．

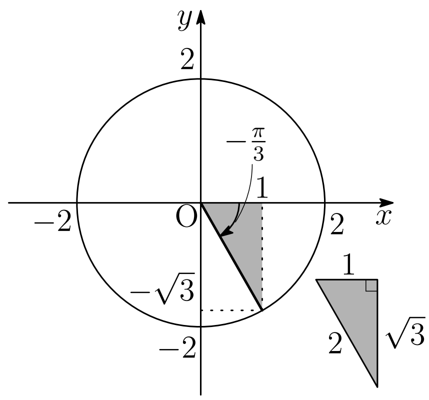
【解】 $r = 2$ のとき，

$x = 1$，$y = -\sqrt{3}$ であるから

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$



7.5 次の三角関数の値を求めよ．

(1)　$\tan 210^\circ$　(安川電機)

(2)　$\sin(-120^\circ)$　(安川電機)

(3)　$\cos 960^\circ$　(NTT)

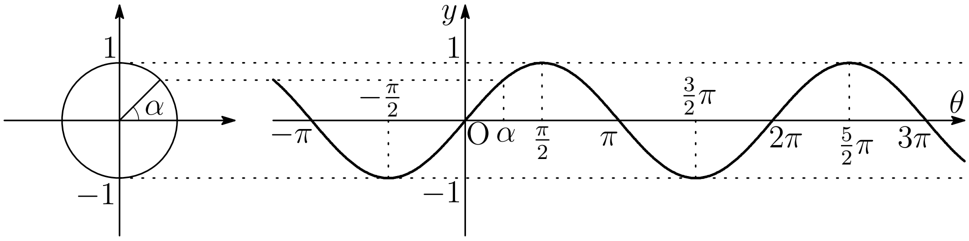
(4)　$\cos(-270^\circ)$　(豊田工機)

(5)　$\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{5}{6}\pi$　(大和ハウス工業)

(6)　$-\sin 45^\circ \cos(-300^\circ) + \sin 510^\circ \cos 405^\circ$　(九州電力)

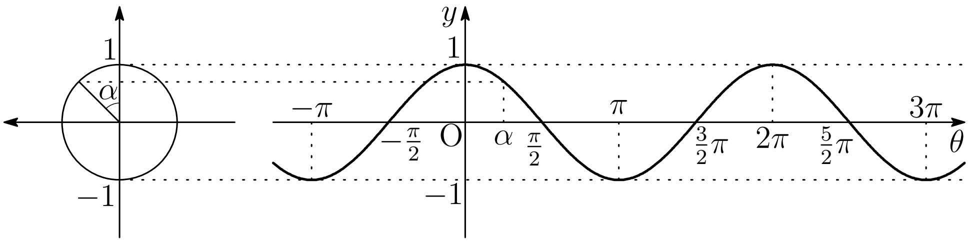
$y = \sin\theta$ のグラフ

2π を周期とする関数で，原点について対称．関数の値域は　$-1 \leqq y \leqq 1$



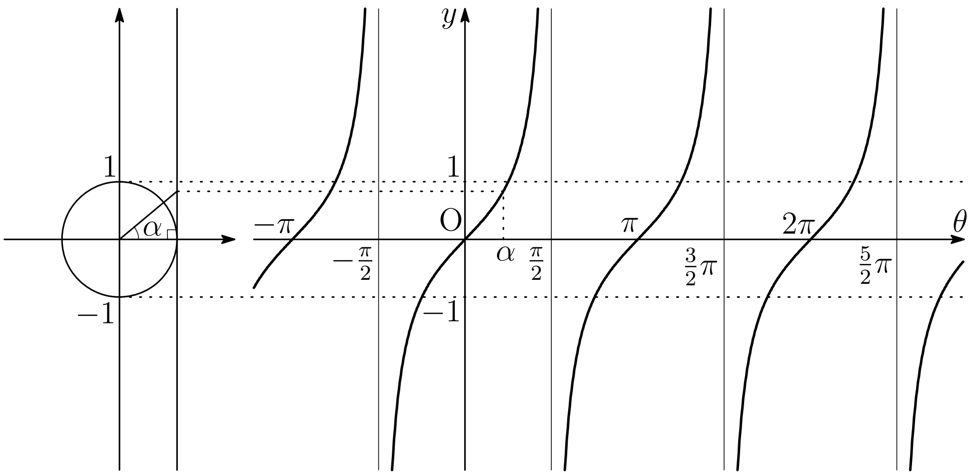
$y = \cos\theta$ のグラフ

2π を周期とする関数で，y 軸について対称．関数の値域は　$-1 \leqq y \leqq 1$

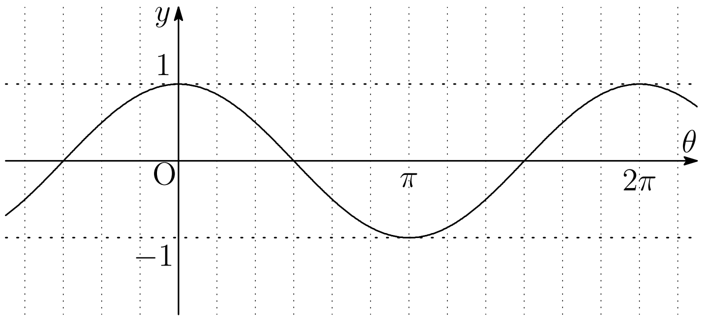


$y = \tan\theta$ のグラフ

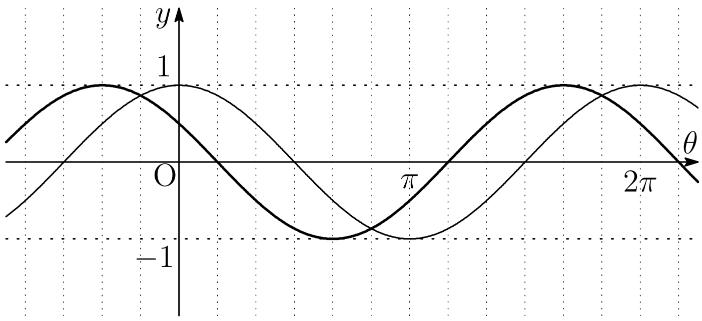
π を周期とする関数で，原点について対称．関数の値域は　実数全体．
また，直線 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$，$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ などを漸近線としてもつ．



例 7.6 $y = \cos\theta$ のグラフをもとに $y = \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ.



【解】 $y = \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは $y = \cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので，次のようになる.



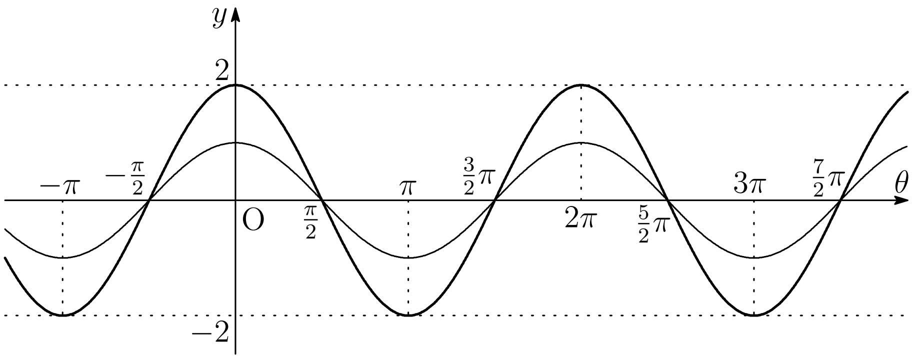
7.6 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフをかけ.　(葵精機)

(2) 関数 $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフをかけ.　(オークマ)

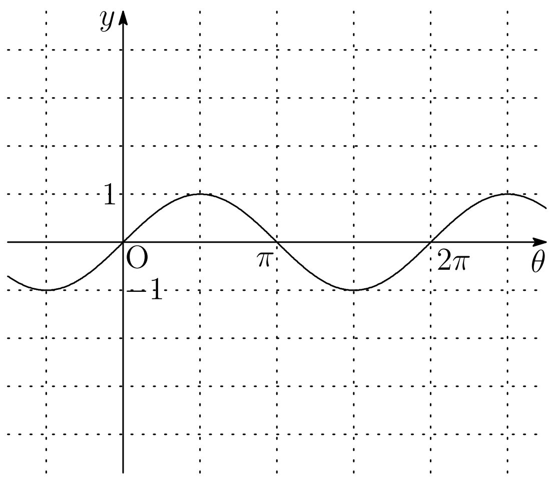
例 7.7　$y = 2\cos\theta$ のグラフをかけ．

【解】 $y = \cos\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向へ 2 倍に拡大したものである．周期は 2π である．

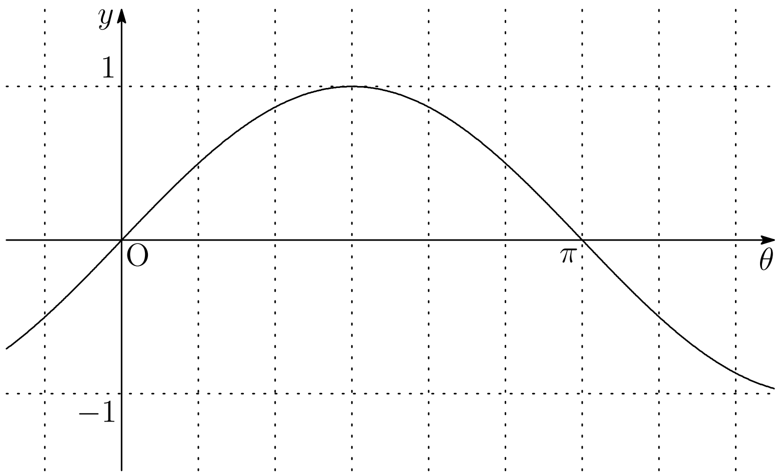


7.7　$y = \sin\theta$ のグラフをもとに次のグラフかけ．また，その周期を求めよ．

(1)　$y = 3\sin\theta$



(2)　$y = \sin 3\theta$



7.1.3 三角関数の性質

三角比と同様に，三角関数についても次の相互関係が成り立つ．

三角関数の相互関係

1 $\boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

2 $\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

3 $\boldsymbol{1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

例題 7.8 θ の動径が第 4 象限にあり，$\sin\theta = -\dfrac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．

【解】
$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

θ の動径が第 4 象限にあるとき，$\cos\theta > 0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

また $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\dfrac{4}{5}\right) \div \dfrac{3}{5} = -\dfrac{4}{3}$

7.8 次の問いに答えよ．

(1) θ が第 4 象限の角で $\cos\theta = \dfrac{12}{13}$ のとき $\sin\theta$ の値を求めよ． (NTT)

(2) θ が第 3 象限の角で $\cos\theta = -\dfrac{3}{4}$ のとき $\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．(九州電力)

(3) θ が第 2 象限の角であって $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ であるとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．
(那須電機鉄工)

(4) θ が第 3 象限の角で $\sin\theta = -\dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．
(富士重工業)

7.1.4　三角関数についての方程式・不等式

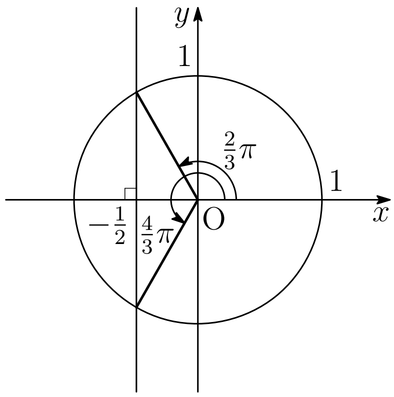
例題 7.9　次の方程式を解け.

(1) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$　　　(2) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

【解】 (1) 求める角 θ の動径と単位円の交点の x 座標は $-\dfrac{1}{2}$ である.

よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$



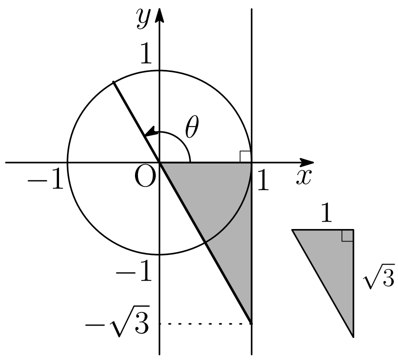
(2) 求める角 θ の動径の延長と直線 $x = 1$ の交点の y 座標は $-\sqrt{3}$ である.

よって，$0 \leqq \theta < \pi$ の範囲では

$$\theta = \frac{2}{3}\pi$$

したがって，方程式の解は

$$\theta = \frac{2}{3}\pi + n\pi \quad (n \text{ は整数})$$



[注意] 方程式 $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ の解は

$$\theta = \frac{2}{3}\pi + 2n\pi,\ \theta = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

7.9 次の方程式を解け.

(1) $\sin x = \dfrac{1}{2}$　$(0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ)$　　(シチズン時計)

(2) $\sqrt{3} - 3\tan x = 0$　$(0 \leqq x \leqq 2\pi)$　　(日本電気)

(3) $\tan(x - 10^\circ) = \sqrt{3}$　$(0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ)$　　(シチズン時計)

(4) $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$　$(0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ)$　　(トヨタ車体)

例題 7.10 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け.

$$2\sin^2\theta + 5\cos\theta + 1 = 0$$

【解】 方程式を変形すると　$2(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta + 1 = 0$

整理して　$2\cos^2\theta - 5\cos\theta - 3 = 0$

因数分解すると　$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 3) = 0$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから　$2\cos\theta + 1 = 0$　$\longleftarrow \cos\theta - 3 < 0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ を解くと　$\longleftarrow$ 例題 7.9 参照

$$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

7.10 次の方程式を解け.

(1) $2\sin^2 x - \sin x = 0 \quad (0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ)$　(日本スピンドル製造)

(2) $2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$　(日本自動車機械工具協会)

(3) $\cos\theta + \sin^2\theta = -1 \quad (0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$　(九州電力)

(4) $\cos^2\theta + 2\sin\theta + 2 = 0 \quad (0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$　(日本設備工業)

(5) $2\cos^2 x + \sin x = 1 \quad (0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ)$　(九州電力)

(6) $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0 \quad (0^\circ \leqq x < 360^\circ)$　(東京ガス)

(7) $2\sin^2\theta + 5\cos\theta - 4 = 0 \quad (0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$　(九州電力)

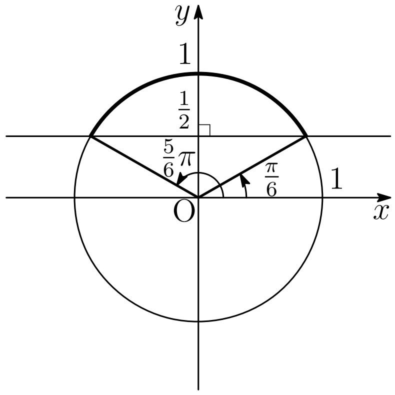
例題 7.11　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin\theta > \dfrac{1}{2}$ を解け．

【解】 $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ となる θ は

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

よって，不等式の解は，右の図から，

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$



7.11　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，不等式 $\cos x > -\dfrac{1}{2}$ を解け．　(日本電気)

7.12　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，次の方程式と不等式を解け．　(NEC フィールディング)

(1) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$　　(2) $2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0$

7.13　関数 $y = 4\cos^2\theta + 2\sin\theta - 3$ の最大値・最小値を求めよ．　(九州電力)

7.2 加法定理

7.2.1 三角関数の加法定理

正弦・余弦の加法定理

1 $\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

2 $\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$

3 $\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

4 $\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$

例 7.12 加法定理を用いて，$\cos 15^\circ$ の値を求めよ．

【解】
$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ-30^\circ)\\ &= \cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

7.14 次の値を求めよ．

(1) $\sin 75^\circ$ (栗本鐵工所)

(2) $\cos 75^\circ$ (トクヤマ)

(3) $\sin 15^\circ$ (三菱電機)

(4) $\sin 165^\circ$ (キヤノン)

(5) $\sin 15^\circ+\cos 45^\circ$ (日本特殊機器)

(6) $\cos 75^\circ\sin 15^\circ$ (日本電気)

正接の加法定理

5　$$\boldsymbol{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$$

6　$$\boldsymbol{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$

例 7.13 加法定理を用いて，$\tan 15^\circ$ の値を求めよ．

【解】 $$\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

7.15 $\tan 75^\circ$ の値を求めよ．　(飯沼コンサルタント)

例題 7.14 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ で，$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ．

【解】 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ であるから，$\sin\alpha>0$，$\cos\beta<0$

ゆえに　$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

したがって　$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$$

7.16 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos(\alpha-\beta)$ を求めよ．ただし，$0^\circ<\alpha<90^\circ$，$90^\circ<\beta<180^\circ$ とする．　(安川電機)

7.17 次の問いに答えよ． (ヤンマー)

(1) $\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$ を証明せよ．

(2) (1) を利用して $\sin 75^\circ \times \cos 15^\circ$ を計算せよ．

7.18 次の等式を証明せよ．

(1) $\sin(45^\circ+\alpha)+\sin(45^\circ-\alpha)=\sqrt{2}\cos\alpha$ (マツダ)

(2) $\sin^2 A-\sin^2 B=\sin(A+B)\sin(A-B)$ (トヨタ自動車)

7.19 △ABC がある．∠B $=45^\circ$，∠C $=60^\circ$，BC $=10\sqrt{2}$ であるとき，AB の長さを求めよ． (電源開発)

7.20 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の解を $\tan\alpha$，$\tan\beta$ とするとき，$\tan(\alpha+\beta)$ の値を p，q を用いて表せ． (佐世保重工業)

7.2.2 加法定理の応用

正弦・余弦の2倍角の公式

1 $\boldsymbol{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

2 $\boldsymbol{\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}}$ $\longleftarrow$ $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ を代入している.

例題 7.15 等式 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 1+2\sin 2\alpha$ が成り立つことを証明せよ.

[証明] 左辺 $= \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha$

$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$

2倍角の公式により

$$1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + \sin 2\alpha$$

よって $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$

[証終]

7.21 等式 $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \tan\alpha$ が成り立つことを証明せよ. (マツダ)

7.22 次の問いに答えよ.

(1) $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき $\sin 2\theta$ の値を求めよ. ただし, θ は鋭角とする. (NEXCO)

(2) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき $\sin 2\theta$ の値を求めよ. (日産自動車)

正弦・余弦の半角の公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

例 7.16　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ で，$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ．

【解】

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$ であるから

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

7.23　$\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$ で，$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ．

正接の 2 倍角，半角の公式

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\qquad \tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

例 7.17　$\tan\alpha=3$ のとき，$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\cdot 3}{1-3^2}=-\dfrac{3}{4}$

7.24　次の値を求めよ．

(1)　$\tan\alpha=2$ のとき，$\tan 2\alpha$ の値

(2)　$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$ のとき，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$ の値

例題 7.18 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\cos 2\theta + 2\sin\theta = 1$ を解け．

【解】 左辺を変形すると　$(1 - 2\sin^2\theta) + 2\sin\theta = 1$

整理すると　$\sin\theta(\sin\theta - 1) = 0$

よって　$\sin\theta = 0$　または　$\sin\theta - 1 = 0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$\sin\theta = 0$ から　$\theta = 0,\ \pi$

$\sin\theta = 1$ から　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

したがって　$\theta = 0,\ \pi,\ \dfrac{\pi}{2}$

7.25 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $3\sin x - \cos 2x = 1$ を解け．　(日本無線)

7.26 関数 $y = 2\sin x + \cos 2x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ の最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ．　(本州四国連絡高速道路)

$a\sin\theta + b\cos\theta$ の変形

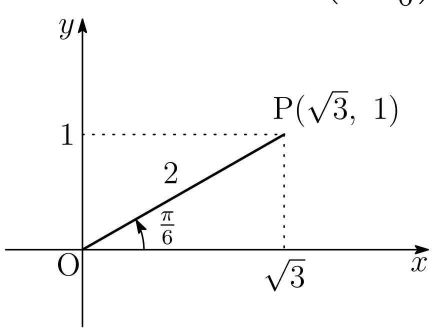
$$\boldsymbol{a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)}$$

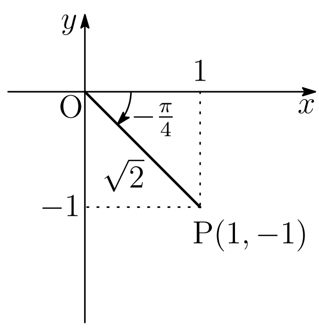
ただし　$\boldsymbol{\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

例 7.19 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ．ただし，$-\pi < \alpha < \pi$ とする．

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$　　　(2)　$\sin\theta - \cos\theta$

【解】 (1)　$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2)　$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$





例題 7.20 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$$

【解】 左辺を変形すると $\quad 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$

よって $\quad \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots ①$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{3} \leqq x+\frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi \quad \text{または} \quad x+\frac{\pi}{3}=\frac{9}{4}\pi$$

したがって $\quad x=\dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi$

7.27 次の方程式を解け．

(1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3} \quad (0^\circ \leqq x < 360^\circ)$ (東芝)

(2) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2 \quad (0^\circ < \theta < 180^\circ)$ (九州電力)

(3) $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = 1 \quad (0^\circ \leqq \theta < 2\pi)$ (小松製作所)

7.28 関数 $y=\cos 2x - \sin 2x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ の最大値・最小値を求めよ．
(日本無線)

実践問題12

東芝

次の問いに答えよ．

1 $\dfrac{x+2}{x-1} \div \dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3} \times \dfrac{x-1}{x+1}$ の式を簡単にせよ．

2 2次関数 $y = x^2 - 4x + 1$ のグラフの頂点の座標を求めよ．

3 $(a+b)(x^2-y^2)+(y-x)(a^2-b^2)$ を因数分解せよ．

4 次の方程式，不等式を解きなさい．

(1) $\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ x^2+y^2-25=0 \end{cases}$

(2) $\dfrac{x-5}{x^2-1}+\dfrac{2}{x-1}=-3$

(3) $x^3-2x^2-5x+6<0$

5 $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ を簡単にしなさい．

6 式 $(3+2i)a-(1-i)b=1+4i$ を満たす実数 $a,\ b$ の値を求めよ．

【答】

1 1

2 $(2,-3)$

3 $(a+b)(x-y)(x+y-a+b)$

4 (1) $(x,y)=(4,-3),\ (0,5)$　(2) $x=-2$　(3) $x<-2,\ 1<x<3$

5 $2\sqrt{3}$

6 $a=1,\ b=2$

第 8 章　指数関数と対数関数

8.1　指数関数

8.1.1　指数の拡張

a^0，a^{-n} の定義

$a \neq 0$ で，n を正の整数とするとき

$$\boldsymbol{a^0 = 1}, \qquad \boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \qquad \text{とくに} \quad \boldsymbol{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

例 8.1　$3^0 = 1$,　$5^{-1} = \dfrac{1}{5}$,　$10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100}$

8.1 次の値を求めよ．　((1) 三菱重工，(2) 日本ガイシ)

(1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$　(2) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$

指数法則 (指数が整数)

$a \neq 0$，$b \neq 0$，m，n を整数とする．

1 $\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$　**2** $\boldsymbol{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

3 $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$　**4** $\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$

例 8.2　$3^6 \times 3^{-4} = 3^{6+(-4)} = 3^2 = 9$,　$(2^{-1})^{-3} = 2^{(-1)\times(-3)} = 2^3 = 8$

8.2 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{(3^{-2})^3}{3^{-4}} \times 3^3$　(豊田中央研究所)

(2) $(x^{-1}y)^{-5} \div x^2y^{-3}$　(JFE ホールディングス)

累乗根の性質

$a>0$, $b>0$ で，m, n を整数とする．

1 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　**2** $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

3 $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　　**4** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

例 8.3　$\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5\times 25}=\sqrt[3]{5^3}=5$,　$(\sqrt[12]{5})^3=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^3}}=\sqrt[4]{5}$

8.3 次の計算をせよ．

(1) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^3$　(九州電力)

(2) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}\right)^{-1}$　(九州電力)

有理数の指数

$a>0$ で，m, n を正の整数，r を正の有理数とするとき

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a},\quad a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m},\quad a^{-r}=\frac{1}{a^r}$$

例 8.4　$2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$,　$5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$,　$8^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{8^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{(\sqrt[3]{8})^2}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$

8.4 $a^{1.5}$ を根号を用いて表せ．　(九州電力)

8.5 次の計算をせよ．

(1) $27^{-\frac{2}{3}}$　(NTT)

(2) $125^{-\frac{4}{3}}$　(東芝機械)

(3) $25^{-1.5}$　(日本テレビ)

(4) $\left(\dfrac{25}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$　(ダイハツ工業)

8.6 $25^{-1.5}$, $81^{-\frac{5}{4}}$ の大小をいえ．　(九州電力)

指数法則 (指数が有理数)

$a>0$, $b>0$, r, s を有理数とする.

1 $\boldsymbol{a^r \times a^s = a^{r+s}}$　　**2** $\boldsymbol{\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}}$

3 $\boldsymbol{(a^r)^s = a^{rs}}$　　**4** $\boldsymbol{(ab)^r = a^r b^r}$

例題 8.5 次の計算をせよ.

(1) $9^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{1}{6}} \div 9$　　(2) $(8^{-\frac{1}{6}})^4$　　(3) $\sqrt[6]{2^5} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2^2}$

【解】 (1) $9^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{1}{6}} \div 9 = 9^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-1} = 9^{-\frac{1}{2}} = (3^2)^{-\frac{1}{2}} = 3^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

(2) $(8^{-\frac{1}{6}})^4 = 8^{-\frac{1}{6}\times 4} = 8^{-\frac{2}{3}} = (2^3)^{-\frac{2}{3}} = 2^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)} = 2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

(3) $\sqrt[6]{2^5} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{5}{6}} \div 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{6}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = 2^1 = 2$

8.7 次の計算をせよ.

(1) $27^{\frac{1}{3}} + (64^{\frac{1}{6}})^2$　(ボッシュ)

(2) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{-\frac{5}{3}} \times 8^{\frac{3}{2}}$　(九州電力)

(3) $8^{\frac{1}{4}} \times 8^{-\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{3}{4}}$　(アイシン精機)

(4) $\left\{\left(\dfrac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}$　(西日本新聞)

(5) $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\dfrac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$　(日本郵船)

(6) $(\sqrt[3]{2} \times 2 \div \sqrt{2^3})^{-12}$　(九州電力)

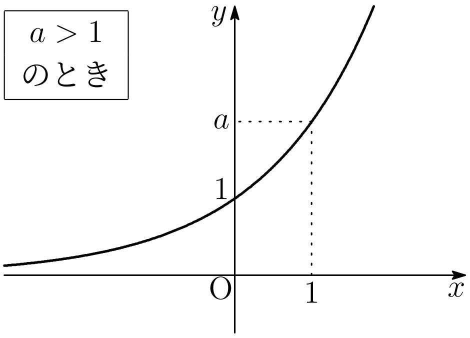
n が奇数のときに限り, 負の数 a に対して, $x^n = a$ を満たす負の数 x がただ 1 つある (n が偶数のときは存在しない).

