高校生の

新　編　数　学　C

書込みノート

平成 20 年 9 月 3 日

Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

目 次

第 1 章　行列

1.1　行列の演算

1.1.1　行列

A》行列

右の表は，2 つの店 P，Q における 3 種類の商品 R，S，T の単価を示したものである．
この表から，数値だけを同じ並びのまま抜き出して，両側をかっこで囲んで，右のように書くことにする．

	R	**S**	**T**
P 店	80 円	50 円	60 円
Q 店	90 円	40 円	70 円

$$\begin{pmatrix} 80 & 50 & 60 \\ 90 & 40 & 70 \end{pmatrix}$$

このように，いくつかの数を長方形状に書き並べ，両側をかっこで囲んだものを**行列**といい，かっこの中のそれぞれの数を，この行列の**成分**という．

行列において，成分の横の並びを**行**といい，上から順に，第 1 行，第 2 行，$\cdots$ という．
また，成分の縦の並びを**列**といい，左から順に，第 1 列，第 2 列，$\cdots$ という．

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 7 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \textbf{第 1 行} \\ \leftarrow \textbf{第 2 行} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \textbf{第 1 列} & \textbf{第 2 列} & \textbf{第 3 列} \end{array} & \end{array}$$

行数が m，列数が n の行列を，$\boldsymbol{m}$ **行** $\boldsymbol{n}$ **列の行列**または $\boldsymbol{m \times n}$ **行列**という．とくに，行数と列数が等しい $n \times n$ 行列を $\boldsymbol{n}$ **次の正方行列**という．

例 1.1　$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ は，2 行 3 列の行列である．

$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ は，2×2 行列，すなわち 2 次の正方行列である．

練習 1.1 次の行列は何行何列の行列か．また，正方行列はどれか．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

行列の中でも，$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ のように行が 1 行だけの行列を**行ベクトル**，$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ のように列が 1 列だけの行列を**列ベクトル**ということがある．

行列は大文字 A，B などで表し，成分は小文字 a，b，c などで表すことが多い．また，成分については，第 i 行と第 j 列の交点にある成分を **$(i,\ j)$ 成分**という．

(1, 2) 成分

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

練習 1.2 練習 1.1(2) の行列について，次の成分をいえ．

(1) $(3,\ 2)$ 成分 (2) $(1,\ 3)$ 成分 (3) $(3,\ 3)$ 成分

B 》 行列の相等

行列 A，B が，行数が等しく，列数も等しいとき，A と B は**同じ型**であるという．また，A と B が同じ型の行列で，しかも対応する $(i,\ j)$ 成分がすべて一致するとき，A と B は**等しい**といい，$\boldsymbol{A = B}$ と書く．

たとえば，2 次の正方行列では，次のようになる．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \quad \text{のとき}$$
$$A = B \iff a = p,\ b = q,\ c = r,\ d = s$$

練習 1.3 次の等式が成り立つとき，x，y，z，w の値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ x & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z & w \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2x + y \\ x - 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.1.2 行列の加法・減法と実数倍

A 》行列の和と差

2つの行列A，Bは同じ型であるとする．このとき，A，B の $(i,\ j)$ 成分の和を $(i,\ j)$ 成分とする行列を，A と B の**和**といい，$\boldsymbol{A+B}$ と書く．また，A，B の $(i,\ j)$ 成分の差を $(i,\ j)$ 成分とする行列を，A と B の**差**といい，$\boldsymbol{A-B}$ と書く．

注意 型の異なる2つの行列については，和，差を定義しない．

2次の正方行列では，和と差は次のようになる．

行列の和と差

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{r} & \boldsymbol{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a+p} & \boldsymbol{b+q} \\ \boldsymbol{c+r} & \boldsymbol{d+s} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{r} & \boldsymbol{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a-p} & \boldsymbol{b-q} \\ \boldsymbol{c-r} & \boldsymbol{d-s} \end{pmatrix}$$

例 1.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ のとき

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+4 & 3+0 \\ -2+2 & 5+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1-4 & 3-0 \\ -2-2 & 5-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

練習 1.4 次の計算をせよ．

(1) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 & -7 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

行列 A の各成分の符号を変えた数を成分とする行列を $-\boldsymbol{A}$ で表す.
2次の正方行列では，次のようになる.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ について } \qquad -\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -\boldsymbol{a} & -\boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c} & -\boldsymbol{d} \end{pmatrix}$$

練習 1.5 次の行列 A について，$-A$ および $A+(-A)$ を求めよ.

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $A=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

成分がすべて 0 である行列を**零**(れい)**行列**という.
たとえば，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ などは，どれも零行列である．これらは，いずれも文字 $\boldsymbol{O}$ で表すことにする.

B》加法についての性質

行列の和の定義から，行列の加法について，次の性質が成り立つ.

加法についての性質

1	$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$	交換法則
2	$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$	結合法則
3	$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$	
4	$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$	

2 が成り立つので，この3つの行列の和を $A+B+C$ と書く.
また，次の性質が成り立つ.

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$$

練習 1.6 次の計算をせよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

C ≫ 行列の実数倍

k を実数とするとき，行列 A の各成分の k 倍を成分とする行列を $\boldsymbol{kA}$ と書く．2 次の正方行列では，次のようになる．

行列の実数倍

k を実数とするとき $\quad \boldsymbol{k}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ka} & \boldsymbol{kb} \\ \boldsymbol{kc} & \boldsymbol{kd} \end{pmatrix}$

練習 1.7 $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ のとき，次の行列を求めよ．

(1) $3A$　　(2) $\dfrac{1}{2}A$

(3) $(-2)A$　　(4) $(-1)A$

行列の実数倍の定義から，次の性質が成り立つ.

$$\boldsymbol{1A = A} \qquad \boldsymbol{(-1)A = -A} \qquad \boldsymbol{0A = O} \qquad \boldsymbol{kO = O}$$

注意 $(-2)A = -(2A)$ が成り立つので，これらを単に $-2A$ と書く.

また，行列の実数倍について，次の性質が成り立つ.

実数倍についての性質

k，l は実数とする.

1　$\boldsymbol{k(lA) = (kl)A}$　　**2**　$\boldsymbol{(k+l)A = kA + lA}$

3　$\boldsymbol{k(A+B) = kA + kB}$

練習 1.8 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ と $k = 2$，$l = 3$ について，次の各等式が成り立つことを確かめよ.

(1) $k(lA) = (kl)A$

(2) $(k+l)A = kA + lA$

(3) $k(A+B) = kA + kB$

これまで調べた性質により，行列 A，B などを含む加法，減法，実数倍の計算は，文字式の計算と同じように行うことができる.

例 1.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$\begin{aligned} 3(A+2B) - 2A &= 3A + 6B - 2A = A + 6B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -4 \\ -12 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

練習 1.9 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，次の式を計算せよ．

(1) $2(3A + B)$

(2) $3(A - 2B)$

(3) $2(2A - B) + 3B$

例題 1.1　$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，等式 $2(A+X) = A+3B$ を満たす行列 X を求めよ．

解答　$2(A+X) = A+3B$ から　$2X = -A+3B$

よって
$$X = \frac{1}{2}(-A+3B) = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

練習 1.10　行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，次の等式を満たす行列 X を求めよ．

(1)　$2A+3X = B$

(2)　$3(A+X) = X+2B$

1.1.3　行列の乗法

A ≫ 行列の積

1 ページに示した 2 つの店 P，Q で，商品 R を 2 個，商品 S を 3 個買うとき，P 店，Q 店での合計代金は，それぞれ

	R	**S**
P 店	80 円	50 円
Q 店	90 円	40 円

P 店：　$80 \times 2 + 50 \times 3 = 310$ (円)
Q 店：　$90 \times 2 + 40 \times 3 = 300$ (円)

である．

これらの計算を，まとめて次のように書くことにする．

$$\begin{pmatrix} 80 & 50 \\ 90 & 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 310 \\ 300 \end{pmatrix}$$

一般に，行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の**積**を次の式で定める．

$$\boxed{\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ax+by} \\ \boldsymbol{cx+dy} \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

例 1.4

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{\cdot}5 + 1{\cdot}(-6) \\ 4{\cdot}5 + 2{\cdot}(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

練習 1.11 次の積を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

B》2 次の正方行列の積

2 次の正方行列どうしの**積**を次の式で定める．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{r} & \boldsymbol{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ap+br} & \boldsymbol{aq+bs} \\ \boldsymbol{cp+dr} & \boldsymbol{cq+ds} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

例 1.5 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{\cdot}5+2{\cdot}6 & 1{\cdot}7+2{\cdot}8 \\ 3{\cdot}5+4{\cdot}6 & 3{\cdot}7+4{\cdot}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{pmatrix}$

練習 1.12 次の積を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

C》一般の行列の積

A が $l \times m$ 行列，B が $m \times n$ 行列のとき，**積 $\boldsymbol{AB}$** を，A の第 i 行と B の第 j 列の成分を順に掛けて加えたものを $(i,\ j)$ 成分とする $l \times n$ 行列であると定める．行列 A の列数と行列 B の行数が一致しない場合は，A と B の積を定めない．

例 1.6 (1) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}$$

$\longleftarrow 3 \times 3$ 行列と
3×1 行列の
積は 3×1 行列

(2) $$\begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 2 = 7$$

$\longleftarrow 1 \times 2$ 行列と
2×1 行列の
積は 1×1 行列

注意 例 1.6(2) のように，1×1 行列はかっこを省略することが多い．

練習 1.13 次の積を計算せよ．

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1.1.4 行列の乗法の性質

A 》 乗法の計算法則

行列の乗法について，次の計算法則が成り立つ．

行列の乗法の計算法則

1 $(\boldsymbol{kA})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{kB}) = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{AB})$ k は実数

2 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 結合法則

3 $\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}\end{aligned}\right\}$ 分配法則

1 が成り立つので，$(kA)B$ と $k(AB)$ を区別せずに kAB と書く．また，**2** が成り立つので，行列 A，B，C の積を ABC と書く．

練習 1.14 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ について，次の各等式が成り立つことを確かめよ．

(1) $(2A)B = A(2B) = 2(AB)$

(2) $(A+B)C = AC + BC$

練習 1.15 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

B 》積 AB と積 BA の違い

12 ページで述べたように，行列の乗法についても，数の場合と同様に結合法則，分配法則が成り立つ．数の乗法では，交換法則も成り立つが，行列の乗法ではどうだろうか．このことについて調べてみよう．

例 1.7　$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ について

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

よって，この行列 A，B については，$AB \neq BA$ である．

上の例 1.7 からもわかるように，次のことがいえる．

正方行列の乗法では，交換法則は一般には成り立たない．

同じ次数の正方行列 A，B について，$AB = BA$ となる場合もある．このとき，A と B は**交換可能**であるという．

練習 1.16　次の行列 A と B が交換可能であるように，x，y の値を定めよ．

(1)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}$

(2)　$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

C》単位行列と零行列

2次の正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を，2次の**単位行列**といい，$\boldsymbol{E}$ で表す.

この単位行列 E と任意の2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

$$AE = EA = A$$

が成り立つ.

また，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を3次の**単位行列**といい，これも $\boldsymbol{E}$ で表す.

練習 1.17 B を任意の3次の正方行列とするとき，次のことが成り立つことを確かめよ.

$$BE = EB = B$$

一般に，2次または3次の正方行列において，次のことがいえる.

A を任意の正方行列とし，A と同じ次数の単位行列を E，零行列を O とすると

$$\boldsymbol{AE = EA = A} \qquad \boldsymbol{AO = OA = O}$$

上の性質から，行列の E と O は，それぞれ数における1と0に相当すると考えられる.

数の乗法では,「$a \neq 0,\ b \neq 0$ ならば $ab \neq 0$」が成り立つ．ところが行列の乗法では，$A \neq O$，$B \neq O$でも，$AB = O$ となることがある．

例 1.8 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$について

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

練習 1.18 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 4 & a \\ a & b \end{pmatrix}$のとき，$AB = O$ であるように，a，bの値を定めよ．

D》行列の累乗

正方行列 A の積 AA を A^2 と書き，AAA を A^3 と書く．

一般に，正方行列 A の n 個の積を $\boldsymbol{A^n}$ と書き，A の $\boldsymbol{n}$ **乗**という．

例 1.9 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$のとき

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

練習 1.19 例 1.9 の行列 A について，次の行列を求めよ．

(1) A^4 (2) A^5 (3) A^6

練習 1.20 次の行列 A について，A^2，A^3，A^4 を，それぞれ求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

例題 1.2 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，$A^2=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるように，a，b の値を定めよ．

解答

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & ab+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって　$\begin{pmatrix} a^2 & ab+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

成分を比較して　$\begin{cases} a^2=4 & \cdots ① \\ ab+b=-3 & \cdots ② \end{cases}$

① から　$a=\pm 2$

② に代入して

$a=2$ のとき　$b=-1$，　$a=-2$ のとき　$b=3$

(答) $a=2,\ b=-1$ または $a=-2,\ b=3$

練習 1.21 行列 $A=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ について，$A^2=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ となるように，a，b の値を定めよ．

練習 1.22 行列 $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ について，$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ となるように，a，b の値を定めよ．ただし，a，b は実数とする．

応用例題 1.1　行列 $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -a\\ a & 1\end{pmatrix}$ について，等式 $A^2-A+E=O$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．ただし，$a>0$ とする．

(1)　a の値を求めよ．　　(2)　A^3 を求めよ．

考え方》 (2) $A^2-A+E=O$ より $A^2=A-E$ が成り立つ．この等式を利用する．

解答　(1)　$$A^2-A+E=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -a\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -a\\ a & 1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -a\\ a & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\begin{pmatrix}1-a^2 & -2a\\ 2a & 1-a^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -2a\\ 2a & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3-a^2 & 0\\ 0 & 3-a^2\end{pmatrix}$$

$A^2-A+E=O$ より　　$3-a^2=0$

$a>0$ であるから　　$a=\sqrt{3}$

(2)　$A^2-A+E=O$ より　　$A^2=A-E$

よって　$$\begin{aligned}A^3&=A^2A\\&=(A-E)A\\&=A^2-A\\&=(A-E)-A\\&=-E\\&=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

練習 1.23 行列 $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix}$ について，等式 $A^2 + A + E = O$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．ただし，$a > 0$ とする．

(1) a の値を求めよ．

(2) A^3 を求めよ．

E》ハミルトン・ケーリーの定理

任意の 2 次の正方行列について成り立つ興味深い等式を示そう.

応用例題 1.2 任意の 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，等式

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$$

が成り立つ．このことを証明せよ.

考え方》 左辺を直接計算してもよいが，ここでは変形した次の等式を証明してみる.

$$A^2 + (ad - bc)E = (a+d)A$$

証明

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

$$(ad - bc)E = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} A^2 + (ad - bc)E &= \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} \\ &= (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= (a+d)A \end{aligned}$$

よって　$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$　**証終**

注意 応用例題 1.2 で証明した事柄を，2 次の正方行列に関する**ハミルトン・ケーリーの定理**という.

