工業高校生の

進 学 へ の 数 学 C

熊本県工業高等学校進学指導連絡協議会

Typed by $\LaTeX 2_\varepsilon$

目 次

第 1 章　行列

1.1　行列の演算

1.1.1　行列の意味

右のように，いくつかの数を長方形状に書き並べ，両側の括弧で囲んだものを**行列**といい，括弧の中のそれぞれの数を，この行列の**成分**という．

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

行列において，成分の横の並びを**行**といい，上から順に，第 1 行，第 2 行，第 3 行，$\cdots$ という．

また，成分の縦の並びを**列**といい，左から順に，第 1 列，第 2 列，第 3 列，$\cdots$ という．

行列は，その行の数と列の数によって，その型が区別され，行が m 個，列が n 個ある行列を $\boldsymbol{m \times n}$ **行列**という．

特に，$n \times n$ 行列を $\boldsymbol{n}$ **次の正方行列**という．

例 1.1

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \text{は，} 2 \times 3 \text{ 行列である．}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \text{は，２次の正方行列である．}$$

[終]

１行だけからできている行列を**行ベクトル**，１列だけからできている行列を**列ベクトル**という．例えば，1×3 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ は行ベクトル，2×1 行列 $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は列ベクトルである．

1×1 行列，例えば (-2) は，単に -2 と書くのが普通である．

問 1.2 次の行列の型をいえ．

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -7 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

【答】 (1) 2×3 行列　(2) 3×2 行列　(3) 3 次の正方行列

行列は大文字 A, B などで表し，成分は小文字で表すことが多い．また，成分については，第 i 行と第 j 列の交点にある成分を $\boldsymbol{(i, j)}$ **成分**という．右の行列 A の $(1, 2)$ 成分は b である．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

問 1.3 前のページの問 1.2(3) の行列について，次の成分をいえ．

(1) $(2, 3)$ 成分　　(2) $(3, 1)$ 成分　　(3) $(3, 3)$ 成分

【答】 (1) -7　(2) 2　(3) 9

[行列の相等]

2つの行列 A, B の行の個数と列の個数が，それぞれ一致するとき，A と B は**同じ型**であるという．また，A, B が同じ型の行列であって，対応する成分がすべて一致するとき，$\boldsymbol{A = B}$ と書き，A と B は**等しい**という．

例えば，2つの2次の正方行列では，次のようになる．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{r} & \boldsymbol{s} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \boldsymbol{a = p,\ b = q} \\ \boldsymbol{c = r,\ d = s} \end{cases}$$

例 1.4 $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ x & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z & w \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$ のとき，x, y, z, w の値を求めよ．

【解】 各成分は等しいから　$4 = 2z$，$-3 = w$，$x = 5$，$3y = -6$

ゆえに　$x = -5,\ y = -2,\ z = 2,\ w = -3$

問 1.5 次の等式が成り立つように，x, y, u, v の値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -x & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 3v \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} x+y & x-y \\ u-1 & 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

【答】 (1) $x = -3$，$y = -6$，$u = 2$，$v = -2$　(2) $x = 2$，$y = -1$，$u = 3$，$v = 2$

1.1.2　行列の加法・減法と実数倍

[行列の加法・減法]

2つの行列 A, B が同じ型のとき，A, B の対応する成分の和を成分とする行列を A と B の**和**といい，$\boldsymbol{A + B}$ と書く．

例えば，2×2 行列の和は，次のようになる．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{r} & \boldsymbol{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a+p} & \boldsymbol{b+q} \\ \boldsymbol{c+r} & \boldsymbol{d+s} \end{pmatrix}$$

例 1.6 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-4) & -2+3 \\ -3+2 & 6+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

問 1.7 次の計算をせよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 3 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

【答】 (1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

行列 A に対して，A の各成分の符号を変えた行列を $-\boldsymbol{A}$ で表す．
例えば，2×2 行列については，次のようになる．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \quad \textbf{のとき，} \quad -\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{a} & -\boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c} & -\boldsymbol{d} \end{pmatrix}$$

問 1.8 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対し，次の行列を求めよ．

(1) $-A$　　(2) $A+(-A)$

【答】 (1) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

成分がすべて 0 である行列を**零行列**といい，$\boldsymbol{O}$ で表す．例えば $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ などは，いづれも零行列であるが，型が異なる．

一般に，同じ型の行列の加法について，次のことが成り立つ．

加法についての性質

1　交換法則　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

2　結合法則　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

3　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O},\ (-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

2 が成り立つから，行列 A，B，C の和を $A+B+C$ と書く．

問 1.9 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ を計算せよ．

【答】 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

同じ型の2つの行列 A, B の対応する成分の差を成分とする行列を A と B の**差**といい，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ と書く．

例えば，2次の正方行列の差は，次のようになる．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{r} & \boldsymbol{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}-\boldsymbol{p} & \boldsymbol{b}-\boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{c}-\boldsymbol{r} & \boldsymbol{d}-\boldsymbol{s} \end{pmatrix}$$

また，差の定義から，次の等式が成り立つ．

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}, \qquad \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

例 1.10 $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 & 3-0 \\ 1-(-4) & 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

問 1.11 次の計算をせよ．

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & -2 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

【答】 (1) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

[行列の実数倍]

実数 k に対して，行列 A の各成分の k 倍を成分とする行列を $\boldsymbol{kA}$ と書く．例えば，2×2 行列については，次のようになる．

$$\boldsymbol{k}\,\textbf{を実数とするとき} \qquad \boldsymbol{k}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ka} & \boldsymbol{kb} \\ \boldsymbol{kc} & \boldsymbol{kd} \end{pmatrix}$$

また，実数倍の定義から，次の等式が成り立つ．

$$\boldsymbol{1A}=\boldsymbol{A}, \qquad (\boldsymbol{-1})\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{0A}=\boldsymbol{O}, \qquad \boldsymbol{kO}=\boldsymbol{O}$$

例 1.12 $2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3 & 2\times 1 \\ 2\times 4 & 2\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$

問 1.13 $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ のとき，次の行列を求めよ．

(1) $2A$　　(2) $\dfrac{1}{2}A$　　(3) $(-3)A$　　(4) $(-1)A$

【答】 (1) $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

行列の実数倍については，次のことが成り立つ．ただし，A と B は同じ型の行列とする．

実数倍についての性質

k，l を実数とする．

1　$\boldsymbol{(kl)A = k(lA)}$

2　$\boldsymbol{(k+l)A = kA + lA}$

3　$\boldsymbol{k(A+B) = kA + kB}$

例 1.14

(1) A，B が同じ型の行列であるとき

$$\begin{aligned} 2(3A-2B)-3(A-B) &= 6A-4B-3A+3B \\ &= 3A-B \end{aligned}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ であるとき

$$3A - B = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

問 1.15 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ のとき，次の計算をせよ．

(1) $2A - 3B + C$　　(2) $2(A+B) - (B-3C)$

【答】 (1) $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 14 & 11 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

例 1.16 $A=\begin{pmatrix} 4 & 21 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ であるとき,
等式 $A+B+2X=2B-X$ を満たす行列 X を求めよ.

【解】 等式を整理すると　$3X=B-A$　　ゆえに　$X=\dfrac{1}{3}(B-A)$

$$\text{よって}\quad X=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 21 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -15 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

問 1.17 $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ であるとき, 等式 $3X-B=X+4A$ を満たす行列 X を求めよ.

【答】 $X=\begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

1.1.3　行列の積

まず, 同じ次元の行ベクトルと列ベクトルの積について考えよう. 例えば, 2次元と3次元の場合は, それぞれ次のように定める.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}=\boldsymbol{ax+by},\qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}=\boldsymbol{ax+by+cz}$$

一般に, m 次元の行ベクトルと列ベクトルの積も, 2つのベクトルの成分を最初から順に掛けて, 和をとったものと定める.

問 1.18 次の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

【答】 (1) -1　(2) 10

次に，2×2 行列と 2×1 行列，および 2×2 行列の積を，行ベクトルと列ベクトルの積をもとにして，次のように定める．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ap+br} \\ \boldsymbol{cp+dr} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{r} & \boldsymbol{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ap+br} & \boldsymbol{aq+bs} \\ \boldsymbol{cp+dr} & \boldsymbol{cq+ds} \end{pmatrix}$$

この２番目の式の左辺の２つの行列を順に A，B とするとき，右辺の積 AB の求め方は，次のように説明できる．

例えば，A の第２行の行ベクトルと B の第１列の列ベクトルとの積

$$\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = cp+dr$$

が，行列 AB の $(2,1)$ 成分になる．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & * \\ r & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & q \\ * & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & aq+bs \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & * \\ r & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ cp+dr & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & q \\ * & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & cq+ds \end{pmatrix}$$

行列 A，B について，A の列の数と B の行の数がともに 2 であれば，積 AB が考えられる．

例えば，次のようになる．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{r} & \boldsymbol{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ap+br} & \boldsymbol{aq+bs} \end{pmatrix}$$

しかし，$\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ などの積は考えられない．

例 1.19 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 5 + 1\cdot(-6) \\ 4\cdot 5 + 2\cdot(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

例 1.20 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

問 1.21 次の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

【答】 (1) 1　(2) $\begin{pmatrix} 46 \\ 59 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} -9 & -4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$

[一般の行列の積]

２つの行列の積 AB について，A の列の個数と B の行の個数が一致するときに限り，**積 $\boldsymbol{AB}$** が定義され，$m \times n$ 行列と $n \times l$ 行列の積は $m \times l$ 行列となる.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 \\ b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1p_1 + a_2p_2 & a_1q_1 + a_2q_2 & a_1r_1 + a_2r_2 \\ b_1p_1 + b_2p_2 & b_1q_1 + b_2q_2 & b_1r_1 + b_2r_2 \\ c_1p_1 + c_2p_2 & c_1q_1 + c_2q_2 & c_1r_1 + c_2r_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = a_1p_1 + a_2p_2$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1p_1 & a_1q_1 \\ b_1p_1 & b_1q_1 \end{pmatrix}$$

例 1.22

「1×2 行列と 2×1 行列の積」

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 3{\cdot}5 + (-4){\cdot}2 = 7$$

「3×3 行列と 3×1 行列の積」

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}$$

問 1.23 次の積を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

【答】 (1) $\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 23 \end{pmatrix}$　(2) $2x+3y+5z$　(3) $\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \end{pmatrix}$

1.1.4　行列の積の性質

一般に，行列の積と実数倍について，次のことが成り立つ．

行列の積の計算法則

1　$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B}) = k(\boldsymbol{AB})$　　k は実数

2　結合法則　$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

3　分配法則　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$

1 が成り立つから，$(kA)B$ と $k(AB)$ を区別せず，kAB と書く．また，**2** が成り立つから，3 つの行列 A，B，C の積を ABC と書く．

次に，行列の乗法で交換法則が成り立つがどうかを調べてみよう．

例 1.24 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ について

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

よって　　$AB \neq BA$

上の例 1.24から，<u>行列の乗法では，交換法則は成り立たない</u>．

[注意] $AB = BA$ となる行列 A，B も存在する．

[単位行列と零行列]

2 次の正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を 2 次の**単位行列**という．

一般に，n 次の正方行列で，対角線上にある $(1,1)$ 成分，$(2,2)$ 成分，$\ldots$，(n,n) 成分がすべて 1 で，他の成分がすべて 0 である行列を，n 次の**単位行列**という．ここでは，単位行列を $\boldsymbol{E}$ で表すことにする[1]．

例えば，3 次の単位行列 E は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる．

単位行列 E と零行列 O は，積に関して，次の性質 **1**，**2** をもつ．

単位行列，零行列

A を任意の正方行列とし，A と同じ型の単位行列を E，零行列を O とする．

1 $AE = EA = A$ **2** $AO = OA = O$

行列の乗法については，交換法則が成り立たないことのほかにも，数の乗法と異なる性質がある．

例 1.25 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ について

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

[終]

上の例 1.25のように，行列では $A \neq O$ かつ $B \neq O$ であっても，$AB = O$ となることがある．

問 1.26 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix} = O$ が成り立つような a，b の値を求めよ．

【解】 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(b-2) & 4(a+1) \\ b-2 & 2(a+1) \end{pmatrix} = O$

であるから

$$b-2=0,\ a+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=-1,\ b=2$$

[1]identity matrix 恒等 (単位) 行列の頭文字から $\boldsymbol{I}$ を用いることもある．

[行列の累乗]

正方行列の積 AA，AAA などを，簡単に A^2，A^3 で表す．

一般に，正方行列 A の n 個の積を $\boldsymbol{A^n}$ で表す．

例 1.27 $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ のとき

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

問 1.28 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ について，A^2，A^3，A^4 を求めよ．

【答】 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$，$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$，$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

例 1.29 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ について，$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & c \end{pmatrix}$ が成り立つように，a，b，c の値を定めよ．

【解】 A^2 を計算して　$\begin{pmatrix} a^2+2 & 2a+2b \\ a+b & 2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & c \end{pmatrix}$

すなわち　$a^2+2=3$，$2a+2b=2$，$a+b=1$，$2+b^2=c$

これを解いて $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=2 \end{cases}$　$\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=6 \end{cases}$

問 1.30 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について，$A^2 = \begin{pmatrix} b & 2 \\ c & d \end{pmatrix}$ が成り立つように，a，b，c，d の値を定めよ．

【解】 A^2 を計算して　$\begin{pmatrix} 2a+1 & 2a \\ 4 & 2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 2 \\ c & d \end{pmatrix}$

すなわち　$2a+1=b$，$2a=2$，$4=c$，$2a+1=d$

これを解いて　$a=1$，$b=3$，$c=4$，$d=3$

例題 1.31 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，次の等式を証明せよ[2].

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

[証明] 左辺において

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$$
$$(a+d)A = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+da & ab+db \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix}$$
$$(ad-bc)E = (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

ゆえに　$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$　**[証終]**

上の等式において　$a+d=1$，$ad-bc=0$　とすると

$A^2 - 1{\cdot}A + 0{\cdot}E = O$　すなわち　$A^2 - A = O$

よって，このとき $A^2 = A$ が成り立つ.

問 1.32 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，次のことが成り立つことを，上の例題 1.31 の等式を用いて証明せよ.

(1) $a+d=0$，$ad-bc=0 \implies A^2 = O$

(2) $a+d=0$，$ad-bc=1 \implies A^2 = -E$

[証明]

(1) 例題 1.31の等式において　$a+d=1$，$ad-bc=0$　とすると

$A^2 - 0{\cdot}A + 0{\cdot}E = O$　すなわち　$A^2 = O$

(2) 例題 1.31の等式において　$a+d=0$，$ad-bc=1$　とすると

$A^2 - 0{\cdot}A + 1{\cdot}E = O$　すなわち　$A^2 = -E$

[証終]

[2] この等式を 2 次の正方行列に関するハミルトン・ケイリーの定理という.

