

高校生の

# 新 編 数 学 B

解答編

平成 20 年 8 月 24 日

*Typed by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>*

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>平面上のベクトル</b>	<b>1</b>
1.1	ベクトルとその演算	1
1.1.1	ベクトル	1
1.1.2	ベクトルの演算	2
1.1.3	ベクトルの成分	7
1.1.4	ベクトルの内積	10
1.1.5	補充問題	15
1.2	ベクトルと平面図形	17
1.2.1	位置ベクトル	17
1.2.2	ベクトルの図形への応用	19
1.2.3	直線のベクトルによる表示	21
1.2.4	補充問題	25
1.3	章末問題	26
1.3.1	章末問題 A	26
1.3.2	章末問題 B	31
<b>第 2 章</b>	<b>空間のベクトル</b>	<b>37</b>
2.1.1	空間の点	37
2.1.2	空間のベクトル	37
2.1.3	ベクトルの成分	39
2.1.4	ベクトルの内積	40
2.1.5	位置ベクトル	42
2.1.6	座標空間における図形	45
2.1.7	補充問題	48
2.2	章末問題	49
2.2.1	章末問題 A	49
2.2.2	章末問題 B	53
<b>第 3 章</b>	<b>数列</b>	<b>59</b>
3.1	等差数列と等比数列	59
3.1.1	数列と一般項	59
3.1.2	等差数列	60
3.1.3	等差数列の和	62
3.1.4	等比数列	65
3.1.5	等比数列の和	68

3.1.6	補充問題	69
3.2	いろいろな数列	71
3.2.1	いろいろな数列の和	71
3.2.2	階差数列	77
3.2.3	補充問題	79
3.3	数学的帰納法	82
3.3.1	漸化式	82
3.3.2	数学的帰納法	85
3.3.3	補充問題	88
3.4	章末問題	91
3.4.1	章末問題 A	91
3.4.2	章末問題 B	95

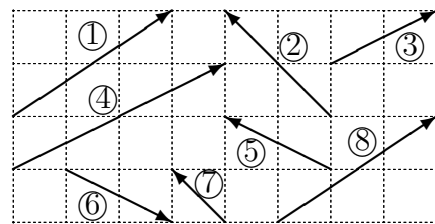
# 第 1 章 平面上のベクトル

## 1.1 ベクトルとその演算

### 1.1.1 ベクトル

練習 1.1 右の図に示されたベクトルについて、次のようなベクトルの番号の組をすべてあげよ。

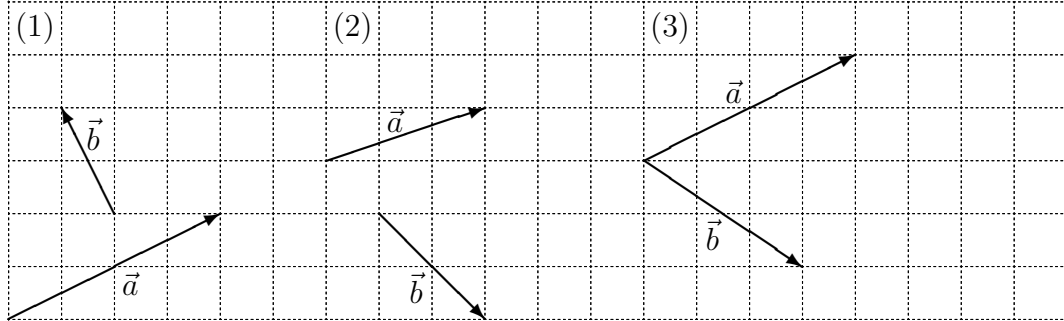
- (1) 向きが同じベクトル
- (2) 互いに等しいベクトル
- (3) 互いに逆ベクトル



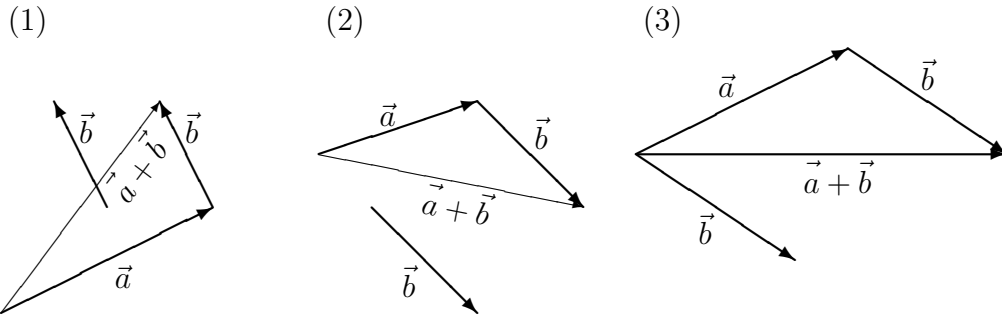
- 【解】 (1) ①と⑧, ②と⑦, ③と④  
(2) 大きさが等しく向きが同じベクトルで ①と⑧  
(3) 大きさが等しく向きが反対のベクトルで ⑤と⑥

1.1.2 ベクトルの演算

練習 1.2 次のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について,  $\vec{a} + \vec{b}$  をそれぞれ図示せよ.



【答】



練習 1.3 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CA} = \vec{CD}$$

[証明]  $\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CA} = (\vec{AB} + \vec{BD}) + \vec{CA}$

$$= \vec{AD} + \vec{CA}$$

$$= \vec{CA} + \vec{AD} = \vec{CD}$$

よって  $\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CA} = \vec{CD}$

[証終]

練習 1.4 次の等式が成り立つことを示せ.

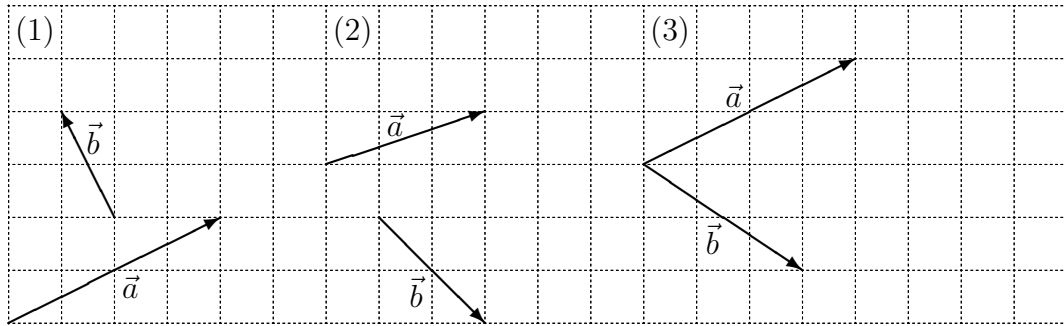
$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

[証明]  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CA}$   
 $= \vec{AC} + \vec{CA}$   
 $= \vec{AA} = \vec{0}$

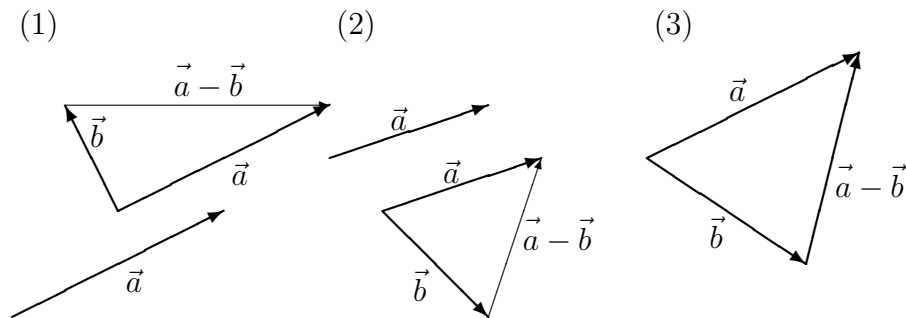
よって  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$

[証終]

練習 1.5 練習 1.2 のベクトルについて,  $\vec{a} - \vec{b}$  をそれぞれ図示せよ.



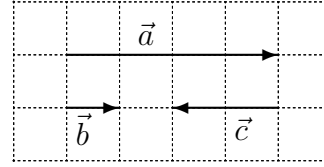
【答】



例 1.3 右の図のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  について,

$$\vec{a} = 4\vec{b}, \quad \vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a}$$

である.



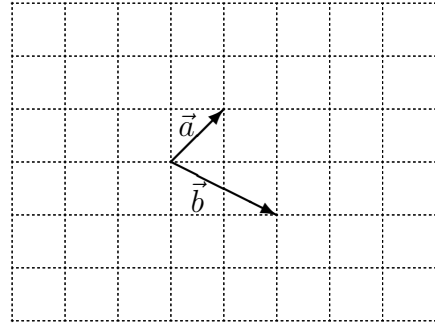
練習 1.6 例 1.3 のベクトルについて, 次の ( ) に適する実数を求めよ.

(1)  $\vec{b} = ( \quad )\vec{a}$       (2)  $\vec{a} = ( \quad )\vec{c}$       (3)  $\vec{b} = ( \quad )\vec{c}$

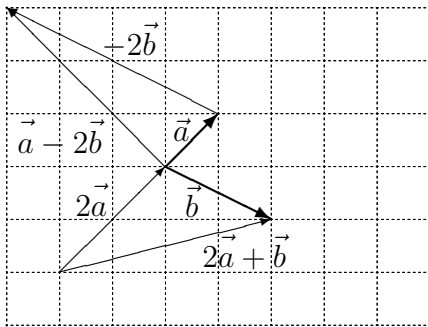
【答】(1)  $\frac{1}{4}$     (2)  $-2$     (3)  $-\frac{1}{2}$

練習 1.7 右の図のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について,  
次のベクトルを図示せよ.

- (1)  $2\vec{a}$       (2)  $-2\vec{b}$   
 (3)  $2\vec{a} + \vec{b}$       (4)  $\vec{a} - 2\vec{b}$



【答】



練習 1.8 次の計算をせよ .

(1)  $\vec{a} + 3\vec{a} - 2\vec{a}$

(2)  $3\vec{a} + 7\vec{b} - 5\vec{a} - 2\vec{b}$

(3)  $3(2\vec{a} + \vec{b}) + 4(\vec{a} - 2\vec{b})$

(4)  $2(\vec{a} - 3\vec{b}) - 3(3\vec{a} - 2\vec{b})$

(5)  $\frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b})$

(6)  $\frac{1}{2}(-\vec{a} + 2\vec{b}) - \frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b})$

【解】 (1)  $\vec{a} + 3\vec{a} - 2\vec{a} = (1 + 3 - 2)\vec{a} = 2\vec{a}$

(2)  $3\vec{a} + 7\vec{b} - 5\vec{a} - 2\vec{b} = (3 - 5)\vec{a} + (7 - 2)\vec{b}$   
 $= -2\vec{a} + 5\vec{b}$

(3)  $3(2\vec{a} + \vec{b}) + 4(\vec{a} - 2\vec{b}) = 6\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{a} - 8\vec{b}$   
 $= (6 + 4)\vec{a} + (3 - 8)\vec{b}$   
 $= 10\vec{a} - 5\vec{b}$

(4)  $2(\vec{a} - 3\vec{b}) - 3(3\vec{a} - 2\vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} - 9\vec{a} + 6\vec{b}$   
 $= (2 - 9)\vec{a} + (-6 + 6)\vec{b}$   
 $= -7\vec{a}$

(5)  $\frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$   
 $= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)\vec{a} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)\vec{b}$   
 $= \vec{a}$

(6)  $\frac{1}{2}(-\vec{a} + 2\vec{b}) - \frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$   
 $= \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)\vec{a} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\vec{b}$   
 $= -\frac{7}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

練習 1.9 次の問いに答えよ .

(1) 単位ベクトル  $\vec{e}$  と平行で大きさが 4 のベクトルを  $\vec{e}$  を用いて表せ .

(2)  $|\vec{a}| = 3$  のとき ,  $\vec{a}$  と同じ向き の単位ベクトルを  $\vec{a}$  を用いて表せ .

【解】 (1) 単位ベクトル  $\vec{e}$  と平行で大きさが 4 のベクトルは  $4\vec{e}$  と  $-4\vec{e}$

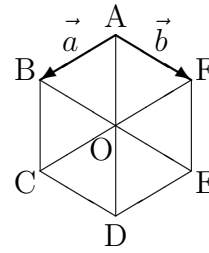
(2)  $|\vec{a}| = 3$  より ,  $\vec{a}$  と同じ向き の単位ベクトルは  $\frac{1}{3}\vec{a}$

応用例題 1.1 正六角形 ABCDEF において,

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AF} = \vec{b}$$

とするとき, 次のベクトルを  $\vec{a}, \vec{b}$  を用いて表せ.

(1)  $\overrightarrow{AE}$                       (2)  $\overrightarrow{DF}$



考え方  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$  のように分解することができる.

【解】 (1)  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$   
 $= \vec{a} + 2\vec{b}$

(2)  $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$   
 $= -\vec{b} + (-2\vec{a}) = -2\vec{a} - \vec{b}$

練習 1.10 応用例題 1.1 において, 次のベクトルを  $\vec{a}, \vec{b}$  を用いて表せ.

(1)  $\overrightarrow{AC}$                       (2)  $\overrightarrow{EF}$                       (3)  $\overrightarrow{BD}$

【解】 (1)  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} = \vec{b} + 2\vec{a} = 2\vec{a} + \vec{b}$

(2)  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF} = -\vec{b} + (-\vec{a}) = -\vec{a} - \vec{b}$

(3)  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = 2\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + 2\vec{b}$

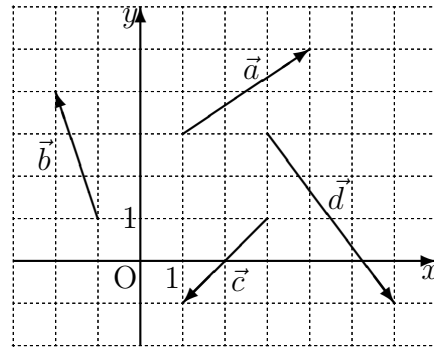
## 1.1.3 ベクトルの成分

例 1.4 右の図のベクトル  $\vec{a}$  の成分表示は

$$\vec{a} = (3, 2)$$

大きさは

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$



練習 1.11 右の図のベクトル  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  を, それぞれ成分表示せよ. また, 各ベクトルの大きさを求めよ.

【解】 各ベクトル  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  の成分表示は

$$\vec{b} = (-1, 3), \vec{c} = (-2, -2), \vec{d} = (3, -4)$$

各ベクトルの大きさは

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

練習 1.12  $\vec{a} = (3, -1)$ ,  $\vec{b} = (-4, 2)$  のとき, 次のベクトルを成分表示せよ.

