高校生の

新　編　数　学　C

解答編

平成 20 年 9 月 4 日

Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

目 次

第 1 章　行列

1.1　行列の演算

1.1.1　行列

練習 1.1 次の行列は何行何列の行列か．また，正方行列はどれか．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

【答】 (1) 3 行 2 列の行列　(2) 3 行 3 列の行列 (3 次の正方行列)
(3) 1 行 3 列の行列　(4) 2 行 1 列の行列

練習 1.2 練習 1.1(2) の行列について，次の成分をいえ．

(1)　(3, 2) 成分　　(2)　(1, 3) 成分　　(3)　(3, 3) 成分

【答】 (1) 6　(2) -7　(3) 9

練習 1.3 次の等式が成り立つとき，x，y，z，w の値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ x & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z & w \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

【解】 (1) $4 = 2z$，$-3 = w$，$x = -5$，$3y = -6$ であるから

$$x = -5,\ y = -2,\ z = 2,\ w = -3$$

(2) $2x + y = 1$，$x - 3y = 4$ であるから

$$x = 1,\ y = -1$$

1.1.2　行列の加法・減法と実数倍

練習 1.4 次の計算をせよ.

(1) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 & -7 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

【解】 (1) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+(-2) & 4+5 \\ -3+8 & 1+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5 & 9-6 \\ -6-4 & 7-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$

(3) $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 & -7 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6+(-4) & -5+3 & 2+(-7) \\ 0+1 & 4+8 & -3+6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 4-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

練習 1.5 次の行列 A について，$-A$ および $A+(-A)$ を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

【解】 (1) $-A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $A+(-A) = \begin{pmatrix} 2+(-2) & -5+5 \\ 4+(-4) & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $-A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A+(-A) = \begin{pmatrix} 2+(-2) \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

練習 1.6 次の計算をせよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

【解】 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+(-3)+5 & 3+4+(-2) \\ 2+0+(-4) & 4+(-2)+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2+4-3 & 0+(-2)-(-1) \\ 1+5-(-6) & -3+(-1)-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

練習 1.7 $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ のとき，次の行列を求めよ.

(1) $3A$　　(2) $\dfrac{1}{2}A$　　(3) $(-2)A$　　(4) $(-1)A$

【答】 (1) $\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

練習 1.8 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ と $k = 2$，$l = 3$ について，次の各等式が成り立つことを確かめよ．

(1)　$k(lA) = (kl)A$　　(2)　$(k+l)A = kA + lA$

(3)　$k(A+B) = kA + kB$

【解】 (1)　$2(3A) = 2\begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a & 6b \\ 6c & 6d \end{pmatrix}$

$$(2\cdot 3)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a & 6b \\ 6c & 6d \end{pmatrix}$$

(2)　$(2+3)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a & 5b \\ 5c & 5d \end{pmatrix}$

$$2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a & 5b \\ 5c & 5d \end{pmatrix}$$

(3)　$2\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\right\} = 2\begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2a+2p & 2b+2q \\ 2c+2r & 2d+2s \end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2p & 2q \\ 2r & 2s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a+2p & 2b+2q \\ 2c+2r & 2d+2s \end{pmatrix}$$

練習 1.9 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，次の式を計算せよ.

(1) $2(3A+B)$ (2) $3(A-2B)$ (3) $2(2A-B)+3B$

【解】 (1) $2(3A+B)=6A+2B$

$$=6\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 22 & -16 \\ -36 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) $3(A-2B)=3A-6B$

$$=3\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}-6\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -24 & -15 \\ 24 & -12 \end{pmatrix}$$

(3) $2(2A-B)+3B=4A+B$

$$=4\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & -11 \\ -22 & 2 \end{pmatrix}$$

練習 1.10 行列 $A=\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，次の等式を満たす行列 X を求めよ.

(1) $2A+3X=B$ (2) $3(A+X)=X+2B$

【解】 (1) $2A+3X=B$ から $3X=B-2A$

よって
$$\begin{aligned} X&=\frac{1}{3}(B-2A)\\ &=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\right\}\\ &=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) $3A+3X=X+2B$ から $2X=-3A+2B$

よって
$$\begin{aligned} X&=\frac{1}{2}(-3A+2B)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} -21 & 3 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & 11 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.1.3 行列の乗法

練習 1.11 次の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

【解】 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+5\cdot3 \\ 4\cdot2+6\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-1)+1\cdot4 \\ 0\cdot(-1)+(-2)\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+7\cdot0 \\ 5\cdot1+4\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot0+4\cdot1 \\ 5\cdot0+(-3)\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

練習 1.12 次の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

【解】 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot6+0\cdot7 & 1\cdot5+0\cdot4 \\ 2\cdot6+3\cdot7 & 2\cdot5+3\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 33 & 22 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot3+2\cdot2 & 1\cdot(-1)+2\cdot1 \\ -3\cdot3+4\cdot2 & -3\cdot(-1)+4\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot2+0\cdot4 & 3\cdot1+0\cdot(-5) \\ 0\cdot2+3\cdot4 & 0\cdot1+3\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & -15 \end{pmatrix}$

練習 1.13 次の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

【解】 (1) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-6)+0\cdot7 & 1\cdot3+0\cdot5 \\ 3\cdot(-6)+4\cdot7 & 3\cdot3+4\cdot5 \\ 2\cdot(-6)+5\cdot7 & 2\cdot3+5\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 10 & 29 \\ 23 & 31 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x+3y+5z$$

1.1.4 行列の乗法の性質

練習 1.14 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ について，次の各等式が成り立つことを確かめよ.

(1) $(2A)B = A(2B) = 2(AB)$ (2) $(A+B)C = AC+BC$

【解】 (1) $2A = 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$, $2B = 2\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p & 2q \\ 2r & 2s \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

よって $$(2A)B = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ap+2br & 2aq+2bs \\ 2cp+2dr & 2cq+2ds \end{pmatrix}$$

$$A(2B) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2p & 2q \\ 2r & 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ap+2br & 2aq+2bs \\ 2cp+2dr & 2cq+2ds \end{pmatrix}$$

$$2(AB) = 2\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ap+2br & 2aq+2bs \\ 2cp+2dr & 2cq+2ds \end{pmatrix}$$

(2) $A+B=\begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$

よって　$(A+B)C=\begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} ax+px+bz+qz & ay+py+bw+qw \\ cx+rx+dz+sz & cy+ry+dw+sw \end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

$$BC=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} px+qz & py+qw \\ rx+sz & ry+sw \end{pmatrix}$$

よって　$AC+BC=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} px+qz & py+qw \\ rx+sz & ry+sw \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} ax+bz+px+qz & ay+bw+py+qw \\ cx+dz+rx+sz & cy+dw+ry+sw \end{pmatrix}$$

練習 1.15 次の計算をせよ.

(1) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

【解】 (1) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\cdot2+(-1)\cdot(-4) \\ 5\cdot2+0\cdot(-4) \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

練習 1.16 次の行列 A と B が交換可能であるように，x，y の値を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

【解】 (1) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2x \\ 6 & 6+x \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3x & 6+x \end{pmatrix}$$

よって　$2x = 4$，$3x = 6$

これを解いて　$x = 2$

(2) $AB = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 3x \\ 2y+4 & 3y+5 \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y & 3 \\ 4x+5y & 5 \end{pmatrix}$$

よって　$2x = 2x+3y$，$3x = 3$，$2y+4 = 4x+5y$，$3y+5 = 5$

これを解いて　$x = 1$，$y = 0$

練習 1.17 B を任意の 3 次の正方行列とするとき，次のことが成り立つことを確かめよ．

$$BE = EB = B$$

[証明] $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ とすると

$$BE = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$EB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

よって　$BE = EB = B$ **[証終]**

練習 1.18 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 4 & a \\ a & b \end{pmatrix}$ のとき，$AB = O$ であるように，a，b の値を定めよ．

【解】 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & a \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+4a & 2a+4b \\ 4+2a & a+2b \end{pmatrix}$

よって　$8+4a=0$，$2a+4b=0$，$4+2a=0$，$a+2b=0$

これを解いて　$a=-2$，$b=1$

例 1.9 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

練習 1.19 例 1.9 の行列 A について，次の行列を求めよ．

(1) A^4　(2) A^5　(3) A^6

【解】 $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(1) $A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) (1) より，$A^4 = E$ であるから

$A^5 = A^4A = EA = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) (2) より，$A^5 = A$ であるから

$A^6 = A^5A = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

練習 1.20 次の行列 A について，A^2，A^3，A^4 を，それぞれ求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

【解】 (1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

(3) $A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix}$$

練習 1.21 行列 $A=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ について，$A^2=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ となるように，a，b の値を定めよ．

【解】
$$A^2=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+6 & 3(a+b) \\ 2(a+b) & b^2+6 \end{pmatrix}$$

よって　$\begin{pmatrix} a^2+6 & 3(a+b) \\ 2(a+b) & b^2+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

成分を比較して　$a^2+6=7$，$a+b=0$，$b^2+6=7$

これを解いて　$a=1$，$b=-1$　または　$a=-1$，$b=1$

練習 1.22 行列 $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ について，$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ となるように，a，b の値を定めよ．ただし，a，b は実数とする．

【解】 $A^3=A^2A=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$

よって　$\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

成分を比較して　$a^3=1$，$b^3=8$

a，b が実数であるから　$a=1$，$b=2$

練習 1.23 行列 $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix}$ について，等式 $A^2+A+E=O$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．ただし，$a>0$ とする．

(1) a の値を求めよ．　　(2) A^3 を求めよ．

【解】 (1)

$$\begin{aligned}
&A^2+A+E \\
&=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&=\frac{1}{4}\left\{\begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ -2a & 1-a^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -2a \\ 2a & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right\} \\
&=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3-a^2 & 0 \\ 0 & 3-a^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$A^2+A+E=O$ より　　$3-a^2=0$

$a>0$ であるから　　$a=\sqrt{3}$

(2) $A^2+A+E=O$ より　　$A^2=-A-E$

よって

$$\begin{aligned}
A^3&=A^2A \\
&=(-A-E)A \\
&=-A^2-A \\
&=-(-A-E)-A \\
&=E \\
&=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

応用例題 1.2 任意の 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，等式

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

が成り立つ．このことを証明せよ．

考え方 左辺を直接計算してもよいが，ここでは変形した次の等式を証明してみる．

$$A^2 + (ad-bc)E = (a+d)A$$

[証明]

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

$$(ad-bc)E = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} A^2 + (ad-bc)E &= \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} \\ &= (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= (a+d)A \end{aligned}$$

よって $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ **[証終]**

注意 上で示した事柄を，2 次の正方行列に関する**ハミルトン・ケーリーの定理**という．

練習 1.24 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，次のことが成り立つことを，応用例題 1.2 の等式を用いて証明せよ．

(1) $a+d=0,\ ad-bc=0$ ならば $A^2 = O$

(2) $a+d=0,\ ad-bc=-1$ ならば $A^2 = E$

(1) **[証明]** 応用例題 1.2 の等式において $a+d=0,\ ad-bc=0$ とすると

$A^2 - 0{\cdot}A + 0{\cdot}E = O$ すなわち $A^2 = O$ **[証終]**

(2) **[証明]** 応用例題 1.2 の等式において $a+d=0,\ ad-bc=-1$ とすると

$A^2 - 0{\cdot}A + (-1){\cdot}E = O$ すなわち $A^2 = E$ **[証終]**

1.1.5　補充問題

1 次の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

【解】 (1) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot(-2) & 4\cdot 1 \\ 3\cdot(-2) & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6 & -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \end{pmatrix}$

2 2次の正方行列において，次の等式が常に成り立つかどうかを調べよ.

