高校生の

新　編　数　学　B

書込みノート

平成 20 年 8 月 24 日

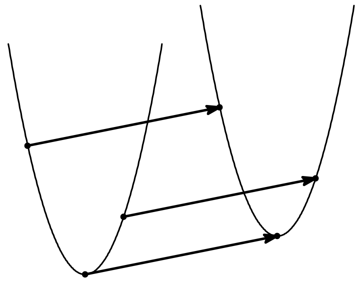
Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

目 次

第 1 章　平面上のベクトル

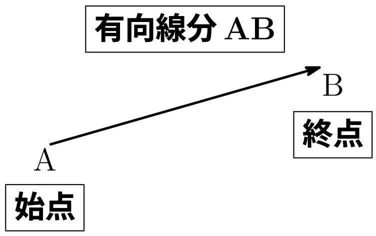
1.1　ベクトルとその演算

1.1.1　ベクトル



平面上で図形の平行移動は，右の図のように向きをつけた線分で表すことができる．線分につけた矢印の向きで移動する向きを表し，線分の長さで移動する距離を表すのである．
ここでは，向きのある線分に着目してみよう．

A ≫ 有向線分とベクトル

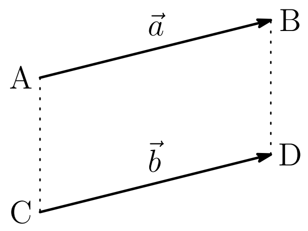


　向きをつけた線分を**有向線分**という．
有向線分 AB では，A をその**始点**，B をその**終点**といい，その**向き**は A から B へ向かう向きとする．
　また，線分 AB の長さを，有向線分 AB の**大きさ**という．
　平面上で図形を平行移動する場合，その平行移動を示す有向線分は，いくつも図示できるが，それらは位置が違うだけで，向きと大きさは同じである．
　有向線分の位置の違いを無視して，その向きと大きさだけに着目したものを**ベクトル**という[1]．ベクトルは，向きと大きさをもつ量である．
　たとえば，物体に働く力や速度などは，ベクトルである．

[1] 本章では平面上の有向線分で表されるベクトルを考える．このようなベクトルを平面上のベクトルということがある．なお，空間の有向線分で表されるベクトルについては，第 2 章で扱う．

B》ベクトルの表記

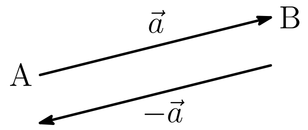
有向線分 AB で表されるベクトルを $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ で表す．また，ベクトルを $\vec{\boldsymbol{a}}$，$\vec{\boldsymbol{b}}$ などで表すこともある．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{a}$ の大きさは，それぞれ $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$，$|\vec{\boldsymbol{a}}|$ で表す．



向きが同じで大きさの等しい2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は**等しい**といい，$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ と書く．

たとえば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のとき，有向線分 AB を平行移動して有向線分 CD に重ね合わせることができる．

ベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく向きが反対のベクトルを，$\vec{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\vec{\boldsymbol{a}}$ で表す．



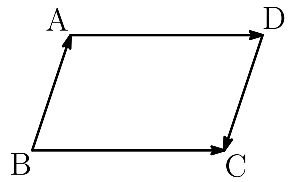
$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のとき，$-\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ である．

すなわち　　$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

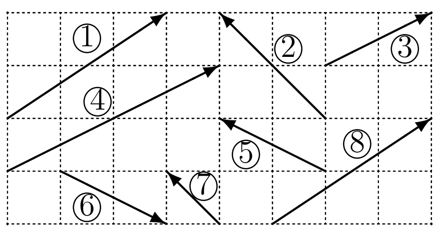
例 1.1　右の図の平行四辺形 ABCD について，次のことがいえる．

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$



練習 1.1　右の図に示されたベクトルについて，次のようなベクトルの番号の組をすべてあげよ．



(1)　向きが同じベクトル

(2)　等しいベクトル

(3)　互いに逆ベクトル

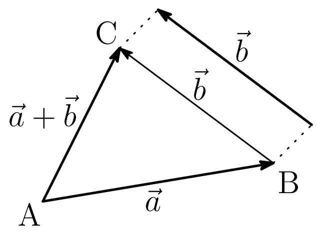
1.1.2　ベクトルの演算

ベクトルは，向きと大きさをもつ量である．ここでは，ベクトルについて，加法と減法を定義しよう．さらに，実数倍についても考えてみよう．

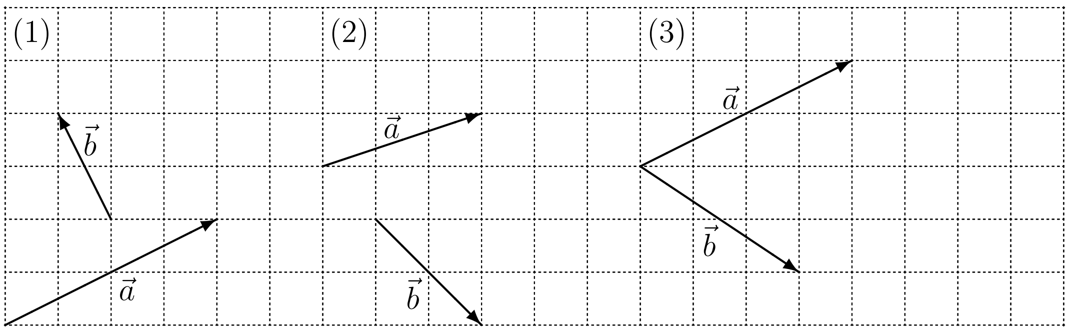
A》ベクトルの加法

ベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\vec{b}$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{b}$ となるように点 C をとる．このようにして定まるベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**和**といい，$\boldsymbol{\vec{a}} + \boldsymbol{\vec{b}}$ と書く．
すなわち，次のことが成り立つ．

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{AC}}}$$



練習 1.2 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a} + \vec{b}$ をそれぞれ図示せよ．

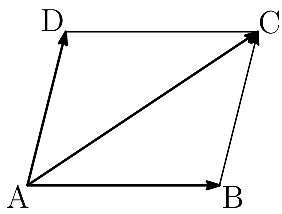


平行四辺形を使って，ベクトルの和を図示することもできる．

右の図の平行四辺形 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから，図からわかるように，次のことが成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

平行四辺形を使ったベクトルの和



$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

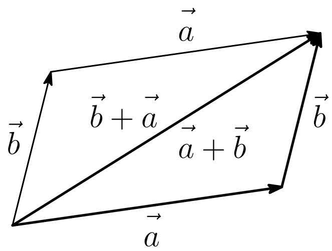
ベクトルの加法について，次の性質が成り立つ．

ベクトルの加法の性質

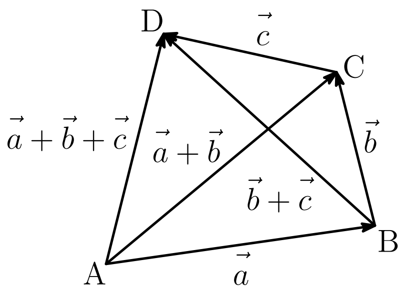
1	$\boldsymbol{\vec{a}}+\boldsymbol{\vec{b}}=\boldsymbol{\vec{b}}+\boldsymbol{\vec{a}}$	交換法則
2	$(\boldsymbol{\vec{a}}+\boldsymbol{\vec{b}})+\boldsymbol{\vec{c}}=\boldsymbol{\vec{a}}+(\boldsymbol{\vec{b}}+\boldsymbol{\vec{c}})$	結合法則

性質 **1**，**2** が成り立つことは，次の図を用いて確かめられる．

[1]



[2]



結合法則が成り立つので，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の和を単に $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と書く．

例 1.2　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$$=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

練習 1.3 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

B》零ベクトル

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のとき，$-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ であるから

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}$$

となる．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ は始点と終点が一致した特別な有向線分で表されるベクトルと考え，その大きさは 0 であるとする．

大きさが 0 のベクトルを**零ベクトル**といい，$\boldsymbol{\vec{0}}$ で表す．零ベクトルの向きは考えない．

$$\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}\\ \overrightarrow{\mathrm{BB}}=\vec{0}\end{array}}$$

零ベクトルに関して，次の性質が成り立つ．

$$\vec{\boldsymbol{a}}+(-\vec{\boldsymbol{a}})=\vec{\boldsymbol{0}},\qquad \vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{0}}=\vec{\boldsymbol{a}}$$

練習 1.4 次の等式が成り立つことを示せ．

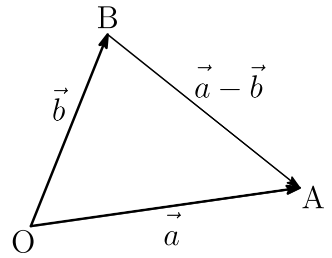
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{0}$$

C ≫ ベクトルの減法

ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ を満たすベクトル $\vec{c}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**差**といい，$\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}$ と書く．

一般に，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから，次のことが成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}}-\overrightarrow{\mathbf{OB}}=\overrightarrow{\mathbf{BA}}$$



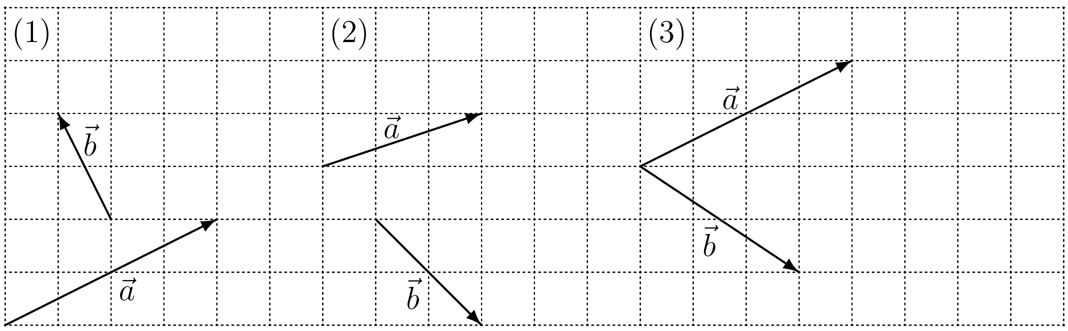
$\boxed{\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}}$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，次のことが成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{OB}}-\overrightarrow{\mathbf{OA}}$$

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\square\mathrm{B}}-\overrightarrow{\square\mathrm{A}}}$

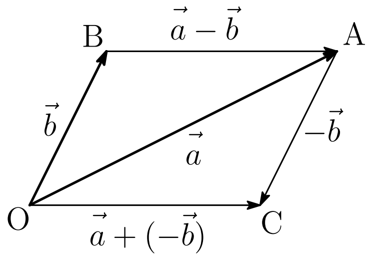
練習 1.5 練習 1.2 のベクトルについて，$\vec{a}-\vec{b}$ をそれぞれ図示せよ．



ベクトルの減法について，次の等式が成り立つ．**1** が成り立つことは，右の図を用いて確かめられる．

1　$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

2　$\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$



D》ベクトルの実数倍

実数 k とベクトル $\vec{a}$ に対して，$\vec{a}$ の k 倍のベクトル $\boldsymbol{k\vec{a}}$ を次のように定める．

$\vec{a}\neq\vec{0}$のとき

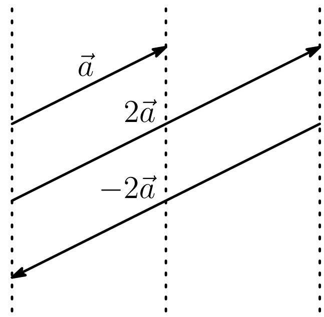
［1］$k>0$ ならば，$\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル．

とくに　$1\vec{a}=\vec{a}$

［2］$k<0$ ならば，$\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $|k|$ 倍のベクトル．

とくに　$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

［3］$k=0$ ならば，$\vec{0}$ とする．



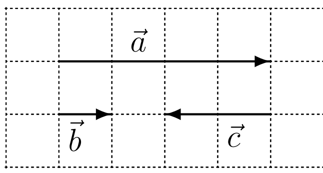
$\vec{a}=\vec{0}$ のとき　どんな k に対しても $k\vec{0}=\vec{0}$ とする．

注意　$(-2)\vec{a}=-(2\vec{a})$ が成り立つので，これらを単に $-2\vec{a}$ と書く．

例 1.3　右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について，

$$\vec{a}=4\vec{b},\qquad \vec{c}=-\frac{1}{2}\vec{a}$$

である．



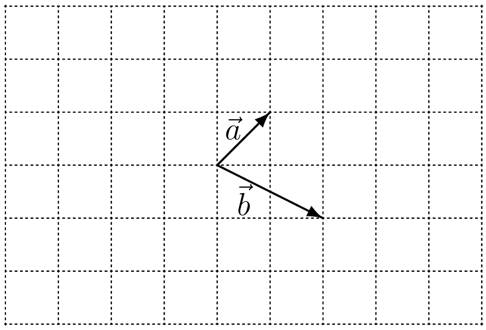
練習 1.6　例 1.3 のベクトルについて，次の (　　) に適する実数を求めよ．

(1)　$\vec{b}=(\qquad)\vec{a}$　　(2)　$\vec{a}=(\qquad)\vec{c}$　　(3)　$\vec{b}=(\qquad)\vec{c}$

練習 1.7 右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを図示せよ．

(1)　$2\vec{a}$　　(2)　$-2\vec{b}$

(3)　$2\vec{a}+\vec{b}$　　(4)　$\vec{a}-2\vec{b}$



E》ベクトルの計算

ベクトルの実数倍について，次の性質が成り立つ．

ベクトルの実数倍の法則

k，l は実数とする．

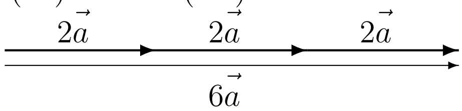
1　$\boldsymbol{k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}}$

2　$\boldsymbol{(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}}$

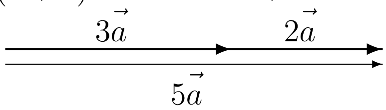
3　$\boldsymbol{k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}}$

これらの等式が成り立つことは，次の図で確かめることができる．

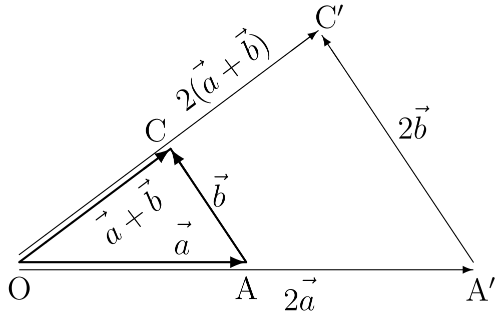
［1］　$3(2\vec{a})=6\vec{a}=(3\cdot2)\vec{a}$



［2］　$(3+2)\vec{a}=5\vec{a}=3\vec{a}+2\vec{a}$



［3］　$2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$



前のページで示したベクトルの実数倍の性質により，ベクトルの加法，減法，実数倍の計算では，$\vec{a}$，$\vec{b}$ などの式を文字式と同じように扱うことができる．

例 1.4 (1) $3\vec{a}+4\vec{a}-2\vec{a}=(3+4-2)\vec{a}=5\vec{a}$

(2)
$$\begin{aligned} 2(\vec{a}+5\vec{b})+3(2\vec{a}-\vec{b}) &= 2\vec{a}+10\vec{b}+6\vec{a}-3\vec{b} \\ &= (2+6)\vec{a}+(10-3)\vec{b} \\ &= 8\vec{a}+7\vec{b} \end{aligned}$$

練習 1.8 次の計算をせよ．

(1) $\vec{a}+3\vec{a}-2\vec{a}$

(2) $3\vec{a}+7\vec{b}-5\vec{a}-2\vec{b}$

(3) $3(2\vec{a}+\vec{b})+4(\vec{a}-2\vec{b})$

(4) $2(\vec{a}-3\vec{b})-3(3\vec{a}-2\vec{b})$

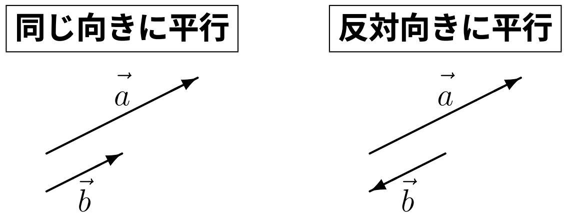
(5) $\dfrac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})+\dfrac{2}{3}(\vec{a}-\vec{b})$

(6) $\dfrac{1}{2}(-\vec{a}+2\vec{b})-\dfrac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})$

F》ベクトルの平行

$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$は，向きが同じか反対のとき，**平行**であるといい，$\boldsymbol{\vec{a}/\!/\vec{b}}$と書く．

ベクトルの実数倍の定義により，次のことが成り立つ．



ベクトルの平行条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

$$\boldsymbol{\vec{a}/\!/\vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}} \text{ となる実数 } \boldsymbol{k} \text{ がある}$$

例 1.5 $|\vec{a}| = 2$ とする．$\vec{a}$と平行で大きさが1のベクトルは

$$\frac{1}{2}\vec{a} \text{ と } -\frac{1}{2}\vec{a}$$

注意 $\dfrac{1}{2}\vec{a}$を$\dfrac{\vec{a}}{2}$ と書くこともある．

大きさが1のベクトルを**単位ベクトル**という．

練習 1.9 次の問いに答えよ．

(1) 単位ベクトル$\vec{e}$と平行で大きさが4のベクトルを$\vec{e}$を用いて表せ．

(2) $|\vec{a}| = 3$ のとき，$\vec{a}$と同じ向きの単位ベクトルを$\vec{a}$を用いて表せ．

G》ベクトルの分解

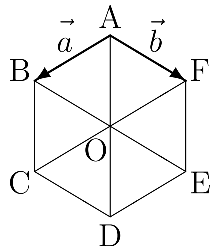
2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，他のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表してみよう．

応用例題 1.1 正六角形 ABCDEF において，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$$

とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$



考え方》 $\overrightarrow{○□} = \overrightarrow{○▲} + \overrightarrow{▲□}$ のように分解することができる．

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BE}}$
$= \vec{a} + 2\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}} + \overrightarrow{\mathrm{CF}}$
$= -\vec{b} + (-2\vec{a}) = -2\vec{a} - \vec{b}$

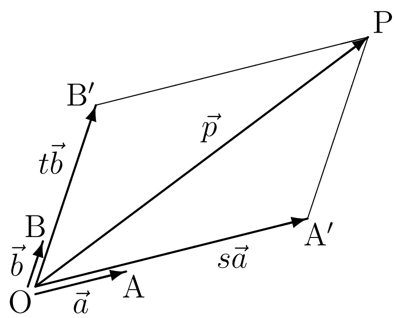
練習 1.10 応用例題 1.1 において，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$　　(3) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