問題 1.33 次の問いに答えよ．

(1) 次の行列 A, B に対し，AB を求めよ．(佐賀大学理工学部電気電子工学科 H9)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列 A に対し，A^2 を求めよ．(長崎大学工学部社会開発工学科 H11)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

【答】 (1) $\begin{pmatrix} 32 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

1.2　逆行列

0 でない数 a の逆数 a^{-1} は，$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ を満たす数である．

正方行列 A についても，E を A と同じ型の単位行列とするとき

$$AX = XA = E$$

を満たす正方行列 X が存在するならば，X を A の**逆行列**といい，記号 $\boldsymbol{A^{-1}}$ と表す．すなわち

$$\boldsymbol{AA^{-1} = A^{-1}A = E}$$

正方行列 A が逆行列 A^{-1} をもてば，上の等式から，A は A^{-1} の逆行列であることがわかる．すなわち

$$\boldsymbol{(A^{-1})^{-1} = A}$$

例 1.34 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

したがって　$A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$

すなわち　$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　**[終]**

2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列を求めてみる．

$B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ が A の逆行列であるとすると，$AB = E$ より

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & az+bw \\ cx+dy & cz+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．これから，次の等式が得られる．

$$\begin{cases} ax+by=1 & \cdots ① \\ cx+dy=0 & \cdots ② \end{cases} \qquad \begin{cases} az+bw=0 & \cdots ③ \\ cz+dw=1 & \cdots ④ \end{cases}$$

①$\times\, d -$ ②$\times\, b$ より　$(ad-bc)x = d \quad \cdots$ ⑤

②$\times\, a -$ ①$\times\, c$ より　$(ad-bc)y = -c \quad \cdots$ ⑥

③$\times\, d -$ ④$\times\, b$ より　$(ad-bc)z = -b \quad \cdots$ ⑦

④$\times\, a -$ ③$\times\, c$ より　$(ad-bc)w = a \quad \cdots$ ⑧

ここで，$\Delta = ad - bc$ とおくと，$\Delta \neq 0$ のとき

$$x = \frac{d}{\Delta},\ y = -\frac{c}{\Delta},\ z = -\frac{b}{\Delta},\ w = \frac{a}{\Delta}$$

よって　$B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

この B は，$BA = E$ も満たす．

したがって，$\Delta \neq 0$ のとき $B = A^{-1}$ である．

また，$\Delta = 0$ のとき，⑤，⑥，⑦，⑧より

$$a = b = c = d = 0$$

となるから，$A = O$ となり，$AB = BA = E$ に矛盾する．

したがって，$\Delta = 0$ のとき A の逆行列は存在しない．

以上の結果をまとめると，次のようになる．

2次の正方行列の逆行列

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，$\Delta = ad - bc$ を A の**行列式**という．

$\boldsymbol{\Delta \neq 0}$ ならば　$\boldsymbol{A}$ の逆行列が存在し　　$\boldsymbol{A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

$\boldsymbol{\Delta = 0}$ ならば　$\boldsymbol{A}$ の逆行列は存在しない

例 1.35 次の行列が逆行列をもてば，それを求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

【解】

(1) $\Delta = 1{\cdot}4 - 2{\cdot}3 = -2$ であるから，A は逆行列をもち

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2) $\Delta = 1{\cdot}6 - 2{\cdot}3 = 0$ であるから，B は逆行列をもたない．

問 1.36 次の行列の逆行列が存在すれば，それを求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

【答】

(1) $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\dfrac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

(2) B の逆行列は存在しない

例 1.37 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-k & 4 \\ 3 & 2-k \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないとき，k の値を求めよ．

【解】 A が逆行列をもたないから

$$\Delta = (1-k)(2-k) - 4{\cdot}3 = 0$$

よって　$k^2 - 3k - 10 = 0$　を解いて　$k = -2,\ 5$

問 1.38 行列 $A = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ について，次の条件を満たす a の値を求めよ．

(1) A は逆行列をもたない． (2) A の逆行列が A 自身である．

【解】

(1) A が逆行列をもたないから

$$\Delta = a\cdot(-2) - (-3)\cdot 1 = 0 \quad \text{よって} \quad a = \frac{3}{2}$$

(2) $A^{-1} = A$ を $AA^{-1} = E$ に適用すると

$$\begin{pmatrix} a & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-3 & -3a+6 \\ a-2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに　$a^2-3=1$，$-3a+6=0$，$a-2=0$　を同時に満たす a の値は　$a=2$

例 1.39 同じ型の正方行列 A，B が，ともに逆行列をもつとき，積 AB も逆行列をもち，次の等式が成り立つ．

$$\boldsymbol{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

[証明] $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$
よって，$B^{-1}A^{-1}$ は AB の逆行列である．
すなわち　$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$　**[証終]**

[$\boldsymbol{AX = B}$ を満たす行列 $\boldsymbol{X}$]

A，B は同じ型の正方行列で，A は逆行列 A^{-1} をもつとする．
このとき，次の等式を満たす行列 X を求めてみよう．

$$\boldsymbol{AX = B}$$

上式の両辺に左から A^{-1} を掛けると

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \qquad \text{ゆえに} \qquad EX = A^{-1}B$$

したがって

$$\boldsymbol{X = A^{-1}B}$$

逆に，この X は $AX = B$ を満たす．
よって，正方行列について，次のことが成り立つ．

$\boldsymbol{A^{-1}}$が存在するとき，$\boldsymbol{AX = B}$ の解 $\boldsymbol{X}$ は　$\boldsymbol{X = A^{-1}B}$　**[終]**

[解説] **$\boldsymbol{A^{-1}}$が存在するとき，$\boldsymbol{YA = B}$ の解 $\boldsymbol{Y}$ は　$\boldsymbol{Y = BA^{-1}}$**

例題 1.40 等式 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ を満たす行列 X を求めよ．

【解】 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ とおくと，等式は　$AX = B$

行列 A について　　$\Delta = 2{\cdot}7 - 5{\cdot}3 = -1 \neq 0$

ゆえに，A は逆行列をもち

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$AX = B$ の両辺に左から A^{-1} を掛けて

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

問 1.41 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき，$AX = B$，$YA = B$ を満たす行列 X，Y を求めよ．

【解】 行列 A について　　$\Delta = 3{\cdot}2 - 1{\cdot}5 = 1 \neq 0$

ゆえに，A は逆行列をもち

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$AX = B$ の両辺に左から A^{-1} を掛けて

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$YA = B$ の両辺に右から A^{-1} を掛けて

$$Y = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1.2.1　連立1次方程式

連立2元1次方程式 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ は，行列を用いると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

と表される．

ここで，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とおくと，この方程式は

$$AX = P$$

と書くことができる．

行列 A を，上の連立1次方程式の**係数行列**という．

一般に，連立1次方程式において，変数の数と方程式の数が同じとき，係数行列は正方行列となる．

A が逆行列 A^{-1} をもつとき，$AX = P$ の両辺に左から A^{-1} を掛けると，次の等式が導かれる．

$$X = A^{-1}P$$

逆に，この X は方程式 $AX = P$ を満たす．

連立2元1次方程式の解

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$，$ad - bc \neq 0$ とすると

方程式 $\boldsymbol{AX = P}$　の解は　$\boldsymbol{X = A^{-1}P}$

問 1.42 次の連立方程式を行列を用いて表せ．

(1) $\begin{cases} 3x-2y=7 \\ x+2y=5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-2y=1 \\ -4x+3y=2 \end{cases}$

【答】 (1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

例 1.43 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 5x+3y=7 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ を，行列を用いて解け.

【解】 この連立 1 次方程式を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ において　$\Delta = 5\cdot 1 - 3\cdot 2 = -1 \neq 0$

ゆえに　　$A^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

よって　　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

したがって　　$x = 2,\ y = -1$

問 1.44 次の連立 1 次方程式を，行列を用いて解け.

(1) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$　　　(2) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+2y=5 \end{cases}$

【解】

(1) この連立 1 次方程式を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ において　$\Delta = 1\cdot 2 - 3\cdot 3 = -7 \neq 0$

ゆえに　　$A^{-1} = \dfrac{1}{-7}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

よって　　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

したがって　　$x = -1,\ y = 2$

(2) この連立1次方程式を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ において　$\Delta = 2\cdot 2 - (-1)\cdot 1 = 5 \neq 0$

ゆえに　$A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

よって　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

したがって　$x = 1$, $y = 2$　**[終]**

係数行列 A が逆行列をもたないとき，連立1次方程式 $AX = P$ は，無数に多くの解をもつか，または解をもたない．

例 1.45 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ は逆行列をもたない．このとき，次のことがわかる．

(1) 連立方程式 $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 6x + 8y = 3 \end{cases}$ は解をもたない．

(2) 連立方程式 $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 6x + 8y = 2 \end{cases}$ は，t を任意の数として，

$x = t$ とおくと，$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1-3t}{4} \end{cases}$ と表される．

したがって，この連立方程式の解は無数にある．

問 1.46 次の連立1次方程式が解をもつように，p の値を定めよ．

$$\begin{cases} x - 2y = p \\ -3x + 6y = 3 \end{cases}$$

【解】 第1式に -3 を掛けて　$-3x + 6y = -3p$

これが第2式に一致するとき，この連立方程式は無数に解をもつ．

したがって　$-3p = 3$　を解いて　$p = -1$

1.2.2 消去法と掃き出し法

連立 1 次方程式には，次のような解法もある．

例えば，連立 2 元 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x+3y=7 & \cdots ① \\ x+4y=6 & \cdots ② \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

を解いてみよう．

①, ②を入れ替えて，第 1 行の式の x の係数を 1 にする．

$$\begin{cases} x+4y=6 & \cdots ③ \\ 2x+3y=7 & \cdots ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

④の $2x$ の項を消去するために，④に ③の -2 倍を加える．

$$\begin{cases} x+4y=6 & \cdots ③ \\ \quad -5y=-5 & \cdots ⑤ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

⑤の y の係数を 1 にするために，⑤を -5 で割る．

$$\begin{cases} x+4y=6 & \cdots ③ \\ \qquad y=1 & \cdots ⑥ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

③の $4y$ を消去するために，③に ⑥の -4 倍を加える．

$$\begin{cases} x \qquad =2 \\ \qquad y=1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これで，解 $x=2$，$y=1$ が得られた．

連立 1 次方程式の上のような解法を**消去法**という．

上の解法では，行列を用いた表現を右側に示した．

連立 1 次方程式の係数行列と右辺の行列を横に並べて，2×3 行列を作ると，この行列は最終的に，係数行列の部分が単位行列になるように変形されている．

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[3]} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[4]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] 第 1 行と第 2 行を入れ替える．

[2] 第 2 行に第 1 行の -2 倍を加える．

[3] 第 2 行に $-\dfrac{1}{5}$ を掛ける．

[4] 第 1 行に第 2 行の -4 倍を加える．

このように，2×3 行列を変形する際に，次の 3 つの操作のいずれかを行っている．

行列の基本変形

1　2 つの行を入れ替える．
2　ある行に 0 でない実数を掛ける．
3　ある行に他の行の実数倍を加える．

この 3 つの操作を，行列の行についての**基本変形**という．
行列の基本変形により

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{q} \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots\cdots\cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{m} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{n} \end{pmatrix}$$

のように変形できると，連立 1 次方程式 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ の解 $x=m$，$y=n$ が求められる．連立 1 次方程式に対応する行列を，上のように変形して，連立 1 次方程式の解を求める方法を**掃き出し法**という．

問 1.47　次の連立 1 次方程式を，掃き出し法で解け．

(1) $\begin{cases} -x+3y=-7 \\ 3x+4y=-5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+5y=4 \\ -3x+2y=13 \end{cases}$

【解】

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 13 & -26 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

したがって　$x=1$，$y=-2$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 13 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 2 \\ -3 & 2 & 13 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & \frac{19}{2} & 19 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

したがって　$x=-3$，$y=2$

連立 3 元 1 次方程式も，掃き出し法で解くことができる．

例 1.48 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 3x+7y+6z=2 \\ 2x+3y+4z=8 \\ x+2y+3z=4 \end{cases}$ の掃き出し法による解法．

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[\mathbf{1}]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[\mathbf{2}]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[\mathbf{3}]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{[\mathbf{4}]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[\mathbf{5}]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[\mathbf{6}]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[**1**]　第 1 行と第 3 行を入れ替える．
[**2**]　第 1 行の -2 倍，-3 倍を，それぞれ第 2 行，第 3 行に加える．
[**3**]　第 2 行に -1 を掛ける．
[**4**]　第 2 行の -2 倍，-1 倍を，それぞれ第 1 行，第 3 行に加える．
[**5**]　第 3 行を -5 で割る．
[**6**]　第 3 行，第 3 行の -2 倍を，それぞれ第 1 行，第 2 行に加える．

よって，求める解は　$x=6$，$y=-4$，$z=2$　である．

問 1.49 次の連立 1 次方程式を，掃き出し法で解け．

(1) $\begin{cases} x-y-z=3 \\ -x+y+2z=-4 \\ -y+2z=-3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y+2z=5 \\ -x+2y+3z=5 \\ 2x-5y-z=-1 \end{cases}$

【解】

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

したがって　$x=3$，$y=1$，$z=-1$

$$
(2)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

したがって　$x = 3$，$y = 1$，$z = 2$ **[終]**

連立 1 次方程式の係数行列を，行列の基本変形によって変形するとき，例 1.48のように係数行列が単位行列に変形できるならば，ちょうど 1 組の解が求められる．

係数行列が単位行列に変形できないならば，連立 1 次方程式は無数に多くの解をもつか，あるいは解をもたない．

このような例として，次の連立 1 次方程式 (a) と (b) を，行列を用いて解いてみよう．

$$
\text{(a)} \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}
$$

(a) の係数行列と定数項の列ベクトルを横に並べた行列は

$$
\begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

へと変形され，(a) は 1 つの方程式 $x - 2y = 0$ に帰着する．この場合は，y の値を t とすると，解は

$$
x = 2t, \quad y = t \qquad (t \text{ は任意の数})
$$

となる．よって，連立方程式 (a) は無数に多くの解をもつ．

また，(b) の係数行列と定数項の列ベクトルを横に並べた行列は

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

へと変形され，$0x + 0y = -1$ が導かれるが，この式を満たす x，y は存在しない．

よって，連立方程式 (b) は解をもたない．

問 1.50 次の連立 1 次方程式の解を，係数行列を用いて調べよ．

(1) $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+6y=2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 6x-3y=2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y+4z=9 \\ 3x+4y+5z=12 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y+4z=9 \\ 3x+4y+5z=15 \end{cases}$