(1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$　　(2) $(A+E)^2 = A^2 + 2A + E$

(3) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$　　(4) $(A-E)(A^2+A+E) = A^3 - E$

【解】 (1) 成り立たない.

一般には　$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

(2) 成り立つ.

(3) 成り立たない.

一般には　$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

(4) 成り立つ.

3 nを自然数とするとき，$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

証明　この等式を (A) とする．

［1］ $n=1$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき，(A) が成り立つ，すなわち

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix}$$

であると仮定すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^{k+1} & 0 \\ 0 & \beta^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］,［2］から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ．

1.2 行列の応用

1.2.1 逆行列

練習 1.25 次の行列は逆行列をもつか．もつ場合は，その逆行列を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

【解】 (1) $\Delta = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 2 \neq 0$

よって，A は逆行列をもち $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\Delta = 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -1 \neq 0$

よって，B は逆行列をもち $B^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

(3) $\Delta = (-1) \cdot 4 - 2 \cdot (-2) = 0$

よって，C は逆行列をもたない．

練習 1.26 次の行列が逆行列をもたないように，a の値を定めよ．

(1) $\begin{pmatrix} a & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a & 4 \\ 2 & a+2 \end{pmatrix}$

【解】 行列が逆行列をもたないのは，$\Delta = 0$ のときである．

(1) $\Delta = a \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 2a - 12$

よって $2a - 12 = 0$

これを解いて $a = 6$

(2) $\Delta = a(a+2) - 4 \cdot 2 = a^2 + 2a - 8 = (a+4)(a-2)$

よって $(a+4)(a-2) = 0$

これを解いて $a = -4,\ 2$

練習 1.27 2つの行列　$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ について，等式 $AX=B$ を満たす行列 X を求めよ．また，等式 $YA=B$ を満たす行列 Y を求めよ．

【解】 A について　　$\Delta = 2{\cdot}2 - 1{\cdot}3 = 1 \neq 0$

よって，A は逆行列をもち　　$A^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

したがって，等式 $AX=B$ を満たす行列 X は

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

また，等式 $YA=B$ を満たす行列 Y は

$$Y = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}$$

1.2.2　連立1次方程式と行列

練習 1.28 次の連立1次方程式を行列を用いて表せ．

(1) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+4y=3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 4x-7y=6 \end{cases}$

【答】 (1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

練習 1.29 行列を用いて，次の連立 1 次方程式を解け.

(1) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x + 7y = 10 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$

【解】 (1) 行列を用いて表すと　$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

係数行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ について　$\Delta = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1 \neq 0$

ゆえに，係数行列は逆行列をもち

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

よって　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

したがって　$x = 2$，$y = -1$

(2) 行列を用いて表すと　$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

係数行列 $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ について　$\Delta = 3 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 5 \neq 0$

ゆえに，係数行列は逆行列をもち

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

よって　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって　$x = 1$，$y = 1$

練習 1.30 連立1次方程式 $\begin{cases} 2x+2y=kx \\ 5x-y=ky \end{cases}$ が，$x=0$，$y=0$ 以外の解をもつように，定数 k の値を定めよ．

【解】 与えられた連立1次方程式は，次のように表される．

$$\begin{cases} (2-k)x+2y=0 \\ 5x-(1+k)y=0 \end{cases} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{pmatrix} 2-k & 2 \\ 5 & -(1+k) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この方程式が，$x=0$，$y=0$ 以外の解をもつのは，係数行列が逆行列をもたないときである．

よって，$\Delta=0$ より　　$-(2-k)(1+k)-2\cdot 5=0$

整理すると　　$k^2-k-12=0$

これを解いて　　$k=-3,\ 4$

1.2.3　点の移動と行列

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots ①$$

練習 1.31　点 $(3,\ 2)$ を，x 軸に関して対称移動する．移動後の点の座標を $(x',\ y')$ で表すとき，上の ① の等式を用いて x'，y' の値を求めよ．

【解】 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

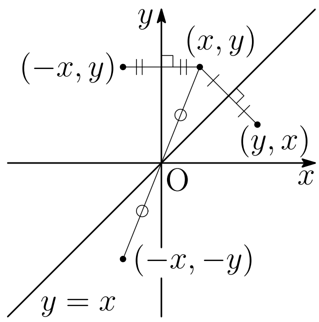
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots ①$$

練習 1.32　点 $(x,\ y)$ を次のように対称移動する．移動後の点の座標を $(x',\ y')$ で表すとき，点の座標の関係を上の ① のように行列を用いて表せ．

(1)　y 軸に関して対称移動する．
　　移動後の点の座標は　$(-x,\ y)$

(2)　原点に関して対称移動する．
　　移動後の点の座標は　$(-x, -y)$

(3)　直線 $y = x$ に関して対称移動する．
　　移動後の点の座標は　$(y,\ x)$



【解】 (1) $\begin{cases} x' = (-1)\cdot x + 0\cdot y \\ y' = 0\cdot x + 1\cdot y \end{cases}$ より　$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(2) $\begin{cases} x' = (-1)\cdot x + 0\cdot y \\ y' = 0\cdot x + (-1)\cdot y \end{cases}$ より　$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(3) $\begin{cases} x' = 0\cdot x + 1\cdot y \\ y' = 1\cdot x + 0\cdot y \end{cases}$ より　$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

練習 1.33 次の行列の表す 1 次変換による与えられた点の像を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, 点 $(1,\ 2)$　　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, 点 $(4,\ 1)$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, 点 $(-3,\ 5)$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 点 $(3, -4)$

【解】 (1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ より　点 $(10,\ 5)$

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ より　点 $(-2,\ 8)$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -38 \end{pmatrix}$ より　点 $(-19, -38)$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ より　点 $(3, -4)$

練習 1.34 点 $(1,\ 0)$ を点 $(-2,\ 3)$ に，点 $(0,\ 1)$ を点 $(1, -4)$ に移す 1 次変換を表す行列を求めよ.

【答】 $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

練習 1.35 点 $(2,\ 1)$ を点 $(8,\ 5)$ に，点 $(-6,\ 7)$ を点 $(-4, -5)$ に移す 1 次変換を表す行列 A を求めよ．

【解】 条件から，次の等式が成り立つ．

$$A\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \quad \cdots ①$$

行列 $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ について　　$\Delta = 2{\cdot}7 - (-6){\cdot}1 = 20 \neq 0$

よって，逆行列は　$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

したがって，① より

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 60 & 40 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

練習 1.36　直線 $y = 3x$ に関する対称移動 f は 1 次変換である．このことを示し，f を表す行列を求めよ．

【解】 直線 $y = 3x$ を ℓ とし，ℓ に関して点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と対称な点を $\mathrm{Q}(x',\ y')$ とする．直線 PQ は ℓ に垂直であり，また線分 PQ の中点が ℓ 上にあるから

$$\begin{cases} 3\cdot\dfrac{y'-y}{x'-x} = -1 \\ \dfrac{y+y'}{2} = 3\cdot\dfrac{x+x'}{2} \end{cases} \qquad \text{よって} \qquad \begin{cases} x' + 3y' = x + 3y \\ -3x' + y' = 3x - y \end{cases}$$

すなわち
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$ であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって，f は 1 次変換で，求める行列は $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1.2.4　合成変換と逆変換

練習 1.37 1 次変換 f，g を表す行列を，それぞれ $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$，

$B=\begin{pmatrix}-1&0\\2&-3\end{pmatrix}$ とするとき，次の合成変換を表す行列を求めよ．

(1)　$g\circ f$　　(2)　$f\circ g$　　(3)　$f\circ f$

【解】 (1) $BA=\begin{pmatrix}-1&0\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2\\2&-5\end{pmatrix}$

(2) $AB=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-6\\6&-9\end{pmatrix}$

(3) $A^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8\\0&9\end{pmatrix}$

練習 1.38 練習 1.37 における 1 次変換 f，g について，次の問いに答えよ．

(1) f^{-1}，g^{-1} を表す行列を，それぞれ求めよ．

(2) f によって点 $\mathrm{Q}(4,-1)$ に移されるもとの点 P の座標を求めよ．

【解】 (1) f^{-1} を表す行列は　$A^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}3&-2\\0&1\end{pmatrix}$

g^{-1} を表す行列は　$B^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&0\\-2&-1\end{pmatrix}$

(2) $A^{-1}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}3&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}14\\-1\end{pmatrix}$

よって，もとの点 P の座標は　$\left(\dfrac{14}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

1.2.5 回転移動と 1 次変換

練習 1.39 原点の周りに 45° だけ回転する 1 次変換を表す行列 A を求めよ．また，この回転によって点 $\mathrm{P}(0,\ 2)$ が移る点 Q の座標を求めよ．

【解】 $A = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

また $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

よって，この回転によって点 P が移る点 Q の座標は $\mathrm{Q}(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

練習 1.40 原点の周りに 60° だけ回転する 1 次変換を f とするとき，逆変換 f^{-1} を表す行列を求めよ．

【解】 変換 f^{-1} を表す行列は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.2.6 補充問題

4 2 次の正方行列 A，B がともに逆行列をもつとき，積 AB も逆行列をもち，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

【解】 $$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} \\ &= AA^{-1} = E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB \\ &= B^{-1}B = E \end{aligned}$$

よって $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

5 1 次変換 f，g を表す行列を，それぞれ $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ とするとき，合成変換 $f\circ g$ による点 $(2,-3)$ の像を求めよ．