一般に，$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が平行でない[2] とき，どんなベクトル $\vec{p}$ も，$\vec{a}$, $\vec{b}$ と適当な実数 s, t を用いて

$$\boldsymbol{\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}}$$

の形に表すことができる．しかも，この表し方はただ1通りである．
このことは，右の図のような平行四辺形 OA′PB′ を作ることによって，確かめることができる．



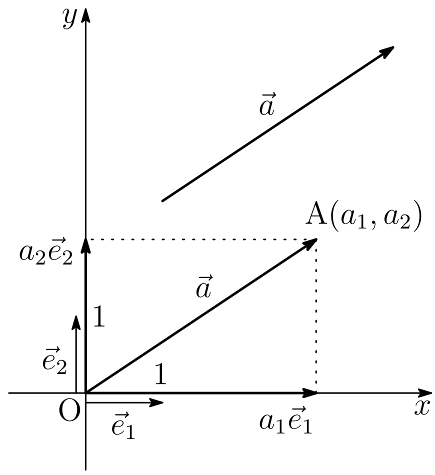
[2] 平面上におけるこのような2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は **1 次独立**であるという．

1.1.3　ベクトルの成分

座標平面上でベクトルを考えるとき，ベクトルの表示に座標を利用する方法がある．ここでは，ベクトルのこの表し方を学ぼう．

A 》ベクトルの成分表示

　O を原点とする座標平面上で，x 軸，y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを，**基本ベクトル**といい，それぞれ $\boldsymbol{\vec{e}_1}$，$\boldsymbol{\vec{e}_2}$ で表す．



　座標平面上のベクトル $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である点 A の座標が

$$(a_1,\ a_2)$$

のとき，$\vec{a}$ は次のように表される．

$$\boldsymbol{\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2}$$

この $\vec{a}$ を，次のようにも書く．

$$\boldsymbol{\vec{a}=(a_1,\ a_2)} \qquad \cdots ①$$

　① における a_1，a_2 を，それぞれ $\vec{a}$ の $\boldsymbol{x}$ **成分**，$\boldsymbol{y}$ **成分**といい，まとめて $\vec{a}$ の**成分**という．また，① を $\vec{a}$ の**成分表示**という．

　基本ベクトル $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ と零ベクトル $\vec{0}$ の成分表示は，次のようになる．

$$\vec{e}_1=(1,\ 0), \quad \vec{e}_2=(0,\ 1), \quad \vec{0}=(0,\ 0)$$

　2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2}$$

　また，上の図で $|\vec{a}|=\mathrm{OA}$ であるから，次のことがいえる．

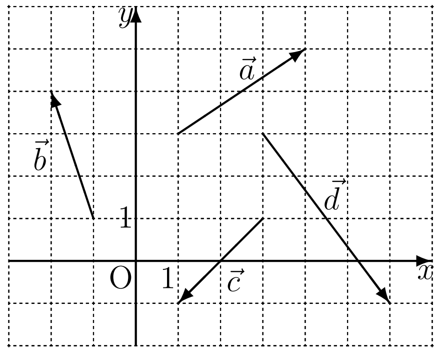
$$\vec{a}=(a_1,\ a_2) \text{ のとき} \qquad \boldsymbol{|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}}$$

例 1.6 右の図のベクトル $\vec{a}$ の成分表示は

$$\vec{a} = (3,\ 2)$$

大きさは

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$



練習 1.11 右の図のベクトル $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を，それぞれ成分表示せよ．また，各ベクトルの大きさを求めよ．

B 》和，差，実数倍の成分表示

ベクトルの成分表示を用いて，和，差，実数倍を計算してみよう．
$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ は，基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いると

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2},\quad \vec{b} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}$$

と表されるから

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e_1} + (a_2 + b_2)\vec{e_2}$$

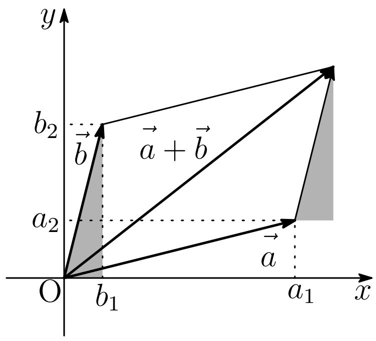
$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{e_1} + (a_2 - b_2)\vec{e_2}$$

である．

また，k を実数とするとき

$$k\vec{a} = (ka_1)\vec{e_1} + (ka_2)\vec{e_2}$$

である．



これらを成分表示すると，次のことが成り立つ．

和，差，実数倍の成分表示

$$(a_1,\ a_2) + (b_1,\ b_2) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$$

$$(a_1,\ a_2) - (b_1,\ b_2) = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2)$$

$$k(a_1,\ a_2) = (ka_1,\ ka_2) \qquad k \text{ は実数}$$

例 1.7 $\vec{a}=(1,\ 5)$，$\vec{b}=(3,-4)$ のとき

$$\begin{aligned}2\vec{a}+3\vec{b}&=2(1,\ 5)+3(3,-4)=(2,\ 10)+(9,-12)\\&=(2+9,\ 10-12)=(11,-2)\end{aligned}$$

練習 1.12 $\vec{a}=(3,-1)$，$\vec{b}=(-4,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ．

(1) $2\vec{a}$ (2) $-\vec{b}$ (3) $\dfrac{1}{4}\vec{b}$

(4) $3\vec{a}+2\vec{b}$ (5) $4\vec{a}-3\vec{b}$ (6) $-2(\vec{a}-\vec{b})$

例題 1.1 $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,-1)$ とする．$\vec{c}=(5,\ 4)$ を，適当な実数 s，t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ．

解答 $s\vec{a}+t\vec{b}=s(1,\ 2)+t(1,-1)=(s+t,\ 2s-t)$ であるから，

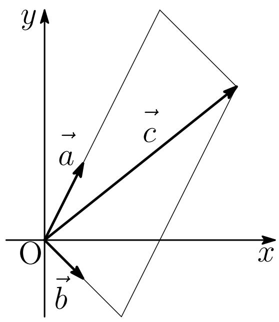
$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とすると

$$(5,\ 4)=(s+t,\ 2s-t)$$

よって $s+t=5$，$2s-t=4$

これを解くと $s=3$，$t=2$

したがって $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$



練習 1.13 $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$ とする．$\vec{c}=(8,-3)$ を，適当な実数 s，t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ．

例題 1.2 2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ x)$ が平行になるように，x の値を定めよ．

解答 $\vec{a}/\!/\vec{b}$ が平行であるには，$\vec{b}=k\vec{a}$ を満たす実数 k があればよい．

$(-2,\ x)=(k,\ 3k)$ から　　$-2=k,\ x=3k$

よって　　$x=3\times(-2)=-6$

練習 1.14 次の2つのベクトルが平行になるように，x の値を定めよ．

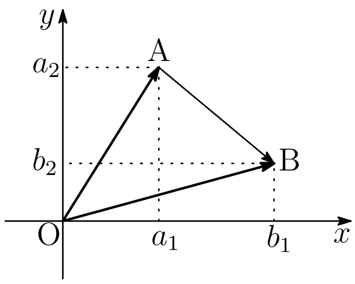
(1) $\vec{a}=(-2,\ 1)$，$\vec{b}=(x,-3)$

(2) $\vec{a}=(2,\ x)$，$\vec{b}=(3,\ 6)$

C》座標平面上の点とベクトル

座標平面上に2点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ をとると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,\ b_2)$ である．よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)\\&=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)\end{aligned}$$



2点A，Bとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

2点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ について

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2),\qquad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}$$

例 1.8　2点 $\mathrm{A}(2,\ 3)$，$\mathrm{B}(5,\ 1)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5-2,\ 1-3)=(3,-2),\qquad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$$

練習 1.15 次の 2 点 A，B について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分表示し，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を求めよ．

(1) A(5, 2)，B(1, 6)　　　(2) A(−3, 4)，B(2, 0)

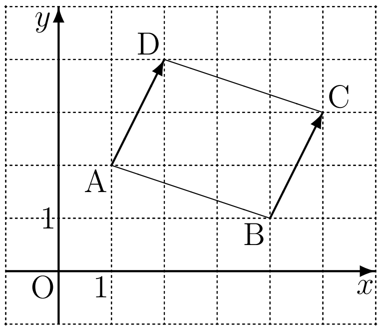
例題 1.3 4 点 A(1, 2)，B(4, 1)，C(5, 3)，D(x, y) を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形であるように，x，y の値を定めよ．

解答 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であればよいから

$$\begin{aligned}(x-1,\ y-2) &= (5-4,\ 3-1)\\ &= (1,\ 2)\end{aligned}$$

よって　$x-1=1,\ y-2=2$

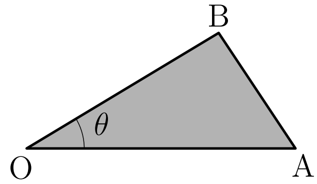
したがって　$x=2,\ y=4$



練習 1.16 4 点 A(1, 1)，B(x, y)，C(5, 4)，D(2, 3) を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形であるように，x，y の値を定めよ．

1.1.4　ベクトルの内積

右の図の △OAB においては，余弦定理により，次の等式が成り立つ．

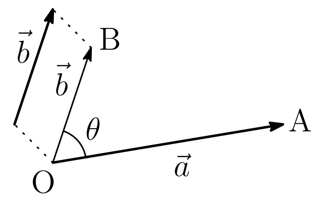


$$\mathrm{BA}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2 \times \mathrm{OA} \times \mathrm{OB}\cos\theta$$

この $\mathrm{OA} \times \mathrm{OB}\cos\theta$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表し，ベクトルの新しい演算を考えよう．

A 》 ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるとき，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるように点Bをとる．このようにして定まる ∠AOB の大きさ θ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**なす角**という．ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ である．



$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**といい，$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}$ で表す．

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta} \qquad \text{ただし，}\theta\text{ は }\vec{a}\text{ と }\vec{b}\text{ のなす角}$$

$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ と定める．

注意 2つのベクトルの内積はベクトルではなく実数である．

例 1.9 $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\theta = 60°$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2 \times 3 \times \cos 60° = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3$$

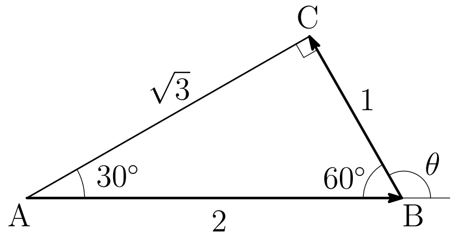
ここで，$\cos\theta$ の値を復習しておこう．

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

練習 1.17 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする．次の場合に内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(1)　$|\vec{a}| = 4$，$|\vec{b}| = 3$，$\theta = 45°$　　　(2)　$|\vec{a}| = 6$，$|\vec{b}| = 6$，$\theta = 150°$

例 1.10 右の図の直角三角形 ABC において，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角 θ は



$$\theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

であるから

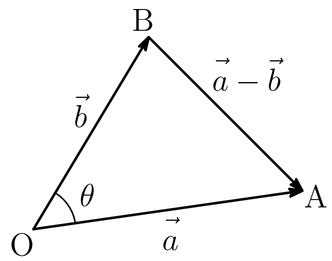
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos 120^\circ = 2\times 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

練習 1.18 例 1.10 の直角三角形 ABC において，次の内積を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

B ≫ 成分による内積の表示

右の図のように，△OAB において



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\ \angle\mathrm{AOB} = \theta$$

とすると，余弦定理により

$$\mathrm{BA}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\cos\theta$$

が成り立つ．これをベクトルで表すと

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

となる．
ここで，$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$　とすると

$$(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 = ({a_1}^2 + {a_2}^2) + ({b_1}^2 + {b_2}^2) - 2(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

これを整理すると　　$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

一般に，次のことが成り立つ．

> $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ のとき　　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$

注意 上のことは，$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときも成り立つ．

例 1.11 $\vec{a}=(1,\ 4)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+4\times3=10$$

練習 1.19 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(1) $\vec{a}=(2,\ 5)$，$\vec{b}=(3,-2)$　　(2) $\vec{a}=(1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b}=(\sqrt{3},\ 3)$

C》ベクトルのなす角

内積の定義から，次のことが成り立つ．

ベクトルのなす角の余弦

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ は $\vec{0}$ でないとし，そのなす角を θ とする．
ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である．このとき

$$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}}$$

例題 1.4 次の2つのベクトルのなす角を求めよ．

$$\vec{a}=(1,\ 2),\qquad \vec{b}=(-1,\ 3)$$

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-1)+2\times3=5$

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},\qquad |\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$$

よって，なす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　　$\theta=45^\circ$　　(答) 45°

練習 1.20 次の 2 つのベクトルのなす角を求めよ．

(1) $\vec{a} = (2,\ 1)$，$\vec{b} = (-3,\ 1)$

(2) $\vec{a} = (1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b} = (\sqrt{3},\ 1)$

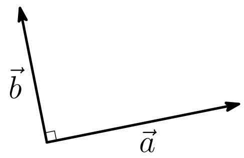
(3) $\vec{a} = (3, -1)$，$\vec{b} = (2,\ 6)$

(4) $\vec{a} = (-4,\ 2)$，$\vec{b} = (2, -1)$

(5) $\vec{a} = (1, -2)$，$\vec{b} = (3, -6)$

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $90°$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**垂直**である[3] といい，$\vec{\boldsymbol{a}}\perp\vec{\boldsymbol{b}}$ と書く．$\vec{a}\perp\vec{b}$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90° = 0$$



である．逆に，$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ になるのは，$\vec{a}\perp\vec{b}$ のときである．したがって，次のことが成り立つ．

ベクトルの垂直条件

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$$\vec{\boldsymbol{a}}\perp\vec{\boldsymbol{b}} \iff \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{0}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}\perp\vec{\boldsymbol{b}} \iff \boldsymbol{a_1b_1 + a_2b_2 = 0}$$

例 1.12　**$\vec{\boldsymbol{a}}=(2,\ 1)$ と $\vec{\boldsymbol{b}}=(x,\ 4)$ が垂直になるような x の値を求める．**

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より　　$2x+1\times 4=0$　　$\leftarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=2x+1\times 4$

よって　　$x=-2$

練習 1.21　次の2つのベクトルが垂直になるような x の値を求めよ．

(1) $\vec{a}=(3,\ 6)$，$\vec{b}=(x,\ 4)$

(2) $\vec{a}=(x,-1)$，$\vec{b}=(x,\ x+2)$

[3] $\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $0°$ または $180°$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行である．

例 1.13 ベクトル $\vec{a} = (2,\ 1)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$

$\vec{b} = (1, -2)$ は $\vec{a}$ に垂直である． ← $b = (a_2, -a_1)$ は $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$ に垂直

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

であるから　$\vec{e} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{b}$　または　$\vec{e} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{b}$

よって

$$\vec{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{または} \quad \vec{e} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

練習 1.22 次のベクトル $\vec{a}$ に垂直な単位ベクトルを求めよ．

(1) $\vec{a} = (1,\ 3)$

(2) $\vec{a} = (2, -5)$

D》内積の性質

ベクトルの内積について，次の性質が成り立つ[4].

内積の性質

1　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2}$

2　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}}$

3　$\boldsymbol{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}}$

4　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}}$

5　$\boldsymbol{(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})}$　　k は実数

1の証明　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1{}^2+a_2{}^2=(\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2})^2=|\vec{a}|^2$$

3の証明　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$ とする.

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$ であるから

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}&=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2\\&=a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2\\&=(a_1c_1+a_2c_2)+(b_1c_1+b_2c_2)\\&=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

証終

2，**4**，**5** が成り立つことも，同様にして示すことができる.

性質 **5** が成り立つので，たとえば $2(\vec{a}\cdot\vec{b})$ を単に $2\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書く.

練習 1.23　上の **3** の証明にならって，次の等式を証明せよ.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$$

[4] **1** より，$\vec{a}\cdot\vec{a}\geqq 0$，$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ も成り立つ.

例題 1.5 次の等式が成り立つことを示せ.

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

解答
$$\begin{aligned}
|\vec{a}+\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \\
&= \vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2
\end{aligned}$$

練習 1.24 次の等式が成り立つことを示せ.

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

応用例題 1.2 $\vec{a}$, $\vec{b}$ が次の条件を満たすとき，$|2\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ．

$$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=4,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2$$

考え方》 $|2\vec{a}-\vec{b}|^2=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$ を利用して，まず $|2\vec{a}-\vec{b}|^2$ の値を求める．

解答

$$\begin{aligned}|2\vec{a}-\vec{b}|^2&=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})\\&=4\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\&=4\times1^2-4\times2+4^2\\&=12\end{aligned}$$

$|2\vec{a}-\vec{b}|\geqq 0$ であるから　　$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

練習 1.25 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|$

(2) $|\vec{a}-2\vec{b}|$

練習 1.26 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるとき，$|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ．

1.1.5 補充問題

1 次の等式を満たす $\vec{x}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(1) $3\vec{x} - 4\vec{a} = \vec{x} - 2\vec{b}$

(2) $2(\vec{x} - 3\vec{a}) = 5(\vec{x} + 2\vec{b})$

2 ベクトル $\vec{a} = (1,\ \sqrt{3})$ に垂直で大きさが 4 のベクトル $\vec{p}$ を求めよ．

3 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次が成り立つことを示せ．

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ で，$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ のとき

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

4 $|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = \sqrt{3}$，$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$ のとき，次のものを求めよ．

(1)　$\vec{a} \cdot \vec{b}$

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ

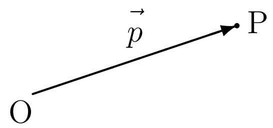
1.2 ベクトルと平面図形

1.2.1 位置ベクトル

図形の性質を調べるときには，共通の始点をもった有向線分が表すベクトルを考えると便利なこともある．このようなベクトルについて考えよう．

A 》位置ベクトル

平面上で，点 O を定めておくと，どんな点 P の位置も，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ によって決まる．このようなベクトル $\vec{p}$ を，点 O に関する点 P の**位置ベクトル**という．



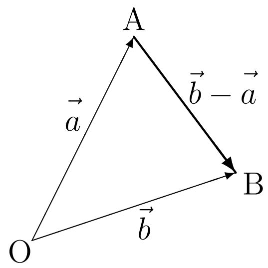
また，位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を，$\mathbf{P}(\vec{\boldsymbol{p}})$ で表す．

注意 位置ベクトルにおける点 O はどこに定めてもよい．以下，とくに断らない限り，1 つ定めた点 O に関する位置ベクトルを考える．

2 点 A，B に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

が成り立つから，次のことがいえる．



2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}}$

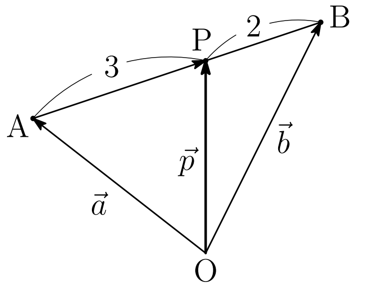
練習 1.27 3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ に対して，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ のいずれかを用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$　　(3) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

B 》内分点・外分点の位置ベクトル

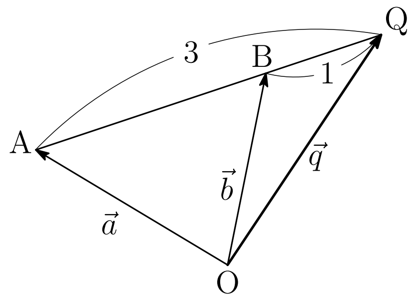
2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，線分 AB を $3:2$ に内分する点 $\mathrm{P}(\vec{p})$，$3:1$ に外分する点 $\mathrm{Q}(\vec{q})$ の位置ベクトルを，それぞれ求めてみよう．

$\boxed{\text{内分}}$　$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=3:2$



$$\mathrm{AP}:\mathrm{AB}=3:(3+2)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$\vec{p}-\vec{a}=\frac{3}{5}(\vec{b}-\vec{a})$$
$$\vec{p}=\left(1-\frac{3}{5}\right)\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$$
$$=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$$

$\boxed{\text{外分}}$　$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=3:1$



$$\mathrm{AQ}:\mathrm{AB}=3:(3-1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$\vec{q}-\vec{a}=\frac{3}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$
$$\vec{q}=\left(1-\frac{3}{2}\right)\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$$
$$=\frac{-\vec{a}+3\vec{b}}{2}$$

一般に，次のことが成り立つ．

内分点・外分点の位置ベクトル

2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点と外分する点の位置ベクトルは，それぞれ

内分 $\cdots$ $\dfrac{\boldsymbol{n\vec{a}+m\vec{b}}}{\boldsymbol{m+n}}$　　外分 $\cdots$ $\dfrac{\boldsymbol{-n\vec{a}+m\vec{b}}}{\boldsymbol{m-n}}$

とくに，線分 AB の中点の位置ベクトルは $\dfrac{\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}}{\boldsymbol{2}}$ である．

注意 内分の場合の n を $-n$ におき換えたものが，外分の場合である．
また，内分点も外分点もその位置ベクトルは，適当な実数 s を用いて
$(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$ の形に表される．

例 1.14 2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) に対して，線分 AB を

3 : 4 に内分する点の位置ベクトルは $\dfrac{4\vec{a}+3\vec{b}}{3+4}=\dfrac{4}{7}\vec{a}+\dfrac{3}{7}\vec{b}$

2 : 1 に外分する点の位置ベクトルは $\dfrac{-\vec{a}+2\vec{b}}{2-1}=-\vec{a}+2\vec{b}$

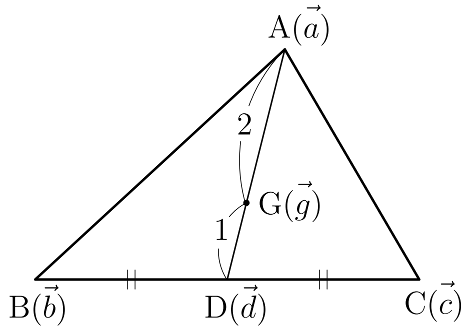
練習 1.28 2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) を結ぶ線分 AB に対して，次のような点の位置ベクトルを求めよ.