- (1)  $2\vec{a}$                       (2)  $-\vec{b}$                       (3)  $\frac{1}{4}\vec{b}$   
(4)  $3\vec{a} + 2\vec{b}$                 (5)  $4\vec{a} - 3\vec{b}$                 (6)  $-2(\vec{a} - \vec{b})$

- 【解】 (1)  $2\vec{a} = 2(3, -1) = (6, -2)$   
(2)  $-\vec{b} = -(-4, 2) = (4, -2)$   
(3)  $\frac{1}{4}\vec{b} = \frac{1}{4}(-4, 2) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$   
(4)  $3\vec{a} + 2\vec{b} = 3(3, -1) + 2(-4, 2)$   
 $= (9, -3) + (-8, 4) = (9 - 8, -3 + 4)$   
 $= (1, 1)$   
(5)  $4\vec{a} - 3\vec{b} = 4(3, -1) - 3(-4, 2)$   
 $= (12, -4) - (-12, 6) = (12 + 12, -4 - 6)$   
 $= (24, -10)$   
(6)  $-2(\vec{a} - \vec{b}) = -2\{(3, -1) - (-4, 2)\}$   
 $= -2(3 + 4, -1 - 2)$   
 $= -2(7, -3) = (-14, 6)$

練習 1.13  $\vec{a} = (2, 1)$ ,  $\vec{b} = (-1, 3)$  とする.  $\vec{c} = (8, -3)$  を, 適当な実数  $s, t$  を用いて  $s\vec{a} + t\vec{b}$  の形に表せ.

【解】  $s\vec{a} + t\vec{b} = s(2, 1) + t(-1, 3) = (2s - t, s + 3t)$  であるから,

$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$  とすると

$$(8, -3) = (2s - t, s + 3t)$$

よって  $2s - t = 8, s + 3t = -3$

これを解くと  $s = 3, t = -2$

したがって  $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$

練習 1.14 2つのベクトルが平行になるように,  $x$  の値を定めよ.

(1)  $\vec{a} = (-2, 1), \vec{b} = (x, -3)$

(2)  $\vec{a} = (2, x), \vec{b} = (3, 6)$

【解】 (1)  $\vec{a} // \vec{b}$  であるには,  $\vec{b} = k\vec{a}$  を満たす実数があればよい.

$$(x, -3) = (-2k, k) \text{ から } x = -2k, -3 = k$$

$$\text{よって } x = -2 \times (-3) = 6$$

(2)  $\vec{a} // \vec{b}$  であるには,  $\vec{b} = k\vec{a}$  を満たす実数があればよい.

$$(3, 6) = (2k, kx) \text{ から } 3 = 2k, 6 = kx$$

$$\text{よって } k = \frac{3}{2}, x = 4$$

練習 1.15 次の2点 A, B について,  $\overrightarrow{AB}$  を成分表示し,  $|\overrightarrow{AB}|$  を求めよ.

(1) A(5, 2), B(1, 6)                      (2) A(-3, 4), B(2, 0)

【解】 (1)  $\overrightarrow{AB} = (1 - 5, 6 - 2) = (-4, 4)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

(2)  $\overrightarrow{AB} = (2 - (-3), 0 - 4) = (5, -4)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$$

練習 1.16 4点  $A(1, 1)$ ,  $B(x, y)$ ,  $C(5, 4)$ ,  $D(2, 3)$  を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形であるように,  $x, y$  の値を定めよ.

【解】  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  が成り立てばよいから

$$\begin{aligned}(x-1, y-1) &= (5-2, 4-3) \\ &= (3, 1)\end{aligned}$$

よって  $x-1=3, y-1=1$

したがって  $x=4, y=2$

#### 1.1.4 ベクトルの内積

練習 1.17  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とする. 次の場合に内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めよ.

(1)  $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=3, \theta=45^\circ$       (2)  $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=6, \theta=150^\circ$

【解】 (1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = 4 \times 3 \times \cos 45^\circ = 4 \times 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $= 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

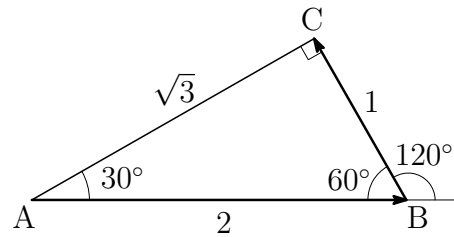
(2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = 6 \times 6 \times \cos 150^\circ = 6 \times 6 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$   
 $= -18\sqrt{3}$

例 1.10 右の図の直角三角形 ABC において,  
 $\vec{AB}$  と  $\vec{BC}$  のなす角は

$$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

であるから

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 2 \times 1 \times \cos 120^\circ = -1$$

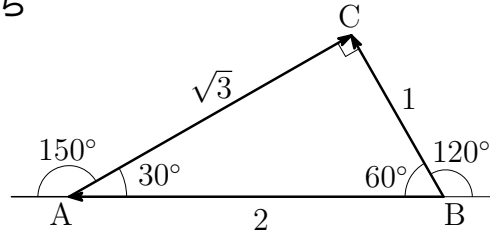


練習 1.18 例 1.10 の直角三角形 ABC において, 次の内積を求めよ.

- (1)  $\vec{BA} \cdot \vec{AC}$                       (2)  $\vec{AC} \cdot \vec{BC}$

【解】 (1)  $\vec{BA}$  と  $\vec{AC}$  のなす角は  $150^\circ$  であるから

$$\begin{aligned} \vec{BA} \cdot \vec{AC} &= 2 \times \sqrt{3} \times \cos 150^\circ \\ &= 2 \times \sqrt{3} \times \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= -3 \end{aligned}$$



(2)  $\vec{AC}$  と  $\vec{BC}$  のなす角は  $90^\circ$  であるから

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = \sqrt{3} \times 1 \times \cos 90^\circ = \sqrt{3} \times 1 \times 0 = 0$$

練習 1.19 次のベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  について, 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めよ.

- (1)  $\vec{a} = (2, 5), \vec{b} = (3, -2)$               (2)  $\vec{a} = (1, \sqrt{3}), \vec{b} = (\sqrt{3}, 3)$

【解】 (1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 + 5 \times (-2) = -4$

(2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 3 = 4\sqrt{3}$

練習 1.20 次の2つのベクトルのなす角を求めよ.

- (1)  $\vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (-3, 1)$       (2)  $\vec{a} = (1, \sqrt{3}), \vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$   
 (3)  $\vec{a} = (3, -1), \vec{b} = (2, 6)$       (4)  $\vec{a} = (-4, 2), \vec{b} = (2, -1)$   
 (5)  $\vec{a} = (1, -2), \vec{b} = (3, -6)$

【解】2つのベクトルのなす角を $\theta$ とする.

$$(1) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2 \times (-3) + 1 \times 1}{\sqrt{2^2 + 1^2} \sqrt{(-3)^2 + 1^2}} = \frac{-5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 135^\circ$$

$$(2) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 30^\circ$$

$$(3) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3 \times 2 + (-1) \times 6}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 6^2}} = 0$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 90^\circ$$

$$(4) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-4 \times 2 + 2 \times (-1)}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{-10}{\sqrt{20} \sqrt{5}} = -\frac{10}{10} = -1$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 180^\circ$$

$$(5) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1 \times 3 + (-2) \times (-6)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} \sqrt{3^2 + (-6)^2}} = \frac{15}{\sqrt{5} \sqrt{45}} = \frac{15}{15} = 1$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 0^\circ$$

練習 1.21 次の2つのベクトルが垂直になるような $x$ の値を求めよ.

- (1)  $\vec{a} = (3, 6), \vec{b} = (x, 4)$       (2)  $\vec{a} = (x, -1), \vec{b} = (x, x+2)$

【解】(1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  より  $3x + 6 \times 4 = 0$

よって  $x = -8$

(2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  より  $x \times x + (-1) \times (x + 2) = 0$

よって  $x^2 - x - 2 = 0$  これを解いて  $x = -1, 2$

練習 1.22 次のベクトル  $\vec{a}$  に垂直な単位ベクトルを求めよ .

(1)  $\vec{a} = (1, 3)$

(2)  $\vec{a} = (2, -5)$

【解】 (1)  $\vec{b} = (3, -1)$  は  $\vec{a}$  に垂直である .

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

であるから  $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{b}$  または  $\vec{e} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{b}$

よって  $\vec{e} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$  または  $\vec{e} = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

(2)  $\vec{b} = (5, 2)$  は  $\vec{a}$  に垂直である .

$$|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

であるから  $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{29}}\vec{b}$  または  $\vec{e} = -\frac{1}{\sqrt{29}}\vec{b}$

よって  $\vec{e} = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)$  または  $\vec{e} = \left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}\right)$

内積の性質

1  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

2  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

3  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

4  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

5  $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$   $k$  は実数

[ 3 の証明 ]  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  ,  $\vec{c} = (c_1, c_2)$  とすると

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

であるから

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 \\ &= a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2) + (b_1c_1 + b_2c_2) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

[ 証終 ]

練習 1.23 次の等式を，上の3の証明にならって証明せよ．

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$$

[証明]  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  ,  $\vec{c} = (c_1, c_2)$  とすると

$$\vec{b} - \vec{c} = (b_1 - c_1, b_2 - c_2)$$

であるから

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) &= a_1(b_1 - c_1) + a_2(b_2 - c_2) \\ &= a_1b_1 - a_1c_1 + a_2b_2 - a_2c_2 \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2) - (a_1c_1 + a_2c_2) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

よって  $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$

[証終]

練習 1.24 次の等式が成り立つことを示せ．

$$(1) |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

[証明]

$$\begin{aligned} (1) \quad |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

よって  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

$$\begin{aligned} (2) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

よって  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

[証終]

練習 1.25  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$  のとき, 次の値を求めよ.

(1)  $|\vec{a} + \vec{b}|$

(2)  $|\vec{a} - 2\vec{b}|$

【解】 (1)  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$   
 $= 3^2 + 2 \times (-3) + 2^2 = 7$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$$

(2)  $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$   
 $= 3^2 - 4 \times (-3) + 4 \times 2^2 = 37$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{37}$$

練習 1.26  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$  で,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角が  $60^\circ$  であるとき,  $|\vec{a} - \vec{b}|$  の値を求めよ.

【解】  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 1^2 - 2 \times 1 + 2^2 = 3 \end{aligned}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$$

### 1.1.5 補充問題

1 次の等式を満たす  $\vec{x}$  を,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ.

(1)  $3\vec{x} - 4\vec{a} = \vec{x} - 2\vec{b}$

(2)  $2(\vec{x} - 3\vec{a}) = 5(\vec{x} + 2\vec{b})$

【解】 (1)  $2\vec{x} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$  より  $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$

(2)  $2\vec{x} - 6\vec{a} = 5\vec{x} + 10\vec{b}$   
 $-3\vec{x} = 6\vec{a} + 10\vec{b}$

よって  $\vec{x} = -2\vec{a} - \frac{10}{3}\vec{b}$

2 ベクトル  $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$  に垂直で大きさが4のベクトル  $\vec{p}$  を求めよ.

【解】  $\vec{p} = (x, y)$  とする.

$$\vec{a} \cdot \vec{p} = 0 \text{ より } x + \sqrt{3}y = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$|\vec{p}| = 4 \text{ より } x^2 + y^2 = 16 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } x = -2\sqrt{3}, y = 2$$

$$\text{または } x = 2\sqrt{3}, y = -2$$

$$\vec{p} = (-2\sqrt{3}, 2), (2\sqrt{3}, -2)$$

3 2つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  について, 次が成り立つことを示せ.

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$  で,  $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$  のとき

$$\vec{a} // \vec{b} \iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

【解】  $\vec{c} = (b_2, -b_1)$  とすると  $\vec{c} \neq \vec{0}, a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$  であれば

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = a_1 b_2 + a_2 (-b_1) = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{c} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = b_1 b_2 + b_2 (-b_1) = 0 \iff \vec{b} \perp \vec{c} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \iff \vec{a} // \vec{b}$$

4  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}, |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$  のとき, 次のものを求めよ.

(1)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(2)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角

【解】 (1)  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 7$  より  $|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7$

$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}$  であるから

$$1^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\sqrt{3})^2 = 7$$

$$\text{よって } \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2}$$

(2)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とする. (1) より,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2}$  であるから

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 \times \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 150^\circ$$

## 1.2 ベクトルと平面図形

### 1.2.1 位置ベクトル

練習 1.27 3点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$ ,  $C(\vec{c})$  に対して, 次のベクトルを  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  のいずれかを用いて表せ.

(1)  $\overrightarrow{BC}$

(2)  $\overrightarrow{CA}$

(3)  $\overrightarrow{BA}$

【答】(1)  $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$

(2)  $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$

(3)  $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$

練習 1.28 2点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$  を結ぶ線分  $AB$  に対して, 次のような点の位置ベクトルを求めよ.

(1) 2:3 に内分する点

(2) 3:1 に内分する点

(3) 4:1 に外分する点

(4) 1:2 に外分する点

【解】(1)  $\frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{2 + 3} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

(2)  $\frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{3 + 1} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

(3)  $\frac{-\vec{a} + 3\vec{b}}{4 - 1} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

(4)  $\frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{1 - 2} = 2\vec{a} - \vec{b}$

練習 1.29 3点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$ ,  $C(\vec{c})$  を頂点とする  $\triangle ABC$  において, 辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  を  $2:1$  に内分する点を, それぞれ  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  とする. また,  $\triangle ABC$  の重心を  $G$ ,  $\triangle PQR$  の重心を  $G'$  とする.

- (1) 点  $G'$  の位置ベクトル  $\vec{g}'$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ.  
 (2) 等式  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$  が成り立つことを示せ.