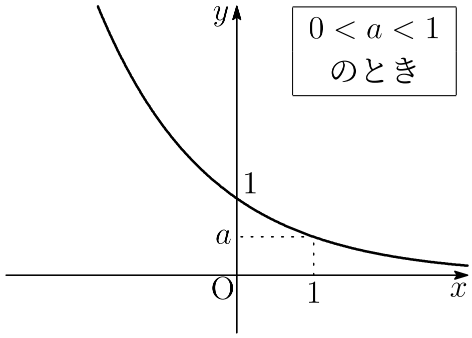
例 8.6　$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$,　$\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$

8.8 $\sqrt[3]{-27}$ を計算せよ.　(日本製紙)

8.1.2　指数関数

指数関数 $y = a^x$ のグラフ

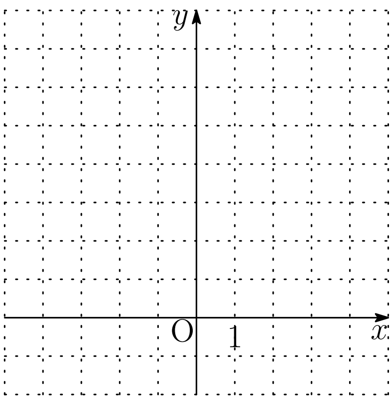


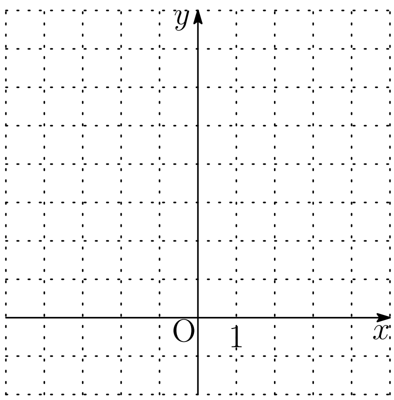


どちらの場合も，x 軸が漸近線で，点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る．
曲線は，$a > 1$ のとき右上がり，$0 < a < 1$ のとき右下がりである．

8.9 次の指数関数のグラフをかけ．

(1)　$y = 2^x$　　　(2)　$y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$





指数関数 $y = a^x$ の特徴

1　定義域は実数全体，値域は正の数全体である．

2　**$a > 1$ のとき**，x の値が増加すると y の値も増加する．
すなわち　　$\boldsymbol{r < s \iff a^r < a^s}$

3　**$0 < a < 1$ のとき**，x の値が増加すると y の値は減少する．
すなわち　　$\boldsymbol{r < s \iff a^r > a^s}$

一般に，x の値が増加すると y の値も増加する関数を**増加関数**といい，x の値が増加すると y の値は減少する関数を**減少関数**という．

例 8.7　次の 3 つの数の大小を不等号で示せ．

(1)　$\sqrt{3}$，1，$\sqrt[5]{9}$　　　(2)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}$，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$

【解】　(1)　$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$，$1 = 3^0$，$\sqrt[5]{9} = 3^{\frac{2}{5}}$

$y = 3^x$ は増加関数であるから　　$3^0 < 3^{\frac{2}{5}} < 3^{\frac{1}{2}}$

よって　$1 < \sqrt[5]{9} < \sqrt{3}$

(2)　$y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ は減少関数であるから

よって　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}$

8.10　次の 3 つの数の大小を不等号で示せ．

(1)　2，$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{4}$　　　(2)　1，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0.5}$

例題 8.8　次の不等式を解け．

(1)　$2^x \geqq 32$　　　(2)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x < \dfrac{1}{8}$

【解】(1) 不等式を変形すると　　$2^x \geqq 2^5$　　　$\longleftarrow$ 関数 $y{=}2^x$ は増加関数

よって　　　$x \geqq 5$

(2) 不等式を変形すると　　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x < \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$　　　$\longleftarrow$ 関数 $y{=}\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は減少関数

よって　　　$x > 3$

8.11　次の不等式を解け．

(1)　$3^x < \sqrt{27}$　　　(2)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \geqq \dfrac{1}{81}$

例題 8.9　次の方程式を解け.

(1) $9^x = \dfrac{1}{27}$　　(2) $8^x = 2^{x+1}$

【解】 (1) 方程式を変形すると　$3^{2x} = 3^{-3}$

$2x = -3$ より　$x = -\dfrac{3}{2}$

(2) 方程式を変形すると　$2^{3x} = 2^{x+1}$

$3x = x + 1$ より　$x = \dfrac{1}{2}$

8.12 次の方程式を解け.

(1) $2^x = \dfrac{1}{16}$ (スズキ)

(2) $2^x = \dfrac{32}{\sqrt{2}}$ (KDDI)

(3) $3^{x+1} = \dfrac{1}{27}$ (スズキ)

(4) $5^{x-2} = \dfrac{1}{125}$ (キヤノン)

(5) $5^{x+3} = \dfrac{1}{625}$ (豊和工業)

(6) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x = 125$ (日本テレビ)

(7) $4^{3x+2} = 32$ (三井化学)

(8) $3^x = 9^{x-1}$ (NTT)

(9) $9^x = 27^{x-1}$ (中国電力)

(10) $36^x = 216 \times 6^{x+1}$ (日本電気)

例題 8.10 方程式 $4^x - 2^{x+2} - 32 = 0$ を解け.

【解】 $4^x = (2^x)^2$，$2^{x+2} = 4{\cdot}2^x$ であるから，方程式は

$$(2^x)^2 - 4{\cdot}2^x - 32 = 0$$

← $2^x = X$ とおくと $X^2 - 4X - 32 = (X+4)(X-8)$

ゆえに　$(2^x+4)(2^x-8) = 0$

$2^x + 4 > 0$ であるから　　$2^x - 8 = 0$

よって　　$2^x = 8$ を解いて　$x = 3$

8.13 次の方程式を解け.

(1) $4^x + 2^x = 20$　(三菱重工)

(2) $4^x + 8 = 9 \times 2^x$　(大阪ガス)

(3) $9^x - 2 \times 3^{x+1} = 3^3$　(東邦ガス)

(4) $4^{x+1} - 3 \times 2^{x+3} + 32 = 0$　(東芝)

(5) $2^{x+2} - 2^{-x} + 3 = 0$　(日立ソフトウェアエンジニアリング)

(6) $2^{2x+1} + 2^{3x} = 5 \times 2^{x+4}$　(マツダ)

例題 8.11 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 12 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$$

【解】 $3^x = X$, $3^y = Y$ とおくと

$$3^{x+y} = 3^x \cdot 3^y = XY$$

よって，連立方程式は

$$\begin{cases} X + Y = 12 & \cdots ① \\ XY = 27 & \cdots ② \end{cases}$$

① から　$Y = 12 - X \quad \cdots ③$

$3^x > 0$, $3^y > 0$ であるから　$X > 0$　かつ　$12 - X > 0$

すなわち　$0 < X < 12 \quad \cdots ④$

③ を ② に代入して　$X(12 - X) = 27$

整理して　$X^2 - 12X + 27 = 0$

ゆえに　$(X - 3)(X - 9) = 0$

④ に注意して　$X = 3,\ 9$

これを ③ に代入して

$$\begin{cases} X = 3 \\ Y = 9 \end{cases},\ \begin{cases} X = 9 \\ Y = 3 \end{cases} \quad \text{したがって} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases},\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

8.14 次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 40 \\ 2^{x+y} = 256 \end{cases}$　(三菱電機)

(2) $\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$　(三菱電機)

8.2　対数関数

8.2.1　対数とその性質

指数と対数

$a > 0$，$a \neq 1$ で $M > 0$ とするとき，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{M = a^p} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\log_a M = p}$$

$\log_a M$ を，a を**底**とする M の**対数**という．また，M をこの対数の**真数**という．

[注意] とくに，$1 = a^0$，$a = a^1$ であるから，$\log_a 1 = 0$，$\log_a a = 1$

例 8.12　次の等式が成り立つような x の値を求めよ．

(1) $\log_x 36 = 2$　　(2) $\log_2 x = 5$

【解】 (1)　$\log_x 36 = 2$ から　$36 = x^2$
$x > 0$ であるから　$x = 6$

(2)　$\log_2 x = 5$ から　$x = 2^5$
したがって　$x = 32$

8.15 次の式を満たす x の値を求めよ．

(1)　$\log_x 216 = 3$　(松下電器産業)

(2)　$\log_{81} x = \dfrac{1}{4}$　(富士通)

例 8.13　次の値を簡単にせよ．

(1) $\log_5 125$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16}$

[注意] $\log_a M = p$ のとき，$M = a^p$ であるから $\log_a a^p = p$

【解】 (1)　$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$　　(2)　$\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = 4$

8.16 次の値を簡単にせよ．

(1)　$\log_2 8$　(NTT)

(2)　$\log_2 \sqrt{8}$　(九州電力)

(3)　$\log_{10} 1$　(三菱重工)

例 8.14 次の値を簡単にせよ．

(1) $\log_2 \dfrac{1}{8}$　　(2) $\log_{10} 0.01$

【解】 (1) $\log_2 \dfrac{1}{8} = \log_2 \dfrac{1}{2^3} = \log_2 2^{-3} = -3$

(2) $\log_{10} 0.01 = \log_{10} \dfrac{1}{100} = \log_{10} \dfrac{1}{10^2} = \log_{10} 10^{-2} = -2$

8.17 次の値を簡単にせよ．

(1) $\log_{10} \dfrac{1}{1000}$ (トヨタ自動車)

(2) $\log_{10} 0.1$ (マツダ)

(3) $\log_{10} 0.001$ (九州電力)

(4) $\log_2 \dfrac{1}{2}$ (ニッシン工業)

(5) $\log_3 \dfrac{1}{81}$ (東芝)

(6) $\log_{0.5} 0.5$ (住友精密工業)

(7) $\log_2 \cos 60°$ (ダイヘン)

8.18 次の等式について正しいものには○，正しくないものには×をつけよ．
(トヨタ自動車)

① $\log_a 1 = a$　② $\log_a a = 1$　③ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

④ $\dfrac{D}{A} + \dfrac{C}{B} = \dfrac{AD}{AB} + \dfrac{AC}{AB}$　⑤ $A^m \times A^n = A^{mn}$

対数の性質

$M>0$, $N>0$ で，k を実数とする．

1 $\quad \boldsymbol{\log_a MN = \log_a M + \log_a N}$

2 $\quad \boldsymbol{\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$

3 $\quad \boldsymbol{\log_a M^k = k\log_a M}$

例 8.15 次の計算をせよ．

(1) $\log_6 9 + \log_6 4$ (2) $\log_2 7 - \log_2 56$

(3) $2\log_{10} 5 - \log_{10} 15 + \log_{10} 6$

【解】 (1) $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6(9\times 4) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

(2) $\log_2 7 - \log_2 56 = \log_2 \dfrac{7}{56} = \log_2 \dfrac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$

(3)
$$\begin{aligned} 2\log_{10} 5 - \log_{10} 15 + \log_{10} 6 &= \log_{10} 5^2 - \log_{10} 15 + \log_{10} 6 \\ &= \log_{10} \frac{25\times 6}{15} = \log_{10} 10 = 1 \end{aligned}$$

8.19 次の式を簡単にせよ．

(1) $\log_2 8 + 3\log_3 81$ (九州電力)

(2) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$ (豊田工機)

(3) $\log_2 24 - \log_2 3$ (NTT)

(4) $\log_2 6 - \log_2 \dfrac{3}{4}$ (日立ソフトウェアエンジニアリング)

(5) $\log_2 8 - \log_2 \dfrac{3}{4} + \log_2 6$ (中部電力)

(6) $\log_3(4-\sqrt{7}) + \log_3(4+\sqrt{7})$ (東北電力)

(7) $\log_{10} 2 + \log_{10}\sqrt{15} - \log_{10}\sqrt{0.6}$ (NTT)

(8) $\log_{10} \dfrac{4}{25} + 2\log_{10} 5$ (清水建設)

(9) $\log_{10} 25 - 2\log_{10} \dfrac{1}{2}$ (東陶機器)

(10) $-\dfrac{1}{2}\log_{10} 3 + \dfrac{1}{2}\log_{10} 6 + \dfrac{1}{2}\log_{10} 5$ (九州電力)

底が 10 のとき，たとえば $\log_{10} 5$ の底を省略して $\log 5$ とかくことがある．

例 8.16 $\log 25 + \log 4 = \log(25 \times 4) = \log 10^2 = 2$

8.20 次の式を簡単にせよ．

(1) $\log \dfrac{5}{3} + 2\log \dfrac{2}{5} - \log \dfrac{8}{3}$ (マツダ)

(2) $\log 45 - 3\log 3 + \log \dfrac{3}{5}$ (安川電機)

(3) $2\log \dfrac{5}{3} - \log \dfrac{9}{4} + 2\log 3 + \dfrac{1}{2}\log 81$ (日本自動車機械工具協会)

底の変換公式

a，b，c は正の数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ とするとき

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

例 8.17 $\log_{32} 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 32} = \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^5} = \dfrac{3}{5}$

8.21 次の値を簡単にせよ．

(1) $\log_9 27$ (ダイフク)

(2) $\log_{25} 125$ (NTT)

(3) $\log_8 2$ (キヤノン)

(4) $\log_4 \sqrt[3]{2}$ (九州電力)

(5) $\log_{100} 10\sqrt{10}$ (ダイヘン)

(6) $\log_{\frac{1}{4}} 2$ (日本水産)

(7) $\log_{\sqrt{3}} 9$ (東邦ガス)

例 8.18
$$\log_3 2\cdot\log_4 27=\log_3 2\times\frac{\log_3 27}{\log_3 4}$$
$$=\log_3 2\times\frac{3}{2\log_3 2}=\frac{3}{2}$$

8.22 次の式を簡単にせよ.

(1) $\log_3 2\times\log_8 9$ (九州電力)

(2) $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 8$ (清水建設)

(3) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$ (NTT)

8.23 $\log_2 3=a$, $\log_3 11=b$ として，$\log_{44} 66$ を a, b を用いて表せ. (東芝)

8.24 $\log A=x$, $\log B=y$, $\log C=z$ のとき，次の値を x, y, z を用いて表せ. (中川電気工業)

(1) $\log_A B$　(2) $\log_{AB} C$　(3) $\log_{\frac{C}{B}} A$

例 8.19 次の値を簡単にせよ.
(1) $3^{\log_3 5}$　(2) $5^{3\log_5 2}$

[注意] $\log_a M=p$ のとき，$M=a^p$ であるから $M=a^{\log_a M}$

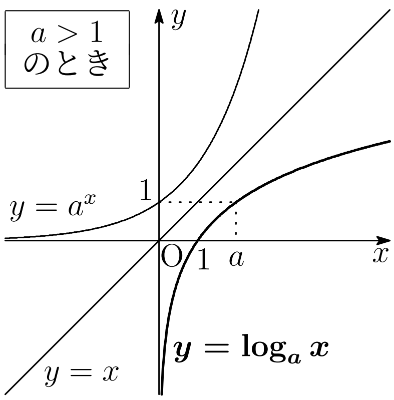
【解】 (1) $3^{\log_3 5}=5$　(2) $5^{3\log_5 2}=5^{\log_5 8}=8$

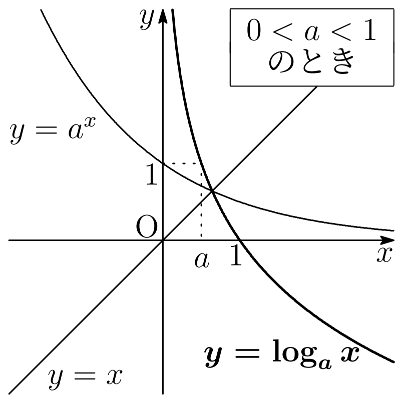
8.25 $10^{2\log 2}$ の値を簡単にせよ. (帝人)

8.2.2 対数関数

指数関数 $y = a^x$ のグラフと $y = x$ について対称であり，下の図のようなる．

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフ

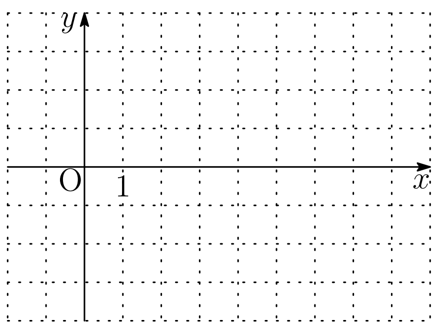




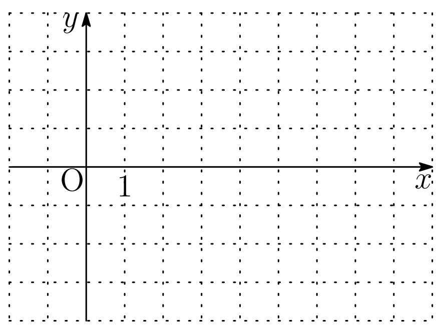
どちらの場合も，y 軸が漸近線で，点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る．
曲線は，$a > 1$ のとき右上がり，$0 < a < 1$ のとき右下がりである．

8.26 次の対数関数のグラフをかけ．

(1) $y = \log_2 x$



(2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$



対数関数 $y = \log_a x$ の特徴

1 定義域は正の数全体，値域は実数全体である．

2 $\boldsymbol{a > 1}$ **のとき**，増加関数である．すなわち

$$\boldsymbol{0 < p < q \iff \log_a p < \log_a q}$$

3 $\boldsymbol{0 < a < 1}$ **のとき**，減少関数である．すなわち

$$\boldsymbol{0 < p < q \iff \log_a p > \log_a q}$$

例題 8.20 次の不等式を解け.

(1) $\log_2 x \geqq 3$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) > 1$

【解】 (1) 不等式を変形すると　$\log_2 x \geqq \log_2 2^3$　　← 関数 $y=\log_2 x$ は増加関数

よって　$x \geqq 8$

(2) 不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}}(x-3) > \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}$　　← 関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$ は減少関数

真数は正であるから　$0 < x-3 < \dfrac{1}{2}$

よって　$3 < x < \dfrac{7}{2}$

8.27 次の不等式を解け.

(1) $\log_3 x < 1$　　(2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \leqq -2$

例題 8.21 方程式 $2^x - 6{\cdot}2^{-x} = 1$ を解け.

【解】 両辺に 2^x をかけて，整理すると

$$(2^x)^2 - 2^x - 6 = 0$$

ゆえに　$(2^x+2)(2^x-3) = 0$

$2^x + 2 > 0$ であるから　$2^x - 3 = 0$

よって　$2^x = 3$ を解いて　$x = \log_2 3$

8.28 次の方程式を解け.

(1) $2^x - 2^{-x} = \dfrac{8}{3}$　(九州電力)

(2) $4^{x+1} - 3 \times 2^{x+2} + 5 = 0$　(東芝)

例題 8.22 方程式 $\log_2 x + \log_2(x-6) = 4$ を解け.

【解】 真数は正であるから　$x > 0$　かつ　$x - 6 > 0$

すなわち　$x > 6$　$\cdots$①

方程式を変形すると　$\log_2 x(x-6) = 4$

よって　$x(x-6) = 2^4$

したがって　$(x+2)(x-8) = 0$

① より　$x + 2 > 0$ であるから　$x = 8$

8.29 次の方程式を解け.

(1) $\log_{10}(x-3) = 2$ (NTT)

(2) $\log(2x+1) + \log 5 = 2$ (日本金属)

(3) $\log_6 x + \log_6(x-5) = 2$ (小松製作所)

(4) $\log x + \log(x-3) = 1$ (京王電鉄)

(5) $\log x + \log(x-15) = 2$ (トヨタ自動車)

(6) $\log(x+1) + \log(x-2) = 1$ (日産ディーゼル)

(7) $\log(x+2) + \log(x+5) = 1$ (日立マクセル)

(8) $\log(x+1) + \log(x-1) = 0$ (中川電気工業)

(9) $\log_{10} 3x - \log_{10} 4 + \log_{10} 4x - \log_{10} 3 = 1$ (九州電力)

(10) $\log(2x-1) + \log(x-9) = 2$ (阪神内燃機工業)

(11) $\log_{10}(4x-3) + \log_{10}(3x-4) = 1$ (九州電力)

(12) $\log(x+6) = 1 - \log(x-4)$ (日本無線)

(13) $\log(x^2 - 5x) = \log(x+4) + \log(x-7) + \log 2$ (いすゞ自動車)

(14) $\log(4x+1) + \log(2x+1) = (2\log 3 + \log 5) - \log 3$ (KDDI)

(15) $\log(x^3 - 6x^2 + 12x - 7) - \log(x-1) = 0$ (東邦ガス)

(16) $\log_2(x-4) - \log_4(x-1) = 0$ (トクヤマ)

例題 8.23 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$$

【解】 第1式から　$y = 3x - 1$　$\cdots$①

真数は正であるから　$x > 0$　かつ　$3x - 1 > 0$

すなわち　$x > \dfrac{1}{3}$　$\cdots$②

第2式を変形すると　$\log xy = \log 10$

よって　$xy = 10$

① を代入して　$x(3x - 1) = 10$

したがって　$(x - 2)(3x + 5) = 0$

② より　$3x + 5 > 0$ であるから　$x = 2$

これを ① に代入して　$y = 5$　　(答) $x = 2$,　$y = 5$

8.30 次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x - y = 3 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$　(住友重機械工業)

(2) $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$　(KDDI)

(3) $\begin{cases} \log(x - y) + \log(7x - 8y) = 2 \\ \log(x^3 + y^3) - \log(x^2 - xy + y^2) = 1 \end{cases}$　(ニコン)

8.2.3　常用対数

10 を底とする対数を**常用対数**という.

例 8.24　$\log_{10} 3.45 = 0.5378$ を用いて，次の値を求めよ.

(1)　$\log_{10} 34500$　　　(2)　$\log_{10} 0.0345$

【解】　(1)　$\log_{10} 34500 = \log_{10}(3.45 \times 10^4)$

$$= \log_{10} 3.45 + \log_{10} 10^4$$

$$= 0.5378 + 4 = 4.5378$$

(2)　$\log_{10} 0.0345 = \log_{10}(3.45 \times 10^{-2})$

$$= \log_{10} 3.45 + \log_{10} 10^{-2}$$

$$= 0.5378 - 2 = -1.4622$$

8.31　$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて，次の値を計算せよ.

(1)　$\log_{10} 6$　(日立製作所)

(2)　$\log_{10} 20$　(九州電力)

(3)　$\log 60$　(九州電力)

(4)　$\log 6000$　(九州電力)

(5)　$\log_{10} 6 + \log_{10} 2$　(日本特殊機器)

(6)　$\log_{10} 8^2$　(日本特殊機器)

(7)　$\log \dfrac{1}{6}$　(日本郵船)

(8)　$\log 1.5$　(トーソク)

(9)　$\log 0.2$　(九州電力)

(10)　$\log 0.125$　(安川電機)

(11)　$\log 1.08$　(九州電力)

(12)　$\log 864$　(NHK)

(13)　$\log 5$　(富士重工業)

8.32 $\log 8.5 = 0.9294$ のとき，次の対数をいえ．　(日産自動車)

(1) $\log 85$　　(2) $\log 850$　　(3) $\log \sqrt{85}$

8.33 $\log 2 = 0.3010$ を用いて，次の計算をせよ．　(ダイフク)

(1) $\log_{0.5} 4$　　(2) $\log_{0.4} 5$

例題 8.25 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて，6^{30} の桁数を調べよ．

【解】

$$\log_{10} 6^{30} = 30 \log_{10} 6 = 30(\log_{10} 2 + \log_{10} 3)$$
$$= 30(0.3010 + 0.4771) = 23.343$$

$23 < \log_{10} 6^{30} < 24$ であるから

$$\log_{10} 10^{23} < \log_{10} 6^{30} < \log_{10} 10^{24}$$

よって　$10^{23} < 6^{30} < 10^{24}$

したがって，6^{30} は 24 桁の数である．

8.34 次の問いに答えよ．

(1) 3^{10} は何桁の数か．ただし，$\log 3 = 0.4771$ とする．　(KDDI)

(2) 3^{18} は何桁の数か．ただし，$\log 3 = 0.4771$ とする．　(関西電力)

(3) 12^{12} は何桁の数か．ただし，$\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$ とする．　(三菱電機)

例題 8.26 ある国では，石油の消費量が毎年 20% ずつ増加している．このままの状態で増加すれば，消費量が初めて現在の 10 倍以上になるのは何年後か．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

【解】 n 年後に初めて現在の 10 倍以上になるのは，$1.2^n \geqq 10$ を満たす最小の自然数である．この不等式の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 1.2^n \geqq \log_{10} 10$$

$$n \log_{10} \frac{2^2 \times 3}{10} \geqq 1$$

よって $$n(2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1) \geqq 1$$

ここで $$2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1 = 2 \times 0.3010 + 0.4771 - 1 = 0.0791$$

ゆえに $$n \geqq \frac{1}{2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1} = \frac{1}{0.0791} = 12.6\cdots$$

したがって，消費量が初めて現在の 10 倍以上になるのは，13 年後である．

8.35 次の問いに答えよ．

(1) ある電車会社の乗客数は毎年 1 割ずつ増加するものとすれば，乗客数が初めて今年の 2 倍以上になるのは何年後か．$\log 11 = 1.0453$，$\log 20 = 1.3010$ とする．(小田急電鉄)

(2) 年利率 0.08 で元利合計が初めて元金の 2 倍以上になるのは何年後か．ただし $\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$ とする．(九州電力)

(3) $\dfrac{50}{49}$ を何乗したら，初めて 1000 より大きくなるか．ただし，$\log 7 = 0.8451$，$\log 2 = 0.3010$ とする．(ブラザー工業)

実践問題 13

東芝

次の問いに答えよ．

(1) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，θ の値を求めよ．ただし，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ である．

(2) 集合 A, B について，$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$\overline{A} \cap B = \{2, 3, 6\}$，$A \cap \overline{B} = \{1, 8\}$ であるとき，集合 A を求めよ．

(3) 円 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ の中心の座標を求めよ．

(4) 1 から 100 までの整数について，3 または 5 で割り切れる整数は何個あるか．

(5) 整式 $P(x)$ を $x + 2$ で割った余りが 5 のとき，$(2x - 1)P(x)$ を $x + 2$ で割ったときの余りを求めよ．

(6) 2 辺の長さがそれぞれ $3\sqrt{3}$, 6 で，その 2 辺の間の角の大きさが 30° の三角形の面積を求めよ．

(7) 点 $(2, 3)$ を通り，直線 $3x - 4y + 5 = 0$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