練習 1.24 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，次のことが成り立つことを，応用例題 1.2 の等式を用いて証明せよ．

(1) $a + d = 0,\ ad - bc = 0$　ならば　$A^2 = O$

(2) $a + d = 0,\ ad - bc = -1$　ならば　$A^2 = E$

1.1.5　補充問題

1 次の積を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

2 2次の正方行列において，次の等式が常に成り立つかどうかを調べよ．ただし，E は2次の単位行列とする．

(1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(2) $(A+E)^2 = A^2 + 2A + E$

(3) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

(4) $(A-E)(A^2+A+E) = A^3 - E$

3 n を自然数とするとき，$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

1.2　行列の応用

1.2.1　逆行列

A》逆行列

行列において，数 a の逆数 a^{-1} に相当する行列を考えてみよう．

A を2次の正方行列，E を2次の単位行列とするとき，$AX = XA = E$ を満たす正方行列 X が存在するならば，この X を A の**逆行列**といい，$\boldsymbol{A^{-1}}$ で表す．

$$\boxed{\boldsymbol{AA^{-1} = A^{-1}A = E}}$$

この定義から，$\boldsymbol{(A^{-1})^{-1} = A}$ である．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列を求めてみよう．

ハミルトン・ケーリーの定理によると，次の等式が成り立つ．

$$(a+d)A - A^2 = (ad-bc)E$$

よって，$B = (a+d)E - A$　すなわち　$B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とおくと

$$AB = BA = (ad-bc)E \qquad \cdots ①$$

[1]　$ad - bc \neq 0$ のとき　$\dfrac{1}{ad-bc}B$ が A の逆行列である．

[2]　$ad - bc = 0$ のとき　① より $AB = O$ となる．

A が逆行列をもつとすると，$AB = O$ の両辺に A^{-1} を左から掛けて

$$A^{-1}AB = A^{-1}O$$

← 右辺は $A^{-1}O=O$

左辺は $A^{-1}AB = EB = B$ となるから　$B = O$

よって，$a = b = c = d = 0$ となり，$A = O$ である．

すると，任意の正方行列 X に対して $AX \neq E$ となり，A が逆行列をもつことに矛盾する．したがって，このとき A は逆行列をもたない．

2次の正方行列の逆行列

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，$\Delta = ad - bc$ とおく．

$\Delta \neq 0$ のとき，A は逆行列をもち　　$\boldsymbol{A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

$\Delta = 0$ のとき，A は逆行列をもたない．

注意 以下では，Δ を行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ における $ad-bc$ の値として用いる．

例 1.10 (1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ について　$\Delta = 2{\cdot}3 - 1{\cdot}4 = 2 \neq 0$

よって，A は逆行列をもち　$A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ について　$\Delta = 2{\cdot}3 - 1{\cdot}6 = 0$

よって，B は逆行列をもたない．

練習 1.25 次の行列は逆行列をもつか．もつ場合は，その逆行列を求めよ．

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

例題 1.3 行列 $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & a-2 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないように，a の値を定めよ．

解答 行列が逆行列をもたないのは，$\Delta = 0$ のときである．

$$\Delta = a(a-2) - 3\cdot 1 = a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3)$$

よって　　$(a+1)(a-3) = 0$

これを解いて　　$a = -1,\ 3$

練習 1.26 次の行列が逆行列をもたないように，a の値を定めよ．

(1) $\begin{pmatrix} a & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a & 4 \\ 2 & a+2 \end{pmatrix}$

B》等式 $AX = B$ を満たす X

2次の正方行列 A，B に対して，等式 $AX = B$ を満たす正方行列 X を求めてみよう．

A が逆行列をもつとき，$AX = B$ の両辺に A^{-1} を左から掛けると

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

が成り立つ．左辺は

$$A^{-1}AX = EX = X$$

となるから，次のことがいえる．

> **A が逆行列をもつとき，等式 $AX = B$ を満たす行列 X は**
>
> $$\boldsymbol{X = A^{-1}B}$$

注意 A が逆行列をもつとき，等式 $YA = B$ を満たす行列 Y は，等式の両辺に A^{-1} を右から掛けて，$Y = BA^{-1}$ となる．

例題 1.4 2 つの行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ について，等式 $AX=B$ を満たす行列 X を求めよ．

解答 A について　$\Delta=3{\cdot}2-1{\cdot}7=-1\neq 0$

よって，A は逆行列をもち

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

したがって，等式 $AX=B$ を満たす行列 X は

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 10 & -15 \end{pmatrix}$$

練習 1.27 2 つの行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ について，等式 $AX=B$ を満たす行列 X を求めよ．また，等式 $YA=B$ を満たす行列 Y を求めよ．

1.2.2　連立1次方程式と行列

A》連立1次方程式と行列

連立1次方程式 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ $\cdots$ ①

は，行列を用いると，次の式で表される．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad \cdots ②$$

さらに，② で，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とおくと，② は

$$AX=P \qquad \cdots ③$$

と表される．この行列 A を，連立1次方程式 ① の**係数行列**という．

練習 1.28 次の連立1次方程式を行列を用いて表せ．

(1) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+4y=3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 4x-7y=6 \end{cases}$

A が逆行列をもつとき，③ の両辺に左から A^{-1} を掛けると，前ページと同様にして，$X=A^{-1}P$ が得られる．

したがって，次のことが成り立つ．

連立1次方程式の解

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とする．A が逆行列をもつとき，

方程式 $AX=P$ の解 X は　　$X=A^{-1}P$

一般に，x，y の連立1次方程式 ① がただ1組の解をもつのは，③ の係数行列 A が逆行列をもつときに限られる．

例題 1.5 行列を用いて，次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} 5x+2y=8 \\ 3x+y=6 \end{cases}$$

解答 行列を用いて表すと $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \cdots ①$

係数行列 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ について　$\Delta = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -1 \neq 0$

ゆえに，係数行列は逆行列をもち

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

① より　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

したがって　$x=4$，$y=-6$

練習 1.29 行列を用いて，次の連立 1 次方程式を解け.

(1) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 5x+3y=7 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x+7y=10 \\ x+4y=5 \end{cases}$

B 》係数行列が逆行列をもたない場合

28 ページにおいて，③ の係数行列 A が逆行列をもたないときは，連立 1 次方程式 ① は解を無数にもつか解をもたないかのいずれかである．

例 1.11　解を無数にもつ連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+6y=2 \end{cases} \qquad \leftarrow \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$$

係数行列 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ について，$\Delta = 2{\cdot}6 - 3{\cdot}4 = 0$ である．

よって，係数行列は逆行列をもたない．
解は $2x+3y=1$ を満たす x，y の組すべてで，無数にある．

例 1.12　解をもたない連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x-2y=3 \end{cases}$$

係数行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ について，$\Delta = 2{\cdot}(-2) - (-1){\cdot}4 = 0$ である．

よって，係数行列は逆行列をもたない．
$2x-y=1$ のとき $4x-2y=2 \neq 3$ となるので，解はない．

応用例題 1.3 連立１次方程式 $\begin{cases} 3x+y=kx \\ 2x+4y=ky \end{cases}$ が $x=0$，$y=0$ 以外の解をもつように，定数 k の値を定めよ．

考え方》 解を無数にもつことになる．x，y の項をすべて左辺に移項して，係数行列が逆行列をもたない条件を求める．

解答 与えられた連立１次方程式は，次のように表される．

$$\begin{cases} (3-k)x+y=0 \\ 2x+(4-k)y=0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 3-k & 1 \\ 2 & 4-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この方程式が，$x=0$，$y=0$ 以外の解をもつのは，係数行列が逆行列をもたないときである．

よって，$\Delta=0$ より　$(3-k)(4-k)-1\cdot 2=0$

整理すると　$k^2-7k+10=0$　$\longleftarrow (k-2)(k-5)=0$

これを解いて　$k=2,\ 5$

補足 上の連立１次方程式の解は，$k=2$ のとき $x+y=0$ を満たす x，y の組すべて，$k=5$ のとき $2x-y=0$ を満たす x，y の組すべてである．

練習 1.30 連立１次方程式 $\begin{cases} 2x+2y=kx \\ 5x-y=ky \end{cases}$ が，$x=0$，$y=0$ 以外の解をもつように，定数 k の値を定めよ．

研究

行列の対角化

2次の正方行列 A に対して，逆行列をもつ適当な行列 P によって積 $P^{-1}AP$ が $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形に変形できる場合がある．この変形を行列の**対角化**という．

たとえば，行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ に対して，行列 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ を考えると，行列 P は逆行列 $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ をもち

$$P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

このような行列 P と行列 A には，次のような関係がある．

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とするとき，方程式 $AX=kX$ が $X=O$ 以外の解をもつような定数 k は，$k=2,\ 5$ である．

　$k=2$ のとき，解の1つは $X=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ であり

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

　$k=5$ のとき，解の1つは $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であり

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \cdots ②$$

① と ② をまとめて　　$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

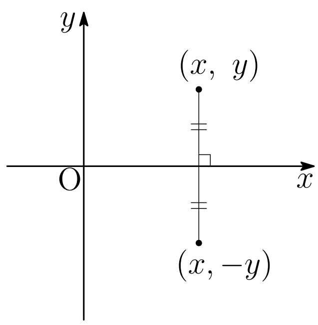
この等式に現れる行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ が P の1つとして得られる．

1.2.3　点の移動と行列

A 》点の対称移動と行列

座標平面上の点は，2 つの実数の組 $(x,\ y)$ で表される．ここでは，座標平面上の点の移動を行列で表現する方法を調べよう．

点 $(x,\ y)$ を，x 軸に関して対称移動し，移動後の座標を $(x',\ y')$ で表すとき，



$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} x' = 1{\cdot}x + 0{\cdot}y \\ y' = 0{\cdot}x + (-1){\cdot}y \end{cases}$$

が成り立つ．

この式を行列を用いて表すと，次のようになる．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

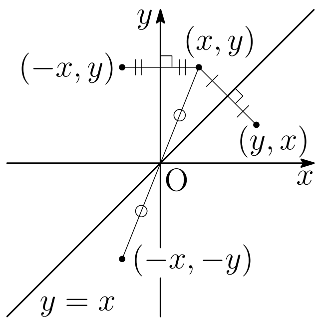
練習 1.31 点 $(3,\ 2)$ を，x 軸に関して対称移動する．移動後の点の座標を $(x',\ y')$ で表すとき，上の ① の等式を用いて x'，y' の値を求めよ．

練習 1.32 点 $(x,\ y)$ を次のように対称移動する．移動後の点の座標を $(x',\ y')$ で表すとき，点の座標の関係を上の ① のように行列を用いて表せ．

(1) y 軸に関して対称移動する．
移動後の点の座標は　$(-x,\ y)$

(2) 原点に関して対称移動する．
移動後の点の座標は　$(-x, -y)$

(3) 直線 $y = x$ に関して対称移動する．
移動後の点の座標は　$(y,\ x)$

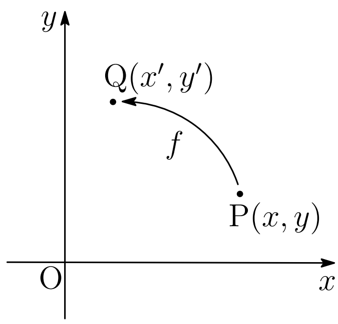


B 》1 次変換

座標平面上の各点に対応して，同じ平面上の点がただ1つ定まるとき，この対応を座標平面上の**変換**といい，点Pに対して点Qが定まるとき，点Qをこの変換による点Pの**像**という．変換は記号 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{g}$ などを用いて表すことにする．

座標平面上の変換 f によって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に移されるとする．これらの点の座標の関係が，a，b，c，d を定数として

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad \cdots ①$$



という式で表されるとき，この変換 f を**1 次変換**という．

① を行列で表すと，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ である．そこで，この1次変換 f を，**行列** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ **の表す1次変換**という．

x 軸，y 軸，原点，直線 $y = x$ に関する対称移動は，どれも1次変換である．これらを表す行列は，それぞれ次のようになる．

$\boldsymbol{x}$ 軸	**$\boldsymbol{y}$ 軸**	**原 点**	**直線 $\boldsymbol{y = x}$**
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

例 1.13　行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ の表す1次変換による点 $(5,\ 1)$ の像は，

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 15 \end{pmatrix}$$ より，点 $(17,\ 15)$ である．

練習 1.33 次の行列の表す 1 次変換による与えられた点の像を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，点 $(1,\ 2)$　　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$，点 $(4,\ 1)$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$，点 $(-3,\ 5)$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，点 $(3, -4)$

C》1 次変換の性質

単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を，とくに**恒等変換**という．
恒等変換では，任意の点 P の像は，点 P 自身である．

また，任意の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．よって，1次変換による原点$(0,0)$の像は常に原点である．

例 1.14　点 $(1,\ 0)$ の像が点 $(2,\ 4)$，点 $(0,\ 1)$ の像が点 $(1,\ 5)$ であるような1次変換を表す行列 A を求める．

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると，条件から

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

よって　$a = 2,\ c = 4,\ b = 1,\ d = 5$

したがって　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

一般に，1次変換について次のことが成り立つ．

> 点 $(1,\ 0)$ を点 $(a,\ c)$ に，点 $(0,\ 1)$ を点 $(b,\ d)$ に移す1次変換を表す行列は，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ である．

練習 1.34 点 $(1,\ 0)$ を点 $(-2,\ 3)$ に，点 $(0,\ 1)$ を点 $(1, -4)$ に移す1次変換を表す行列を求めよ．

一般に，点 $(p,\ r)$ を点 $(a,\ c)$ に，点 $(q,\ s)$ を点 $(b,\ d)$ に移す1次変換を表す行列を A とすると，$A\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ が成り立つ．このことは，$A\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が成り立つことと同じである．

例題 1.6 点 $(2,\ 1)$ を点 $(4, -2)$ に，点 $(5,\ 3)$ を点 $(7,\ 1)$ に移す 1 次変換を表す行列 A を求めよ．

解答 条件から，次の等式が成り立つ．

$$A\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

行列 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について　$\Delta = 2{\cdot}3 - 5{\cdot}1 = 1 \neq 0$

よって，逆行列は　$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

したがって，① より

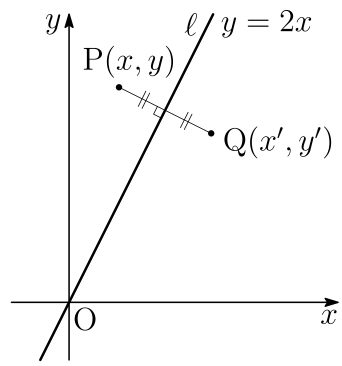
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -7 & 12 \end{pmatrix}$$

練習 1.35 点 $(2,\ 1)$ を点 $(8,\ 5)$ に，点 $(-6,\ 7)$ を点 $(-4, -5)$ に移す 1 次変換を表す行列 A を求めよ．

応用例題 1.4 直線 $y=2x$ に関する対称移動 f は1次変換である．このことを示し，f を表す行列を求めよ．

考え方》 2点P，Qが直線 ℓ に関して対称なとき，ℓ は線分PQの垂直二等分線である．このことを用いる．

解答 直線 $y=2x$ を ℓ，ℓ に関して点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と対称な点を $\mathrm{Q}(x',\ y')$ とする．
直線PQは ℓ に垂直で，線分PQの中点が ℓ 上にあるから



$$\begin{cases} 2\cdot\dfrac{y'-y}{x'-x}=-1 \\ \dfrac{y+y'}{2}=2\cdot\dfrac{x+x'}{2} \end{cases}$$