【解】 (1)  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  の位置ベクトルを, それぞれ  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{r}$  とすると

$$\vec{p} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3}, \quad \vec{q} = \frac{\vec{c} + 2\vec{a}}{3}, \quad \vec{r} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$$

よって

$$\vec{g}' = \frac{\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}}{3} = \frac{1}{3} \left( \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3} + \frac{\vec{c} + 2\vec{a}}{3} + \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} \right)$$

$$= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

(2) 点  $G$  の位置ベクトルを,  $\vec{g}$  とすると,  $\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$  であるから

$$\begin{aligned} \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} &= (\vec{a} - \vec{g}) + (\vec{b} - \vec{g}) + (\vec{c} - \vec{g}) \\ &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - 3\vec{g} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3 \left( \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \right) = \vec{0} \end{aligned}$$

よって  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

1.2.2 ベクトルの図形への応用

練習 1.30 平行四辺形 ABCD において、辺 BC を 3 : 2 に内分する点を E、対角線 BD を 3 : 5 に内分する点を F とする。このとき、3 点 A、F、E は一直線上にあることを証明せよ。

[証明]  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$  とする。

BF : FD = 3 : 5 であるから

$$\overrightarrow{AF} = \frac{5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}}{3 + 5} = \frac{5\vec{b} + 3\vec{d}}{8}$$

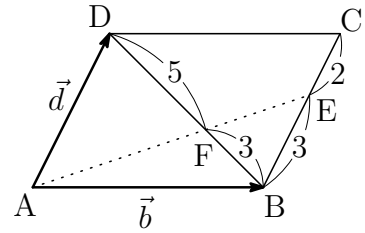
BE : EC = 3 : 2 であるから

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{3 + 2} = \frac{2\vec{b} + 3(\vec{b} + \vec{d})}{5} = \frac{5\vec{b} + 3\vec{d}}{5}$$

よって 
$$\overrightarrow{AF} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AE}$$

したがって、3 点 A、F、E は一直線上にある。

[証終]



練習 1.31  $\triangle OAB$  において、辺 OA を 3 : 2 に内分する点を C、辺 OB を 1 : 2 に内分する点 D とし、線分 AD と線分 BC の交点を P とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とするとき、 $\overrightarrow{OP}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。

【解】 AP : PD = s : (1 - s) とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (1 - s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OD} \\ &= (1 - s)\vec{a} + \frac{1}{3}s\vec{b} \end{aligned}$$

BP : PC = t : (1 - t) とすると

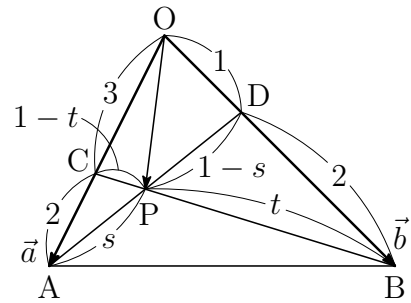
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= t\overrightarrow{OC} + (1 - t)\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{3}{5}t\vec{a} + (1 - t)\vec{b} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{OP}$  の  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いた表し方は 1 通りであるから

$$1 - s = \frac{3}{5}t, \quad \frac{1}{3}s = 1 - t$$

これを解くと 
$$s = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{5}{6}$$

したがって 
$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$



←  $\overrightarrow{OP}$  を表す式のどちらかに代入する。

練習 1.32 平行四辺形 ABCD において，次のことが成り立つ．

$$AB = AD \quad \text{ならば} \quad AC \perp DB$$

このことを，ベクトルを用いて証明せよ．

[証明] 平行四辺形 ABCD において，

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{d}$$

とすると

$$\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{d}, \quad \overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{d}$$

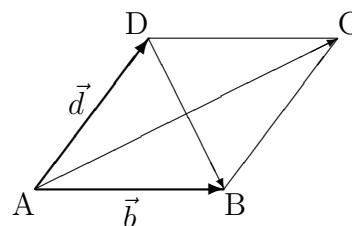
$AB = AD$  ならば， $|\vec{b}| = |\vec{d}|$  であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\vec{b} + \vec{d}) \cdot (\vec{b} - \vec{d}) \\ &= |\vec{b}|^2 - |\vec{d}|^2 = 0 \end{aligned}$$

よって  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$

したがって， $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$  となるから， $AC \perp DB$  である．

[証終]



## 1.2.3 直線のベクトルによる表示

練習 1.33 点  $A(4, -3)$  を通りベクトル  $\vec{d} = (-2, 3)$  に平行な直線  $g$  が  $x$  軸と交わる点を  $B$ ,  $y$  軸と交わる点を  $C$  とする.

- (1)  $B$  の座標を求めよ.                      (2)  $C$  の座標を求めよ.

【解】 (1)  $\overrightarrow{AB} // \vec{d}$  であるから,  $\overrightarrow{AB} = k\vec{d}$  となる実数  $k$  がある.

$B$  の座標を  $(x, 0)$  とおくと

$$(x - 4, 3) = k(-2, 3)$$

よって  $x - 4 = -2k, \quad 3 = 3k$

これを解くと  $k = 1, x = 2$

したがって,  $B$  の座標は  $(2, 0)$

(2)  $\overrightarrow{AC} // \vec{d}$  であるから,  $\overrightarrow{AC} = k\vec{d}$  となる実数  $k$  がある.

$C$  の座標を  $(0, y)$  とおくと

$$(-4, y + 3) = k(-2, 3)$$

よって  $-4 = -2k, \quad y + 3 = 3k$

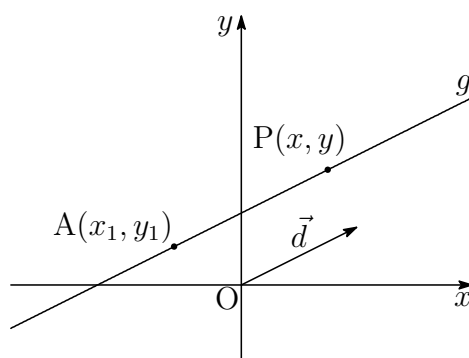
これを解くと  $k = 2, y = 3$

したがって,  $C$  の座標は  $(0, 3)$

一般に,  $O$  を原点とする座標平面上で, 点  $A(x_1, y_1)$  を通りベクトル  $\vec{d} = (l, m)$  に平行な直線  $g$  上の任意の点を  $P(x, y)$  とする.  $\vec{AP} = t\vec{d}$  となる  $t$  があるから

$$(x - x_1, y - y_1) = t(l, m)$$

よって 
$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases} \dots \textcircled{1}$$



①において,  $t$  を媒介変数といい, ①を直線  $g$  の媒介変数表示という.

練習 1.34 上の ① から  $t$  を消去して, 直線  $g$  の方程式が次の式になることを示せ.

$$m(x - x_1) - l(y - y_1) = 0$$

【解】 ① から

$$\begin{cases} x - x_1 = lt & \dots \textcircled{2} \\ y - y_1 = mt & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

②  $\times m$  - ③  $\times l$  より  $m(x - x_1) - l(y - y_1) = 0$

練習 1.35 異なる 2 点  $A(\vec{a}), B(\vec{b})$  に対して, 次の式を満たす点  $P(\vec{p})$  の存在範囲は線分  $AB$  であることを確かめよ. ただし,  $s, t$  は実数とする.

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad (s + t = 1, s \geq 0, t \geq 0)$$

【解】  $P$  が線分  $AB$  上にあるとき

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{AB} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

したがって

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (1 - t)\vec{a} + t\vec{b} \end{aligned}$$

ここで,  $1 - t = s$  とおくと,  $0 \leq t \leq 1$  より  $0 \leq s \leq 1$

よって,  $P$  が線分  $AB$  上にあるとき

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad (s + t = 1, s \geq 0, t \geq 0)$$

練習 1.36  $\triangle OAB$  において、次の式を満たす点  $P$  の存在範囲を示せ。ただし、 $s, t$  は実数とする。

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB} \quad (s + t = 2, s \geq 0, t \geq 0)$$

【解】  $s + t = 2$  より  $\frac{s}{2} + \frac{t}{2} = 1$

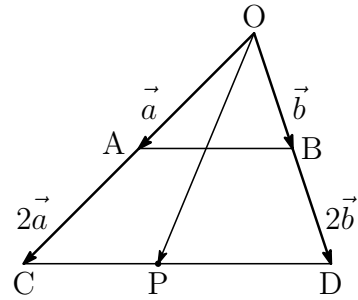
$\frac{s}{2} = s', \frac{t}{2} = t'$  とおくと

$$s' + t' = 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

$\vec{p} = \frac{s}{2}(2\vec{a}) + \frac{t}{2}(2\vec{b})$  であるから

$$\vec{p} = s'(2\vec{a}) + t'(2\vec{b})$$

$$s' + t' = 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$



したがって、 $\vec{OC} = 2\vec{OA}, \vec{OD} = 2\vec{OB}$  であるような点  $C, D$  をとると、点  $P(\vec{p})$  の存在範囲は線分  $CD$  である。

練習 1.37 次の点  $A$  を通り、ベクトル  $\vec{n}$  に垂直な直線の方程式を求めよ。

- (1)  $A(3, 4), \vec{n} = (5, 2)$       (2)  $A(-3, 2), \vec{n} = (1, -4)$

【解】 (1) 求める直線の方程式は  $5(x - 3) + 2(y - 4) = 0$

これを整理して  $5x + 2y - 23 = 0$

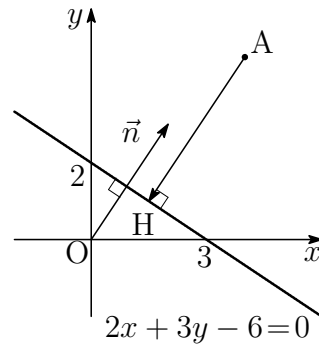
(2) 求める直線の方程式は  $\{x - (-3)\} - 4(y - 2) = 0$

これを整理して  $x - 4y + 11 = 0$

例 1.11 点 A から直線  $2x + 3y - 6 = 0$  に垂線 AH を引くとき,  $\vec{n} = (2, 3)$  も  $\vec{AH}$  も, この直線の法線ベクトルである. よって,  $\vec{AH} // \vec{n}$  であるから

$$\vec{AH} = k\vec{n}$$

となる実数  $k$  がある.



練習 1.38 例 1.11 において,  $A(2, 5)$ ,  $H(x, y)$  とする.

- (1)  $x, y$  をそれぞれ  $k$  で表せ.      (2) 点 H の座標を求めよ.

【解】 (1)  $\vec{AH} = k\vec{n}$  より

$$(x - 2, y - 5) = k(2, 3)$$

よって  $x = 2k + 2, y = 3k + 5$

(2) (1) の結果を  $2x + 3y - 6 = 0$  に代入して

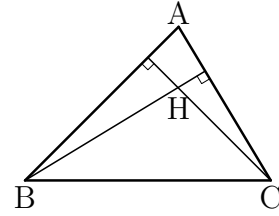
$$2(2k + 2) + 3(3k + 5) - 6 = 0$$

よって  $k = -1$

これを (1) の結果に代入して  $H(0, 2)$

1.2.4 補充問題

5 鋭角三角形ABCにおいて、頂点B, Cからそれぞれの向かい合う辺CA, ABに下ろした垂線の交点をHとすると、 $HA \perp BC$ である。このことを、ベクトルを用いて証明せよ。



[証明]  $\overrightarrow{HA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{HB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{HC} = \vec{c}$  とする。

$HB \perp CA$  より,  $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$  であるから

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0$$

すなわち  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}$  ... ①

$HC \perp AB$  より,  $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  であるから

$$\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

すなわち  $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$  ... ②

$$\begin{aligned} \text{ここで } \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

①, ② より  $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

よって  $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{BC}$  すなわち  $HA \perp BC$

[証終]

6 平行四辺形OABCの辺OAと辺OCを2:1に内分する点を、それぞれD, Eとし、対角線OBを1:2に内分する点をFとする。このとき、3点D, F, Eは一直線上にあることを証明せよ。

[証明]  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とする。

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}$$

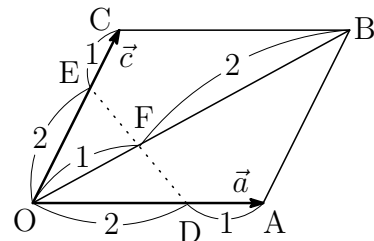
$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a} \\ &= \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{c}) - \frac{2}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{a}) \end{aligned}$$

よって  $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DF}$

したがって、3点D, F, Eは一直線上にある。

[証終]



## 1.3 章末問題

## 1.3.1 章末問題 A

1 平行四辺形 ABCD において、対角線の交点を E とする。  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$  とするとき、次のベクトルを  $\vec{b}$ ,  $\vec{d}$  を用いて表せ。

(1)  $\overrightarrow{EC}$

(2)  $\overrightarrow{BE}$

(3)  $\overrightarrow{EA}$

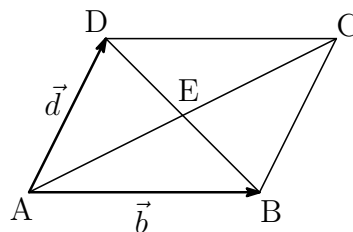
【解】 (1)  $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$$

(2)  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$$

(3)  $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{EC} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{d}$



2  $\vec{a} = (3, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 2)$  で,  $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$  とする. ただし,  $t$  は実数である.

(1)  $|\vec{c}| = 5$  となる  $t$  の値を求めよ.

(2)  $|\vec{c}|$  が最小となるとき,  $\vec{b} \perp \vec{c}$  であることを示せ.

【解】  $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b} = (3, 1) + t(1, 2) = (3+t, 1+2t)$

(1)  $|\vec{c}| = 5$  より  $|\vec{c}|^2 = 5^2$

$$\text{よって } (3+t)^2 + (1+2t)^2 = 25$$

$$\text{整理すると } 5t^2 + 10t - 15 = 0$$

$$\text{これを解いて } t = -3, 1$$

(2)  $|\vec{c}|^2 = (3+t)^2 + (1+2t)^2 = 5t^2 + 10t + 10$   
 $= 5(t+1)^2 + 5$

$|\vec{c}|^2$  が最小のとき  $|\vec{c}|$  も最小となるから,  $|\vec{c}|$  は  $t = -1$  のとき最小値をとる.  
 このとき

$$\vec{c} = (3-1, 1-2) = (2, -1)$$

$$\text{これより } \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0$$

$$\text{したがって } \vec{b} \perp \vec{c}$$

3  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 1$  で, ベクトル  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $2\vec{a} - 5\vec{b}$  が垂直であるとする.

(1)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めよ.

(2)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角  $\theta$  を求めよ.

【解】 (1)  $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (2\vec{a} - 5\vec{b})$  より

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 5\vec{b}) = 0$$

$$\text{よって } 2|\vec{a}|^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 5|\vec{b}|^2 = 0$$

$|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 1$  を代入して

$$2 \cdot 2^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 5 \cdot 1^2 = 0$$

$$\text{これを解いて } \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

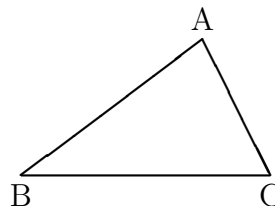
(2) (1) より  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$  であるから

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 60^\circ$$

4 平面上に  $\triangle ABC$  と点  $P, Q$  があって, 次の等式が成り立つとき,  $P, Q$  の位置を右の図に示せ.