【解】

(1) 係数行列と定数項の列ベクトルを横に並べた行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

へと変形され，1 つの方程式 $x+3y=1$ に帰着する．ここで，y の値を t とすると，解は　$x=1-3t,\quad y=t$　(t は任意の数)

(2) 係数行列と定数項の列ベクトルを横に並べた行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

へと変形され，$0x+0y=-1$ が導かれるが，この式を満たす x，y は存在しない．よって，この連立方程式の解は存在しない．

(3) 係数行列と定数項の列ベクトルを横に並べた行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

へと変形され，2 つの方程式 $x-z=0$，$y+2z=3$ に帰着する．ここで，z の値を t とすると，解は　$x=t,\quad y=-2t+3,\quad z=t$　(t は任意の数)

(4) 係数行列と定数項の列ベクトルを横に並べた行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

へと変形され，$0x+0y+0z=3$ が導かれるが，この式を満たす x，y，z は存在しない．よって，この連立方程式の解は存在しない．

[掃き出し法と逆行列]

掃き出し法は，正方行列の逆行列を求める計算にも利用される．

例えば，2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めるには，次の等式を満たす x，y，u，v の値を求めればよい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって，次の2つの連立方程式を解けばよい．

$$\text{(a)}\ \begin{cases} 1x+2y=1 \\ -3x-5y=0 \end{cases} \qquad \text{(b)}\ \begin{cases} 1u+2v=0 \\ -3u-5v=1 \end{cases}$$

(a)，(b) の係数の行列はともに A であるから，これらは同じ変形で，同時に解くことができる．したがって，A と単位行列 E を並べて得られる 2×4 行列について，基本変形を行うと，同時に $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を求めることができる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[\mathbf{1}]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[\mathbf{2}]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

[**1**]　第2行に第1行の3倍を加える．

[**2**]　第1行に第2行の -2 倍を加える

よって，逆行列 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ が得られる．

問 1.51 $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を，掃き出し法で求めよ．

【解】 $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

よって　$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

問題 1.52 次の問いに答えよ．

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ について次のものを求めよ．(佐賀大学理工学部電気電子工学科 H12)

(i) 行列式

(ii) 逆行列

(2) 2×2 型行列 A がある．次の各問いに答えよ．(明石高専 H12)

(i) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．A を求めよ．

(ii) (i) のとき，$A^2=A\cdot A$ を求めよ．

【解】

(1) (i) $\Delta=1\cdot 4-2\cdot(-1)=6$

(ii) $A^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(2) (i) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ であるから

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

行列 $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について，$\Delta=1\cdot 1-2\cdot 2=-3\neq 0$ であるから，上式の両辺に右側から $P^{-1}=\dfrac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ をかけると

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

(ii) $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

第 2 章　いろいろな曲線

2.1　２次曲線

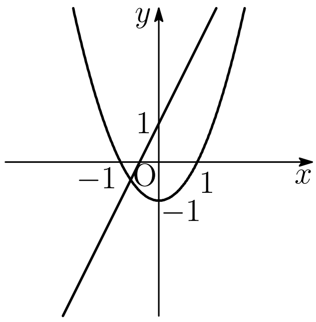
2.1.1　方程式の表す曲線

[方程式 $y = f(x)$ の表すグラフ]

関数 $y = f(x)$ のグラフは，変数 x が関数の定義域全体を動くとき，座標平面上の点 $(x, f(x))$ 全体の作る図形である．

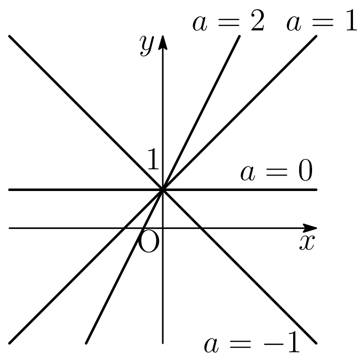
例えば $y = 2x + 1$ は直線の方程式であり，$y = x^2 - 1$ は放物線の方程式である．

一般に，関数 $y = f(x)$ のグラフを**方程式 $y = f(x)$ の表す曲線**または**曲線 $y = f(x)$** といい，$y = f(x)$ をこの**曲線の方程式**という．



例 2.1　方程式 $y = ax + 1$ は，a の値を変化させたとき，どのような曲線を表すか調べてみよう．

方程式 $y = ax + 1$ は直線を表すが，$x = 0$ のとき $y = 1$ であるから，この直線は常に点 $(0, 1)$ を通る．a の値をいくつか与えると，右の図のような直線が得られる．



問 2.2 次の方程式は，a の値を変化させると，どのような直線群になるか．

(1) $y = x + a$　　　　(2) $y = a(x - 1) + 2$

【答】 (1) 傾き 1 の直線群　(2) 点 $(1, 2)$ を通る直線群

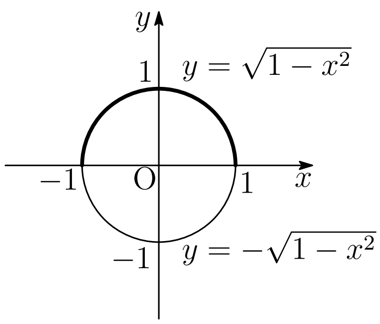
[方程式 $F(x,y)=0$ の表す曲線]

変数 x，y の方程式 $F(x,y)=0$ が与えられたとき，この方程式が 1 つの曲線を表すならば，この曲線を**方程式 $F(x,y)=0$ の表す曲線**，または**曲線 $F(x,y)=0$** という．また，方程式 $F(x,y)=0$ を，この**曲線の方程式**という．

例 2.3 曲線 $x^2+y^2-1=0$，すなわち $x^2+y^2=1$ の表す曲線は，原点を中心とし，半径が 1 の円である．

この方程式を y について解くと

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$



$y=\sqrt{1-x^2}$ の表す曲線は,

円 $x^2+y^2=1$ の $y \geqq 0$ の部分である．

また，$y=-\sqrt{1-x^2}$ の表す曲線は,

円 $x^2+y^2=1$ の $y \leqq 0$ の部分である．

この 2 つの曲線は，それぞれ上の図のような半円を表すから，円 $x^2+y^2=1$ は，次の 2 つの方程式の表す図形を合わせたものである．

$$y=\sqrt{1-x^2}, \qquad y=-\sqrt{1-x^2}$$

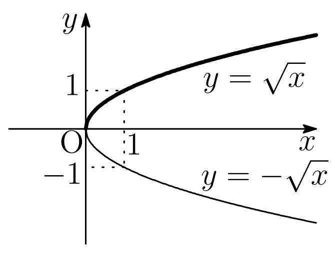
[終]

一般に，方程式 $F(x,y)=0$ の表す曲線は，x についての 1 つの関数 $y=f(x)$ になるとは限らない．例 2.3のように，曲線が 2 つ，またはそれ以上の関数のグラフに分解される場合がある．

問 2.4 上の例 2.3にならって，方程式 $y^2=x$ の表す図形の概形をかけ．

【解】 この方程式を y について解くと

$$y=\pm\sqrt{x}$$



ここで，$y=\sqrt{x}$，$y=-\sqrt{x}$ の 2 つのグラフは，右の図のようになる．

よって，これが曲線 $y^2=x$ の概形である．

2.1.2　放物線

2 次関数 $y = ax^2$ のグラフが放物線と呼ばれることは，数学 I で学んだが，ここでは，更に放物線の性質について調べてみよう．

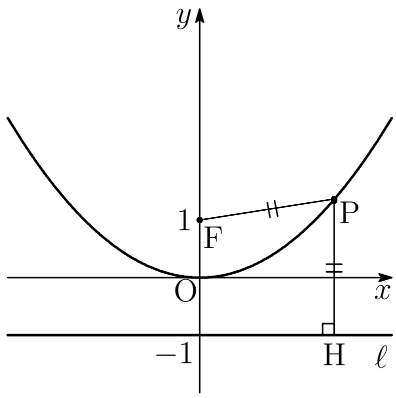
例えば，放物線 $y = \dfrac{1}{4}x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ と定点 $\mathrm{F}(0, 1)$ の距離 PF を考えると，その平方は

$$\begin{aligned}\mathrm{PF}^2 &= x^2 + (y-1)^2 = 4y + (y-1)^2 \\ &= (y+1)^2\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\mathrm{PF} = |y + 1|$$

すなわち，P と F の距離は，常に P と定直線 $y = -1$ の距離に等しい．



一般に，平面上で，定直線 ℓ にない定点 F からの距離と ℓ からの距離が等しいような点の軌跡を**放物線**といい，点 F をその**焦点**，直線を**準線**という．

$p \neq 0$ とし，焦点 F の座標を $(p, 0)$，準線 ℓ の方程式を $x = -p$ として，この放物線の方程式を導いてみよう．

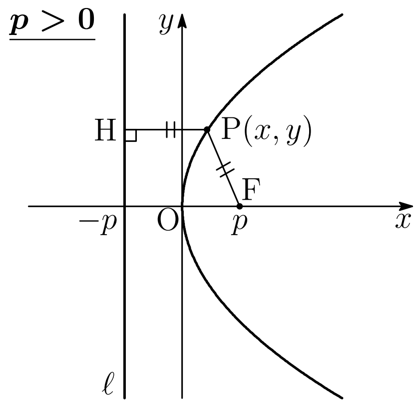
軌跡上の任意の点を $\mathrm{P}(x, y)$ とし，P から ℓ に下ろした垂線を PH とすると，PF=PH であるから

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x - (-p)|$$

両辺を平方すると

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

整理して　　$\boldsymbol{y^2 = 4px}$



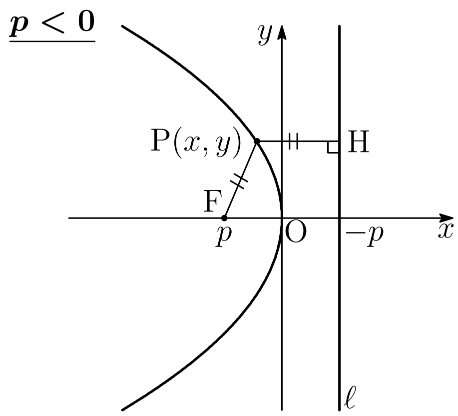
この式を放物線の方程式の**標準形**という．

放物線の焦点を通り，準線に垂直な直線を放物線の**軸**といい，軸と放物線の交点を放物線の**頂点**という．

放物線 $y^2 = 4px$ の軸は x 軸，頂点は原点である．

放物線は，その軸に関して対称である．

方程式 $x = ay^2$ は $y^2 = 4\cdot\dfrac{1}{4a}x$ と変形されるから，放物線である．その焦点の座標は $\left(\dfrac{1}{4a},\ 0\right)$，準線の方程式は $x = -\dfrac{1}{4a}$ である．



放物線についてまとめると，次のようになる．

放物線

放物線 $y^2 = 4px$ の性質

1 頂点は原点，焦点は $(p, 0)$，準線は $\boldsymbol{x = -p}$ である．

2 軸は x 軸で，曲線は軸に関して対称である．

3 放物線上の任意の点から，焦点と準線までの距離は等しい．

例 2.5 焦点が点 $(3, 0)$，準線が直線 $x = -3$ である放物線の方程式は

$$y^2 = 4\cdot 3x \qquad \text{すなわち} \qquad y^2 = 12x$$

[終]

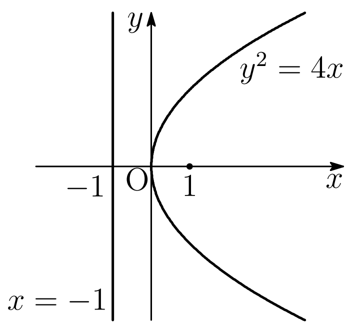
問 2.6 次のような放物線の方程式を求め，概形をかけ．

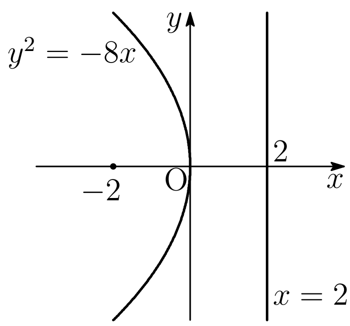
(1) 焦点が $(1, 0)$，準線が $x = -1$

(2) 焦点が $(-2, 0)$，準線が $x = 2$

【解】

(1) $y^2 = 4\cdot 1\cdot x$ すなわち $y^2 = 4x$ (2) $y^2 = 4\cdot(-2)\cdot x$ すなわち $y^2 = -8x$





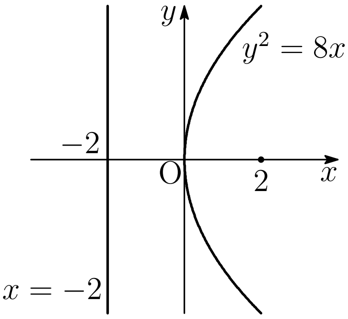
問 2.7 次の放物線の焦点の座標と準線の方程式を求め，概形をかけ.

(1) $y^2 = 8x$　　　　(2) $y^2 = -2x$

【解】

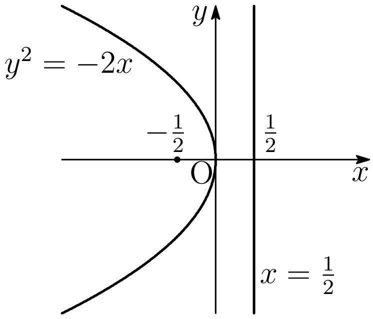
(1) $y^2 = 4{\cdot}2{\cdot}x$ より

焦点は $(2, 0)$，準線は $x = -2$



(2) $y^2 = 4\left(-\dfrac{1}{2}\right)x$ より

焦点は $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，準線は $x = \dfrac{1}{2}$

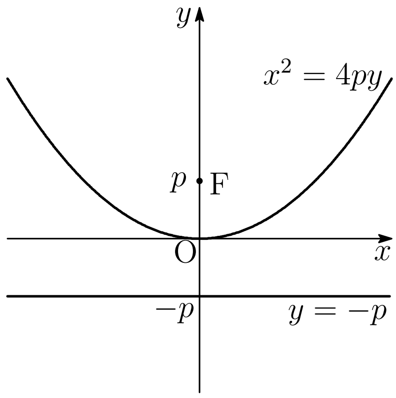


$p \neq 0$ のとき，点 $\mathrm{F}(0, p)$ を焦点とし，直線 $y = -p$ を準線とする放物線の方程式は

$$\boldsymbol{x^2 = 4py}$$

であることが，標準形 $y^2 = 4px$ の場合と同様にしてわかる.