【解】 $f\circ g$ を表す行列は

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 7 & -1\end{pmatrix}$$

また $$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 7 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 17\end{pmatrix}$$

よって，求める像は　点 $(-5,\ 17)$

6 原点の周りに 30° だけ回転する 1 次変換を表す行列を A とするとき，A^4 を求めよ．

【解】 A^4 は原点の周りに $30^\circ\times 4$ だけ回転する 1 次変換であるから

$$A^4=\begin{pmatrix}\cos 120^\circ & -\sin 120^\circ\\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

7 点 P(3, 1) と x 軸に関して対称な点を Q とし，Q を原点の周りに 150° だけ回転した位置にある点を R とする．R の座標を求めよ．

【解】

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\cos 150^\circ & -\sin 150^\circ\\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\sqrt{3}+1\\ 3+\sqrt{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，R の座標は $\left(\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$

1.3 章末問題

1.3.1 章末問題 A

1 次の計算をせよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4$

【解】 (1)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 20 & 32 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ が等式 $A^2 + xA + yE = O$ を満たすとき，x，y の値を求めよ．ただし，E は 2 次の単位行列，O は 2 次の零行列とする．

【解】 $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -16 \\ 8 & 23 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A^2 + xA + yE &= \begin{pmatrix} 7 & -16 \\ 8 & 23 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7+3x+y & -16-2x \\ 8+x & 23+5x+y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって，$A^2 + xA + yE = O$ から

$$7+3x+y=0,\ -16-2x=0,\ 8+x=0,\ 23+5x+y=0$$

これを解いて　$x=-8$，$y=17$

【別解】 ハミルトン・ケーリーの定理から

$$A^2-8A+17E=O \quad \cdots ①$$

仮定から　$A^2+xA+yE=O \quad \cdots ②$

② − ① から　$(x+8)A+(y-17)E=O$

[1] $x+8=0$ のとき

$(y-17)E=O$, $E \neq O$ より　$y-17=0$

よって　$x=-8$, $y=17$

[2] $x+8 \neq 0$ のとき

$k=-\dfrac{y-17}{x+8}$ とおくと　$A=kE$

これは与えられた A と一致しない．

したがって　$x=-8$, $y=17$

3 2次の正方行列 A, B はともに逆行列をもち，$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -5\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{pmatrix}$ であるという．行列 $A^{-1}B^{-1}$ および AB を求めよ．

【解】 $A^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 24\\ 12 & -41\end{pmatrix}$

$A=(A^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}-5 & -3\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$B=(B^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

よって　$AB=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41 & 18\\ 16 & 7\end{pmatrix}$

4 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，行列 $A-kE$ が逆行列をもたないように，実数 k の値を定めよ．

【解】 $A-kE=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -k & 2 \\ -2 & 4-k \end{pmatrix}$

$\Delta=-k(4-k)-2(-2)=(k-2)^2$

$\Delta=0$ より　$k=2$

5 点 $(1,\ 2)$ を点 $(7,\ 4)$ に，点 $(2,-1)$ を点 $(4,\ 3)$ に移す1次変換を表す行列 A を求めよ．

【解】 条件から　$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　$\cdots$①

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ について　$\Delta=1\cdot(-1)-2\cdot2=-5\neq0$

よって　$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{-5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

① より　$A=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

6 $A=\begin{pmatrix} 3 & a \\ b & -a \end{pmatrix}$ で表される1次変換を f とする．合成変換 $f\circ f$ を表す行列が A 自身であるとき，a，b の値を求めよ．

【解】合成変換 $f\circ f$ を表す行列は

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & a \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & a \\ b & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9+ab & 3a-a^2 \\ 3b-ab & ab+a^2 \end{pmatrix}$$

$f\circ f$ を表す行列が，A 自身であるから

$$\begin{pmatrix} 9+ab & 3a-a^2 \\ 3b-ab & ab+a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & a \\ b & -a \end{pmatrix}$$

よって

$$9+ab=3 \quad \cdots ①, \qquad 3a-a^2=a \quad \cdots ②$$
$$3b-ab=b \quad \cdots ③, \qquad ab+a^2=-a \quad \cdots ④$$

② より　$a=0,\ 2$

$a=0$ は ① を満たさない．　よって　$a=2$

$a=2$ を ① に代入すると　$b=-3$

$a=2,\ b=-3$ は，③，④ を満たす．

したがって　$a=2,\ b=-3$

7 原点の周りに 30° だけ回転して点 $(2,\ 4)$ に移されるもとの点の座標を求めよ．

【解】点 $(2,\ 4)$ を原点の周りに -30° だけ回転して移る点がもとの点である．

よって

$$\begin{pmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 \\ -1+2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

したがって，もとの点の座標は　$(\sqrt{3}+2, -1+2\sqrt{3})$

1.3.2　章末問題 B

8 2次の正方行列 A, B について，$A+B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ であるとき，A^2-B^2 を求めよ.

【解】
$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots ①, \qquad A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \cdots ②$$

とすると，① + ② から

$$2A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

よって　$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

① − ② から

$$2B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

よって　$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

したがって

$$\begin{aligned} A^2-B^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9 行列 $A=\begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$ が等式 $A^2-7A+12E=O$ を満たすとき，x，y の値を求めよ．ただし，E は2次の単位行列で，O は2次の零行列とする．

【解】 $$A^2=\begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2-6 & 3(x+y) \\ -2(x+y) & y^2-6 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} A^2-7A+12E &= \begin{pmatrix} x^2-6 & 3(x+y) \\ -2(x+y) & y^2-6 \end{pmatrix}-7\begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}+12\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2-7x+6 & 3(x+y-7) \\ -2(x+y-7) & y^2-7y+6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって，$A^2-7A+12E=O$ から

$$x^2-7x+6=0,\quad x+y-7=0,\quad y^2-7y+6=0$$

これを解いて　$x=1$，$y=6$　または　$x=6$，$y=1$

【別解】 ハミルトン・ケーリーの定理から

$$A^2-(x+y)A+(xy+6)E=O \quad \cdots ①$$

仮定から　$A^2-7A+12E=O \quad \cdots ②$

② − ① から

$$(x+y-7)A+(6-xy)E=O \quad \cdots ③$$

[1] $x+y-7=0$ のとき

③ から　$(6-xy)E=O$

$E\neq O$ から　$6-xy=0$

よって　$x+y=7$，$xy=6$

これを解いて　$x=1$，$y=6$　または　$x=6$，$y=1$

[2] $x+y-7\neq 0$ のとき

$$k=\frac{xy-6}{x+y-7} \text{ とおくと}\qquad A=kE$$

これは与えられた A と一致しない．

したがって　$x=1$，$y=6$　または　$x=6$，$y=1$

10 行列 $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 3 & y-4 \end{pmatrix}$ の逆行列が A 自身であるように，x，y の値を定めよ．また，A^3 を求めよ．

【解】 $A^{-1} = A$ より　$A^2 = E$

よって　$\begin{pmatrix} x^2-3 & -x-y+4 \\ 3x+3y-12 & -3+(y-4)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

したがって

$$x^2-3=1 \quad \cdots ① \qquad -x-y+4=0 \quad \cdots ②$$
$$3x+3y-12=0 \quad \cdots ③ \qquad -3+(y-4)^2=1 \quad \cdots ④$$

① より　　$x = \pm 2$

② から，$x=2$ のとき　$y=2$，　　$x=-2$ のとき　$y=6$

いずれの場合にも，③，④ を満たす．

したがって　　$x=2$，$y=2$　または　$x=-2$，$y=6$

また，$A^2=E$ より，$A^3=A$ であるから

$x=2$，$y=2$　　のとき　$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$x=-2$，$y=6$　のとき　$A^3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

11 2次の正方行列において，次の命題は真であるか．真であるときは証明し，真でないときは反例をあげよ．ただし，E は2次の単位行列で，O は零行列とする．

(1) A が逆行列をもつとき，$XA = YA$ ならば，$X = Y$ である．

(2) $A^2 - 2A + E = O$ ならば $A = E$ である．

【解】 (1) 真

[証明] $XA = YA$ の両辺に右から A の逆行列 A^{-1} を掛けると

$$X = Y$$

[証終]

(2) 真でない

(反例) ハミルトン・ケーリーの定理から，行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が，$a+d = 2$，$ad - bc = 1$ を満たしていれば，$A^2 - 2A + E = O$ が成り立つ．

たとえば，$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，$A^2 - 2A + E = O$ であるが，$A \neq E$ となる．

12 行列 $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ の表す1次変換を f とする．

(1) f はどのような1次変換を表すか．

(2) 逆変換 f^{-1} はどのような1次変換を表すか．

(3) 合成変換 $f\circ(f\circ f)$ はどのような1次変換を表すか．また，A^3 を求めよ．

【解】 (1) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$

したがって，f は，原点の周りに 60° だけ回転する1次変換を表す．

(2) f^{-1} は，原点の周りに -60° だけ回転する1次変換を表す．

(3) $f\circ(f\circ f)$ は，原点の周りに 60° だけ回転する移動を3回繰り返す．

よって，原点の周りに $60^\circ \times 3 = 180^\circ$ だけ回転するから，原点に関して対称移動する1次変換を表す．

また，A^3 は点 $(x,\ y)$ を $(-x, -y)$ に移す1次変換を表すから

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

練習 1 直線 $y=-2x+1$ を ℓ とする．次の行列で表される 1 次変換によって，ℓ はどのような図形に移されるか．

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$　　(2) $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

【解】 直線 ℓ 上の任意の点を $\mathrm{P}(t, -2t+1)$ とする．

(1) A で表される 1 次変換によって，P が移される点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -2t+1 \end{pmatrix}$$

すなわち　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ 3t-2 \end{pmatrix}$

よって　$x=t+1 \quad \cdots ①$

$y=3t-2 \quad \cdots ②$

① より　$t=x-1$

これを ② に代入すると　$y=3(x-1)-2$

すなわち　$y=3x-5$

したがって，直線 $y=3x-5$ に移される．

(2) A で表される 1 次変換によって，P が移される点を $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -2t+1 \end{pmatrix}$$

すなわち　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t+1 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって　$x=-t+1$

$y=1$

したがって，直線 $y=1$ に移される．

練習2 直線 $y=3x-1$ を ℓ とする．行列 $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$ で表される1次変換 f によって，ℓ はどのような図形に移されるか.