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AP} &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AQ} + 2\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CQ} &= \vec{0} \end{aligned}$$



【解】  $3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  から

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} = \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{1+2}$$

よって, 点  $P$  は線分  $BC$  を  $1:2$  に内分する.

また,  $\overrightarrow{AQ} + 2\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CQ} = \vec{0}$  から

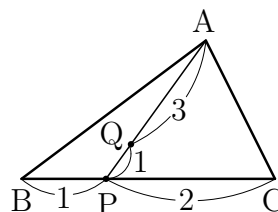
$$\overrightarrow{AQ} + 2(\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

よって  $4\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AP}$

すなわち  $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AP}$

したがって, 点  $Q$  は線分  $AP$  を  $3:1$  に内分する.

以上から,  $P, Q$  の位置を図示すると右の図のようになる.



5  $\triangle ABC$  の外心を  $O$  , 重心を  $G$  とし ,  $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$  とする . ただし ,  $\triangle ABC$  は直角三角形ではないとする .

- (1) 3 点  $O$  ,  $G$  ,  $H$  は一直線上にあることを証明せよ .  
 (2)  $BH \perp CA$  かつ  $CH \perp AB$  であることを証明せよ .

[証明] (1)  $G$  は  $\triangle ABC$  の重心であるから

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

$$\text{よって } \vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$$

したがって , 3 点  $O$  ,  $G$  ,  $H$  は一直線上にある .

(2)  $O$  は  $\triangle ABC$  の外心であるから  $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$

$$\begin{aligned} \vec{BH} \cdot \vec{CA} &= (\vec{OH} - \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} - \vec{OC}) \\ &= (\vec{OA} + \vec{OC}) \cdot (\vec{OA} - \vec{OC}) \\ &= |\vec{OA}|^2 - |\vec{OC}|^2 = 0 \end{aligned}$$

よって ,  $\vec{BH} \perp \vec{CA}$  となるから  $BH \perp CA$   
 同様にして

$$\begin{aligned} \vec{CH} \cdot \vec{AB} &= (\vec{OH} - \vec{OC}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= (\vec{OB} + \vec{OA}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= |\vec{OB}|^2 - |\vec{OA}|^2 = 0 \end{aligned}$$

よって ,  $\vec{CH} \perp \vec{AB}$  となるから  $CH \perp AB$

[証終]

6  $\triangle ABC$  において、辺  $AB$  を  $1:2$  に内分する点を  $D$ 、辺  $BC$  を  $3:1$  に内分する点を  $E$ 、辺  $CA$  を  $2:3$  に内分する点を  $F$  とする。また、線分  $AE$  と線分  $CD$  の交点を  $P$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$  とするとき、 $\overrightarrow{AP}$  を  $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  を用いて表せ。  
 (2) 3点  $B$ 、 $P$ 、 $F$  は一直線上にあることを示せ。

【解】 (1)  $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AE}$  とする。

$$\overrightarrow{AE} = \frac{\vec{b} + 3\vec{c}}{3+1} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$$

よって  $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AE}$

$$= \frac{1}{4}k\vec{b} + \frac{3}{4}k\vec{c}$$

$CP:PD = t:(1-t)$  とする。

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AD} + (1-t)\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{3}t\vec{b} + (1-t)\vec{c}$$

$\overrightarrow{AP}$  の  $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  を用いた表し方は1通りであるから

$$\frac{1}{4}k = \frac{1}{3}t, \quad \frac{3}{4}k = 1-t$$

これを解くと  $k = \frac{2}{3}$ 、 $t = \frac{1}{2}$

したがって  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

(2)  $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}$

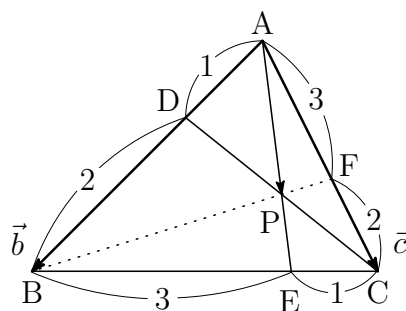
$$= \left(\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) - \vec{b} = \frac{-5\vec{b} + 3\vec{c}}{6}$$

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$

$$= \frac{3}{5}\vec{c} - \vec{b} = \frac{-5\vec{b} + 3\vec{c}}{5}$$

よって  $\overrightarrow{BP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BF}$

したがって、3点  $B$ 、 $P$ 、 $F$  は一直線上にある。



## 1.3.2 章末問題 B

7  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$  のとき, 次の値の最大値, 最小値を求めよ.

(1)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  (2)  $|\vec{a} - \vec{b}|$

【解】 (1)  $\vec{a}, \vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \\ &= 1 \times 2 \times \cos \theta = 2 \cos \theta\end{aligned}$$

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$  であるから

$$-2 \leq 2 \cos \theta \leq 2$$

すなわち  $-2 \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq 2$

したがって,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  の最大値は 2, 最小値は -2

$$\begin{aligned}(2) \quad |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 1^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2 = 5 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}\end{aligned}$$

(1) より  $-2 \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq 2$  であるから

$$1 \leq |\vec{a} - \vec{b}|^2 \leq 9$$

$|\vec{a} - \vec{b}| \geq 0$  より  $1 \leq |\vec{a} - \vec{b}| \leq 3$

よって,  $|\vec{a} - \vec{b}|$  の最大値は 3, 最小値は 1

8 2点  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$  と原点  $O$  を頂点とする  $\triangle OAB$  において,  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とする. このとき,  $\triangle OAB$  の面積  $S$  は次の式で表されることを示せ.

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

[証明]  $\angle AOB = \theta$  とすると,  $0^\circ < \theta < 180^\circ$  より  $\sin \theta > 0$  によって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \end{aligned}$$

また,  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  より

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2, |\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2, \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1| \end{aligned}$$

したがって

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

[証終]

9  $\triangle ABC$  と点  $P$  に対して, 等式  $3\vec{AP} + 4\vec{BP} + 5\vec{CP} = \vec{0}$  が成り立つとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 点  $P$  は  $\triangle ABC$  に対してどのような位置にあるか.
- (2) 面積の比  $\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB$  を求めよ.

【解】 (1)  $\vec{BP} = \vec{AP} - \vec{AB}$ ,  $\vec{CP} = \vec{AP} - \vec{AC}$  を与式に代入すると

$$3\vec{AP} + 4(\vec{AP} - \vec{AB}) + 5(\vec{AP} - \vec{AC}) = \vec{0}$$

$$12\vec{AP} = 4\vec{AB} + 5\vec{AC}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } \vec{AP} &= \frac{1}{12}(4\vec{AB} + 5\vec{AC}) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{4\vec{AB} + 5\vec{AC}}{9} \end{aligned}$$

よって,  $BC$  を  $5:4$  に内分する点を  $D$  とすると

$$\vec{AP} = \frac{3}{4}\vec{AD}$$

ゆえに, 点  $P$  は線分  $AD$  を  $3:1$  に内分する点である.

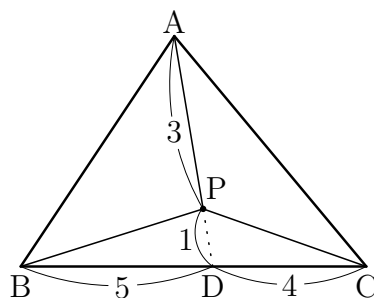
(2)  $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると

$$\triangle PBC = \frac{PD}{AD} \triangle ABC = \frac{1}{4}S$$

$$\triangle PCA = \frac{AP}{AD} \triangle ACD = \frac{AP}{AD} \cdot \frac{DC}{BC} \triangle ABC = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} S = \frac{1}{3}S$$

$$\triangle PAB = \frac{AP}{AD} \triangle ABD = \frac{AP}{AD} \cdot \frac{BD}{BC} \triangle ABC = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{9} S = \frac{5}{12}S$$

$$\text{よって } \triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB = \frac{1}{4}S : \frac{1}{3}S : \frac{5}{12}S = 3 : 4 : 5$$



**10**  $\triangle ABC$  において、辺  $BC$  の中点を  $M$  とすると、次の等式が成り立つ。

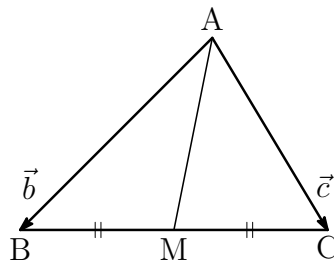
$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

このことを、ベクトルを用いて証明せよ。

[証明]  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$  とすると

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{\vec{c} - \vec{b}}{2} \end{aligned}$$



よって

$$\begin{aligned} 2(AM^2 + BM^2) &= 2(|\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{BM}|^2) \\ &= 2\left(\frac{1}{4}|\vec{b} + \vec{c}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{c} - \vec{b}|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\{(\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + (\vec{c} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})\} \\ &= \frac{1}{2}(|\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) \\ &= |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = AB^2 + AC^2 \end{aligned}$$

したがって  $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

[証終]

**11**  $\triangle OAB$  において、辺  $OB$  を  $2:1$  に内分する点を  $C$ 、線分  $AC$  の中点を  $M$  とし、直線  $OM$  と辺  $AB$  の交点を  $D$  とする。次のものを求めよ。

- (1)  $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OM}$  を満たす実数  $k$  の値    (2)  $AD:DB$

【解】 (1)  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とする。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= k\overrightarrow{OM} \\ &= \frac{1}{2}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b}\end{aligned}$$

ここで、点  $D$  は直線  $AB$  上にあるから

$$\frac{1}{2}k + \frac{1}{3}k = 1$$

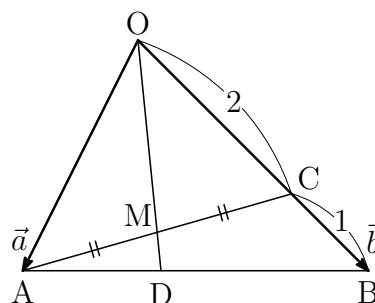
これを解いて  $k = \frac{6}{5}$

(2) (1) より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \frac{6}{5}\overrightarrow{OM} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} = \frac{3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{5} \\ &= \frac{3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{2+3}\end{aligned}$$

よって、点  $D$  は線分  $AB$  を  $2:3$  に内分する点である。

したがって  $AD:DB = 2:3$





## 第 2 章 空間のベクトル

### 2.1.1 空間の点

練習 2.1 次の平面に関して点  $P(1, 3, 2)$  と対称な点の座標を, それぞれ求めよ.

- (1)  $yz$  平面 (2)  $zx$  平面

【答】 (1)  $(-1, 3, 2)$   
(2)  $(1, -3, 2)$

練習 2.2 原点  $O$  と次の点の距離を求めよ.

- (1)  $P(2, 3, 6)$  (2)  $Q(3, -4, 5)$

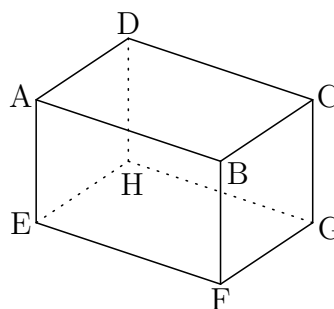
【解】 (1)  $OP = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$   
(2)  $OQ = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

### 2.1.2 空間のベクトル

例 2.2 右の図の直方体において, 始点, 終点  
がともに頂点となる有向線分でベクトル  
を考えると

$$\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{EF} = \vec{HG}$$

また,  $\vec{CD}$ ,  $\vec{FE}$ ,  $\vec{GH}$  は, いずれも  $\vec{AB}$   
の逆ベクトルである.



練習 2.3 例 2.2 において,  $\vec{AE}$  に等しいベクトルをすべてあげよ. また,  $\vec{AD}$  の  
逆ベクトルで  $\vec{DA}$  以外のものをすべてあげよ.

【答】  $\vec{AE}$  に等しいベクトルは,  $\vec{BF}$ ,  $\vec{CG}$ ,  $\vec{DH}$   
 $\vec{AD}$  の逆ベクトルは,  $\vec{HE}$ ,  $\vec{GF}$ ,  $\vec{CB}$

例 2.3 右の図の立体は直方体である .

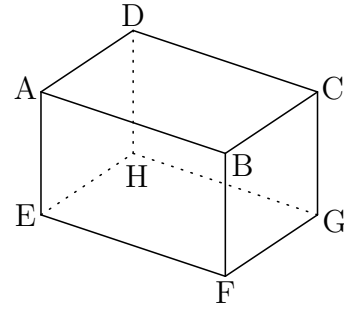
(1)  $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$  であるから

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$$

(2)  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  ,  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$  であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CG} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG} \end{aligned}$$



練習 2.4 例 2.3 の直方体において , 次の □ に適する頂点の文字を求めよ .

(1)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{A\Box}$

(2)  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{\Box D}$

【解】 (1)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  よって , □ は C

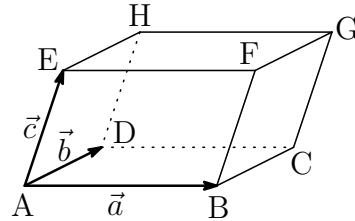
(2)  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$  よって , □ は B

例題 2.1 右の図の平行六面体において ,

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} , \overrightarrow{AD} = \vec{b} , \overrightarrow{AE} = \vec{c}$$

とするとき , 次のベクトルを  $\vec{a} , \vec{b} , \vec{c}$  を用いて表せ .

(1)  $\overrightarrow{AG}$                       (2)  $\overrightarrow{FD}$



【解】 (1)  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$$\begin{aligned} (2) \quad \overrightarrow{FD} &= \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HD} = -\vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c}) \\ &= -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \end{aligned}$$

練習 2.5 例題 2.1 の平行六面体の図において , 次のベクトルを  $\vec{a} , \vec{b} , \vec{c}$  を用いて表せ .