よって
$$\begin{cases} x'+2y'=x+2y \\ -2x'+y'=2x-y \end{cases}$$

すなわち
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

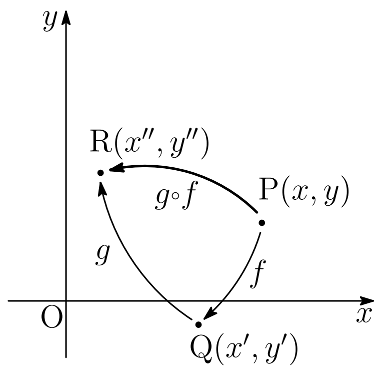
したがって，f は1次変換で，求める行列は $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

練習 1.36 直線 $y = 3x$ に関する対称移動 f は 1 次変換である．このことを示し，f を表す行列を求めよ．

1.2.4　合成変換と逆変換

A》合成変換

1次変換 f，g を表す行列を，それぞれ A，B とする．f によって点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が点 $\mathrm{Q}(x',\ y')$ に移され，さらに g によって点 $\mathrm{Q}(x',\ y')$ が点 $\mathrm{R}(x'',\ y'')$ に移されるとすると



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

であるから，次のことが成り立つ．

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = BA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって，行列 BA は，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に点 $\mathrm{R}(x'',\ y'')$ を対応させる1次変換を表す．この変換を，f と g の**合成変換**といい，$\boldsymbol{g \circ f}$ で表す．

> 1次変換 f，g を表す行列を，それぞれ A，B とするとき，合成変換 $g\circ f$ も1次変換で，$g\circ f$ を表す行列は BA である．

例 1.15　1次変換 f，g を表す行列を，それぞれ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，合成変換 $g\circ f$ を表す行列は

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

練習 1.37 1次変換 f，g を表す行列を，それぞれ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ とするとき，次の合成変換を表す行列を求めよ．

(1) $g \circ f$

(2) $f \circ g$

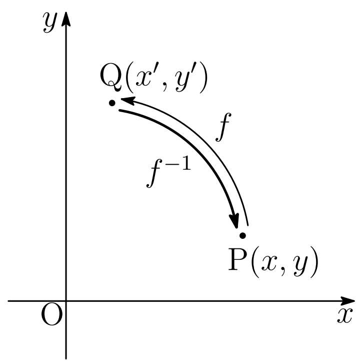
(3) $f \circ f$

B》 逆変換

1次変換 f によって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が点 $\mathrm{Q}(x',\ y')$ に移されるとする．f を表す行列 A が逆行列 A^{-1} をもてば，

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ から } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

が得られる．よって，行列 A^{-1} は，点 $\mathrm{Q}(x',\ y')$ に点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を対応させる1次変換を表す．この変換を f の**逆変換**といい，$\boldsymbol{f^{-1}}$ で表す．



1次変換 f を表す行列を A とするとき，A が逆行列をもてば，
f の逆変換 f^{-1} が存在する．f^{-1} を表す行列は A^{-1} である．

例題 1.7 1 次変換 f を表す行列を $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，f によって点 $\mathrm{Q}(2,\ 4)$ に移されるもとの点 P の座標を求めよ．

解答 行列 A について　　$\Delta = 3{\cdot}1 - 1{\cdot}2 = 1 \neq 0$

よって，A は逆行列をもち　　$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

これが f の逆変換 f^{-1} を表す行列である．

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \leftarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

したがって，もとの点 P の座標は　　$(-2,\ 8)$

練習 1.38 練習 1.37 における 1 次変換 f，g について，次の問いに答えよ．

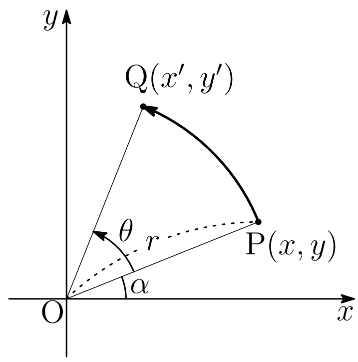
(1) f^{-1}，g^{-1} を表す行列を，それぞれ求めよ．

(2) f によって点 $\mathrm{Q}(4, -1)$ に移されるもとの点 P の座標を求めよ．

1.2.5 回転移動と 1 次変換

A 》回転移動

座標平面上で，原点 O を中心として一定の角 θ [1]だけ回転移動する変換について考えよう．



点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の像を点 $\mathrm{Q}(x',\ y')$ とする．
$\mathrm{OP}=r$ とし，動径 OP と x 軸の正の向きをなす角を α とすると

$$x=r\cos\alpha,\quad y=r\sin\alpha \qquad \cdots ①$$

が成り立つ．点 Q の座標は

$$x'=r\cos(\alpha+\theta),\quad y'=r\sin(\alpha+\theta)$$

である．ここで，三角関数の加法定理により

$$x'=r(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)$$
$$y'=r(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)$$

① を代入すると，次の式が成り立つ．

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta \\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta \end{cases}$$

すなわち
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

したがって，次のことが成り立つ．

原点 O の周りに角 θ だけ回転する移動

原点 O を中心とし，回転角が θ の回転移動は 1 次変換であり，

それを表す行列は $\begin{pmatrix} \cos\boldsymbol{\theta} & -\sin\boldsymbol{\theta} \\ \sin\boldsymbol{\theta} & \cos\boldsymbol{\theta} \end{pmatrix}$ である．

[1]角 θ は数学 II で扱われている一般角とする．

例題 1.8 原点の周りに 30° だけ回転する1次変換を表す行列 A を求めよ．また，この回転によって点 $\mathrm{P}(2,\ 4)$ が移る点 Q の座標を求めよ．

解答
$$A=\begin{pmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

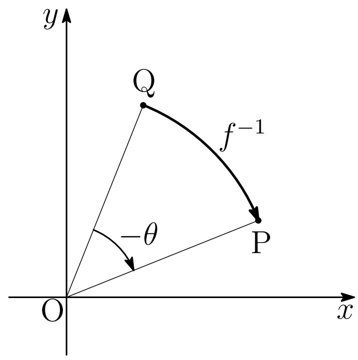
また
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}-2\\ 1+2\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

よって，点 Q の座標は　$(\sqrt{3}-2,\ 1+2\sqrt{3})$

練習 1.39 原点の周りに 45° だけ回転する1次変換を表す行列 A を求めよ．また，この回転によって点 $\mathrm{P}(0,\ 2)$ が移る点 Q の座標を求めよ．

B 》 回転移動と逆変換

原点の周りに角 θ だけ回転する 1 次変換 f に対して，逆変換 f^{-1} は，原点の周りに角 $-\theta$ だけ回転する 1 次変換である．
よって，f^{-1} を表す行列は



$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である．

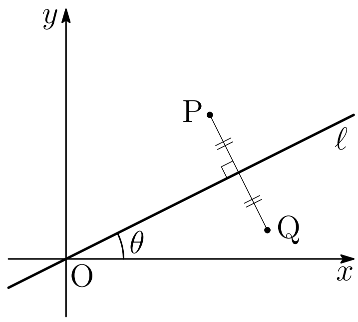
補足 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が成り立つ．

練習 1.40 原点の周りに 60° だけ回転する 1 次変換を f とするとき，逆変換 f^{-1} を表す行列を求めよ．

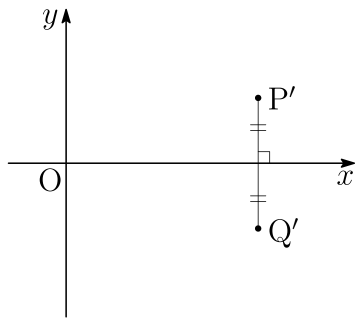
研究

変換の合成の応用

原点を通り，x 軸の正の向きとなす角が θ である直線 ℓ に関する対称移動を表す変換 h を考えてみよう．



右の図のように，直線 ℓ に関して点 P と対称な点を Q とする．また，点 P，Q を原点の周りに $-\theta$ だけ回転した点を，それぞれ P′，Q′ とする．このとき，P′ と Q′ は x 軸に関して対称である．



よって，原点の周りに $-\theta$ だけ回転する変換を f，x 軸に関して対称移動する変換を g とすると，原点の周りに θ だけ回転する変換は f^{-1} であるから，変換 h は

$$f^{-1}\circ(g\circ f)$$

で表される．

ゆえに，この変換 h は1次変換であり，それを表す行列は

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

すなわち，$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ である．

1.2.6 補充問題

4 2 次の正方行列 A，B がともに逆行列をもつとき，積 AB も逆行列をもち，次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

5 1 次変換 f，g を表す行列を，それぞれ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，合成変換 $f \circ g$ による点 $(2, -3)$ の像を求めよ.

6 原点の周りに 30° だけ回転する 1 次変換を表す行列を A とするとき，A^4 を求めよ.

7 点 P(3, 1) と x 軸に関して対称な点を Q とし，Q を原点の周りに 150° だけ回転した位置にある点を R とする．R の座標を求めよ.

1.3 章末問題

1.3.1 章末問題 A

1 次の計算をせよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4$

2 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ が等式 $A^2 + xA + yE = O$ を満たすとき，x，y の値を求めよ．ただし，E は 2 次の単位行列，O は 2 次の零行列とする．

3 2 次の正方行列 A，B はともに逆行列をもち，$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$，$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ であるという．行列 $A^{-1}B^{-1}$ および AB を求めよ．

4 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，行列 $A - kE$ が逆行列をもたないように，実数 k の値を定めよ．

5 点 $(1,\ 2)$ を点 $(7,\ 4)$ に，点 $(2, -1)$ を点 $(4,\ 3)$ に移す1次変換を表す行列 A を求めよ．

6 $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & -a \end{pmatrix}$ で表される1次変換を f とする．合成変換 $f \circ f$ を表す行列が A 自身であるとき，a，b の値を求めよ．

7 原点の周りに 30° だけ回転して点 $(2,\ 4)$ に移されるもとの点の座標を求めよ．

1.3.2　章末問題 B

8 2 次の正方行列 A，B について，$A+B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ であるとき，A^2-B^2 を求めよ．

9 行列 $A=\begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$ が等式 $A^2-7A+12E=O$ を満たすとき，x，y の値を求めよ．ただし，E は 2 次の単位行列で，O は 2 次の零行列とする．

10 行列 $A=\begin{pmatrix} x & -1 \\ 3 & y-4 \end{pmatrix}$ の逆行列が A 自身であるように，x，y の値を定めよ．また，A^3 を求めよ．

11 2 次の正方行列において，次の命題は真であるか．真であるときは証明し，真でないときは反例をあげよ．ただし，E は 2 次の単位行列で，O は 2 次の零行列とする．

(1) A が逆行列をもつとき，$XA = YA$ ならば，$X = Y$ である．

(2) $A^2 - 2A + E = O$ ならば $A = E$ である．

12 行列 $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする．

(1) f はどのような 1 次変換を表すか．

(2) 逆変換 f^{-1} はどのような 1 次変換を表すか．

(3) 合成変換 $f\circ(f\circ f)$ はどのような 1 次変換を表すか．また，A^3 を求めよ．

ヒント

8　関係式から，A と B を求める．　**10**　$A^{-1} = A$ から $A^2 = E$

12　f は原点の周りの回転移動を表す．43 ページの行列を参照する．

発展　**1 次変換と直線 (1)**

　これまでは，1 次変換による座標平面上の点の移動を述べてきたが，ここでは直線の移動を考えてみよう．直線は点の集合であるから，与えられた直線 ℓ 上に任意の点をとって，まずその点の移動後の座標を求めると考えやすい．

例 1　直線 $y=2x-1$ を ℓ とする．行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f によって，ℓ はどのような図形に移されるだろうか．

直線 ℓ 上の任意の点 P の x 座標を t とすると，y 座標は $2t-1$ であるから，P$(t,\ 2t-1)$ となる．

点 P が f によって移される点を Q$(x,\ y)$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 2t-1 \end{pmatrix}$$

すなわち　$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t+1 \\ 4t-1 \end{pmatrix}$$

よって　$$\begin{cases} x=t+1 & \cdots ① \\ y=4t-1 & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$t=x-1$

これを ② に代入すると　$y=4(x-1)-1$

すなわち　$y=4x-5$

したがって，直線 $y=4x-5$ に移される．

練習 1　直線 $y=-2x+1$ を ℓ とする．次の行列で表される 1 次変換によって，ℓ はどのような図形に移されるか．

(1)　$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$　　(2)　$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

発展　**1次変換と直線 (2)**

前ページの例1では，1次変換によって座標平面上の直線が直線に移ることが示された．しかし，いつでも直線が直線に移るとは限らない．次にその例をみてみよう．

例2　直線 $y=-2x+1$ を ℓ とする．行列 $A=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}$ で表される1次変換 f によって，ℓ はどのような図形に移されるだろうか．

直線 ℓ 上の任意の点Pの x 座標を t とすると，y 座標は $-2t+1$ であるから，$\mathrm{P}(t, -2t+1)$ となる．

点Pが f によって移される点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\-2t+1\end{pmatrix}$$

すなわち　$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

例2では，直線 ℓ 上のどの点も点 $(1,\ 2)$ に移される．例2は，1次変換によって座標平面上の直線がただ1点に移される例である．

一般に，次のことが知られている．

1次変換 f によって異なる2点A，Bが同じ点 A' に移るとき，直線ABは点 A' に移る．

たとえば，異なる2点 $\mathrm{A}(1, -1)$，$\mathrm{B}(2, -3)$ は，例2の1次変換 f によって同じ点 $\mathrm{A}'(1,\ 2)$ に移るから，直線ABは $\mathrm{A}'(1,\ 2)$ に移る．この直線ABが例2の直線 ℓ である．

練習2　直線 $y=3x-1$ を ℓ とする．行列 $A=\begin{pmatrix}-3&1\\9&-3\end{pmatrix}$ で表される1次変換 f によって，ℓ はどのような図形に移されるか．

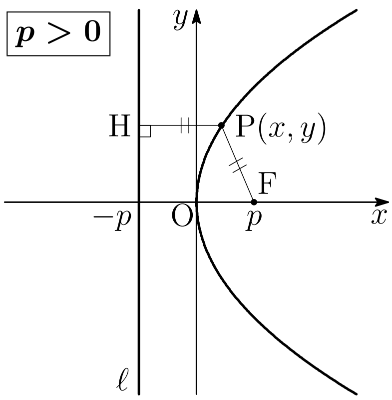
第 2 章　式と曲線

2.1　2 次曲線

2.1.1　放物線

A 》放物線の方程式

平面上で，定点 F からの距離と，F を通らない定直線 ℓ からの距離が等しいような点の軌跡を**放物線**といい，点 F を放物線の**焦点**，直線 ℓ を放物線の**準線**という．



点 F$(p,\ 0)$ を焦点とし，直線 $x = -p$ を準線 ℓ とする放物線の方程式を求めてみよう．ただし，$p \neq 0$ とする．この放物線上の点を P$(x,\ y)$ とし，P から ℓ に下ろした垂線を PH とすると，P がこの放物線上にあるための条件は，