(1) 2 : 3 に内分する点　　(2) 3 : 1 に内分する点

(3) 4 : 1 に外分する点　　(4) 1 : 2 に外分する点

C 》三角形の重心の位置ベクトル

3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC において，重心[5]G の位置ベクトル $\vec{g}$ を求めてみよう.



辺 BC の中点を D($\vec{d}$) とすると

$$\vec{d}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\quad\cdots①$$

△ABC の重心 G は，中線 AD を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+2\vec{d}}{2+1}$$

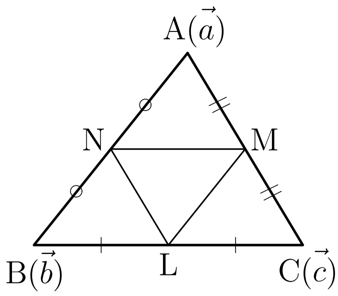
① より $2\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$ であるから $\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC の重心 G の

位置ベクトル $\vec{g}$ は $\boldsymbol{\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}}$

[5]三角形の重心は，3 つの中線が 1 つに交わる点で，各中線を 2 : 1 に内分する.

例題 1.6 3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ において，辺 BC，CA，AB の中点を，それぞれ L，M，N とする．また，$\triangle\mathrm{LMN}$ の重心を G' とする．



(1)　点 G' の位置ベクトル $\overrightarrow{g'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　等式 $\overrightarrow{\mathrm{AL}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\overrightarrow{\mathrm{CN}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ．

解答 (1) L，M，N の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{l}$，$\vec{m}$，$\vec{n}$ とすると，

$$\overrightarrow{g'}=\frac{\vec{l}+\vec{m}+\vec{n}}{3}$$ である．

また　$$\vec{l}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\quad \vec{m}=\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2},\quad \vec{n}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

であるから　$$\begin{aligned}\vec{l}+\vec{m}+\vec{n}&=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}+\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\\&=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\end{aligned}$$

よって　$$\overrightarrow{g'}=\frac{\vec{l}+\vec{m}+\vec{n}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

(2)　$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AL}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\overrightarrow{\mathrm{CN}}&=(\vec{l}-\vec{a})+(\vec{m}-\vec{b})+(\vec{n}-\vec{c})\\&=(\vec{l}+\vec{m}+\vec{n})-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

補足 $\triangle\mathrm{LMN}$ の重心 G' の位置ベクトルは，$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 G の位置ベクトルと同じである．$\overrightarrow{\mathrm{OG}'}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ より，2 つの重心が一致することがわかる．

練習 1.29 3点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする△ABC において，辺 BC，CA，AB を $2:1$ に内分する点を，それぞれ P，Q，R とする．また，△ABC の重心を G，△PQR の重心を G′ とする．

(1) 点 G′ の位置ベクトル $\overrightarrow{g'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

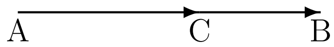
(2) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ．

1.2.2　ベクトルの図形への応用

これまでベクトルの性質や計算を学んできたが，ここではベクトルを利用して平面図形の性質を調べてみよう.

A》直線上の点

平面上の3点A，B，Cについて，ベクトルの平行条件などにより，次のことが成り立つ.



3点が一直線上にあるための条件

点Cが直線AB上にある　$\iff$　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　となる実数kがある

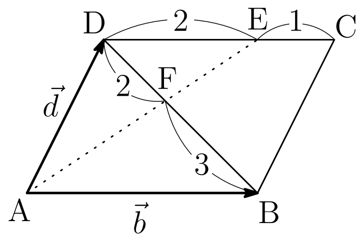
応用例題 1.3　平行四辺形ABCDにおいて，辺CDを1 : 2に内分する点をE，対角線BDを3 : 2に内分する点をFとする．このとき，3点A，F，Eは一直線上にあることを証明せよ.

考え方》　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　となる実数kがあることを示す．$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}+\vec{d}$　であることに注意する.

証明　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする.

BF : FD = 3 : 2 であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3+2}=\frac{2\vec{b}+3\vec{d}}{5}$$



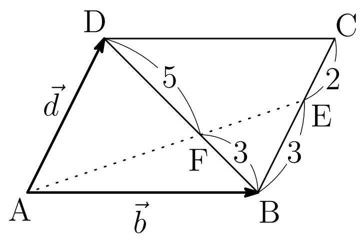
CE : ED = 1 : 2 であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{1+2}=\frac{2(\vec{b}+\vec{d})+\vec{d}}{3}=\frac{2\vec{b}+3\vec{d}}{3}$$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

したがって，3点A，F，Eは一直線上にある.　**証終**

練習 1.30　平行四辺形 ABCD において，辺 BC を 3 : 2 に内分する点を E，対角線 BD を 3 : 5 に内分する点を F とする．このとき，3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ．



応用例題 1.4　△OAB において，辺 OA の中点を C，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

考え方 》　AP : PD $= s : (1-s)$，BP : PC $= t : (1-t)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて 2 通りに表せるが，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の表し方は 1 通りしかないことから，s，t の値が定まる．

解答　AP : PD $= s : (1-s)$ とすると

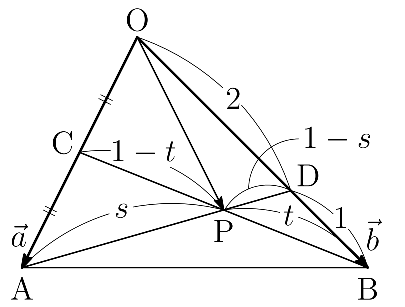
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$= (1-s)\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b}$$

BP : PC $= t : (1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$= \frac{1}{2}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$



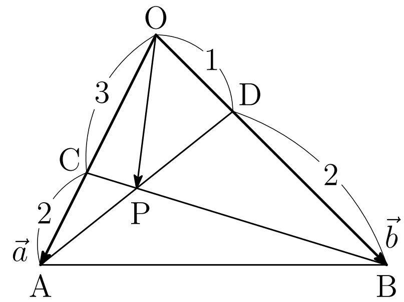
$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いた表し方は 1 通りである．

よって　　$1 - s = \frac{1}{2}t$，$\frac{2}{3}s = 1 - t$

これを解くと　　$s = \frac{3}{4}$，$t = \frac{1}{2}$　　←$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を表す式のどちらかに代入する．

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

練習 1.31 $\triangle$OAB において，辺 OA を $3:2$ に内分する点を C，辺 OB を $1:2$ に内分する点 D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．



B ≫ 内積の利用

ベクトルの内積を利用して，図形の性質を証明してみよう．
内積に関しては，次のことがよく利用される．

$$\mathrm{AB}^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

3 点 O，A，B が異なるとき

$$\mathrm{OA}\perp\mathrm{OB} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$$

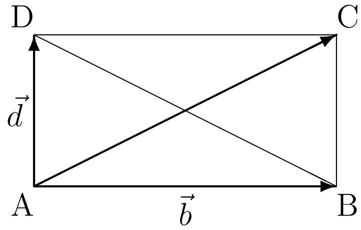
応用例題 1.5 平行四辺形 ABCD において，次のことが成り立つ．

$$\mathrm{AC} = \mathrm{DB} \qquad \text{ならば} \qquad \mathrm{AB}\perp\mathrm{AD}$$

このことを，ベクトルを用いて証明せよ．

考え方 ≫ $\mathrm{AC} = \mathrm{DB}$ すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{DB}}|^2$ から $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 0$ を示す．
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$ とすると，計算しやすい．

証明 平行四辺形 ABCD において，



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$$

とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{b}+\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{DB}} = \vec{b}-\vec{d}$$

$\mathrm{AC} = \mathrm{DB}$ ならば，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{DB}}|^2$ であるから

$$(\vec{b}+\vec{d})\cdot(\vec{b}+\vec{d}) = (\vec{b}-\vec{d})\cdot(\vec{b}-\vec{d})$$

すなわち　$|\vec{b}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{d} + |\vec{d}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{d} + |\vec{d}|^2$

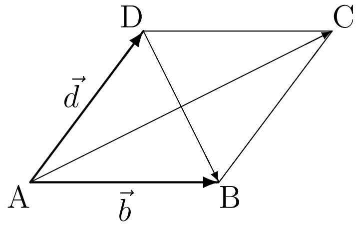
よって　$\vec{b}\cdot\vec{d} = 0$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ となるから，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{AD}$ である．　**証終**

練習 1.32 平行四辺形 ABCD において，次のことが成り立つ．

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AD} \qquad \text{ならば} \qquad \mathrm{AC} \perp \mathrm{DB}$$

このことを，ベクトルを用いて証明せよ．



1.2.3　直線のベクトルによる表示

直線上の点の位置ベクトルを考えることにより，直線をベクトルで表示することを考えよう．

A》ベクトルと直線の方程式

ベクトルを用いて，座標平面上の直線について考えてみよう．

例題 1.7　点 A$(3,\ 4)$ を通りベクトル $\vec{d}=(4,\ 2)$ に平行な直線 g が x 軸と交わる点を B とする．B の座標を求めよ．

解答　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}/\!/\vec{d}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k\vec{d}$ となる実数 k がある．

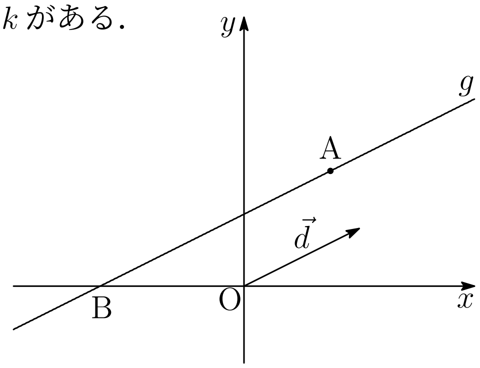
B の座標を $(x,\ 0)$ とおくと

$$(x-3, -4)=k(4,\ 2)$$

よって　$x-3=4k,\quad -4=2k$

これを解くと　$k=-2,\ x=-5$

したがって，B の座標は　$(-5,\ 0)$



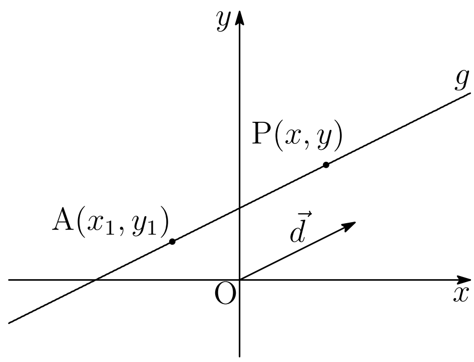
練習 1.33　点 A$(4, -3)$ を通りベクトル $\vec{d}=(-2,\ 3)$ に平行な直線 g が x 軸と交わる点を B，y 軸と交わる点を C とする．

(1)　B の座標を求めよ．　　(2)　C の座標を求めよ．

一般に，O を原点とする座標平面上で，点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通りベクトル $\vec{d}=(l,\ m)$ に平行な直線 g 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{d}$ となる実数 t があるから

$$(x-x_1,\ y-y_1)=t(l,\ m)$$

よって $\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \end{cases} \quad \cdots ①$



① において，t を**媒介変数**といい，① を直線 g の**媒介変数表示**という．

練習 1.34 上の ① から t を消去して，直線 g の方程式が次の式になることを示せ．

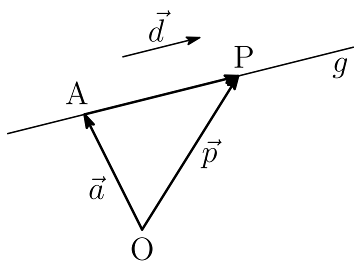
$$m(x-x_1)-l(y-y_1)=0$$

B》 直線のベクトル方程式

平面上の直線をベクトルの式で表示してみよう．

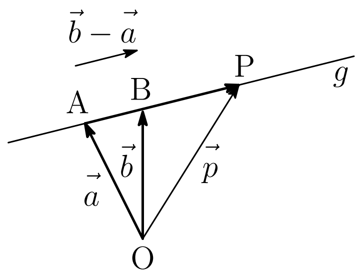
点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通りベクトル $\vec{d}$ に平行な直線を g とする．g 上のどんな点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対しても，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{d}$ となる実数 t がただ1つ定まる．$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}$ であるから

$$\vec{\boldsymbol{p}}=\vec{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{d}} \qquad \cdots ②$$



② で，t がすべての実数値をとるように変化すると，点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ の全体は，直線 g になる．② を，直線 g の**ベクトル方程式**といい，実数 t を**媒介変数**という．また，$\vec{d}$ を直線 g の**方向ベクトル**という．

点 A$(\vec{a})$ を通る直線 g 上に A と異なる点 B$(\vec{b})$ があるとき，② で



$$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$$

として，次のようになる．

$$\boldsymbol{\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}$$

さらに，$1-t=s$ とおくと，次のことがいえる．

異なる 2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線の方程式は

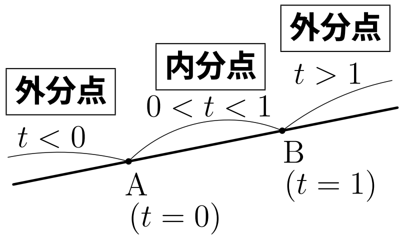
1 $\boldsymbol{\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}$ ただし，t は実数

2 $\boldsymbol{\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}}$ $(\boldsymbol{s+t=1})$ ただし，s，t は実数

ベクトル方程式

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

において，実数 t のとる値によって点 P$(\vec{p})$ の存在範囲は右の図のようになる．



練習 1.35 異なる 2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対して，次の式を満たす点 P$(\vec{p})$ の存在範囲は線分 AB であることを確かめよ．ただし，s，t は実数とする．

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}\qquad(s+t=1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0)$$

応用例題 1.6　△OAB において，次の式を満たす点 P の存在範囲を示せ．ただし，s，t は実数とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \left(s+t=\frac{1}{2},\ s \geqq 0,\ t \geqq 0\right)$$

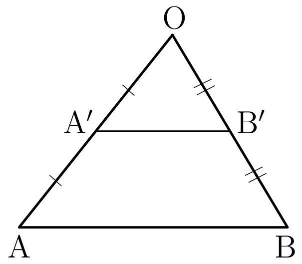
考え方》　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}} \quad (s'+t'=1,\ s' \geqq 0,\ t' \geqq 0)$ の形であれば，点 P の存在範囲は線分 A′B′ である．

解答　$s+t=\dfrac{1}{2}$ より　　$2s+2t=1$

そこで，$2s=s'$，$2t=t'$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$$s'+t'=1,\ s' \geqq 0,\ t' \geqq 0$$



よって，辺 OA，OB の中点を，それぞれ A′，B′ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}} \quad (s'+t'=1,\ s' \geqq 0,\ t' \geqq 0)$$

したがって，点 P の存在範囲は線分 A′B′ である．

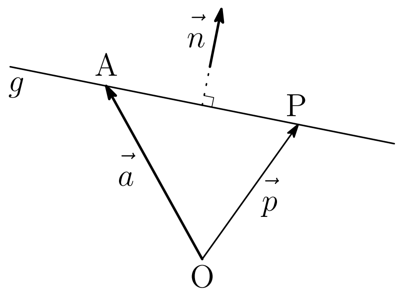
練習 1.36　△OAB において，次の式を満たす点 P の存在範囲を示せ．ただし，s，t は実数とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad (s+t=2,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0)$$

C 》 ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線

O を原点とする座標平面上で，点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通りベクトル $\vec{n}=(a,\ b)$ に垂直な直線 g 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とするとき，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0 \qquad \cdots ③$$



が成り立つから

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

が得られる．これが，直線 g の方程式である．

練習 1.37 次の点 A を通り，ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

(1) $\mathrm{A}(3,\ 4)$，$\vec{n}=(5,\ 2)$

(2) $\mathrm{A}(-3,\ 2)$，$\vec{n}=(1, -4)$

直線 $ax+by+c=0$ について，次のことがいえる．

ベクトル $\vec{n}=(a,\ b)$ は，直線 $ax+by+c=0$ に垂直である．

点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通りベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線のベクトル方程式は，③ において $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}$ として，次のようになる．

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$

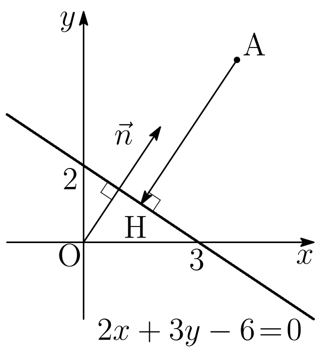
直線に垂直なベクトル $\vec{n}$ を，この直線の**法線ベクトル**という．

例 1.15　点から直線に引いた垂線

点 A から直線 $2x+3y-6=0$ に垂線 AH を引くとき，$\vec{n}=(2,\ 3)$ も $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ も，この直線の法線ベクトルである．よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}/\!/\vec{n}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$$