(1)  $\overrightarrow{EC}$

(2)  $\overrightarrow{BH}$

(3)  $\overrightarrow{DF}$

(4)  $\overrightarrow{HF}$

【解】 (1)  $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

$$(2) \quad \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} = \vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$(4) \quad \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$

## 2.1.3 ベクトルの成分

練習 2.6 次のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  が等しくなるように,  $x, y, z$  の値を定めよ.

$$(1) \vec{a} = (2, -1, -3), \quad \vec{b} = (x - 4, y + 2, -z + 1)$$

$$(2) \vec{a} = (-4, 2 - y, 8), \quad \vec{b} = (3x - 1, 0, -2z)$$

【解】 (1)  $\vec{a} = \vec{b}$  より  $2 = x - 4, -1 = y + 2, -3 = -z + 1$

これを解いて  $x = 6, y = -3, z = 4$

$$(2) \vec{a} = \vec{b} \text{ より } -4 = 3x - 1, 2 - y = 0, 8 = -2z$$

これを解いて  $x = -1, y = 2, z = -4$

練習 2.7 次のベクトルの大きさを求めよ.

$$(1) \vec{a} = (-1, 2, -2) \quad (2) \vec{b} = (-5, 3, -4)$$

【解】 (1)  $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

$$(2) |\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

練習 2.8  $\vec{a} = (1, 3, -2), \vec{b} = (4, -3, 0)$  のとき, 次のベクトルを成分表示せよ.

$$(1) \vec{a} + \vec{b} \quad (2) \vec{a} - \vec{b} \quad (3) 3\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$(4) 2\vec{a} - 3\vec{b} \quad (5) 2(-\vec{a} + 4\vec{b}) \quad (6) -3(\vec{a} - 2\vec{b})$$

【解】 (1)  $\vec{a} + \vec{b} = (1, 3, -2) + (4, -3, 0) = (1 + 4, 3 - 3, -2 + 0)$   
 $= (5, 0, -2)$

$$(2) \vec{a} - \vec{b} = (1, 3, -2) - (4, -3, 0) = (1 - 4, 3 + 3, -2 - 0)$$
  
 $= (-3, 6, -2)$

$$(3) 3\vec{a} + 2\vec{b} = 3(1, 3, -2) + 2(4, -3, 0)$$
  
 $= (3 + 8, 9 - 6, -6 + 0) = (11, 3, -6)$

$$(4) 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(1, 3, -2) - 3(4, -3, 0)$$
  
 $= (2 - 12, 6 + 9, -4 + 0) = (-10, 15, -4)$

$$(5) 2(-\vec{a} + 4\vec{b}) = -2(1, 3, -2) + 8(4, -3, 0)$$
  
 $= (-2 + 32, -6 - 24, 4 + 0) = (30, -30, 4)$

$$(6) -3(\vec{a} - 2\vec{b}) = -3(1, 3, -2) + 6(4, -3, 0)$$
  
 $= (-3 + 24, -9 - 18, 6 + 0) = (21, -27, 6)$

練習 2.9 次の2点  $A, B$  について,  $\overrightarrow{AB}$  を成分表示し,  $|\overrightarrow{AB}|$  を求めよ.

- (1)  $A(2, 1, 4), B(3, -1, 5)$       (2)  $A(3, 0, -2), B(1, -4, 2)$

- 【解】 (1)  $\overrightarrow{AB} = (3 - 2, -1 - 1, 5 - 4) = (1, -2, 1)$   
 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$   
 (2)  $\overrightarrow{AB} = (1 - 3, -4 - 0, 2 - (-2)) = (-2, -4, 4)$   
 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$

### 2.1.4 ベクトルの内積

練習 2.10 次の2つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  の内積およびなす角を求めよ.

- (1)  $\vec{a} = (2, -1, -2), \vec{b} = (4, 3, -5)$   
 (2)  $\vec{a} = (2, 0, 3), \vec{b} = (0, 1, 0)$

- 【解】 (1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 4 + (-1) \times 3 + (-2) \times (-5) = 15$

$$\text{また } |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$\vec{a}, \vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{15}{3 \times 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 45^\circ$$

- (2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 0 + 0 \times 1 + 3 \times 0 = 0$

$\vec{a}, \vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{0}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 0$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 90^\circ$$

練習 2.11 3点  $A(6, 7, -8)$ ,  $B(5, 5, -6)$ ,  $C(6, 4, -2)$  を頂点とする  $\triangle ABC$  において,  $\angle ABC$  の大きさを求めよ.

【解】  $\vec{BA} = (6 - 5, 7 - 5, -8 - (-6)) = (1, 2, -2)$

$$\vec{BC} = (6 - 5, 4 - 5, -2 - (-6)) = (1, -1, 4)$$

よって  $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 1 \times 1 + 2 \times (-1) + (-2) \times 4 = -9$

また  $|\vec{BA}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

したがって  $\cos \angle ABC = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{-9}{3 \times 3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ \leq \angle ABC \leq 180^\circ$  であるから  $\angle ABC = 135^\circ$

練習 2.12 ベクトル  $\vec{a} = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{b} = (-1, 1, 0)$  の両方に垂直で, 大きさが 3 のベクトル  $\vec{p}$  を求めよ.

【解】  $\vec{p} = (x, y, z)$  とする.

$$\vec{a} \cdot \vec{p} = 0 \text{ であるから } x + z = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{p} = 0 \text{ であるから } -x + y = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$|\vec{p}| = 3 \text{ であるから } x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ② から,  $y, z$  を  $x$  で表すと  $y = x, z = -x$

これらを ③ に代入すると  $x^2 + x^2 + (-x)^2 = 3^2$

これを解くと  $x = \pm\sqrt{3}$

$$x = \sqrt{3} \text{ のとき } y = \sqrt{3}, z = -\sqrt{3}$$

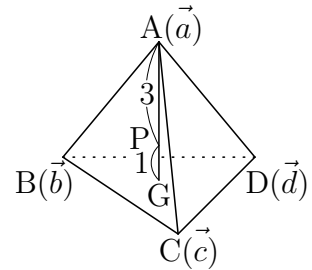
$$x = -\sqrt{3} \text{ のとき } y = -\sqrt{3}, z = \sqrt{3}$$

したがって

$$\vec{p} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}) \text{ または } \vec{p} = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

## 2.1.5 位置ベクトル

練習 2.13 4点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$ ,  $C(\vec{c})$ ,  $D(\vec{d})$  を頂点とする四面体  $ABCD$  において,  $\triangle BCD$  の重心を  $G(\vec{g})$ , 線分  $AG$  を  $3:1$  に内分する点を  $P(\vec{p})$  とする.  $\vec{p}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  を用いて表せ.



【解】  $\triangle BCD$  の重心  $G$  の位置ベクトル  $\vec{g}$  を  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  で表すと

$$\vec{g} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}$$

$P$  は線分  $AG$  を  $3:1$  に内分する点であるから

$$\vec{p} = \frac{\vec{a} + 3\vec{g}}{3+1} = \frac{\vec{a} + 3\vec{g}}{4}$$

$$3\vec{g} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \text{ より } \vec{p} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}$$

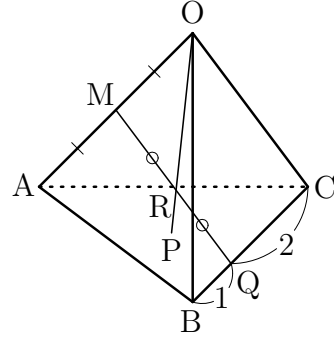
練習 2.14 四面体 OABC において、辺 OA の中点を M、辺 BC を 1:2 に内分する点を Q、線分 MQ の中点を R とし、直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。OR:OP を求めよ。

【解】O に関する位置ベクトルを考え、 $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$  とする。P は平面 ABC 上にあるから

$$\vec{CP} = s\vec{CA} + t\vec{CB}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OC} + \vec{CP} \\ &= \vec{OC} + s\vec{CA} + t\vec{CB} \\ &= \vec{c} + s(\vec{a} - \vec{c}) + t(\vec{b} - \vec{c}) \\ &= s\vec{a} + t\vec{b} + (1 - s - t)\vec{c} \end{aligned}$$



また、P は直線 OR 上にあるから、 $OR:OP = 1:k$  とおくと

$$\vec{OP} = k\vec{OR} = k \left( \frac{\vec{OM} + \vec{OQ}}{2} \right) = \frac{1}{2}k\vec{OM} + \frac{1}{2}k\vec{OQ} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \vec{OQ} = \frac{2\vec{OB} + \vec{OC}}{1+2} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

であるから、①に代入して

$$\vec{OP} = \frac{1}{2}k \left( \frac{1}{2}\vec{a} \right) + \frac{1}{2}k \left( \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \right) = \frac{1}{4}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{6}k\vec{c}$$

$\vec{OP}$  の  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  を用いた表し方はただ 1 通りであるから

$$s = \frac{1}{4}k, \quad t = \frac{1}{3}k, \quad 1 - s - t = \frac{1}{6}k$$

これを解くと、 $k = \frac{4}{3}$  であるから  $OR:OP = 1:\frac{4}{3} = 3:4$

$$\begin{aligned} \text{【別解】 } \vec{OR} &= \frac{\vec{OM} + \vec{OQ}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{2\vec{OB} + \vec{OC}}{3} \right) \\ &= \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{6}\vec{OC} \end{aligned}$$

P は直線 OR 上にあるから,  $\vec{OP} = k\vec{OR}$  となる実数  $k$  がある.

$$\vec{OP} = k\vec{OR} = \frac{1}{4}k\vec{OA} + \frac{1}{3}k\vec{OB} + \frac{1}{6}k\vec{OC}$$

P は平面 ABC 上にあるから  $\frac{1}{4}k + \frac{1}{3}k + \frac{1}{6}k = 1$

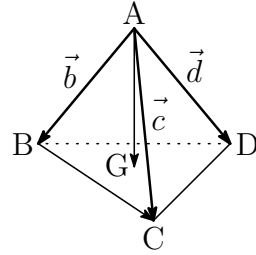
これを解くと,  $k = \frac{4}{3}$  であるから  $OR : OP = 1 : \frac{4}{3} = 3 : 4$

練習 2.15 正四面体 ABCD において,  $\triangle BCD$  の重心を G とすると,  $AG \perp BC$  である. このことを, ベクトルを用いて証明せよ.

[証明]  $\vec{AB} = \vec{b}$ ,  $\vec{AC} = \vec{c}$ ,  $\vec{AD} = \vec{d}$  とすると

$$\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

$$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$$



であるから

$$\begin{aligned} \vec{AG} \cdot \vec{BC} &= \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \frac{1}{3}(|\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2) + \frac{1}{3}(\vec{d} \cdot \vec{c} - \vec{d} \cdot \vec{b}) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

正四面体 ABCD においては,  $\vec{d}$  と  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  と  $\vec{b}$  のなす角は, ともに  $60^\circ$  であるから

$$\vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| |\vec{c}| \cos 60^\circ,$$

$$\vec{d} \cdot \vec{b} = |\vec{d}| |\vec{b}| \cos 60^\circ$$

$|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}|$  であるから  $|\vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2$ ,  $\vec{d} \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{b}$

よって, ① により  $\vec{AG} \cdot \vec{BC} = 0$  であり,  $\vec{AG} \perp \vec{BC}$  となる.

したがって  $AG \perp BC$

[証終]

## 2.1.6 座標空間における図形

練習 2.16 2点  $A(1, 3, -2)$ ,  $B(4, -3, 1)$  について, 次のものを求めよ.

- (1) 2点  $A, B$  間の距離                      (2) 線分  $AB$  の中点の座標  
 (3) 線分  $AB$  を  $2:1$  に内分する点の座標  
 (4) 線分  $AB$  を  $2:1$  に外分する点の座標

【解】 (1)  $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (-3-3)^2 + \{1 - (-2)\}^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

(2)  $\left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+(-3)}{2}, \frac{-2+1}{2}\right)$  より  $\left(\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$

(3)  $\left(\frac{1 \times 1 + 2 \times 4}{2+1}, \frac{1 \times 3 + 2 \times (-3)}{2+1}, \frac{1 \times (-2) + 2 \times 1}{2+1}\right)$  より  $(3, -1, 0)$

(4)  $\left(\frac{-1 \times 1 + 2 \times 4}{2-1}, \frac{-1 \times 3 + 2 \times (-3)}{2-1}, \frac{-1 \times (-2) + 2 \times 1}{2-1}\right)$  より  
 $(7, -9, 4)$

練習 2.17 3点  $A(2, -1, 4)$ ,  $B(1, 3, 0)$ ,  $C(3, 1, 2)$  を頂点とする  $\triangle ABC$  の重心の座標を, 原点  $O$  に関する位置ベクトルを利用して求めよ.

【解】  $\triangle ABC$  の重心を  $G$  とすると  $\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$

よって, 点  $G$  の座標は

$$\left(\frac{2+1+3}{3}, \frac{-1+3+1}{3}, \frac{4+0+2}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad (2, 1, 2)$$

練習 2.18 点  $(1, 2, 3)$  を通り, 次のような平面の方程式を求めよ.

- (1)  $xy$  平面に平行                      (2)  $yz$  平面に平行                      (3)  $y$  軸に垂直

【答】 (1)  $z = 3$

(2)  $x = 1$

(3)  $y = 2$

練習 2.19 次のような球面の方程式を求めよ.

- (1) 原点を中心とする半径 3 の球面
- (2) 点  $(1, 2, -3)$  を中心とする半径 4 の球面
- (3) 点  $A(0, 4, 1)$  を中心とし, 点  $B(2, 4, 5)$  を通る球面

【解】 (1)  $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$  すなわち  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

$$(2) (x-1)^2 + (y-2)^2 + \{z - (-3)\}^2 = 4^2$$

すなわち  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$

(3) 線分 AB の長さは

$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (4-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20}$$

よって, 求める球面の方程式は

$$x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{20})^2$$

すなわち  $x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 20$

【別解】 (3) 求める球面の方程式は, 半径を  $r$  とすると

$$x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

この球面が点  $B(2, 4, 5)$  を通るから

$$2^2 + (4-4)^2 + (5-1)^2 = r^2$$

よって  $r^2 = 20$

したがって, 求める球面の方程式は

$$x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 20$$

練習 2.20 2点  $A(4, -2, 1)$ ,  $B(0, 4, -5)$  を直径の両端とする球面の方程式を求めよ.

【解】線分  $AB$  の中点を  $C$  とすると, この球面の中心は点  $C$  で, 半径は線分  $CA$  の長さである.  $C$  の座標は

$$\left( \frac{4+0}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{1-5}{2} \right) \quad \text{すなわち} \quad (2, 1, -2)$$

$$\text{よって} \quad CA = \sqrt{(4-2)^2 + (-2-1)^2 + \{1 - (-2)\}^2} = \sqrt{22}$$

したがって, 求める球面の方程式は

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + \{z - (-2)\}^2 = (\sqrt{22})^2$$

$$\text{すなわち} \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 22$$

応用例題 2.5 球面  $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5^2$  と  $xy$  平面が交わる部分は円である. その中心の座標と半径を求めよ.