【答】

(1) 150°

(2) $A = \{1, 4, 5, 7, 8\}$

(3) $(1, -1)$

(4) 47 個

(5) -25

(6) $\dfrac{9}{2}\sqrt{3}$

(7) $4x + 3y - 17 = 0$

実践問題14

東芝

次の問いに答えよ．

1 次の計算をしなさい．

(1) 次の式を簡単にせよ．

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}}$$

(2) 次の 2 重根号を外しなさい．

$$\sqrt{4-\sqrt{15}}$$

2 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解を α, β とすると，α^2, β^2 もこの方程式の解であるという．この時の a, b の値を求めよ．ただし，$a \neq 0, b \neq 0$ とする．

3 1 桁の自然数の集合 U を全体集合として，集合 A, B を次のように定義する．

$$A=\{1,2,3,4,5\}, \quad B=\{x|x^2<10,\ x \in U\}$$

この時，次の集合の元 (要素) を示せ．

$$\overline{A \cup B}$$

4 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ の時，$\sin^3 x+\cos^3 x$ の値を求めよ．

【答】

1 (1) x (2) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$

2 $a=1,\ -2,\ b=1$

3 $\{6,7,8,9\}$

4 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

第 9 章　微分と積分

9.1　微分係数と導関数

9.1.1　微分係数

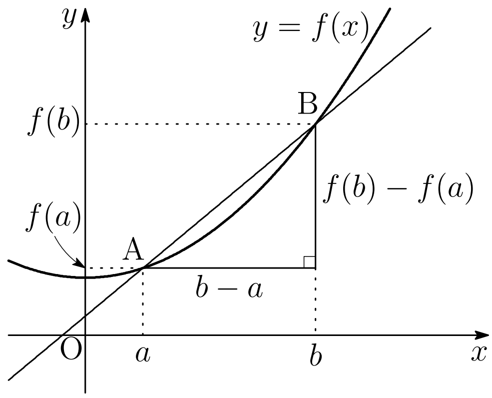
平均変化率

関数 $y = f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき，

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

である．この値を，$x = a$ から $x = b$ までの，$f(x)$ の**平均変化率**という．

この平均変化率は，右の図で直線 AB の傾きを表している．



例 9.1 関数 $f(x) = 2x^2 + x$ において，$x = -2$ から $x = 3$ までの平均変化率は

$$\frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{(2\cdot 3^2 + 3) - \{2\cdot(-2)^2 + (-2)\}}{3 - (-2)} = \frac{15}{5} = 3$$

9.1 関数 $y = x^2 + 3x - 4$ において $x = -1$ から $x = 2$ までの平均変化率を求めよ．
(三菱電機)

例 9.2 $\lim_{x \to 1}(2x^2 - x + 3) = 2\cdot 1^2 - 1 + 3 = 4$

9.2 次の極限値を求めよ．

(1) $\lim_{x \to 3} 3(5 - x)$ (トヨタ自動車)

(2) $\lim_{x \to -1} (x^2 - x)$ (ニコン)

例 9.3 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$$

【解】 $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+3}$$
$$=\frac{2-1}{2+3}=\frac{1}{5}$$

9.3 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ (マツダ)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$ (NEC フィールディング)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$ (愛知製鋼)

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x+x^2}{x+x^2}$ (豊田自動織機)

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$ (マツダ)

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}$ (日産自動車)

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-x-6}$ (シチズン時計)

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{2x^2-7x+6}$ (京阪電気鉄道)

9.4 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}$ (ニチコン)

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h}$ (青木あすなろ建設)

例題 9.4 次の等式が成り立つように定数 a，b の値を定めよ．

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-3x+2}=5$$

【解】 与えられた等式により

$$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{x^2+ax+b}{x^2-3x+2}\times(x^2-3x+2)\right\}$$

$$2^2+a\cdot 2+b=5\times 0$$

ゆえに　$b=-2a-4$　$\cdots$ ①

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{(x-2)(x-1)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+a+2}{x-1}=a+4$$

$a+4=5$ から　$a=1$　　① から　$b=-6$　　　(答) $a=1$，$b=-6$

9.5 次の等式が成り立つように定数 a, b の値を定めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+x+b}{x-1}=3$　(沖電気工業)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\frac{5}{3}$　(東北電力)

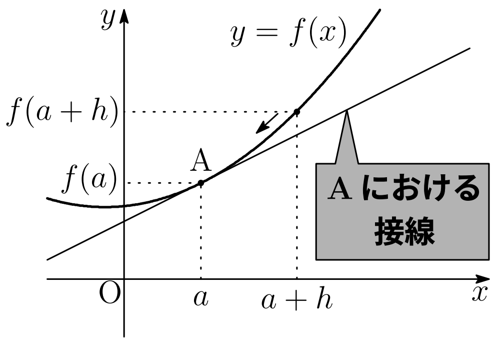
微分係数

1　$f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

2　接線の傾きと微分係数

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい．



例 9.5　$f(x)=x^2$ の $x=3$ における微分係数は

$$\begin{aligned}f'(3)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(6+h)=6\end{aligned}$$

$y=x^2$ のグラフ上の点 $(3,\ 9)$ における接線の傾きは

$$f'(3)=6$$

9.6　$f(x)=x^2$ のとき，$f'(a)$ を求めよ．　(協和エクシオ)

9.1.2 導関数とその計算

導関数 $f'(x)$

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

例 9.6 関数 $f(x) = 5x^2$ について，次のものを求めよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ (2) 微分係数 $f'(2)$，$f'(-1)$

【解】 (1) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{5(x+h)^2 - 5x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{10xh + 5h^2}{h}$

$$= \lim_{h \to 0}(10x + 5h) = 10x$$

(2) $f'(2) = 10 \cdot 2 = 20$，$f'(-1) = 10 \cdot (-1) = -10$

[注意] 関数 $y = f(x)$ の導関数を，$\boldsymbol{y'}$ や $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}$ で表すこともある．

たとえば，$5x^2$ の導関数を $(5x^2)'$ や $\dfrac{d}{dx}(5x^2)$ で表す．

$$(5x^2)' = 10x, \qquad \frac{d}{dx}(5x^2) = 10x$$

例 9.7 $\dfrac{d}{dx}(2x^3)$ を求めよ．

【解】 $f(x) = 2x^3$ とおくと

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^3 - 2x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 2x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6x^2h + 6xh^2 + 2h^3}{h} = \lim_{h \to 0}(6x^2 + 6xh + 2h^2) = 6x^2$$

したがって $\dfrac{d}{dx}(2x^3) = 6x^2$

9.7 $\dfrac{d}{dx}(5x^3)$ を求めよ． (協和エクシオ)

関数 x^n と定数関数の導関数

関数 x^n の導関数は $\quad \boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$

定数関数 c の導関数は $\quad \boldsymbol{(c)' = 0}$

[注意] $n = 1,\ 2,\ 3$ のとき

$$(x)' = 1, \qquad (x^2)' = 2x, \qquad (x^3)' = 3x^2$$

関数の定数倍および和，差の導関数

k を定数とする.

1 $y = kf(x)$ を微分すると $\quad \boldsymbol{y' = kf'(x)}$

2 $y = f(x) + g(x)$ を微分すると $\quad \boldsymbol{y' = f'(x) + g'(x)}$

3 $y = f(x) - g(x)$ を微分すると $\quad \boldsymbol{y' = f'(x) - g'(x)}$

例 9.8 関数 $y = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ を微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 2(x^3)' - 4(x^2)' + 5(x)' + (3)' \\ &= 2{\cdot}3x^2 - 4{\cdot}2x + 5{\cdot}1 + 0 \\ &= 6x^2 - 8x + 5 \end{aligned}$$

9.8 次の関数を微分せよ.

(1) $y = 2x^2 - 3x + 16$ (住友精化)

(2) $y = x^3 + 3x^2 - 5x - 1$ (住友電気工業)

(3) $f(x) = 3x^4 + 4x^2 + 5$ (住友電気工業)

(4) $y = \dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 9$ (旭化成)

9.9 次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 4)$ を計算せよ. (東芝)

(2) $y = 3x^2 + x + 4$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ. (出光興産)

> **例 9.9** 関数 $y = x(x+3)^2$ を微分せよ.

【解】 $x(x+3)^2 = x(x^2+6x+9) = x^3+6x^2+9x$

よって $\quad y = x^3+6x^2+9x$

したがって $\quad y' = 3x^2+12x+9$

9.10 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (5x+4)(2x+1)$ (三菱重工)

(2) $y = (2x-3)(3x-2)$ (佐世保重工業)

(3) $y = (2-3x)^2$ (清水建設)

(4) $y = (x^2+1)(2x-5)$ (NEC フィールディング)

(5) $f(x) = (x+1)(x^2-3x+5)$ (神戸製鋼所)

(6) $y = (x-2)(x^2+2x+4)$ (三洋電機)

(7) $y = (x^2-1)(x^2+x+1)$ (九州電力)

(8) $y = x(x^2+1)^2$ (三菱電線工業)

(9) $y = (2x+5)(3x+2)(2x+4)$ (東芝)

9.11 $y = (3x+2)^2$ のとき, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ. (NEC エンジニアリング)

9.12 次の関数の $x = 2$ における微分係数を求めよ. (新日本石油)

$$f(x) = (x^2-3)^2$$

9.1.3　接線の方程式

グラフ上の点における接線の方程式

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

例題 9.10　関数 $y = x^2 - 3x - 1$ のグラフについて，$x = 2$ における接線 ℓ の方程式を求めよ．

【解】 $f(x) = x^2 - 3x - 1$ とすると　$f'(x) = 2x - 3$

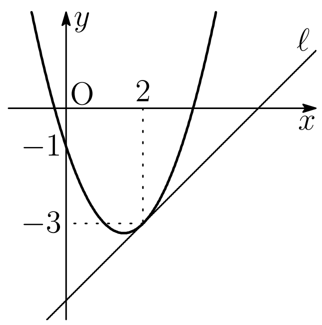
$$f(2) = 2^2 - 3\cdot 2 - 1 = -3$$

$$f'(2) = 2\cdot 2 - 3 = 1$$

ゆえに，求める接線 ℓ の方程式は

$$y - (-3) = 1(x - 2)$$

$$y = x - 5$$



9.13　次の問いに答えよ．

(1)　曲線 $y = x^2 - 2x - 3$ 上の点 $(3,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ．(九州電力)

(2)　曲線 $y = x^3 - 3x + 2$ 上の点 $(2,\ 4)$ における接線の方程式を求めよ．(豊田工機)

(3)　曲線 $y = x^3 - x^2$ の $x = 1$ における接線の方程式を求めよ．　(三洋電機)

9.14　$y = x^2 - 6x + 1$ について，次の問いに答えよ．　(JFE ホールディングス)

(1)　グラフ上の点 $\mathrm{A}(5, -4)$ における接線の方程式を求めよ．

(2)　点 A において接線と直交する直線の方程式を求めよ．

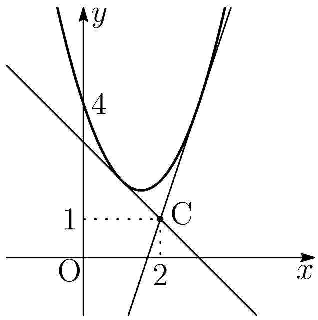
(3)　上記の 2 本の直線と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．

例題 9.11 関数 $y = x^2 - 3x + 4$ のグラフに点 C(2, 1) から引いた接線は 2 本ある．この 2 本の接線の方程式を求めよ．

【解】 $y = x^2 - 3x + 4$ を微分すると　　$y' = 2x - 3$

接点の座標を $(a, a^2 - 3a + 4)$ とすると，接線の傾きは $2a - 3$ となるから，その方程式は

$$y - (a^2 - 3a + 4) = (2a - 3)(x - a) \qquad \cdots ①$$



この直線が点 C(2, 1) を通るから

$$1 - (a^2 - 3a + 4) = (2a - 3)(2 - a)$$

よって　　$a^2 - 4a + 3 = 0$

すなわち　　$(a - 1)(a - 3) = 0$

$a = 1,\ 3$

したがって，接線の方程式は，① より

$a = 1$ のとき　　$y - 2 = -1(x - 1)$

$a = 3$ のとき　　$y - 4 = 3(x - 3)$

（答） $y = -x + 3$ と $y = 3x - 5$

9.15 点 $(1, -3)$ を通って $y = x^2$ に接する直線の方程式を求めよ．　(日立製作所)

9.16 放物線 $y = x^2 + 3x + 1$ に接し，点 $(0, -3)$ を通る直線の方程式を求めよ．

(大同特殊鋼)

9.17 放物線 $y = x^2 + 3$ へ点 $(1, 0)$ から引いた接線の方程式を求める問いに対して空欄 (1)〜(10) を解答せよ．

(NEC フィールディング)

点 $(1, 0)$ から曲線 $y = x^2 + 3$ に引いた接線の接点を $\mathrm{A}(a, a^2 + 3)$ とし A における接点の方程式を求める．

傾き $f(x) = x^2 + 3 \quad f'(x) = 2x$

$f(a) = a^2 + 3 \quad f'(a) = \boxed{\quad (1) \quad}$

次に，点 A を通り傾き $\boxed{\quad (2) \quad}$ の直線の方程式は

$$y - (a^2 + 3) = \boxed{\quad (3) \quad}(x - a)$$

$$y = \boxed{\qquad\qquad (4) \qquad\qquad}$$

これが点 $(1, 0)$ を通るときの a の値は

$a = \boxed{\quad (5) \quad}$　と　$a = \boxed{\quad (6) \quad}$ である．

したがって接線の方程式は

$y = \boxed{\qquad\qquad (7) \qquad\qquad}$，$y = \boxed{\qquad\qquad (8) \qquad\qquad}$

また，接点の座標は

$\boxed{\qquad (9) \qquad}$，$\boxed{\qquad (10) \qquad}$

9.2　関数の値の変化

9.2.1　関数の増減と極大・極小

$f'(x)$ の符号と $f(x)$ の増減

関数 $f(x)$ の増減は，次のようになる．

$f'(x) > 0$ となる x の値の範囲では増加し，

$f'(x) < 0$ となる x の値の範囲では減少する．

関数 $f(x)$ の極大・極小

関数 $f(x)$ が $x = a$ を境目として増加から減少に移るとき，

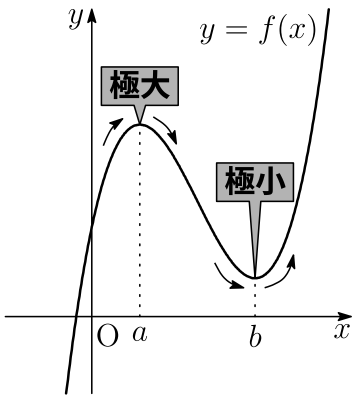
$f(x)$ は $x = a$ で**極大**である

といい，$f(a)$ を**極大値**という．
また，$x = b$ を境目として減少から増加に移るとき，

$f(x)$ は $x = b$ で**極小**である

といい，$f(b)$ を**極小値**という．

極大値と極小値をまとめて**極値**という．



例題 9.12 関数 $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ の増減を調べ，極値を求めよ．また，そのグラフをかけ．

【解】 $y' = 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x-1)(x-3)$

$y' = 0$ とすると

$x = 1,\ 3$

y の増減表は，右のようになる．

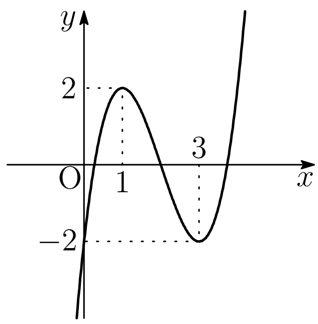
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 -2	$\nearrow$

したがって，この関数は

$x = 1$ で極大値 2,

$x = 3$ で極小値 -2

をとる．
また，グラフは右の図のようになる．



9.18 次の関数の極値を求めよ.

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ (日本鋳造)

(2) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ (東京計器工業)

(3) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ (関東電気)

(4) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ (ジーエスユアサコーポレーション)

(5) $y = \dfrac{1}{5}(x^3 - 3x^2 - 9x)$ (東亜燃料工業)

9.19 関数 $y = x^3 - 3x - 1$ のグラフをかけ. (本田技研工業)

9.20 関数 $y = -x^3 - 6x^2 - 9x + 1$ について，次の問いに答えよ.
(JFE ホールディングス)

(1) y 軸との交点の座標を求めよ.

(2) 極大値・極小値を求めよ.

(3) グラフをかけ.

9.21 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ のグラフは点 $(1,\ 4)$ を通り，この点における接線の傾きは -3 である. (三井化学)

(1) $a,\ b$ の値を求めよ.

(2) $f(x)$ の極大値，極小値を求めよ.

(3) $y = f(x)$ のグラフをかけ.

例題 9.13 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が，$x = -1$ で極大値をとり，$x = 3$ で極小値 -12 をとるとき，a，b，c の値と極大値を求めよ．

【解】 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(x) = 0$ の解が $x = -1,\ 3$ であるから，解と係数の関係により

$$(-1) + 3 = -\frac{2a}{3}, \quad (-1)\cdot 3 = \frac{b}{3}$$

ゆえに　$a = -3$，$b = -9$

このとき　$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + c$

条件より $f(3) = -12$ であるから

$3^3 - 3\cdot 3^2 - 9\cdot 3 + c = -12$　これを解いて　$c = 15$

よって，極大値は　$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 15 = 20$

(答) $a = -3$，$b = -9$，$c = 15$，極大値 20

9.22 関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が，$x = 0$ で極大，$x = 2$ で極小となる．次の問いに答えよ．(電源開発)

(1) a, b の値を求めよ．

(2) 極小値が 2 であるとき，極大値を求めよ．

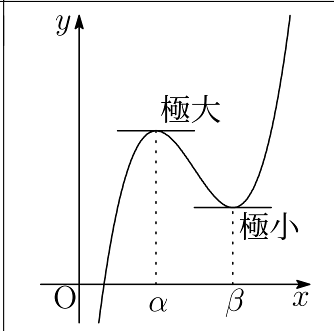
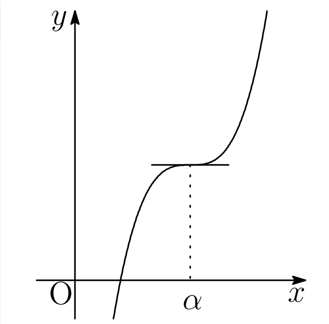
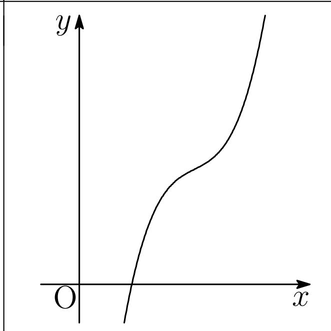
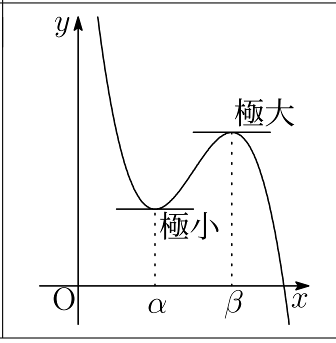
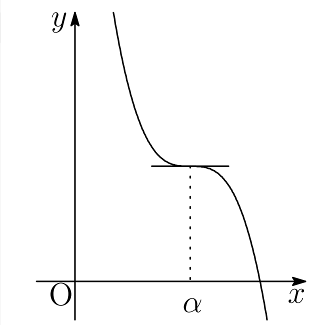
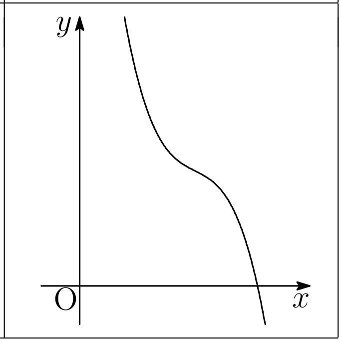
9.23 関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が，$x = 1$ で極大値 3，$x = 3$ で極小値をとる．この関数を求め，極小値を求めよ．(日本電気)

9.24 関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が，$x = -2$ で極大値 44，$x = 4$ で極小値 -64 をとるとき，a, b, c, d の値を求めよ．(九州電力)

3 次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ について，$y'=0$ すなわち 2 次方程式 $3ax^2+2bx+c=0$ の判別式を D とすると $D/4=b^2-3ac$

$D/4>0$　ならば　y' は正にも，負にも，また 0 にもなりうる．
$D/4=0$　ならば　y' は 0 または a と同符号．
$D/4<0$　ならば　y' は常に a と同符号．

したがって，$D/4=b^2-3ac>0$ のとき極値をもち，$D/4=b^2-3ac \leqq 0$ のとき極値がない．3 次関数についてまとめると，次のようになる．

$y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$	$y'=3ax^2+2bx+c$	判別式 $D/4=b^2-3ac$	
$D/4$	$D/4=b^2-3ac>0$	$D/4=b^2-3ac=0$	$D/4=b^2-3ac<0$
$y'=0$	異なる 2 実数解 α, β	重解 α	実数解がない
極値	極値がある	極値がない	極値がない
$a>0$			
$a<0$			

例題 9.14 3 次関数 $y=x^3+6x^2+ax-5$ が極大値・極小値をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

【解】 $y'=3x^2+12x+a$
$y'=0$ の判別式を D とすると，$D/4=6^2-3a$
極値をもつとき　$D>0$　これを解いて　$a<12$

9.25 関数 $y=x^3+ax^2+3x+4$ が極大値・極小値をもつとき，a の値の範囲を求めよ．　(三洋電機)

9.2.2　関数の増減・グラフの応用

例題 9.15　次の関数の最大値，最小値を求めよ．

$$y = x^3 - 12x \quad (-3 \leqq x \leqq 5)$$

【解】　$y' = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$

$y' = 0$ とすると　$x = -2,\ 2$

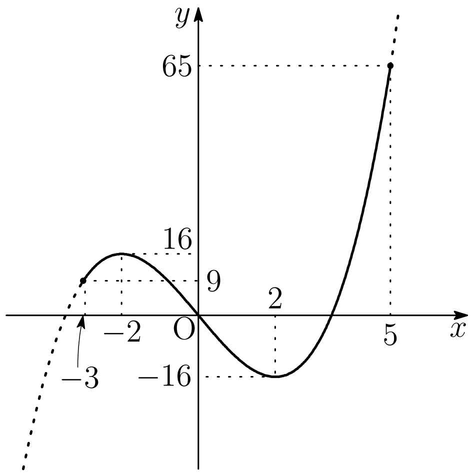
y の増減表は，次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	5
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	9	$\nearrow$	極大 16	$\searrow$	極小 -16	$\nearrow$	65

よって，この関数は

$x = 5$ で最大値 65 をとり，

$x = 2$ で最小値 -16 をとる．

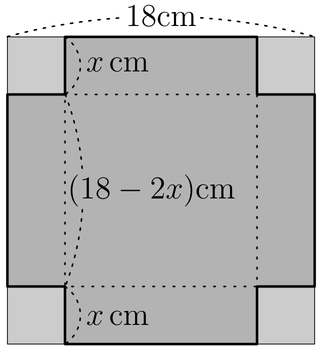


9.26 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 2 \quad (-2 \leqq x \leqq 3)$

(2) $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 1 \quad (-2 \leqq x \leqq 4)$

例題 9.16 1 辺が 18cm の正方形の厚紙の四隅から，同じ大きさの正方形を右の図のように切り取って，ふたのない箱を作る．箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすればよいか．



【解】 切り取る正方形の 1 辺の長さを x cm，箱の容積を $y\,\mathrm{cm}^3$ とする．
$x > 0$，$18 - 2x > 0$ であるから

$$0 < x < 9 \qquad \cdots ①$$

このとき

$$y = x(18-2x)^2 = 4(x^3 - 18x^2 + 81x)$$
$$y' = 12(x^2 - 12x + 27) = 12(x-3)(x-9)$$

① の範囲において，y の増減表は，右のようになる．
したがって，y は $x = 3$ で最大になる．

(答) 3 cm

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	9
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

9.27 次の問いに答えよ．

(1) 1 辺が 30cm の正方形のブリキの四すみから同じ大きさの正方形を切り取り，四方を折り曲げて作った箱の容積を最大にしたい．切り取る正方形の 1 辺の長さをどれだけにすればよいか．またそのときの容積はどれだけか．

(愛知機械工業)

(2) 横 15cm，縦 8cm の長方形の厚紙の四すみから同じ大きさの正方形を切り取って箱を作るとき，この箱の容積を最大にするには切り取る正方形の 1 辺の長さをいくらにすればよいか． (日本ピストンリング)

(3) 幅 25cm，長さ 40cm の厚紙の四隅から正方形を切り取り箱を作るとき，その容積をできるだけ大きくするには，1 辺が何 cm の正方形を切り取ればよいか．

(いすゞ自動車)

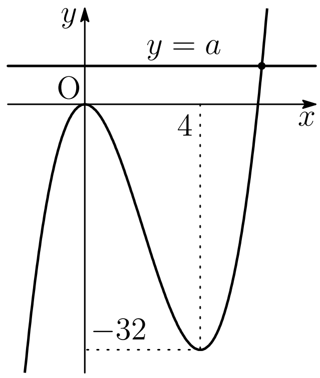
例題 9.17 方程式 $x^3-6x^2=a$ がただ1つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

【解】 関数 $y=x^3-6x^2$ について

$$y' = 3x^2-12x$$
$$= 3x(x-4)$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$	極小 -32	$\nearrow$

y の増減表は，右のようになる．
よって，$y=x^3-6x^2$ のグラフは，右の図のようになる．
求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y=a$ が1個の共有点をもつ範囲であるから



$$a<-32,\ 0<a$$

[注意] $x^3-6x^2=a$ の実数解の個数は，さらに次のようになる．

$a=0,\ -32$ のとき2個，　　$-32<a<0$ のとき3個

9.28 次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $x^3-6x^2+9x=a$ が異なる3つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(2) 方程式 $x^3-3x=a$ がただ1つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

例題 9.18 $x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

$$x^3 + 3x \geqq 3x^2$$

[証明] $f(x) = (x^3 + 3x) - 3x^2$ とすると

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$= 3(x-1)^2$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$

$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は，右のようになる．

よって，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ は $x = 0$ で最小値 0 をとる．

したがって，$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるから

$$(x^3 + 3x) - 3x^2 \geqq 0$$

すなわち $\qquad x^3 + 3x \geqq 3x^2$

等号が成り立つのは，$x = 0$ のときである． **[証終]**

9.29 次の問いに答えよ．

(1) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $x^3 + 2 \geqq 3x$ が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

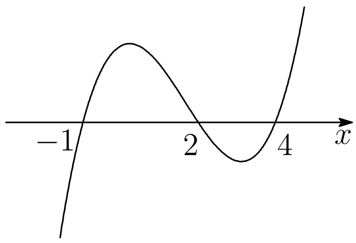
(2) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $x^3 + 12x \geqq 6x^2$ が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