となる実数 k がある．



練習 1.38　例 1.15 において，A(2, 5)，H(x, y) とする．

(1)　x，y をそれぞれ k で表せ．　　(2)　点 H の座標を求めよ．

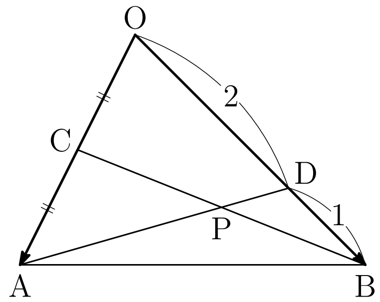
研究

直線のベクトル方程式の応用

39 ページで示した **2** により，次のことが成り立つ．

$$\textbf{点 P が直線 AB 上にある} \iff \left[\begin{array}{c} \overrightarrow{\mathbf{OP}} = s\overrightarrow{\mathbf{OA}} + t\overrightarrow{\mathbf{OB}} \textbf{ について} \\ s + t = 1 \end{array}\right]$$

このことを利用して，33 ページの応用例題 1.4 を考えてみよう．



$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく．

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{2}y\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

点 P は直線 AD 上にあるから

$$x + \frac{3}{2}y = 1 \qquad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2x\overrightarrow{\mathrm{OC}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

点 P は直線 BC 上にあるから

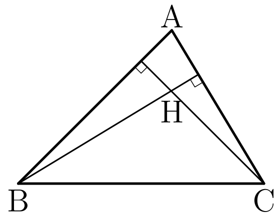
$$2x + y = 1 \qquad \cdots ②$$

①，② を解くと　　$x = \dfrac{1}{4}$，$y = \dfrac{1}{2}$

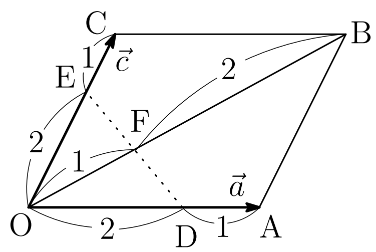
したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

1.2.4　補充問題

5　鋭角三角形ABCにおいて，頂点B，Cからそれぞれの向かい合う辺CA，ABに下ろした垂線の交点をHとすると，HA⊥BCである．このことを，ベクトルを用いて証明せよ．



6　平行四辺形OABCの辺OAと辺OCを2 : 1に内分する点を，それぞれD，Eとし，対角線OBを1 : 2に内分する点をFとする．このとき，3点D，F，Eは一直線上にあることを証明せよ．

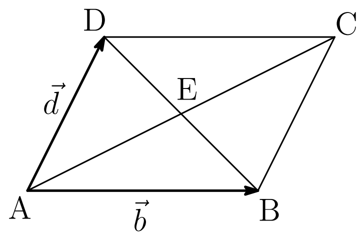


1.3　章末問題

1.3.1　章末問題 A

1 平行四辺形 ABCD において，対角線の交点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$, $\vec{d}$ を用いて表せ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{EA}}$

2 $\vec{a} = (3,\ 1)$, $\vec{b} = (1,\ 2)$ で，$\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$ とする．ただし，t は実数である．

(1)　$|\vec{c}| = 5$ となる t の値を求めよ．

(2)　$|\vec{c}|$ が最小となるとき，$\vec{b} \perp \vec{c}$ であることを示せ．

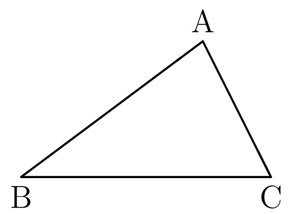
3 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ で，ベクトル $\vec{a}+\vec{b}$，$2\vec{a}-5\vec{b}$ が垂直であるとする．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ．

4 平面上に $\triangle$ABC と点 P，Q があって，次の等式が成り立つとき，P，Q の位置を右の図にしるせ．

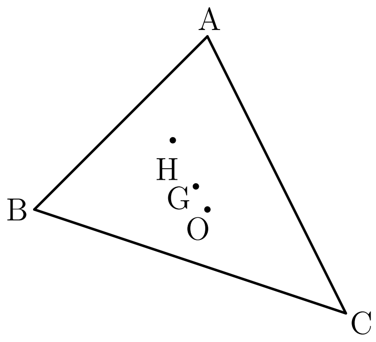
$$3\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\vec{0}$$



5 △ABC の外心を O，重心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．ただし，△ABC は直角三角形ではないとする．

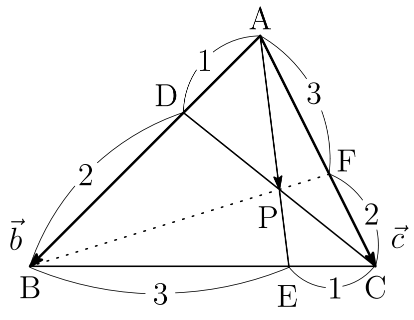
(1) 3 点 O，G，H は一直線上にあることを証明せよ．

(2) BH⊥CA かつ CH⊥AB であることを証明せよ．



6 △ABC において，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を D，辺 BC を 3 : 1 に内分する点を E，辺 CA を 2 : 3 に内分する点を F とする．また，線分 AE と線分 CD の交点を P とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．



(2) 3 点 B，P，F は一直線上にあることを示せ．

1.3.2 章末問題 B

7 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ のとき，次の値の最大値，最小値を求めよ.

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|$

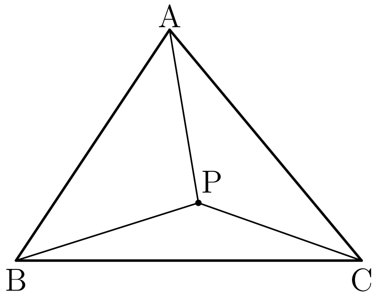
8 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ と原点 O を頂点とする △OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．このとき，△OAB の面積 S は次の式で表されることを示せ.

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

9 △ABC と点 P に対して，等式 $3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+4\overrightarrow{\mathrm{BP}}+5\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 P は △ABC に対してどのような位置にあるか．

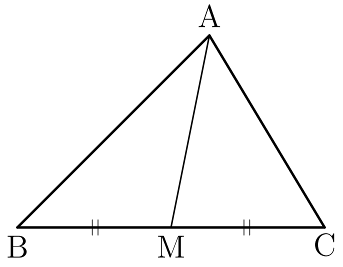
(2) 面積の比 △PBC : △PCA : △PAB を求めよ．



10 △ABC において，辺 BC の中点を M とすると，次の等式が成り立つ．

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

このことを，ベクトルを用いて証明せよ．



11 △OABにおいて，辺OBを2 : 1に内分する点をC，線分ACの中点をMとし，直線OMと辺ABの交点をDとする．次のものを求めよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を満たす実数 k の値　　(2) AD : DB

ヒント

7　$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ に注意.

8　$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると　$S = \dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

10　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ として，内積を利用する.

11　Dが直線AB上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$s+t=1$ が利用できる.

第 2 章　空間のベクトル

2.1.1　空間の点

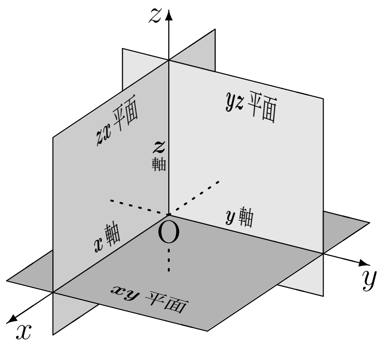
直線上の点や平面上の点は，数直線や座標軸を考えることにより，座標を用いて表すことができた．空間においても，点の座標を考えてみよう．

A》空間の点の座標

空間に点 O をとり，O で互いに直交する 3 本の数直線を，右の図のように定める．これらを，それぞれ **$\boldsymbol{x}$ 軸**，**$\boldsymbol{y}$ 軸**，**$\boldsymbol{z}$ 軸**といい，まとめて**座標軸**という．また，点 O を**原点**という．さらに

x 軸と y 軸で定まる平面を **$\boldsymbol{xy}$ 平面**，
y 軸と z 軸で定まる平面を **$\boldsymbol{yz}$ 平面**，
z 軸と x 軸で定まる平面を **$\boldsymbol{zx}$ 平面**

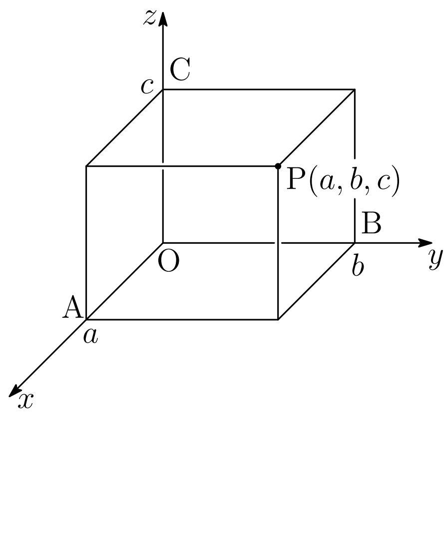
といい，これらをまとめて**座標平面**という．



空間の点 P に対して，P を通り各座標軸に垂直な平面が，x 軸，y 軸，z 軸と交わる点を，それぞれ A，B，C とする．A，B，C の各座標軸上での座標が，それぞれ a，b，c のとき，3 つの実数の組

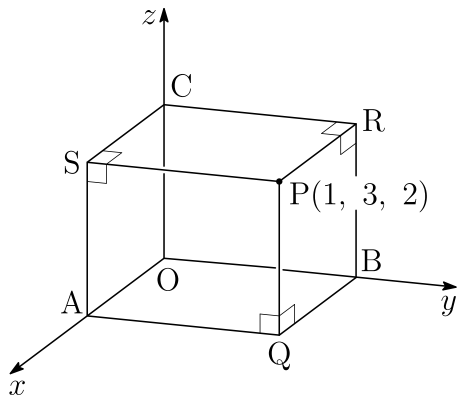
$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$$

を点 P の**座標**といい，a，b，c をそれぞれ点 P の **$\boldsymbol{x}$ 座標**，**$\boldsymbol{y}$ 座標**，**$\boldsymbol{z}$ 座標**という．この点 P を **$\mathbf{P}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$** と書くことがある．原点 O と，右上の図の点 A，B，C については，O(0, 0, 0)，A(a, 0, 0)，B(0, b, 0)，C(0, 0, c) である．



座標の定められた空間を**座標空間**という．

例 2.1 点 P(1, 3, 2) から xy 平面，yz 平面，zx 平面に垂線を下ろし，各平面との交点を，それぞれ Q，R，S とすると，Q(1, 3, 0)，R(0, 3, 2)，S(1, 0, 2) である．
また，xy 平面に関して点 P と対称な点の座標は，(1, 3, −2) である．



練習 2.1 次の平面に関して点 P(1, 3, 2) と対称な点の座標を，それぞれ求めよ．

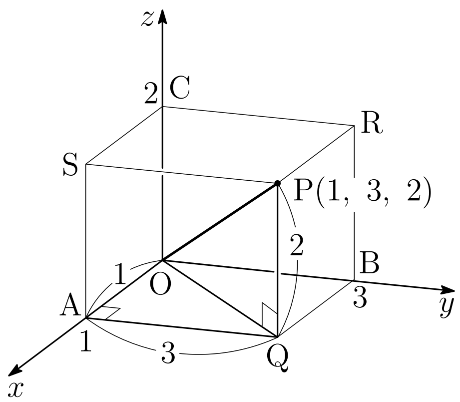
(1)　yz 平面　　　　(2)　zx 平面

B ≫ 原点 O と点 P の距離

例 2.1 において，原点 O と点 P の距離を求めてみよう．
三平方の定理を使うと

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}^2 &= \mathrm{OQ}^2 + \mathrm{PQ}^2 \\ &= (\mathrm{OA}^2 + \mathrm{AQ}^2) + \mathrm{PQ}^2 \\ &= 1^2 + 3^2 + 2^2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

OP > 0 であるから　　$\mathrm{OP} = \sqrt{14}$



点 P の座標が $(a,\ b,\ c)$ のときは，$\mathrm{OP}^2 = a^2 + b^2 + c^2$ となるから，次のことが成り立つ．

> 原点 O と点 P$(a,\ b,\ c)$ の距離は　　$\boldsymbol{\mathrm{OP} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

練習 2.2 原点 O と次の点の距離を求めよ．

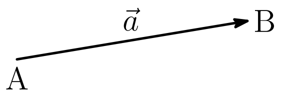
(1)　P(2, 3, 6)　　　　(2)　Q(3, −4, 5)

2.1.2　空間のベクトル

空間においても，平面の場合と同様に有向線分を考えることができる．空間の有向線分で，向きと大きさだけに着目したものが**空間のベクトル**である．ここでは，空間のベクトルについて考えてみよう．

A ≫ 空間のベクトル

空間において，始点を A，終点を B とする有向線分 AB で表されるベクトルを $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ で表し，その大きさを $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$ で表す．



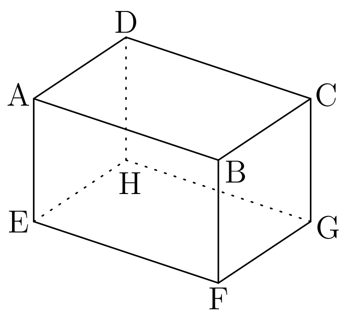
空間のベクトルも $\vec{\boldsymbol{a}}$，$\vec{\boldsymbol{b}}$ などで表すことがある．このとき，$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ や，$\vec{a}$ の逆ベクトル $-\vec{\boldsymbol{a}}$ の定義は，平面の場合と同様である．

大きさが 0 のベクトルを**零ベクトル**といい，$\vec{\mathbf{0}}$ で表す．また，大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル**という．

例 2.2 右の図の直方体において，始点，終点がともに頂点となる有向線分でベクトルを考えると

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{HG}}$$

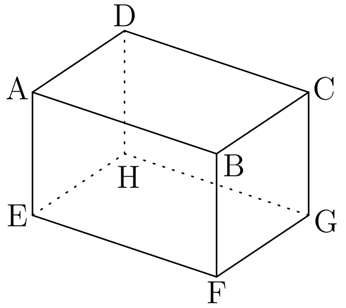
また，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ は，いずれも $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の逆ベクトルである．



練習 2.3 例 2.2 において，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ に等しいベクトルをすべてあげよ．また，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の逆ベクトルで $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ 以外のものをすべてあげよ．

空間のベクトルの和と差，実数倍の定義も，平面上の場合と同様である．さらに，それらに成り立つ性質は，空間のベクトルに対してもそのまま成り立つ．

例 2.3　右の図の立体は直方体である．



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\square}$ の □ に適する頂点の文字は，$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\mathbf{F}}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\square\mathrm{B}}$ の □ に適する頂点の文字は，$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathbf{E}\mathrm{B}}$$

$$\overrightarrow{\bigcirc\blacktriangle}+\overrightarrow{\blacktriangle\square}=\overrightarrow{\bigcirc\square}$$
$$\overrightarrow{\bullet\triangle}-\overrightarrow{\bullet\square}=\overrightarrow{\square\triangle}$$

練習 2.4　例 2.3 の直方体において，次の □ に適する頂点の文字を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{FG}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\square}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\square\mathrm{D}}$

B》ベクトルの分解

2 つずつ平行な 3 組の平面で囲まれる立体を**平行六面体**という．直方体も平行六面体である．平行六面体には，次のような性質がある．

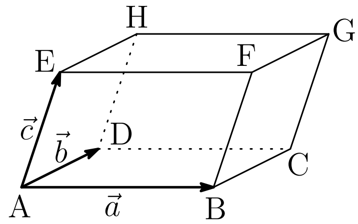
平行六面体の各面は，平行四辺形である．

例題 2.1　右の図の平行六面体において，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a},\ \ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b},\ \ \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$$

とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$　　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$



解答　(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\overrightarrow{\mathrm{FE}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}}+\overrightarrow{\mathrm{HD}}=-\vec{a}+\vec{b}+(-\vec{c})$

$=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

練習 2.5　例題 2.1 の平行六面体の図において，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{HF}}$

空間において，同じ平面上にない4点O，A，B，Cが与えられたとき，次のことが成り立つ．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，この空間のどんなベクトル $\vec{p}$ も，適当な実数 s，t，u を用いて

$$\boldsymbol{\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}}$$

の形に表すことができる．しかも，この表し方はただ1通りである．

説明 $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とする．

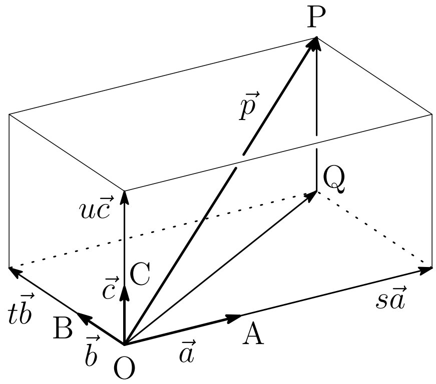
点Pを通り直線OCに平行な直線を引き，3点O，A，Bを通る平面OAB [1] との交点をQとすると，次が成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}} \quad \cdots①$$

［1］点Qが平面OAB上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ となる実数 s，t がただ1組定まる．

［2］$\overrightarrow{\mathrm{OC}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=u\vec{c}$ となる実数 u がただ1つ定まる．

①と［1］,［2］により，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ となる実数 s，t，u がただ1組定まる．　**証終**



[1] 一直線上にない3点O，A，Bを通る平面は，ただ1つ定まる．この平面を，平面OABということがある．

2.1.3　ベクトルの成分

座標空間でベクトルを考えて，ベクトルの表示に座標を利用してみよう．
ここでは，空間のベクトルの成分表示について学ぶ．

A 》ベクトルの成分表示

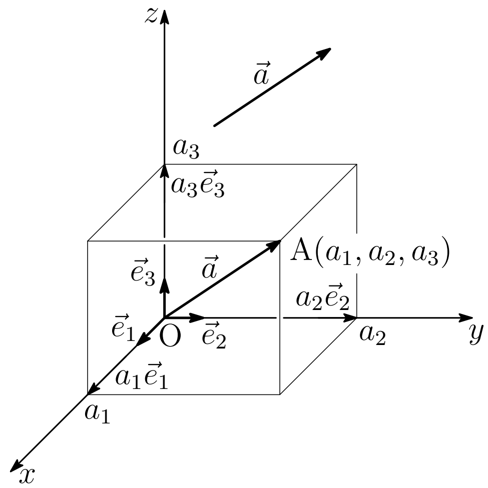
座標空間において，x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを**基本ベクトル**といい，それぞれ $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ で表す．

この空間のベクトル $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である点 A の座標が

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

のとき，$\vec{a}$ は次のように表される．

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$$



この $\vec{a}$ を，次のようにも書く．

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3) \qquad \cdots ①$$

① における a_1，a_2，a_3 を，それぞれ $\vec{a}$ の **x 成分**，**y 成分**，**z 成分**といい，まとめて $\vec{a}$ の**成分**という．また，① を $\vec{a}$ の**成分表示**という．

空間の基本ベクトル $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ の成分表示は，次のようになる．

$$\vec{e}_1=(1,\ 0,\ 0),\quad \vec{e}_2=(0,\ 1,\ 0),\quad \vec{e}_3=(0,\ 0,\ 1)$$