考え方  $xy$  平面は方程式  $z=0$  で表される. 球面の方程式で,  $z=0$  とすると,  $x, y$  の2次方程式が得られる.

【解】球面の方程式で,  $z=0$  とすると

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 + (0-3)^2 = 5^2$$

$$\text{すなわち} \quad (x-4)^2 + (y+2)^2 = 4^2 \quad \leftarrow 5^2 - 3^2 = 16 = 4^2$$

この方程式は,  $xy$  平面上では円を表す.  $\leftarrow xy$  平面上では,  $z$  座標 = 0

その中心の座標は  $(4, -2, 0)$ , 半径は4である.

練習 2.21 応用例題 2.5 の球面と  $yz$  平面が交わる部分は円である. その中心の座標と半径を求めよ.

【解】球面の方程式で,  $x=0$  とすると

$$(0-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5^2$$

$$\text{すなわち} \quad (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3^2$$

この方程式は,  $yz$  平面上では円を表す.

その中心の座標は  $(0, -2, 3)$ , 半径は3である.

## 2.1.7 補充問題

1  $\vec{p} = (-1, 5, 0)$  を, 3つのベクトル  $\vec{a} = (1, -2, 3)$ ,  $\vec{b} = (-2, 1, 0)$ ,  $\vec{c} = (2, -3, 1)$  と適当な実数  $s, t, u$  を用いて,  $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$  の形に表せ.

【解】  $s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} = s(1, -2, 3) + t(-2, 1, 0) + u(2, -3, 1)$   
 $= (s - 2t + 2u, -2s + t - 3u, 3s + u)$

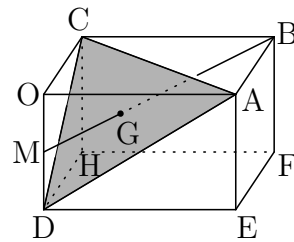
$\vec{p} = (-1, 5, 0)$  であるから

$$s - 2t + 2u = -1, \quad -2s + t - 3u = 5, \quad 3s + u = 0$$

これを解くと  $s = 1, t = -2, u = -3$

したがって  $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}$

2 右の図のように, 直方体 OABC-DEFH において,  $\triangle ACD$  の重心を G, 辺 OD の中点を M とするとき, 点 G は線分 BM 上にあり, BM を 2 : 1 に内分することを証明せよ.



[証明] 点 G は  $\triangle ACD$  の重心であるから

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD}}{3}$$

線分 BM を 2 : 1 に内分する点を  $G'$  とすると

$$\vec{OG'} = \frac{\vec{OB} + 2\vec{OM}}{2+1}$$

$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{OC}$ ,  $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OD}$  であるから

$$\vec{OG'} = \frac{(\vec{OA} + \vec{OC}) + 2 \times \frac{1}{2}\vec{OD}}{3} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD}}{3}$$

よって  $\vec{OG'} = \vec{OG}$

点  $G'$  と点 G は一致するから, 点 G は線分 BM を 2 : 1 に内分する. [証終]

**3** 3点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(-1, 0, 1)$  から等距離にある  $yz$  平面上の点  $P$  の座標を求めよ.

【解】  $P$  は  $yz$  平面上の点であるから,  $P(0, y, z)$  とおく.

条件より  $OP = AP = BP$

$OP = AP$  すなわち  $OP^2 = AP^2$  より

$$0^2 + y^2 + z^2 = (0 - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2$$

整理して  $2y + z - 3 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

$OP = BP$  すなわち  $OP^2 = BP^2$  より

$$0^2 + y^2 + z^2 = \{0 - (-1)\}^2 + (y - 0)^2 + (z - 1)^2$$

整理して  $z = 1 \quad \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  より  $y = 1, z = 1$

よって, 点  $P$  の座標は  $(0, 1, 1)$

## 2.2 章末問題

### 2.2.1 章末問題 A

**1** 四面体  $ABCD$  の辺  $AD$  の中点を  $M$ , 辺  $BC$  の中点を  $N$  とするとき,  
 $\overrightarrow{MN} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{DC}$  を満たす実数  $s, t$  の値を求めよ.

【解】  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$   
 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$

辺々を加えると

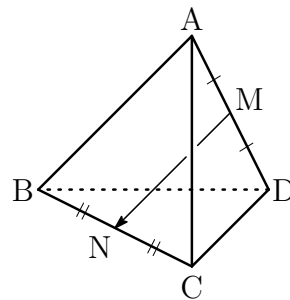
$$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN})$$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$  であるから

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

すなわち  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

したがって  $s = \frac{1}{2}, t = \frac{1}{2}$



**2** 4点  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(5, 5, -1)$ ,  $C(x, y, z)$ ,  $D(-4, 2, 3)$  が平行四辺形 ABCD の頂点となるように,  $x, y, z$  の値を求めよ.

【解】  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  が成り立てばよいから

$$(-4 - 1, 2 - 2, 3 - 1) = (x - 5, y - 5, z - (-1))$$

よって  $-5 = x - 5, 0 = y - 5, 2 = z + 1$

これを解いて  $x = 0, y = 5, z = 1$

**3**  $\vec{a} = (1, 3, -2)$ ,  $\vec{b} = (1, -2, 0)$  と実数  $t$  に対して,  $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$  とする.  $\vec{b} \perp \vec{p}$  となるような  $t$  の値を求めよ. また, このときの  $|\vec{p}|$  を求めよ.

【解】  $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b} = (1, 3, -2) + t(1, -2, 0)$   
 $= (1 + t, 3 - 2t, -2)$

$\vec{b} \perp \vec{p}$  より  $\vec{b} \cdot \vec{p} = 0$

よって  $1 \times (1 + t) + (-2) \times (3 - 2t) + 0 \times (-2) = 0$

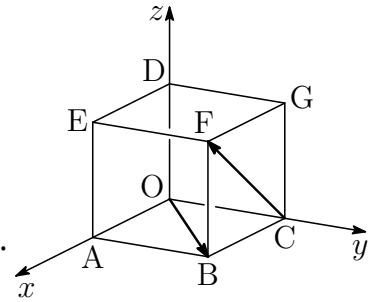
これを解いて  $t = 1$

このとき,  $\vec{p} = (2, 1, -2)$  であるから

$$|\vec{p}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

4 右の図の立方体  $OABC-DEFG$  は、1 辺の長さが 2 である。

- (1) ベクトル  $\vec{OB}$  と  $\vec{CF}$  を成分表示せよ。
- (2) 内積  $\vec{OB} \cdot \vec{CF}$  を求めよ。
- (3) ベクトル  $\vec{OB}$  と  $\vec{CF}$  のなす角を求めよ。



【解】 (1)  $\vec{OB} = (2, 2, 0)$

$$\begin{aligned}\vec{CF} &= \vec{OF} - \vec{OC} = (2, 2, 2) - (0, 2, 0) \\ &= (2, 0, 2)\end{aligned}$$

(2) (1) より  $\vec{OB} \cdot \vec{CF} = 2 \times 2 + 2 \times 0 + 0 \times 2 = 4$

(3)  $|\vec{OB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$|\vec{CF}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(2) より  $\vec{OB} \cdot \vec{CF} = 4$  である。  $\vec{OB}$  と  $\vec{CF}$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{CF}}{|\vec{OB}| |\vec{CF}|} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $\theta = 60^\circ$

5  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  を、それぞれ  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸に関する基本ベクトルとし、ベクトル  $\vec{a} = (-1, \sqrt{2}, 1)$  と  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  のなす角をそれぞれ  $\alpha, \beta, \gamma$  とする。

(1)  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  の値を求めよ。 (2)  $\alpha, \beta, \gamma$  を求めよ。

【解】 (1)  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{よって} \quad \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_1}{|\vec{a}| |\vec{e}_1|} = \frac{-1}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_2}{|\vec{a}| |\vec{e}_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_3}{|\vec{a}| |\vec{e}_3|} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \gamma = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$\alpha = 120^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ$$

6 2点  $A(1, 2, 2), B(2, 3, 4)$  に対して、次のような点の座標を求めよ。

(1)  $A, B$  から等距離にある  $x$  軸上の点  $P$

(2)  $\triangle ABP$  の重心  $G$

【解】 (1)  $P(x, 0, 0)$  とおくと、 $AP^2 = BP^2$  より

$$(x-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 = (x-2)^2 + (-3)^2 + (-4)^2$$

$$x = 10 \text{ より、点 } P \text{ の座標は } (10, 0, 0)$$

$$(2) \left( \frac{1+2+10}{3}, \frac{2+3+0}{3}, \frac{2+4+0}{3} \right) \text{ より } \left( \frac{13}{3}, \frac{5}{3}, 2 \right)$$

**7** 球面  $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 5^2$  と平面  $z=3$  が交わる部分は円である．その中心の座標と半径を求めよ．

【解】球面の方程式で， $z=3$  とすると

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (3-4)^2 = 5^2$$

すなわち  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 24, z=3$

よって，この円の中心の座標は  $(2, -3, 3)$ ，半径は  $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$  である．

### 2.2.2 章末問題 B

**8** 3点  $A(a, -1, 5)$ ， $B(4, b, -7)$ ， $C(5, 5, -13)$  が一直線上あるとき， $a, b$  の値を求めよ．

【解】 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$  であるから  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$  となる実数  $k$  があるから

$$(4-a, b+1, -12) = k(5-a, 6, -18)$$

よって  $4-a = k(5-a) \quad \dots \textcircled{1}$

$$b+1 = 6k \quad \dots \textcircled{2}$$

$$-12 = -18k \quad \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$  より  $k = \frac{2}{3}$

$\textcircled{1}$ ， $\textcircled{2}$  に  $k = \frac{2}{3}$  を代入して

$$4-a = \frac{2}{3}(5-a), b+1 = 6 \times \frac{2}{3}$$

これを解いて  $a=2, b=3$

9 3点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(-1, -2, 1)$ ,  $B(2, 2, 0)$  を頂点とする  $\triangle OAB$  について, 次の問いに答えよ.

(1)  $\angle AOB$  の大きさを求めよ. (2)  $\triangle OAB$  の面積  $S$  を求めよ.

【解】 (1)  $\vec{OA} = (-1, -2, 1)$ ,  $\vec{OB} = (2, 2, 0)$  より

$$|\vec{OA}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{OB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -1 \times 2 + (-2) \times 2 + 1 \times 0 = -6$$

$$\text{よって } \cos \angle AOB = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \frac{-6}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

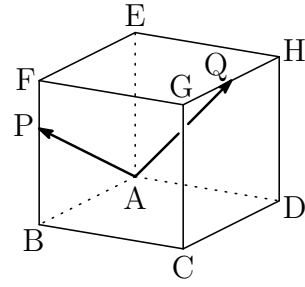
$0^\circ \leq \angle AOB \leq 180^\circ$  であるから  $\angle AOB = 150^\circ$

(2)  $\triangle OAB$  の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin \angle AOB \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times 2\sqrt{2} \times \sin 150^\circ \\ &= 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

**10** 1辺の長さが2の立方体 ABCD-EFGH において、辺 BF 上に点 P をとり、辺 GH 上に点 Q をとる。

- (1)  $\vec{BP} \cdot \vec{HQ}$  を求めよ。
- (2)  $\vec{AP} \cdot \vec{AQ}$  を  $|\vec{BP}|$ 、 $|\vec{HQ}|$  を用いて表せ。
- (3)  $\vec{AP} \cdot \vec{AQ}$  の最大値を求めよ。



**【解】** (1)  $\vec{BP} \perp \vec{HQ}$  より  $\vec{BP} \cdot \vec{HQ} = 0$

$$(2) \vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP}$$

$$\vec{AQ} = \vec{AH} + \vec{HQ} = \vec{AE} + \vec{EH} + \vec{HQ}$$

よって

$$\begin{aligned} \vec{AP} \cdot \vec{AQ} &= (\vec{AB} + \vec{BP}) \cdot (\vec{AE} + \vec{EH} + \vec{HQ}) \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AE} + \vec{AB} \cdot \vec{EH} + \vec{AB} \cdot \vec{HQ} \\ &\quad + \vec{BP} \cdot \vec{AE} + \vec{BP} \cdot \vec{EH} + \vec{BP} \cdot \vec{HQ} \\ &= 0 + 0 + 2|\vec{HQ}| \cos 0^\circ + 2|\vec{BP}| \cos 0^\circ + 0 + 0 \\ &= 2|\vec{BP}| + 2|\vec{HQ}| \end{aligned}$$

- (3)  $|\vec{BP}|$  の最大値は P が F に一致するときで  $|\vec{BP}| = 2$
  - $|\vec{HQ}|$  の最大値は Q が G に一致するときで  $|\vec{HQ}| = 2$
- このとき  $\vec{AP} \cdot \vec{AQ}$  は最大となり、最大値は

$$\vec{AP} \cdot \vec{AQ} = 2 \times 2 + 2 \times 2 = 8$$

11 四面体 ABCD において、次のことが成り立つ。

$$AC \perp BD \quad \text{ならば} \quad AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$$

このことを、ベクトルを用いて証明せよ。

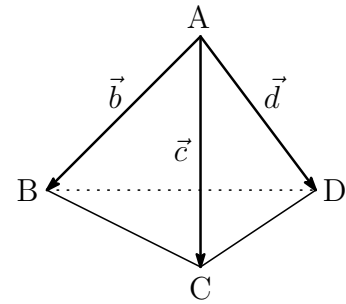
【解】  $\vec{AB} = \vec{b}$ ,  $\vec{AC} = \vec{c}$ ,  $\vec{AD} = \vec{d}$  とする。

$$AC \perp BD \quad \text{より} \quad \vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$$

$$\text{すなわち} \quad \vec{c} \cdot (\vec{d} - \vec{b}) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} AD^2 + BC^2 &= |\vec{d}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{d}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 &= |\vec{b}|^2 + |\vec{d} - \vec{c}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\vec{d} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \end{aligned}$$



ここで、 $\textcircled{1}$  より  $\vec{c} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{d}$

$$\text{よって} \quad AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$$

したがって

$$AC \perp BD \quad \text{ならば} \quad AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$$

**12** 四面体  $OABC$  において,  $\triangle ABC$  の重心を  $G$ , 辺  $OB$  の中点を  $M$ , 辺  $OC$  の中点を  $N$  とする. 直線  $OG$  と平面  $AMN$  の交点を  $P$  とするとき,  $OG : OP$  を求めよ.