3次関数のグラフを利用して，3次不等式の解を求めてみよう．

3次関数 $y=(x+1)(x-2)(x-4)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は

$$x=-1,\ 2,\ 4$$

であるから，右の図より



(1) 3次不等式 $(x+1)(x-2)(x-4)>0$ の解は　$-1<x<2,\ 4<x$

(2) 3次不等式 $(x+1)(x-2)(x-4)<0$ の解は　$x<-1,\ 2<x<4$

(3) 3次不等式 $(x+1)(x-2)(x-4)\geqq 0$ の解は　$-1\leqq x\leqq 2,\ 4\leqq x$

(4) 3次不等式 $(x+1)(x-2)(x-4)\leqq 0$ の解は　$x\leqq -1,\ 2\leqq x\leqq 4$

3次不等式の解 (1)

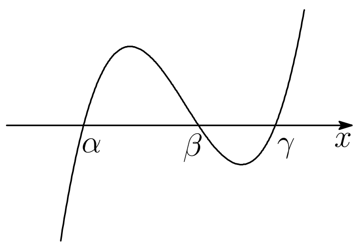
$\alpha<\beta<\gamma$ とする．

1 $\boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0}$ **の解は**
$\boldsymbol{\alpha<x<\beta,\ x>\gamma}$

2 $\boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)<0}$ **の解は**
$\boldsymbol{x<\alpha,\ \beta<x<\gamma}$

3 $\boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\geqq 0}$ **の解は**
$\boldsymbol{\alpha\leqq x\leqq\beta,\ x\geqq\gamma}$

4 $\boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\leqq 0}$ **の解は**
$\boldsymbol{x\leqq\alpha,\ \beta\leqq x\leqq\gamma}$

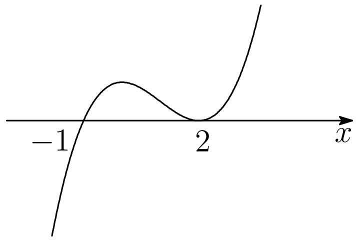


9.30 3次不等式 $x^3-2x^2-5x+6<0$ を解け．　(東芝)

3次関数 $y=(x+1)(x-2)^2$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は

$$x=-1,\ 2$$

であるから，右の図より



(1) 3次不等式 $(x+1)(x-2)^2>0$ の解は　$-1<x<2,\ \ 2<x$

(2) 3次不等式 $(x+1)(x-2)^2<0$ の解は　$x<-1$

(3) 3次不等式 $(x+1)(x-2)^2\geqq 0$ の解は　$-1\leqq x$

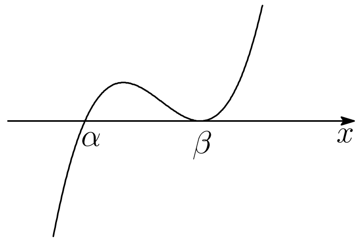
(4) 3次不等式 $(x+1)(x-2)^2\leqq 0$ の解は　$x\leqq -1,\ \ x=2$

3次不等式の解 (2)

$\alpha<\beta$ とする．

1 $\boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)^2>0}$　**の解は**
$\boldsymbol{\alpha<x<\beta,\ \ \beta<x}$

2 $\boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)^2<0}$　**の解は**
$\boldsymbol{x<\alpha}$

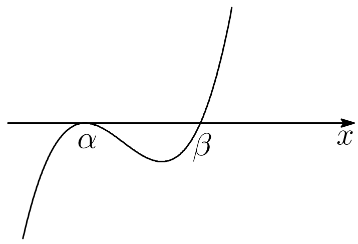


3 $\boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)^2\geqq 0}$　**の解は**
$\boldsymbol{\alpha\leqq x}$

4 $\boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)^2\leqq 0}$　**の解は**
$\boldsymbol{x\leqq\alpha,\ \ x=\beta}$

5 $\boldsymbol{(x-\alpha)^2(x-\beta)>0}$　**の解は**
$\boldsymbol{\beta<x}$

6 $\boldsymbol{(x-\alpha)^2(x-\beta)<0}$　**の解は**
$\boldsymbol{x<\alpha,\ \ \alpha<x<\beta}$



7 $\boldsymbol{(x-\alpha)^2(x-\beta)\geqq 0}$　**の解は**
$\boldsymbol{x=\alpha,\ \ \beta\leqq x}$

8 $\boldsymbol{(x-\alpha)^2(x-\beta)\leqq 0}$　**の解は**
$\boldsymbol{x\leqq\beta}$

9.3 積分法

9.3.1 不定積分

$f(x)$ の不定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx = F(x) + C} \qquad \text{ただし，} C \text{ は積分定数}$$

x^n の不定積分

$$\int \boldsymbol{x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$$

[注意] $n = 0,\ 1,\ 2$ のとき

$$\int 1\,dx = x + C, \qquad \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C, \qquad \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

関数の定数倍および和，差の不定積分

$F'(x) = f(x),\ G'(x) = g(x)$ のとき

1 $\displaystyle\int \boldsymbol{kf(x)\,dx = kF(x) + C}$ 　　k は定数

2 $\displaystyle\int \boldsymbol{\{f(x) + g(x)\}\,dx = F(x) + G(x) + C}$

3 $\displaystyle\int \boldsymbol{\{f(x) - g(x)\}\,dx = F(x) - G(x) + C}$

例 9.19 (1) $\displaystyle\int 5x\,dx = 5\cdot\frac{1}{2}x^2 + C = \frac{5}{2}x^2 + C$

(2) $$\int (6x^2 - 2x + 3)\,dx = 6\cdot\frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + 3x + C$$
$$= 2x^3 - x^2 + 3x + C$$

(3) $$\int (x+2)(x-1)\,dx = \int (x^2 + x - 2)\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$$

9.31 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{2}\,dx$ (阪急電鉄)

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{2}x\,dx$ (三菱重工)

(3) $\displaystyle\int (x+2)\,dx$ (日立エレクトロニクス)

(4) $\displaystyle\int (3x^2-4x+3)\,dx$ (マツダ)

(5) $\displaystyle\int (x^3-x-1)\,dx$ (日本電気)

(6) $\displaystyle\int (2x^3-6x+3)\,dx$ (日本輸送機)

(7) $\displaystyle\int x(1+x^2)\,dx$ (九州電力)

(8) $\displaystyle\int (x-1)^2\,dx$ (トヨタ自動車)

9.32 次の関数を積分せよ.

(1) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ (殖産住宅)

(2) $f(x) = (x-2)(x+1)$ (豊和工業)

例題 9.20 $f'(x) = (x+1)(3x-1)$, $f(-1) = 3$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

【解】 関数 $f(x)$ は, $f'(x) = (x+1)(3x-1)$ の不定積分であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (x+1)(3x-1)\,dx \\ &= \int (3x^2 + 2x - 1)\,dx \\ &= x^3 + x^2 - x + C \end{aligned}$$

よって　$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + C = C + 1$

条件から $C + 1 = 3$ であり　$C = 2$

したがって　$f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$

9.33 $f(1) = 2$, $f'(x) = (2x-3)(x+2)$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.
(NEC フィールディング)

9.3.2 定積分

定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

例 9.21 (1) $\displaystyle\int_1^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^3 (4x-3)\,dx = \Big[2x^2 - 3x\Big]_{-1}^3$

$\displaystyle= (2\cdot 3^2 - 3\cdot 3) - \{2(-1)^2 - 3(-1)\} = 4$

9.34 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^3 x^3\,dx$ (住友電気工業)

(2) $\displaystyle\int_1^2 (3x-2)\,dx$ (新日本石油)

(3) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\,dx$ (安川電機)

(4) $\displaystyle\int_1^3 (x+3)(x-1)\,dx$ (ダイフク)

(5) $\displaystyle\int_1^4 (x+1)^2\,dx$ (前田建設工業)

(6) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+4)(2x-1)\,dx$ (九州電力)

(7) $\displaystyle\int_1^3 x(x+1)(x+2)\,dx$ (新日本石油)

(8) $\displaystyle\int_{-1}^2 (5x^4 - 6x^2 + 1)\,dx$ (NEC エンジニアリング)

関数の定数倍および和，差の定積分

1 $\displaystyle \int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ 　k は定数

2 $\displaystyle \int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3 $\displaystyle \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

例 9.22 次の定積分を求めよ．ただし，p，q は定数とする．

(1) $\displaystyle \int_1^3 (px^2+qx)\,dx$ 　　(2) $\displaystyle \int_0^1 (x+3)^2\,dx - \int_0^1 (x-3)^2\,dx$

【解】 (1) $\displaystyle \int_1^3 (px^2+qx)\,dx = p\int_1^3 x^2\,dx + q\int_1^3 x\,dx = p\left[\,\frac{x^3}{3}\,\right]_1^3 + q\left[\,\frac{x^2}{2}\,\right]_1^3$

$$= p\cdot\frac{3^3-1^3}{3} + q\cdot\frac{3^2-1^2}{2} = \frac{26}{3}p + 4q$$

(2) $\displaystyle \int_0^1 (x+3)^2\,dx - \int_0^1 (x-3)^2\,dx = \int_0^1 \{(x+3)^2-(x-3)^2\}\,dx$

$$= \int_0^1 12x\,dx = \left[\,6x^2\,\right]_0^1$$

$$= 6\cdot1^2 - 6\cdot0^2 = 6$$

9.35 次の定積分を求めよ．ただし，k は定数とする．

(1) $\displaystyle \int_{-1}^2 (kx^2+2x)\,dx$

(2) $\displaystyle \int_1^3 (x+1)(x+4)\,dx - \int_1^3 (x+2)^2\,dx$

定積分の上端，下端に関する性質として，次のことが成り立つ．

定積分の性質

1 $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ **2** $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

3 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

[注意] 性質 **3** は，a，b，c の大小に関係なく成り立つ．

例 9.23 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^3 (3x^2+4x)\,dx - \int_1^3 (3x^2+4x)\,dx$$

【解】

$$\int_0^3 (3x^2+4x)\,dx - \int_1^3 (3x^2+4x)\,dx$$
$$= \int_0^3 (3x^2+4x)\,dx + \int_3^1 (3x^2+4x)\,dx$$
$$= \int_0^1 (3x^2+4x)\,dx = \Big[\, x^3+2x^2 \,\Big]_0^1$$
$$= (1^3+2\cdot 1^2) - 0 = 3$$

9.36 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_3^3 (7x^2-9x+5)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^4 (x^2-2x+3)\,dx - \int_1^4 (x^2-2x+3)\,dx$

定積分と微分法

a を定数とするとき

$$x \text{ の関数 } \int_a^x f(t)\,dt \text{ の導関数は } f(x) \text{ である．}$$

[注意] x の関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ の導関数を $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt$ で表すこともある．

例題 9.24 等式 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - x - 2$ が，任意の x に対して成り立つとき，関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．

【解】 等式の両辺を x で微分すると　　$f(x) = 2x - 1$

また，与えられた等式で $x = a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$$0 = a^2 - a - 2$$

これを解くと　　$a = -1,\ 2$

よって　　$f(x) = 2x - 1$，$a = -1,\ 2$

9.37 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x (3t^2 - t)\,dt$ を微分せよ．

(2) 次の等式を満たす関数 $g(x)$，および定数 a の値を求めよ．

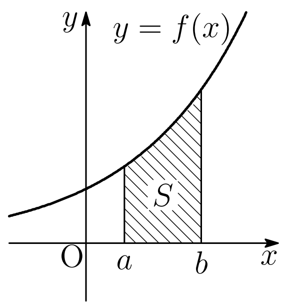
$$\int_a^x g(t)\,dt = x^2 - 2x + 1$$

9.3.3　図形の面積と定積分

定積分と図形の面積 (1)

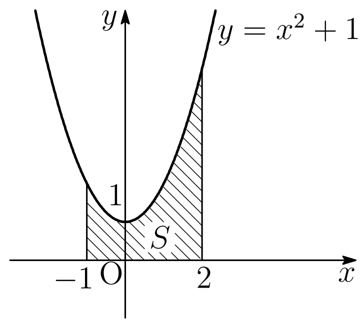
$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，
$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線
$x = a$，$x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$



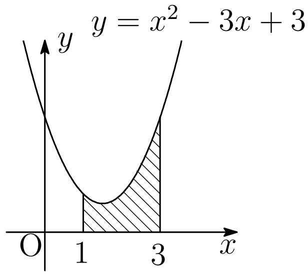
例 9.25 放物線 $y = x^2 + 1$ と x 軸および 2 直線 $x = -1$，$x = 2$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_{-1}^{2}(x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left(\frac{2^3}{3} + 2\right) - \left\{\frac{(-1)^3}{3} + (-1)\right\} = 6$$



9.38 次の問いに答えよ．

(1) 図の斜線部の面積を求めよ．　(NEC フィールディング)



(2) 直線 $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$ と直線 $x = 4$，x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．(きんでん)

(3) $y = x^2 - x + 3$ と x 軸，直線 $x = 1$，$x = 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ．(ニッシン工業)

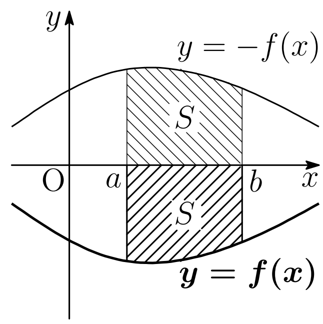
(4) 放物線 $y = 3 + 2x - x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．　(日立研究所)

(5) 放物線 $y = 1 - 4x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．　(トヨタ自動車)

定積分と図形の面積 (2)

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \leqq 0$ のとき，
$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線
$x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\boldsymbol{S = \int_a^b \{-f(x)\}dx}$$

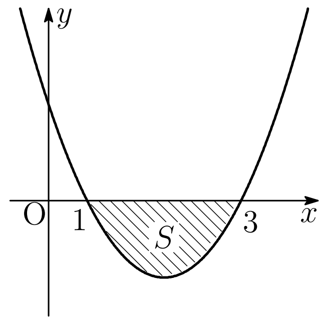


例題 9.26 放物線 $y=x^2-4x+3$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

【解】 この放物線と x 軸の交点の x 座標は，
$x^2-4x+3=0$ を解いて

$$x=1,\ 3$$

$1 \leqq x \leqq 3$ では $y \leqq 0$ であるから，
求める面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{-(x^2-4x+3)\}\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right]_1^3 \\ &= \left(-\frac{3^3}{3}+2{\cdot}3^2-3{\cdot}3\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+2{\cdot}1^2-3{\cdot}1\right)=\frac{4}{3} \end{aligned}$$

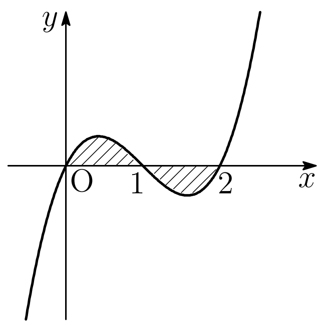
9.39 次の問いに答えよ．

(1) 放物線 $y=x^2-1$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ． (都市再生機構)

(2) 放物線 $y=x^2-9x+18$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．
(本州四国連絡高速道路)

(3) 放物線 $y=x^2-ax$ $(a>0)$ と x 軸で囲まれた部分の面積が 36 になるとき a の値を求めよ． (NEC フィールディング)

例題 9.27 関数 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.



【解】 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ と x 軸の交点の x 座標は,
$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ を解いて

$$x = 0,\ 1,\ 2$$

$0 \leqq x \leqq 1$ において　$y \geqq 0$
$1 \leqq x \leqq 2$ において　$y \leqq 0$

ゆえに, 求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx + \int_1^2 \{-(x^3 - 3x^2 + 2x)\}\,dx \\
&= \left[\ \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\ \right]_0^1 + \left[\ -\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\ \right]_1^2 \\
&= \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2\right) - 0 + \left(-\frac{2^4}{4} + 2^3 - 2^2\right) - \left(-\frac{1^4}{4} + 1^3 - 1^2\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

9.40 次の問いに答えよ.

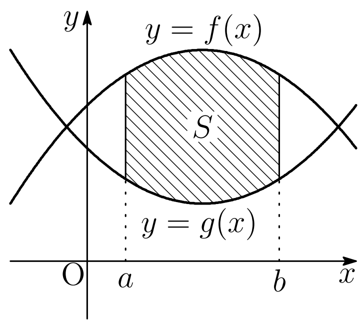
(1) 曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.
(ジーエスユアサコーポレーション)

(2) 曲線 $y = -(x-1)(x-2)(x-3)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.
(安川電機)

定積分と図形の面積 (3)

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq g(x)$ のとき，
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフおよび 2 直線
$x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\boldsymbol{S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx}$$



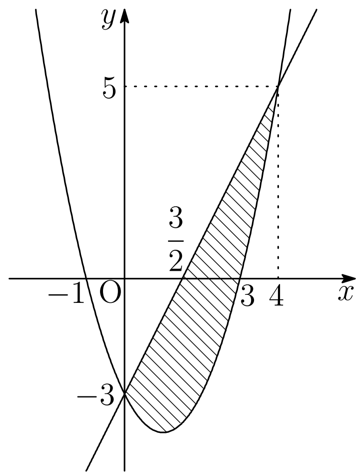
例題 9.28 放物線 $y=x^2-2x-3$ と直線 $y=2x-3$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

【解】 放物線と直線の交点の x 座標は，方程式

$$x^2-2x-3=2x-3$$

を解いて　　$x=0,\ 4$
右の図から，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \{(2x-3)-(x^2-2x-3)\}\,dx \\ &= \int_0^4 (-x^2+4x)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^4 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$



9.41 次の問いに答えよ．

(1) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ で囲まれた図形の面積を求めよ．(NEXCO)

(2) 直線 $y=-x+5$ と放物線 $y=x^2-1$ で囲まれた部分の面積を求めよ．(東レ)

(3) 放物線 $y=(x-1)^2$ と直線 $y=x+1$ で囲まれた部分の面積を求めよ．
(NEXCO)

9.42 次の問いに答えよ.

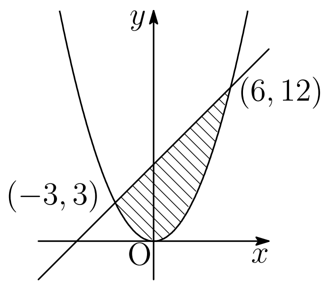
(1) 放物線 $4y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分の面積を求めよ.　(日本航空)

(2) 領域 $\begin{cases} x - y \leqq 0 \\ x^2 - 2x + y \leqq 0 \end{cases}$ の面積を求めよ.　(日本電気)

(3) 直線と放物線の方程式が $y = lx + m$, $y = nx^2$ のとき次の問いに答えよ.
(日立ソフトウェアエンジニアリング)

(i) l, m, n を求めよ.

(ii) 斜線部の面積を求めよ.



(4) 2 つの放物線 $y = x^2 - 4x + 3$, $y = 6 + x - x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ.
(三菱電機)

例題 9.29 曲線 $y = x^3 + x^2 - 3x + 6$ 上の点 $(1,\ 5)$ における接線と曲線によって囲まれた部分の面積を求めよ．

【解】 $y' = 3x^2 + 2x - 3$ であるから　$x = 1$ のとき $y' = 2$

接線の方程式は　$y - 5 = 2(x - 1)$

ゆえに　$y = 2x + 3$

曲線と接線の共有点の x 座標は

$$(x^3 + x^2 - 3x + 6) - (2x + 3) = (x - 1)^2(x + 3) \text{ により} \quad x = -3,\ 1$$

区間 $-3 \leqq x \leqq 1$ では，$(x - 1)^2(x + 3) \geqq 0$ であるから，この区間において，曲線は接線の上側にある．したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-3}^{1} \{(x^3 + x^2 - 3x + 6) - (2x + 3)\}\,dx \\
&= \int_{-3}^{1} (x^3 + x^2 - 5x + 3)\,dx \\
&= \left[\ \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 3x\ \right]_{-3}^{1} \\
&= \left(\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} - \frac{5}{2}\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right) - \left\{\frac{(-3)^4}{4} + \frac{(-3)^3}{3} - \frac{5}{2}(-3)^2 + 3(-3)\right\} \\
&= \frac{64}{3}
\end{aligned}$$

9.43 次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = x^3 - 3x$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．ただし，その領域は $x \geqq 0$ とする． (関東自動車工業)

(2) 関数 $y = x^3 - 3x + 2$ の極値を求め，直線 $y = 2$ とグラフの囲む部分の面積を求めよ． (NEC フィールディング)

(3) 曲線 $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ 上の点 $(1, -2)$ における接線と曲線によって囲まれた部分の面積を求めよ． (日立製作所)

重要な定積分

α，β を実数とする．

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

とくに2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解を α，β とすると

$$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx = a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

[証明]
$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx &= \int_\alpha^\beta \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta x^2\,dx-(\alpha+\beta)\int_\alpha^\beta x\,dx+\alpha\beta\int_\alpha^\beta dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha) \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\beta+\alpha)^2+6\alpha\beta\} \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2) = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

以上により，第1式は成り立つ．

α，β は2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解であるから，解と係数の関係により

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c &= a\left\{x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}\right\} = a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} \\ &= a(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

ゆえに，第2式が導かれる．　**[証終]**

たとえば，この公式を 343 ページの例題 9.26 に適用すると

$$\begin{aligned}S &= \int_1^3 \{-(x^2-4x+3)\}\,dx = -\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3 = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

また，345 ページの例題 9.28 では

$$\begin{aligned}S &= \int_0^4 \{(2x-3)-(x^2-2x-3)\}\,dx = -\int_0^4 x(x-4)\,dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(4-0)^3 = \frac{32}{3}\end{aligned}$$

実践問題15

東芝

次の問いに答えよ．

1 2つの2次方程式 $x^2+4x-m^2-5m=0,\ x^2-2mx+2m^2-16=0$ がいずれも異なる2つの実数解を持つときの m の値の範囲を求めよ．

2 $f(x)=x^3+2x^2+ax+b,\ g(x)=x^3+x^2+(2a+b)x+2b$ について，$x+1$ が共通の公約数であるとき，

(1) 実数 $a,\ b$ の値を求めよ．

(2) このときの $f(x),\ g(x)$ の最大公約数を求めよ．

3 半径 R の円に内接する三角形 ABC の頂角 $\angle\mathrm{A},\ \angle\mathrm{B},\ \angle\mathrm{C}$ の大きさがそれぞれ $A,\ B,\ C$ で，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ $a,\ b,\ c$ とすると，$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$ が成立するとき，A は何度になるかを求めよ．

4 単位円 $x^2+y^2=1$ の上に3点 $\mathrm{P}(0,1),\ \mathrm{Q}(1,0),\ \mathrm{R}(a,b)$ がある．点 R は第1象限にあり，線分 PR の長さ $\overline{\mathrm{PR}}$ が1である．

(1) $a,\ b$ の値を求めよ．

(2) 原点を O とすると $\tan\angle\mathrm{ROQ}+\cos\angle\mathrm{ROQ}$ の値を求めよ．

【答】

1 $-1<m<4$

2 (1) $a=-1,\ b=-2$　(2) x^2+3x+2

3 $A=90^\circ$

4 (1) $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{5}{6}\sqrt{3}$

実践問題 16

JFE ホールディングス

次の問いに答えよ．

1 次の計算をしなさい．

(1) $(2x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 8y^3) \div (x - 2y)$

(2) $\dfrac{x^2 + 8x + 16}{x^2 - 9} \div \dfrac{x+4}{x-3}$

2 A 地点と B 地点の距離が 20km あり，甲は A 地点を時速 4km で 7 時に，乙は同 A 地点を甲より 50 分遅れて時速 6km で B 地点に向って出発したとき，次の設問に答えなさい．ただし，甲，乙とも歩く速さは一定とする．

(1) 乙が甲に追いつくのは何時何分か．

(2) 乙が甲に追いつくのは A 地点より何 km の地点か．

(3) 乙が B 地点に到着したとき，甲は B 地点より何 km の地点を歩いているか．

3 $3x + 2y = 6$ のとき次の問に答えなさい．

(1) x 軸との交点

(2) y 軸との交点

(3) x 軸に関して対称な方程式

4 $-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $y = x^2 - 4x + 3$ の最大値，最小値を求めなさい．

【答】

1 (1) $2x^2 + xy + 4y^2$　(2) $\dfrac{x+4}{x+3}$

2 (1) 9 時 30 分　(2) 10km　(3) $\dfrac{10}{3}$km 手前

3 (1) $(2, 0)$　(2) $(0, 3)$　(3) $3x - 2y = 6$

4 $x = -1$ のとき最大値 8，$x = 1$ のとき最小値 0

実践問題17

新日本製鐵

1 次の問いに答えなさい．

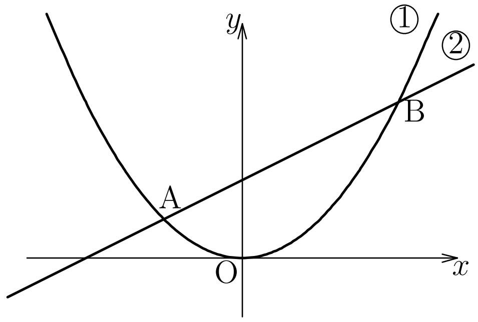
(1) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{4}\times\left(-\dfrac{1}{6}\right)$ を計算しなさい．

(2) $4x^2-24x+36$ を因数分解しなさい．

(3) $x=-1$ が $x^2+ax+2=0$ の解である時，この方程式のもう１つの解を求めなさい．

(4) $\dfrac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ の分母を有理化しなさい．

2 下の図のように放物線 $y=ax^2\ \cdots①$ と直線 $y=\frac{1}{2}x+b\ \cdots②$ が２点A，Bで交わっている．点Bの座標が $(4,4)$ のとき，次の問いに答えなさい．



(1) a，b の値を求めよ．

(2) 線分 AB の中点を通り，② の直線と垂直に交わる直線の式を求めなさい．

(3) 放物線 ① 上に四角形OCBAが台形となるような点Cをとる．この点Cの座標を求めなさい．

3 A，B２個のサイコロを同時にふり，出た目の数をそれぞれ a，b とする．次の問いに答えなさい．

(1) $a+b$ が３の倍数になるのは何通りあるか．

(2) $2a+b=10$ となる確率を求めなさい．

【答】

1 (1) $\dfrac{3}{40}$　(2) $4(x-3)^2$　(3) $x=-2$　(4) $5-2\sqrt{3}$

2 (1) $a=\dfrac{1}{4}$，$b=2$　(2) $y=-2x+\dfrac{9}{2}$　(3) $\mathrm{C}(2,1)$

3 (1) 12通り　(2) $\dfrac{1}{12}$

実践問題 18

新日本製鐵

1 以下の問に答えなさい．

(1) $\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{5}\right)$ を計算せよ．

(2) $72=2^a\times 3^b$ と表すとき，a と b の値を求めよ．

(3) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ を計算せよ．

(4) x^2+2x-8 を因数分解せよ．

(5) $\dfrac{ax-2}{3}-\dfrac{x-3a}{5}=1$ の解が $x=-3$ のとき，a の値を求めよ．

2 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=\frac{1}{2}x+1$ との交点を A, B とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 A, B の座標を求めよ．(ただし，点 A の x 座標 $<$ 点 B の x 座標)

(2) 原点 O と点 A, B を結んで作る $\triangle$OAB の面積を求めよ．

(3) 点 B を頂点とし，原点 O を通る放物線の方程式を求めよ．

3 大小 2 つのサイコロを同時に投げるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 出る目の数の和が 6 となる確率を求めよ．

(2) 出る目の数の積が 12 となる確率を求めよ．

(3) 大きいサイコロの出る目が 3 で，しかも 2 つのサイコロの出る目の数の和が 7 以上になる確率を求めよ．

【答】

1 (1) $\dfrac{7}{30}$　(2) $a=3, b=2$　(3) $\dfrac{4}{3}\sqrt{6}$　(4) $(x-2)(x+4)$　(5) $a=-\dfrac{8}{3}$

2 (1) $\mathrm{A}\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{B}(2,2)$　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) $y=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+2$

3 (1) $\dfrac{5}{36}$　(2) $\dfrac{1}{9}$　(3) $\dfrac{1}{12}$

実践問題19

デンソー

1 次の計算をしなさい.