PF = PH である．この条件は，$\mathrm{PF}^2 = \mathrm{PH}^2$ と同値であるから，次の等式が成り立つ．

$$(x-p)^2 + y^2 = \{x-(-p)\}^2$$

整理して　　　$\boldsymbol{y^2 = 4px}$　　　$\cdots$①

① を放物線の方程式の**標準形**という．また，放物線の焦点を通り，準線に垂直な直線を，放物線の**軸**といい，軸と放物線の交点を，放物線の**頂点**という．放物線は，その軸に関して対称である．

放物線の標準形 $y^2 = 4px$　$(p \neq 0)$

1　焦点は $\mathbf{F}(\boldsymbol{p},\ \mathbf{0})$，準線は直線 $\boldsymbol{x = -p}$

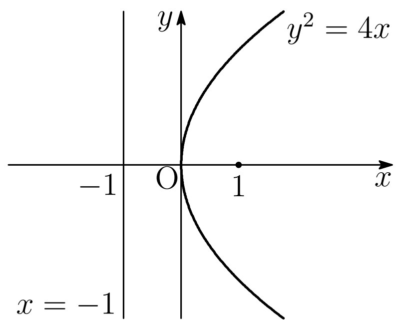
2　軸は x 軸，頂点は原点 O

3　曲線は x 軸に関して対称

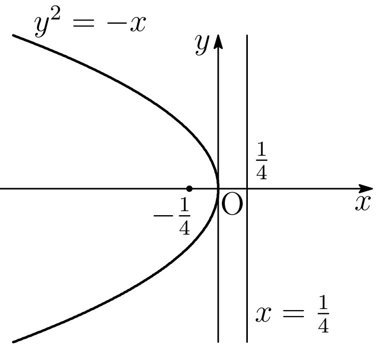
例 2.1 焦点が点 F$(1,\ 0)$ で，準線が直線 $x=-1$ である放物線の方程式は

$$y^2 = 4{\cdot}1{\cdot}x$$

すなわち $\qquad y^2 = 4x$



例 2.2 放物線 $y^2=-x$ について，$y^2 = 4{\cdot}\left(-\dfrac{1}{4}\right)x$ であるから，焦点は点 $\left(-\dfrac{1}{4},\ 0\right)$ で，準線は直線 $x=\dfrac{1}{4}$ である．



練習 2.1 次の放物線の概形をかけ．また，その焦点と準線を求めよ．

(1) $y^2 = 8x$

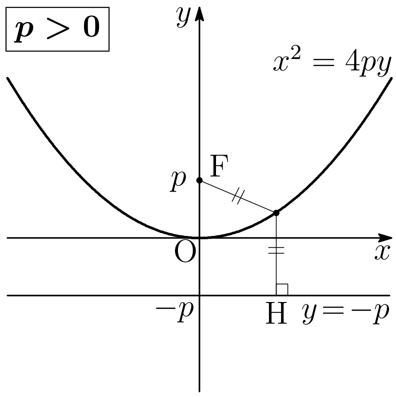
(2) $y^2 = -4x$

(3) $y^2 = x$

B》y 軸が軸となる放物線

$p \neq 0$ とする．点 F$(0,\ p)$ を焦点とし，直線 $y = -p$ を準線とする放物線の方程式は，55 ページと同様にして，次のようになる．

$$\boldsymbol{x^2 = 4py}$$



放物線 $y = ax^2$ は，$x^2 = 4 \cdot \dfrac{1}{4a} y$ と表されるから，その焦点は点 $\left(0,\ \dfrac{1}{4a}\right)$，準線は直線 $y = -\dfrac{1}{4a}$ である．

練習 2.2 次の放物線の概形をかけ．また，その焦点と準線を求めよ．

(1) $x^2 = 4y$

(2) $y = -2x^2$

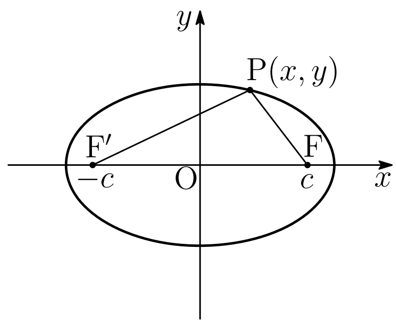
2.1.2　楕円

A 》楕円の方程式

平面上で，2 定点 F，F′ からの距離の和が一定であるような点の軌跡を**楕円**といい，この 2 点 F，F′ を楕円の**焦点**という．

2 点 $\mathrm{F}(c,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ を焦点とし，この 2 点からの距離の和が $2a$ である楕円の方程式を求めてみよう．ただし，$\mathrm{FF}' < 2a$ であることが必要なので，$a > c > 0$ とする．

この楕円上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，
P が楕円上にあるための条件
$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = 2a$ から



$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx$$

再び両辺を 2 乗して整理すると

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$a > c$ であるから，$\sqrt{a^2-c^2} = b$ とおくと，$a > b > 0$ であり

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

よって　$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \cdots ①$$　　← 上の式の両辺を a^2b^2 で割る．

逆に，① を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は $\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = 2a$ を満たす．

① を楕円の方程式の**標準形**という．

① を導くのに $\sqrt{a^2-c^2} = b$ とおいたから，$c = \sqrt{a^2-b^2}$ である．このことから，楕円 ① の焦点 F，F′ の焦点の座標は，次のようになる．

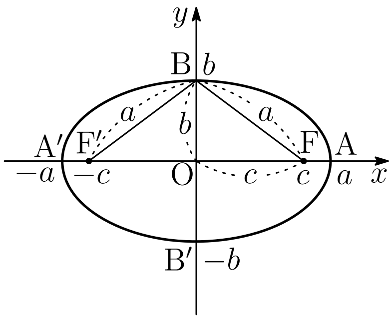
$$\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0),\ \mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$$

楕円 ① と x 軸および y 軸の交点

$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{A}'(-a,\ 0)$

$\mathrm{B}(0,\ b)$，$\mathrm{B}'(0, -b)$

を，楕円 ① の**頂点**という．頂点を結ぶ線分 AA'，BB' のうち，長い方の AA' を**長軸**，短い方の BB' を**短軸**という．焦点は長軸上にある．



また，長軸と短軸の交点 O を，楕円の**中心**という．

楕円 ① は，長軸 AA'，短軸 BB' に関して対称である．さらに，中心 O に関しても対称である．

楕円の標準形 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)}$

1　焦点は　　$\mathbf{F}(\sqrt{a^2 - b^2},\ 0)$，$\mathbf{F}'(-\sqrt{a^2 - b^2},\ 0)$

2　楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は　$\boldsymbol{2a}$

3　長軸の長さは　$\boldsymbol{2a}$，短軸の長さは　$\boldsymbol{2b}$

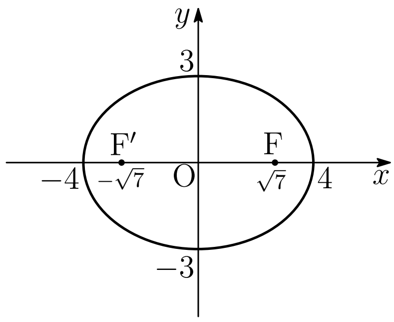
4　曲線は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称

例 2.3　楕円 $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ の概形は，右の図のようになる．

焦点 $\mathrm{F}(\sqrt{7},\ 0)$，$\mathrm{F}'(-\sqrt{7},\ 0)$

長軸の長さは　　$2 \times 4 = 8$

短軸の長さは　　$2 \times 3 = 6$



練習 2.3 次の楕円の概形をかけ．また，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

(2) $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$

(3) $x^2+16y^2=16$

例題 2.1　2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 10 であるような楕円の方程式を求めよ．

解答　求める楕円の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ の形である．

焦点からの距離の和について，$2a=10$ であるから

$$a=5, \qquad a^2=25$$

焦点の座標について，$\sqrt{a^2-b^2}=3$ であるから

$$b^2=a^2-3^2=5^2-3^2=16$$

したがって，求める楕円の方程式は　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

練習 2.4　次のような楕円の方程式を求めよ．

(1)　2 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 6

(2)　2 点 $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 4

B 》 y 軸上に焦点がある楕円

方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots ①$

において，$b>a>0$ の場合，① は右の図のような楕円を表す．

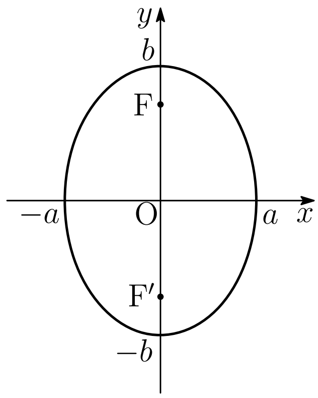
この楕円の2つの焦点F，F′ は y 軸上にあり，座標は次のようになる．

$$\mathbf{F}(0,\ \sqrt{b^2-a^2}),\ \mathbf{F}'(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$$

この楕円上の点から2つの焦点までの距離の和は $2b$ である．

また，長軸は y 軸上，短軸は x 軸上にある．

長軸の長さは $\boldsymbol{2b}$，短軸の長さは $\boldsymbol{2a}$ である．



練習 2.5 次の楕円の概形をかけ．また，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

(2) $x^2+\dfrac{y^2}{25}=1$

C》円と楕円

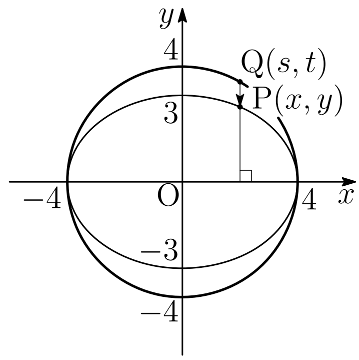
応用例題 2.1 円 $x^2+y^2=4^2$ を，x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{3}{4}$ 倍すると，どのような曲線になるかを調べよ．

考え方》 円上の点 $(s,\ t)$ は点 $\left(s,\ \dfrac{3}{4}t\right)$ に移る．円上の点 Q が移る点を P として，P の軌跡の求め方を利用する．

解答 円上に点 Q$(s,\ t)$ をとり，Q が移る点を P$(x,\ y)$ とすると

$$s^2+t^2=4^2 \qquad \cdots ①$$

$$x=s,\ y=\frac{3}{4}t \qquad \cdots ②$$



② から

$$s=x,\ t=\frac{4}{3}y \qquad \cdots ③$$

③ を ① に代入すると

$$x^2+\left(\frac{4}{3}y\right)^2=4^2 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

よって，円 $x^2+y^2=4^2$ は，楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ になる．

一般に，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，円 $x^2+y^2=a^2$ を，x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍して得られる曲線である．

練習 2.6 円 $x^2+y^2=3^2$ を，x 軸をもとにして次のように縮小または拡大して得られる楕円の方程式を求めよ．

(1) y 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍

(2) y 軸方向に $\dfrac{4}{3}$ 倍

D 》 点の軌跡が楕円になる場合

応用例題 2.2 座標平面上において，長さが 5 の線分 AB の端点 A は x 軸上を，端点 B は y 軸上を動くとき，線分 AB を 2 : 3 に内分する点 P の軌跡を求めよ．

考え方 》 A$(s,\ 0)$，B$(0,\ t)$，P$(x,\ y)$ として s，t を x，y で表し，s，t の満たす式に代入する．

解答 A の座標を $(s,\ 0)$，B の座標を $(0,\ t)$ とすると，$\mathrm{AB}=5$ から

$$s^2+t^2=5^2 \qquad \cdots ①$$

P の座標を $(x,\ y)$ とすると，P は線分 AB を 2 : 3 に内分するから

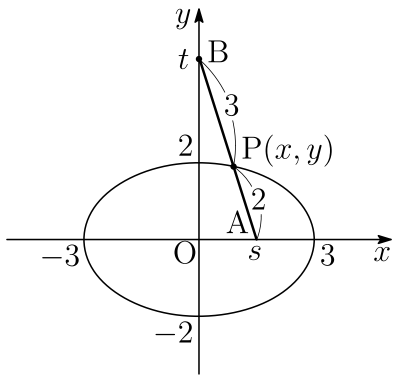
$$x=\frac{3}{5}s,\ \ y=\frac{2}{5}t$$

よって　$$s=\frac{5}{3}x,\ \ t=\frac{5}{2}y$$

これらを ① に代入すると

$$\left(\frac{5}{3}x\right)^2+\left(\frac{5}{2}y\right)^2=5^2$$

すなわち　$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$



したがって，点 P の軌跡は，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ である．

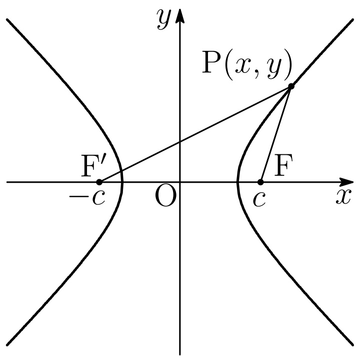
練習 2.7 座標平面上において，長さが 7 の線分 AB の端点 A は x 軸上を，端点 B は y 軸上を動くとき，線分 AB を 3 : 4 に内分する点 P の軌跡を求めよ．

2.1.3　双曲線

A》双曲線の方程式

平面上で，2定点F，F′ からの距離の差が一定であるような点の軌跡を**双曲線**といい，この2点F，F′ を双曲線の**焦点**という．

2点 $\mathrm{F}(c,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ を焦点とし，この2点からの距離の差が $2a$ である双曲線の方程式を求めてみよう．ただし，$\mathrm{FF}' > 2a$ であることが必要なので，$c > a > 0$ とする．



この双曲線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，Pが双曲線上にあるための条件 $\mathrm{PF} - \mathrm{PF}' = \pm 2a$ から

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

両辺を2乗して整理すると

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx$$

再び両辺を2乗して整理すると

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

$c > a$ であるから，$\sqrt{c^2-a^2} = b$ とおくと，$b > 0$ であり

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

よって　$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \cdots ①$$　← 上の式の両辺を a^2b^2 で割る．

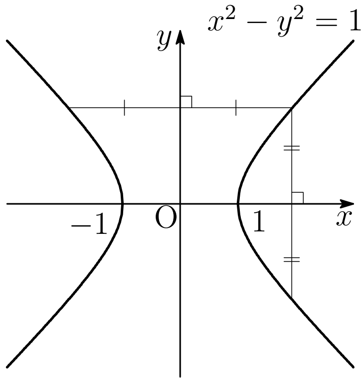
逆に，① を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は $\mathrm{PF} - \mathrm{PF}' = \pm 2a$ を満たす．

① を双曲線の方程式の**標準形**という．

① を導くのに $\sqrt{c^2-a^2} = b$ とおいたから，$c = \sqrt{a^2+b^2}$ である．このことから，双曲線 ① の焦点F，F′ の座標は，次のようになる．

$$\mathrm{F}(\sqrt{a^2+b^2},\ 0),\ \mathrm{F}'(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$$