$a \neq 0$ のとき，$y = ax^2$ は，$x^2 = 4{\cdot}\dfrac{1}{4a}y$ と変形されるから，放物線 $y = ax^2$ の焦点は点 $\left(0,\ \dfrac{1}{4a}\right)$，準線は直線 $y = -\dfrac{1}{4a}$ である.



問 2.8 次の放物線の焦点の座標と準線の方程式を求めよ.

(1) $y = x^2$　　　　(2) $y = -2x^2$

【答】 (1) 焦点 $\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$，準線 $y = -\dfrac{1}{4}$　(2) 焦点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，準線 $y = \dfrac{1}{4}$

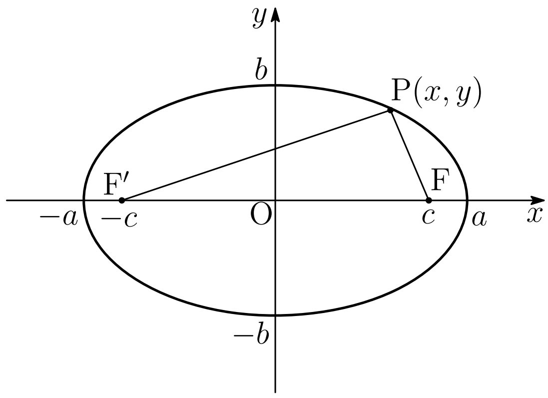
2.1.3　楕円

平面上で，2定点F，F′からの距離の和が一定である点Pの軌跡を**楕円**といい，この2点F，F′を楕円の**焦点**という．ただし，距離の和は線分FF′の長さより大きいものとする．

2点$\mathrm{F}(c, 0)$，$\mathrm{F}'(-c, 0)$を焦点とし，この2点からの距離の和が$2a$である楕円の方程式を求めてみよう．ただし，

$$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' > \mathrm{FF}' = 2|\mathrm{c}|$$

であるから，$a > c > 0$とする．



この楕円上の点を$\mathrm{P}(x, y)$とすると

$$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = 2\mathrm{a}$$

したがって

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

すなわち　$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

となる．両辺を平方して整理すると

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx$$

再び，両辺を平方して整理すると

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

ここで$b = \sqrt{a^2-c^2}$とおくと，$a > c > 0$により$a > b > 0$で

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

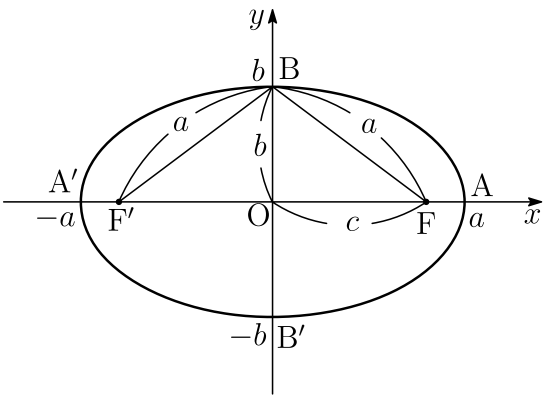
よって　$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (2.1)$$

これを楕円の方程式の**標準形**という．

［注意］ 方程式(2.1)を満たす点$\mathrm{P}(x, y)$は，$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = 2\mathrm{a}$を満たす．

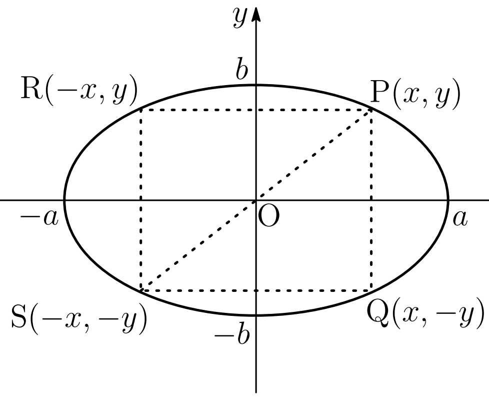
方程式 (2.1) を導くのに $b=\sqrt{a^2-c^2}$ とおいたから，$c=\sqrt{a^2-b^2}$ である．よって，楕円 (2.1) の焦点は

$$\mathbf{F}(\sqrt{\boldsymbol{a^2-b^2}},\ \mathbf{0})$$
$$\mathbf{F'}(-\sqrt{\boldsymbol{a^2-b^2}},\ \mathbf{0})$$



楕円 (2.1) と座標軸との交点は，右の図のように A$(a,0)$，A$'(-a,0)$，B$(0,b)$，B$'(0,-b)$ である．

$a>b$ であるから，AA$'>$ BB$'$ である．このことから，線分 AA$'$ を楕円の**長軸**，線分 BB$'$ を楕円の**短軸**という．また，長軸と短軸の交点である原点 O を楕円の**中心**，長軸および短軸と楕円の交点を**頂点**という．



楕円 (2.1) 上の任意の点を P(x,y) とする．x 軸，y 軸，原点に関して P と対称な点は，それぞれ Q$(x,-y)$，R$(-x,y)$，S$(-x,-y)$ であり，これらの 3 点の座標もまた方程式 (2.1) を満たすから，楕円 (2.1) は x 軸，y 軸，原点に関して，それぞれ対称である．

楕円についてまとめると，次のようになる．

楕円

楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ の性質　ただし　$a>b>0$

1　中心は**原点**，頂点は $\boldsymbol{(a,0)}$，$\boldsymbol{(-a,0)}$，$\boldsymbol{(0,b)}$，$\boldsymbol{(0,-b)}$

2　長軸の長さは $\boldsymbol{2a}$，短軸の長さは $\boldsymbol{2b}$

3　焦点は $(\sqrt{\boldsymbol{a^2-b^2}},\ \mathbf{0})$，$(-\sqrt{\boldsymbol{a^2-b^2}},\ \mathbf{0})$

4　楕円は x 軸，y 軸，原点に関して対称

5　楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は $\boldsymbol{2a}$

例 2.9 楕円 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$ について

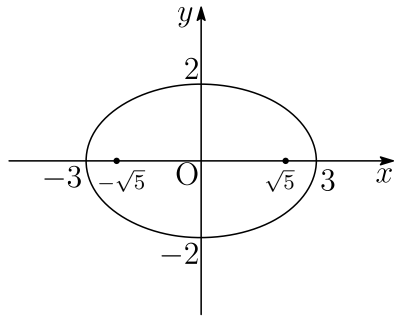
$$a=3,\ b=2,\ \sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$$

であるから

焦点の座標は　$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

長軸の長さは　$2\cdot3=6$,

短軸の長さは　$2\cdot2=4$



問 2.10 次の方程式の表す楕円について，焦点の座標，長軸・短軸の長さを求めよ．また，その楕円の概形をかけ．

(1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　　(2) $x^2+4y^2=4$

【解】

(1) $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ により

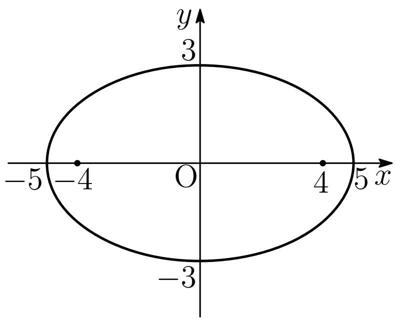
$$a=5,\ b=3,\ \sqrt{a^2-b^2}=4$$

であるから

焦点の座標は　$(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$

長軸の長さは　$2\cdot5=10$,

短軸の長さは　$2\cdot3=6$



(2) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1$ により

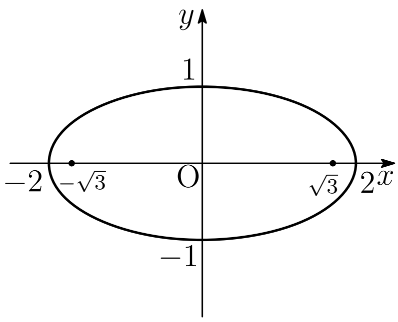
$$a=2,\ b=1,\ \sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$$

であるから

焦点の座標は　$(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$

長軸の長さは　$2\cdot2=4$,

短軸の長さは　$2\cdot1=2$



例 2.11　2 点 $(3,0)$，$(-3,0)$ を焦点とし，この 2 点からの距離の和が 10 であるような楕円の方程式を求めよ．

【解】 楕円の標準形 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ において

$$2a=10,\quad \sqrt{a^2-b^2}=3$$

を解いて，$a=5$，$b=4$　ゆえに　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

問 2.12　2 点 $(\sqrt{6},0)$，$(-\sqrt{6},0)$ を焦点とし，この 2 点からの距離の和が 6 であるような楕円の方程式を求めよ．

【解】 楕円の標準形 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ において

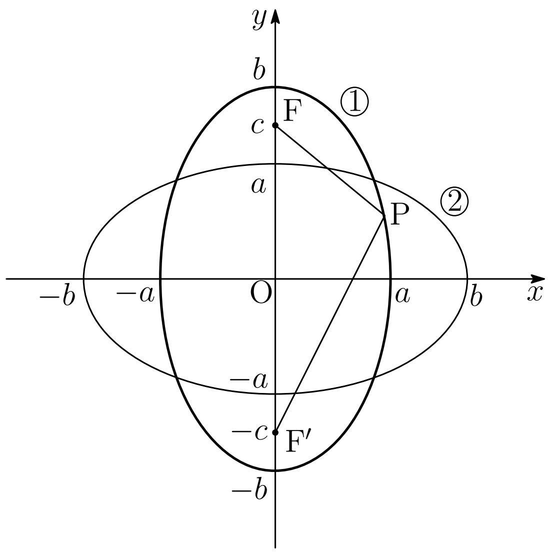
$$2a=6,\quad \sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{6}$$

を解いて，$a=3$，$b=\sqrt{3}$　ゆえに　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$

[y 軸上に焦点をもつ楕円]

これまでは $a>b>0$ であった．次に $b>a>0$ として，方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots ①$$
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \cdots ②$$

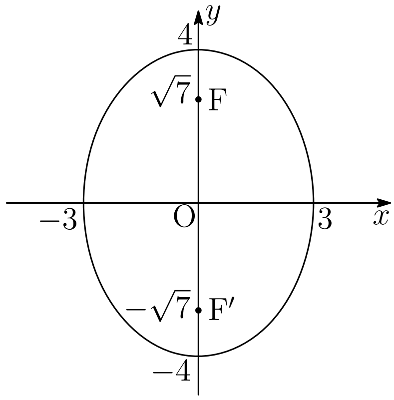


を考える．$c=\sqrt{b^2-a^2}$ とすると，曲線②は 2 点 $(c,0)$，$(-c,0)$ を焦点する楕円を表す．曲線 ②の x と y を入れ替えると曲線 ①になるから，曲線 ①は 2 点 $\mathrm{F}(0,c)$，$\mathrm{F}'(0,-c)$ を焦点とする楕円である．その長軸と短軸の長さは，それぞれ $2b$，$2a$ で，楕円 ①上の任意の点 P は，$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2b$ を満たす．

例 2.13 楕円 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$ について

$$a=3,\ b=4,\ \sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{7}$$

であるから
焦点の座標は　$(0,\sqrt{7})$,　$(0,-\sqrt{7})$,
長軸の長さは　$2{\cdot}4=8$,
短軸の長さは　$2{\cdot}3=6$
で，その概形は右の図のようになる．



問 2.14 次の方程式の表す楕円について，焦点の座標，長軸・短軸の長さを求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　(2) $9x^2+y^2=9$

【答】

(1) 焦点 $(0,\sqrt{5})$，$(0,-\sqrt{5})$，長軸の長さ 6，短軸の長さ 4

(2) 焦点 $(0,2\sqrt{2})$，$(0,-2\sqrt{2})$，長軸の長さ 6，短軸の長さ 2

問 2.15 2 点 $(0,4)$，$(0,-4)$ を焦点とし，この 2 点からの距離の和が 10 であるような楕円の方程式を求めよ．

【解】 楕円の標準形 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$ において

$$2b=10,\quad \sqrt{b^2-a^2}=4$$

を解いて，$a=3$，$b=5$　ゆえに　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$　**[終]**

方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ において，$a=b$ である場合には，方程式は $x^2+y^2=a^2$ となり，これは円を表している．

例 2.16 円 $x^2+y^2=9$ を y 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍すると，どんな曲線になるか.

【解】 円上の点 $\mathrm{P}(u,v)$ を y 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍した点を $\mathrm{Q}(x,y)$ とすると

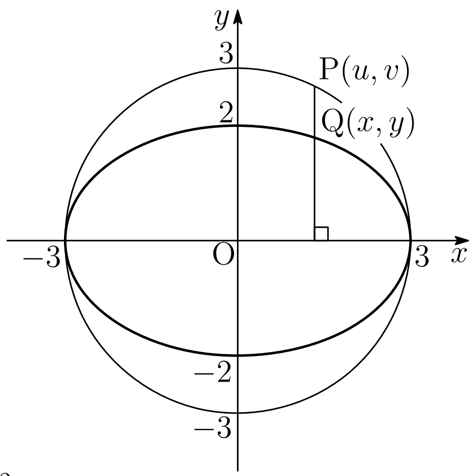
$$x=u,\quad y=\frac{2}{3}v$$

すなわち

$$u=x,\quad v=\frac{3}{2}y$$

$u^2+v^2=9$ から

$$x^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2=9$$



よって，円 $x^2+y^2=9$ は，楕円 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ になる.　**[終]**

問 2.17 円 $x^2+y^2=a^2$ を x 軸方向に，$\dfrac{b}{a}$ 倍に縮小または拡大した曲線の方程式を求め，その曲線が楕円であることを確かめよ.

【解】 円上の点 $\mathrm{P}(X,Y)$ を y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍した点を $\mathrm{Q}(x,y)$ とすると

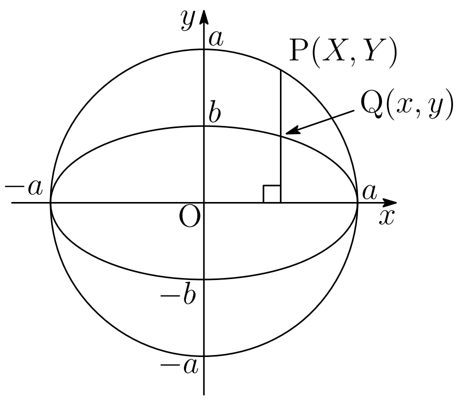
$$x=X,\quad y=\frac{b}{a}Y$$

すなわち

$$X=x,\quad Y=\frac{a}{b}y$$

$X^2+Y^2=a^2$ から

$$x^2+\left(\frac{a}{b}y\right)^2=a^2$$



よって，円 $x^2+y^2=a^2$ は，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ になる.　**[終]**

問 2.18 円 $x^2+y^2=16$ を次のように拡大または縮小したときの曲線の方程式を求めよ.