(1) $\{(8+5)\times 2\} - 18 \div 3$

(2) $(-2a^2b) \div (-ab)^2 \times ab^2$

(3) $\dfrac{3x-4}{5} - \dfrac{2x+3}{3}$

(4) $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}$

(5) $\left(\sqrt{2} - \dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)^2$

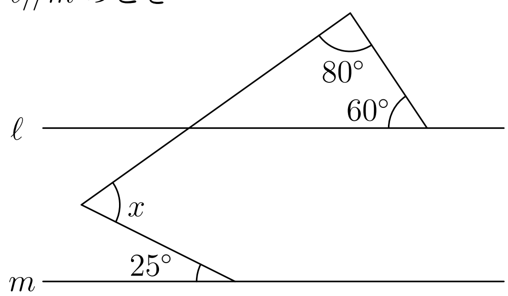
2 次の値を求めなさい.

(1) $(x-1)^2 - \dfrac{5}{6}(x-1) + \dfrac{1}{6} = 0$

(2) $\dfrac{x-5}{3} < \dfrac{3x-8}{2}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 5 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

(4) $\ell /\!/ m$ のとき



【答】

1 (1) 20　(2) $-2ab$　(3) $\dfrac{-x-27}{15}$　(4) $-\dfrac{1}{6}$　(5) 2

2 (1) $x = \dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{2}$　(2) $x > 2$　(3) $x = 4, y = 9$　(4) $x = 65^\circ$

実践問題 20

デンソー

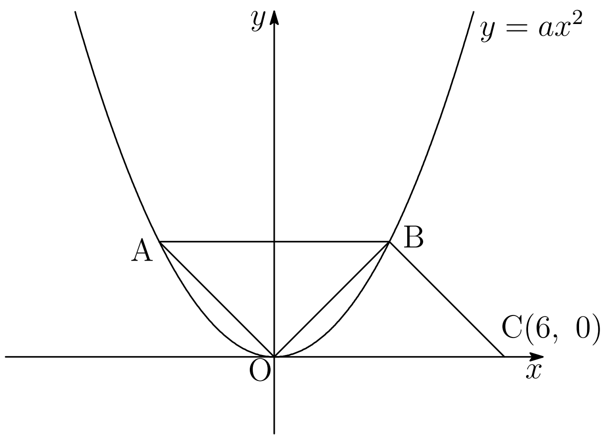
1 数 $\dfrac{3}{2}$, $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を大きい順に答えよ.

2 1 本の定価が 120 円の鉛筆がある．この鉛筆を A の店では定価の 10% 引きで売っている．B の店では 1 ダースまでは定価どおりで，1 ダースを超えると，超えた 1 本につき定価の 25% 引きで売っている．鉛筆を何本以上買うと，B の店の方が A の店で買うより安くなるか.

3 右図のように関数 $y = ax^2$ $(a > 0)$ のグラフ上に，2 点 A, B があり，線分 AB は x 軸に平行である．また，x 軸上に点 C(6, 0) があり，OB = BC である．このとき次の問いに答えなさい.

(1) 点 B の y 座標を a を使って表しなさい.

(2) $\triangle$AOB が y 軸を軸として 1 回転してできる立体の体積を V とし，$\triangle$BOC が x 軸を軸として 1 回転してできる立体の体積を V' とする．$V = V'$ となるときの a の値を求めなさい.



【答】

1 $\dfrac{3}{\sqrt{2}} > \dfrac{3}{2} > \sqrt{\dfrac{3}{2}} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2 21 本以上

3 (1) $9a$　(2) $a = \dfrac{1}{6}$

答

答 (数の計算と計量)

0.1 (1) 3097 (2) 1813 (3) 6076 (4) 170 (5) 214 (6) 14 (7) 1001 (8) 9 (9) 18 (10) 6 (11) 525 (12) 360

0.2 (1) 0.521 (2) 1 (3) 1 (4) 0.61 (5) 1 (6) 1.3 (7) 67.2 (8) 2.285 (9) 46.24 (10) 3.96

0.3 (1) 21 (2) 9 (3) 8 (4) 4 (5) -1 (6) 17 (7) 1 (8) -1 (9) 15 (10) -13.82 (11) -0.03 (12) 4 (13) 5

0.4 (1) 250 (2) 72 (3) 174 (4) 27 (5) 7 (6) -6 (7) -10 (8) 2 (9) -32 (10) 1 (11) -28 (12) -4 (13) -72 (14) -30 (15) 9 (16) -60 (17) -30 (18) 153 (19) -9 (20) 40

0.5 (1) 2683.2m (2) 987kg (3) 24時間43分39秒 (4) 3時間32分25秒 (5) 11254

0.6 (1) 0 (2) 0 (3) 24

0.7 (1) $-$, $\div$ (2) $\times$, $\div$ (3) $\div$, $\times$ (4) $-$, $+$ (5) $-$, $\div$

0.8 (1) $6543 + 2768 = 9313$ (2) $387 \times 3 = 1161$

0.9 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) × (5) ○ (6) ○ (7) × (8) ○

0.10 (1) $\frac{13}{12}$ (2) $\frac{5}{12}$ (3) $\frac{7}{30}$ (4) $\frac{29}{8}$ (5) $\frac{2}{15}$ (6) $\frac{1}{5}$ (7) $\frac{2}{3}$ (8) $\frac{3}{10}$ (9) 3 (10) $\frac{13}{5}$ (11) $\frac{29}{12}$ (12) $-\frac{4}{5}$ (13) 0 (14) $\frac{65}{12}$ (15) 1 (16) $\frac{1}{20}$ (17) $\frac{17}{4}$ (18) $\frac{60}{13}$ (19) $-\frac{13}{30}$ (20) $\frac{1}{2}$ (21) 3 (22) $\frac{5}{6}$ (23) $-\frac{1}{6}$ (24) $\frac{1}{2}$ (25) $-\frac{9}{4}$ (26) 1 (27) $-\frac{5}{2}$ (28) 3 (29) $\frac{29}{45}$ (30) $\frac{5}{7}$ (31) $-\frac{4}{21}$ (32) $-\frac{1}{6}$ (33) -4 (34) -36 (35) -30 (36) 72 (37) 3

0.11 (1) -1 (2) $\frac{17}{76}$ (3) $\frac{6}{85}$ (4) 2 (5) $\frac{4}{3}$ (6) $\frac{50}{49}$ (7) $\frac{1}{10}$ (8) 4 (9) $\frac{2}{7}$

0.12 (1) 9, 189 (2) 6, 24 (3) 3, 120 (4) 2, 180 (5) 6, 1260 (6) 6, 108 (7) 7, 2310

0.13 (1) 6枚 (2) 109 (3) 34 (4) 151

0.14 (1) 12と420, 60と84 (2) 3と120, 15と24

0.15 (1) 20% (2) 20% (3) 8% (4) 4.5%

0.16 (1) 8 (2) 400 (3) 116,000 (4) 384 (5) 173.6 (6) 890 (7) 320 (8) 11, 31, 12 (9) 550 (10) 6.25 (11) 160

0.17 (1) 1500 (2) 2,200 (3) 18 (4) 1,800 (5) 2 (6) 2 (7) 1.5

0.18 (1) 2100cc (2) 900円 (3) 2.5% (4) 10.4% (5) 1200人 (6) 60% (7) 3,680人 (8) 9日 (9) 5倍 (10) $B = 1.15A$ (11) 4円の損失

0.19 (1) 3 人　(2) 42 日目

0.20

小　数	分　数	百分率	歩　合
0.45	$\dfrac{9}{20}$	45%	4 割 5 分
1.25	$\dfrac{5}{4}$	125%	12 割 5 分
0.65	$\dfrac{13}{20}$	65%	6 割 5 分
0.001	$\dfrac{1}{1000}$	0.1%	1 厘

0.21 (1) 420 円　(2) $36,000$ 円　(3) $813,000$ 円　(4) 1 割 1 分 6 厘 8 毛

0.22 (1) 時速 72km　(2) 時速 24km　(3) 時速 48km

0.23 (1) 時速 100km　(2) 100m　(3) 電車 80m，時速 72km　(4) 2175m

0.24 (1) 6 日　(2) 1 時間 12 分　(3) 60 日　(4) 5 日　(5) 8 分

0.25 (1) $130°$　(2) $20°$　(3) $130°$　(4) $50°$　(5) $35°$　(6) $145°$

0.26 (1) $40°$　(2) $15°$　(3) $x = 26°$，$y = 38°$　(4) $66°$

0.27 (1) $\sqrt{39}$　(2) $5\sqrt{39}\,\mathrm{cm}^2$

0.28 (1) 10cm　(2) $5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$　(3) $25\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$　(4) $\dfrac{10}{3}\pi\,\mathrm{cm}$

0.29 (1) $74\,\mathrm{cm}^2$　(2) $852\,\mathrm{m}^2$

0.30 (1) $5\sqrt{2}$　(2) $50\,\mathrm{cm}$

0.31 (1) $6\,\mathrm{cm}$　(2) $25\,\mathrm{cm}^2$

0.32 (1) $\dfrac{110}{3}\pi\,\mathrm{cm}^2$　(2) $100 - 25\pi$ (cm^2)

0.33 (1) $6\pi - 9\sqrt{3}$　(2) $12\pi - 9\sqrt{3}$ (cm^2)　(3) $25\pi + 48$ (cm^2)

答 (方程式と不等式)

1.1 (1) $4x^2 + x + 3$　(2) $6a - 1$　(3) $5x^2 - 2x + 1$　(4) $-2a^2 + 3ab$

1.2 (1) $(3a-1)x-2a^2-5a$　(2) $x^2+(3y+2)x-y^2+4y-1$　(3) $(a-2)x^2+(3a+4)x+3a^2$
　(4) $(3y - 1)x^2 + (4y - 5)x + y^2 + 2y$

1.3 (1) $A + B = 5x^2 + 2x - 3$，$A - B = 3x^2 + 4x + 1$
　(2) $A + B = 4a^2 - 3a + 2$，$A - B = 8a^2 - 11a + 8$
　(3) $A + B = 8y^3 + y^2 - 6y - 2$，$A - B = -2y^3 - 3y^2 + 6y + 18$

1.4 (1) $4x^2 - 2x - 2$　(2) $6x^2 - 2x - 1$　(3) $14y - 6$　(4) $3ax + by - cz$

1.5 (1) x^9　(2) $-12a^6b^5$　(3) $-2a^5b^7$　(4) a^8b^7　(5) $72x^7y^2$　(6) $-x^{15}y^6$　(7) $-a^{12}$

1.6 (1) x^2-7x+1 (2) $-a^2b+a^2bc$ (3) $3x-5$

1.7 (1) $6x^3-2x^2+9x-3$ (2) a^3+a^2-5a+3 (3) $3x^3+10x^2-7x+4$ (4) x^4-1

1.8 (1) $4ab$ (2) $4x^2-12xy+9y^2$ (3) $9x^4+24x^2+16$ (4) 9 (5) a^2-b^2 (6) $4p^2-9$ (7) $-2ab$ (8) $x^2-7x+10$ (9) x^2-8x-9 (10) $a^2+2a-15$ (11) $m^2-15m+56$ (12) x

1.9 (1) $6x^2+23x+20$ (2) $15x^2+x-6$ (3) $14x^2-19x-40$ (4) $6x^2-9x-15$ (5) $6x^2-x-15$ (6) $6x^2-24$ (7) $3x^2-11x-4$ (8) $6x^2-11xy-10y^2$ (9) $8a^2-2ab-3b^2$ (10) $10x+21$ (11) $9xy$ (12) $2a^2+ab+3b^2$

1.10 (1) x^3+8 (2) x^3-1 (3) x^6-1 (4) x^6-1

1.11 (1) $x^3+6x^2+12x+8$ (2) $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$ (3) $x^3-3x^2+3x-y^3+3y^2-3y$ (4) $a^3-a^2b-ab^2+b^3$

1.12 (1) $x^2-2xy+y^2-4x+4y+4$ (2) $4x^2-12xy+9y^2-20x+30y+25$ (3) $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$ (4) $4yz+4zx$ (5) $a^2+2ab+b^2-c^2$ (6) $a^2+2ab+b^2-2a-2b-24$ (7) $x^2+4xy+4y^2+8x+16y+15$ (8) $x^4+x^2y^2+y^4$ (9) $x^6-27x^4+243x^2-729$

1.13 (1) $x^4+10x^3+35x^2+50x+24$ (2) x^4-13x^2+36 (3) $x^4-4x^3-7x^2+22x+24$ (4) x^8-1

1.14 (1) $2a^2+2b^2$ (2) $6a^2b+2b^3$

1.15 (1) 4, 12 (2) 5, 3, 11 (3) 18, 3

1.16 (1) $2a(4b-2c-d)$ (2) $x^2(1-a)$ (3) $3xy(x-2y)$ (4) $a(a^2-3a-1)$ (5) $2abc(2a-4b-3c)$ (6) $2ab^2c(3a^2-4bc)$ (7) $2a(a^2+3b^2)$ (8) $2b(3a^2+b^2)$

1.17 (1) $(a-b)(x+y)$ (2) $(x-y)(a-b)$ (3) $(a-1)(x-y)$ (4) $(x-1)(y-1)$ (5) $(x-2)(y+2)$ (6) $(a-b)(x-y)$ (7) $(a+b)(a^2+b^2)$

1.18 (1) $(x+1)^2$ (2) $(x+3)^2$ (3) $(x-5)^2$ (4) $(2x-1)^2$ (5) $(3x+1)^2$ (6) $(3x-1)^2$ (7) $(7x-2y)^2$ (8) $(x^2+y^2)^2$ (9) $(xy-5)^2$ (10) $a(a-2)^2$ (11) $x^2(x+1)^2$ (12) $(ad-bc)^2$

1.19 (1) $(2x+3y)(2x-3y)$ (2) $(2x+5y)(2x-5y)$ (3) $(2x+1)(2x-1)$ (4) $3(x+y)(x-y)$ (5) $3(x+5)(x-5)$ (6) $ab(x+a)(x-a)$ (7) $x^2(x+y)(x-y)$ (8) $(x+3)(x+5)$ (9) $(x+2)(x+4)$ (10) $(x-4)(x+6)$ (11) $(x-3)(x-5)$ (12) $(x-2)(x-5)$ (13) $(x-2)(x-3)$ (14) $(x-1)(x-5)$ (15) $(x+1)(x-3)$ (16) $(x-1)(x-9)$ (17) $(x+2)(x-8)$ (18) $(x-2)(x-6)$ (19) $(x+3)(x-4)$ (20) $(x+6)(x+14)$ (21) $(x-7)(x+13)$ (22) $x(x+1)(x+2)$ (23) $a(b-2)(b-5)$ (24) $xy(x+1)(x-4)$

1.20 (1) $(x+1)(3x+1)$ (2) $(x-2)(3x-1)$ (3) $(x-3)(2x+5)$ (4) $(x+2)(3x+5)$
(5) $(x+3)(2x-1)$ (6) $(x+3)(3x-4)$ (7) $(x+8)(2x-3)$ (8) $(x+2)(5x-1)$
(9) $(2a-1)(4a+3)$ (10) $(2x+5)(3x-2)$ (11) $(2x-7)(3x+5)$
(12) $(x+6y)(3x-y)$ (13) $(x-2y)(4x+3y)$ (14) $(2a-b)(3a+2b)$
(15) $(x+4y)(3x-5y)$

1.21 (1) $(x+3)(x^2-3x+9)$ (2) $(a-1)(a^2+a+1)$ (3) $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$
(4) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$ (5) $3(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$
(6) $x(2x-1)(4x^2+2x+1)$ (7) $2a(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$
(8) $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$ (9) $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
(10) $(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$ (11) $(x^2-y)(x^4+x^2y+y^2)$

1.22 (1) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$ (2) $(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)$
(3) $(a+1)^2(a-1)^2$ (4) $(2x+1)(2x-1)(3x+1)(3x-1)$
(5) $(x+1)^2(x-1)^2$

1.23 (1) $(x-4y+5)(x-4y-5)$ (2) $(x-y+1)(2x-2y-3)$ (3) $(a+b+2)^2$
(4) $(x-1)(x+4)(x^2+3x+6)$ (5) $(x+y+5)(x+y-8)$ (6) $x^2(x^2-5)$
(7) $(x+3)^2(x^2+6x+4)$ (8) $(x^2+5xy+3y^2)(x^2+5xy+7y^2)$
(9) $(x+y+1)(x+y-1)$ (10) $(a+b+c)(a+b-c)$
(11) $(a-b+c)(a-b-c)$ (12) $(x+y+z)(x-y-z)$
(13) $(a+b-c)(a-b+c)$ (14) $(x+y-1)(x-y+1)$
(15) $(a+b+2)(a-b-2)$ (16) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

1.24 (1) $(x+1)(x-1)(y+1)$ (2) $(a-1)(ab-1)$ (3) $(a-1)(x+1)(x-1)$
(4) $(a+b)(b-c)$ (5) $(x+y)(x-z)$ (6) $(ax+1)(x^2+1)$ (7) $(a-b)(2x-ab)$
(8) $(x+2)(x-2)(x-2a)$ (9) $(x+2)(x-2)(x-3a)$ (10) $(x+1)(x-1)(x+2y)$
(11) $(x+y)(x-y-z)$ (12) $a(b-1)(a-2c)$ (13) $(a+b)(a+2b+c)$
(14) $(x+1)(x+2)(x+y)$

1.25 (1) $(x+y-3)(x-y+1)$ (2) $(x+y+1)(x-3y-1)$ (3) $(x+y+3)(2x+y+2)$
(4) $(x+3y-1)(2x+2y+1)$ (5) $(x+2y-1)(2x-y+1)$ (6) $(x-3y+2)(2x+y-3)$

1.26 (1) $-(a-b)(b-c)(c-a)$ (2) $(a-b)(b-c)(c-a)$ (3) $-(a-b)(b-c)(c-a)$
(4) $(x+y)(y+z)(z+x)$

1.27 (1) $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$ (2) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ (3) $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$
(4) $(x^2+x-3)(x^2-x-3)$ (5) $(a^2+a+3)(a^2-a+3)$
(6) $(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$ (7) $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$
(8) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ (9) $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$
(10) $(2x^2+x+3)(2x^2-x+3)$ (11) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$
(12) $(ax+bx-ay+by)(ax-bx+ay+by)$

1.28 (1) 最大公約数 a^2b^2，最小公倍数 a^3b^3c (2) 最大公約数 1，最小公倍数 a^2x^2
(3) 最大公約数 x^2y，最小公倍数 x^4y^2 (4) 最大公約数 xy，最小公倍数 x^4y^4
(5) 最大公約数 $x-1$，最小公倍数 $\frac{1}{5}(x-1)^2(5x+3)$
(6) 最大公約数 $a+1$，最小公倍数 $(a+1)(a-2)(a+3)$
(7) 最大公約数 x^2+x+1，最小公倍数 $(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
(8) 最大公約数 $x+2$，最小公倍数 $\frac{1}{8}(x+2)(x-8)(2x+5)(4x+1)$
(9) 最大公約数 $x+1$，最小公倍数 $x^2(x+1)^2(x-3)(x^2-x+1)$

1.29 (1) $0.\dot{6}$ (2) $0.6\dot{8}\dot{1}$ (3) $0.\dot{7}1428\dot{5}$

1.30 (1) 5 (2) 4 (3) 2

1.31 (1) 6 (2) 3 (3) 0

1.32 (1) 14 (2) 17.3

1.33 (1) 14 (2) -18 (3) 1 (4) $-\sqrt{3}$

1.34 (1) $3\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{2}$ (3) $-2\sqrt{5}$ (4) $\sqrt{2}$ (5) $\sqrt{2}$ (6) 0 (7) $\sqrt{3}$ (8) 0 (9) 0 (10) $6\sqrt{2}$ (11) $3\sqrt{3}$ (12) $3\sqrt{2}$ (13) $7\sqrt{2}$ (14) $11\sqrt{3}$ (15) $8\sqrt{5}$ (16) $\sqrt{3}$ (17) 0 (18) $4\sqrt{2}$ (19) $-2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ (20) $4\sqrt{2}-10\sqrt{3}$ (21) $6+8\sqrt{2}$ (22) $-26\sqrt{2}+10\sqrt{3}$

1.35 (1) 6 (2) $3\sqrt{3}$ (3) $12\sqrt{5}$ (4) 18 (5) 10 (6) 14 (7) $10\sqrt{3}$ (8) 27 (9) 2 (10) $3\sqrt{3}$ (11) $10\sqrt{6}$ (12) $\sqrt{2}$ (13) 1 (14) 20 (15) 45 (16) $4-\sqrt{2}$

1.36 (1) $-1+\sqrt{3}$ (2) $3+\sqrt{3}$ (3) $52-16\sqrt{10}$ (4) $8-4\sqrt{3}$ (5) $24+12\sqrt{3}$ (6) 3 (7) 12 (8) 8 (9) 2 (10) 3 (11) 1 (12) 4

1.37 (1) $\sqrt{3}$ (2) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (3) $\sqrt{5}$ (4) $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ (5) $3\sqrt{6}$

1.38 (1) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (2) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ (3) $5+2\sqrt{6}$ (4) $-7-4\sqrt{3}$ (5) $\dfrac{11+2\sqrt{10}}{9}$
(6) $5-2\sqrt{3}$ (7) $1+\sqrt{2}$ (8) $\dfrac{3-\sqrt{15}}{3}$ (9) $3+2\sqrt{2}$ (10) 2

1.39 (1) $\sqrt{3}$ (2) 5 (3) 4 (4) $1-\sqrt{35}$ (5) 1 (6) 4 (7) 8 (8) $2\sqrt{35}$ (9) $-6\sqrt{2}$ (10) 0

1.40 (1) $2\sqrt{2}$ (2) $2\sqrt{6}+1$ (3) $4\sqrt{3}-2$ (4) $-\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (5) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{3}$
(6) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

1.41 (1) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ (2) $3+\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ (4) $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$ (5) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (6) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (7) $2+\sqrt{2}$ (8) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (9) $3+\sqrt{2}$ (10) $\sqrt{3}-1$ (11) 7 (12) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$
(13) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

1.42 (1) $ab+1$ (2) $\sqrt{2}$ (3) 1

1.43 (1) 1　(2) $\dfrac{7+4\sqrt{3}}{2}$

1.44 (1) $\sqrt{10}$　(2) 2　(3) 4　(4) $4\sqrt{10}$

1.45 (1) $\dfrac{9}{2}$　(2) 8　(3) 62，60　(4) 198，37

1.46 (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{x+y}+\sqrt{xy}=\dfrac{9}{4}$，$x^2y+xy^2=\dfrac{\sqrt{3}}{32}$　(2) $\dfrac{4}{5}$

1.47 $b=\sqrt{3}-1$，$(a+b)^2-ab=10+\sqrt{3}$

1.48 (1) $x=1$　(2) $x=5$　(3) $x=2$　(4) $x=12$　(5) $x=2$　(6) $x=3$　(7) $x=6$　(8) $x=-6$　(9) $x=\dfrac{1}{2}$　(10) $x=-2$

1.49 (1) $x=6$　(2) $x=-2$　(3) $x=3$　(4) $x=-4$　(5) $x=-3$　(6) $x=2$　(7) $x=-6$　(8) $x=4$　(9) $x=4$　(10) $x=3$　(11) $x=0$　(12) $x=1$　(13) $x=5$　(14) $x=5$　(15) $x=-\dfrac{1}{4}$　(16) $x=70$　(17) $x=2$　(18) $x=-5$

1.50 (1) $a=2$　(2) $a=-\dfrac{8}{3}$

1.51 $a\neq 2,\ 3$ のとき $x=\dfrac{1}{a-3}$，$a=2$ のとき すべての数，$a=3$ のとき 解なし

1.52 (1) $x>\dfrac{1}{2}$　(2) $x>4$　(3) $x>-1$　(4) $x<-\dfrac{7}{2}$　(5) $x>1$　(6) $x>-1$　(7) $x<1$

1.53 (1) $x\geqq -3$　(2) $x\geqq 96$　(3) $x>\dfrac{9}{11}$　(4) $x<60$　(5) $x<-1$　(6) $x<\dfrac{9}{5}$　(7) $x>-\dfrac{11}{29}$　(8) $x<-\dfrac{31}{2}$

1.54 (1) $x>2$　(2) $-3<x<2$　(3) $3<x\leqq 6$　(4) $-4\leqq x<21$　(5) $\dfrac{11}{12}<x\leqq 3$　(6) $\dfrac{41}{2}<x<24$　(7) $0<x<11$

1.55 (1) $x=1$　(2) $x=\dfrac{1}{3}$　(3) $x=1$　(4) $x=-1,\ 3$　(5) $x=-\dfrac{7}{2},\ 3$

1.56 (1) $-2<x<4$　(2) $-3<x<7$　(3) $-1<x<2$　(4) $\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 3$

1.57 (1) $x=0,-4$　(2) $x=0,-3$　(3) $x=-3,\ 4$　(4) $x=1,\ 3$　(5) $x=-2,-3$　(6) $x=3,\ 5$　(7) $x=-8,\ 5$　(8) $x=4,\ 9$　(9) $x=1$　(10) $x=-1$　(11) $x=-6,\ 4$　(12) $x=-2,\ 18$　(13) $x=-1,\ 4$　(14) $x=2,\ 3$　(15) $x=-1,-6$　(16) $x=-2,-3$

1.58 (1) $x=-\frac{1}{2},-2$ (2) $x=\frac{1}{2},\ 2$ (3) $x=-1,\ \frac{1}{2}$ (4) $x=4,-\frac{3}{2}$ (5) $x=4,\ \frac{1}{2}$
(6) $x=-6,\ \frac{1}{2}$ (7) $x=-7,-\frac{1}{2}$ (8) $x=1,-\frac{5}{3}$ (9) $x=2,\ \frac{1}{3}$ (10) $x=-4,\ \frac{2}{5}$
(11) $x=4,-\frac{3}{5}$ (12) $x=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$ (13) $x=-\frac{3}{2},\ \frac{2}{3}$ (14) $x=-\frac{5}{2},-\frac{2}{3}$
(15) $x=\frac{3}{2},\ \frac{2}{3}$ (16) $x=\frac{5}{3},-\frac{1}{2}$ (17) $x=3,-\frac{4}{3}$ (18) $x=\frac{1}{2},\ 2$