双曲線　　$x^2 - y^2 = 1$　　　$\cdots$①

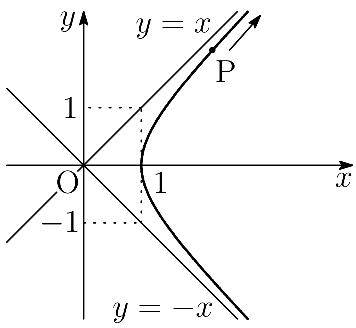


の概形は，右の図のようになり，x 軸，y 軸に関して対称である．
双曲線 ① の $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の部分は，関数

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \quad (x \geqq 1) \qquad \cdots ②$$

のグラフである．$x \geqq 1$ においては

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} > 0$$

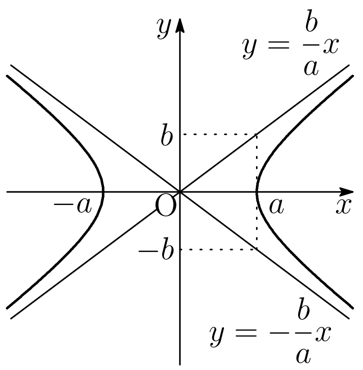


であり，x が限りなく大きくなるとき，x と $\sqrt{x^2 - 1}$ の差は限りなく 0 に近づく．
よって，② のグラフ上の点 P は，原点から限りなく遠ざかるとき，直線 $y = x$ に限りなく近づく．すなわち，直線 $y = x$ は，双曲線 ① の漸近線である．

また，② のグラフと直線 $y = x$ を x 軸に関して折り返すことにより，直線 $y = -x$ も双曲線 ① の漸近線であることがわかる．

さらに，双曲線 ① は y 軸に関して対称であるから，$x \leqq 0$ の部分についても，2 直線 $y = x$，$y = -x$ は漸近線であることがわかる．

一般の双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の概形は，右の図のようになる．上と同様に，



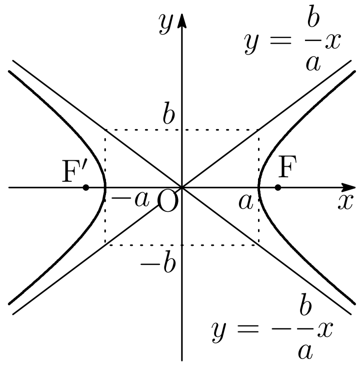
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad (x \geqq a)$$

のグラフなどを考えると，次の 2 直線が漸近線であることがわかる．

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x$$

双曲線の焦点F，F′ を通る直線FF′ と双曲線の交点を，双曲線の**頂点**という．また，線分FF′ の中点を，双曲線の**中心**という．

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ について，頂点は2点 $(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$ で，中心は原点O である．また，この双曲線は，x 軸，y 軸，原点O に関して対称である．



双曲線の標準形　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>0,\ b>0)}$

1　焦点は　　$\mathbf{F}(\boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2},\ 0}),\ \mathbf{F}'(\boldsymbol{-\sqrt{a^2+b^2},\ 0})$

2　双曲線上の点から2つの焦点までの距離の差は　$\boldsymbol{2a}$

3　漸近線は　　2直線 $\boldsymbol{y=\dfrac{b}{a}x,\ y=-\dfrac{b}{a}x}$

4　曲線は x 軸，y 軸，原点O に関して対称

補足　2本の漸近線の方程式は $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0$，$\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0$ と表すことができる．

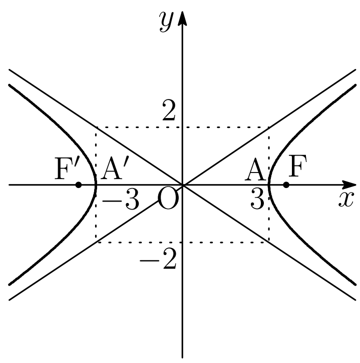
例 2.4　双曲線 $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ の概形は，右の図のようになる．

焦点は

$\mathrm{F}(\sqrt{13},\ 0)$，$\mathrm{F}'(-\sqrt{13},\ 0)$

頂点は $\mathrm{A}(3,\ 0)$，$\mathrm{A}'(-3,\ 0)$

漸近線は2直線 $y=\dfrac{2}{3}x$，$y=-\dfrac{2}{3}x$



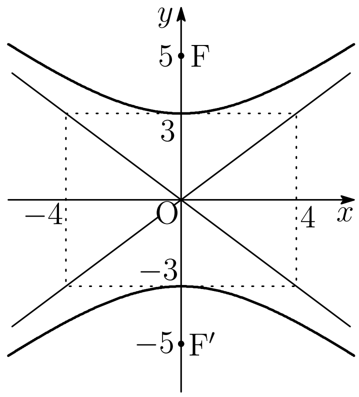
練習 2.8　次の双曲線の概形をかけ．また，その焦点，頂点，漸近線をいえ．

(1) $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$

(2) $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$

(3) $x^2 - 9y^2 = 9$

B ≫ 焦点が y 軸上にある双曲線



次の方程式の表す曲線について調べてみよう．

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = -1 \qquad \cdots ①$$

① より　　$\dfrac{y^2}{3^2} - \dfrac{x^2}{4^2} = 1$

よって，① は，$\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ において，x と y を入れ替えたものである．このことから，曲線 ① は右の図のような双曲線であるといえる．

2 つの焦点 F，F′ および頂点は y 軸上にあり，座標は次のようになる．

焦点は　F(0, 5)，F′(0, −5)，　頂点は　2 点 (0, 3)，(0, −3)

である．また，漸近線は 2 直線 $y = \dfrac{3}{4}x$，$y = -\dfrac{3}{4}x$ である．

一般に，$a > 0$，$b > 0$ のとき，方程式 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1}$ の表す曲線も双曲線である．この双曲線について，次のことがいえる．

焦点は　**F**$\boldsymbol{(0,\ \sqrt{a^2+b^2})}$，**F′**$\boldsymbol{(0,\ -\sqrt{a^2+b^2})}$
頂点は　2 点 $\boldsymbol{(0,\ b)}$，$\boldsymbol{(0,\ -b)}$
漸近線は　2 直線 $\boldsymbol{y = \dfrac{b}{a}x}$，$\boldsymbol{y = -\dfrac{b}{a}x}$
双曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の差は　$\boldsymbol{2b}$

練習 2.9 次の双曲線の概形をかけ．また，焦点，頂点，漸近線をいえ．

(1) $\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{2^2} = -1$

(2) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = -1$

これまでに学んだ放物線，楕円，双曲線と円は，x，y の2次方程式で表される．これらの曲線をまとめて **2次曲線**という．

2.1.4 2次曲線の平行移動

A 》曲線の平行移動

x, y の方程式 $F(x,\ y)=0$ の表す曲線を，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した移動後の曲線 C の方程式を求めよう．

もとの曲線上の点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ が移る点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

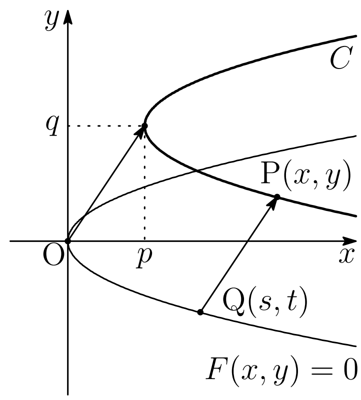
$$F(s,\ t)=0 \qquad \cdots ①$$

$$x=s+p,\ y=t+q \qquad \cdots ②$$

② より　$s=x-p,\ t=y-q$

これらを ① に代入すると

$$F(x-p,\ y-q)=0$$



が得られる．これが平行移動後の曲線 C の方程式である．

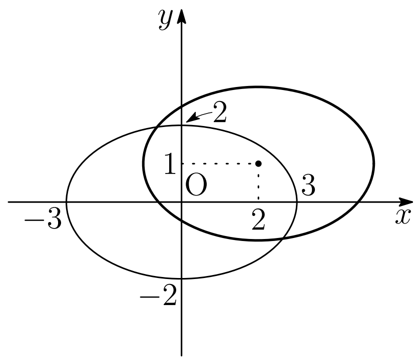
曲線の平行移動

曲線 $F(x,\ y)=0$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，移動後の曲線の方程式は $\boldsymbol{F(x-p,\ y-q)=0}$ となる．

例 2.5 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \qquad \cdots ①$

を x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動すると，移動後の楕円の方程式は，次のようになる．

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 \quad \cdots ②$$



また，楕円 ① の焦点は，2 点 $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$ であるから，楕円 ② の焦点は，2 点 $(\sqrt{5}+2,\ 1)$，$(-\sqrt{5}+2,\ 1)$ である．

練習 2.10　楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を，x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動するとき，移動後の楕円の方程式と焦点の座標を求めよ．

練習 2.11　放物線 $y^2 = 4x$ を，x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動するとき，移動後の放物線の方程式と焦点の座標を求めよ．

B》$\boldsymbol{ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0}$ の表す図形

例 2.5 で得られた楕円の方程式

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \qquad \cdots ①$$

の分母を払って整理すると，次のようになる．

$$4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0 \qquad \cdots ②$$

逆に，方程式 ② が与えられた場合は，② を ① の形に変形することによって，その方程式の表す図形が楕円であることがわかる．

例題 2.2 次の方程式はどのような図形を表すか.

$$x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 19 = 0$$

解答 この方程式を変形すると

$$(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = 1 - 16 + 19$$

すなわち
$$(x + 1)^2 - 4(y - 2)^2 = 4$$
$$\frac{(x + 1)^2}{4} - (y - 2)^2 = 1$$

よって，この方程式は，双曲線 $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ を x 軸方向に -1,
y 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線を表す.

練習 2.12 次の方程式はどのような図形を表すか.

(1) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 36y - 56 = 0$

(2) $y^2 + 8y - 16x = 0$

(3) $x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 13 = 0$

2.1.5　2 次曲線と直線

A 》2 次曲線と直線の共有点の個数

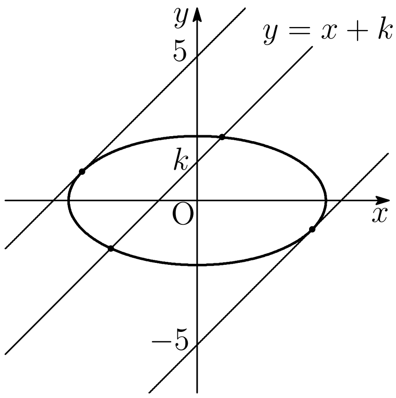
2 次曲線と直線の共有点の個数を調べてみよう．

例題 2.3 k は定数とする．次の楕円と直線の共有点の個数を調べよ．

$$x^2 + 4y^2 = 20, \quad y = x + k$$

解答

$$x^2 + 4y^2 = 20 \qquad \cdots ①$$
$$y = x + k \qquad \cdots ②$$



とする．② を ① に代入すると

$$x^2 + 4(x + k)^2 = 20$$

整理すると

$$5x^2 + 8kx + 4(k^2 - 5) = 0$$

この x の 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = (8k)^2 - 4{\cdot}5{\cdot}4(k^2 - 5) = -16(k + 5)(k - 5)$$

よって，① と ② の共有点の個数は，次のようになる．

$D < 0$	すなわち	$k < -5,\ 5 < k$ のとき	0 個
$D = 0$	すなわち	$k = \pm 5$ のとき	1 個
$D > 0$	すなわち	$-5 < k < 5$ のとき	2 個

上の例題 2.3 において，$k = \pm 5$ のとき，楕円と直線は共有点をただ 1 つもつ．このとき，楕円と直線は**接する**といい，その直線を楕円の**接線**，共有点を**接点**という．

一般に，2 次曲線と直線の方程式から 1 文字を消去して得られる 2 次方程式の実数解の個数と，2 次曲線と直線の共有点の個数は一致する．

練習 2.13 k は定数とする．双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ と直線 $y = x + k$ の共有点の個数を調べよ．

応用例題 2.3 双曲線 $x^2-y^2=1$ と直線 $y=2x-3$ の2つの交点をP，Qとするとき，線分PQの中点Mの座標を求めよ．

考え方》 双曲線と直線の方程式から y を消去すると x の2次方程式が得られる．線分PQの中点の x 座標を求めるには，この2次方程式に解と係数の関係を適用すればよい．

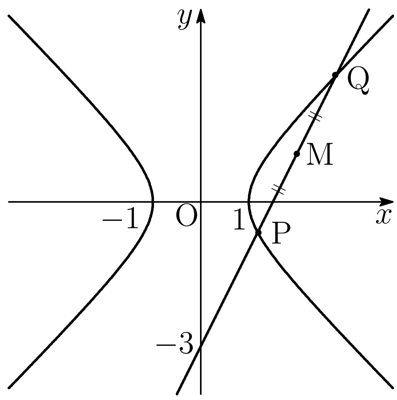
解答
$$x^2-y^2=1 \qquad \cdots ①$$
$$y=2x-3 \qquad \cdots ②$$

② を ① に代入すると　$x^2-(2x-3)^2=1$

整理すると

$$3x^2-12x+10=0 \quad \cdots ③$$

点P，Qの x 座標をそれぞれ x_1，x_2 とすると，x_1，x_2 は2次方程式 ③ の異なる2つの実数解である．
Mは線分PQの中点であるから，その座標を $(x,\ y)$ とすると



$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$

③ において，解と係数の関係により

$$x_1+x_2=-\frac{-12}{3}=4$$

よって　$x=\dfrac{4}{2}=2$

② に代入して　$y=2\cdot2-3=1$

したがって，Mの座標は　$(2,\ 1)$

練習 2.14 楕円 $x^2 + 4y^2 = 4$ と直線 $y = x + 2$ の 2 つの交点を P，Q とするとき，線分 PQ の中点 M の座標を求めよ．

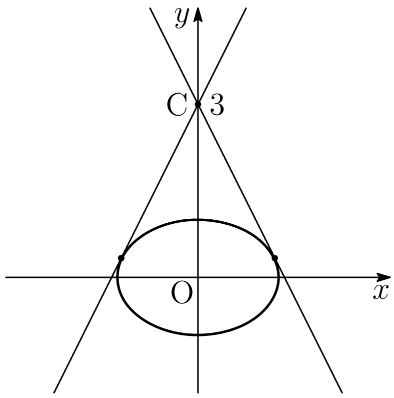
B》2次曲線に引いた接線の方程式

2次曲線上にない点から2次曲線に接線を引くとき，その接線の方程式を求めてみよう．

応用例題 2.4 点 C(0, 3) から楕円 $x^2 + 2y^2 = 2$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ．

考え方》 点 C(0, 3) を通る接線の方程式は，$y = mx + 3$ とおくことができる．この式と楕円の式から y を消去して x の2次方程式を作ると，直線が楕円に接する条件は，判別式 D について，$D = 0$ が成り立つことである．

解答 点 C を通る接線は，y 軸に平行ではないから，その方程式は $y = mx + 3$ とおくことができる．



これを楕円の式に代入すると

$$x^2 + 2(mx + 3)^2 = 2$$

整理すると

$$(2m^2 + 1)x^2 + 12mx + 16 = 0$$

この x の2次方程式の判別式を D とすると

$$D = (12m)^2 - 4(2m^2 + 1)\cdot 16 = 16(m^2 - 4)$$

直線が楕円に接するのは $D = 0$ のときである．

$m^2 - 4 = 0$ を解くと　　$m = \pm 2$

よって，接線の方程式は　　$y = 2x + 3,\ y = -2x + 3$

補足 接点の x 座標は，$x = -\dfrac{6m}{2m^2 + 1}$ である．　　$\leftarrow x = -\dfrac{12m}{2(m^2 + 1)}$