解答 直線 ℓ 上の任意の点を $\mathrm{P}(t,\ 3t-1)$ とする．

A で表される1次変換によって，P が移される点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 3t-1 \end{pmatrix}$$

すなわち $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって $$x=-1$$ $$y=3$$

したがって，点 $(-1,\ 3)$ に移される．

第 2 章　式と曲線

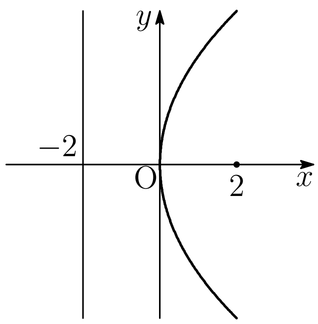
2.1　2 次曲線

2.1.1　放物線

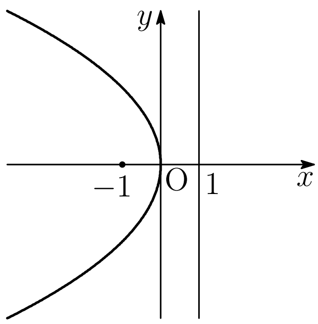
練習 2.1 次の放物線の概形をかけ．また，その焦点と準線を求めよ．

(1)　$y^2 = 8x$　　(2)　$y^2 = -4x$　　(3)　$y^2 = x$

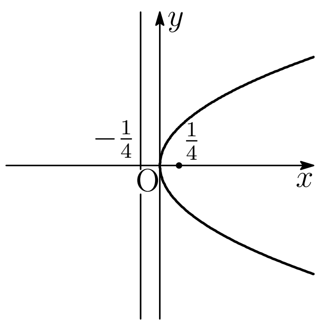
【解】 (1)　$y^2 = 4{\cdot}2{\cdot}x$ であるから
焦点 $(2,\ 0)$，準線 $x = -2$



(2)　$y^2 = 4{\cdot}(-1){\cdot}x$ であるから
焦点 $(-1,\ 0)$，準線 $x = 1$



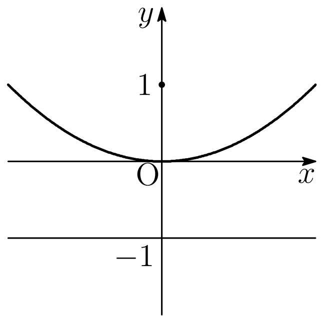
(3)　$y^2 = 4{\cdot}\frac{1}{4}{\cdot}x$ であるから
焦点 $(\frac{1}{4},\ 0)$，準線 $x = -\frac{1}{4}$



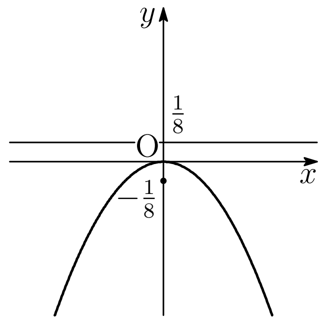
練習 2.2 次の放物線の概形をかけ，また，その焦点と準線を求めよ．

(1)　$x^2 = 4y$　　　(2)　$y = -2x^2$

【解】 (1)　$x^2 = 4\cdot 1\cdot y$ であるから
焦点 $(0,\ 1)$，準線 $y = -1$



(2)　$x^2 = 4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)y$ であるから
焦点 $\left(0, -\frac{1}{8}\right)$，準線 $y = \frac{1}{8}$

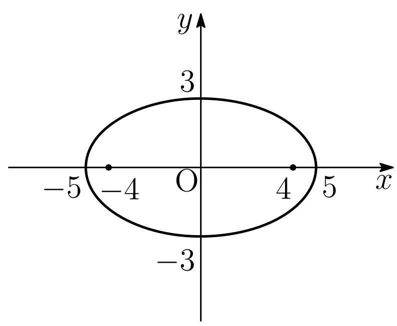


2.1.2　楕円

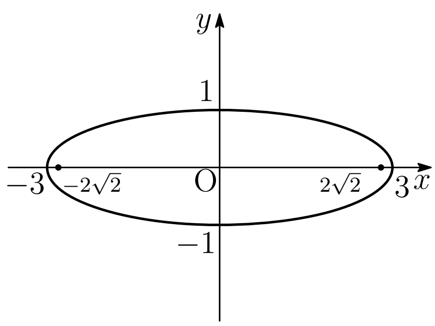
練習 2.3 次の楕円の概形をかけ．また，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ．

(1)　$\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$　　(2)　$\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$　　(3)　$x^2 + 16y^2 = 4$

【解】 (1)　焦点は　$(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$
長軸の長さは　$2 \times 5 = 10$
短軸の長さは　$2 \times 3 = 6$



(2)　焦点は　$(2\sqrt{2},\ 0)$，$(-2\sqrt{2},\ 0)$
長軸の長さは　$2 \times 3 = 6$
短軸の長さは　$2 \times 1 = 2$

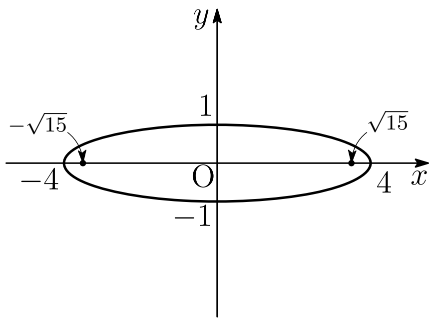


(3) $\dfrac{x^2}{4^2} + y^2 = 1$ より

焦点は $(\sqrt{15},\ 0)$，$(-\sqrt{15},\ 0)$

長軸の長さは $2 \times 4 = 8$

短軸の長さは $2 \times 1 = 2$



> **練習 2.4** 次のような楕円の方程式を求めよ.
>
> (1) 2 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 6
>
> (2) 2 点 $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 4

【解】 求める楕円の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ の形である.

(1) 焦点からの距離の和について，$2a = 6$ であるから

$$a = 3, \quad a^2 = 9$$

また，焦点の座標について，$\sqrt{a^2 - b^2} = 2$ であるから

$$b^2 = a^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$$

したがって，求める楕円の方程式は $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

(2) 焦点からの距離の和について，$2a = 4$ であるから

$$a = 2, \quad a^2 = 4$$

また，焦点の座標について，$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ であるから

$$b^2 = a^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

したがって，求める楕円の方程式は $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

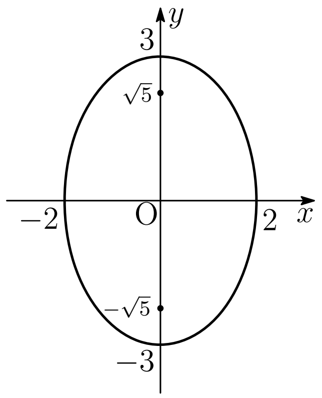
練習 2.5 次の楕円の概形をかけ．また，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$　　(2) $x^2+\dfrac{y^2}{25}=1$

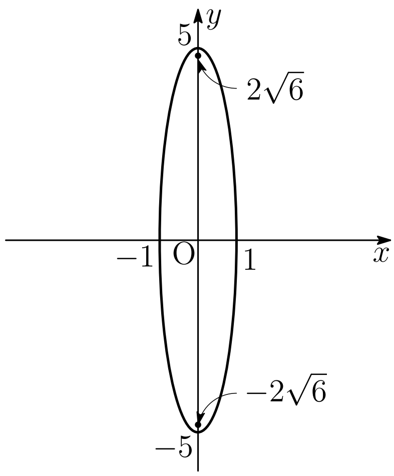
【解】 (1) 焦点 $(0,\ \sqrt{5})$，$(0,-\sqrt{5})$，
長軸の長さ　$2\times 3=6$，
短軸の長さ　$2\times 2=4$

(2) 焦点 $(0,\ 2\sqrt{6})$，$(0,-2\sqrt{6})$，
長軸の長さ　$2\times 5=10$，
短軸の長さ　$2\times 1=2$

(1)



(2)



練習 2.6 円 $x^2+y^2=3^2$ を，x 軸をもとにして次のように縮小または拡大して得られる楕円の方程式を求めよ．

(1) y 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍　　(2) y 軸方向に $\dfrac{4}{3}$ 倍

【解】 (1) 円上の点 Q$(s,\ t)$ が移る点を P$(x,\ y)$ とすると

$$x=s,\ \ y=\frac{2}{3}t$$

すなわち　$s=x,\ \ t=\dfrac{3}{2}y$

$s^2+t^2=3^2$ であるから

$$x^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2=3^2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

よって，円 $x^2+y^2=3^2$ は，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ になる．

(2) 円上の点 Q$(s,\ t)$ が移る点を P$(x,\ y)$ とすると

$$x=s,\ \ y=\frac{4}{3}t$$

すなわち　$s=x,\ \ t=\dfrac{3}{4}y$

$s^2+t^2=3^2$ であるから

$$x^2+\left(\frac{3}{4}y\right)^2=3^2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

よって，円 $x^2+y^2=3^2$ は，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$ になる．

練習 2.7 座標平面上において，長さが7の線分ABの端点Aはx軸上を，端点Bはy軸上を動くとき，線分ABを3 : 4に内分する点Pの軌跡を求めよ.

【解】 Aの座標を$(s,\ 0)$，Bの座標を$(0,\ t)$とすると，AB $= 7$ から

$$s^2 + t^2 = 7^2 \quad \cdots ①$$

Pの座標を$(x,\ y)$とすると，Pは線分ABを3 : 4に内分するから

$$x = \frac{4}{7}s,\ \ y = \frac{3}{7}t$$

よって　$s = \dfrac{7}{4}x,\ \ t = \dfrac{7}{3}y$

これらを ① に代入すると

$$\left(\frac{7}{4}x\right)^2 + \left(\frac{7}{3}y\right)^2 = 7^2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

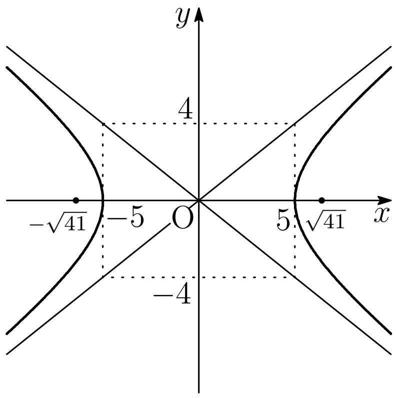
したがって，点Pの軌跡は，楕円 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ である.