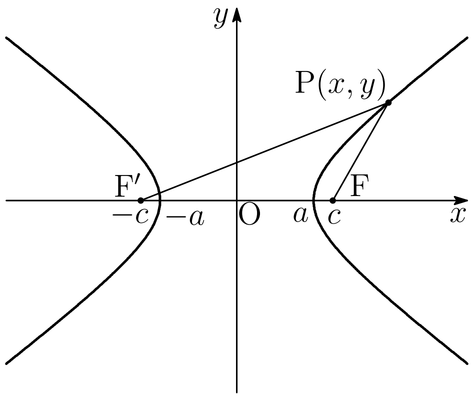
(1) y 軸方向に $\dfrac{3}{4}$ 倍　　(2) x 軸方向に 2 倍

【答】 (1) $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$　(2) $\dfrac{x^2}{8^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$

2.1.4　双曲線

平面上で，2定点F，F′ からの距離の差が一定である点Pの軌跡を**双曲線**といい，この2点F，F′ を双曲線の**焦点**という．

2点 $\mathrm{F}(c,0)$，$\mathrm{F}'(-c,0)$ を焦点とし，この2点からの距離の差が $2a$ となる点の描く双曲線の方程式を求めてみよう．ただし，$c > a > 0$ とする．



この双曲線上の点を $\mathrm{P}(x,y)$ とすると

$$\mathrm{FP} - \mathrm{F'P} = \pm 2a$$

よって

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$$

楕円の場合と同様に変形すると

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx$$
$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

$c > a$ であるから，$b = \sqrt{c^2-a^2}$ とおくと，$b > 0$ で

双曲線の方程式は　$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (2.2)$$

方程式 (2.2) を双曲線の方程式の**標準形**という．

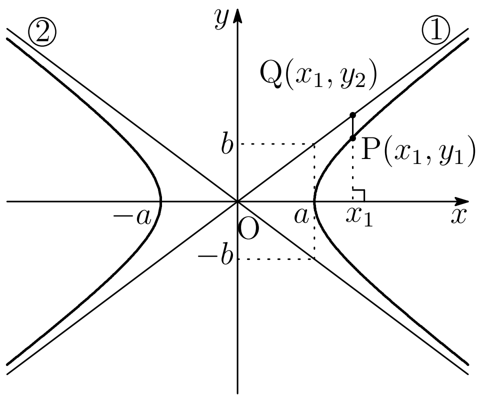
方程式 (2.2) を導くのに，$b = \sqrt{c^2-a^2}$ とおいたから，$c = \sqrt{a^2+b^2}$ となる．よって，2つの焦点F，F′ の座標は，次のようになる．

$$\mathbf{F}(\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}},\ \mathbf{0}),\quad \mathbf{F'}(-\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}},\ \mathbf{0})$$

双曲線の焦点F，F′ を結ぶ直線FF′ を双曲線の**主軸**，線分FF′ の中点を双曲線の**中心**という．また，直線FF′ と双曲線との交点を双曲線の**頂点**という．

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ では，頂点は2点 $(a,0)$，$(-a,0)$ で，中心は原点Oであり，曲線は x 軸，y 軸，原点に関して対称である．

[双曲線の漸近線]



2直線 $$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \cdots ①$$ $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \cdots ②$$

は，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の漸近線であることを示そう．

双曲線の第1象限内の部分を考えると，その方程式は

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad (x > a)$$

この曲線上の任意の点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ に対し，直線 $x = x_1$ と直線①との交点を $\mathrm{Q}(x_1, y_2)$ とすると

$$y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{{x_1}^2 - a^2}, \quad y_2 = \frac{b}{a}x_1$$

したがって，$y_1 < y_2$ となり

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ} = y_2 - y_1 &= \frac{b}{a}(x_1 - \sqrt{{x_1}^2 - a^2}) \\ &= \frac{b}{a}\cdot\frac{{x_1}^2 - (\sqrt{{x_1}^2 - a^2})^2}{x_1 + \sqrt{{x_1}^2 - a^2}} = \frac{ab}{x_1 + \sqrt{{x_1}^2 - a^2}} \end{aligned}$$

双曲線上の点Pが原点から限りなく遠くへ行くと，x_1 は限りなく大きくなるから，PQは限りなく0に近づき，双曲線の第1象限の部分は直線①に限りなく近づく．よって，直線①は双曲線の漸近線である．

上の双曲線と直線①は，どちらも原点Oに関して対称であるから，第3象限においても，直線①は双曲線の漸近線である．更に，上の双曲線は y 軸に関して対称であるから，第2，第4象限においては，直線①と y 軸に関して対称な直線②が双曲線の漸近線である．

双曲線についてまとめると，次のようになる．

双曲線

双曲線 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ の性質 ただし $a>0,\ b>0$

1 中心は**原点**，頂点は $\boldsymbol{(a, 0)}$，$\boldsymbol{(-a, 0)}$

2 焦点は $\boldsymbol{(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)}$，$\boldsymbol{(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)}$

3 双曲線は x 軸，y 軸，原点に関して対称

4 漸近線は $\boldsymbol{\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0}$，$\boldsymbol{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0}$

5 双曲線上の点から2つの焦点までの距離の差は $\boldsymbol{2a}$

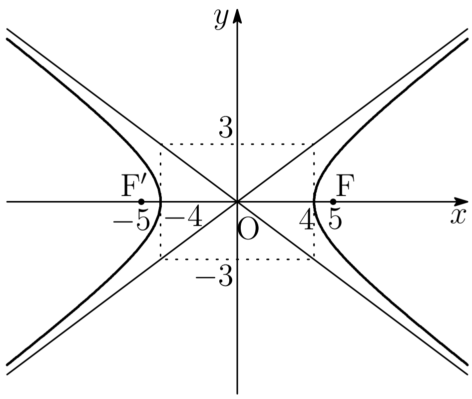
例 2.19 双曲線 $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$ について

$$a=4,\ b=3,\ \sqrt{a^2+b^2}=5$$

であるから
焦点の座標は　$(5,0)$，$(-5,0)$
頂点の座標は　$(4,0)$，$(-4,0)$
漸近線は，2直線

$$\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=0,\quad \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=0$$

であり，双曲線は右の図のようになる．

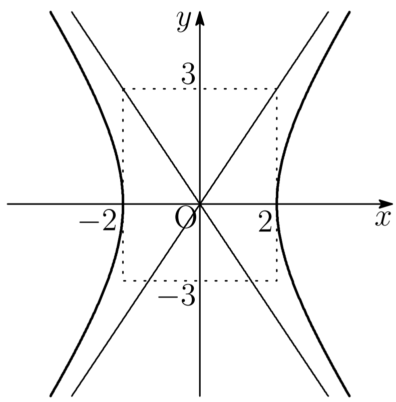


問 2.20 次の双曲線の焦点と頂点の座標，および漸近線の方程式を求めよ．また，双曲線の概形をかけ．

(1) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$　　(2) $x^2-y^2=1$

【解】

(1) $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$ により



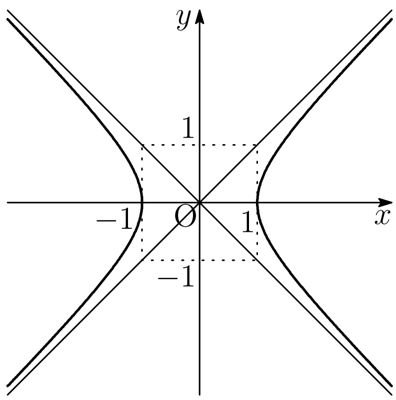
$$a=2,\ b=3,\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$$

であるから
焦点の座標は　$(\sqrt{13},\ 0)$，$(-\sqrt{13},\ 0)$
頂点の座標は　$(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$
漸近線は，2 直線

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=0,\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=0$$

であり，双曲線は，右の図のようになる．

(2) $\dfrac{x^2}{1^2}-\dfrac{y^2}{1^2}=1$ により



$$a=1,\ b=1,\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$$

であるから
焦点の座標は　$(\sqrt{2},\ 0)$，$(-\sqrt{2},\ 0)$
頂点の座標は　$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$
漸近線は，2 直線

$$x-y=0,\ x+y=0$$

であり，双曲線は，右の図のようになる．

[終]

上の問 2.20(2) の双曲線の漸近線は，すなわち $y=x$，$y=-x$ で，これらは互いに直交している．

このように，直交する漸近線をもつ双曲線を**直角双曲線**という．

例 2.21 2 点 $(5,0)$，$(-5,0)$ を焦点とし，この 2 点からの距離の差が 8 であるような双曲線の方程式を求めよ．

【解】 双曲線の標準形 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ において

$$2a=8,\quad \sqrt{a^2+b^2}=5$$

を解いて，$a=4$，$b=3$　ゆえに　$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

問 2.22 2点$(3,0)$，$(-3,0)$を焦点とし，この2点からの距離の差が4であるような双曲線の方程式を求めよ．

【解】 双曲線の標準形 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ において

$$2a=4,\quad \sqrt{a^2+b^2}=3$$

を解いて，$a=2$，$b=\sqrt{5}$　ゆえに　$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$

[焦点が y 軸上にある双曲線]

曲線 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=-1\quad\cdots①$

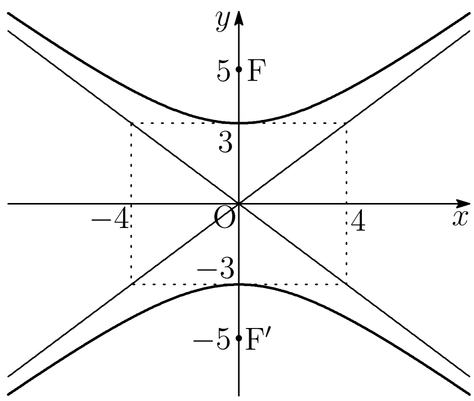
は，双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ の x と y を入れ替えたものである．

したがって，上の曲線①は，

頂点が $(0,3)$，$(0,-3)$
焦点が $(0,5)$，$(0,-5)$

の双曲線で，漸近線は

$$\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=0,\quad \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=0$$



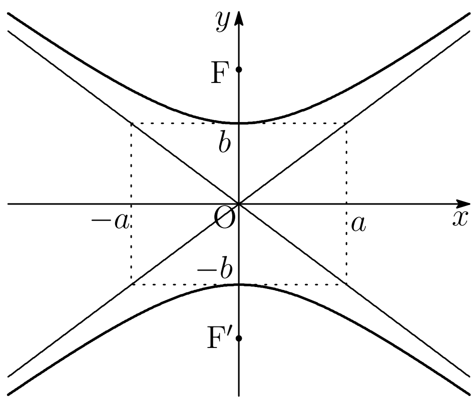
一般に，方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$

の表す曲線は

頂点が $(0,b)$，$(0,-b)$
焦点が $\mathrm{F}(0,\ \sqrt{a^2+b^2})$
　　　$\mathrm{F}'(0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$

の双曲線で，その漸近線の方程式は

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$



である．また，2つの焦点からの双曲線上までの距離の差は $2b$ である．

問 2.23 次の双曲線の頂点と焦点の座標，および漸近線の方程式を求めよ．また，双曲線の概形をかけ．

(1) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=-1$　　(2) $9x^2-4y^2=-36$　　(3) $x^2-y^2=-1$

【解】

(1) $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=-1$ により

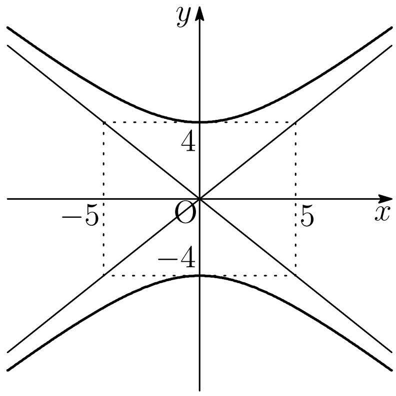
$$a=5,\ b=4,\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{41}$$

であるから

頂点が $(0,4),\ (0,-4)$
焦点が $(0,\sqrt{41}),\ (0,-\sqrt{41})$

漸近線は，2 直線

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=0,\quad \frac{x}{5}+\frac{y}{4}=0$$



(2) $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=-1$ により

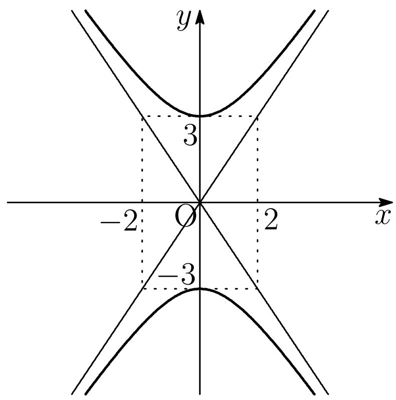
$$a=2,\ b=3,\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$$

であるから

頂点が $(0,3),\ (0,-3)$
焦点が $(0,\sqrt{13}),\ (0,-\sqrt{13})$

漸近線は，2 直線

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=0,\quad \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=0$$



(3) $\dfrac{x^2}{1^2}-\dfrac{y^2}{1^2}=-1$ により

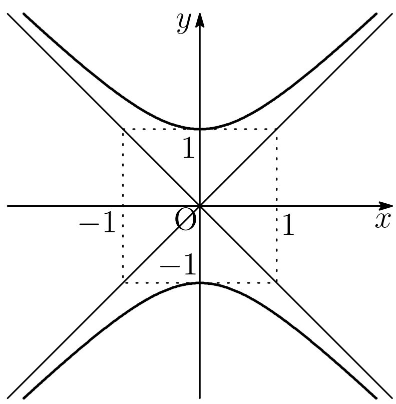
$$a=1,\ b=1,\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$$

であるから

頂点が $(0,1),\ (0,-1)$
焦点が $(0,\sqrt{2}),\ (0,-\sqrt{2})$

漸近線は，2 直線

$$x-y=0,\quad x+y=0$$



[2次曲線と円錐曲線]

円，楕円，双曲線，放物線は，それぞれ x，y の2次方程式

$$x^2+y^2=r^2, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad y^2=4px$$

で表されることから，これらの曲線をまとめて**2次曲線**という．

2次曲線は，図2.1，図2.2，図2.3のように，空間における円錐を，その頂点Oを通らない平面 α で切り取った切り口の曲線として現れることが知られている．そのため，2次曲線を**円錐曲線**とよぶことがある．更に，円と楕円は，直円柱をその軸と交わる平面で切った切り口の曲線でもある．