練習 2.15 点 C(4, 0) から放物線 $y^2 = -4x$ に引いた接線の方程式を求めよ．また，その接点の座標を求めよ．

研究

2次曲線の接線の方程式

放物線 $y^2=4px$ $\cdots$①

について，① 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

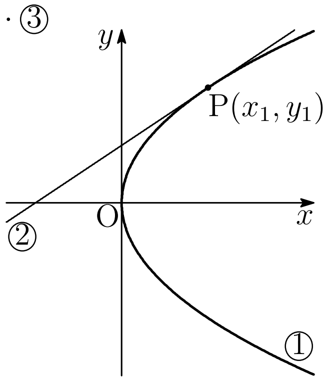
$y_1y=2p(x+x_1)$ $\cdots$②

であることが知られている．このことを確かめてみよう．

② から $2px=y_1y-2px_1$

① を代入すると $y^2=2(y_1y-2px_1)$

整理すると $y^2-2y_1y+4px_1=0$ $\cdots$③



ここで，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ は放物線 ① 上にある

から $y_1{}^2=4px_1$

ゆえに $y^2-2y_1y+y_1{}^2=0$

すなわち $(y-y_1)^2=0$

よって，2次方程式 ③ は重解 $y=y_1$ をもつから，放物線 ① と直線 ② は，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ で接する．

すなわち，放物線 ① 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線は ② である．

楕円，双曲線の接線については，次のことが知られている．

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

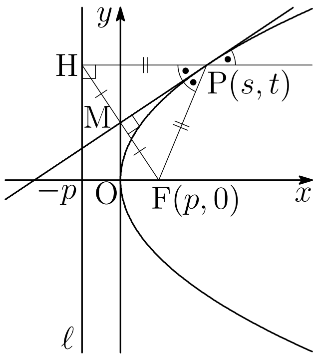
$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

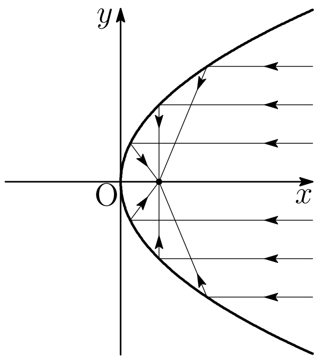
$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

研究

放物線の焦点の座標



放物線 $y^2 = 4px$ の焦点を F，準線を ℓ とする．F の座標は $(p,\ 0)$，ℓ の方程式は $x = -p$ である．この放物線上の任意の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ から準線 ℓ に下ろした垂線を PH とし，線分 FH の中点を M とする．
放物線の定義によると $\mathrm{PF} = \mathrm{PH}$ であるから，二等辺三角形 PHF において，直線 PM は頂角 $\angle\mathrm{FPH}$ を 2 等分する．
よって，図に示した 3 つの角は等しいことがわかる．
また，前ページの研究により．放物線上の点 P における接線の方程式は $ty = 2p(x+s)$ である．



点 M の座標は $\left(0,\ \dfrac{t}{2}\right)$ であり，この接線上にあるから，直線 PM は放物線上の点 P における接線であることがわかる．
以上のことから，放物線の軸に平行に進んできた光や電波が放物線に当たって反射すると，右の図のように，そのすべてが焦点を通過するのである．
楕円，双曲線の焦点についても同じようなことが知られている．

2.1.6 補充問題

1 次のような 2 次曲線の方程式を求めよ.

(1) 焦点が点 $(2,\ 0)$ で，準線が y 軸である放物線

(2) 2 点 $\mathrm{A}(-3,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ 1)$ からの距離の和が 10 である楕円

(3) 2 点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の差が 8 である双曲線

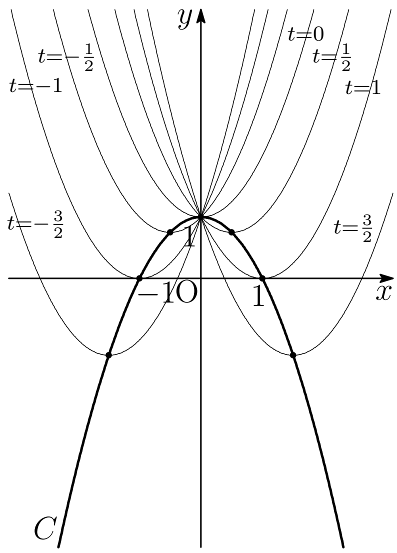
2 円 $x^2+y^2=16$ を，y 軸をもとにして x 軸方向に 2 倍して得られる曲線の方程式を求めよ．

3 双曲線 $x^2-y^2=1$ と直線 $y=2x+k$ が共有点をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ．

2.2　媒介変数表示と極座標

2.2.1　曲線の媒介変数表示

A》媒介変数表示



次の放物線について考える．

$$y=(x-t)^2+1-t^2$$

この放物線の頂点 $(t,\ 1-t^2)$ は，t の値の変化に応じて動く．この放物線の頂点が描く曲線 C の方程式を求めてみよう．

曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標は，

$$x=t,\quad y=1-t^2$$

で表される．
これらから t を消去すると

$$y=1-x^2$$

これが，曲線 C の方程式である．

一般に，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標が，変数 t によって

$$x=f(t),\quad y=g(t)\qquad\cdots ①$$

の形に表されたとき，これを曲線 C の**媒介変数表示**といい，変数 t を**媒介変数**という．① の2つの式から t を消去して得られる x，y の方程式 $F(x,\ y)=0$ が，曲線 C を表す方程式である．

注意　媒介変数による曲線 C の表示方法は一通りではない．

練習 2.16 媒介変数表示される次の曲線について，t を消去して x，y の方程式を求め，曲線の概形をかけ．

(1) $x = t + 1$，$y = t^2 + 4t$

(2) $x = 2t$，$y = t^2 - 2t$

例題 2.4 放物線 $y = x^2 + 2tx - 2t$ の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか．

解答 放物線の方程式を変形すると

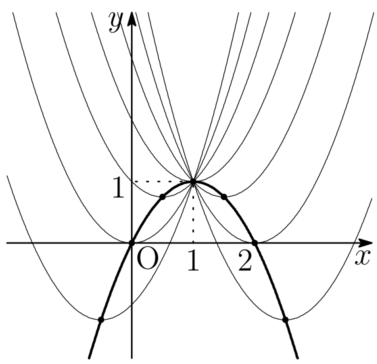
$$y = (x + t)^2 - t^2 - 2t$$

その頂点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$x = -t,\quad y = -t^2 - 2t$$

t を消去すると

$$y = -x^2 + 2x$$



よって，頂点 P が描く図形は，

放物線 $y = -x^2 + 2x$ である．

練習 2.17 放物線 $y=-x^2+4tx+2t$ の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか.

B》 一般角 θ を用いた媒介変数表示

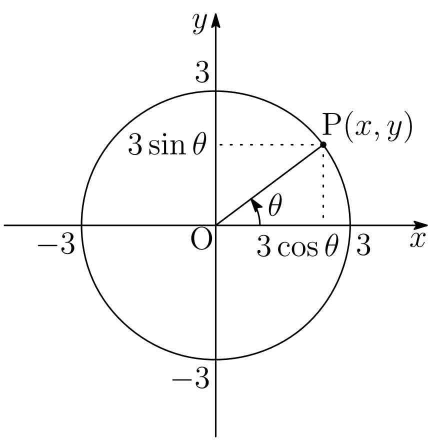
原点 O を中心とする半径 3 の円は，次の方程式で表される.

$$x^2+y^2=3^2 \qquad \cdots ①$$

この円上に点 P(x, y) をとり，動径 OP の表す一般角を θ とすると，

$$x=3\cos\theta,\quad y=3\sin\theta$$

が成り立つ．これは，円 ① の媒介変数表示である．ただし，角は弧度法で表すことにする.



円 $x^2+y^2=a^2$ は，たとえば次のように媒介変数表示される.

$$\boldsymbol{x=a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta}$$

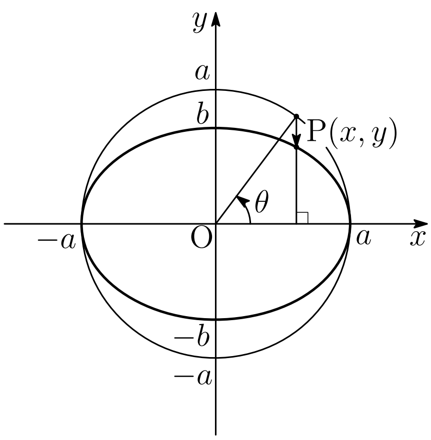
練習 2.18 角 θ を媒介変数として，次の円を表せ.

(1)　$x^2 + y^2 = 2^2$　　(2)　$x^2 + y^2 = 2$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ は，円 $x^2 + y^2 = a^2$ を，x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍した曲線である.

したがって，この楕円は，たとえば次のように媒介変数表示される.

$$\boldsymbol{x = a\cos\theta,\quad y = b\sin\theta}$$



練習 2.19 角 θ を媒介変数として，次の楕円を表せ.

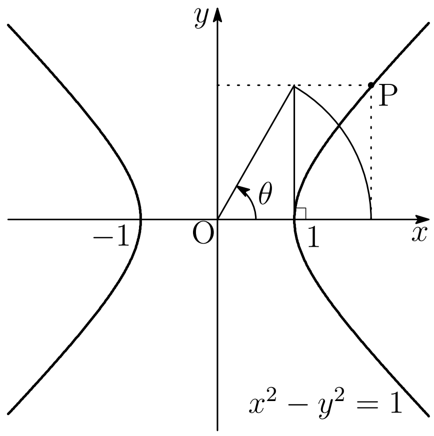
(1)　$\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$　　(2)　$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

例題 2.5 θ が変化するとき，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta\right)$ は双曲線 $x^2-y^2=1$ 上を動くことを示せ.

解答 $x=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $y=\tan\theta$ とすると

$$\begin{aligned} x^2-y^2 &= \frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta \\ &= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta\right)$ は双曲線 $x^2-y^2=1$ 上を動く.



練習 2.20 θ が変化するとき，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{\cos\theta},\ 2\tan\theta\right)$ は双曲線 $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ 上を動くことを示せ.

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，たとえば次のように媒介変数表示される.

$$\boldsymbol{x=\frac{a}{\cos\theta},\quad y=b\tan\theta}$$

練習 2.21 双曲線 $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$ を媒介変数 θ を用いて表せ.

C 》媒介変数表示される曲線の平行移動

応用例題 2.5 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか．

$$x = 2\cos\theta + 1,\quad y = 2\sin\theta + 3$$

考え方 》 $\sin\theta$，$\cos\theta$ を，x，y で表し，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入する．

解答 $$\sin\theta = \frac{y-3}{2},\quad \cos\theta = \frac{x-1}{2}$$

これらを $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すると

$$\frac{(y-3)^2}{2^2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} = 1$$

よって $$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2^2$$

これは，点 $(1,\ 3)$ を中心とする半径 2 の円を表す．

応用例題 2.5 の曲線は，媒介変数表示 $x = 2\cos\theta$，$y = 2\sin\theta$ で表される曲線を，x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動した曲線である．

一般に，次のことが成り立つ．

媒介変数表示 $x = f(t) + p$，$y = g(t) + q$ で表される曲線は，
媒介変数表示 $x = f(t)$，$y = g(t)$ で表される曲線を，
x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである．

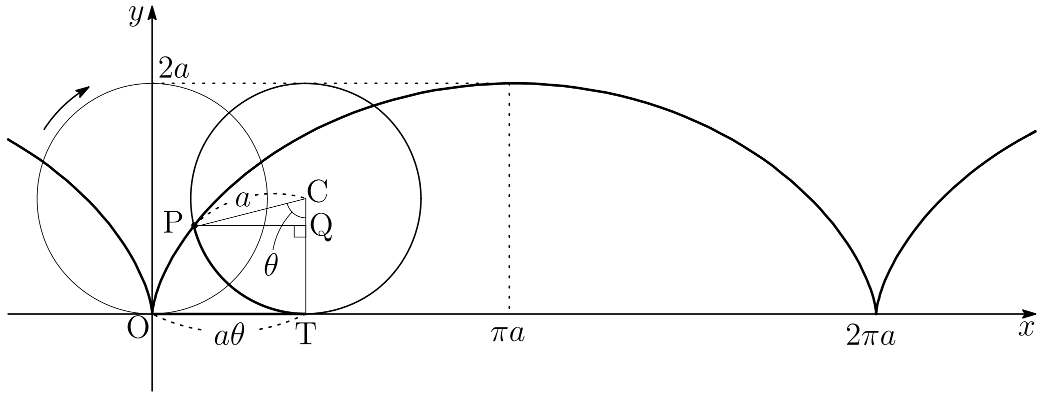
練習 2.22 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか．

(1) $x = 3\cos\theta + 2$，$y = 3\sin\theta - 1$

(2) $x = 3\cos\theta + 1$，$y = 2\sin\theta + 3$

D》サイクロイド

円が定直線上をすべることなく回転していくとき，円周上の定点 P が描く曲線を**サイクロイド**という．



円の半径が a のとき，サイクロイドの媒介変数表示を求めてみよう．

上の図のように，定直線を x 軸とし，点 P の最初の位置を原点 O とする．また，円が角 θ だけ回転したときの点 P の座標を $(x,\ y)$ とし，円の中心を C，x 軸との接点を T とする．

このとき，上の図において，$\mathrm{OT} = \overset{\frown}{\mathrm{TP}} = a\theta$ であるから[1]

$$x = \mathrm{OT} - \mathrm{PQ} = a\theta - a\sin\theta$$
$$y = \mathrm{CT} - \mathrm{CQ} = a - a\cos\theta$$

と表される．

結果の式は，$\sin\theta < 0$ や $\cos\theta < 0$ のときも成り立つ．

したがって，サイクロイドの媒介変数表示は，次のようになる．

$$\boldsymbol{x = a(\theta - \sin\theta),\quad y = a(1 - \cos\theta)}$$

練習 2.23 半径 3 の円が x 軸上をすべることなく回転していくとき，円周上の定点 P の描くサイクロイドの媒介変数表示を求めよ．ただし，点 P の最初の位置を原点 O とする．

[1] 半径が a，中心角が θ ラジアンの扇形の弧の長さは，$a\theta$ である．

研究

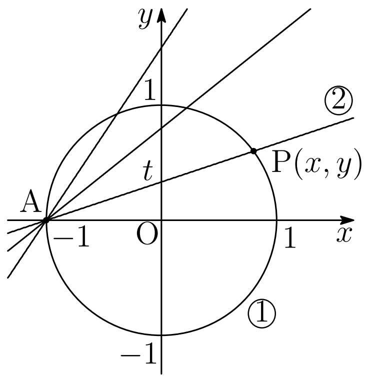
分数式による円の媒介変数表示

次の円と円上の点 A$(-1,\ 0)$ を通る傾き t の直線を考える.