空間の零ベクトル $\vec{0}$ の成分表示は，$\vec{0}=(0,\ 0,\ 0)$ である．

また，空間の 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，次が成り立つ．

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$$

練習 2.6 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が等しくなるように，x，y，z の値を定めよ．

(1) $\vec{a} = (2, -1, -3)$,　$\vec{b} = (x-4,\ y+2, -z+1)$

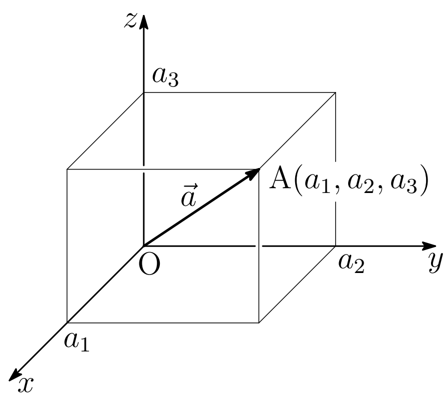
(2) $\vec{a} = (-4,\ 2-y,\ 8)$,　$\vec{b} = (3x-1,\ 0, -2z)$

座標空間において，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A の座標が $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ であるとする．
このとき

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \mathrm{OA}\\ &= \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}\end{aligned}$$

である．

したがって，次のことが成り立つ．



ベクトルの大きさ

$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ の大きさは　$\boldsymbol{|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}}$

練習 2.7 次のベクトルの大きさを求めよ．

(1) $\vec{a} = (-1,\ 2, -2)$

(2) $\vec{b} = (-5,\ 3, -4)$

B 》和，差，実数倍の成分表示

平面上の場合と同様に，空間のベクトルの和，差，実数倍の成分表示について，次のことが成り立つ．

和，差，実数倍の成分表示

$$\boldsymbol{(a_1,\ a_2,\ a_3) + (b_1,\ b_2,\ b_3) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)}$$
$$\boldsymbol{(a_1,\ a_2,\ a_3) - (b_1,\ b_2,\ b_3) = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3)}$$
$$\boldsymbol{k(a_1,\ a_2,\ a_3) = (ka_1,\ ka_2,\ ka_3)} \quad k \text{ は実数}$$

例 2.4 $\vec{a} = (2, -3,\ 4)$，$\vec{b} = (-1,\ 0,\ 5)$ のとき

$$\begin{aligned} 3\vec{a} - 2\vec{b} &= 3(2, -3,\ 4) - 2(-1,\ 0,\ 5) \\ &= (6 + 2, -9 - 0,\ 12 - 10) \\ &= (8, -9,\ 2) \end{aligned}$$

練習 2.8 $\vec{a} = (1,\ 3, -2)$，$\vec{b} = (4, -3,\ 0)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ．

(1)　$\vec{a} + \vec{b}$　　　(2)　$\vec{a} - \vec{b}$

(3)　$3\vec{a} + 2\vec{b}$　　　(4)　$2\vec{a} - 3\vec{b}$

(5)　$2(-\vec{a} + 4\vec{b})$　　　(6)　$-3(\vec{a} - 2\vec{b})$

C》座標空間の点とベクトル

原点 O と 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分は，次のようになる．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (b_1,\ b_2,\ b_3) - (a_1,\ a_2,\ a_3)\\ &= (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)\end{aligned}$$

したがって，次のことがいえる．

2 点 A，B とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)}$$

$$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}}$$

例 2.5 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{B}(2,\ 4, -3)$ について

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2 - (-1),\ 4 - 0,\ -3 - 2) = (3,\ 4,\ -5)\\ &|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

練習 2.9 次の 2 点 A，B について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分表示し，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を求めよ．

(1) $\mathrm{A}(2,\ 1,\ 4)$，$\mathrm{B}(3, -1,\ 5)$

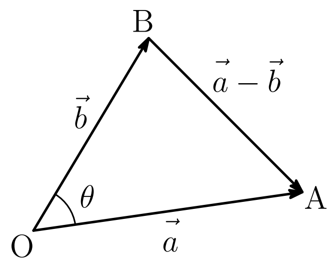
(2) $\mathrm{A}(3,\ 0, -2)$，$\mathrm{B}(1, -4,\ 2)$

2.1.4　ベクトルの内積

平面上の2つのベクトルの内積は，三角形の余弦定理に関連して定義した．
まったく同様にして，空間のベクトルにも内積を定義することができる．

A》空間のベクトルの内積

空間の$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$について，そのなす角θを平面上の場合と同様に定義し，内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$も同じ式



$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

で定義する．

空間のベクトルについても，17ページで示した等式

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

が成り立つ．$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ とすると

$$\begin{aligned}&(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2\\&\qquad=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)+({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-2(\vec{a}\cdot\vec{b})\end{aligned}$$

整理すると　$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

したがって，次のことがいえる．

ベクトルの内積

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ は$\vec{0}$でないとし，そのなす角をθとする．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である．このとき

1　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$

2　$\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}}}$

なお，$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定義する．

例題 2.2 次の2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積およびそのなす角を求めよ．

$$\vec{a} = (2, -3,\ 1),\ \vec{b} = (-3,\ 1,\ 2)$$

解答 内積は $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 2 \times (-3) + (-3) \times 1 + 1 \times 2 = -7$

なす角を θ とすると

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-7}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2}} \\ &= -\frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

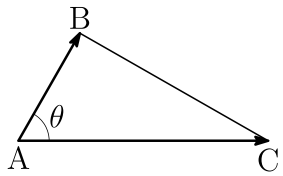
$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから $\qquad \theta = 120^\circ$

練習 2.10 次の2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積およびそのなす角を求めよ．

(1) $\vec{a} = (2, -1, -2)$, $\vec{b} = (4,\ 3, -5)$

(2) $\vec{a} = (2,\ 0,\ 3)$, $\vec{b} = (0,\ 1,\ 0)$

応用例題 2.1 3 点 A(1, 3, 2)，B(2, 5, 3)，C(−1, 5, 6) を頂点とする △ABC において，∠BAC の大きさを求めよ．



考え方》 △BAC は，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角である．

解答 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2-1,\ 5-3,\ 3-2) = (1,\ 2,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1-1,\ 5-3,\ 6-2) = (-2,\ 2,\ 4)$

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{BAC} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \frac{1\times(-2)+2\times2+1\times4}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+2^2+4^2}}\\ &= \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{24}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$0^\circ \leqq \angle\mathrm{BAC} \leqq 180^\circ$ であるから　　$\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$

練習 2.11 3 点 A(6, 7, −8)，B(5, 5, −6)，C(6, 4, −2) を頂点とする △ABC において，∠ABC の大きさを求めよ．

B》ベクトルの垂直

空間のベクトルの垂直条件について，次のことが成り立つ．

ベクトルの垂直条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ で，$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき

$$\boldsymbol{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$$

$$\boldsymbol{\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0}$$

応用例題 2.2 ベクトル $\vec{a} = (2, -1,\ 0)$，$\vec{b} = (6, -2,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが 3 のベクトル $\vec{p}$ を求めよ．

考え方》 $\vec{p} = (x,\ y,\ z)$ として，垂直条件 $\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$，$\vec{b} \cdot \vec{p} = 0$ と $|\vec{p}| = 3$ から x，y，z の方程式を導く．これを解くには，まず y，z を消去して得られる x の 2 次方程式を解く．

解答　$\vec{p} = (x,\ y,\ z)$ とする．

$\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$　であるから　$2x - y = 0$　$\cdots$①

$\vec{b} \cdot \vec{p} = 0$　であるから　$6x - 2y + z = 0$　$\cdots$②

$|\vec{p}| = 3$　であるから　$x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$　$\cdots$③

①，② から，y，z を x で表すと　$y = 2x$，$z = -2x$

これらを ③ に代入すると　$x^2 + (2x)^2 + (-2x)^2 = 9$

整理すると　$9x^2 = 9$　すなわち　$x = \pm 1$

$x = 1$ のとき　$y = 2$，$z = -2$

$x = -1$ のとき　$y = -2$，$z = 2$

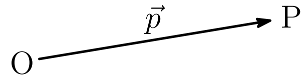
(答) $\vec{p} = (1,\ 2, -2)$ または $\vec{p} = (-1, -2,\ 2)$

補足 上のベクトル $\vec{p}$ を，$\vec{p} = (\pm 1, \pm 2, \mp 2)$ (複号同順) と書くことがある．

練習 2.12 ベクトル $\vec{a} = (1,\ 0,\ 1)$，$\vec{b} = (-1,\ 1,\ 0)$ の両方に垂直で，大きさが 3 のベクトル $\vec{p}$ を求めよ．

2.1.5　位置ベクトル

空間においても点Oを定めておくと，どんな点Pの位置も，ベクトル $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ によって決まる．このようなベクトル $\vec{p}$ を，点Oに関する点Pの**位置ベクトル**という．
位置ベクトルを用いて空間図形の性質を調べてみよう．



A》位置ベクトル

空間においても点Pの位置ベクトルが $\vec{p}$ であることを，$\mathbf{P}(\vec{\boldsymbol{p}})$ で表す．
以下，とくに断らない限り，点Oに関する位置ベクトルを考える．
平面上の場合と同様に，次のことが成り立つ．

1　2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して　$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\vec{\boldsymbol{b}}-\vec{\boldsymbol{a}}$

線分ABを $m:n$ に内分する点，外分する点の位置ベクトルは，それぞれ

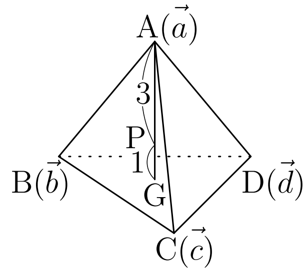
内分　$\cdots$　$\dfrac{\boldsymbol{n\vec{a}+m\vec{b}}}{\boldsymbol{m+n}}$　　外分　$\cdots$　$\dfrac{\boldsymbol{-n\vec{a}+m\vec{b}}}{\boldsymbol{m-n}}$

とくに，線分ABの中点の位置ベクトルは　$\dfrac{\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}}{\mathbf{2}}$

2　3点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心の位置ベクトルは

$$\frac{\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}}{\mathbf{3}}$$

練習 2.13　4点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$，$\mathrm{D}(\vec{d})$ を頂点とする四面体ABCDにおいて，$\triangle\mathrm{BCD}$ の重心を $\mathrm{G}(\vec{g})$，線分AGを $3:1$ に内分する点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とする．$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

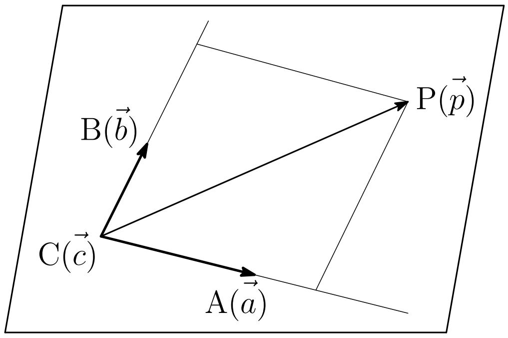


B》平面 ABC 上の点の位置ベクトル

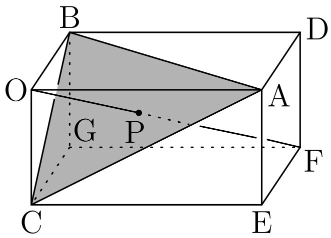
3点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ で定まる平面 ABC 上に，点 P があるとき，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB} \\ &= s(\vec{a}-\vec{c}) + t(\vec{b}-\vec{c})\end{aligned}$$

となる実数 s，t が，ただ1組定まる．



応用例題 2.3　右の図のような直方体において，対角線 OF と平面 ABC の交点を P とする．
OP : OF を求めよ．



考え方》　O に関する位置ベクトルを考え，$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ とする．P が平面 ABC 上にあること，線分 OF 上にあることから，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて2通りに表す．

解答　O に関する位置ベクトルを考え，$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ とする．

P は平面 ABC 上にあるから，$\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \vec{c} + s(\vec{a}-\vec{c}) + t(\vec{b}-\vec{c}) \\ &= s\vec{a} + t\vec{b} + (1-s-t)\vec{c}\end{aligned}$$

また，P は線分 OF 上にあるから，$OP : OF = k : 1$ とおくと

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OF} = k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}$$

4点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，$\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いた表し方はただ1通りである．

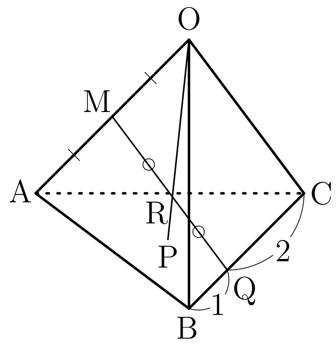
よって　　$s = k,\ t = k,\ 1-s-t = k$

これを解くと，$k = \dfrac{1}{3}$ であるから　　$OP : OF = 1 : 3$

補足　$1-s-t = u$ とおくと，$\overrightarrow{OP}$ は次の形に表される．

$$\overrightarrow{OP} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}\quad (s+t+u=1)$$

練習 2.14 四面体OABCにおいて，辺OAの中点をM，辺BCを1 : 2に内分する点をQ，線分MQの中点をRとし，直線ORと平面ABCの交点をPとする．OR : OPを求めよ．



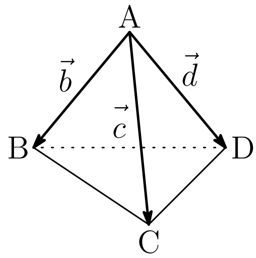
C 》 内積の利用

空間のベクトルについても，22 ページで示した内積の性質は，すべて成り立つ．内積を利用して，空間図形の性質を証明してみよう．

応用例題 2.4 正四面体 ABCD において，AB⊥CD が成り立つ．
このことを，ベクトルを用いて証明せよ．

考え方 》 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ を示す．正四面体の各面が正三角形であることも利用する．

証明 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とすると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}&=\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})\\&=\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

正四面体 ABCD においては，$\vec{b}$ と $\vec{d}$，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角は，ともに 60° であるから

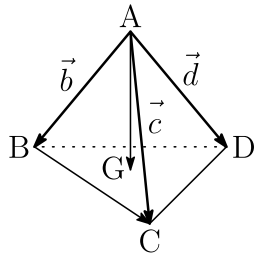
$$\vec{b}\cdot\vec{d}=|\vec{b}||\vec{d}|\cos 60^\circ,$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ$$

$|\vec{d}|=|\vec{c}|$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}$

よって，① により $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ となる．

したがって　AB⊥CD　**証終**

練習 2.15 正四面体 ABCD において，△BCD の重心を G とすると，AG⊥BC である．このことを，ベクトルを用いて証明せよ．



2.1.6 座標空間における図形

座標空間において，2 点間の距離，線分の内分点・外分点の座標，座標平面に平行な平面や球について調べてみよう．

A 》2 点間の距離と内分点・外分点の座標

2 点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，A，B 間の距離を表す式は，
$\mathrm{AB} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ であることから得られる．
また，線分 AB を $m:n$ に内分する点を C，外分する点を D とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{-n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m-n}$$

← O は原点

である．以上から，次のことがいえる．

2 点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

1 A，B 間の距離は

$$\mathbf{AB} = \sqrt{(\boldsymbol{b_1 - a_1})^2 + (\boldsymbol{b_2 - a_2})^2 + (\boldsymbol{b_3 - a_3})^2}$$

2 線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{na_1 + mb_1}{m+n}},\ \boldsymbol{\frac{na_2 + mb_2}{m+n}},\ \boldsymbol{\frac{na_3 + mb_3}{m+n}}\right)$$

線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{-na_1 + mb_1}{m-n}},\ \boldsymbol{\frac{-na_2 + mb_2}{m-n}},\ \boldsymbol{\frac{-na_3 + mb_3}{m-n}}\right)$$

練習 2.16 2 点 A$(1,\ 3, -2)$，B$(4, -3,\ 1)$ について，次のものを求めよ．

(1)　2 点 A，B 間の距離　　(2)　線分 AB の中点の座標

(3)　線分 AB を $2:1$ に内分する点の座標

(4)　線分 AB を $2:1$ に外分する点の座標

練習 2.17 3 点 A$(2, -1,\ 4)$，B$(1,\ 3,\ 0)$，C$(3,\ 1,\ 2)$ を頂点とする △ABC の重心の座標を，原点 O に関する位置ベクトルを利用して求めよ．

B 》座標平面に平行な平面の方程式

座標平面に平行な平面について考えてみよう．

点 C$(0,\ 0,\ c)$ を通り，xy 平面に平行な平面を α とする．

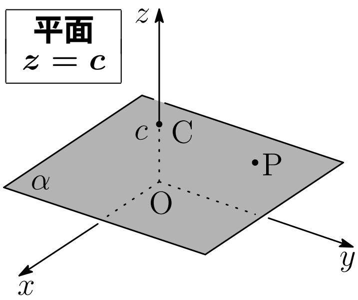
平面 α 上にある点 P の z 座標は常に c である．

すなわち，平面 α は方程式

$$z = c \qquad \cdots ①$$

を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体である．

① を**平面 $\boldsymbol{\alpha}$ の方程式**という．



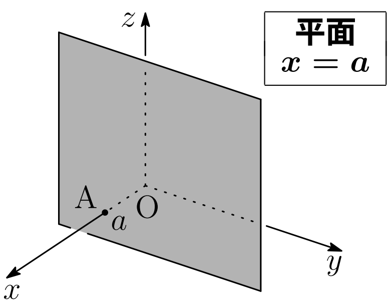
一般に，次のことがいえる．

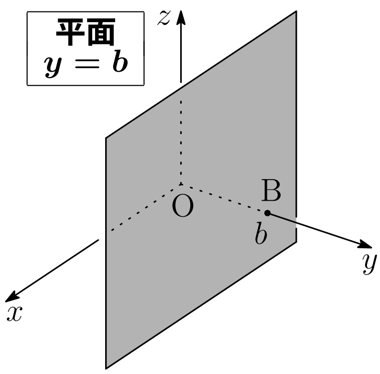
座標平面に平行な平面の方程式

点 A$(a,\ 0,\ 0)$ を通り，yz 平面に平行な平面の方程式は　$\boldsymbol{x = a}$

点 B$(0,\ b,\ 0)$ を通り，zx 平面に平行な平面の方程式は　$\boldsymbol{y = b}$

点 C$(0,\ 0,\ c)$ を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は　$\boldsymbol{z = c}$





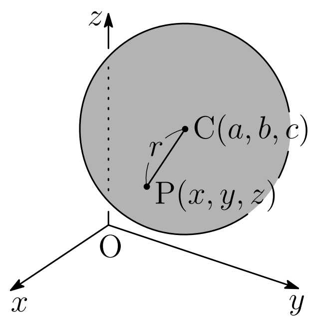
注意　平面 $x = a$ は x 軸に垂直，平面 $y = b$ は y 軸に垂直，平面 $z = c$ は z 軸に垂直である．

練習 2.18　点 $(1,\ 2,\ 3)$ を通り，次のような平面の方程式を求めよ．

(1)　xy 平面に平行　　(2)　yz 平面に平行　　(3)　y 軸に垂直

C ≫ 球面の方程式

空間において，定点 C からの距離が一定値 r であるような点の全体を，C を中心とする半径 r の**球面**，または単に球という．



点 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$ を中心とする半径 r の球面上に点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ をとると，点 P は $\mathrm{CP}=r$ を満たすので，

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

すなわち　$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

が成り立つ．これを，この**球面の方程式**という．

球面の方程式

点 $(a,\ b,\ c)$ を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2}$$

とくに，原点を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=r^2}$$

例 2.6　点 $(2, -3,\ 4)$ を中心とする半径 5 の球面の方程式は

$$(x-2)^2+\{y-(-3)\}^2+(z-4)^2=5^2$$

すなわち　$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=25$

練習 2.19 次のような球面の方程式を求めよ．

(1) 原点を中心とする半径 3 の球面

(2) 点 $(1,\ 2, -3)$ を中心とする半径 4 の球面

(3) 点 $\mathrm{A}(0,\ 4,\ 1)$ を中心とし，点 $\mathrm{B}(2,\ 4,\ 5)$ を通る球面

例題 2.3 2 点 $\mathrm{A}(2,\ 0, -3)$，$\mathrm{B}(-2,\ 6,\ 1)$ を直径の両端とする球面の方程式を求めよ.