1.59 (1) $x=5,-1$ (2) $x=13,-11$

1.60 (1) $x=15,-17$ (2) $x=17,-15$ (3) $x=\frac{5}{2},-\frac{3}{2}$

1.61 (1) $x=\frac{7\pm\sqrt{5}}{2}$ (2) $x=\frac{-7\pm\sqrt{73}}{4}$ (3) $x=\frac{5\pm\sqrt{10}}{3}$ (4) $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$
(5) $x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{3}$ (6) $x=\frac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$ (7) $x=\frac{-4\pm2\sqrt{7}}{3}$ (8) $x=\frac{11\pm\sqrt{85}}{6}$

1.62 (1) $x=-6$ (2) $x=-2$ (3) $x=6$ (4) $x=-4$ (5) $a=2,\ \ x=3$

1.63 (1) $k=-1,\ 9$ (2) $m=-3,\ \frac{11}{7}$ (3) $k=1,-\frac{1}{3}$ (4) $m=3,\ 5$

1.64 (1) 3cm と 9cm (2) 12m と 15m (3) 60m^2 (4) 縦 14cm，横 9cm

1.65 (1) $x=-3,\ \ y=4$ (2) $x=5,\ \ y=-2$ (3) $x=3,\ \ y=2$ (4) $x=3,\ \ y=2$
(5) $x=1,\ \ y=5$ (6) $x=4,\ \ y=1$ (7) $x=4,\ \ y=1$ (8) $x=3,\ \ y=-1$
(9) $x=5,\ \ y=3$ (10) $x=-\frac{3}{4},\ \ y=1$ (11) $x=2,\ \ y=3$
(12) $x=5,\ \ y=-2$

1.66 (1) $x=\frac{1}{9},\ y=\frac{1}{3}$ (2) $x=5,\ y=3$ (3) $x=7,\ y=-10$

1.67 (1) $a=-1,\ b=2,\ c=-5$ (2) $x=2,\ y=4,\ z=6$ (3) $x=1,\ y=2,\ z=3$
(4) $x=1,\ y=2,\ z=3$ (5) $x=1,\ y=3,\ z=7$ (6) $x=-5,\ y=7,\ z=3$
(7) $x=5,\ y=3,\ z=1$ (8) $x=3,\ y=2,\ z=4$ (9) $x=3,\ y=4,\ z=5$
(10) $x=5,\ y=1,\ z=5$

1.68 (1) $x=5,\ y=2,\ z=3$ (2) $x=-3,\ y=-4,\ z=-1$
(3) $x=16,\ y=10,\ z=4$ (4) $x=3,\ y=\frac{8}{3},\ z=\frac{7}{2}$
(5) $x=\frac{5}{39},\ y=\frac{5}{16},\ z=\frac{5}{7}$ (6) $x=\frac{1}{14},\ y=\frac{1}{2},\ z=-\frac{1}{3}$

1.69 (1) $x=4,\ y=3,\ z=9$ (2) $x=5,\ y=4,\ z=3$ (3) $a=5,\ b=8,\ c=0,\ d=2$
(4) $x=\frac{1}{10},\ y=\frac{1}{20},\ z=\frac{1}{30}$ (5) $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{5}{2},\ z=-\frac{3}{2}$

1.70 (1) $(x,\ y)=(-1,\ -3),\ (2,\ 3)$　(2) $(x,\ y)=(0,\ -5),\ (4,\ 3)$
(3) $(x,\ y)=(-2,\ -3),\ (3,\ 2)$　(4) $(x,\ y)=(1,\ -1)$
(5) $(x,\ y)=(1,\ -1),\ (4,\ 2)$　(6) $(x,\ y)=(2,\ 5),\ \left(-\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{1}{2}\right)$
(7) $(x,\ y)=(3,\ -1),\ \left(-\dfrac{11}{3},\ \dfrac{7}{3}\right)$　(8) $(x,\ y)=(1,\ 1),\ (4,\ 2)$

1.71 (1) $(x,\ y)=(-4,-7),\ (-7,-4)$　(2) $(x,\ y)=(-1,\ 2),\ (2,-1)$　(3) $(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

1.72 (1) 21　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) 110　(4) -5

1.73 (1) $\dfrac{3}{2}$　(2) $\dfrac{11}{9}$

1.74 (1) $\dfrac{50}{47}$　(2) 1

1.75 (1) $4:3:5$　(2) $1:5:7$　(3) $4:3:4$

1.76 (1) 34　(2) 25，49　(3) $\frac{195}{90}$　(4) 17 と 18，-18 と -17　(5) $\frac{58}{5}$ と $\frac{28}{5}$ (6) 55 と 17

1.77 (1) 48　(2) 57　(3) 36 (4) 374

1.78 (1) 16 年後　(2) 12 年前　(3) 5 年前　(4) 父 39 才，子ども 13 才　(5) 3 年前
(6) 父 32 才，母 25 才，子 5 才　(7) 父 46 才，長子 20 才，次子 18 才，末子 16 才

1.79 (1) 5 円 30 枚，10 円 6 枚　(2) 40 円 55 枚，60 円 45 枚
(3) みかん 14 個，りんご 6 個　(4) ノート 110 円，鉛筆 90 円　(5) A150g，B120g
(6) 100 円 92 本，120 円 34 本　(7) 10 円 35 枚，20 円 25 枚，25 円 15 枚
(8) 10 円 10 枚，50 円 8 枚，100 円 12 枚

1.80 (1) 60 本　(2) 10 人，87 本　(3) 7 人　(4) 62 人，10 室
(5) (腰掛け，生徒) = (65, 285), (66, 289), (67, 293), (68, 297), (69, 301)
(6) 10 人　(7) 150 人　(8) 5 人　(9) 専用機 17 個，汎用機 4 個

1.81 (1) 350 人　(2) (i) 男 3,000 人，女 750 人　(ii) 2,850 人
(3) 男 927 人，女 408 人　(4) 男子 324 人，女子 528 人
(5) 男子 3680 名，女子 1620 名

1.82 (1) B 9,000 人，C 10,800 人　(2) 24cm
(3) 甲：収入 600 万円，支出 540 万円，乙：収入 360 万円，支出 300 万円
(4) A 社 1260 台，B 社 1620 台

1.83 (1) 棒 37cm，ひも 132cm　(2) 30 万円　(3) 60cm　(4) 4800 円　(5) 36 人
(6) 54 人　(7) 男 560 人，女 420 人

1.84 (1) 100g　(2) 50g　(3) 120g　(4) 40g　(5) 300g　(6) 50g　(7) 60g　(8) 12.5g
(9) 200g　(10) 100g 以上 600g 以下

1.85 (1) 8% 500g，20% 100g　(2)5% 200g，10% 300g　(3) 5% 2kg，8% 1kg
(4) 6% $\frac{1000}{3}$g，3% $\frac{500}{3}$g　(5) 2%　(6) A8%，B12%　(7) A8%，B18.5%
(8) 甲 10%，乙 5%，丙 15%

1.86 (1) 186cm　(2) 89 点　(3) 174cm　(4) 74.5 点　(5) 75 点

1.87 (1) 1,920 円　(2) 600 円，5 割増　(3) 10,000 円　(4) 1,500 円　(5) 400 円
(6) 3,000 円　(7) 960 円　(8) 1,300 円

1.88 (1) 9%の損失　(2) 4 割増

1.89 (1) 9%引　(2) 500 円　(3) 210 円　(4) 500 円　(5) 甲 3,000 円，乙 7,000 円

1.90 (1) 270km　(2) 300km，時速 $27\frac{3}{11}$km　(3) 7.5km　(4) 時速 25km

1.91 30km，18 分後

1.92 (1) 3.4km　(2) 時速 60km　(3) 5km　(4) 105m，時速 54km

1.93 (1) 時速 16km，120km　(2) 船：時速 10km，流れ：時速 2km　(3) 時速 1km
(4) 時速 2km　(5) 時速 9km　(6) 時速 14km　(7) 時速 7km

1.94 (1) $2\frac{2}{3}$ 時間　(2) $18\frac{6}{35}$ 分　(3) A60 日，B48 日，C40 日

1.95 8 日

1.96 4 時間 21 分 $49\frac{1}{11}$ 秒

1.97 (1) 縦 8m，横 12m　(2) (縦, 横) = (6cm, 7cm), (7cm, 6cm)　(3) 3cm，9cm

1.98 (1) 短辺 15cm，長辺 20cm　(2) 5m　(3) 12m と 15m　(4) 縦 2m，横 3m
(5) 60m^2　(6) 縦 5cm と横 7cm　(7) 30m　(8) 他の一辺 60cm，斜辺 65cm

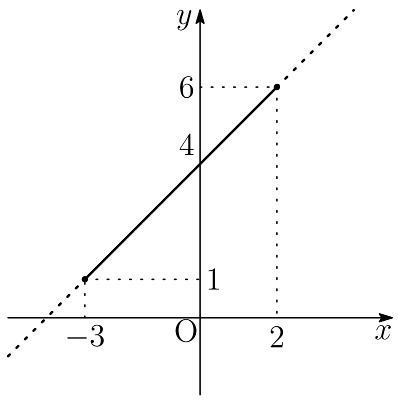
1.99 (1) 13cm　(2) 縦 14cm，横 9cm

答 (2 次関数)

2.1 (1) $y = \pi x^2$ $(x > 0)$　(2) $y = \frac{80}{x}$ $(x > 0)$　(3) $y = -x^2 + 10x$ $(0 < x < 10)$
2 次関数であるものは　(1)，(3)

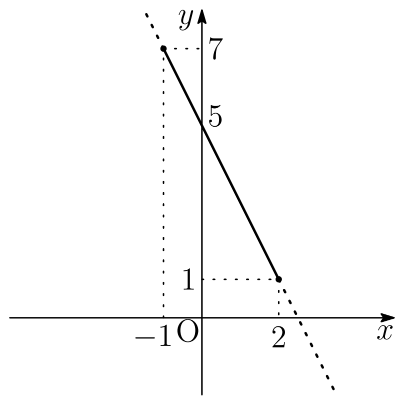
2.2 (1) $f(2) = -4$，$f(-1) = 5$，$f(0) = 2$　(2) $g(1) = 4$，$g(-2) = 7$，$g(0) = 1$

2.3 (1)



値域は $1 \leqq y \leqq 6$

(2)



値域は $1 \leqq y \leqq 7$

2.4 (1) 値域は $-2 \leqq y \leqq 7$，$x = -1$ で最小値 -2，$x = 2$ で最大値 7

(2) 値域は $-5 \leqq y \leqq 3$，$x = 0$ で最大値 3，$x = 4$ で最小値 -5

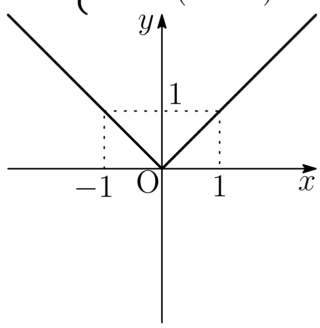
2.5 $2x + 3y + 6 = 0$

2.6 (1) $(3, 0)$ (2) $(0, 2)$ (3) $2x - 3y = 6$ (4) $-2x + 3y = 6$

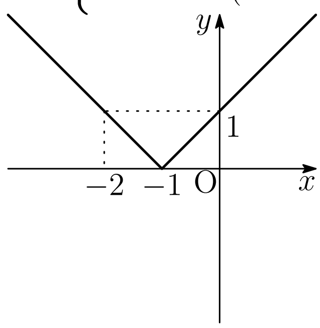
2.7 (1) $(2, 0)$ (2) $(0, 3)$ (3) $3x - 2y = 6$

2.8 (1) $y = 2x - 3$ (2) $y = -2x + 3$ (3) $y = -\dfrac{1}{2}x - 1$

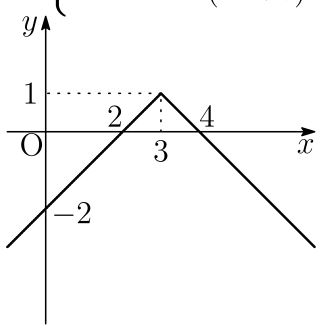
2.9 (1) $y = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$



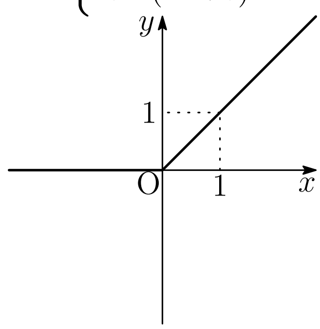
(2) $y = \begin{cases} x + 1 & (x \geqq -1) \\ -x - 1 & (x < -1) \end{cases}$



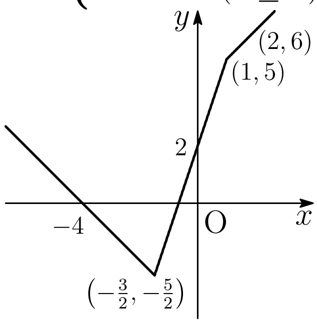
(3) $y = \begin{cases} -x + 4 & (x \geqq 3) \\ x - 2 & (x < 3) \end{cases}$



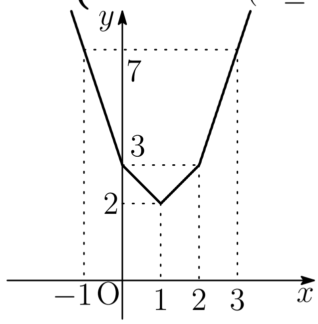
(4) $y = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$



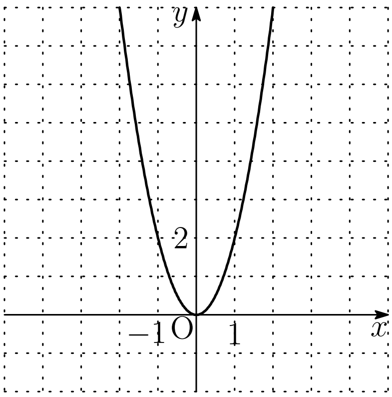
(5) $y = \begin{cases} x-4 & (x < -\dfrac{3}{2}) \\ 3x+2 & (-\dfrac{3}{2} \leqq x < 1) \\ x+4 & (1 \leqq x) \end{cases}$



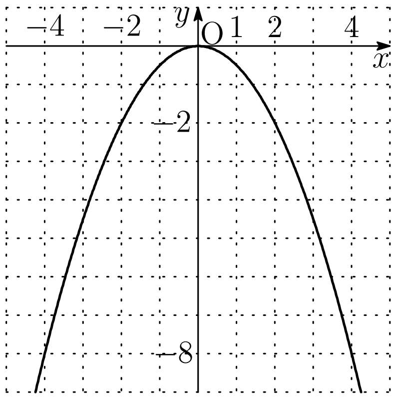
(6) $y = \begin{cases} -3x+3 & (x < 0) \\ -x+3 & (0 \leqq x < 1) \\ x+1 & (1 \leqq x < 2) \\ 3x-3 & (2 \leqq x) \end{cases}$



2.10 (1)　下に凸

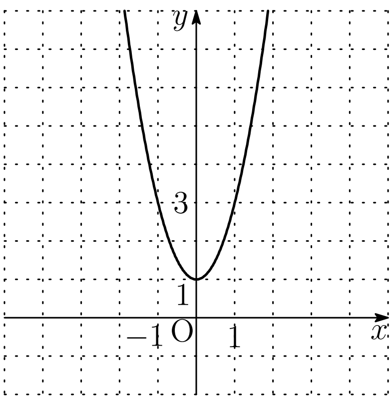


(2)　上に凸

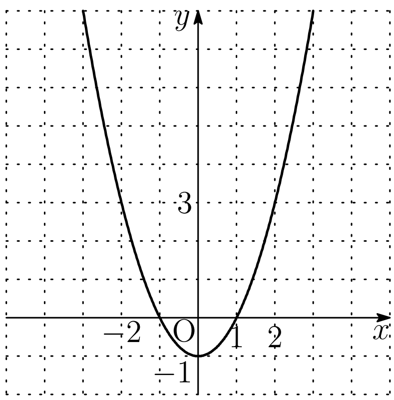


2.11 $a = \dfrac{3}{4}$,　$x = \pm 4$

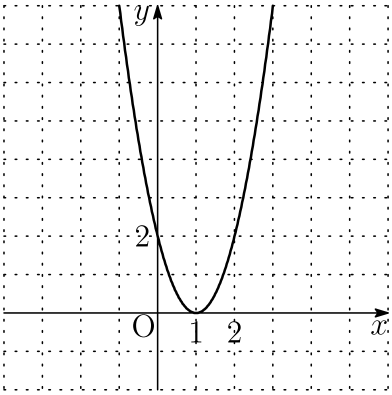
2.12 (1)　頂点 $(0,\ 1)$



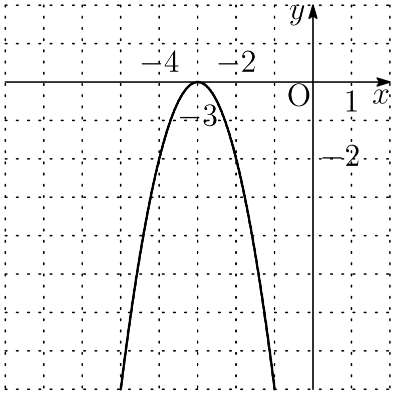
(2)　頂点 $(0, -1)$



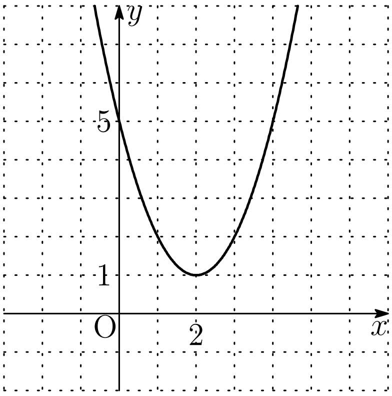
2.13 (1)　頂点 $(1,\ 0)$，軸 $x=1$



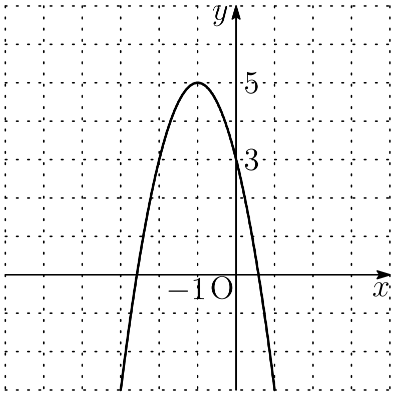
(2)　頂点 $(-3,\ 0)$，軸 $x=-3$



2.14 (1)　頂点 $(2,\ 1)$，軸 $x=2$



(2)　頂点 $(-1,\ 5)$，軸 $x=-1$



2.15 $y=(x-2)^2+1$

2.16 (1) $(x+3)^2-9$　(2) $(x-2)^2-4$　(3) $(x+1)^2-3$　(4) $(x-3)^2-4$　(5) $2(x+1)^2+1$

(6) $-(x+3)^2+5$　(7) $2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{7}{2}$　(8) $-3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

2.17 (1) $-4,\ -1$　(2) $-x^2,\ -1,\ 4$

2.18 (1) 頂点 $(4,5)$，軸 $x=4$　(2) 頂点 $\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{7}{2}\right)$，軸 $x=-\dfrac{3}{2}$

(3) 頂点 $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{25}{8}\right)$，軸 $x=\dfrac{3}{4}$　(4) 頂点 $(2,4)$，軸 $x=2$

(5) 頂点 $\left(-\dfrac{7}{6},\dfrac{23}{12}\right)$，軸 $x=-\dfrac{7}{6}$　(6) 頂点 $(-2,-2)$，軸 $x=-2$

2.19 (1) $y=2x^2-5$　(2) $y=-x^2-4x$

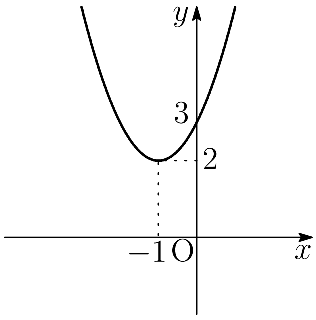
2.20 (1) 頂点 $(1,4)$　(2) $y=-3x^2-6x-7$

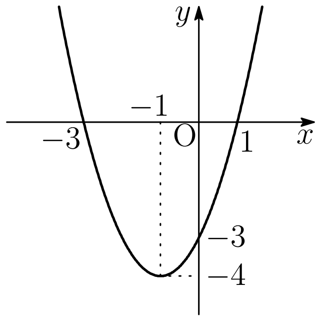
2.21 (1) $(1,-3)$　(2) $y=-2x^2-4x+1$　(3) $y=2x^2-20x+44$

2.22 (1) $y=x^2$ (2) $y=x^2-2$

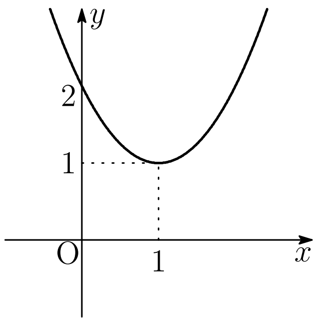
2.23 (1) $y=x^2-2x$　(2) $y=x^2-4x,\ y=x^2+4x$

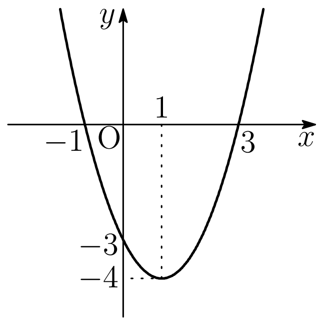
2.24 (1)　頂点 $(-1,\ 2)$，軸 $x=-1$　　(2)　頂点 $(-1,-4)$，軸 $x=-1$



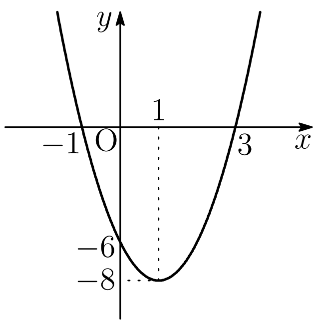


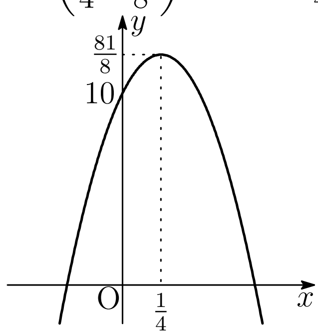
(3)　頂点 $(1,\ 1)$，軸 $x=1$　　(4)　頂点 $(1,-4)$，軸 $x=1$





(5)　頂点 $(1,-8)$，軸 $x=1$　　(6)　頂点 $\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{81}{8}\right)$，軸 $x=\dfrac{1}{4}$





2.25 (1) $x=2$ のとき最小値 -5　(2) $x=2$ のとき最大値 48

2.26 (1)—頂点 $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$，軸 $x=-\dfrac{1}{2}$，$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{4}$

(2) 頂点 $(2,5)$，軸 $x=2$，$x=2$ のとき最大値 5

2.27 $m=6$，$n=25$

2.28 $a=18$

2.29 (1) $x=5$ のとき最小値 -21　(2) $a=-1,\ 2$

2.30 (1) $y=-\dfrac{9}{8}m^2+2m$　(2) $m=\dfrac{8}{9}$ のとき最大値 $\dfrac{8}{9}$

2.31 2 秒後，20m

2.32 (1) $x=0$ で最大値 3，$x=2$ で最小値 -1
(2) $x=3$ で最大値 5，$x=1$ で最小値 1
(3) $x=4$ で最大値 3，$x=2$ で最小値 -1
(4) $x=-1$ で最大値 8，$x=1$ で最小値 0
(5) $x=-2$ で最大値 5，$x=2$ で最小値 -11

2.33 $x=0$ のとき最大値 72，$x=1$ のとき最小値 57

2.34 $-35 \leqq (2x-1)(5-x) \leqq \dfrac{81}{8}$

2.35 下，3，-2，10，-3，2

2.36 (1) $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=1$　(2) $x=2$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$，$x=4$ のとき最小値 $-\dfrac{7}{2}$

2.37 $(a,b)=(0,4)$，$(4,0)$

2.38 (1) 直角をはさむ 2 辺がともに 12cm　(2) 直角をはさむ 2 辺がともに 12cm

2.39 半径 $\dfrac{\ell}{4}$，面積 $\dfrac{\ell^2}{16}$

2.40 (1) $x=1$，$y=1$ のとき最小値 2　(2) $x=\dfrac{15}{4}$，$y=\dfrac{5}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{75}{4}$

2.41 (1) 55 円　(2) 150 円　(3) 125 円　(4) 22,500 円

2.42 $y=2(x-3)^2-5$

2.43 $y=-(x-1)^2+4$

2.44 $y=x^2-4x+3$，$(2,-1)$

2.45 $m=2$，$n=-1$，$x=-1$ のとき最小値 -2

2.46 (1) $a=b=c=\dfrac{1}{2}$　(2) $y=2x^2-3x+2$　(3) $y=x^2+3x+2$

2.47 $a=-2$，$b=4$，$c=4$

2.48 (1) 0，-6　(2) 0，-1，3　(3) 1，1　(4) 小，1，-8

2.49 A$(-1-\sqrt{3},\ 0)$，B$(-1,\ 3)$，C$(0,\ 2)$，D$(-1+\sqrt{3},\ 0)$

2.50 (1) $x=-2$ のとき最小値 -9　(2) $(0,-5)$　(3) $(-5,\ 0)$，$(1,\ 0)$

2.51 (1) $y=2x^2-12x+16$　(2) $(2,\ 0)$，$(4,\ 0)$　(3) $(3,-2)$

2.52 (1) $a=2$，$b=-3$，$c=-2$　(2) $\dfrac{5}{2}$　(3) $x=\dfrac{3}{4}$ のとき最小値 $-\dfrac{25}{8}$

2.53 $a=2$ のとき $(1,0)$，$a=-2$ のとき $(-1,0)$

2.54 (1) $(-2,\ 9)$，$(2,\ 1)$　(2) $(-2,\ 5)$，$(3,\ 0)$　(3) $(-2,-1)$，$(3,\ 9)$

2.55 A$(1,1)$，B$(-2,4)$

2.56 (1) A$(-2,4)$，B$(4,16)$　(2) $6\sqrt{5}$　(3) $1:2$

2.57 $a=3$，$b=-2$，B$B(1,1)$

2.58 (1)　$m=\dfrac{3}{4}$ (2)　$y=3$ (3)　$y=\dfrac{3}{2}x+6$

2.59 (1) $\mathrm{P}(3, 3)$ (2) $y = -x + 6$ (3) 27

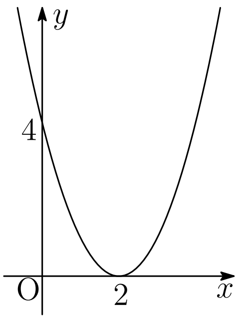
2.60 (1) $y = 2x^2$ (2) $y = 2x + 4$ (3) $\mathrm{Q}(2, 8)$