円　　$x^2+y^2=1$　　$\cdots$①
直線　$y=t(x+1)$　　$\cdots$②

円 ① と直線 ② の A 以外の交点を P$(x,\ y)$ として，まず P の座標を求めてみよう.
② を ① に代入すると

$$x^2+t^2(x+1)^2=1$$



整理すると

$$(x+1)\{(1+t^2)x+t^2-1\}=0$$

$x\neq-1$ であるから

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

これを ② に代入すると

$$y=\frac{2t}{1+t^2}$$

よって，P の座標は $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ である.
ここで，t の値が変化するとき，上の点 P は，円 ① 上を動く.
ただし，点 A$(-1,\ 0)$ は除かれる.
このことから，点 P が描く曲線は，t を媒介変数として，

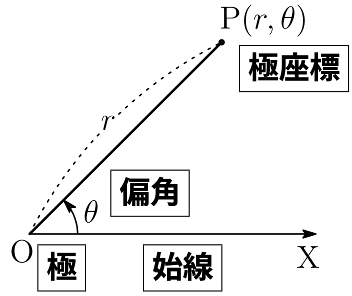
$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2}$$

のように媒介変数表示されることがわかる．この図形は，
円 $x^2+y^2=1$ から点 $(-1,\ 0)$ を除いたものである.

2.2.2　極座標と極方程式

A 》極座標と直交座標

平面上に点 O と半直線 OX を定めると，この平面上の点 P の位置は，OP の長さ r と OX から OP へ測った角 θ の大きさで決まる．ただし，θ は弧度法で表された一般角である．
このとき，2 つの数の組 $(r,\ \theta)$ を，点 P の**極座標**という．極座標が $(r,\ \theta)$ である点 P を $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ と書くことがある．また，点 O を**極**，半直線 OX を**始線**，θ を**偏角**という．



点 P の偏角 θ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲ではただ 1 通りに定まる．なお，θ の範囲を制限しないこともある．

注意　極 O の極座標は $(0,\ \theta)$ とし，θ は任意と考える．

極座標に対して，これまで用いてきた x 座標と y 座標の組 $(x,\ y)$ で表した座標を**直交座標**という．

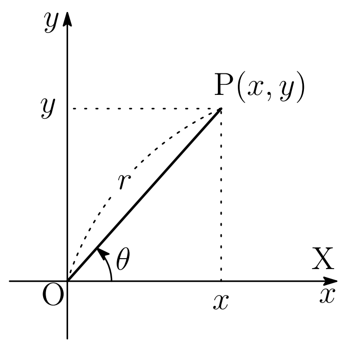
点 P の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，次の関係が成り立つ．

1　$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$

2　$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\cos\theta = \frac{x}{r},\quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

ただし，$r \neq 0$



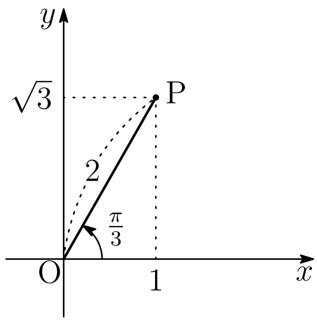
注意　直交座標の原点および x 軸の正の部分が，それぞれ極座標の極，始線となるようにとっている．

例 2.6 極座標が $\left(\boldsymbol{2},\ \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{3}}\right)$ である点 P の直交座標 $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$

$r=2,\ \theta=\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$x=r\cos\theta=2\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$
$$y=r\sin\theta=2\sin\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

よって，点 P の直交座標は　$(1,\ \sqrt{3})$



練習 2.24 極座標が次のような点の直交座標を求めよ.

(1)　$\left(2,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2)　$\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$　　(3)　$(3,\ \pi)$

例 2.7 直交座標が $(-\sqrt{3},\ 1)$ である点 P の極座標 $(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{\theta})$

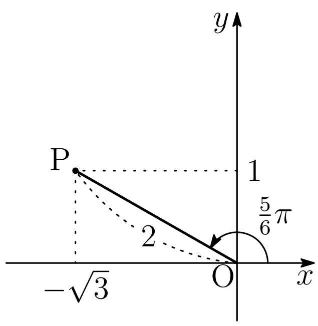
$x=-\sqrt{3},\ y=1$ であるから

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}$$
$$=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

よって，点Pの極座標の1つは　$\left(2,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$



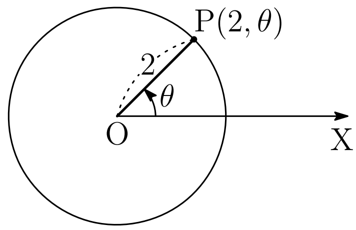
練習 2.25 直交座標が次のような点の極座標を求めよ．ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(1)　$(2,\ 2)$　　　(2)　$(-1,\ \sqrt{3})$　　　(3)　$(-\sqrt{3}, -1)$

B 》極方程式

円や直線を，極座標 r，θ を含む式で表してみよう．

例 2.8　極 O を中心とする半径 2 の円



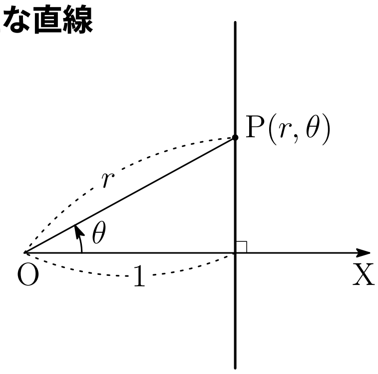
この円上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，$\mathrm{OP} = r$ より

$$r = 2,\quad \theta \text{ は任意の値}$$

と表される．

逆に，$r = 2$ を満たす点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ はこの円上にある．

例 2.9　始線 OX 上の点 (1，0) を通り始線に垂直な直線



この直線上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，$\mathrm{OP}\cos\theta = 1$ より

$$r\cos\theta = 1$$

すなわち　$$r = \frac{1}{\cos\theta}$$

と表される．

逆に，$r = \dfrac{1}{\cos\theta}$ を満たす点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ はこの直線上にある．

例 2.9 の式 $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$ において，θ の変域を $\cos\theta \neq 0$ であるすべての θ にとると，右辺は負の値をとることもある．この場合，$r < 0$ のときの $(r,\ \theta)$ は，極座標が $(|r|,\ \theta + \pi)$ である点を表すと考えることにする．たとえば，例 2.9 の式を満たす $(-1,\ \pi)$ は点 $(1,\ 2\pi)$ を表す．

練習 2.26 点 $\left(1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ を通り始線に平行な直線を，極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表せ．

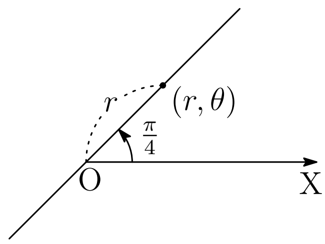
平面上の曲線が，極座標 $(r,\ \theta)$ の方程式 $F(r,\ \theta) = 0$ または $r = f(\theta)$ で表されるとき，その方程式をこの曲線の**極方程式**という．

極方程式においては，$r < 0$ の場合も考える．

極方程式で表される曲線について考えてみよう．

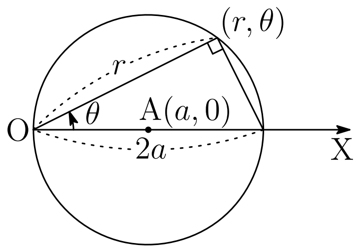
例 2.10 (1) 極 O を通り，始線 OX と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす直線の極方程式は

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$



(2) 中心 A の極座標が $(a,\ 0)$ である半径 a の円の極方程式は，右の図からもわかるように

$$r = 2a\cos\theta$$



注意 (1) で「r は任意の値」は省略している．

練習 2.27 次の極方程式で表される曲線を図示せよ．

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ (2) $r = 2\cos\theta$

C》x，y の方程式と極方程式

x，y の方程式で表された曲線を極方程式で表してみよう．

例題 2.6 次の双曲線を極方程式で表せ．

$$x^2 - y^2 = 1$$

解答 この曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

これらを，$x^2 - y^2 = 1$ に代入すると

$$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$$

すなわち　$r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$　　$\longleftarrow \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$

よって　$r^2\cos 2\theta = 1$

練習 2.28 次の曲線を極方程式で表せ．

$$x^2 + 2y^2 = 4$$

次に，r，θ の方程式で表された曲線を，直交座標の x，y の方程式で表してみよう．

例題 2.7 次の極方程式の表す曲線を，直交座標 x，y の方程式で表せ．

$$r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$$

解答 この曲線上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると

$$r\cos\theta = x,\ r\sin\theta = y,\ x^2 + y^2 = r^2 \quad \cdots ①$$

極方程式 $r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$ の両辺に r を掛けると

$$r^2 = 2r(\cos\theta + \sin\theta)$$

すなわち　$$r^2 = 2r\cos\theta + 2r\sin\theta$$

これに ① を代入して，r，θ を消去すると

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y$$

よって　$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

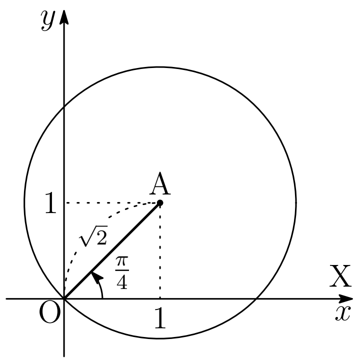
例題 2.7 で求めた x，y の方程式を変形すると，次のようになる．

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

よって，極方程式

$$r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$$

の表す曲線は，点 $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ を中心とし，極 O を通る円であることがわかる．



補足 $r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$ を変形すると，$r = 2\sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ となる．

練習 2.29 次の極方程式の表す曲線を，直交座標 x，y の方程式で表せ.

(1) $r = \dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$

(2) $r = 2\sin\theta$

D》2 次曲線の極方程式

例題 2.8 次の極方程式で表される曲線を，直交座標 x，y の方程式で表せ．

$$r = \frac{1}{2+\cos\theta}$$

解答 分母を払うと　$2r + r\cos\theta = 1$

$r\cos\theta = x$ を代入すると　$2r = 1 - x$

両辺を 2 乗すると　$4r^2 = 1 - 2x + x^2$

$r^2 = x^2 + y^2$ を代入すると　$4(x^2 + y^2) = 1 - 2x + x^2$

整理して　$3x^2 + 4y^2 + 2x - 1 = 0$

補足 上で求めた x，y の方程式を変形すると $\dfrac{9}{4}\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 + 3y^2 = 1$ となり，この曲線が楕円であることがわかる．

練習 2.30 次の極方程式で表される曲線を，直交座標 x，y の方程式で表せ．

$$r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$$

例題 2.9 始線 OX 上の点 A(2, 0) を通り，始線に垂直な直線を ℓ とする．極 O を焦点，ℓ を準線とする放物線の極方程式を求めよ．

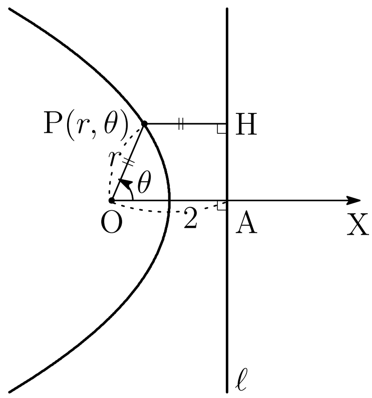
解答 放物線上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とし，P から準線 ℓ に下ろした垂線を PH とする．
このとき，常に

$$\mathrm{OP} = \mathrm{PH}$$

が成り立つ．ここで，

$$\mathrm{OP} = r, \quad \mathrm{PH} = 2 - r\cos\theta$$

であるから　$r = 2 - r\cos\theta$



よって，求める放物線の極方程式は　$r = \dfrac{2}{1+\cos\theta}$

練習 2.31 始線 OX 上の点 A(2, 0) を通り，始線に垂直な直線を ℓ とする．点 P$(r,\ \theta)$ から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき，$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}} = \dfrac{1}{2}$ であるような点 P の軌跡を，極方程式で表せ．

研究

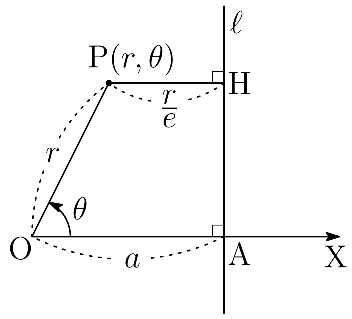
2 次曲線を表す極方程式

始線 OX 上の点 A$(a,\ 0)$ を通り，始線に垂直な直線を ℓ とする．点 P$(r,\ \theta)$ から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき

$$e = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$$

の値が一定であるような点 P の軌跡は，2 次曲線になることが知られている．その極方程式を求めてみよう．

右の図において，線分 PH の長さを 2 通りに表すと



$$\mathrm{PH} = \frac{r}{e},\quad \mathrm{PH} = a - r\cos\theta$$

よって　$\dfrac{r}{e} = a - r\cos\theta$

ゆえに　$r = \dfrac{ea}{1 + e\cos\theta}$　$\cdots$①

① が点 P の軌跡を表す極方程式である．

① の表す曲線は，e のとる値によって，次のような 2 次曲線に分類される．この e の値を離心率という．

［1］　$0 < e < 1$ のとき　　O を焦点の 1 つとする楕円

［2］　$e = 1$ のとき　　O を焦点，ℓ を準線とする放物線

［3］　$e > 1$ のとき　　O を焦点の 1 つとする双曲線

2.2.3　コンピュータの利用

ここでは，グラフ作成機能をもった数式処理ソフトを利用して，コンピュータにいろいろな曲線を描かせてみよう．グラフ作成には，

［1］　関数 $y = f(x)$　　［2］　媒介変数表示　　［3］　極方程式

のいずれかを利用する[2]．

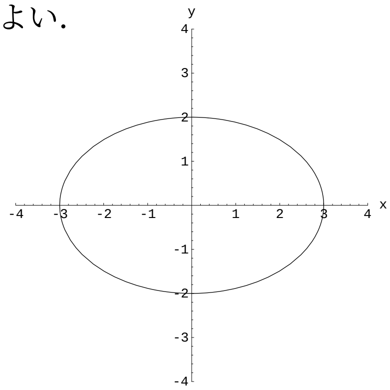
A》2次曲線の描画

2次曲線を描くには，関数 $y = f(x)$ を利用するとよい．たとえば，楕円

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

は，次の2つの関数のグラフを，同時に描けばよい．

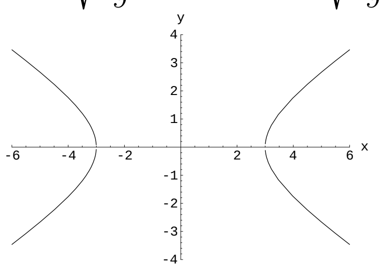
$$y = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}},\quad y = -2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$$