解答 線分 AB の中点を C とすると，この球面の中心は点 C で，半径は線分 CA の長さである．C の座標は

$$\left(\frac{2-2}{2},\ \frac{0+6}{2},\ \frac{-3+1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (0,\ 3, -1)$$

よって　$\mathrm{CA} = \sqrt{(2-0)^2 + (0-3)^2 + \{-3-(-1)\}^2} = \sqrt{17}$

したがって，求める球面の方程式は

$$(x-0)^2 + (y-3)^2 + \{z-(-1)\}^2 = (\sqrt{17})^2$$

すなわち　$x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17$

練習 2.20 2 点 $\mathrm{A}(4, -2,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 4, -5)$ を直径の両端とする球面の方程式を求めよ.

応用例題 2.5 球面 $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5^2$ と xy 平面が交わる部分は円である．その円の中心の座標と半径を求めよ．

考え方》 xy 平面は方程式 $z=0$ で表される．球面の方程式で，$z=0$ とすると，x，y の 2 次方程式が得られる．

解答 球面の方程式で，$z=0$ とすると

$$(x-4)^2+(y+2)^2+(0-3)^2=5^2$$

すなわち　$(x-4)^2+(y+2)^2=4^2$　　$\longleftarrow 5^2-3^2=16=4^2$

この方程式は，xy 平面上では円を表す．　$\longleftarrow$ xy 平面上では，z 座標 $=0$

その中心の座標は $(4,-2,\ 0)$，半径は 4 である．

補足 応用例題 2.5 の円は，次のような 2 つの方程式で表わされる．

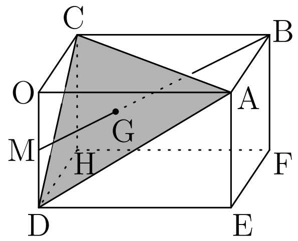
$$(x-4)^2+(y+2)^2=4^2,\ z=0$$

練習 2.21 応用例題 2.5 の球面と yz 平面が交わる部分は円である．その中心の座標と半径を求めよ．

2.1.7　補充問題

1 $\vec{p}=(-1,\ 5,\ 0)$ を，3 つのベクトル $\vec{a}=(1,-2,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ 1,\ 0)$，$\vec{c}=(2,-3,\ 1)$ と適当な実数 s，t，u を用いて，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ．

2 右の図のように，直方体 OABC-DEFH において，△ACD の重心を G，辺 OD の中点を M とするとき，点 G は線分 BM 上にあり，BM を 2 : 1 に内分することを証明せよ．

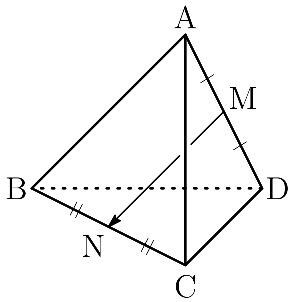


3 3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 2, 1)，B(−1, 0, 1) から等距離にある yz 平面上の点 P の座標を求めよ．

2.2 章末問題

2.2.1 章末問題 A

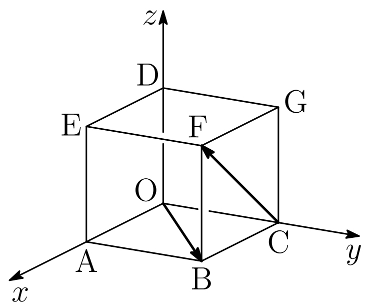
1 四面体 ABCD の辺 AD の中点を M，辺 BC の中点を N とするとき，
$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ を満たす実数 s，t の値を求めよ．



2 4 点 A(1, 2, 1)，B(5, 5, −1)，C(x, y, z)，D(−4, 2, 3) が平行四辺形 ABCD の頂点となるように，x，y，z の値を求めよ．

3 $\vec{a} = (1,\ 3, -2)$，$\vec{b} = (1, -2,\ 0)$ と実数 t に対して，$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$ とする．$\vec{b} \perp \vec{p}$ となるような t の値を求めよ．また，このときの $|\vec{p}|$ を求めよ．

4 右の図の立方体 OABC-DEFG は，1 辺の長さが 2 である．



(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ を成分表示せよ．

(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ を求めよ．

(3)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ のなす角を求めよ．

5 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ を，それぞれ x 軸，y 軸，z 軸に関する基本ベクトルとし，ベクトル $\vec{a}=(-1,\ \sqrt{2},\ 1)$ と $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ のなす角をそれぞれ α，β，γ とする．

(1) $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ の値を求めよ．

(2) α，β，γ を求めよ．

6 2 点 A(1, 2, 2)，B(2, 3, 4) に対して，次のような点の座標を求めよ．

(1) A，B から等距離にある x 軸上の点 P

(2) △ABP の重心 G

7 球面 $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=5^2$ と平面 $z=3$ が交わる部分は円である．その円の中心の座標と半径を求めよ．

2.2.2　章末問題 B

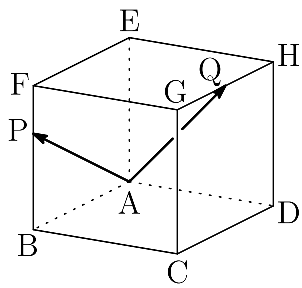
8 3 点 A$(a, -1,\ 5)$，B$(4,\ b, -7)$，C$(5,\ 5, -13)$ が一直線上あるとき，a，b の値を求めよ．

9 3 点 O(0, 0, 0)，A(−1, −2, 1)，B(2, 2, 0) を頂点とする △OAB について，次の問いに答えよ.

(1) ∠AOB の大きさを求めよ.

(2) △OAB の面積 S を求めよ.

10 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH において，辺 BF 上に点 P をとり，辺 GH 上に点 Q をとる.



(1) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HQ}}$ を求めよ.

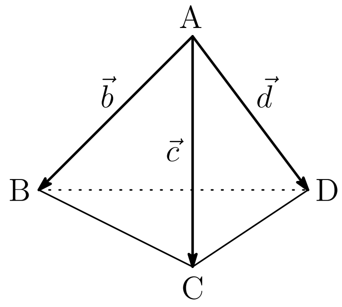
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}|$ を用いて表せ.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ の最大値を求めよ.

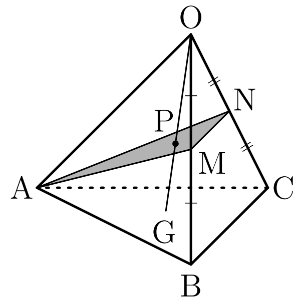
11 四面体 ABCD において，次のことが成り立つ．

$$\mathrm{AC}\perp\mathrm{BD}\quad \text{ならば}\quad \mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2$$

このことを，ベクトルを用いて証明せよ．



12 四面体 OABC において，△ABC の重心を G，辺 OB の中点を M，辺 OC の中点を N とする．直線 OG と平面 AMN の交点を P とするとき，OG : OP を求めよ．



ヒント

8　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす実数 k があることを利用する．

9　ベクトルの内積を利用する．　**10**　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} + \overrightarrow{\mathrm{HQ}}$ など．

11　線分の長さの 2 乗をベクトルの内積で表す．　**12**　応用例題 2.3 参照．

第 3 章　数列

3.1　等差数列と等比数列

3.1.1　数列と一般項

正の奇数を小さい順に並べると，1，3，5，7，$\cdots$ のような数の列ができる．ここでは，数を一列に並べたものを一般的に考えてみよう．

A》数列の表記

自然数 1，2，3，4，$\cdots$ を，右の図のように正方形状に並べていく．このとき，上端に並ぶ数を左から順に取り出すと，

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots \qquad ①$$

1	4	9	16		
2	3	8	15		
5	6	7	14	23	
10	11	12	13	22	
17	18	19	20	21	

のような数の列ができる．

一般に，数を一列に並べたものを**数列**[1]といい，数列における各数を**項**という．

数列の項は，最初の項から順に第 1 項，第 2 項，第 3 項，$\cdots$ といい，n 番目の項を**第 n 項**という．とくに，第 1 項を**初項**という．

数列 ① の初項は 1 で，第 3 項は 9 である．

練習 3.1 上の数列 1，4，9，16，$\cdots$ の第 2 項と第 4 項をいえ．また，第 5 項を求めよ．

数列を一般的に表すには，次のように書く．

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

この数列を $\{a_n\}$ と略記することもある．

a_1 が初項，
$a_●$ が第●項

[1] 項の個数が有限である数列を**有限数列**，無限である数列を**無限数列**ということがある．

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n が n の式で表されるとき，n に 1，2，3，$\cdots$ を順に代入すると，数列 $\{a_n\}$ の初項，第 2 項，第 3 項，$\cdots$ が得られる．このような a_n を数列 $\{a_n\}$ の**一般項**という．

前ページの数列 ① は，一般項が n^2 の数列である．

注意　たとえば，一般項が n^2 の数列を，数列 $\{n^2\}$ と略記することもある．

例 3.1　一般項が $a_n = 3n - 2$ である数列 $\{a_n\}$ の第 4 項までを求める．

$$a_1 = 3\cdot 1 - 2 = 1$$
$$a_2 = 3\cdot 2 - 2 = 4$$
$$a_3 = 3\cdot 3 - 2 = 7$$
$$a_4 = 3\cdot 4 - 2 = 10$$

$$a_{\bullet} = 3 \times \bullet - 2$$
この数を代入

練習 3.2　一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 4 項までを求めよ．

(1)　$a_n = 2n - 1$　　(2)　$a_n = n(n+1)$　　(3)　$a_n = 2^n$

B 》数列の一般項を n の式で表す

例 3.2　(1)　-1 と 1 が交互に並ぶ数列 -1，1，-1，1，$\cdots$ の一般項を a_n として n の式で表すと　　$a_n = (-1)^n$

(2)　分母が分子より 1 大きい分数の数列 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{4}{5}$，$\cdots$ の一般項を a_n として n の式で表すと　　$a_n = \dfrac{n}{n+1}$

練習 3.3　次のような数列の一般項 a_n を，n の式で表せ．

(1)　偶数 2，4，6，8，$\cdots$ の数列で符号を交互に変えた数列

$$-2,\ 4,\ -6,\ 8,\ \cdots$$

(2)　分子には奇数，分母には 2 の累乗が順に現れる分数の数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{16},\ \cdots$$

3.1.2 等差数列

偶数の数列 2，4，6，8，$\cdots$ や奇数の数列 1，3，5，7，$\cdots$ では，各項が 2 ずつ増えていく．これらの数列では，隣り合う 2 項の差が常に 2 で，一定になっている．ここでは，このような性質をもつ数列について考えてみよう．

A ≫ 等差数列

たとえば，1 から順に奇数が並ぶ

数列　　1，3，5，7，$\cdots$

は，1 に次々と 2 を足すと得られる．

また，4 に次々と -2 をたすと，

$$4,\ 2,\ 0,\ -2,\ \cdots$$

のような数列が得られる．

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad \cdots$$
$$+2\quad +2\quad +2$$

$$4,\quad 2,\quad 0,\quad -2,\quad \cdots$$
$$-2\quad -2\quad -2$$

一般に，初項に一定の数 d を次々と足して得られる数列を**等差数列**といい，その一定の数 d を**公差**という．

例 3.3　(1)　**初項 2，公差 3 の等差数列**

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \cdots$$

(2)　**等差数列 a，13，11，9，$\cdots$ の初項 a と公差 d**

$13+d=11$ より　　$d=11-13=-2$

また，$a+(-2)=13$ より

$$a=13+2=15$$

練習 3.4 次のような等差数列の初項から第 5 項までを書け．

(1) 初項 1，公差 5

(2) 初項 20，公差 -4

練習 3.5 次の等差数列の公差を求めよ．また，$\boxed{\quad}$ に適する数を求めよ．

(1)　1, 5, 9, $\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$, $\cdots$　　(2)　9, $\boxed{\quad}$, 3, 0, $\boxed{\quad}$, $\cdots$

B》等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ では，a に d を次々と足すから

$$a_2 = a + d, \quad a_3 = a + 2d,$$
$$a_4 = a + 3d, \quad a_5 = a + 4d,$$
$$\cdots\cdots$$

$$a_{\bullet} = a + (\bullet - 1) \times d$$

1だけ小さい

となる．また，$a_1 = a$ である．

以上から，次のことがいえる．

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$$

← 等差数列の一般項は n の1次式

例 3.4 初項2，公差3の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 2 + (n-1) \times 3 \qquad \text{すなわち} \qquad a_n = 3n - 1$$

練習 3.6 次のような等差数列の一般項を求めよ．また，第10項を求めよ．

(1) 初項5，公差4

(2) 初項10，公差 -5

例題 3.1 第 3 項が 10，第 6 項が 1 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ．また，この数列の一般項を求めよ．

解答 求める初項を a，公差を d とすると $a_n = a + (n-1)d$

第 3 項が 10 であるから $a + 2d = 10$ $\cdots$ ①

第 6 項が 1 であるから $a + 5d = 1$ $\cdots$ ②

①，② を解くと $a = 16$，$d = -3$

よって，一般項は $a_n = 16 + (n-1) \times (-3)$

すなわち $a_n = -3n + 19$

(答) 初項 16，公差 -3，一般項 $a_n = -3n + 19$

練習 3.7 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ．また，この数列の一般項を求めよ．

(1) 第 4 項が 15，第 8 項が 27

(2) 第 5 項が 20，第 10 項が 0

例題 3.2 初項5，公差3の等差数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 95は第何項か．

(2) 初めて400を越えるのは第何項か．

解答　$a_n = 5 + (n-1) \times 3$　すなわち　$a_n = 3n + 2$

(1) $3n + 2 = 95$ を解くと　$n = 31$　(答) 第31項

(2) $3n + 2 > 400$ より　$n > \dfrac{398}{3}$　$\leftarrow$ $\frac{398}{3}=132.6\cdots$

これを満たす最小の自然数 n は　$n = 133$　(答) 第133項

練習 3.8 初項3，公差4の等差数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 75は第何項か．　(2) 初めて300を越えるのは第何項か．

C》第1項と第3項から等差数列を定める

例題 3.3 次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ．

$$1,\ x,\ 8,\ \cdots$$

解答 隣り合う2項の差が等しいから　$x - 1 = 8 - x$

よって，$2x = 1 + 8$ より　$x = \dfrac{9}{2}$

補足 一般に次のことが成り立つ．b を**等差中項**という．

数列 $a,\ b,\ c$ が等差数列　$\iff$　$2b = a + c$

練習 3.9 次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ．

(1) $3,\ x,\ 7,\ \cdots$　(2) $\dfrac{1}{12},\ \dfrac{1}{x},\ \dfrac{1}{6},\ \cdots$

3.1.3 等差数列の和

初項 1，公差 4 の等差数列の初項から第 8 項までの和 S を求めるのに，次のように工夫して，$S=30\times 8\div 2$ から求める方法がある．

$$\begin{array}{rrl} & S = 1+5+9+13+17+21+25+29 & \\ +) & S = 29+25+21+17+13+9+5+1 & \longleftarrow \text{足す項の順を逆にしている．} \\ \hline & 2S = 30+30+30+30+30+30+30+30 & \end{array}$$

ここでは，この方法により，一般の等差数列の和の公式を求めよう．

A 》等差数列の和の公式

初項 a，公差 d の等差数列において，第 n 項が l のとき，初項から第 n 項までの和を S_n で表すと，

$$S_n = a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-d)+l \qquad \cdots ①$$

であり，足す項の順を逆にすると，S_n は次のようにも表される．

$$S_n = l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+d)+a \qquad \cdots ②$$

① と ② の各辺を足すことにより　$2S_n = n(a+l)$
また，l は第 n 項であるから，$l=a+(n-1)d$ と表される．
以上から，次の公式が得られる．

等差数列の和

等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

1　初項 a，第 n 項 l のとき　$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}n(a+l)}$

2　初項 a，公差 d のとき　$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}}$

項の個数が有限である数列では，その項の個数を**項数**といい，最後の項を**末項**という．上の公式 **1** は，初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和を表している．

例 3.5　(1)　初項 3，末項 19，項数 15 の等差数列の和は　$\frac{1}{2}\cdot 15(3+19)=165$

$\frac{1}{2}\times$ 項数 $\times$ (初項 + 末項)

(2)　初項 1，公差 3 の等差数列の初項から第 10 項までの和は

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\{2\cdot 1+(10-1)\cdot 3\}=145$$

練習 3.10 次のような等差数列の和を求めよ.

(1) 初項 2, 末項 10, 項数 10

(2) 初項 8, 末項 -6, 項数 15

練習 3.11 次のような等差数列の和を求めよ.

(1) 初項 1, 公差 2 の等差数列の初項から第 20 項までの和

(2) 初項 10, 公差 -4 の等差数列の初項から第 15 項までの和

例題 3.4 次の等差数列の和 S を求めよ．

$$12,\ 15,\ 18,\ \cdots,\ 99$$

解答 この等差数列の初項は 12，公差は 3 である．

項数を n とすると　$12+3(n-1)=99$　$\longleftarrow$ 99 が第 n 項

これを解くと　$n=30$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 30(12+99)=1665$

練習 3.12 次の等差数列の和を求めよ．

(1) $2,\ 6,\ 10,\ \cdots,\ 74$

(2) $102,\ 96,\ 90,\ \cdots,\ 6$

B》自然数の和，奇数の和

自然数の和，奇数の和は，等差数列の和であり，次のようになる．

自然数の和，奇数の和

1　$\boldsymbol{1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)}$　$\longleftarrow$ 初項 1，末項 n，項数 n

2　$\boldsymbol{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2}$　$\longleftarrow$ 初項 1，末項 $2n-1$，項数 n

例 3.6 (1) $1+2+3+\cdots+10=\dfrac{1}{2}\cdot 10(10+1)=55$

(2) $1+3+5+\cdots+19=1+3+5+\cdots+(2\cdot 10-1)$

$=10^2=100$

練習 3.13 次の和を求めよ.

(1) $1+2+3+\cdots+20$

(2) $1+2+3+\cdots+100$

(3) $1+3+5+\cdots+29$

(4) $1+3+5+\cdots+55$

練習 3.14 次の偶数の和を求めよ.