2.1.3　双曲線

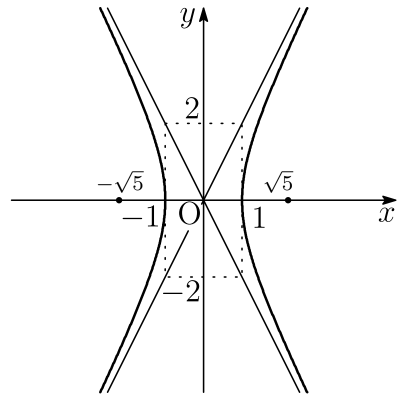
練習 2.8 次の双曲線の概形をかけ．また，焦点，頂点，漸近線をいえ．

(1)　$\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$　　(2)　$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　　(3)　$x^2-9y^2=9$

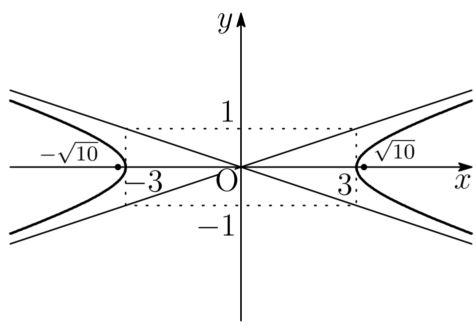
【答】 (1)　焦点 $(\sqrt{41},\ 0)$，$(-\sqrt{41},\ 0)$
頂点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$
漸近線 $y=\dfrac{4}{5}x$，$y=-\dfrac{4}{5}x$



(2)　焦点 $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$
頂点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$
漸近線 $y=\dfrac{1}{2}x$，$y=-\dfrac{1}{2}x$



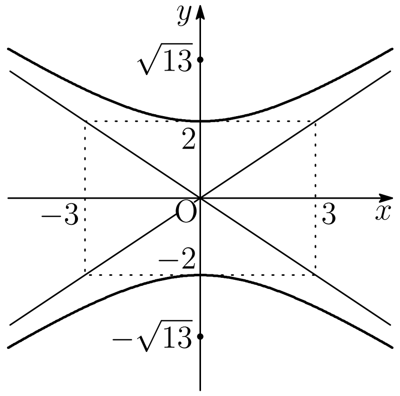
(3)　$\dfrac{x^2}{3^2}-y^2=1$ より
焦点 $(\sqrt{10},\ 0)$，$(-\sqrt{10},\ 0)$
頂点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$
漸近線 $y=\dfrac{1}{3}x$，$y=-\dfrac{1}{3}x$



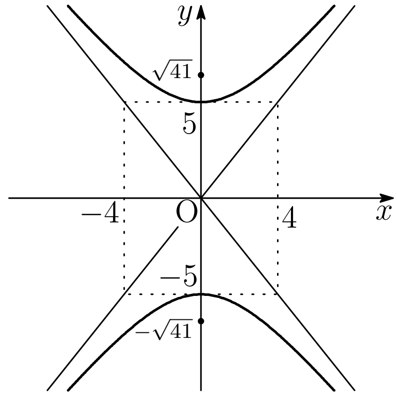
練習 2.9 次の双曲線の概形をかけ．また，焦点，頂点，漸近線をいえ．

(1) $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=-1$　　(2) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=-1$

【答】 (1) 焦点 $(0,\ \sqrt{13})$，$(0, -\sqrt{13})$
頂点 $(0,\ 2)$，$(0, -2)$
漸近線 $y=\dfrac{2}{3}x,\ y=-\dfrac{2}{3}x$



(2) 焦点 $(0,\ \sqrt{41})$，$(0, -\sqrt{41})$
頂点 $(0,\ 5)$，$(0, -5)$
漸近線 $y=\dfrac{5}{4}x,\ y=-\dfrac{5}{4}x$



2.1.4　2次曲線の平行移動

練習 2.10 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を，x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動するとき，移動後の楕円の方程式と焦点の座標を求めよ．

【解】 移動後の楕円の方程式は $\dfrac{(x-3)^2}{4}+(y+2)^2=1$

また，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の焦点は，2点 $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$ であるから，移動後の楕円の焦点の座標は　$(\sqrt{3}+3, -2)$，$(-\sqrt{3}+3, -2)$

練習 2.11 放物線 $y^2=4x$ を，x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動するとき，移動後の放物線の方程式と焦点の座標を求めよ．

【解】 移動後の放物線の方程式は　$(y-2)^2=4(x+1)$

放物線 $y^2=4x$ の焦点は $(1,\ 0)$ であるから，移動後の放物線の焦点の座標は $(0,\ 2)$

練習 2.12 次の方程式はどのような図形を表すか.

(1)　$4x^2 - 9y^2 - 16x - 36y - 56 = 0$　　(2)　$y^2 + 8y - 16x = 0$

(3)　$x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 13 = 0$

【解】 (1) この方程式を変形すると　$4(x-2)^2 - 9(y+2)^2 = 36$

すなわち　$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

よって，双曲線 $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -2 だけ平行移動した双曲線を表す.

(2) この方程式を変形すると　$(y+4)^2 = 16(x+1)$

よって，放物線 $y^2 = 16x$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に -4 だけ平行移動した放物線を表す.

(3) この方程式を変形すると　$(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 4$

すなわち　$$\frac{(x+1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$$

よって，楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した楕円を表す.

2.1.5　2 次曲線と直線

練習 2.13 k は定数とする．双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ と直線 $y = x + k$ の共有点の個数を調べよ.

【解】 $y = x + k$ を $x^2 - 2y^2 = 4$ に代入して整理すると

$$x^2 + 4kx + 2(k^2 + 2) = 0$$

この x の 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = (4k)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}2(k^2 + 2) = 8(k^2 - 2)$$

よって　$k < -\sqrt{2},\ \sqrt{2} < k$ のとき　共有点は 2 個

$k = \pm\sqrt{2}$ のとき　共有点は 1 個

$-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ のとき　共有点は 0 個

練習 2.14 楕円 $x^2+4y^2=4$ と直線 $y=x+2$ の2つの交点をP，Qとするとき，線分PQの中点Mの座標を求めよ．

【解】
$$x^2+4y^2=4 \qquad \cdots ①$$
$$y=x+2 \qquad \cdots ②$$

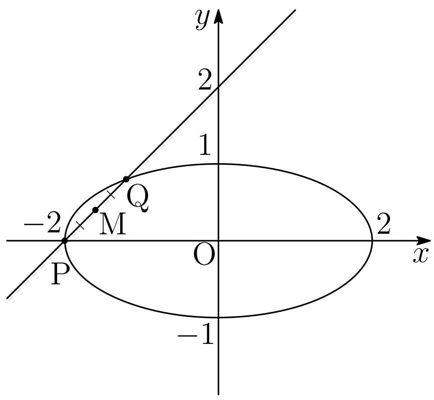
② を ① に代入すると　$x^2+4(x+2)^2=4$

整理すると

$$5x^2+16x+12=0 \quad \cdots ③$$

点P，Qの x 座標をそれぞれ x_1，x_2 とすると，x_1，x_2 は2次方程式 ③ の異なる2つの実数解である．

Mは線分PQの中点であるから，その座標を $(x,\ y)$ とすると



$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$

③ の解と係数の関係により

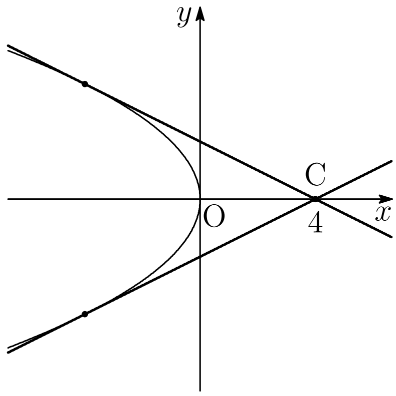
$$x_1+x_2=-\frac{16}{5}$$

よって　$x=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{16}{5}\right)=-\dfrac{8}{5}$

② に代入して　$y=-\dfrac{8}{5}+2=\dfrac{2}{5}$

したがって，Mの座標は　$\left(-\dfrac{8}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

練習 2.15 点 C$(4,\ 0)$ から放物線 $y^2 = -4x$ に引いた接線の方程式を求めよ．また，その接点の座標を求めよ．



【解】 点Cを通る接線は，y 軸に平行ではないから，その方程式は $y = m(x-4)$ とおくことができる．これを放物線の式に代入すると

$$m^2(x-4)^2 = -4x$$

整理すると

$$m^2x^2 - 4(2m^2-1)x + 16m^2 = 0$$

この x の2次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= 16(2m^2-1)^2 - 4\cdot m^2\cdot 16m^2 \\ &= 16(1-4m^2) \end{aligned}$$

$D = 0$ とすると　　$m = \pm\dfrac{1}{2}$

このとき，接点の x 座標は　　$x = -\dfrac{-4(2m^2-1)}{2m^2} = \dfrac{2(2m^2-1)}{m^2}$

よって，接線の方程式，接点の座標は

$m = \dfrac{1}{2}$ のとき　　$y = \dfrac{1}{2}(x-4)$，$(-4, -4)$

$m = -\dfrac{1}{2}$ のとき　$y = -\dfrac{1}{2}(x-4)$，$(-4,\ 4)$

2.1.6 補充問題

1 次のような 2 次曲線の方程式を求めよ．

(1) 焦点が点 $(2,\ 0)$ で，準線が y 軸である放物線

(2) 2 点 $\mathrm{A}(-3,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ 1)$ からの距離の和が 10 である楕円

(3) 2 点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の差が 8 である双曲線

【解】 (1) 焦点 $(2,\ 0)$，頂点 $(1,\ 0)$ の放物線である．この放物線は，焦点 $(1,\ 0)$，頂点 $(0,\ 0)$ の放物線 $y^2 = 4x$ を x 軸方向に 1 だけ平行移動したものであるから，その方程式は

$$y^2 = 4(x-1)$$

(2) 2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 10 である楕円 C の方程式を，$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ とおく．$2a = 10$，$\sqrt{a^2 - b^2} = 3$ より

$$a = 5,\ \ b^2 = 16$$

よって，楕円 C の方程式は $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

これを，y 軸方向に 1 だけ平行移動して，求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

(3) この双曲線の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ とおく．

$2a = 8$，$\sqrt{a^2 + b^2} = 5$ より $a = 4$，$b^2 = 9$

よって，求める方程式は $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

2 円 $x^2+y^2=16$ を，y 軸をもとにして x 軸方向に 2 倍して得られる曲線の方程式を求めよ．

【解】 円上の点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ が点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に移るとすると

$$x=2s,\ \ y=t$$

すなわち　$s=\dfrac{1}{2}x,\ \ t=y$

$s^2+t^2=16$ に代入すると

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2+y^2=16 \quad \text{すなわち} \quad \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$$

よって，円 $x^2+y^2=16$ は，楕円 $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{16}=1$ になる．

3 双曲線 $x^2-y^2=1$ と直線 $y=2x+k$ が共有点をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ．

【解】

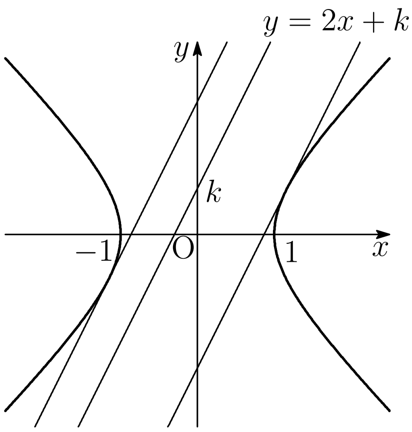
$$x^2-y^2=1 \qquad \cdots①$$
$$y=2x+k \qquad \cdots②$$

とする．② を ① に代入すると

$$x^2-(2x+k)^2=1$$

整理すると

$$3x^2+4kx+k^2+1=0$$



この x の 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(4k)^2-4\cdot3(k^2+1)=4(k^2-3)$$

① と ② が共有点をもつのは，$D \geqq 0$ であるから

$$k^2-3 \geqq 0$$

よって　$k \leqq -\sqrt{3},\ \ \sqrt{3} \leqq k$

2.2　媒介変数表示と極座標

2.2.1　曲線の媒介変数表示

練習 2.16 媒介変数表示される次の曲線について，t を消去して x，y の方程式を求め，曲線の概形をかけ.