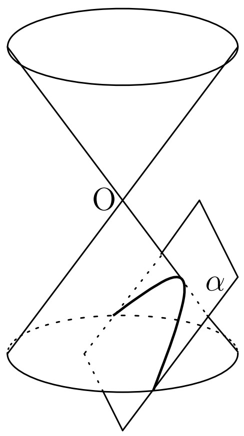


図 2.1: 放物線

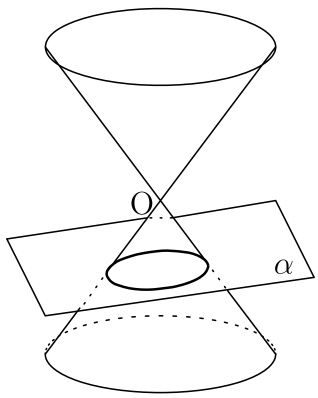


図 2.2: 楕円

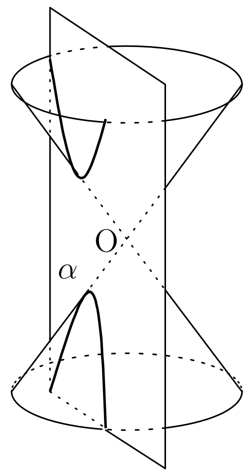
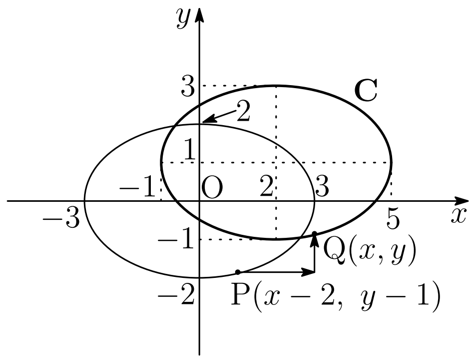


図 2.3: 双曲線

2.1.5　2次曲線の平行移動

2次関数のグラフの平行移動については，数学Iで学んだ．ここでは，$F(x,y)=0$ の形の方程式で表される曲線の平行移動について考えてみよう．ただし，k は定数とする．

例 2.24 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を，x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動して得られる楕円 $\mathbf{C}$ の方程式を求めよ．



【解】 C 上に任意の点 Q(x,y) をとり，この平行移動によって Q に移される点を P(X,Y) とすると

$$X=x-2,\quad Y=y-1$$

P は楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上にあるから，P の座標は次の式を満たす．

$$\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$$

この式に $X=x-2$，$Y=y-1$ を代入すると，求める式は

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

[終]

一般に，曲線の平行移動について，次のことが成り立つ．

曲線の平行移動

曲線 $F(x,y)=k$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して得られる曲線の方程式は

$$\boldsymbol{F(x-p,\ y-q)=k}$$

問 2.25 次の曲線を，x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動して得られる曲線の方程式を求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　　(2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$　　(3) $y^2=4x$

【答】 (1) $\dfrac{(x+2)^2}{4}+(y-3)^2=1$　(2) $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$　(3) $(y-3)^2=4(x+2)$

例 2.24で学んだように，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した楕円の方程式は

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 \qquad \cdots ①$$

である．分母を払って整理すると

$$4x^2+9y^2-16x-18y-11=0$$

逆に，この方程式が与えられたとき，これを ①の形に変形して，その表す曲線を調べることができる．

例 2.26 次の方程式はどのような図形を表すか.

$$4x^2 - 9y^2 - 16x - 36y - 56 = 0$$

【解】 この方程式を変形すると

$$4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 + 4y + 4) = 56 + 4{\cdot}4 - 9{\cdot}4$$

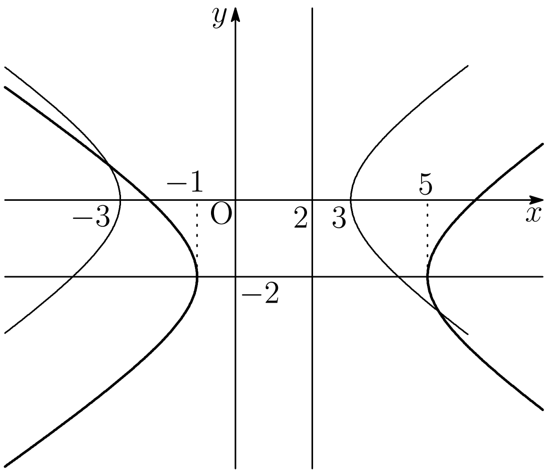
すなわち

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

この式は，双曲線

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

を x 軸方向に 2，y 軸方向に -2 だけ平行移動した双曲線を表す.　　**[終]**



問 2.27 次の方程式はどのような図形を表すか.

(1) $x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 13 = 0$　　　　(2) $x^2 + 8y + 16x = 0$

【解】

(1) この方程式を変形すると

$$(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - 4y + 4) = -13 + 1 + 4{\cdot}4$$
$$\frac{(x+1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$$

よって，この方程式は，楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した楕円を表す.

(2) この方程式を変形すると

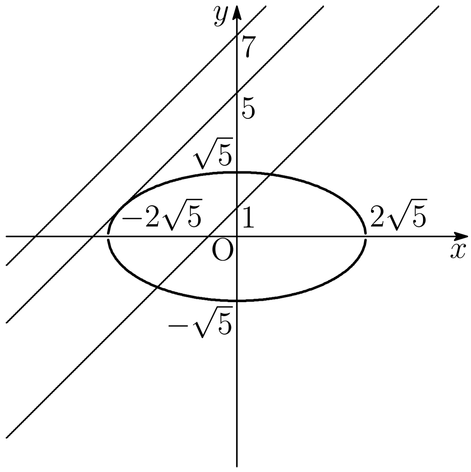
$$(y^2 + 8y + 16) = -16x + 16$$
$$(y+4)^2 = -16(x-1)$$

よって，この方程式は，放物線 $y^2 = -16x$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -4 だけ平行移動した放物線を表す.

2.1.6　２次曲線と直線の共有点

次の楕円と直線の共有点の個数について調べてみよう．

楕円　$x^2+4y^2=20$　$\cdots$①
直線　$y=x+k$　$\cdots$②



楕円 ①と $k=1,\ 5,\ 7$ のときの直線 ②を描くと，右の図のようになる．この図は ①と ②の共有点の個数が k の値によって，2，1，0 と変わることを示している．

楕円と直線の共有点の個数について正確に調べるには，楕円の方程式と直線の方程式を連立させた方程式の実数解の個数を調べればよい．

上の例では，②を ①に代入すると

$$x^2+4(x+k)^2=20$$

整理すると　$$5x^2+8kx+4k^2-20=0 \quad \cdots③$$

③の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(4k)^2-5(4k^2-20)=-4k^2+100=-4(k+5)(k-5)$$

よって，①と ②の共有点の個数は，次のようになる．

$k<-5,\ 5<k$	のとき	共有点は 0 個
$k=\pm5$	のとき	共有点は 1 個
$-5<k<5$	のとき	共有点は 2 個

２次曲線の方程式と，直線の方程式を連立させた連立方程式から，上の例のように 1 つの変数を消去して，他の変数の２次方程式が得られるときは，その判別式 D の符号をみると，２次曲線と直線の共有点の個数がわかる．

特に，$D=0$ の場合，２次曲線と直線の共有点は 1 つである．このとき，直線は２次曲線に**接する**といい，直線を２次曲線の**接線**，共有点をその**接点**という．

問 2.28 k を定数とする．次の曲線と直線の共有点の個数を調べよ．

(1) $y = kx$，$x^2 - y^2 = 1$　　(2) $y = 2x + k$，$2x^2 - y^2 = 4$

【解】

(1) 第1式を第2式に代入すると

$$x^2 - (kx)^2 = 1$$

整理すると　$$(1 - k^2)x^2 - 1 = 0$$

$k = \pm 1$ のとき，上式を満たす x は存在しない．

$k \neq \pm 1$ のとき

$$x^2 = \frac{1}{1 - k^2} = -\frac{1}{(k+1)(k-1)}$$

よって，曲線と直線の共有点の個数は

$k \leqq -1$，$1 \leqq k$　のとき　共有点は0個
$-1 < k < 1$　のとき　共有点は2個

(2) 第1式を第2式に代入すると

$$2x^2 - (2x + k)^2 = 4$$

整理すると　$$2x^2 + 4kx + k^2 + 4 = 0$$

上式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 2(k^2 + 4) = 2(k^2 - 4) = 2(k+2)(k-2)$$

よって，曲線と直線の共有点の個数は

$-2 < k < 2$　のとき　共有点は0個
$k = \pm 2$　のとき　共有点は1個
$k < -2$，$2 < k$　のとき　共有点は2個

例 2.29 点 A$(0,3)$ から楕円 $x^2+2y^2=2$ に引いた接線の方程式を求めよ．

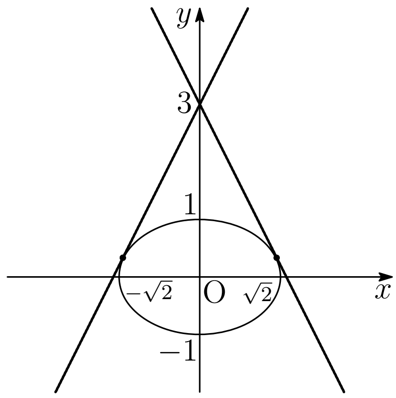
【解】

$$x^2+2y^2=2 \quad \cdots ①$$

とする．点 A$(0,3)$ から楕円 ①に引いた接線で，y 軸に平行な接線は存在しない．よって，接線の傾きを m とすると，接線の方程式は

$$y=mx+3 \quad \cdots ②$$

と表される．②を ①に代入すると



$$x^2+2(mx+3)^2=2$$

整理すると

$$(2m^2+1)x^2+12mx+16=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(6m)^2-(2m^2+1)\cdot 16=4(m+2)(m-2)$$

②が ①に接するための必要十分条件は

$$\frac{D}{4}=0 \qquad \text{すなわち} \qquad 4(m+2)(m-2)=0$$

ゆえに　$m=\pm 2$

よって，接線の方程式は　$y=2x+3$，$y=-2x+3$

問 2.30 例 2.29の直線と楕円について，次の問いに答えよ．

(1) 直線 ②が楕円 ①に接するとき，接点の座標を求めよ．

(2) 直線 ②が楕円 ①と共有点をもたないような m の値の範囲を求めよ．

【解】

(1) 接点の x 座標は 2 次方程式 $(2m^2+1)x^2+12mx+16=0$ の解であるから

$m=2$ のとき，$9x^2+24x+16=0$　を解いて　$x=-\dfrac{4}{3}$

したがって，直線 $y=2x+3$ との接点の座標は　$\left(-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

$m=-2$ のとき，$9x^2-24x+16=0$　を解いて　$x=\dfrac{4}{3}$

したがって，直線 $y=-2x+3$ との接点の座標は　$\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

(2) 共有点をもたないとき，$D<0$ であるから

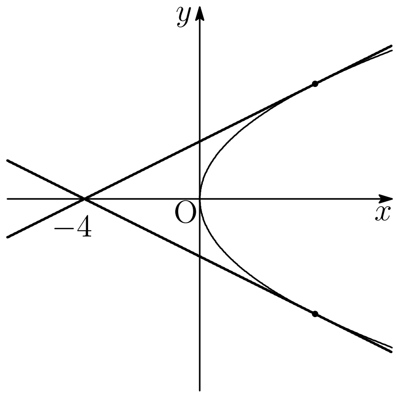
$$\frac{D}{4}=4(m+2)(m-2)<0 \quad \text{を解いて} \quad -2<m<2$$

問 2.31 点 A$(-4,0)$ から放物線 $y^2=4x$ に引いた接線の方程式を求めよ．

【解】 点 A$(-4,0)$ からこの放物線に引いた接線で，y 軸に平行な接線は存在しない．よって，接線の傾きを m とすると，接線の方程式は

$$y=m(x+4)$$

と表せる．この方程式を $y^2=4x$ に代入すると



$$\{m(x+4)\}^2=4x$$

整理すると

$$m^2x^2+4(2m^2-1)x+16m^2=0$$

$m=0$ のとき，直線 $y=0$ となり，これは求める接線ではない．
$m\neq 0$ のとき，この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{2(2m^2-1)\}^2-m^2{\cdot}16m^2=-4(4m^2-1)=-4(2m+1)(2m-1)$$

直線 $y=m(x+4)$ が放物線 $y^2=4x$ に接するための必要十分条件は

$$\frac{D}{4}=0 \qquad \text{すなわち} \qquad -4(2m+1)(2m-1)=0$$

ゆえに　　$m=\pm\dfrac{1}{2}$

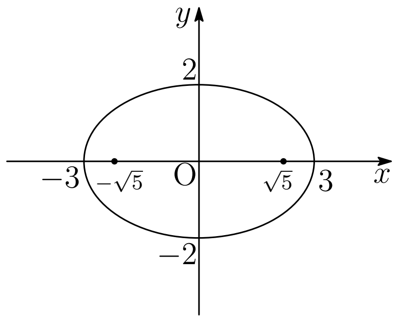
よって，接線の方程式は　$y=\dfrac{1}{2}x+2$，$y=-\dfrac{1}{2}x-2$

問題 2.32 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の表す図形を座標平面にかけ．(徳島大学工学部建設・電気電子・機械・知能情報工学科 H12)

【解】 楕円 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ により

$$a=3,\ b=2,\ \sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$$

であるから
焦点の座標は　$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$
長軸の長さは　$2\cdot3=6$,
短軸の長さは　$2\cdot2=4$



2.2　媒介変数表示と極座標

2.2.1　媒介変数表示

点 P の座標 x，y が変数 t によって

$$x=2(t-1),\quad y=t^2-2t+2 \qquad \cdots①$$

と表されているとき，例えば t を -1，0，1，2，3 とすると，P の座標は，それぞれ

$$(-4,5),\ (-2,2),\ (0,1),\ (2,2),\ (4,5)$$

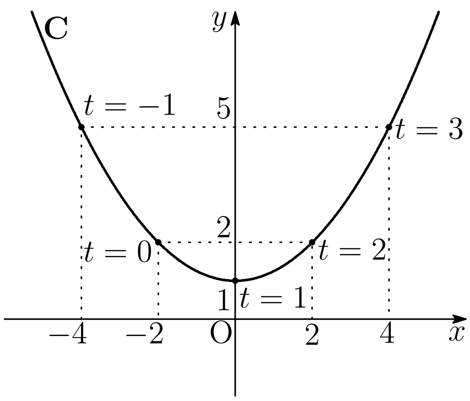
となる．これらの点を座標平面上にとることによって，点 P の軌跡をかくことができる．

①において，$x=2(t-1)$ を t について解くと　$t=\dfrac{x}{2}+1$

これを $y=t^2-2t+2$ に代入すると，次の等式が得られる．

$$y=\frac{1}{4}x^2+1 \qquad \cdots②$$

②は①から t を消去した式で，x のこの関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$ は，媒介変数を用いて①で表される．