2.61 (1) $a = \dfrac{1}{4},\ b = 2$ (2) $y = -2x + \dfrac{9}{2}$ (3) $\mathrm{C}(2, 1)$

2.62 (1) $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right),\ \mathrm{B}(2, 2)$ (2) $\dfrac{3}{2}$ (3) $y = -\dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

2.63 (1) $(-3, 0),\ \left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ (2) $(-3, 0),\ (1, 4)$

2.64 (1)



(2) $\mathrm{B}(6, 16)$ (3) $\mathrm{C}(3, 1)$

2.65 頂点 $(1, 10)$，$a = 4,\ -8$

2.66 $m = 2, -10$

2.67 (1) $0 < x < 1$ (2) $-1 < x < 4$ (3) $x < -1,\ 4 < x$ (4) $-6 < x < 1$
(5) $-1 \leqq x \leqq 6$ (6) $x < -5,\ 2 < x$ (7) $x < -2,\ 5 < x$ (8) $-2 < x < 3$
(9) $x < -1,\ 5 < x$ (10) $x < -3,\ 4 < x$ (11) $-3 < x < 1$ (12) $-6 < x < 9$
(13) $-\dfrac{1}{2} < x < 5$ (14) $x < -\dfrac{1}{2},\ 5 < x$ (15) $-3 < x < -\dfrac{1}{2}$ (16) $x < \dfrac{1}{2},\ 2 < x$
(17) $-\dfrac{1}{2} < x < 4$ (18) $x < -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{3} < x$ (19) $-\dfrac{4}{3} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$
(20) $x < \dfrac{-2-\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{-2+\sqrt{6}}{2} < x$

2.68 (1) すべての実数 (2) $\dfrac{3}{2}$ 以外のすべての実数 (3) $x = \dfrac{3}{2}$ (4) 解はない

2.69 (1) すべての実数 (2) すべての実数 (3) 解はない (4) 解はない

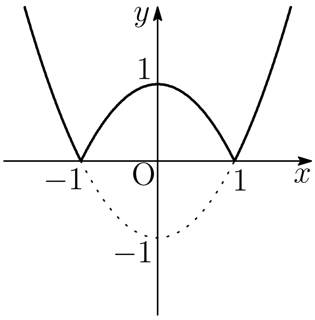
2.70 (1) $x < 0,\ 1 < x$ (2) $-4 < x < 18$ (3) $-1 \leqq x \leqq \dfrac{4}{3}$ (4) $x \leqq -\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2} \leqq x$
(5) $x < 3,\ 4 < x$ (6) $x < -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{3} < x$ (7) $\dfrac{1}{3} < x < 3$ (8) $-\dfrac{1}{4} < x < 1$
(9) $x < -\dfrac{1}{2},\ 0 < x$ (10) $x \leqq -4,\ 6 \leqq x$ (11) $1 - \sqrt{6} \leqq x \leqq 1 + \sqrt{6}$
(12) 2 以外のすべての実数 (13) $x = 1$ (14) 解はない

2.71 $x = 2$

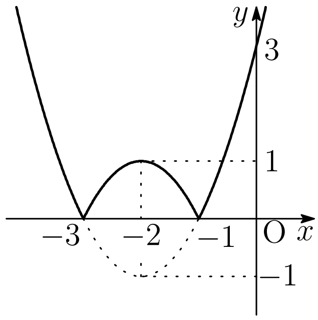
2.72 7 個

2.73 (1) $x = -\dfrac{3}{2},\ 4$ (2) $x < -\dfrac{3}{2},\ 4 < x$ (3) $x = \dfrac{5}{4}$ のとき最小値 $-\dfrac{121}{8}$

2.74 (1)　図の実線部分



(2)　図の実線部分



2.75 $x=1$ のとき最大値 4，$x=-1$ のとき最小値 0

2.76 (1) $a=-1,\ b=-6$　(2) $p=5,\ q=-1$

2.77 (1) $k<-3,\ 5<k$　(2) $k<2,\ 8<k$　(3) $k \leqq 5$　(4) $m>-12$

2.78 (1) $-\dfrac{7}{2} \leqq x < 1$　(2) $4<x<5$　(3) $-3<x \leqq 0,\ 2 \leqq x < 4$
(4) $-3<x<-2,\ 1<x<2$　(5) $-5<x<-1,\ 3<x<7$　(6) $-3<x<-1$
(7) $-2<x \leqq 1,\ 3 \leqq x < 5$　(8) $-4<x<-2,\ 3<x<5$
(9) $-4<x<-2,\ 1<x<5$　(10) $x<-1,\ \dfrac{3}{2}<x<3$
(11) $-2<x<-\dfrac{2}{3},\ 2<x$　(12) $-5<x<-3,\ \dfrac{5}{2}<x<4$
(13) $1<x \leqq \dfrac{3}{2},\ 5 \leqq x < 7$　(14) $-7<x<-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{3}<x<5$　(15) $\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{3}{2}$
(16) $-5<x<-3,\ 1<x<3$　(17) $4-2\sqrt{7}<x<2,\ 5<x<4+2\sqrt{7}$
(18) $-1-\sqrt{26}<x<-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{3}<x<-1+\sqrt{26}$

2.79 $-1<m<4$

2.80 (1) $0<c<3$　(2) $a=0$　(3) $-6<m<2$

2.81 (1) $x=1,\ 4$　(2) $0<x<2$　(3) $-1<x<1$

2.82 (1) 1 辺を 5cm より短くするか，8cm より長くする．
(2) 1 辺の長さを 5cm 以上 20cm 以下にする．

答 (図形と計量)

3.1 (1) $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{29}},\ \cos\theta=\dfrac{5}{\sqrt{29}},\ \tan\theta=\dfrac{2}{5}$
(2) $\sin\theta=\dfrac{4}{5},\ \cos\theta=\dfrac{3}{5},\ \tan\theta=\dfrac{4}{3}$

3.2 (1) $\sin\theta=\dfrac{12}{13},\ \cos\theta=\dfrac{5}{13},\ \tan\theta=\dfrac{12}{5}$
(2) $\sin\theta=\dfrac{8}{17},\ \cos\theta=\dfrac{15}{17},\ \tan\theta=\dfrac{8}{15}$

3.3 $\sin A = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan A = 2\sqrt{2}$

3.4 $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

3.5

θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

3.6 $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$

3.7 (1) 0.5878 (2) 0.5878 (3) 0.2679

3.8 (1) $\theta = 23^\circ$ (2) $\theta = 37^\circ$ (3) $\theta = 51^\circ$

3.9 (1) $\theta \fallingdotseq 29^\circ$ (2) $\theta \fallingdotseq 22^\circ$

3.10 (1) $\mathrm{BC} = 5\sqrt{3}$, $\mathrm{AC} = 5$ (2) $\mathrm{BC} = 2\sqrt{3}$

3.11 4.5 m

3.12 $15(\sqrt{3}+1)$ m

3.13 15.2 m

3.14 $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$, $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$

3.15 $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

3.16 $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

3.17 $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

3.18 (1) $\cos 35^\circ$ (2) $\sin 20^\circ$ (3) $\dfrac{1}{\tan 27^\circ}$

3.19 (1) 1 (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) 2 (4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (5) $\sqrt{2}$ (6) $\dfrac{7}{4}$ (7) $3 - 2\sqrt{2}$ (8) 1

3.20 (1) $\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$, $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

(2) $\sin 135^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 135^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 135^\circ = -1$

(3) $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\tan 0^\circ = 0$

(4) $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\tan 180^\circ = 0$

3.21 1

3.22 (1) 0.7660 (2) -0.8090 (3) -1.5399

3.23 $-\sqrt{6}$

3.24 (1) $\theta = 45^\circ,\ 135^\circ$ (2) $\theta = 150^\circ$

3.25 (1) $\theta = 30^\circ$ (2) $\theta = 135^\circ$

3.26 (1) $\cos\theta = -\dfrac{4}{5},\ \ \tan\theta = -\dfrac{3}{4}$

(2) $\sin\theta = \dfrac{3}{5},\ \ \tan\theta = \dfrac{3}{4}$

(3) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \ \cos\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

3.27 2

3.28 (1) $\dfrac{1}{4}$ (2) $-\dfrac{20}{9}$ (3) $\dfrac{11}{16}$

3.29 (1) $\dfrac{a^2-1}{2}$ (2) $\dfrac{2}{a^2-1}$ (3) $\dfrac{3a-a^3}{2}$

3.30 (1) $\dfrac{23}{32}$ (2) $\dfrac{1}{2}$

3.31 (1) $\sqrt{3}$ (2) 5 (3) 1 (4) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

3.32 $A = 90^\circ$

3.33 $1000\sqrt{3}$ m

3.34 40 km

3.35 $B = 30^\circ,\ \ c = 2$

3.36 (1) $\sqrt{13}$ (2) 2 (3) 7

3.37 (1) $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ cm (2) $\sqrt{367}$ cm

3.38 (1) $\cos A = \dfrac{1}{2},\ \ A = 60^\circ$ (2) $\cos B = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \ B = 45^\circ$

(3) $\cos C = -\dfrac{1}{2},\ \ C = 120^\circ$

3.39 (1) $A = 120^\circ$ (2) $R = \sqrt{39}$

3.40 (1) $20\sqrt{3}$ (2) $48\sqrt{2}$

3.41 $\dfrac{255}{4}$

3.42 (1) $3\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{13}$

3.43 (1) $10\sqrt{3}$ cm^2 (2) 7cm (3) $\sin B = \dfrac{4\sqrt{3}}{7},\ \ \sin C = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

3.44 (1) $20\sqrt{3}$ cm^2 (2) $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$ cm^2

3.45 $R = \dfrac{7\sqrt{3}}{3},\ \ r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3.46 (1) $R=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}a$ (2) $r=\dfrac{\sqrt{3}-1}{6}a$

3.47 (1) $\triangle\mathrm{AOD}:\triangle\mathrm{BOC}=16:49$ (2) $x:y=3:1$

3.48 ア : イ : ウ $=1:7:19$

3.49 (1) 10cm (2) $1:27$

3.50 (1) $1500\pi\ \mathrm{cm}^3$ (2) $V_1:V_2:V_3=3:2:1$

3.51 (1) $\sqrt{21}\,\mathrm{cm}$ (2) $\dfrac{4}{3}\sqrt{21}\pi\,\mathrm{cm}^3$ (3) $14\pi\,\mathrm{cm}^2$

答 (式と証明)

4.1 (1) 商 $2x^2-x+3$，余り -2 (2) 商 $x^2+6x+16$，余り 47
(3) 商 $3x^2-x+1$，余り 0 (4) 商 p^2+3p+2，余り 0 (5) 商 $x-2$，余り $6x+1$
(6) 商 $2x-3$，余り -5 (7) 商 a^2-3a+1，余り 0
(8) 商 $2x^2+xy+4y^2$，余り 0

4.2 (1) $A=x^3-x^2-7x+5$ (2) $B=x^2-3x+4$

4.3 x^2+2x-3 と $2x^2+3x-5$

4.4 (1) $-\dfrac{b^4c^7}{3a^4d}$ (2) $\dfrac{1}{x-2}$ (3) $x+1$ (4) $\dfrac{x+3}{2(x-1)}$ (5) $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}$ (6) $x+1$

4.5 (1) $\dfrac{2a}{3b^2xy}$ (2) $\dfrac{2y^3}{x^3}$ (3) $\dfrac{135x^3y^3}{8a^2}$ (4) $-\dfrac{4}{a^4b}$ (5) $\dfrac{3}{2}$ (6) 1 (7) $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

4.6 (1) 1 (2) $\dfrac{x-2}{x+4}$ (3) $\dfrac{a-6}{a-3}$ (4) $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$ (5) $\dfrac{(x-1)(2x+1)}{(x+3)(x-4)}$ (6) $\dfrac{y}{x}$
(7) $\dfrac{1}{x+2y}$ (8) $\dfrac{x-2}{x-1}$ (9) $\dfrac{x}{3}$

4.7 (1) 1 (2) 1 (3) $\dfrac{1}{x+1}$ (4) $\dfrac{1}{x+2}$ (5) 2

4.8 (1) $\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}$ (2) $\dfrac{1}{x+4}$ (3) 0 (4) $\dfrac{2(3x+2)}{(x+2)(x-2)}$ (5) $\dfrac{3}{x+y}$ (6) $\dfrac{x+y}{x-y}$
(7) $\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$ (8) $\dfrac{a}{a-b}$ (9) $\dfrac{x}{x+1}$

4.9 (1) $-\dfrac{2}{c}$ (2) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ (3) 0 (4) $\dfrac{a+2}{(a+1)(a+3)}$ (5) $\dfrac{1}{a+3}$
(6) $-\dfrac{y}{x(x-2y)}$ (7) $\dfrac{4}{x+2}$ (8) 3

4.10 (1) $-\dfrac{1}{ab}$ (2) 1

4.11 (1) $\dfrac{4x}{x^4-1}$ (2) $\dfrac{8}{1-x^8}$

4.12 $\dfrac{20x-50}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$

4.13 (1) $ab(a-b)$ (2) $\dfrac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$ (3) $\dfrac{3}{3x+1}$ (4) $\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ (5) $\dfrac{y}{x}$

4.14 (1) $a+1$ (2) $-x-6$ (3) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}$ (4) $-\dfrac{a}{b}$ (5) $\dfrac{x+3}{x-2}$ (6) $x-1$ (7) $1+x$ (8) x

4.15 (1) $-\dfrac{1}{x}$ (2) $\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$

4.16 $\dfrac{2}{a^3}$

4.17 $\dfrac{x-1}{x}$

4.18 $\dfrac{1}{bc}>\dfrac{1}{ca}>\dfrac{1}{ab}$

4.19 $-\dfrac{4a^2}{a^4-1}$

4.20 (1) $\dfrac{6}{31}$ (2) 10 (3) 14, 4 (4) 18

4.21 (1) 2 (2) 3 (3) -2 (4) 4

4.22 (1) $\sqrt{3}$ (2) 1 (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) 2 (5) $2\sqrt{3}$

4.23 (1) 14, 194 (2) $\dfrac{6}{5}\sqrt{5}$ (3) $\sqrt{5}$

4.24 (1) $A=2,\ B=-5,\ C=12$ (2) $a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{1}{2}$
(3) $A=3,\ B=-2,\ C=-1$

4.25 $a+b+c=0$ から

$$a+b=-c,\ \ b+c=-a,\ \ c+a=-b$$

よって $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$$=(-c)(-a)(-b)+abc=0$$

4.26 $a+b+c=0$ から

$$a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b$$

よって $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+3$

$$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3$$

$$=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3$$

$$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+3$$

$$=-1-1-1+3=0$$

4.27 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　　$a=bk,\ \ c=dk$

よって
$$\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{bk{\cdot}b+dk{\cdot}d}{bk{\cdot}b-dk{\cdot}d}=\frac{k(b^2+d^2)}{k(b^2-d^2)}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$$
$$\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\frac{(bk)^2+(dk)^2}{(bk)^2-(dk)^2}=\frac{k^2(b^2+d^2)}{k^2(b^2-d^2)}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$$

したがって
$$\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$$

4.28 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=k$ とおくと　　$x=ak,\ \ y=bk$

(1) よって
$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{(ak)^2}{a^2}=k^2$$
$$\frac{x^2-xy+y^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{(ak)^2-ak{\cdot}bk+(bk)^2}{a^2-ab+b^2}$$
$$=\frac{k^2(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}=k^2$$

したがって
$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{x^2-xy+y^2}{a^2-ab+b^2}$$

(2) よって
$$\frac{pa+rx}{qa+sx}=\frac{pa+r{\cdot}ak}{qa+s{\cdot}ak}=\frac{a(p+rk)}{a(q+sk)}=\frac{p+rk}{q+sk}$$
$$\frac{pb+ry}{qb+sy}=\frac{pb+r{\cdot}bk}{qb+s{\cdot}bk}=\frac{b(p+rk)}{b(q+sk)}=\frac{p+rk}{q+sk}$$

したがって
$$\frac{pa+rx}{qa+sx}=\frac{pb+ry}{qb+sy}$$

4.29

(1) $$\begin{aligned} a^2+b^2-2(a+b-1) &= a^2-2a+1+b^2-2b+1 \\ &= (a-1)^2+(b-1)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

したがって　$a^2+b^2 \geqq 2(a+b-1)$

等号が成り立つのは，$a-1=0$ かつ $b-1=0$，

すなわち　$a=1$，$b=1$ のときである．

(2) $$\begin{aligned} a^2-ab+b^2 &= a^2-ab+\frac{b^2}{4}+\frac{3}{4}b^2 \\ &= \left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

したがって　$a^2-ab+b^2 \geqq 0$

等号が成り立つのは，$a-\dfrac{b}{2}=0$ かつ $b=0$，

すなわち　$a=0$，$b=0$ のときである．

(3) $$\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx) \\ &= \frac{1}{2}\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\} \\ &= \frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geqq 0 \end{aligned}$$

したがって　$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$

等号が成り立つのは，$x-y=0$ かつ $y-z=0$ かつ $z-x=0$，

すなわち　$x=y=z$ のときである．

4.30

(1) $a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$$

よって　$a+\dfrac{1}{a} \geqq 2$

(2) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1$

$$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$$

ここで，$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{b}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2 \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2=4$$

よって　　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 4$

(3) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right)=1+\dfrac{ad}{bc}+\dfrac{bc}{ad}+1$

$$=\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}+2$$

ここで，$\dfrac{ad}{bc}>0$，$\dfrac{bc}{ad}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}+2 \geqq 2\sqrt{\frac{ad}{bc}\cdot\frac{bc}{ad}}+2=4$$

よって　　$\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right) \geqq 4$

答 (複素数と方程式)

5.1 (1) $x=5$，$y=4$　(2) $x=-2$，$y=3$　(3) $x=-2$，$y=-2$

5.2 (1) $1+7i$　(2) $14+8i$　(3) $27+11i$　(4) $23-7i$　(5) 17　(6) 26　(7) i　(8) 25
(9) i　(10) $-3+4i$　(11) 10　(12) $15-3\sqrt{3}\,i$　(13) $-2+2i$　(14) 8

5.3 $\dfrac{11}{25}+\dfrac{2}{25}i$

5.4 (1) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}i$　(2) i　(3) $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$　(4) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i$　(5) $-\dfrac{5}{13}-\dfrac{1}{13}i$　(6) $-i$　(7) $-i$
(8) 2　(9) 5　(10) $\dfrac{11}{10}-\dfrac{3}{10}i$

5.5 (1) -10　(2) -6　(3) $4+\sqrt{2}\,i$　(4) $-2+8\sqrt{3}\,i$

5.6 $t=\dfrac{3\pm 3i}{2}$

5.7 (1) $x=\dfrac{-2\pm 9i}{5}$　(2) $x=\dfrac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{7}\,i}{6}$　(3) $y=\dfrac{-1\pm\sqrt{35}\,i}{3}$

5.8 (1) 異なる 2 つの実数解　(2) 異なる 2 つの実数解　(3) 重解
(4) 異なる 2 つの虚数解　(5) 異なる 2 つの虚数解　(6) 重解

5.9 (1) $k < -3, 5 < k$ (2) $k < 2,\ 8 < k$ (3) $a = 2, 6$ (4) $0 < k < \dfrac{1}{2}$ (5) $k \leqq 5$

5.10 2 次方程式の 2 つの解を α, β とすると

(1) $\alpha+\beta = 2,\ \alpha\beta = 3$ (2) $\alpha+\beta = -\dfrac{2}{3},\ \alpha\beta = -\dfrac{5}{3}$ (3) $\alpha+\beta = \dfrac{4}{3},\ \alpha\beta = \dfrac{1}{2}$

5.11 (1) (i) -4 (ii) 1 (iii) 14 (2) (i) $-\dfrac{5}{3}$ (ii) $\dfrac{1}{3}$ (iii) $\dfrac{19}{9}$ (3) (i) 2 (ii) 2 (iii) 0

(iv) -4 (4) 1 (5) (i) 3 (ii) $\dfrac{3}{4}$ (6) (i) 81 (ii) 16 (7) 63 (8) 2

5.12 (1) $k = \dfrac{5}{4}$ (2) $m = -\dfrac{3}{2},\ 6$

(3) $a = -10$ のとき $x = 4,\ 6$ $a = \dfrac{35}{6}$ のとき $x = -\dfrac{7}{3},\ -\dfrac{7}{2}$

5.13 (1) $p = -7,\ q = 10$ (2) $a = 12,\ b = -8$

5.14 $x^2 + x - 6 = 0$

5.15 (1) $4x^2 + 2x - 5 = 0$ (2)(i) $x^2 - 14x + 20 = 0$ (ii) $5x^2 - 7x + 1 = 0$

(3) $27x^2 + 6x + 4 = 0$

5.16 $p = \dfrac{3}{4}$

5.17 (1) 0 (2) $\dfrac{7}{8}$ (3) 20

5.18 (1) $a = 1$ (2) $p = -6$, 余り 12 (3) $p = -1$ (4) $p = -2$

5.19 (1) $a = -5,\ b = -10$ (2) $p = 5,\ q = -1$ (3) $a = 5,\ b = -9$

5.20 (1) $x + 1$ (2) $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3}$

5.21 (1) $(x-1)^2(x+2)$ (2) $(x+1)^2(x-2)$ (3) $(x-1)(x^2-2x-1)$ (4) $(x-1)^2(x-2)$

(5) $(x-1)(x^2-x-7)$ (6) $(x+2)(x^2-x-3)$ (7) $(x-1)(x+2)(x-3)$

(8) $(x+2)(x^2-6x+4)$ (9) $(x-2)(x+3)(x+4)$ (10) $(x+2)(x-3)(2x-1)$

(11) $(x+1)(x-2)(3x-2)$ (12) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-3)$

5.22 (1) $x = 1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$ (2) $x = \pm 2,\ \pm i$ (3) $x = \pm\sqrt{2},\ \pm 2i$ (4) $x = \pm 1,\ \pm 3$

(5) $x = \pm 1,\ 2,\ 4$ (6) $x = 1,\ \pm 2,\ 5$ (7) $x = 2 \pm \sqrt{5},\ 2 \pm 2\sqrt{5}$

5.23 (1) $x = 1$(2 重解), -2 (2) $x = 1,\ 1 \pm \sqrt{3}$ (3) $x = 1$(2 重解), 2

(4) $x = 1,\ -2,\ 3$ (5) $x = 1,\ 2,\ 3$ (6) $x = 1,\ 2,\ 5$ (7) $x = -2,\ \dfrac{1 \pm \sqrt{11}\,i}{2}$

(8) $x = 1,\ 3,\ \dfrac{1}{3}$

5.24 (1) $a = 3$ (2) $x = 1 \pm 2i$

5.25 $a = 8,\ b = 8,\ x = 1 \pm \sqrt{3}\,i$

5.26 (1) $x=-\dfrac{1}{2}$ (2) $x=-2$ (3) $x=2$ (4) $x=-\dfrac{1}{3}$ (5) $x=-4,\ 6$
(6) $x=-7,\ \dfrac{2}{3}$ (7) $x=-3$ (8) $x=-\dfrac{4}{3}$ (9) $x=-3$ (10) $x=1,\ -6$
(11) $x=-2$ (12) $x=-3,\ \dfrac{1}{2}$ (13) $x=\dfrac{3}{2}$ (14) $x=3$ (15) $x=2$
(16) $x=1,\ -8$

5.27 10 日

5.28 (1) $x=26$ (2) $x=15$ (3) $x=9$ (4) $x=3,\ 4$ (5) $x=3$ (6) $x=6$
(7) $x=2$ (8) $x=3$ (9) $x=1$ (10) $x=3$ (11) $x=13$ (12) $x=3$
(13) $x=1$ (14) $x=3$ (15) $x=-3$

5.29 (1) $x=4$ (2) $x=-1$

答 (図形と方程式)

6.1 (1) 3 (2) 5 (3) 10

6.2 (1) 1 (2) 14 (3) -8 (4) 2

6.3 (1) 5 (2) 10 (3) 20 (4) 13

6.4 $\mathrm{AB}=\sqrt{37}$, $\mathrm{BC}=\sqrt{37}$, $\mathrm{CA}=5\sqrt{2}$

6.5 (1) BC = CA の二等辺三角形 (2) CA を斜辺とする直角三角形

6.6 $\mathrm{C}(5,\ 0)$

6.7 最短距離 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$

6.8 (1) 内分点 $\left(6,\ \dfrac{19}{5}\right)$, 外分点 $(18,\ 11)$ (2) $\mathrm{C}(4,\ 6)$ (3) $\mathrm{C}(-1,-3)$, $\mathrm{AB}=5\sqrt{5}$
(4)(i) $3\sqrt{5}$ (ii) $(3,\ 1)$ (iii) $(-3,\ 4)$

6.9 (1) $y=3x+2$ (2) $y=2x-1$ (3) $y=\dfrac{1}{2}x+3$ (4) $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$
(5) $y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{14}{3}$ (6) $y=\sqrt{3}\,x-5\sqrt{3}+2$

6.10 (1) $y=-x+5$ (2) $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{11}{3}$ (3) $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$ (4) $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{23}{3}$
(5) $y=\dfrac{1}{2}x-3$

6.11 (1) $y=-5x-10$ (2) $y=-3x+12$ (3) $y=-2x+10$

6.12 (1)//(6), (4)//(5), (1) $\perp$ (2), (2) $\perp$ (6)

6.13 (1) $y=2x-7$ (2) $y=-\dfrac{7}{8}x+\dfrac{53}{8}$ (3) $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{11}{4}$ (4) $y=4x-6$
(5) $y=\dfrac{3}{2}x$ (6) $y=-\dfrac{1}{2}x+6$

6.14 平行のとき $m=3$, 垂直のとき $m=1,\ \dfrac{1}{2}$

6.15 (1) $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{13}{6}$　(2) $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{7}{2}$

6.16 B$(4,\ 3)$

6.17 (1) $(2,\ 2)$　(2) $(-3,\ 1)$

6.18 (1) $\dfrac{5}{17}\sqrt{17}$　(2) $\dfrac{11}{5}$

6.19 (1) $(x-1)^2+(y+2)^2=9$　(2) $(x-1)^2+(y+2)^2=16$　(3) $(x-1)^2+(y-2)^2=5$
(4) $(x-3)^2+y^2=9$　(5) $(x-3)^2+(y+4)^2=25$　(6) $(x-3)^2+(y-4)^2=9$