【解】  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  とする.

$$\vec{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \vec{ON} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

$P$  は平面  $AMN$  上にあるから

$$\vec{AP} = s\vec{AM} + t\vec{AN}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OA} + \vec{AP} \\ &= \vec{OA} + s\vec{AM} + t\vec{AN} \\ &= \vec{a} + s\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) + t\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right) \\ &= (1 - s - t)\vec{a} + \frac{1}{2}s\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c} \end{aligned}$$

また,  $P$  は線分  $OG$  上にあるから,  $OG : OP = 1 : k$  とおくと

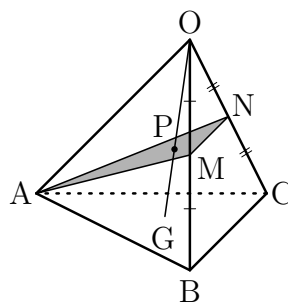
$$\vec{OP} = k\vec{OG} = \frac{1}{3}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{3}k\vec{c}$$

$\vec{OP}$  の  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いた表し方は 1 通りであるから

$$1 - s - t = \frac{1}{3}k, \quad \frac{1}{2}s = \frac{1}{3}k, \quad \frac{1}{2}t = \frac{1}{3}k$$

これを解くと,  $k = \frac{3}{5}$  であるから

$$OG : OP = 1 : \frac{3}{5} = 5 : 3$$



$$\text{【別解】 } \vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC}$$

P は直線 OP 上にあるから,  $\vec{OP} = k\vec{OG}$  となる実数  $k$  がある.

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \frac{1}{3}k\vec{OA} + \frac{1}{3}k\vec{OB} + \frac{1}{3}k\vec{OC} \\ &= \frac{1}{3}k\vec{OA} + \frac{2}{3}k\vec{OM} + \frac{2}{3}k\vec{ON}\end{aligned}$$

P は平面 AMN 上にあるから

$$\frac{1}{3}k + \frac{2}{3}k + \frac{2}{3}k = 1$$

よって,  $k = \frac{3}{5}$  であるから  $OG : OP = 5 : 3$

## 第 3 章 数列

### 3.1 等差数列と等比数列

#### 3.1.1 数列と一般項

練習 3.1 上の数列  $1, 4, 9, 16, \dots$  の第 2 項と第 4 項をいえ。また、第 5 項を求めよ。

【答】第 2 項は 4, 第 4 項は 16, 第 5 項は 25

練習 3.2 一般項が次の式で表される数列  $\{a_n\}$  について、初項から第 4 項までを求めよ。

$$(1) a_n = 2n - 1 \quad (2) a_n = n(n + 1) \quad (3) a_n = 2^n$$

【解】(1)  $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1, a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3, a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5, a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

$$(2) a_1 = 1 \cdot (1 + 1) = 2, a_2 = 2 \cdot (2 + 1) = 6, a_3 = 3 \cdot (3 + 1) = 12,$$

$$a_4 = 4 \cdot (4 + 1) = 20$$

$$(3) a_1 = 2^1 = 2, a_2 = 2^2 = 4, a_3 = 2^3 = 8, a_4 = 2^4 = 16$$

練習 3.3 次のような数列の一般項  $a_n$  を、 $n$  の式で表せ。

(1) 偶数  $2, 4, 6, 8, \dots$  の数列で符号を交互に変えた数列

$$-2, 4, -6, 8, \dots$$

(2) 分子には奇数、分母には 2 の累乗が順に現れる分数の数列

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \dots$$

【答】(1)  $a_n = (-1)^n \cdot 2n$

$$(2) a_n = \frac{2n - 1}{2^n}$$

## 3.1.2 等差数列

練習 3.4 次のような等差数列の初めの5項までを書け.

- (1) 初項 1, 公差 5                      (2) 初項 20, 公差  $-4$

【解】(1) 1 に次々と 5 をたして得られる数列であるから, 初めの 5 項は

1, 6, 11, 16, 21

(2) 20 に次々と  $-4$  をたして得られる数列であるから, 初めの 5 項は

20, 16, 12, 8, 4

練習 3.5 次の等差数列の公差を求めよ. また,  $\square$  に適する数を求めよ.

- (1) 1, 5, 9,  $\square$ ,  $\square$ , ...              (2) 9,  $\square$ , 3, 0,  $\square$ , ...

【解】(1) 公差を  $d$  とすると  $1 + d = 5$

よって  $d = 4$

$\square$  に適する数は, 順に 13, 17

(2) 公差を  $d$  とすると  $3 + d = 0$

よって  $d = -3$

$\square$  に適する数は, 順に 6,  $-3$

練習 3.6 次のような等差数列の一般項を求めよ. また, 第 10 項を求めよ.

- (1) 初項 5, 公差 4                      (2) 初項 10, 公差  $-5$

【解】一般項を  $a_n$  とする.

(1)  $a_n = 5 + (n - 1) \times 4$  すなわち  $a_n = 4n + 1$

また, 第 10 項は  $a_{10} = 4 \cdot 10 + 1 = 41$

(2)  $a_n = 10 + (n - 1) \times (-5)$  すなわち  $a_n = -5n + 15$

また, 第 10 項は  $a_{10} = -5 \cdot 10 + 15 = -35$

練習 3.7 次のような等差数列  $\{a_n\}$  の初項と公差を求めよ．また，この数列の一般項を求めよ．

- (1) 第 4 項が 15，第 8 項が 27      (2) 第 5 項が 20，第 10 項が 0

【解】 (1) 求める初項を  $a$ ，項差を  $d$  とすると  $a_n = a + (n - 1)d$

第 4 項が 15 であるから  $a + 3d = 15$  …①

第 8 項が 27 であるから  $a + 7d = 27$  …②

①，② を解くと  $a = 6, d = 3$

よって，一般項は

$$a_n = 6 + (n - 1) \times 3 \quad \text{すなわち} \quad a_n = 3n + 3$$

したがって 初項 6，公差 3，一般項  $a_n = 3n + 3$

(2) 求める初項を  $a$ ，項差を  $d$  とすると  $a_n = a + (n - 1)d$

第 5 項が 20 であるから  $a + 4d = 20$  …①

第 10 項が 0 であるから  $a + 9d = 0$  …②

①，② を解くと  $a = 36, d = -4$

よって，一般項は

$$a_n = 36 + (n - 1) \times (-4) \quad \text{すなわち} \quad a_n = -4n + 40$$

したがって 初項 36，公差  $-4$ ，一般項  $a_n = -4n + 40$

練習 3.8 初項 3，公差 4 の等差数列  $\{a_n\}$  について，次の問いに答えよ．

- (1) 75 は第何項か．      (2) 初めて 300 を越えるのは第何項か．

【解】  $a_n = 3 + (n - 1) \times 4$       すなわち  $a_n = 4n - 1$

(1)  $4n - 1 = 75$  を解くと  $n = 19$  (答) 第 19 項

(2)  $4n - 1 > 300$  より  $n > \frac{301}{4}$

これを満たす最小の自然数  $n$  は  $n = 76$  (答) 第 76 項

練習 3.9 次の数列が等差数列であるとき,  $x$  の値を求めよ.

(1)  $3, x, 7, \dots$

(2)  $\frac{1}{12}, \frac{1}{x}, \frac{1}{6}, \dots$

【解】(1) 隣り合う2項の差が等しいから  $x - 3 = 9 - x$   
よって,  $2x = 12$  より  $x = 6$

(2) 隣り合う2項の差が等しいから  $\frac{1}{x} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} - \frac{1}{x}$   
よって,  $\frac{2}{x} = \frac{1}{4}$  より  $x = 8$

### 3.1.3 等差数列の和

練習 3.10 次の和を求めよ.

(1) 初項 2, 末項 10, 項数 10      (2) 初項 8, 末項 -6, 項数 15

【解】(1)  $\frac{1}{2} \cdot 10(2 + 10) = 60$

(2)  $\frac{1}{2} \cdot 15\{8 + (-6)\} = 15$

練習 3.11 次のような等差数列の和を求めよ.

(1) 初項 1, 公差 2 の等差数列の初項から第 20 項までの和

(2) 初項 10, 公差 -4 の等差数列の初項から第 15 項までの和

【解】(1)  $\frac{1}{2} \cdot 20\{2 \cdot 1 + (20 - 1) \cdot 2\} = 200$

(2)  $\frac{1}{2} \cdot 15\{2 \cdot 10 + (15 - 1) \cdot (-4)\} = -270$

練習 3.12 次の等差数列の和を求めよ .

(1)  $2, 6, 10, \dots, 74$                       (2)  $102, 96, 90, \dots, 6$

【解】 (1) この等差数列の初項は 2 , 公差は 4 である .

項数を  $n$  とすると  $2 + 4(n - 1) = 74$

これを解くと  $n = 19$

よって  $S = \frac{1}{2} \cdot 19(2 + 74) = 722$

(2) この等差数列の初項は 102 , 公差は  $-6$  である .

項数を  $n$  とすると  $102 - 6(n - 1) = 6$

これを解くと  $n = 17$

よって  $S = \frac{1}{2} \cdot 17(102 + 6) = 918$

練習 3.13 次の和を求めよ .

(1)  $1 + 2 + 3 + \dots + 20$                       (2)  $1 + 2 + 3 + \dots + 100$   
 (3)  $1 + 3 + 5 + \dots + 29$                       (4)  $1 + 3 + 5 + \dots + 55$

【解】 (1)  $1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{1}{2} \cdot 20(20 + 1) = 210$

(2)  $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{1}{2} \cdot 100(100 + 1) = 5050$

(3)  $1 + 3 + 5 + \dots + 29 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2 \cdot 15 - 1)$   
 $= 15^2 = 225$

(4)  $1 + 3 + 5 + \dots + 55 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2 \cdot 28 - 1)$   
 $= 28^2 = 784$

練習 3.14 次の偶数の和を求めよ .

$$(1) \quad 2 + 4 + 6 + \cdots + 40 \qquad (2) \quad 2 + 4 + 6 + \cdots + 100$$

【解】 (1)  $2 + 4 + 6 + \cdots + 40 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 20)$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \cdot 20(20 + 1)$$

$$= 420$$

(2)  $2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \cdot 50(50 + 1)$$

$$= 2550$$

練習 3.15 等差数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする .  $a_3 = 4$  ,  $S_4 = 20$  のとき ,  $S_n$  を求めよ .

【解】 初項を  $a$  , 公差を  $d$  とする .

$$a_3 = 4 \text{ より} \qquad a + 2d = 4 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

$$S_4 = 20 \text{ より} \qquad \frac{1}{2} \cdot 4 \{2a + (4 - 1)d\} = 20$$

$$\text{整理して} \qquad 2a + 3d = 10 \qquad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} , \textcircled{2} \text{ を解くと} \qquad a = 8 , d = -2$$

$$\text{よって} \quad S_n = \frac{1}{2}n\{2 \cdot 8 + (n - 1) \cdot (-2)\} = -n^2 + 9n$$

## 3.1.4 等比数列

練習 3.16 次のような等比数列の初項から第5項までを書け.

- (1) 初項 1, 公比 3                      (2) 初項 3, 公比  $-2$   
 (3) 初項 1, 公比  $\frac{1}{3}$                       (4) 初項  $-\frac{1}{2}$ , 公比  $-\frac{1}{2}$

【解】(1) 1 に 3 を次々とかけて得られる数列であるから, 初項から第5項までは

$$1, 3, 9, 27, 81$$

(2) 3 に  $-2$  を次々とかけて得られる数列であるから, 初項から第5項までは

$$3, -6, 12, -24, 48$$

(3) 1 に  $\frac{1}{3}$  を次々とかけて得られる数列であるから, 初項から第5項までは

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$$

(4)  $-\frac{1}{2}$  に  $-\frac{1}{2}$  を次々とかけて得られる数列であるから, 初項から第5項までは

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$$

練習 3.17 次の等比数列の公比を求めよ. また,  $\square$  に適する数を求めよ.

- (1) 1, 2, 4,  $\square$ , ...                      (2) 1,  $-2$ , 4,  $\square$ , ...  
 (3)  $\square$ , 8, 4,  $\square$ , ...                      (4)  $\square$ , 3,  $-1$ ,  $\square$ , ...

【解】(1) 公比を  $r$  とすると  $1 \cdot r = 2$  よって  $r = 2$

$$\square \text{ に適する数は } 4 \times 2 = 8$$

(2) 公比を  $r$  とすると  $1 \cdot r = -2$  よって  $r = -2$

$$\square \text{ に適する数は } 4 \times (-2) = -8$$

(3) 公比を  $r$  とすると  $8 \cdot r = 4$  よって  $r = \frac{1}{2}$

$$\square \text{ に適する数は, 順に } 8 \times 2 = 16, 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

(4) 公比を  $r$  とすると  $3 \cdot r = -1$  よって  $r = -\frac{1}{3}$

$$\square \text{ に適する数は, 順に } 3 \times (-3) = -9, (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

練習 3.18 次のような等比数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ．また，第5項を求めよ．

- (1) 初項 2，公比 3                      (2) 初項 1，公比  $-3$   
 (3) 初項 2，公比 2                      (4) 初項  $-3$ ，公比  $\frac{1}{2}$

【解】一般項を  $a_n$  とする．

(1)  $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$  すなわち  $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

また，第5項は  $a_5 = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 162$

(2)  $a_n = 1 \cdot (-3)^{n-1}$  すなわち  $a_n = (-3)^{n-1}$

また，第5項は  $a_5 = (-3)^{5-1} = (-3)^4 = 81$

(3)  $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$  すなわち  $a_n = 2^n$

また，第5項は  $a_5 = 2^5 = 32$

(4)  $a_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

また，第5項は  $a_5 = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = -\frac{3}{16}$

練習 3.19 次の等比数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ．

- (1)  $1, -2, 4, -8, \dots$                       (2)  $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$   
 (3)  $-5, 5, -5, 5, \dots$                       (4)  $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$

【解】(1) 公比を  $r$  とすると， $r = -2$

よって，一般項は  $a_n = 1 \cdot (-2)^{n-1}$  すなわち  $a_n = (-2)^{n-1}$

(2) 公比を  $r$  とすると， $\frac{3}{2}r = \frac{3}{4}$  より  $r = \frac{1}{2}$

よって，一般項は  $a_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  すなわち  $a_n = \frac{3}{2^n}$

(3) 公比を  $r$  とすると， $-5r = 5$  より  $r = -1$

よって，一般項は  $a_n = (-5) \cdot (-1)^{n-1}$  すなわち  $a_n = 5 \cdot (-1)^n$

(4) 公比を  $r$  とすると， $\sqrt{2}r = 2$  より  $r = \sqrt{2}$

よって，一般項は  $a_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$  すなわち  $a_n = (\sqrt{2})^n$

練習 3.20 次のような等比数列の初項と公比を求めよ.