一般に，平面上の曲線が1つの変数，例えば t によって

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

の形に表されたとき，これをその曲線の**媒介変数表示**といい，t を**媒介変数**という．

[注意] 媒介変数による表示の仕方は，一通りではない．

問 2.33 媒介変数で表された次の曲線は，どのような曲線となるか．

(1) $x = t + 1$，$y = 2t - 3$　　(2) $x = t - 1$，$y = t^2 + t$

【解】

(1) $x = t + 1$ から $t = x - 1$ を $y = 2t - 3$ に代入すると

$$y = 2(x-1) - 3 \quad \text{したがって} \quad y = 2x - 5$$

(2) $x = t - 1$ から $t = x + 1$ を $y = t^2 + t$ に代入すると

$$y = (x+1)^2 + (x+1) \quad \text{したがって} \quad y = x^2 + 3x + 2$$

[終]

放物線を媒介変数を用いて表してみよう．

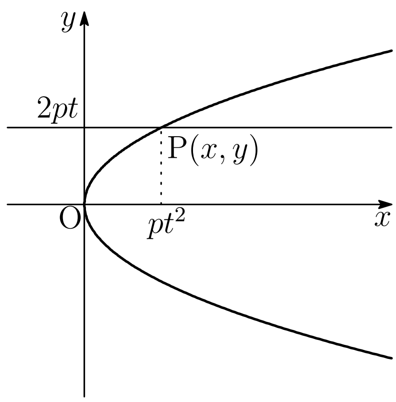
放物線 $y^2 = 4px$ と x 軸に平行な直線 $y = 2pt$ の交点を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると

$$x = pt^2, \quad y = 2pt$$

となり，放物線 $y^2 = 4px$ の媒介変数表示

$$\boldsymbol{x = pt^2, \quad y = 2pt}$$

が得られる．



[注意] 媒介変数表示 $x = pt^2$，$y = -2pt$ も放物線 $y^2 = 4px$ の媒介変数表示である．

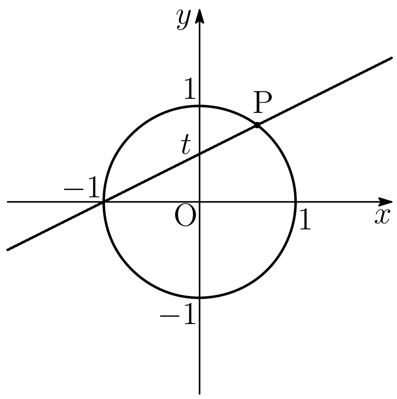
問 2.34 次の放物線を媒介変数 t を用いて表せ．

(1) $y^2 = 4x$　　(2) $y^2 = -8x$

【答】 (1) $x = t^2$，$y = 2t$　(2) $x = -2t^2$，$y = -4t$

例 2.35 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=t(x+1)$ との交点 $\mathrm{P}(x,y)$ について考え，この円の点 $(-1,0)$ を除いた部分を，t を媒介変数として表してみよう．

2 つの方程式から y を消去して



$$(x^2-1)+t^2(x+1)^2=0$$

左辺を因数分解して

$$(x+1)\{x-1+t^2(x+1)\}=0$$

ここで $x\neq -1$ であるから

$$x-1+t^2(x+1)=0$$

ゆえに　$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，　$y=\dfrac{2t}{1+t^2}$

これが求める媒介変数表示である．

問 2.36 放物線 $y^2=4x$ と直線 $y=tx$ との交点について考え，原点を除くこの放物線を，t を媒介変数として表せ．

【解】 2 つの方程式から y を消去して

$$(tx)^2-4x=0$$

左辺を因数分解して

$$x(t^2x-4)=0$$

ここで，$x\neq 0$ であるから　$t^2x-4=0$

ゆえに　　$x=\dfrac{4}{t^2}$，　$y=\dfrac{4}{t}$

これが求める媒介変数表示である．

例題 2.37 放物線 $y = x^2 + 2tx + 1$ の頂点 $\mathrm{P}(x, y)$ は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか.

【解】 放物線の方程式は

$$y = (x + t)^2 + 1 - t^2$$

と変形されるから，頂点 P が描く曲線は t を媒介変数として，次のように表される.

$$x = -t, \quad y = 1 - t^2$$

t を消去すると　$y = -x^2 + 1$

したがって，頂点 P が描く曲線は，放物線 $y = -x^2 + 1$ である.

問 2.38 放物線 $y = -x^2 + 4tx + 2t$ の頂点の座標は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか.

【解】 放物線の方程式は

$$y = -(x - 2t)^2 + 4t^2 + 2t$$

と変形されるから，頂点が描く曲線は t を媒介変数として，次のように表される.

$$x = 2t, \quad y = 4t^2 + 2t$$

t を消去すると　$y = x^2 + x$

したがって，頂点が描く曲線は，放物線 $y = x^2 + x$ である.

[円と楕(だ)円の媒介変数表示]

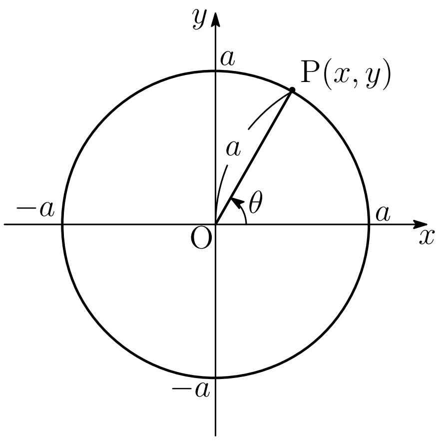
円の媒介変数表示について考えよう.
原点を中心とする半径 a の円

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{2.3}$$

上の点を $\mathrm{P}(x, y)$ とする.
動径 OP の表す角を θ とすると

$$\boldsymbol{x = a\cos\theta,\ y = \sin\theta} \tag{2.4}$$

よって，円 (2.3) は，θ を媒介変数として (2.4) のように表される.

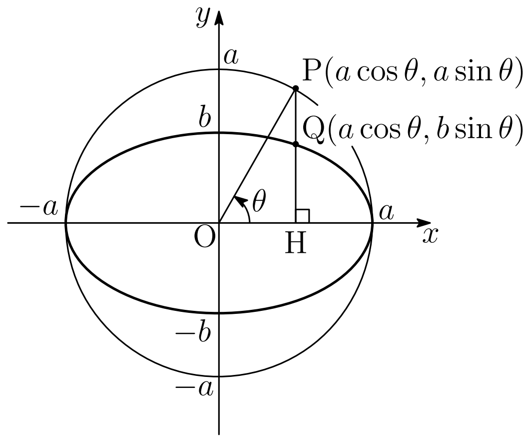


問 2.39 次の円を媒介変数 θ を用いて表せ.

(1) $x^2+y^2=1$ (2) $x^2+y^2=9$

【答】 (1) $x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$ (2) $x=3\cos\theta,\ y=3\sin\theta$

次に，円 (2.3) を，y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍に縮小または拡大した楕円について考えよう. ただし，$b>0$ とする.



円 (2.3) 上の点 P$(a\cos\theta, a\sin\theta)$ から x 軸に下ろした垂線を PH とし，PH 上に点 Q(x,y) を

$$\mathrm{QH}=\frac{b}{a}\mathrm{PH}$$

となるようにとると，次の式が成り立つ.

$$\boldsymbol{x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta} \qquad (2.5)$$

上の (2.5) は，楕円の媒介変数表示である.

問 2.40 次の楕円を媒介変数 θ を用いて表せ.

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ (2) $25x^2+4y^2=100$

【答】 (1) $x=3\cos\theta$，$y=2\sin\theta$ (2) $x=2\cos\theta$，$y=5\sin\theta$

[双曲線の媒介変数表示]

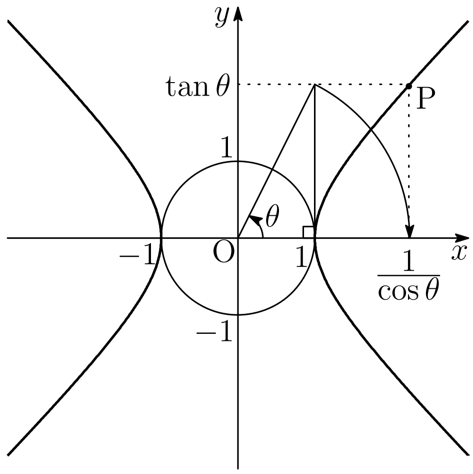
双曲線 $x^2-y^2=1$ を媒介変数 θ を用いて表してみよう.

三角関数の性質から

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$
$$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

が成り立つ．ゆえに

$$\frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$$



よって，点 P $\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta\right)$ は，双曲線 $x^2-y^2=1$ 上にある.

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから　$\dfrac{1}{\cos\theta} \leqq -1$，$1 \leqq \dfrac{1}{\cos\theta}$

また，$\tan\theta$ は任意の実数値をとる．

したがって，角 θ が動くと，点 P は双曲線上の点すべてを動く．

よって，双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の媒介変数表示は，次のようになる．

$$x = \frac{1}{\cos\theta}, \quad y = \tan\theta$$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の媒介変数表示は，$x^2 - y^2 = 1$ の媒介変数表示を利用すると

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \frac{y}{b} = \tan\theta$$

であるから，次のようになる．

$$\boldsymbol{x = \frac{a}{\cos\theta}, \quad y = b\tan\theta}$$

問 2.41 次の双曲線を媒介変数 θ を用いて表せ．

(1) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$　　(2) $25x^2 - 4y^2 = 100$

【答】 (1) $x = \dfrac{3}{\cos\theta}$，$y = 2\tan\theta$　(2) $x = \dfrac{2}{\cos\theta}$，$y = 5\tan\theta$

例 2.42 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか．

$$x = 2\cos\theta + 3, \quad y = 2\sin\theta + 1$$

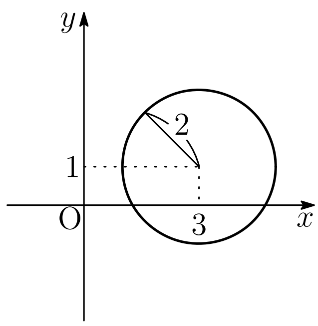
【解】 $\sin\theta = \dfrac{y-1}{2}$，$\cos\theta = \dfrac{x-3}{2}$

であるから

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

に代入して

$$\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$$



よって

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

したがって，中心が $(3, 1)$，半径が 2 の円を表す．　**[終]**

一般に，曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，曲線 $x=f(t)+p$，$y=g(t)+q$ になる．

問 2.43 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか．

(1) $x=2\cos\theta+3$，$y=2\sin\theta-1$

(2) $x=2\cos\theta-1$，$y=3\sin\theta+2$

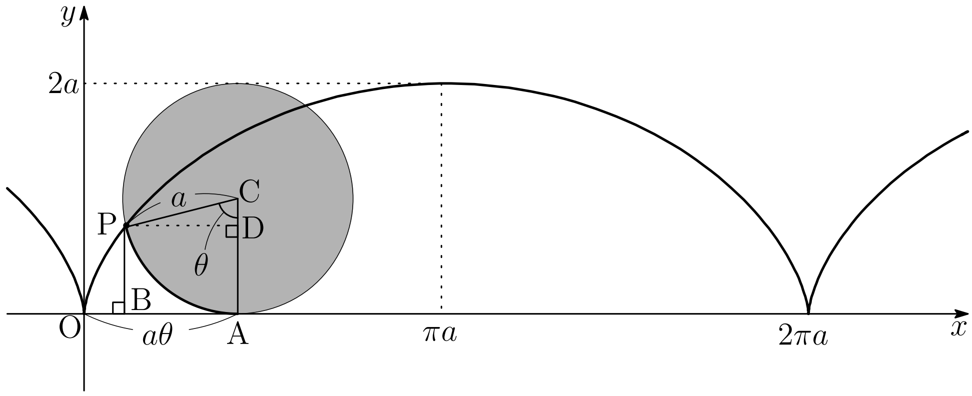
(3) $x=\dfrac{3}{\cos\theta}+3$，$y=2\tan\theta+1$

【答】 (1) 円 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ (2) 楕円 $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$
(3) 双曲線 $\dfrac{(x-3)^2}{9}-\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

[サイクロイド]

1つの円 C が定直線に接しながら，すべることなく回転するとき，円周上の定点 P が描く軌跡を**サイクロイド**という．

円の半径を r として，サイクロイドの媒介変数表示を求めてみよう．



上の図のように，定直線を x 軸とし，P の最初の位置を原点 O として，円が角 θ だけ回転したときの P の座標を (x,y) とする．

このとき，図において，$\mathrm{OA}=$ 弧 $\mathrm{AP}=a\theta$ であるから

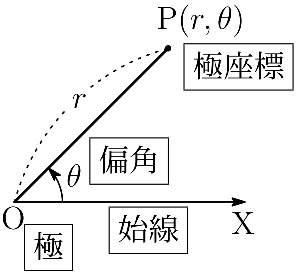
$$x=\mathrm{OB}=\mathrm{OA}-\mathrm{BA}=\mathrm{OA}-\mathrm{PD}=a\theta-a\sin\theta$$
$$y=\mathrm{BP}=\mathrm{AD}=\mathrm{AC}-\mathrm{DC}=a-a\cos\theta$$

よって，サイクロイドは θ を媒介変数として，次のように表される．

$$\boldsymbol{x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta)}$$

2.2.2　極座標と極方程式

平面上に点Oと半直線OXを定めると，平面上の任意の点Pの位置は，OPの長さrとOXからOPへ測った角θで決まる．このとき，2つの数の組(r, θ)を点Pの**極座標**といい，定点Oを**極**，半直線OXを**始線**，角θを**偏角**という．偏角θは弧度法で表す．



極Oの極座標は，θを任意の数として$(0, \theta)$と定める．

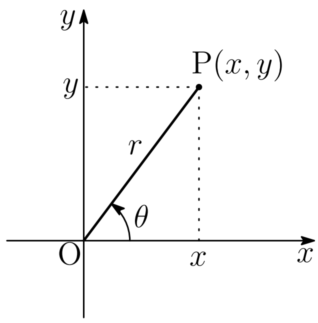
極座標では，nを整数とするとき，(r, θ)と$(r, \theta+2n\pi)$は同じ点を表すから，ある点Pの極座標は1通りには定まらない．