(1)　$x = t + 1$，$y = t^2 + 4t$　　　(2)　$x = 2t$，$y = t^2 - 2t$

【解】 (1) $x = t + 1$ から　　$t = x - 1$

これを $y = t^2 + 4t$ に代入して　　$y = (x - 1)^2 + 4(x - 1)$

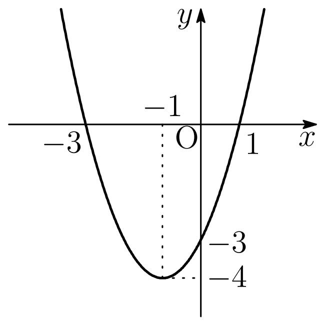
すなわち　　$y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$

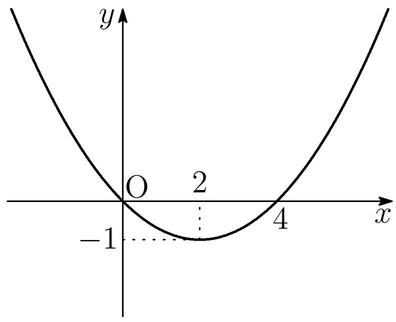
(2) $x = 2t$ から　　$t = \dfrac{1}{2}x$

これを $y = t^2 - 2t$ に代入して　　$y = \left(\dfrac{1}{2}x\right)^2 - 2\left(\dfrac{1}{2}x\right)$

すなわち　　$y = \dfrac{1}{4}x^2 - x = \dfrac{1}{4}(x - 2)^2 - 1$

(1)　$y = (x + 1)^2 - 4$　　　(2)　$y = \dfrac{1}{4}(x - 2)^2 - 1$





練習 2.17 放物線 $y = -x^2 + 4tx + 2t$ の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか.

【解】 放物線の方程式を変形すると　　$y = -(x - 2t)^2 + 4t^2 + 2t$

その頂点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると　　$x = 2t$，$y = 4t^2 + 2t$

t を消去すると　　$y = x^2 + x$

よって，頂点 P が描く図形は，放物線 $y = x^2 + x$ である.

練習 2.18 角 θ を媒介変数として，次の円を表せ.

(1) $x^2+y^2=2^2$　　(2) $x^2+y^2=2$

【答】 (1) $x=2\cos\theta,\quad y=2\sin\theta$　(2) $x=\sqrt{2}\cos\theta,\quad y=\sqrt{2}\sin\theta$

練習 2.19 角 θ を媒介変数として，次の楕円を表せ.

(1) $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$　　(2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$

【答】 (1) $x=3\cos\theta,\quad y=2\sin\theta$　(2) $x=4\cos\theta,\quad y=5\sin\theta$

練習 2.20 θ が変化するとき，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{\cos\theta},\ 2\tan\theta\right)$ は双曲線 $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ 上を動くことを示せ.

【解】 $x=\dfrac{3}{\cos\theta},\ y=2\tan\theta$ とすると

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=\frac{1}{9}\left(\frac{3}{\cos\theta}\right)^2-\frac{1}{4}(2\tan\theta)^2=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=1$$

よって，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{\cos\theta},\ 2\tan\theta\right)$ は双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 上を動く.

練習 2.21 双曲線 $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$ を媒介変数 θ を用いて表せ.

【答】 $x=\dfrac{5}{\cos\theta},\quad y=4\tan\theta$

練習 2.22 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか．

(1) $x = 3\cos\theta + 2$，$y = 3\sin\theta - 1$

(2) $x = 3\cos\theta + 1$，$y = 2\sin\theta + 3$

【解】 (1) $\sin\theta = \dfrac{y+1}{3}$，$\cos\theta = \dfrac{x-2}{3}$

これらを $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すると

$$\frac{(y+1)^2}{9} + \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$

よって　$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$

これは，点 $(2, -1)$ を中心とする半径 3 の円を表す．

(2) $\sin\theta = \dfrac{y-3}{2}$，$\cos\theta = \dfrac{x-1}{3}$

これらを $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すると

$$\frac{(y-3)^2}{4} + \frac{(x-1)^2}{9} = 1$$

よって　楕円 $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$

練習 2.23 半径 3 の円が x 軸上をすべることなく回転していくとき，円周上の定点 P の描くサイクロイドの媒介変数表示を求めよ．ただし，点 P の最初の位置を原点 O とする．

【答】 $x = 3(\theta - \sin\theta)$，$y = 3(1 - \cos\theta)$

2.2.2　極座標と極方程式

練習 2.24 極座標が次のような点の直交座標を求めよ．

(1)　$\left(2,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2)　$\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$　　(3)　$(3,\ \pi)$

【解】 (1) $x = 2\cos\dfrac{\pi}{6}$，$y = 2\sin\dfrac{\pi}{6}$ より　　$(\sqrt{3},\ 1)$

(2) $x = \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}$，$y = \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}$ より　　$(1,\ 1)$

(3) $x = 3\cos\pi$，$y = 3\sin\pi$ より　　$(-3,\ 0)$

練習 2.25 直交座標が次のような点の極座標を求めよ．ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(1)　$(2,\ 2)$　　(2)　$(-1,\ \sqrt{3})$　　(3)　$(-\sqrt{3}, -1)$

【解】 (1) $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より　　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$

よって　　$\left(2\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \dfrac{-1}{2}$，$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より　　$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$

よって　　$\left(2,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$

(3) $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ より　　$\theta = \dfrac{7}{6}\pi$

よって　　$\left(2,\ \dfrac{7}{6}\pi\right)$

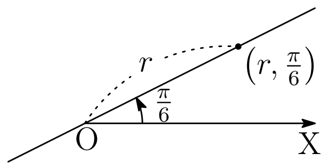
練習 2.26 点 $\left(1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ を通り始線に平行な直線を，極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表せ．

【解】 $r\sin\theta = 1$ より　　$r = \dfrac{1}{\sin\theta}$

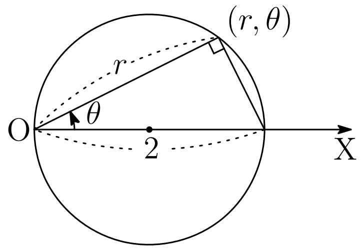
練習 2.27 次の極方程式で表される曲線を図示せよ．

(1)　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$　　　　(2)　$r = 2\cos\theta$

【解】 (1)



(2)



練習 2.28 次の曲線を極方程式で表せ．

$$x^2 + 2y^2 = 4$$

【解】 この曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$$

これらを，$x^2 + 2y^2 = 4$ に代入すると　　$r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta = 4$

すなわち　　$r^2(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta) = 4$

よって　　$r^2(1 + \sin^2\theta) = 4$

練習 2.29 次の極方程式の表す曲線を，直交座標 x，y の方程式で表せ．

(1) $r = \dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$ (2) $r = 2\sin\theta$

【解】 (1) 曲線上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$$

$r = \dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$ より $r(\sin\theta + \cos\theta) = 1$

すなわち $r\cos\theta + r\sin\theta = 1$

よって $x + y = 1$

(2) 曲線上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とする．

$r \neq 0$ のとき $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

$r = 2\sin\theta$ に代入して $r = 2 \cdot \dfrac{y}{r}$

すなわち $r^2 = 2y$

この式は，$r = 0$ のときも成り立つ．

さらに，$r^2 = x^2 + y^2$ であるから $x^2 + y^2 = 2y$

したがって $x^2 + y^2 - 2y = 0$

練習 2.30 次の極方程式で表される曲線を，直交座標 x，y の方程式で表せ．

$$r = \frac{1}{1 + 2\cos\theta}$$

【解】 分母を払うと $r + 2r\cos\theta = 1$

$r\cos\theta = x$ を代入すると $r = 1 - 2x$

両辺を 2 乗すると $r^2 = 1 - 4x + 4x^2$

$r^2 = x^2 + y^2$ を代入すると $x^2 + y^2 = 1 - 4x + 4x^2$

整理して $3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0$

練習 2.31 始線 OX 上の点 A(2, 0) を通り，始線に垂直な直線を ℓ とする．点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき，$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{1}{2}$ であるような点 P の軌跡を，極方程式で表せ.

【解】 $\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{1}{2}$ より　　$2\mathrm{OP}=\mathrm{PH}$

$\mathrm{OP}=r$，$\mathrm{PH}=2-r\cos\theta$ であるから

$$2r=2-r\cos\theta$$

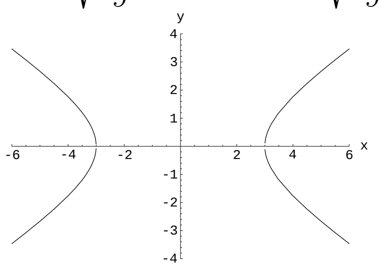
よって　　$r=\dfrac{2}{2+\cos\theta}$

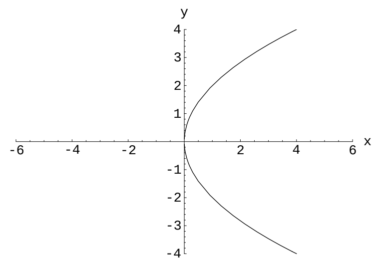
2.2.3　コンピュータの利用

練習 2.32 次の曲線を描くには，どのような関数のグラフを同時に描けばよいか. また，コンピュータの画面に曲線を表示してみよう.