(1) $2+4+6+\cdots+40$

(2) $2+4+6+\cdots+100$

C》等差数列の和の応用

応用例題 3.1 等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．$S_{10}=10$，$S_{20}=40$ のとき，S_n を求めよ．

考え方》 初項を a，公差を d として，まず a，d を求める．

解答 初項を a，公差を d とする．

$S_{10}=10$ より　$\frac{1}{2}\cdot 10\{2a+(10-1)d\}=10$

整理して　$2a+9d=2$　$\cdots$①

$S_{20}=40$ より　$\frac{1}{2}\cdot 20\{2a+(20-1)d\}=40$

整理して　$2a+19d=4$　$\cdots$②

①，② を解くと　$a=\frac{1}{10}$，$d=\frac{1}{5}$

よって　$$S_n=\frac{1}{2}n\left\{2\cdot\frac{1}{10}+(n-1)\cdot\frac{1}{5}\right\}=\frac{n^2}{10}$$

練習 3.15 等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．$a_3=4$，$S_4=20$ のとき，S_n を求めよ．

3.1.4 等比数列

たとえば，3 に次々と 2 を掛けると，
次のような数列が得られる．

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \cdots$$

この数列では，隣り合う 2 項の比が，
常に一定になっている．

$$3, \xrightarrow{\times 2} 6, \xrightarrow{\times 2} 12, \xrightarrow{\times 2} 24, \quad \cdots$$

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \cdots$$

ここでは，このような性質をもつ数列について考えてみよう．

A 》等比数列

初項に一定の数 r を次々と掛けて得られる数列を**等比数列**といい，その一定の数 r を**公比**という[2]．

例 3.7 (1) **初項 2，公比 -3 の等比数列**

$$2,\ -6,\ 18, -54,\ \cdots$$

(2) **等比数列 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{\frac{1}{4}}$，$\boldsymbol{\frac{1}{8}}$，$\boldsymbol{\frac{1}{16}}$，$\boldsymbol{\cdots}$ の初項 $\boldsymbol{a}$ と公比 $\boldsymbol{r}$**

$\frac{1}{4}r = \frac{1}{8}$ から　　$r = \frac{1}{2}$

また，$a \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ より　$a = \frac{1}{2}$

練習 3.16 次のような等比数列の初項から第 5 項までを書け．

(1) 初項 1，公比 3

(2) 初項 3，公比 -2

(3) 初項 1，公比 $\frac{1}{3}$

(4) 初項 $-\frac{1}{2}$，公比 $-\frac{1}{2}$

[2] 一般に，等比数列の初項と公比は 0 であってもよいが，本書で扱う等比数列は，初項も公比も 0 でないものである．

練習 3.17 次の等比数列の公比を求めよ．また，$\boxed{\quad}$ に適する数を求めよ．

(1) $1,\ 2,\ 4,\ \boxed{\quad},\ \cdots$

(2) $1, -2,\ 4,\ \boxed{\quad},\ \cdots$

(3) $\boxed{\quad},\ 8,\ 4,\ \boxed{\quad},\ \cdots$

(4) $\boxed{\quad},\ 3, -1,\ \boxed{\quad},\ \cdots$

B 》 等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ では，a に r を次々と掛けるから

$$a_2 = ar, \qquad a_3 = ar^2,$$
$$a_4 = ar^3, \qquad a_5 = ar^4,$$
$$\cdots\cdots$$

$$a_{\bullet} = ar^{\bullet-1}$$

1 だけ小さい

となる．また，$r^0 = 1$ である．

以上から，次のことがいえる．

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$$

例 3.8 (1) 初項 3，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

(2) 初項 -2，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(3) 初項 3，公比 3 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} \qquad \text{すなわち} \qquad a_n = 3^n$$

練習 3.18 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．また，第 5 項を求めよ．

(1) 初項 2，公比 3

(2) 初項 1，公比 -3

(3) 初項 2，公比 2

(4) 初項 -3，公比 $\dfrac{1}{2}$

練習 3.19 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $1, -2,\ 4, -8, \cdots$

(2) $\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{8},\ \dfrac{3}{16},\ \cdots$

(3) $-5,\ 5, -5,\ 5, \cdots$

(4) $\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ \cdots$

例題 3.5 第 4 項が 24，第 6 項が 96 である等比数列の初項と公比を求めよ．

解答 求める初項を a，公比を r とする．

第 4 項が 24 であるから　　$ar^3 = 24$　　$\cdots$ ①

第 6 項が 96 であるから　　$ar^5 = 96$　　$\cdots$ ②

①，② より　　$r^2 = 4$

これを解くと　　$r = \pm 2$

① から，$r = 2$ のとき $a = 3$，$r = -2$ のとき $a = -3$

(答) 初項 3，公比 2　または　初項 -3，公比 -2

練習 3.20 次のような等比数列の初項と公比を求めよ．

(1) 第 2 項が 6，第 4 項が 54

(2) 第 5 項が -9，第 7 項が -27

C》第1項と第3項から等比数列を定める

例題 3.6 次の数列が等比数列であるとき，x の値を求めよ．

$$2,\ x,\ 5,\ \cdots$$

解答 隣り合う2項の比が等しいから $\dfrac{x}{2}=\dfrac{5}{x}$

よって $x^2=2\times 5=10$

したがって $x=\pm\sqrt{10}$

補足 一般に，a，b，c が0でないとき，次のことが成り立つ．b を**等比中項**という．

$$\text{数列 } a,\ b,\ c \text{ が等比数列} \iff b^2=ac$$

練習 3.21 次の数列が等比数列であるとき，x の値を求めよ．

(1) $2,\ x,\ 32,\ \cdots$

(2) $3,\ x,\ 9,\ \cdots$

3.1.5 等比数列の和

初項 1，公比 2 の等比数列の初項から第 8 項までの和 S を求めるのに，次のように工夫して，$S-2S=1-2^8$ から求める方法がある．

$$\begin{aligned} S &= 1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7 \\ 2S &= \quad\ 2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8 \end{aligned}$$

$\longleftarrow$ 和を 2 倍して，項を 1 つずつずらして引く．

ここでは，この方法により，一般の等比数列の和の公式を求めよう．

A 》等比数列の和の公式

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，S_n は次のようにして求められる．

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \qquad \cdots ①$$

$r \neq 1$ のとき

$$rS_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \qquad \cdots ②$$

とすると，① − ② から　$S_n - rS_n = a - ar^n$

すなわち　$(1-r)S_n = a(1-r^n)$

$1-r \neq 0$ であるから　$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$r=1$ のとき　① より S_n は n 個の a の和になるから　$S_n = na$

以上から，次の公式が得られる．

等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$r \neq 1$ のとき　$\boldsymbol{S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}}$　または　$\boldsymbol{S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}}$

$r = 1$ のとき　$\boldsymbol{S_n = na}$

補足 $r \neq 1$ のとき　$\dfrac{1-r^n}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}$

例題 3.7 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(1)　初項3，公比2　　(2)　初項1，公比 $\dfrac{1}{2}$

解答 (1)　$S_n = \dfrac{3(2^n - 1)}{2 - 1} = 3(2^n - 1)$　$\leftarrow$ $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

(2)　$S_n = \dfrac{1\left\{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{2\left\{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}{2\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)}$　$\leftarrow$ $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

$= 2\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$

練習 3.22 次の等比数列の初項から第 n までの和 S_n を求めよ．

(1) $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots$

(2) $2,\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3^2},\ \dfrac{2}{3^3},\ \cdots$

応用例題 3.2 初項から第 3 項までの和が 3，第 2 項から第 4 項までの和が -6 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ．

考え方》 $ar + ar^2 + ar^3 = r(a + ar + ar^2)$ に着目する．

解答 条件から　$a + ar + ar^2 = 3$　$\cdots$①

$ar + ar^2 + ar^3 = -6$　$\cdots$②

②より　$r(a + ar + ar^2) = -6$

① を代入して　$3r = -6$

よって　$r = -2$

これを ① に代入すると　$a - 2a + 4a = 3$

これを解いて　$a = 1$　(答) $a = 1,\ r = -2$

練習 3.23 初項から第 3 項までの和が 7，第 3 項から第 5 項までの和が 28 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ．

研究

複利計算

銀行などがお金を預かったり貸したりするときの，利息計算について考えてみよう．
たとえば，年利率 2% で a 円を 1 年間預金すると，1 年後には $(a \times 0.02)$ 円の利息がつく．したがって，元金 a 円と利息を合わせた元利合計 S_1 円は，次の式で表される．

$$S_1 = a + a \times 0.02 = a(1 + 0.02) = a \times 1.02$$

S_1 円を元金にしてもう 1 年間預けると，元利合計 S_2 円は

$$S_2 = (a \times 1.02) \times 1.02 = a \times 1.02^2$$

となる．
このように，一定期間の終りごとに，その元利合計を次の期間の元金とする利息の計算は，**複利計算**と呼ばれる．
年利率 2%，1 年ごとの複利で，毎年初めに a 円ずつ積み立てるとき，10 年間の元利合計 S 円を求めてみよう．
a 円を n 年間預けると，元利合計は $a \times 1.02^n$ 円になる．
したがって，10 年間に積み立てたお金の元利合計 S 円は，次のようになる．

$$S = a(1.02 + 1.02^2 + 1.02^3 + \cdots + 1.02^{10})$$

(　) 内は，初項 1.02，公比 1.02 の等比数列の和であるから

$$S = a \times \frac{1.02(1.02^{10} - 1)}{1.02 - 1}$$

$1.02^{10} \fallingdotseq 1.219$ であるから $S \fallingdotseq 11.169a$ となる．$a = 100000$ のとき，10 年間の元利合計は，およそ 111 万 6900 円である．

3.1.6 補充問題

1 一般項が $a_n = 3n - 2$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) a_n を $a_n = a + (n-1)d$ の形に表すとき，a，d の値を求めよ．

(2) 200 はこの数列の項に含まれるか．

2 初項が 50，公差が -3 である等差数列 $\{a_n\}$ がある．

(1) 第何項が初めて負の数になるか．

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか．また，その和を求めよ．

3 第 2 項が 3，第 5 項が 24 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．ただし，公比は実数とする．

4 第 2 項が 3，初項から第 3 項までの和が 13 である等比数列の初項と公比を求めよ．

3.2　いろいろな数列

3.2.1　いろいろな数列の和

数列には，これまでに学んだ等差数列，等比数列のほかにも，いろいろなものがある．ここでは，いろいろな数列の和を求める方法を調べよう．

A 》自然数の 2 乗の和

次のような 1 から n までの自然数の 2 乗の和を求めてみよう．

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

そのためには，次の恒等式を利用する．

$$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$$

$$\begin{array}{ll}
\boxed{k=1} & 1^3 - 0^3 = 3{\cdot}1^2 - 3{\cdot}1 + 1 \\
\boxed{k=2} & 2^3 - 1^3 = 3{\cdot}2^2 - 3{\cdot}2 + 1 \\
\boxed{k=3} & 3^3 - 2^3 = 3{\cdot}3^2 - 3{\cdot}3 + 1 \\
\cdots\cdots & \qquad\cdots\cdots \\
\boxed{k=n} & n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1
\end{array}$$

左辺だけ加えると

$$\begin{array}{rl}
 & \cancel{1^3} - 0^3 \\
 & \cancel{2^3} - \cancel{1^3} \\
 & \cancel{3^3} - \cancel{2^3} \\
 & \cdots\cdots \\
+) & n^3 - \cancel{(n-1)^3} \\
\hline
 & n^3 - 0^3
\end{array}$$

これら n 個の等式を辺々加えると

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

すなわち　$n^3 = 3S - 3 \times \dfrac{1}{2}n(n+1) + n$

よって

$$\begin{aligned} 6S &= 2n^3 + 3n(n+1) - 2n \\ &= n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

したがって，1 から n までの自然数の 2 乗の和は，次のようになる．

$$\boldsymbol{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

例 3.9

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \mathbf{10}^2 &= \frac{1}{6} \times \mathbf{10} \times (\mathbf{10} + 1) \times (2{\cdot}\mathbf{10} + 1) \\ &= \frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 21 = 385 \end{aligned}$$

練習 3.24 次の和を求めよ.

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+30^2$

B》和の記号 $\sum$

数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 n 項までの和を，第 k 項 a_k と和の記号 $\sum$ を用いて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ と書く[3].

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

注意 $\displaystyle\sum_{k=\bigcirc}^{\square} a_k$ と書けば，数列 $\{a_n\}$ の第○項から第□項までの和を表す．また，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ のように，k の代わりに別の文字を使ってもよい.

例 3.10 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n$　　$\longleftarrow a_k=k$ の場合

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{10} k^2 = 2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2$　　$\longleftarrow a_k=k^2$ で，第 2 項から第 10 項までの和

例 3.11 次の式は，いずれも和 $2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$ を表す.

$$\sum_{k=2}^{6} k^2,\qquad \sum_{i=2}^{6} i^2,\qquad \sum_{k=1}^{5}(k+1)^2$$

[3] 和を意味する英語 Sum の S に対応するギリシャ文字が $\sum$ で,「シグマ」と読む.

練習 3.25 次の (1)〜(3) の式は例 3.10 のような和の形で書け．(4)，(5) の式は和の記号 $\sum$ を用いて書け．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}2^{k-1}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

(4) $2+3+4+5+6$

(5) $3^2+5^2+7^2+9^2+11^2+13^2$

自然数の和と自然数の 2 乗の和は，次のように表される．

自然数に関する和の公式

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1), \qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

練習 3.26 次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{50}k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}k^2$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}k^2$

C》和の記号 $\sum$ の性質

項がすべて c である数列 $\{a_n\}$ では，$a_k=c$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = c+c+c+\cdots+c = nc$$

← c が n 個

となる．したがって，次のことが成り立つ．

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} c = nc} \qquad \text{とくに} \qquad \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} 1 = n}$$

また，2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ と定数 p に対して

$$\begin{aligned}&(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)\\ &\qquad =(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)\end{aligned}$$

$$pa_1+pa_2+pa_3+\cdots+pa_n = p(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)$$

となるので，$\sum$ について次の性質が成り立つ．

$\sum$ の性質

1 $\displaystyle \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k}$

2 $\displaystyle \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k}$ ただし，p は k に無関係な定数

注意 $\displaystyle \sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$ も成り立つ．

$\sum$ の性質や自然数の和の公式を利用して，数列の和を求めてみよう．

例 3.12

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(4k+3) &= 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 3\\ &= 4\times\frac{1}{2}n(n+1)+3n\\ &= 2n(n+1)+3n\\ &= n(2n+5)\end{aligned}$$

← $n\{2(n+1)+3\}=n(2n+5)$

練習 3.27 次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-5)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2k$

例題 3.8 次の和を求めよ．

$$1{\cdot}3+2{\cdot}4+3{\cdot}5+\cdots+n(n+2)$$

解答 これは，第 k 項が $k(k+2)$ である数列の，初項から第 n 項までの和である．
よって，求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k+2) &= \sum_{k=1}^{n}(k^2+2k) = \sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\times\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+6\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)\end{aligned}$$

練習 3.28 次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2-7k+4)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-2)$

練習 3.29 次の和を求めよ．

(1) $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2$

(2) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$

D》和の求め方の工夫

応用例題 3.3 次の和 S を求めよ.

$$S=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

考え方》 恒等式 $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ を利用する.

解答 $S=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$

練習 3.30 恒等式 $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$ を利用して,
和 $S=\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ を求めよ.

応用例題 3.4 次の和 S を求めよ.

$$S = 1{\cdot}1 + 2{\cdot}2 + 3{\cdot}2^2 + \cdots 10{\cdot}2^9$$

考え方 》 第 k 項が $k{\cdot}2^{k-1}$ で表される数列の和である．等比数列の和の公式を導いたのと同様に，S と $2S$ の差を計算する．

解答

$$\begin{aligned} S &= 1{\cdot}1 + 2{\cdot}2 + 3{\cdot}2^2 + 4{\cdot}2^3 + \cdots + 10{\cdot}2^9 \\ 2S &= \quad\quad 1{\cdot}2 + 2{\cdot}2^2 + 3{\cdot}2^3 + \cdots + 9{\cdot}2^9 + 10{\cdot}2^{10} \end{aligned}$$

の辺々を引くと

$$S - 2S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9 - 10{\cdot}2^{10}$$

$\longleftarrow$ $(2-1)2=2$
$(3-2)2^2=2^2$
など

よって $$-S = \frac{2^{10}-1}{2-1} - 10{\cdot}2^{10}$$

したがって $$S = 9{\cdot}2^{10} + 1 = 9 \times 1024 + 1 = 9217$$

練習 3.31 一般項が $n{\cdot}2^{n-1}$ で表される数列の，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

応用例題 3.5 自然数の列を，次のように 1 個，2 個，3 個，$\cdots$ の群に分ける．

$$\{1\},\ \{2,\ 3\},\ \{4,\ 5,\ 6\},\ \{7,\ 8,\ 9,\ 10\},\ \cdots$$

(1) $n \geqq 2$ のとき，第 n 群の最初の自然数を n の式で表せ．
(2) 第 10 番目の群に入るすべての自然数の和 S を求めよ．

考え方》 (1) 第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る自然数の総数を考える．
(2) 等差数列の和として求める．初項は (1) が利用できる．

解答 (1) 第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る自然数の総数は

$$1+2+3+\cdots+(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

これが第 $(n-1)$ 群の最後の自然数である．
求める自然数は，この次の自然数で

$$\frac{1}{2}n(n-1)+1 = \frac{1}{2}(n^2-n+2)$$

(2) 第 10 群の最初の自然数は，(1) の結果を用いて

$$\frac{1}{2}(10^2-10+2) = 46$$

よって，和 S は，初項 46，公差 1，項数 10 の等差数列の和であるから

$$S = \frac{1}{2}\cdot 10\{2\cdot 46+(10-1)\cdot 1\} = 505$$

補足 応用例題 3.5(1) の結果は $n=1$ のときにも成り立つ．

練習 3.32 奇数の列を，次のように1個，2個，3個，$\cdots$ の群に分ける．

$$\underset{\text{第1群}}{\{1\}},\quad \underset{\text{第2群}}{\{3,\ 5\}},\quad \underset{\text{第3群}}{\{7,\ 9,\ 11\}},\quad \underset{\text{第4群}}{\{13,\ 15,\ 17,\ 19\}},\quad \cdots$$

(1) $n \geqq 2$ のとき，第 n 群の最初の奇数を n の式で表せ．

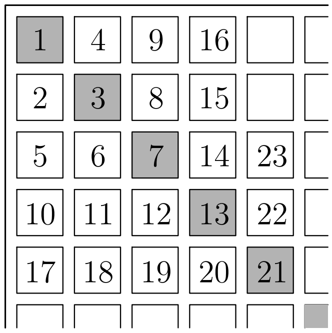
(2) 第15群に入るすべての奇数の和を求めよ．

3.2.2　階差数列

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 項の差をとって順に並べると，別の数列が得られる．この数列の一般項から，数列 $\{a_n\}$ の一般項が求められることがある．

A 》階差数列

右の図のように，自然数を正方形状に並べていく．このとき，対角線上に並ぶ数を順に並べると，次の数列が得られる．

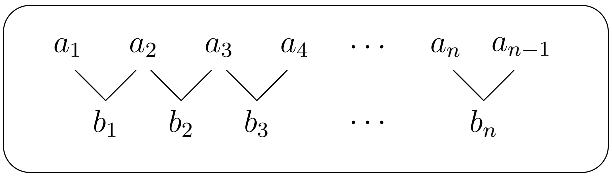


$$1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21,\ \cdots$$

さらに，この数列の隣り合う 2 項の差を順に並べると，次の数列が得られる．

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots$$

一般に，数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 項の差

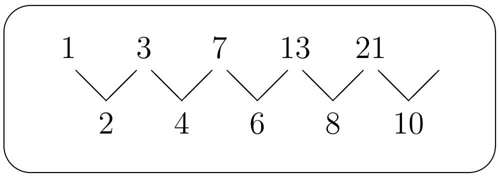


$$a_{n+1} - a_n = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

を項とする数列 $\{b_n\}$ を，数列 $\{a_n\}$ の**階差数列**という．

例 3.13 数列 1, 3, 7, 13, 21, $\cdots$ を $\{a_n\}$ とする．
階差数列 $\{b_n\}$ は

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots$$



であり，$b_n = 2n$ である．
数列 $\{a_n\}$ の第 6 項は，
$a_6 - a_5 = b_5$ から　　$a_6 = a_5 + b_5 = 21 + 2\cdot 5 = 31$

練習 3.33 階差数列を考えて，次の数列の第 6 項，第 7 項を求めよ．

$$1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ \cdots$$

B 》階差数列から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$a_{n+1}-a_n=b_n \qquad \text{すなわち} \qquad a_{n+1}=a_n+b_n$$

よって
$$\begin{aligned} a_2 &= a_1+b_1 \\ a_3 &= a_2+b_2=a_1+b_1+b_2 \\ a_4 &= a_3+b_3=a_1+b_1+b_2+b_3 \\ &\cdots \end{aligned}$$

$$a_1 \xrightarrow{+b_1} a_2 \xrightarrow{+b_2} a_3 \quad \cdots \quad a_{n-1} \xrightarrow{+b_{n-1}} a_n$$

$n \geqq 2$ のとき $\quad a_n=a_1+b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}$

したがって，次のことがいえる．

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$n \geqq 2$ のとき $\qquad a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$

注意 上の a_n は $n \geqq 2$ のときの式なので，$n=1$ で成り立つとは限らない．

例題 3.9 次の数列の一般項 a_n を求めよ．

$$1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21,\ \cdots$$

解答 この数列の階差数列は $\quad 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots$

その一般項を b_n とすると，$b_n=2n$ である．

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1} 2k=1+2\times\frac{1}{2}(n-1)n \qquad \leftarrow a_1=1,\ b_k=2k$$

すなわち $\qquad a_n=n^2-n+1$

初項は $a_1=1$ なので，上の a_n は $n=1$ のときにも成り立つ．

したがって，一般項 a_n は $\qquad a_n=n^2-n+1$

補足 $a_n=a_1+(n-1)n$ において，$n=1$ のとき $(n-1)n=0$ である．

練習 3.34 階差数列を利用して，次の数列の一般項 a_n を求めよ.