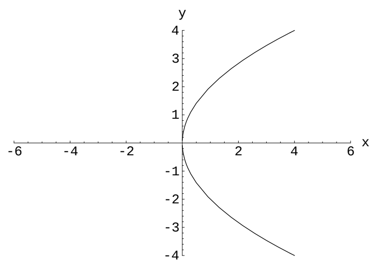


練習 2.32　次の曲線を描くには，どのような関数のグラフを同時に描けばよいか．また，コンピュータの画面に曲線を表示してみよう．

(1)　$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$　　　(2)　$y^2 = 4x$

【答】　(1)　$y = 2\sqrt{\dfrac{x^2}{9} - 1},\ y = -2\sqrt{\dfrac{x^2}{9} - 1}$　　(2)　$y = 2\sqrt{x},\ y = -2\sqrt{x}$





[2] 曲線の式の入力は，そのままの計算式を入力しても無効なことが多い．ソフトの解説書に示された入力方法を参照する必要がある．

B 》媒介変数表示される曲線の描画

媒介変数表示される曲線を描くには，ふつう

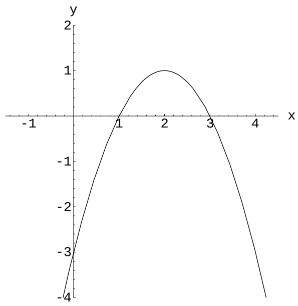
$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

の形の式をそのまま入力すればよい．

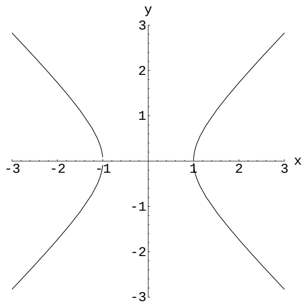
練習 2.33 次のように媒介変数表示される曲線を描いてみよう．

(1)　$x = t + 2,\ \ y = 1 - t^2$　　(2)　$x = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right),\ \ y = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$

【答】 (1)



(2)



以下で扱う媒介変数は，弧度法で表される一般角も t で表し，曲線の媒介変数表示を，$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ の形で表している．

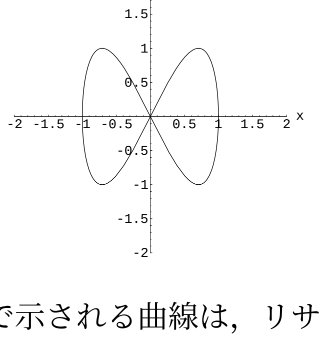
有理数 a，b に対して，媒介変数表示

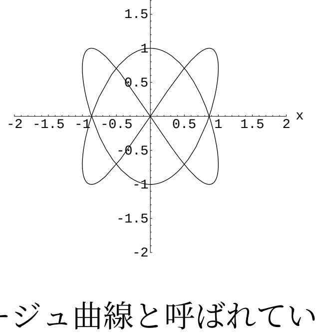
$$\begin{cases} x = \sin at \\ y = \sin bt \end{cases} \qquad \cdots ①$$

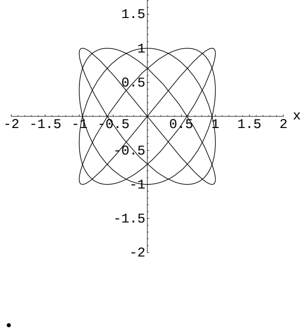
で表される曲線を描いてみよう．

例 2.11 ① において，a，b が次の値をとるときの曲線を描くと，下の図のようになる．

(1)　$a = 1,\ b = 2$　　(2)　$a = 2,\ b = 3$　　(3)　$a = 4,\ b = 5$







補足 ① で示される曲線は，リサージュ曲線と呼ばれている．

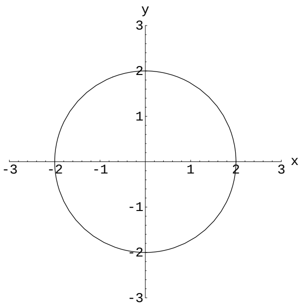
練習 2.34 次のように媒介変数表示される曲線を描いてみよう.

(1) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$

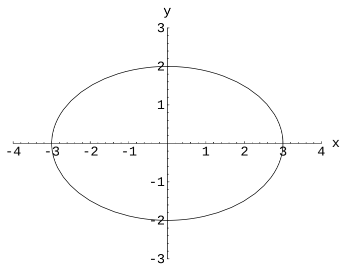
(3) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x = \sin t - \cos t \\ y = \sin t + \cos t \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

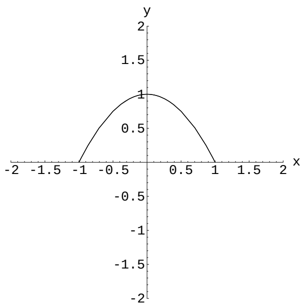
【答】 (1)



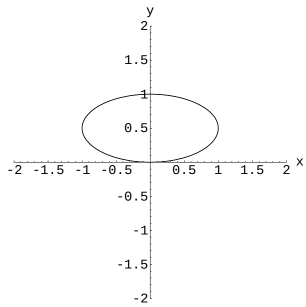
(2)



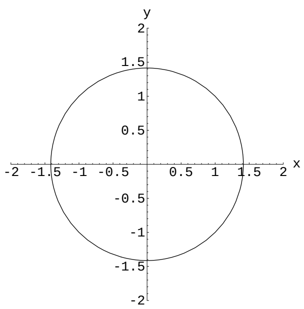
(3)



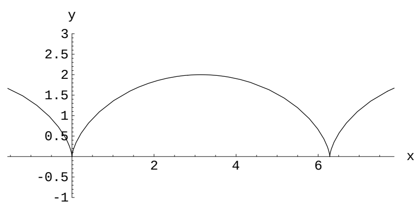
(4)



(5)



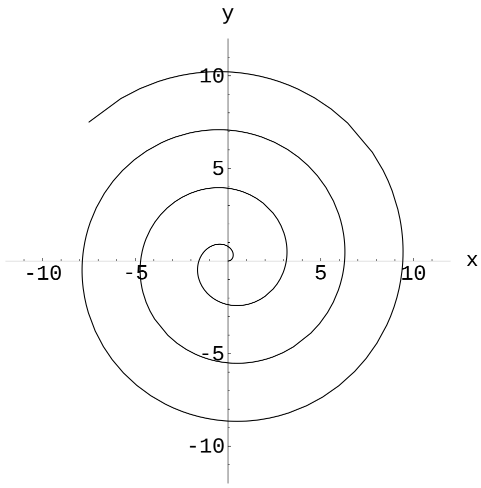
(6)



C ≫ 極方程式で表される曲線の描画

極方程式 $r = f(\theta)$ で表される曲線については，θ の範囲に注意して描いてみよう[3].

例 2.12 極方程式 $r = \dfrac{\theta}{2}\ (\theta \geqq 0)$ で表される曲線をコンピュータで描くと，下の図のようになる[4].



一般に，$a > 0$ のとき，極方程式

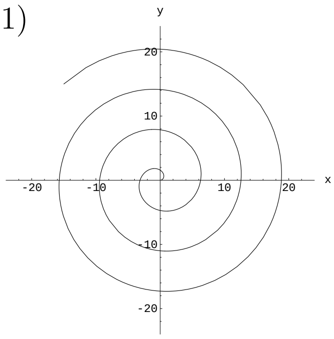
$$r = a\theta \quad (\theta \geqq 0)$$

で表される曲線を，アルキメデスの渦巻線という.

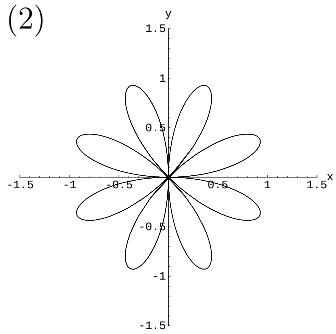
練習 2.35 次のような極方程式で表される曲線をコンピュータで描いてみよう. ただし，いずれも $\theta \geqq 0$ とする.

(1)　$r = \theta$　　(2)　$r = \sin 4\theta$　　(3)　$r = 2(1 + \cos\theta)$

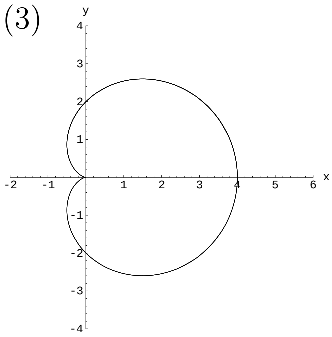
【答】 (1)



(2)



(3)



[3]極座標による入力が使えない場合には，媒介変数表示に直してから入力するとよい. 極方程式 $r = f(\theta)$ は，$x = f(\theta)\cos\theta$，$y = f(\theta)\sin\theta$ と媒介変数表示される.

[4]本書では，極方程式で表される曲線の表示画面を，座標平面の場合と同じにしている.

研究

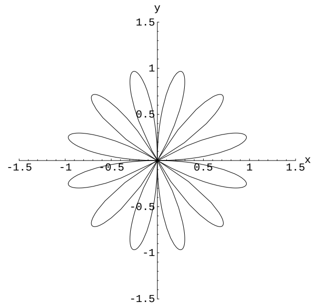
いろいろな曲線

a を有理数とするとき，極方程式

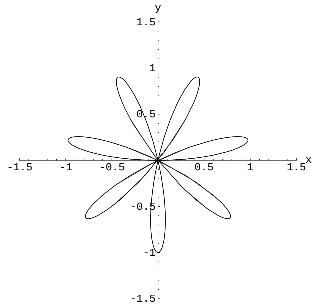
$$r = \sin a\theta$$

で表される曲線を，正葉曲線という．

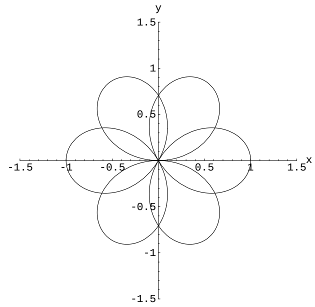
(1)　$a = 6$



(2)　$a = 7$



(3)　$a = 1.5$



a，b を有理数とするとき，極方程式

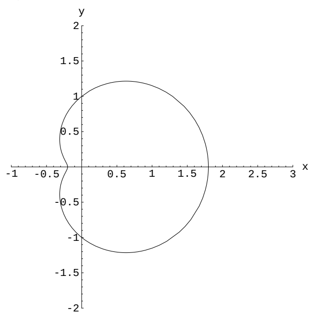
$$r = a + b\cos\theta$$

で表される曲線を，リマソンという．とくに，$a = b$ のときは

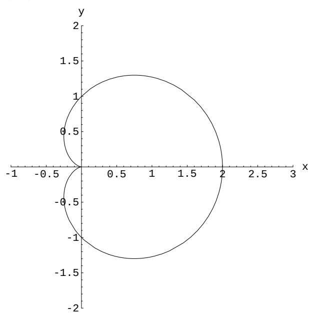
$$r = a(1 + \cos\theta)$$

となる．この極方程式で表される曲線を，カージオイドまたは心臓形という．下の図では，(2) の場合である．

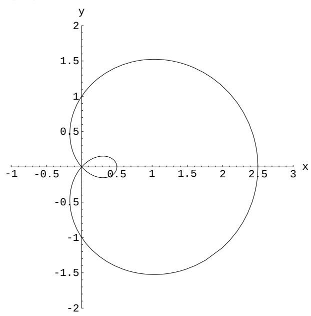
(1)　$a = 1,\ b = 0.8$



(2)　$a = 1,\ b = 1$



(3)　$a = 1,\ b = 1.5$



2.2.4　補充問題

4 媒介変数表示される次の曲線について，θ を消去して x，y の方程式を求めよ．

(1) $x = 2\cos\theta - 1,\quad y = 3\sin\theta - 2$

(2) $x = \dfrac{1}{\cos\theta} + 2,\quad y = 2\tan\theta + 1$

5 極を O とし，点 A の極座標を $\left(3,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ とする．点 A を通り，直線 OA に垂直な直線の極方程式は，$r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = 3$ であることを示せ．

6 次の極方程式の表す曲線を，直交座標 x，y の方程式で表せ.

(1) $r = 2(\cos\theta - 2\sin\theta)$

(2) $r^2 \sin\theta \cos\theta = 1$

7 曲線 $y^2 = x^2(1 - x^2)$ を，コンピュータで描いてみよう.

2.3　章末問題

2.3.1　章末問題 A

1 次の方程式の表す 2 次曲線の概形をかけ．また，焦点の座標を求めよ．

(1) $y^2 + 8x = 0$

(2) $4x^2 + 16y^2 = 1$

(3) $8x^2 - 4y^2 = 32$

2 次のような2次曲線の方程式を求めよ．

(1) 頂点が原点で，焦点が x 軸上にあり，点 $(-1,\ 2)$ を通る放物線

(2) 長軸が x 軸上，短軸が y 軸上にあり，長軸の長さが4で点 $(\sqrt{2},\ 1)$ を通る楕円

(3) 頂点の座標が $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ で，2直線 $y = 2x$，$y = -2x$ を漸近線とする双曲線

3 次の方程式は放物線，楕円，双曲線のいずれを表すか．また，その焦点の座標を求めよ．

(1) $x^2 - 2x + 4y^2 - 3 = 0$

(2) $y^2 - 4y - 4x = 0$

(3) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$

4 次のように媒介変数表示される図形はどのような曲線か．x，y の方程式を求めて示せ．

(1) $\begin{cases} x = 2t^2 + 4 \\ y = t + 3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = 2\sqrt{t} \\ y = \sqrt{t} - 2t \end{cases}$

5 点 A，B の極座標を，それぞれ $\left(3,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$，$\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ とする．極 O と点 A，B を頂点とする △OAB の面積を求めよ．

6 点 C の極座標を $(r_1,\ \theta_1)$ とする．点 C を中心とする半径 a の円の極方程式は，次の式で表されることを示せ．

$$r^2 + {r_1}^2 - 2rr_1\cos(\theta - \theta_1) = a^2$$

2.3.2 章末問題 B

7 直線 $x = -1$ に接し，点 A$(1,\ 0)$ を通る円の中心を P$(x,\ y)$ とする．点 P の軌跡はどのような曲線になるか.

8 双曲線 $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{3} = 1$ の焦点の 1 つ $(3,\ 0)$ を F とする．この双曲線上の任意の点 P$(x,\ y)$ から直線 $x = 2$ に下ろした垂線を PH とするとき，$\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ の値は一定であることを示せ．また，その値を求めよ.

9 2 次曲線 $4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 8 = 0$ を，x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 だけ平行移動した 2 次曲線の方程式を求め，どのような曲線かを調べよ．また，移動後の 2 次曲線の焦点の座標を求めよ.

10 直線 $y=-x+k$ が，楕円 $4x^2+y^2=4$ と異なる2点Q，Rで交わるように k の値が変化するとき，線分QRの中点Pの軌跡を求めよ．

11 次の方程式が円を表すように t の値が変化するとき，円の中心Pはどのような曲線を描くか．

$$x^2+y^2+2tx-4ty+5t^2-t=0$$

12 a は正の定数とする．極方程式 $r^2=2a^2\cos 2\theta$ の表す曲線を，直交座標 x，y の方程式で表せ．また，コンピュータでこの曲線を描け．

ヒント

8　$\dfrac{\mathrm{PF}^2}{\mathrm{PH}^2}$ から求める．　**10**　k の値の範囲に注意する．

11　方程式が円を表すことから t の値の範囲が定まる．