6.20 (1) $(x-1)^2+(y-3)^2=17$　(2) $(x-1)^2+(y+2)^2=13$　(3) $(x-3)^2+(y+1)^2=17$

6.21 (1) 中心 $(4,\ 2)$，半径 3 の円　(2) 中心 $(-3,\ 1)$，半径 4 の円
(3) 中心 $(3,\ 1)$，半径 $\sqrt{10}$ の円　(4) 中心 $(-1,\ 2)$，半径 6 の円
(5) 中心 $(-2,\ 3)$，半径 1 の円　(6) 中心 $(2,-1)$，半径 2 の円
(7) 中心 $(-2,\ 0)$，半径 2 の円　(8) 中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の円

6.22 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

6.23 (1) $x^2+y^2-\dfrac{15}{7}x-\dfrac{25}{7}y=0$　(2) $x^2+y^2-2x+4y-8=0$

6.24 (1) $(3,\ 4)$, $(5,\ 0)$　(2) $4\sqrt{5}$　(3) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$　(4) $\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ (5) $(1,\ 2)$

6.25 (1) $y=\sqrt{3}x+4,\ y=\sqrt{3}x-4$　(2) $y=x$　(3) $y=x,\ y=-\dfrac{7}{17}x$

6.26 (1) $a=\pm5$　(2) $-\sqrt{5}<c<\sqrt{5}$

6.27 (1) $x+2y=5,\ 2x-y=5$　(2) $y=1,\ (0,\ 1)$；$3x-4y=5,\ \left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$

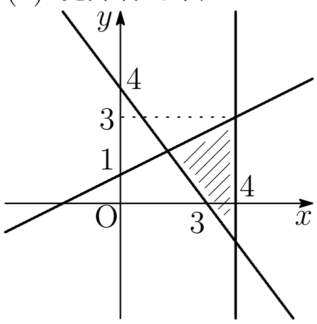
6.28 点 $(9,\ 0)$ を中心とする半径 6 の円

6.29 (1) $\begin{cases} y>0 \\ y<x \\ y<-2x+12 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} y<-\dfrac{1}{2}x+1 \\ x^2+y^2<4 \end{cases}$

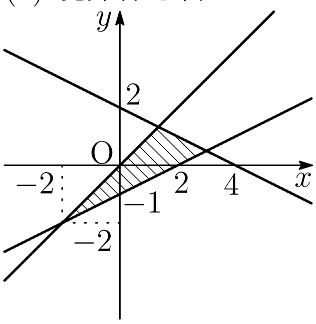
(3)(i) $\begin{cases} y\geqq 0 \\ y\leqq x+1 \\ y\leqq -x+4 \end{cases}$　(ii) $\begin{cases} y>\dfrac{3}{4}x \\ x^2+y^2<25 \end{cases}$

(4)(i) $\begin{cases} y\geqq \dfrac{1}{2}x \\ y\leqq 2x \\ y\leqq -x+3 \end{cases}$　(ii) $\dfrac{3}{2}$

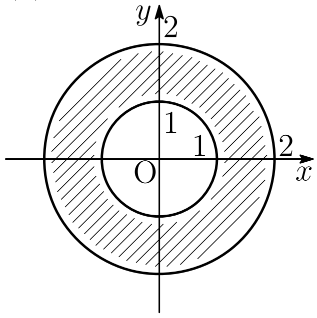
6.30 (1) 境界線を含まない



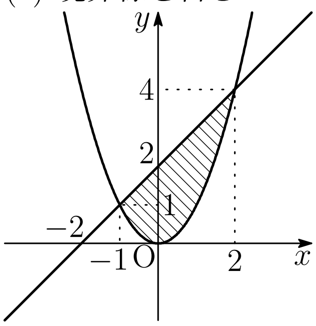
(2) 境界線を含む



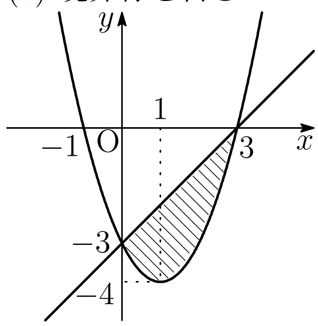
(3) 境界線を含まない



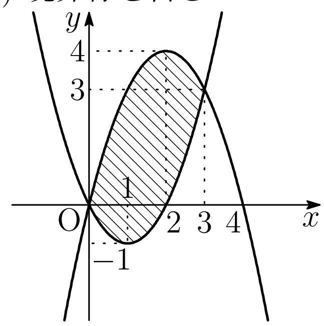
(4) 境界線を含む



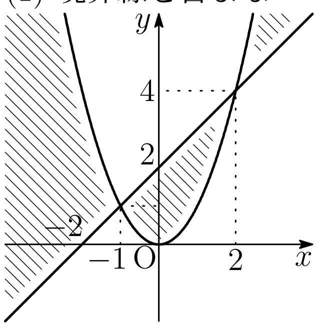
(5) 境界線を含む



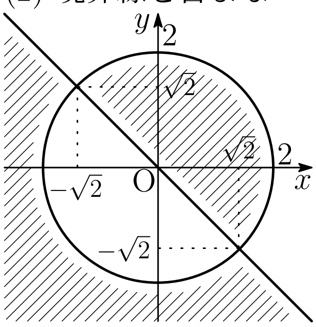
(6) 境界線を含む



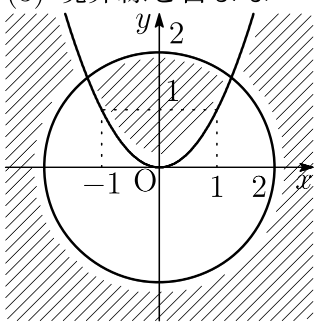
6.31 (1) 境界線を含まない



(2) 境界線を含まない



(3) 境界線を含まない

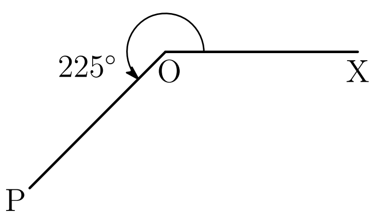


6.32 エ

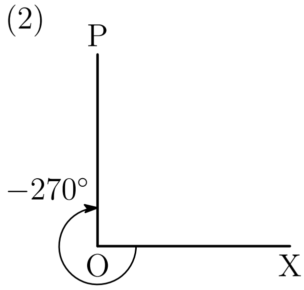
6.33 $x=2$, $y=3$ のとき最大値 5 をとり，$x=0$, $y=0$ のとき最小値 0 をとる．

答 (三角関数)

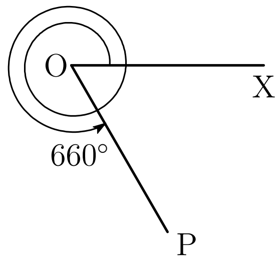
7.1 (1)



(2)



(3)



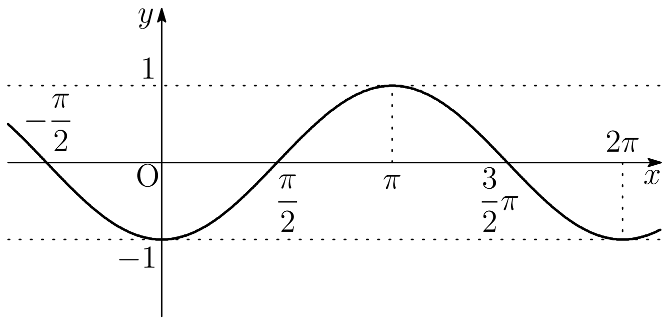
7.2 480°，840°，−240°

7.3 (1) $\dfrac{\pi}{12}$ (2) $-\dfrac{\pi}{3}$ (3) 288° (4) 75°

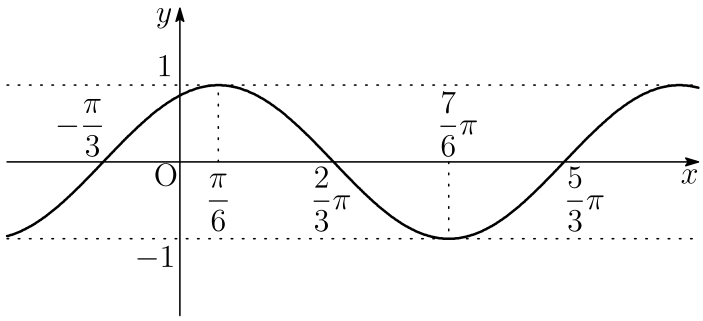
7.4 (1) $l=\pi$，$S=4\pi$ (2) $l=4\pi$，$S=20\pi$

7.5 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (2)$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $-\dfrac{1}{2}$ (4) 0 (5) $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (6) 0

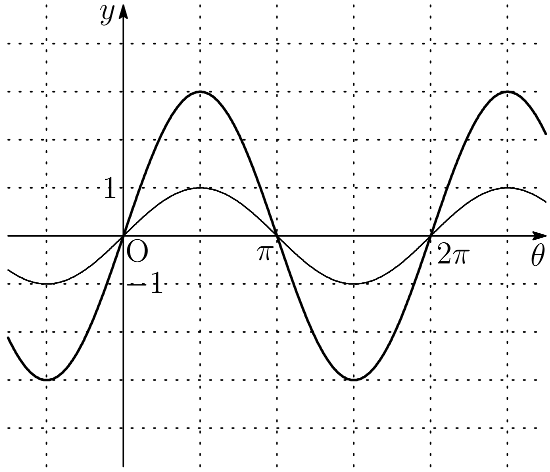
7.6 (1) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフは，$y=\sin x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したもの．



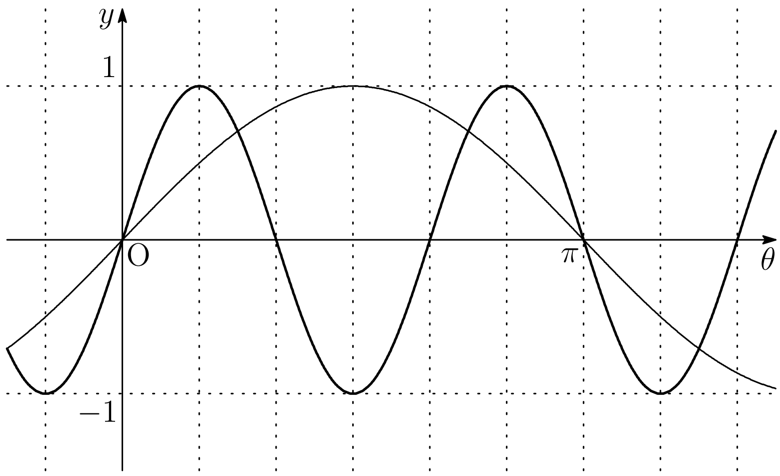
(2) $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフは，$y=\cos x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したもの．



7.7 (1) $y=3\sin\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして
y 軸方向へ 3 倍に拡大したもの．周期は　2π



(2) $y=\sin 3\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして
θ 軸方向へ $\dfrac{1}{3}$ 倍に縮小したもの．周期は　$\dfrac{2}{3}\pi$



7.8 (1) $\sin\theta=-\dfrac{5}{13}$　(2) $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　(3) $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$，$\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$
(4) $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

7.9 (1) $x=30^\circ$　(2) $x=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{7}{6}\pi$ (3) $x=70^\circ$，250°　(4) $x=30^\circ$

7.10 (1) $x=0^\circ$，30°，150°，180°，360°　(2) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$　(3) $\theta=180^\circ$　(4) $\theta=270^\circ$
(5) $x=90^\circ$　(6) $x=0^\circ$，120°，240°　(7) $\theta=60^\circ$，300°

7.11 $0\leqq x<\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi<x\leqq 2\pi$

7.12 (1) $x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$　(2) $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi<x\leqq 2\pi$

7.13 最大値 $\frac{5}{4}$, 最小値 -5

7.14 (1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(4) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (5) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (6) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

7.15 $2+\sqrt{3}$

7.16 $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$

7.17

(1) 加法定理

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

の辺々を加えると

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$$

(2) 上式に $x = 75^\circ,\ y = 15^\circ$ を代入して

$$\sin 90^\circ + \sin 60^\circ = 2\sin 75^\circ\cos 15^\circ$$

したがって

$$\sin 75^\circ\cos 15^\circ = \frac{1}{2}(\sin 90^\circ + \sin 60^\circ) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

7.18

(1) 加法定理により

$$\sin(45^\circ+\alpha)=\sin 45^\circ\cos\alpha+\cos 45^\circ\sin\alpha$$
$$\sin(45^\circ-\alpha)=\sin 45^\circ\cos\alpha-\cos 45^\circ\sin\alpha$$

の辺々を加えると

$$\sin(45^\circ+\alpha)+\sin(45^\circ-\alpha)=2\sin 45^\circ\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$$

(2) 加法定理により

$$\begin{aligned}&\sin(A+B)\sin(A-B)\\=&(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)\\=&(\sin A\cos B)^2-(\cos A\sin B)^2\\=&\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B\\=&\sin^2 A-\sin^2 B\end{aligned}$$

7.19 $30-10\sqrt{3}$

7.20 $\dfrac{p}{q-1}$

7.21 2 倍角の公式により

$$左辺=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+(2\cos^2\alpha-1)}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

よって $$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$$

7.22 (1) $\dfrac{24}{25}$ (2) $\dfrac{1}{2}$

7.23 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

7.24 (1) $\tan 2\alpha=-\dfrac{4}{3}$ (2) $\tan\dfrac{\alpha}{2}=3$

7.25 $x=\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$

7.26 $x=\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$ で最大値 $\dfrac{3}{2}$, $x=\dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -3

7.27 (1) $x=30^\circ, 90^\circ$ (2) $\theta=120^\circ$ (3) $\theta=\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3}{2}\pi$

7.28 最大値 $\sqrt{2}$, 最小値 $-\sqrt{2}$

答 (指数関数と対数関数)

8.1 (1) 1　(7) -27

8.2 (1) 3　(2) $\dfrac{x^3}{y^2}$

8.3 (1) 2　(2) 3

8.4 $\sqrt{a^3}$

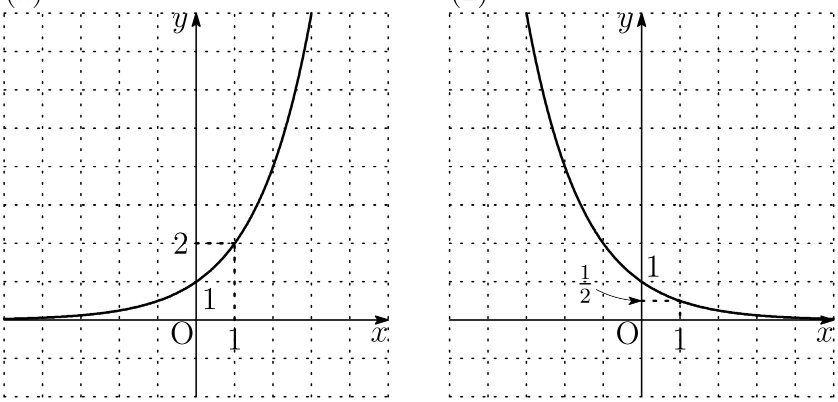
8.5 (2) $\dfrac{1}{9}$　(3) $\dfrac{1}{625}$　(4) $\dfrac{1}{125}$　(5) $\dfrac{2}{5}$

8.6 $25^{-1.5} > 81^{-\frac{5}{4}}$

8.7 (1) 7　(2) 2　(3) 4　(4) $\dfrac{4}{3}$　(5) $\dfrac{5}{3}$　(6) 4

8.8 -3

8.9 (1)　(2)



8.10 (1) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{4} < 2$　(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} > 1 > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{0.5}$

8.11 (1) $x < \dfrac{3}{2}$　(2) $x \leqq 4$

8.12 (1) $x = -4$　(2) $x = \dfrac{9}{2}$　(3) $x = -4$　(4) $x = -1$　(5) $x = -7$　(6) $x = -3$
(7) $x = \dfrac{1}{6}$　(8) $x = 2$　(9) $x = 3$　(10) $x = 4$

8.13 (1) $x = 2$　(2) $x = 0,\ 3$　(3) $x = 2$　(4) $x = 1,\ 2$　(5) $x = -2$　(6) $x = 3$

8.14 (1) $(x, y) = (3, 5),\ (5, 3)$　(2) $x = 21,\ y = 6$

8.15 (1) $x = 6$　(2) $x = 3$

8.16 (1) 3　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) 0

8.17 (1) -3　(2) -1　(3) -3　(4) -1　(5) -4　(6) 1　(7) -1

8.18 ① ×　② ○　③ ○　④ ×　⑤ ×

8.19 (1) 15　(2) 1　(3) 3　(4) 3　(5) 6　(6) 2　(7) 1　(8) $\log_{10} 4$　(9) 2　(10) $\dfrac{1}{2}$

8.20 (1) -1　(2) 0　(3) 2

8.21 (1) $\dfrac{3}{2}$ (2) $\dfrac{3}{2}$ (3) $\dfrac{1}{3}$ (4) $\dfrac{1}{6}$ (5) $\dfrac{3}{4}$ (6) $-\dfrac{1}{2}$ (7) 4

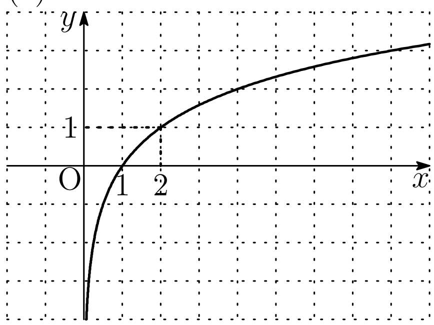
8.22 (1) $\dfrac{2}{3}$ (2) 3 (3) 5

8.23 $\dfrac{1+a+ab}{2+ab}$

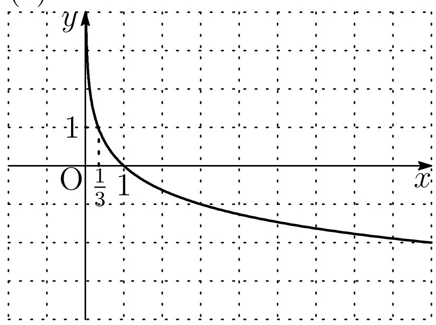
8.24 (1) $\dfrac{y}{x}$ (2) $\dfrac{z}{x+y}$ (3) $\dfrac{x}{z-y}$

8.25 4

8.26 (1)



(2)



8.27 (1) $0 < x < 3$ (2) $x \geqq 8$

8.28 (1) $x = \log_2 3$ (2) $x = -1,\ \log_2 \dfrac{5}{2}$

8.29 (1) $x = 103$ (2) $x = \dfrac{19}{2}$ (3) $x = 9$ (4) $x = 5$ (5) $x = 20$ (6) $x = 4$
(7) $x = 0$ (8) $x = \sqrt{2}$ (9) $x = \sqrt{10}$ (10) $x = 13$ (11) $x = 2$
(12) $x = \sqrt{35} - 1$ (13) $x = 8$ (14) $x = 1$ (15) $x = 2,\ 3$ (16) $x = \dfrac{9+\sqrt{13}}{2}$

8.30 (1) $(x,\ y) = (5,\ 2)$ (2) $(x,\ y) = (5,\ 2),\ \left(4,\ \dfrac{5}{2}\right)$ (3) $(x,\ y) = (7,\ 3)$

8.31 (1) 0.7781 (2) 1.3010 (3) 1.7781 (4) 3.7781 (5) 1.0791 (6) 1.8060
(7) -0.7781 (8) 0.1761 (9) -0.6990 (10) -0.9030 (11) 0.0333 (12) 2.9363
(13) 0.6990

8.32 (1) 1.9294 (2) 2.9294 (3) 0.9647

8.33 (1) -2 (2) -1.756

8.34 (1) 5 桁 (2) 9 桁 (3) 13 桁

8.35 (1) 7 年後 (2) 10 年後 (3) 341 乗

答 (微分と積分)

9.1 4

9.2 (1) 6 (2) 2

9.3 (1) 6　(2) 3　(3) 5　(4) 2　(5) $\dfrac{3}{2}$　(6) $\dfrac{5}{3}$　(7) $\dfrac{1}{7}$　(8) 7

9.4 (1) 108　(2) $3a^2$

9.5 (1) $a = 1,\ b = -2$　(2) $a = -3,\ b = -2$

9.6 $f'(a) = 2a$

9.7 $15x^2$

9.8 (1) $y' = 4x-3$　(2) $y' = 3x^2+6x-5$　(3) $f'(x) = 12x^3+8x$　(4) $y' = \dfrac{3}{4}x^2+x-2$

9.9 (1) $4x^3 + 6x^2 + 6x + 2$　(2) $6x + 1$

9.10 (1) $y' = 20x + 13$　(2) $y' = 12x - 13$　(3) $y' = 18x - 12$　(4) $y' = 6x^2 - 10x + 2$
(5) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$　(6) $y' = 3x^2$　(7) $y' = 4x^3 + 3x^2 - 1$
(8) $y' = 5x^4 + 6x^2 + 1$　(9) $y' = 36x^2 + 124x + 96$

9.11 $18x + 12$

9.12 $f'(2) = 8$

9.13 (1) $y = 4x - 12$　(2) $y = 9x - 14$　(3) $y = x - 1$

9.14 (1) $y = 4x - 24$　(2) $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{11}{4}$　(3) 34

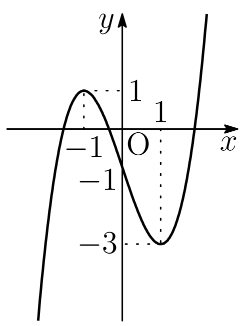
9.15 $y = 6x - 9,\ y = -2x - 1$

9.16 $y = 7x - 3,\ y = -x - 3$

9.17 (1) $2a$　(2) $2a$　(3) $2a$　(4) $2ax - a^2 + 3$　(5)(6) 3，-1　(7)(8) $6x - 6$，$-2x + 2$
(9)(10) $(3, 12)$，$(-1, 4)$

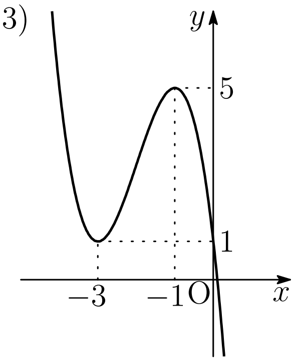
9.18 (1) $x = -3$ で極大値 29，$x = 1$ で極小値 -3
(2) $x = 1$ で極大値 0，$x = 2$ で極小値 -1
(3) $x = 3$ で極大値 1，$x = 1$ で極小値 -3
(4) $x = -2$ で極大値 21，$x = 1$ で極小値 -6
(5) $x = -1$ で極大値 1，$x = 3$ で極小値 $-\dfrac{27}{5}$

9.19



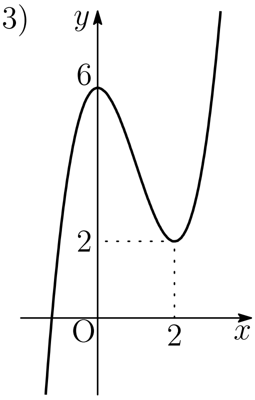
9.20 (1) $(0,1)$ (2) $x=-1$ で極大値 5，$x=-3$ で極小値 1

(3)



9.21 (1) $a=-3,\ b=6$ (2) $x=0$ で極大値 6，$x=2$ で極小値 2

(3)



9.22 (1) $a=-3,\ b=0$ (2) 極大値 6

9.23 $y=x^3-6x^2+9x-1$，極小値 -1

9.24 $a=1,\ b=-3,\ c=-24,\ d=16$

9.25 $a<-3,\ 3<a$

9.26 (1) $x=0,\ 3$ で最大値 2，$x=-2$ で最小値 -18

(2) $x=2$ で最大値 19，$x=4$ で最小値 -33

9.27 (1) 5cm，2000cm^3 (2) $\dfrac{5}{3}$cm (3) 5cm

9.28 (1) $0<a<4$ (2) $a<-2,\ 2<a$

9.29 (1) $f(x)=(x^3+2)-3x$ とすると

$$f'(x)=3x^2-3$$
$$=3(x+1)(x-1)$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$

$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は，
右のようになる．
よって，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ は $x=1$ で最小値 0 をとる．
したがって，$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるから

$$(x^3+2)-3x \geqq 0$$

すなわち　$x^3+2 \geqq 3x$

等号が成り立つのは，$x=1$ のときである．

(2) $f(x)=(x^3+12x)-6x^2$ とすると

$$f'(x)=3x^2-12x+12$$
$$=3(x-2)^2$$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	8	$\nearrow$

$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は，
右のようになる．
よって，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ は $x=0$ で最小値 0 をとる．
したがって，$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるから

$$(x^3+12x)-3x^2 \geqq 0$$

すなわち　$x^3+12x \geqq 3x^2$

等号が成り立つのは，$x=0$ のときである．

9.30 $x<-2,\ 1<x<3$

9.31 (1) $\dfrac{1}{2}x+C$　(2) $\dfrac{1}{4}x^2+C$　(3) $\dfrac{1}{2}x^2+2x+C$　(4) x^3-2x^2+3x+C
(5) $\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2-x+C$　(6) $\dfrac{1}{2}x^4-3x^2+3x+C$ (7) $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}x^4+C$
(8) $\dfrac{1}{3}x^3-x^2+x+C$

9.32 (1) x^3+x^2-x+C　(2)$\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+C$

9.33 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-6x+\dfrac{41}{6}$

9.34 (1) 20　(2) $\dfrac{5}{2}$　(3) $\dfrac{4}{3}$　(4) $\dfrac{32}{3}$　(5) 39　(6) $-\dfrac{20}{3}$　(7) 54　(8) 18

9.35 (1) $3k+3$　(2) 4

9.36 (1) 0 (2) 15

9.37 (1) $f'(x) = 3x^2 - x$ (2) $g(x) = 2x - 2$，$a = 1$

9.38 (1) $\dfrac{8}{3}$ (2) 12 (3) $\dfrac{32}{3}$ (4) $\dfrac{32}{3}$ (5) $\dfrac{2}{3}$

9.39 (1) $\dfrac{4}{3}$ (2) $\dfrac{9}{2}$ (3) $a = 6$

9.40 (1) 8 (2) $\dfrac{1}{2}$

9.41 (1) $\dfrac{9}{2}$ (2) $\dfrac{125}{6}$ (3) $\dfrac{9}{2}$

9.42 (1) $\dfrac{8}{3}$ (2) $\dfrac{1}{6}$ (3) (i) $l = 1$，$m = 6$，$n = \dfrac{1}{3}$ (ii) $\dfrac{81}{2}$ (4) $\dfrac{343}{24}$

9.43 (1) 4 (2) $x = -1$ で極大値 4，$x = 1$ で極小値 0．面積 $\dfrac{9}{2}$ (3) $\dfrac{4}{3}$

三角比の表

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	———

常用対数表 (1)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3929	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6712	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

常用対数表 (2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.6523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996