しかし，極O以外の点に対して，$0 \leqq \theta < 2\pi$と制限すると，Pの極座標(r, θ)は1通りに定まる．

極座標に対して，これまでのように，平面上に直交するx軸とy軸をとり，点をそのx座標とy座標の組(x, y)で表したものを**直交座標**という．

座標平面においては，原点Oを極，x軸の正の部分を始線とする極座標を考える．

点Pの極座標(r, θ)と直交座標(x, y)の間には，次のような関係がある．



極座標と直交座標

1　$\boldsymbol{x = r\cos\theta}$,　$\boldsymbol{y = r\sin\theta}$

2　$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$,　$\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{x}{r}}$,　$\boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{y}{r}}$

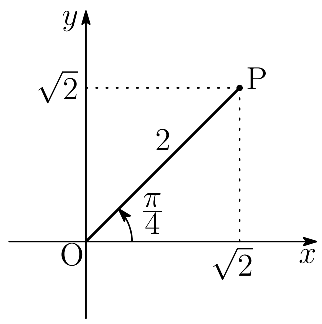
例 2.44　極座標$\left(2,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$である点Pの直交座標$(x, y)$

$r = 2$，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$　であるから

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$y = r\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

よって，Pの直交座標は　$(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$



問 2.45　次の極座標をもつ点の直交座標を求めよ．

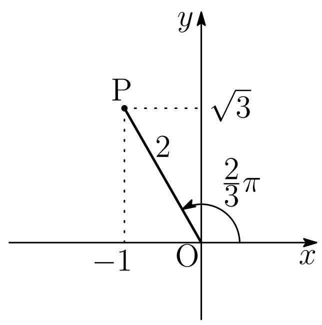
(1) $\left(2,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2) $\left(2,\ \dfrac{4}{3}\pi\right)$　　(3) $\left(3,\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$

【答】 (1) $(\sqrt{3},\ 1)$ (2) $(-1,\ -\sqrt{3})$ (3) $\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2},\ -\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)$

例 2.46 直交座標が $(-1, \sqrt{3})$ である点 P の極座標 $(r,\ \theta)$ を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

【解】 $x = -1$，$y = \sqrt{3}$ であるから

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



これを満たす θ は　$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$

よって，P の極座標は $\left(2,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$

問 2.47 直交座標が $\left(-\sqrt{3},\ -1\right)$ である点の極座標 (r, θ) を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

【答】 $\left(2,\ \dfrac{7}{6}\pi\right)$

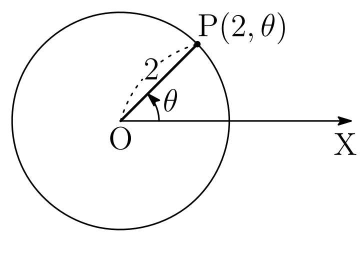
[極方程式]

円や直線の方程式を，極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表してみよう．

例 2.48 原点を中心とする半径 2 の円．
この円上の点 P の極座標を (r, θ) とすると

$$r = 2,\ \theta\text{は任意の値}$$

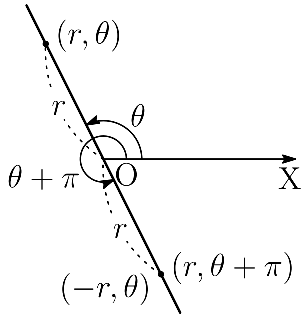
となる．したがって，この円は $r = 2$ で表される． **[終]**



ある曲線が極座標 (r, θ) に関する方程式

$$r = f(\theta) \quad や \quad F(r, \theta) = 0$$

で表されるとき，この方程式を曲線の**極方程式**という．



極方程式においては，r が負である極座標の点も考える．すなわち，$r > 0$ のとき，極座標が $(-r, \theta)$ である点は，極座標が $(r, \theta+\pi)$ である点と考える．

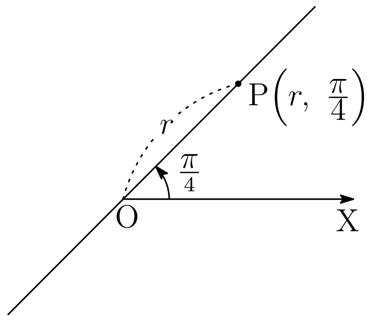
例 2.49 原点を通り，x 軸の正の向きとなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ の直線．

この直線上の点 P の極座標を (r, θ) とすると

r は任意の値

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$

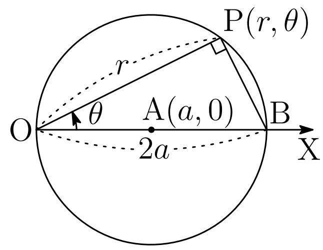
となる．したがって，この直線は $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ で表される．



例 2.50 中心 A の極座標が $(a, 0)$ で，半径が a の極方程式は

$$r = 2a\cos\theta$$

である．

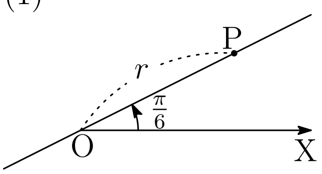


問 2.51 次の極方程式で表される曲線を図示せよ．

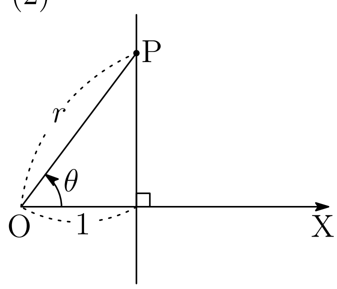
(1) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$　　(2) $r\cos\theta = 1$　　(3) $r = 2\cos\theta$

【答】

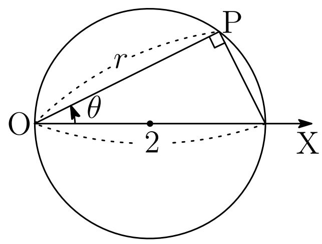
(1)



(2)

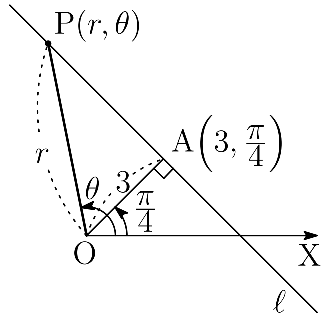


(3)



例 2.52 点 A の極座標を $\left(3, \dfrac{\pi}{4}\right)$ とするとき，点 A を通り，OA に垂直な直線 ℓ の極方程式は $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ であることを示せ.

【解】 直線 ℓ 上の点 P の極座標を (r, θ) とすると



$$\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOP} = OA$$

ここで $\mathrm{OP} = r$

$$\angle\mathrm{AOP} = \theta - \frac{\pi}{4}$$

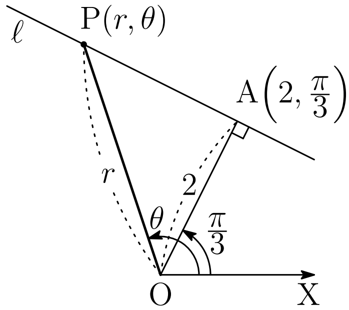
$$\mathrm{OA} = 3$$

であるから，極方程式は

$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 3$$

問 2.53 極方程式 $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = 2$ で表される曲線を図示せよ.

【解】 点 A の極座標を $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$，直線 ℓ 上の点 P の極座標を (r, θ) とすると



$$\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOP} = \mathrm{OA}$$

ここで $\mathrm{OP} = r$

$$\angle\mathrm{AOP} = \theta - \frac{\pi}{3}$$

$$\mathrm{OA} = 2$$

であるから，極方程式

$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$$

の表す図形は，右図の直線 ℓ である.

例題 2.54 点 A の極座標を $(2, 0)$ とする．焦点が極 O で，A を通り始線に垂直な直線 ℓ を準線とする放物線の極方程式を求めよ．

【解】 放物線上の点 P の極座標を (r, θ) とし，点 P から準線 ℓ に下ろした垂線を PH とすると，放物線の性質から

$$\mathrm{OP} = \mathrm{PH}$$

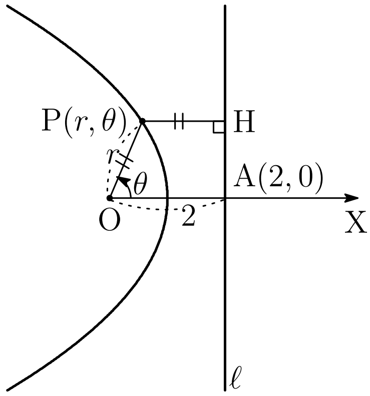
が成り立つ．ここで

$$\mathrm{OP} = r,\ \mathrm{PH} = 2 - r\cos\theta$$

であるから

$$r = 2 - r\cos\theta$$

よって　$r = \dfrac{2}{1+\cos\theta}$



問 2.55 焦点が極 O で，点 $\left(2, \dfrac{3}{2}\pi\right)$ を通り始線に平行な直線を準線とする放物線の極方程式を求めよ．

【解】 放物線上の点 P の極座標を (r, θ) とし，点 P から準線 ℓ に下ろした垂線を PH とすると，放物線の性質から

$$\mathrm{OP} = \mathrm{PH}$$

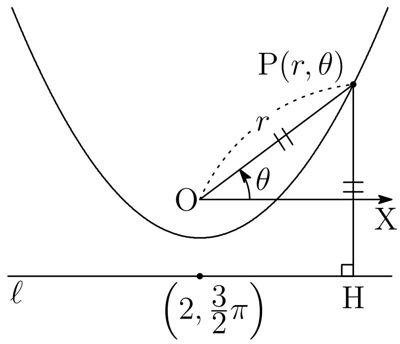
が成り立つ．ここで

$$\mathrm{OP} = r,\ \mathrm{PH} = 2 + r\sin\theta$$

であるから

$$r = 2 + r\sin\theta$$

よって　$r = \dfrac{2}{1-\sin\theta}$



直交座標に関する方程式で与えられた曲線を，極方程式で表すことを考えよう．

例題 2.56 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を極方程式で表せ．

【解】 $x^2 - y^2 = 1$ に $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ を代入すると

$$r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$$

よって $$r^2\cos 2\theta = 1$$

問 2.57 次の曲線を極方程式で表せ．

(1) $x^2 + 2y^2 = 4$　　(2) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

【答】 (1) $r^2(1 + \sin^2\theta) = 4$　(2) $r = 2\cos\theta$

極方程式で表された曲線を，直交座標に関する方程式で表すことを考えよう．

例題 2.58 極方程式 $r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$ の表す曲線を，直交座標に関する方程式で表し，それがどのような曲線であるかを調べよ．

【解】 $$r = 2(\cos\theta + \sin\theta) \quad \cdots ①$$

とする．①の表す曲線上の点 P の極座標を (r, θ) とし，直交座標を (x, y) とすると

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

であるから，これらを ①に代入すると

$$r = 2\left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}\right) \qquad \text{よって} \qquad r^2 = 2(x + y)$$

一方，$r^2 = x^2 + y^2$ であるから

$$x^2 + y^2 = 2(x + y)$$

ゆえに $$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

したがって，曲線は中心が $(1, 1)$，半径が $\sqrt{2}$ の円である．　**[終]**

問 2.59 次の極方程式の表す曲線を，直交座標に関する方程式で表せ.

(1) $r^2 \sin 2\theta = 2$　　　(2) $r = 2\sin\theta$

【解】

(1) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ であるから，与式は

$$2r\cos\theta{\cdot}r\sin\theta = 2$$

$r\cos\theta = y$，$r\sin\theta = y$ により $xy = 1$

(2) $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ であるから，与式は

$$r = 2{\cdot}\frac{y}{r} \quad \text{よって} \quad r^2 = 2y$$

一方，$r^2 = x^2 + y^2$ であるから

$$x^2 + y^2 = 2y$$

ゆえに　$x^2 + (y-1)^2 = 1$

[媒介変数で表された曲線]

有理数 a，b に対して，媒介変数表示 $x = \sin at$，$y = \sin bt$ で表される曲線を**リサージュ曲線**という．$a = 2$，$b = 3$ のときの曲線は，図 2.4のようになる．

極方程式 $r = a\theta$ $(\theta \geqq 0)$ で表される曲線を，**アルキメデスの渦巻線**という (図 2.5).

有理数 a に対して，極方程式 $r = \sin a\theta$ で表される曲線を**正葉曲線**という．例えば，$a = 5$ のときの曲線は，図 2.6のようになる．

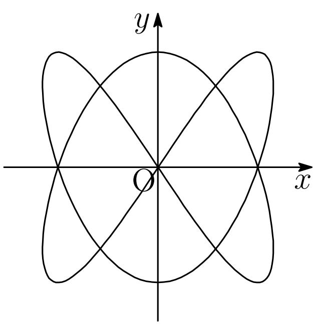


図 2.4: リサージュ曲線

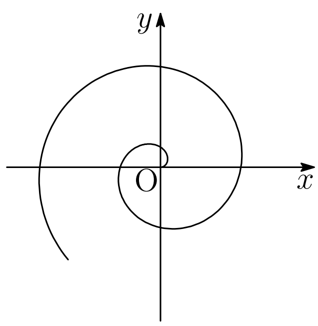


図 2.5: アルキメデスの渦巻線

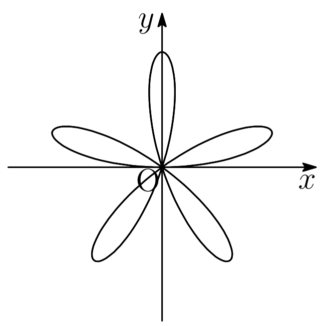


図 2.6: 正葉曲線

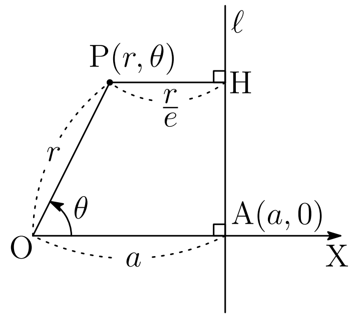
［２次曲線の定義の統一］

極座標が $(a, 0)$ である点 A を通り，始線 OX に垂直な直線 ℓ がある．
点 P から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき

$$e = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}} \quad \cdots ①$$

の値が一定であるような点 P の軌跡は，2 次曲線になる．e を**離心率**という．
その 2 次曲線の極方程式を求めてみよう．

２次曲線上の任意の点 P の極座標を (r, θ) とすると，$\mathrm{OP} = r$ と ①から



$$\mathrm{PH} = \frac{r}{e}$$

また

$$\mathrm{PH} = a - r\cos\theta$$

よって

$$\frac{r}{e} = a - r\cos\theta$$

ゆえに，２次曲線の極方程式は，次のようになる．

$$r = \frac{ea}{1 + e\cos\theta} \quad \cdots ②$$

２次曲線の極方程式において，次のことが成り立つ．

$0 < e < 1$	のとき	②は楕円を表す．
$e = 1$	のとき	②は放物線を表す．
$e > 1$	のとき	②は双曲線を表す．