(1) $1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ \cdots$

(2) $1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ \cdots$

C》数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ において，初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が n の式で与えられているときに，一般項 a_n を求める方法を考えよう.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

において

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = S_{n-1}$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき　$S_n = S_{n-1} + a_n$,　$S_1 = a_1$

また　$S_1 = a_1$

以上から，次のことが成り立つ.

数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とすると

初項 a_1 は　$\boldsymbol{a_1 = S_1}$

$n \geqq 2$ のとき　$\boldsymbol{a_n = S_n - S_{n-1}}$

例題 3.10 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n = n^2$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

解答 初項 a_1 は $\quad a_1 = S_1 = 1^2 = 1 \quad \cdots$ ①

$n \geqq 2$ のとき $\quad a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2$

すなわち $\quad a_n = 2n - 1$

① より $a_1 = 1$ なので，この式は $n = 1$ のときにも成り立つ.

したがって，一般項は $\quad a_n = 2n - 1$

練習 3.35 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n = n^2 + n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

3.2.3 補充問題

5 恒等式 $k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$ を用いて，次の公式を確かめよ.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

6 次の数列の第 k 項を k の式で表せ．また，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

$$1,\quad 1+2,\quad 1+2+3,\quad \cdots,\quad 1+2+3+\cdots+n,\quad \cdots$$

7 次の和を求めよ．ただし，(2) では問題 **5** の公式を用いてよい．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k(k+1)(k+2)$

8 次の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$

3.3　数学的帰納法

3.3.1　漸化式

数列では，隣り合う 2 項間の関係と初項がわかれば，すべての項が定まる．
たとえば，初項 3，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ は，次の 2 つの条件で定められる．

[1]　$a_1 = 3$　　[2]　$a_{n+1} = 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

ここでは，このような条件から数列の一般項を求める方法を調べよう．

A 》数列の漸化式と項

数列 $\{a_n\}$ は，次の 2 つの条件 [1], [2] を与えると，a_2，a_3，a_4，$\cdots$ が順に求められ，すべての項がただ 1 通りに定まる．

[1]　初項

[2]　a_n から a_{n+1} を決める関係式　$(n = 1, 2, 3, \ldots)$

例 3.14　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第 2 項と第 3 項

[1]　$a_1 = 1$

[2]　$a_{n+1} = 2a_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

第 2 項は，$a_2 = 2a_1 + 3$ と $a_1 = 1$ から　　← [2] で $n = 1$ を代入すると $a_2=2a_1+3$

$$a_2 = 2a_1 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$$

第 3 項は　$a_3 = 2a_2 + 3 = 2 \times 5 + 3 = 13$

上の [2] のように，数列において前の項から次の項を決めるための関係式を**漸化式**（ぜんかしき）という．今後とくに断らなくても，与えられた漸化式は $n = 1, 2, 3, \ldots$ で成り立つものとする．

練習 3.36 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第 2 項から第 5 項を求めよ．

(1)　$a_1 = 100$，$a_{n+1} = a_n - 5$　　(2)　$a_1 = 2$，$a_{n+1} = 3a_n + 2$

B》漸化式から一般項を求める (1)

数列の初項と漸化式が与えられた場合に，その一般項を求めてみよう．
等差数列と等比数列の漸化式は，それぞれ次の形をしている．

等差数列 $\{a_n\}$ の漸化式は，$a_{n+1} = a_n + d$ の形．　$\longleftarrow d$ が公差
等比数列 $\{a_n\}$ の漸化式は，$a_{n+1} = ra_n$ の形．　$\longleftarrow r$ が公比

したがって，初項とこれらの形の漸化式が与えられた数列の一般項は，簡単に求められる．

練習 3.37 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + 3$

(2) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2a_n$

漸化式が $a_{n+1} = a_n + (n$ の式$)$ の形の場合は，116 ページで学んだ階差数列を利用する方法で，一般項が求められることがある．

例題 3.11 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2^n$$

解答 条件より $\qquad a_{n+1} - a_n = 2^n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 2^n であるから，

$n \geqq 2$ のとき
$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\ &= 1 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} \\ &= 1 + 2^n - 2 \end{aligned}$$

$\longleftarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^k$ は初項 2，公比 2，項数 $n-1$ の等比数列の和である．

よって $\qquad a_n = 2^n - 1$

初項は $a_1 = 1$ なので，上の a_n は $n = 1$ のときにも成り立つ．

したがって，一般項は $\qquad a_n = 2^n - 1$

練習 3.38 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 3^n$

(2) $a_1 = 0$，$a_{n+1} = a_n + 2n + 1$

C》漸化式から一般項を求める (2)

次のような条件を満たす数列 $\{a_n\}$ について考えてみよう．

$$a_{n+1}+2=3(a_n+2) \qquad \cdots ①$$

$b_n=a_n+2$ とすると　　$\leftarrow \underbrace{a_{n+1}+2}_{b_{n+1}}=3(\underbrace{a_n+2}_{b_n})$

$$b_{n+1}=3b_n$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列であるから，初項 b_1 がわかれば一般項 b_n がわかり，$b_n=a_n+2$ から一般項 a_n が求められる．

一方，① の右辺を展開して整理すると，次の漸化式が得られる．

$$a_{n+1}=3a_n+4 \qquad \cdots ②$$

以上から，② の形の漸化式と初項 a_1 が与えられたとき，② を ① の形に変形すれば，その一般項が求められることになる．

そこで，② の形の漸化式を ① の形に変形する方法を調べよう．

② に対して，次の等式を満たす c を考える．　　← a_{n+1} と a_n を c でおき換えた等式．

$$c=3c+4 \qquad \cdots ③$$

③ を解くと　　$c=-2$

② − ③ から　　$a_{n+1}-c=3(a_n-c)$

$c=-2$ を代入して

$$a_{n+1}+2=3(a_n+2)$$

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} & = & 3a_n+4 \\ -) & c & = & 3c\ \ +4 \\ \hline & a_{n+1}-c & = & 3(a_n-c) \end{array}$$

一般に，$a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式は，等式 $c=pc+q$ を満たす c を用いて，次の形に変形できる．ただし，$p\neq 0$，$p\neq 1$ とする．

$$a_{n+1}-c=p(a_n-c)$$

練習 3.39　次の $\boxed{}$ に適する数を求めよ．

(1) $a_{n+1}=4a_n-6$ を変形すると　$a_{n+1}-\boxed{}=4(a_n-\boxed{})$

(2) $a_{n+1}=2a_n+1$ を変形すると　$a_{n+1}+\boxed{}=2(a_n+\boxed{})$

(3) $a_{n+1}=-2a_n+3$ を変形すると　$a_{n+1}-\boxed{}=-2(a_n-\boxed{})$

例題 3.12 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 4$$

解答 漸化式を変形すると　$a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$

$b_n = a_n + 2$ とすると　$b_{n+1} = 3b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は

$$b_1 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n = 3{\cdot}3^{n-1} = 3^n$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = b_n - 2$ より

$$a_n = 3^n - 2$$

練習 3.40 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 4a_n - 6$

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1$

(3) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = -2a_n + 3$

(4) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1$

研究

$a_{n+1} = pa_n + q$ を満たす数列の階差数列

次の漸化式 ① を満たす数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を考える．

$$a_{n+1} = 2a_n + 3 \qquad \cdots ①$$

① より
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3 \qquad \cdots ②$$

も成り立つ．② − ① から　$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

ここで，$a_{n+2} - a_{n+1} = b_{n+1}$，$a_{n+1} - a_n = b_n$ であるから

$$b_{n+1} = 2b_n$$

したがって，階差数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列である．
一般に，漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の階差数列は，公比 p の等比数列である．ただし，$p \neq 0$ とする．

3.3.2　数学的帰納法

奇数の和は，次のように自然数 n を含む等式で表された．

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \quad \cdots(\mathrm{A})$$

自然数は限りなくあるから，この事実をすべての n について確かめることはできない．ここでは，自然数 n を含む等式や不等式などがすべての自然数 n について成り立つ，と結論するための新しい証明法を学ぼう．

A》数学的帰納法の原理

自然数 n を含む等式 (A) について，次の［1］,［2］が示せたとする．

［1］　$n=1$ のとき (A) が成り立つ．

［2］　$n=k$ のとき (A) が成り立つと仮定すると，

　　$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

すると，$n=1+1$ すなわち $n=2$ のときも，(A) が成り立つ．
さらに，$n=2+1$ すなわち $n=3$ のときも，(A) が成り立つ．
同様に $n=4,5,6,\ldots$ のときも (A) が成り立ち，すべての自然数 n について (A) が成り立つと結論してよい．
次のような証明法を**数学的帰納法**という．

数学的帰納法

一般に，自然数 n を含む条件 (A) があるとき，
　「すべての自然数 n について (A) が成り立つ」
を証明するには，次の［1］,［2］を示せばよい．

［1］　$n=1$ のとき (A) が成り立つ．

［2］　$n=k$ のとき (A) が成り立つと仮定すると，

　　$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

B ≫ 等式の証明

数学的帰納法を用いて，自然数 n を含む等式を証明してみよう．

例題 3.13 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ．

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

証明 この等式を (A) とする．

［1］ $n=1$ のとき

$$\text{左辺}=1,\quad \text{右辺}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)=1$$

よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

であると仮定すると，$n=k+1$ のときの (A) の左辺は

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+(k+1)&=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\end{aligned}$$

$n=k+1$ のときの (A) の右辺は

$$\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］,［2］から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ．　**証終**

練習 3.41 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ．

(1) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

(2) $1{\cdot}2 + 2{\cdot}3 + 3{\cdot}4 + \cdots + n(n + 1) = \dfrac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$

C》不等式の証明

応用例題 3.6 n を 4 以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$2^n > 3n$$

考え方》 $n \geqq 4$ であるから，次のことを示す．

[1]　$n = 4$ のとき，不等式が成り立つ．

[2]　$k \geqq 4$ として，不等式 $2^k > 3k$ が成り立つと仮定すると，不等式 $2^{k+1} > 3(k+1)$ が成り立つ．

証明 この不等式を (A) とする．

[1] $n = 4$ のとき

$$左辺 = 2^4 = 16, \qquad 右辺 = 3 \cdot 4 = 12$$

よって，$n = 4$ のとき，(A) が成り立つ．

[2] $k \geqq 4$ として，$n = k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$2^k > 3k$$

が成り立つと仮定する．

$n = k + 1$ のときの (A) の両辺の差を考えると

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - 3(k+1) &= 2 \cdot 2^k - (3k+3) \\ &> 2 \cdot 3k - (3k+3) && \longleftarrow 2^k > 3k \text{ より} \\ &= 3(k-1) > 0 && \longleftarrow k \geqq 4 \text{ より } k-1>0 \end{aligned}$$

すなわち　$2^{k+1} > 3(k+1)$

したがって，$n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ．

[1]，[2] から，4 以上のすべての自然数 n について (A) が成り立つ．　**証終**

練習 3.42 n を 3 以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$2^n > 2n+1$$

D》整数の性質の証明

応用例題 3.7　すべての自然数 n について，$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ は 9 の倍数である．このことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

考え方》　9 の倍数は，整数 m を用いて $9m$ と表される．逆に，整数 m を用いて $9m$ と表される数は 9 の倍数である．

証明　「$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ は 9 の倍数である」を (A) とする．

［1］$n=1$ のとき

$$1^3+2^3+3^3=36$$

よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］$n=k$ のとき (A) が成り立つと仮定する．
すなわち，整数 m を用いて

$$k^3+(k+1)^3+(k+2)^3=9m$$

と表されると仮定する．
$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}(k+1)^3&+(k+2)^3+(k+3)^3\\&=9m-k^3+(k+3)^3\\&=9m-k^3+(k^3+3k^2\cdot 3+3k\cdot 3^2+3^3)\\&=9(m+k^2+3k+3)\end{aligned}$$

ここで，$m+k^2+3k+3$ は整数である．
よって，$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$ は 9 の倍数であるから，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］,［2］から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ．　**証終**

練習 3.43 すべての自然数 n について，$n^3 + 2n$ は 3 の倍数である．このことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

3.3.3　補充問題

9 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の第 4 項を，それぞれ求めよ．

$$a_1 = 1,\quad b_1 = 0,\quad a_{n+1} = a_n + b_n,\quad b_{n+1} = 2b_n + 1\quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

10 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + 2^{n-1}\quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} + a_n = 3 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

(3) $a_1 = 2, \quad 2a_{n+1} = a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

11 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ．

(2) 第 n 項 a_n を推測して，それを数学的帰納法を用いて証明せよ．

3.4　章末問題

3.4.1　章末問題 A

1 第 4 項が 14，第 8 項が 30 である等差数列がある．次の数は，この数列の項であるかどうかを調べよ．また，項であるときは第何項かを求めよ．

(1)　70　　　(2)　123

2 初項が 60，末項が -30 である等差数列の和が 240 であるとき，この数列の公差と項数を求めよ．

3 1 日目に 1 円，2 日目に 2 円，3 日目に 4 円，4 日目に 8 円，$\cdots$ というように，前日の 2 倍の金額を毎日貯金するとき，15 日間での貯金の総額を求めよ．

4 初項が正の数である等比数列 $\{a_n\}$ の，第 2 項と第 4 項の和が 20 で，第 4 項と第 6 項の和が 80 であるとき，次のものを求めよ．

(1) 初項と公比

(2) 初項から第 10 項までの和

5 1 から 100 までの自然数のうち，次のような数の和を求めよ．

(1) 3 の倍数

(2) 4 で割ると 3 余る数

6 次の数列の第 k 項を k の式で表せ．また，その和を求めよ．

$$1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ \cdots,\ 1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

7 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 1,\quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{n}$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

8 すべての自然数 n について，$7^n - 1$ は6の倍数である．このことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

3.4.2 章末問題B

9 次のような分数の列がある．

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots$$

(1) $\dfrac{3}{10}$ は第何項か．

(2) 第100項を求めよ．

10 項数 n の数列 $1 \cdot n,\ 2(n-1),\ 3(n-2),\ \cdots,\ n \cdot 1$ がある.

(1) この数列の第 k 項を n と k を用いた式で表せ.

(2) この数列の和を求めよ.

11 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が, $S_n = 2a_n - 1$ であるとする.

(1) $a_{n+1} = 2a_n$ であることを示せ.

(2) 第 n 項 a_n を求めよ.

12 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2(n+1) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

13 $a > 0$ で n を自然数とする．数学的帰納法を用いて，次の不等式を証明せよ．

$$(1+a)^n \geqq 1 + na$$

14 すべての自然数 n について，$2^{2n-1}+3^{2n-1}$ は 5 の倍数である．このことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

ヒント

9　分母に着目し，群に分けて考える．

10　(2)　n は k に無関係な定数であることに注意する．

12　$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ として，まず数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める．

14　$n = k+1$ のとき，$2^{2(k+1)-1} = 2^{2k+1} = 2^2 \cdot 2^{2k-1}$ などと変形する．

発展　隣接3項間の漸化式

これまでは数列 $\{a_n\}$ の隣接する2項間の漸化式を取り上げたが，隣接する3項間の漸化式と a_1，a_2 によって定められる数列 $\{a_n\}$ もある．以下では，このような数列 $\{a_n\}$ について，階差数列を用いて一般項が求められる例を示そう．

例1　次の条件によって定められる数列 a_n の一般項

$$a_1=1,\quad a_2=3,\quad a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n \quad (n=1,2,3,\dots)$$

漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とすると　$b_{n+1}=2b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比2の等比数列で，初項は

$$b_1=a_2-a_1=3-1=2$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\ &= 1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} \\ &= 2^n-1 \end{aligned}$$

初項は $a_1=1$ なので，上の a_n は $n=1$ のときにも成り立つ．

したがって，一般項 a_n は　$a_n=2^n-1$　**[終]**

一般に，$a_{n+2}=(p+1)a_{n+1}-pa_n$ の形の漸化式は，次の形に変形することができる．

$$a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)$$

練習1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1=1,\quad a_2=4,\quad a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n \quad (n=1,2,3,\dots)$$

【解】 漸化式を変形すると　$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ とすると　$b_{n+1} = 3b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は

$$b_1 = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n = 3{\cdot}3^{n-1} = 3^n$

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k \\ &= 1 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{3^n - 1}{2} \end{aligned}$$

初項は $a_1 = 1$ なので，上の a_n は $n = 1$ のときにも成り立つ.

したがって，一般項 a_n は　$a_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$