(1)　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　　(2)　$y^2=4x$

【答】 (1)　$y=2\sqrt{\dfrac{x^2}{9}-1}$，$y=-2\sqrt{\dfrac{x^2}{9}-1}$　　(2)　$y=2\sqrt{x}$，$y=-2\sqrt{x}$

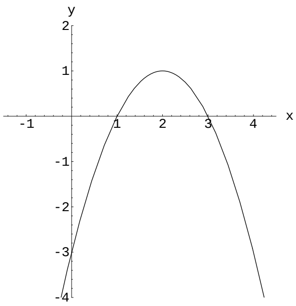




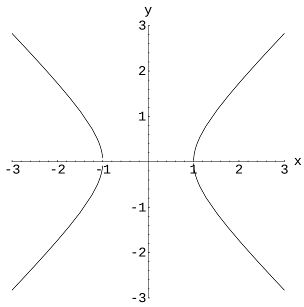
練習 2.33 次のように媒介変数表示される曲線を描いてみよう.

(1) $x = t + 2,\ \ y = 1 - t^2$ (2) $x = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right),\ \ y = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$

【答】 (1)



(2)



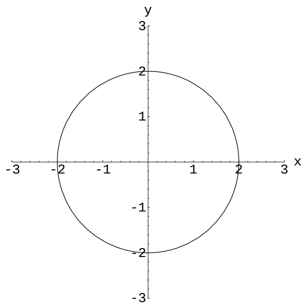
練習 2.34 次のように媒介変数表示される曲線を描いてみよう.

(1) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$

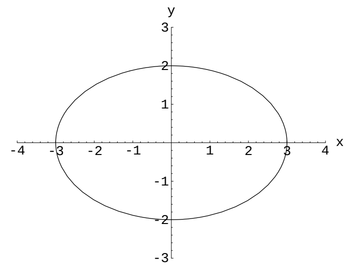
(3) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x = \sin t - \cos t \\ y = \sin t + \cos t \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

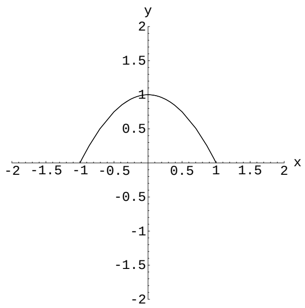
【答】 (1)



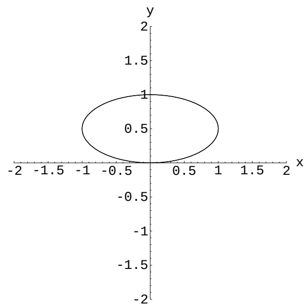
(2)



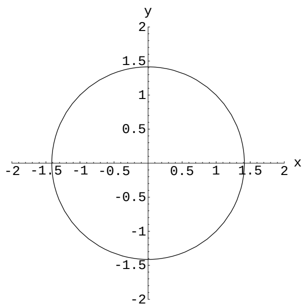
(3)



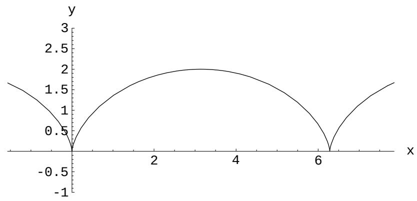
(4)



(5)



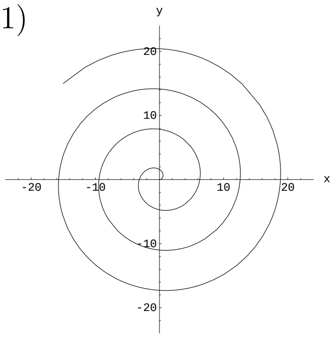
(6)



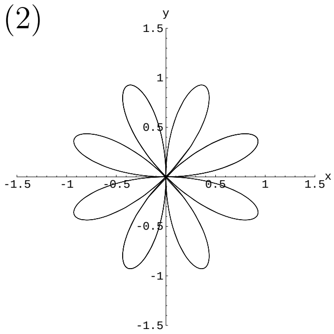
練習 2.35 次のような極方程式で表される曲線をコンピュータで描いてみよう．ただし，いずれも $\theta \geqq 0$ とする．

(1) $r = \theta$　　(2) $r = \sin 4\theta$　　(3) $r = 2(1 + \cos\theta)$

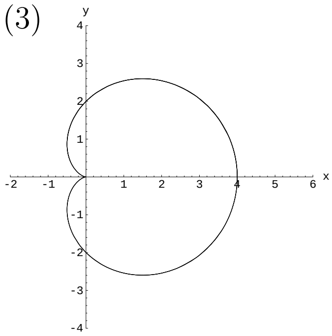
【答】 (1)



(2)



(3)



2.2.4 補充問題

4 媒介変数表示される次の曲線について，θ を消去して x，y の方程式を求めよ．

(1) $x = 2\cos\theta - 1,\quad y = 3\sin\theta - 2$

(2) $x = \dfrac{1}{\cos\theta} + 2,\quad y = 2\tan\theta + 1$

【解】 (1) $\cos\theta = \dfrac{x+1}{2}$，$\sin\theta = \dfrac{y+2}{3}$ から

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

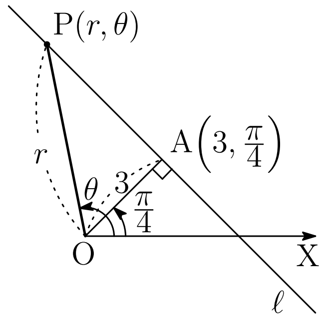
(2) $\dfrac{1}{\cos\theta} = x - 2$，$\tan\theta = \dfrac{y-1}{2}$ から

$$(x-2)^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

5 極をOとし，点Aの極座標を $\left(3,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ とする．点Aを通り，直線OAに垂直な直線の極方程式は，$r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=3$ であることを示せ．

【解】 求める直線を ℓ とする．ℓ 上の点Pの極座標を (r, θ) とすると

$$\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOP}=\mathrm{OA}$$



ここで　$\mathrm{OP}=r$

$$\angle\mathrm{AOP}=\theta-\frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{OA}=3$$

であるから，極方程式は

$$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=3$$

6 次の極方程式の表す曲線を，直交座標 x，y の方程式で表せ．

(1)　$r=2(\cos\theta-2\sin\theta)$　　　(2)　$r^2\sin\theta\cos\theta=1$

【解】 (1) $r=2(\cos\theta-2\sin\theta)$ の両辺に r を掛けて

$$r^2=2r\cos\theta-4r\sin\theta$$

よって　$x^2+y^2=2x-4y$

したがって　$x^2+y^2-2x+4y=0$

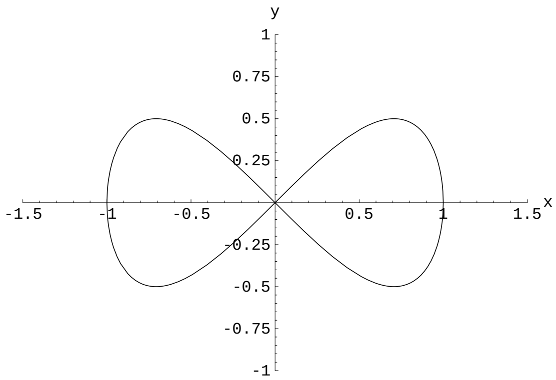
(2) $r^2\sin\theta\cos\theta=1$ より

$$r\sin\theta\cdot r\cos\theta=1$$

よって　$xy=1$

7 曲線 $y^2 = x^2(1-x^2)$ を，コンピュータで描いてみよう．

【解】 $y = x\sqrt{1-x^2}$, $y = -x\sqrt{1-x^2}$



2.3　章末問題

2.3.1　章末問題 A

1 次の方程式の表す 2 次曲線の概形をかけ．また，焦点の座標を求めよ．

(1)　$y^2+8x=0$　　(2)　$4x^2+16y^2=1$　　(3)　$8x^2-4y^2=32$

【解】 (1) 方程式から　$y^2=-8x$　すなわち　$y^2=4\cdot(-2)x$

焦点の座標は　$(-2,\ 0)$

(2) 方程式から　$\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{1}{16}}=1$　すなわち　$\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=1$

焦点の座標は　$\left(\sqrt{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{16}},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{16}},\ 0\right)$

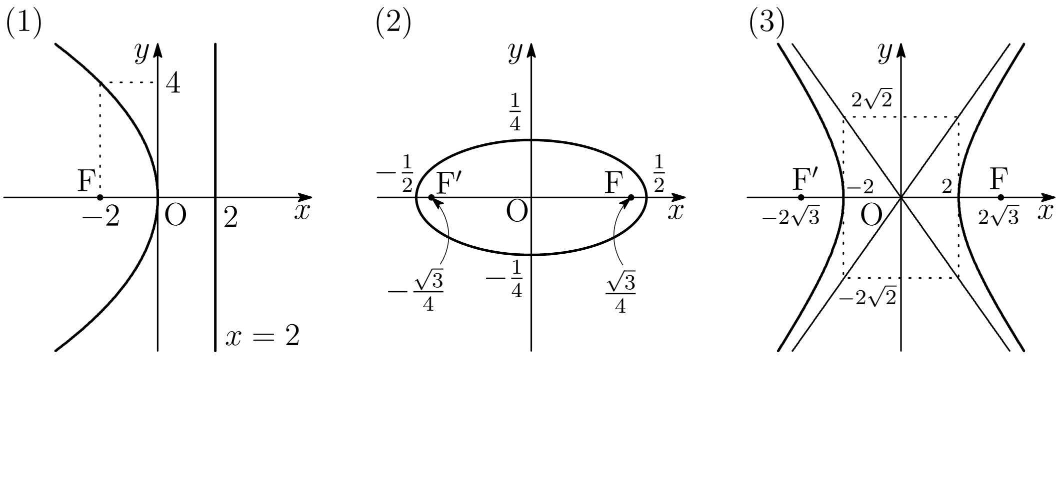
すなわち　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4},\ 0\right)$

(3) 方程式の両辺を 32 で割って　$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=1$

すなわち　$\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{(2\sqrt{2})^2}=1$

焦点の座標は　$(\sqrt{4+8},\ 0)$，$(-\sqrt{4+8},\ 0)$

すなわち　$(2\sqrt{3},\ 0)$，$(-2\sqrt{3},\ 0)$



2 次のような 2 次曲線の方程式を求めよ．

(1) 頂点が原点で，焦点が x 軸上にあり，点 $(-1,\ 2)$ を通る放物線

(2) 長軸が x 軸上，短軸が y 軸上にあり，長軸の長さが 4 で点 $(\sqrt{2},\ 1)$ を通る楕円

(3) 頂点の座標が $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ で，2 直線 $y=2x$，$y=-2x$ を漸近線とする双曲線

【解】 (1) 頂点が原点，焦点が x 軸上にあるから，方程式は $y^2=4px$ とおける．

点 $(-1,\ 2)$ を通るから　$4=-4p$

よって　$p=-1$

したがって，放物線の方程式は　$y^2=-4x$

(2) 長軸が x 軸上，短軸が y 軸上にあるから，求める楕円の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b>0)$$

とおくことができる．

長軸の長さが 4 であるから

$$2a=4 \qquad \cdots①$$

点 $(\sqrt{2},\ 1)$ を通るから

$$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \qquad \cdots②$$

①，② を解いて　$a=2$，$b=\sqrt{2}$

これは，$a>b$ を満たす．

よって，楕円の方程式は　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

(3) 頂点の位置から中心は原点 O であり，求める双曲線の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>0,\ b>0)$$

とおくことができる．

頂点の座標が $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ であるから

$$a=1 \qquad \cdots①$$

2 直線 $y=2x$，$y=-2x$ を漸近線とするから

$$\frac{b}{a}=2 \qquad \cdots②$$

①，② を解いて　$a=1$，$b=2$

よって，双曲線の方程式は　$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

3 次の方程式は放物線，楕円，双曲線のいずれを表すか．また，その焦点の座標を求めよ．

(1)　$x^2-2x+4y^2-3=0$　　(2)　$y^2-4y-4x=0$

(3)　$9x^2-4y^2-18x-8y-31=0$

【解】 (1) 与えられた方程式を変形すると　$(x^2-2x+1)+4y^2=4$

すなわち　$\dfrac{(x-1)^2}{4}+y^2=1$

よって，与えれた方程式は，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に 1 だけ平行移動した楕円を表す.

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の焦点は 2 点 $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$ であるから，求める焦点の座標は　$(\sqrt{3}+1,\ 0)$，$(-\sqrt{3}+1,\ 0)$

(2) 与えられた方程式を変形すると　$y^2-4y+4=4(x+1)$

すなわち　$(y-2)^2=4(x+1)$

よって，与えられた方程式は，放物線 $y^2=4x$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線を表す.

放物線 $y^2=4x$ の焦点は点 $(1,\ 0)$ であるから，求める焦点の座標は

$(1-1,\ 0+2)$　すなわち　$(0,\ 2)$

(3) 与えられた方程式を変形すると　$9(x^2-2x+1)-4(y^2+2y+1)=36$

すなわち　$\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$

よって，与えられた方程式は，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -1 だけ平行移動した双曲線を表す.

双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ の焦点は 2 点 $(\sqrt{13},\ 0)$，$(-\sqrt{13},\ 0)$ であるから，求める焦点の座標は　$(\sqrt{13}+1,-1)$，$(-\sqrt{13}+1,-1)$

4 次のように媒介変数表示される図形はどのような曲線か．x，y の方程式を求めて示せ．

(1) $\begin{cases} x = 2t^2 + 4 \\ y = t + 3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = 2\sqrt{t} \\ y = \sqrt{t} - 2t \end{cases}$

【解】 (1) $x = 2t^2 + 4$，$y = t + 3$ から t を消去すると　$x = 2(y-3)^2 + 4$

よって　　放物線 $(y-3)^2 = \dfrac{1}{2}(x-4)$

(2) $x = 2\sqrt{t}$，$y = \sqrt{t} - 2t$ から t を消去すると

$$y = \frac{x}{2} - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

ここで，$\sqrt{t} \geqq 0$ から　　$x \geqq 0$

よって　　放物線の一部　$y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2}$　$(x \geqq 0)$

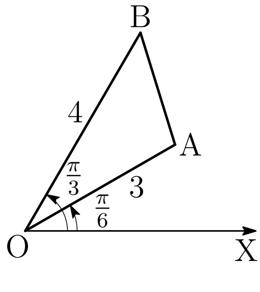
5 点 A，B の極座標を，それぞれ $\left(3,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$，$\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ とする．極 O と点 A，B を頂点とする △OAB の面積を求めよ．

【解】 $\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}$

$= \dfrac{\pi}{6}$

よって

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 \sin\frac{\pi}{6} = 3$$



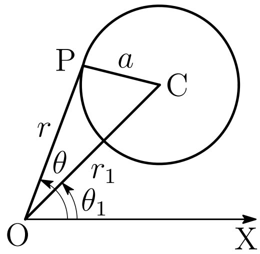
6 点 C の極座標を $(r_1,\ \theta_1)$ とする．点 C を中心とする半径 a の円の極方程式は，次の式で表されることを示せ．

$$r^2 + {r_1}^2 - 2rr_1\cos(\theta - \theta_1) = a^2$$

【解】 円上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とし，△OCP に余弦定理を適用すると

$$r^2 + {r_1}^2 - 2rr_1\cos(\theta - \theta_1) = a^2$$

この等式は，$\theta = \theta_1$ のときも成り立つ．



2.3.2 章末問題 B

7 直線 $x = -1$ に接し，点 A(1, 0) を通る円の中心を P$(x,\ y)$ とする．点 P の軌跡はどのような曲線になるか．

【解】 P から直線 $x = -1$ へ下ろした垂線を PH とすると，PH = PA であるから

$$|x + 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$

両辺を 2 乗すると

$$(x + 1)^2 = (x - 1)^2 + y^2$$

整理すると　$y^2 = 4x$

よって，点 P の軌跡は　　放物線　$y^2 = 4x$

8 双曲線 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$ の焦点の1つ $(3,\ 0)$ をFとする．この双曲線上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から直線 $x=2$ に下ろした垂線を PH とするとき，$\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ の値は一定であることを示せ．また，その値を求めよ．

【解】 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$ から　　$y^2=\dfrac{1}{2}x^2-3$

このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{PF}^2&=(x-3)^2+y^2\\&=(x-3)^2+\frac{1}{2}x^2-3\\&=\frac{3}{2}x^2-6x+6=\frac{3}{2}(x^2-4x+4)\\&=\frac{3}{2}(x-2)^2\end{aligned}$$

また　　$\mathrm{PH}^2=|x-2|^2=(x-2)^2$

よって　　$\mathrm{PF}^2:\mathrm{PH}^2=\dfrac{3}{2}:1=3:2$

したがって　$\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　(一定)

9 2次曲線 $4x^2+y^2+8x-4y-8=0$ を，x 軸方向に1，y 軸方向に -3 だけ平行移動した2次曲線の方程式を求め，どのような曲線かを調べよ．また，移動後の2次曲線の焦点の座標を求めよ．

【解】 与えられた方程式を変形すると　$4(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=16$

すなわち　$\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$

この楕円を，x 軸方向に1，y 軸方向に -3 だけ平行移動すると，移動後の楕円の方程式は

$$\frac{\{(x-1)+1\}^2}{4}+\frac{\{(y+3)-2\}^2}{16}=1$$

すなわち　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$　$\cdots$①

この楕円は，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$　$\cdots$②

を y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである．

② の楕円の焦点の座標は　$(0,\ \sqrt{16-4})$，$(0, -\sqrt{16-4})$

すなわち　$(0,\ 2\sqrt{3})$，$(0, -2\sqrt{3})$

よって，① の楕円の焦点の座標は

$$(0,\ 2\sqrt{3}-1),\ (0, -2\sqrt{3}-1)$$

10 直線 $y=-x+k$ が，楕円 $4x^2+y^2=4$ と異なる 2 点 Q，R で交わるように k の値が変化するとき，線分 QR の中点 P の軌跡を求めよ．

【解】　$4x^2+y^2=4 \quad \cdots ①, \qquad y=-x+k \quad \cdots ②$

とする．② を ① に代入すると

$$4x^2+(-x+k)^2=4$$

展開して整理すると

$$5x^2-2kx+k^2-4=0 \quad \cdots ③$$

直線 ② が楕円 ① と異なる 2 点で交わるから，2 次方程式 ③ の判別式を D とすると

$$D>0$$

したがって　$(-2k)^2-4{\cdot}5(k^2-4)>0$

すなわち　$k^2-5<0$

これを解いて　$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5} \quad \cdots ④$

ここで，点 Q，R の座標をそれぞれ Q$(x_1,\ y_1)$，R$(x_2,\ y_2)$ とおくと，

点 P の座標は　$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

また，x_1，x_2 は，2 次方程式 ③ の解であるから，解と係数の関係より

$$x_1+x_2=\frac{2k}{5}$$

よって　$y_1+y_2=(-x_1+k)+(-x_2+k)$

$$=-(x_1+x_2)+2k=\frac{8k}{5}$$

したがって，点 P の座標は k を用いて，$\left(\dfrac{k}{5},\ \dfrac{4k}{5}\right)$ と表すことができる．

$x=\dfrac{k}{5}$，$y=\dfrac{4k}{5}$ とおいて，k を消去すると

$$y=4x$$

また，④ から　$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}<x<\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

したがって，求める軌跡は

直線の一部　$y=4x \quad \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}<x<\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

11 次の方程式が円を表すように t の値が変化するとき，円の中心Pはどのような曲線を描くか.

$$x^2+y^2+2tx-4ty+5t^2-t=0$$

【解】 与えられた方程式を変形すると　$(x^2+2tx+t^2)+(y^2-4ty+4t^2)=t$

すなわち　$(x+t)^2+(y-2t)^2=t$

この方程式が円を表すための条件は　$t>0$　$\cdots$①

このとき，中心の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=-t,\ y=2t$$

これから t を消去すると　$y=-2x$

ここで，① から　$-x>0$　すなわち　$x<0$

よって，求める軌跡は

直線の一部　$y=-2x$　$(x<0)$

12 a は正の定数とする．極方程式 $r^2=2a^2\cos 2\theta$ の表す曲線を，直交座標 x，y の方程式で表せ．また，コンピュータでこの曲線を描け.

【解】 曲線上の点Pの直交座標を $(x,\ y)$ とすると

$$r^2=x^2+y^2,\quad \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{2x^2}{r^2}-1$$

これらを極方程式に代入すると

$$x^2+y^2=2a^2\left(\frac{2x^2}{x^2+y^2}-1\right)$$

整理すると　$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$