- (1) 第2項が6, 第4項が54      (2) 第5項が-9, 第7項が-27

【解】 (1) 求める初項を  $a$ , 公比を  $r$  とする.

$$\text{第2項が6であるから} \quad ar = 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{第4項が54であるから} \quad ar^3 = 54 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad r^2 = 9$$

$$\text{これを解くと} \quad r = \pm 3$$

$$\textcircled{1} \text{ から, } r = 3 \text{ のとき } a = 2, r = -3 \text{ のとき } a = -2$$

(答) 初項 2, 公比 3 または 初項 -2, 公比 -3

(2) 求める初項を  $a$ , 公比を  $r$  とする.

$$\text{第5項が-9であるから} \quad ar^4 = -9 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{第7項が-27であるから} \quad ar^6 = -27 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad r^2 = 3$$

$$\text{これを解くと} \quad r = \pm\sqrt{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ から, } r = \pm\sqrt{3} \text{ のとき } a = -1$$

(答) 初項 -1, 公比  $\sqrt{3}$  または 初項 -1, 公比  $-\sqrt{3}$

練習 3.21 次の数列が等比数列であるとき,  $x$  の値を求めよ.

- (1) 2,  $x$ , 32, ...      (2) 3,  $x$ , 9, ...

【解】 (1)  $\frac{x}{2} = \frac{32}{x}$  より  $x^2 = 2 \times 32 = 64$

よって  $x = \pm\sqrt{64} = \pm 8$

(2)  $\frac{x}{3} = \frac{9}{x}$  より  $x^2 = 3 \times 9 = 27$

よって  $x = \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$

## 3.1.5 等比数列の和

練習 3.22 次の等比数列の初項から第  $n$  までの和  $S_n$  を求めよ .

$$(1) 1, 2, 2^2, 2^3, \dots \quad (2) 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2}{3^3}, \dots$$

【解】(1) 初項 1, 公比 2 の等比数列であるから

$$S_n = \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

(2) 初項 2, 公比  $\frac{1}{3}$  の等比数列であるから

$$S_n = \frac{2 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right)$$

練習 3.23 初項から第 3 項までの和が 7, 第 3 項から第 5 項までの和が 28 である等比数列  $\{a_n\}$  の初項  $a$  と公比  $r$  を求めよ .

【解】条件から  $a + ar + ar^2 = 7 \quad \dots \textcircled{1}$

$$ar^2 + ar^3 + ar^4 = 28 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } r^2(a + ar + ar^2) = 28$$

$$\textcircled{1} \text{ を代入して } 7r^2 = 28$$

$$\text{よって, } r^2 = 4 \text{ より } r = \pm 2$$

$$r = 2 \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ から } 7a = 7 \quad \text{よって } a = 1$$

$$r = -2 \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ から } 3a = 7 \quad \text{よって } a = \frac{7}{3}$$

$$\text{したがって } a = 1, r = 2 \text{ または } a = \frac{7}{3}, r = -2$$

## 3.1.6 補充問題

**1** 一般項が  $a_n = 3n - 2$  で表される数列  $\{a_n\}$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $a_n$  を  $a_n = a + (n - 1)d$  の形に表すとき、 $a$ 、 $d$  の値を求めよ。  
 (2) この数列において、200 はこの数列の項に含まれるか。

**【解】** (1)  $a_n = 1 + 3(n - 1)$  より  $a = 1$ 、 $d = 3$   
 (2)  $a_{67} = 3 \cdot 67 - 2 = 199$ 、 $a_{68} = 3 \cdot 68 - 2 = 202$   
 よって 含まれない

**2** 初項が 50、公差が  $-3$  である等差数列  $\{a_n\}$  がある。

- (1) 第何項が始めて負の数になるか。  
 (2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また、その和を求めよ。

**【解】**  $a_n = 50 + (n - 1) \cdot (-3)$  すなわち  $a_n = -3n + 53$

- (1)  $-3n + 53 < 0$  より  $n > \frac{53}{3}$   
 これを満たす最小の自然数  $n$  は  $n = 18$  (答) 第 18 項  
 (2) (1) の結果から、第 17 項までの和が最大となる。その和は  

$$\frac{1}{2} \cdot 17 \{2 \cdot 50 + (17 - 1) \cdot (-3)\} = 442$$

**3** 第2項が3, 第5項が24である等比数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ. ただし, 公比は実数とする.

【解】初項を  $a$ , 公比を  $r$  とする.

$$\text{第2項が3であるから } ar = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

このとき, 第5項は  $3r^3$  である.

$$\text{よって, } 3r^3 = 24 \text{ より } r^3 = 8$$

$$r \text{ は実数であるから } r = 2$$

$$\text{このとき, } \textcircled{1} \text{ より } a = \frac{3}{2}$$

$$\text{したがって } a_n = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-2}$$

**4** 第2項が3, 初項から第3項までの和が13である等比数列の初項と公比を求めよ.

【解】求める等比数列の初項を  $a$ , 公比を  $r$  とする.

$$\text{第2項が3であるから } ar = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

このとき, 第3項は  $3r$  であるから

$$a + 3 + 3r = 13 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } a = 10 - 3r$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入すると } (10 - 3r)r = 3$$

$$\text{式を整理すると } 3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$\text{これを解くと } r = 3, \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } r = 3 \text{ のとき } a = 1, r = \frac{1}{3} \text{ のとき } a = 9$$

$$\text{したがって 初項 } 1, \text{ 公比 } 3 \quad \text{または} \quad \text{初項 } 9, \text{ 公比 } \frac{1}{3}$$

## 3.2 いろいろな数列

### 3.2.1 いろいろな数列の和

練習 3.24 次の和を求めよ .

$$(1) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$$

$$(2) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 30^2$$

【解】 (1)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2 = \frac{1}{6} \times 20 \times (20 + 1) \times (2 \cdot 20 + 1)$   
 $= \frac{1}{6} \times 20 \times 21 \times 41 = 2870$

(2)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 30^2 = \frac{1}{6} \times 30 \times (30 + 1) \times (2 \cdot 30 + 1)$   
 $= \frac{1}{6} \times 30 \times 31 \times 61 = 9455$

例 3.10 (1)  $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$       ←  $a_k = k$  の場合

(2)  $\sum_{k=2}^{10} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 10^2$       ←  $a_k = k^2$  で、第2項から  
第10項までの和

例 3.11 次の式は、いずれも和  $2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$  を表す.

$$\sum_{k=2}^6 k^2, \quad \sum_{i=2}^6 i^2, \quad \sum_{k=1}^5 (k+1)^2$$

練習 3.25 次の (1) ~ (3) の式は例 3.10 のような和の形で書け. (4), (5) の式は和の記号  $\sum$  を用いて書け.

(1)  $\sum_{k=1}^n (2k-1)$       (2)  $\sum_{k=1}^8 2^{k-1}$       (3)  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

(4)  $2 + 3 + 4 + 5 + 6$       (5)  $3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 13^2$

【解】 (1)  $\sum_{k=1}^n (2k-1) = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \cdots + (2n - 1)$   
 $= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$

(2)  $\sum_{k=1}^8 2^{k-1} = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^7$

(3)  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$

(4)  $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \sum_{k=1}^5 (k+1)$  または  $= \sum_{k=2}^6 k$

(5)  $3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 13^2 = \sum_{k=1}^6 (2k+1)^2$  または  $= \sum_{k=2}^7 (2k-1)^2$

練習 3.26 次の和を求めよ .

$$(1) \sum_{k=1}^{15} k \qquad (2) \sum_{k=1}^{50} k \qquad (3) \sum_{k=1}^7 k^2 \qquad (4) \sum_{k=1}^{12} k^2$$

【解】 (1)  $\sum_{k=1}^{15} k = \frac{1}{2} \times 15 \times (15 + 1) = 120$

(2)  $\sum_{k=1}^{50} k = \frac{1}{2} \times 50 \times (50 + 1) = 1275$

(3)  $\sum_{k=1}^7 k^2 = \frac{1}{6} \times 7 \times (7 + 1) \times (2 \cdot 7 + 1) = 140$

(4)  $\sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{1}{6} \times 12 \times (12 + 1) \times (2 \cdot 12 + 1) = 650$

練習 3.27 次の和を求めよ .

$$(1) \sum_{k=1}^n (2k + 1) \qquad (2) \sum_{k=1}^n (4k - 5) \qquad (3) \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

【解】 (1)  $\sum_{k=1}^n (2k + 1) = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$   
 $= 2 \times \frac{1}{2} n(n + 1) + n = n(n + 2)$

(2)  $\sum_{k=1}^n (4k - 5) = 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 5$   
 $= 4 \times \frac{1}{2} n(n + 1) - 5n = n(2n - 3)$

(3)  $\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2 \sum_{k=1}^{n-1} k$   
 $= 2 \times \frac{1}{2} (n - 1) \{ (n - 1) + 1 \} = n(n - 1)$

練習 3.28 次の和を求めよ .

$$(1) \sum_{k=1}^n (3k^2 - 7k + 4) \qquad (2) \sum_{k=1}^n (k-1)(k-2)$$

【解】 (1) 
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (3k^2 - 7k + 4) &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 7 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 4 \\ &= 3 \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 7 \times \frac{1}{2} n(n+1) + 4n \\ &= \frac{1}{2} n \{ (n+1)(2n+1) - 7(n+1) + 8 \} \\ &= \frac{1}{2} n (2n^2 - 4n + 2) \\ &= n(n^2 - 2n + 1) = n(n-1)^2 \end{aligned}$$

(2) 
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k-1)(k-2) &= \sum_{k=1}^n (k^2 - 3k + 2) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 2 \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 3 \times \frac{1}{2} n(n+1) + 2n \\ &= \frac{1}{6} n \{ (n+1)(2n+1) - 9(n+1) + 12 \} \\ &= \frac{1}{6} n (2n^2 - 6n + 4) \\ &= \frac{1}{3} n (n^2 - 3n + 2) = \frac{1}{3} n (n-1)(n-2) \end{aligned}$$

練習 3.29 次の和を求めよ .

$$(1) \quad 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 \qquad (2) \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$$

【解】 (1) これは、第  $k$  項が  $(2k)^2$  である数列の初項から第  $n$  項までの和である .  
よって、求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k)^2 &= 4 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= 4 \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{2}{3} n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

(2) これは、第  $k$  項が  $(2k-1)^2$  である数列の初項から第  $n$  項までの和である .  
よって、求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1) \\ &= 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 4 \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 4 \times \frac{1}{2} n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{3} n \{ 2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3 \} \\ &= \frac{1}{3} n (4n^2 + 6n + 2 - 6n - 6 + 3) \\ &= \frac{1}{3} n (4n^2 - 1) = \frac{1}{3} n (2n+1)(2n-1) \end{aligned}$$

練習 3.30 恒等式  $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$  を利用して、和

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad \text{を求めよ .}$$

【解】  $S = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right.$   
 $\qquad \qquad \qquad \left. + \cdots + \left( \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) + \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\}$   
 $= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$

練習 3.31 一般項が  $n \cdot 2^{n-1}$  で表される数列の、初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  を求めよ。

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad S_n &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} \\ 2S_n &= \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n \end{aligned}$$

の辺々を引くと

$$S_n - 2S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n$$

$$\text{よって} \quad -S_n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} - n \cdot 2^n$$

$$\text{したがって} \quad S_n = n \cdot 2^n - 2^n + 1 = (n-1) \cdot 2^n + 1$$

練習 3.32 奇数の列を、次のように 1 個, 2 個, 3 個,  $\cdots$  の群に分ける。

$$\begin{array}{ccccccc} \{1\}, & \{3, 5\}, & \{7, 9, 11\}, & \{13, 15, 17, 19\}, & \cdots \\ \text{第 1 群} & \text{第 2 群} & \text{第 3 群} & \text{第 4 群} & \end{array}$$

- (1)  $n \geq 2$  のとき, 第  $n$  群の最初の奇数を  $n$  の式で表せ。
- (2) 第 15 群に入るすべての奇数の和を求めよ。

【解】 (1) 第 1 群から第  $(n-1)$  群までに入る奇数の総数は

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

ゆえに, 第  $(n-1)$  群の最後の奇数は

$$2 \times \frac{1}{2}n(n-1) - 1 = n^2 - n - 1$$

求める奇数は, この次の奇数で

$$(n^2 - n - 1) + 2 = n^2 - n + 1$$

(2) 第 15 群の最初の奇数は, (1) の結果を用いて

$$15^2 - 15 + 1 = 211$$

よって, 和は, 初項 211, 公差 2, 項数 15 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 15 \{2 \cdot 211 + (15-1) \cdot 2\} = 3375$$

## 3.2.2 階差数列

練習 3.33 階差数列を考えて、次の数列の第6項、第7項を求めよ。

$$1, 2, 5, 10, 17, \dots$$

【解】この数列を  $\{a_n\}$ 、階差数列を  $\{b_n\}$  とする。

数列  $\{b_n\}$  は  $1, 3, 5, 7, \dots$

よって、 $b_n = 2n - 1$  より  $b_5 = 9, b_6 = 11$

このとき、数列  $\{a_n\}$  の

$$\text{第6項は } a_6 - a_5 = b_5 \text{ より } a_6 = a_5 + b_5 = 17 + 9 = 26$$

$$\text{第7項は } a_7 - a_6 = b_6 \text{ より } a_7 = a_6 + b_6 = 26 + 11 = 37$$

練習 3.34 階差数列を利用して、次の数列の一般項  $a_n$  を求めよ。

$$(1) 1, 2, 4, 7, 11, \dots \quad (2) 1, 2, 5, 10, 17, \dots$$

【解】(1) この数列の階差数列は  $1, 2, 3, 4, \dots$

その一般項を  $b_n$  とすると、 $b_n = n$  である。

よって、 $n \geq 2$  のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{1}{2}(n-1)n \quad \text{すなわち} \quad a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$$

初項は  $a_1 = 1$  なので、上の  $a_n$  は  $n = 1$  のときにも成り立つ。

したがって、一般項  $a_n$  は  $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$

(2) この数列の階差数列は  $1, 3, 5, 7, \dots$

その一般項を  $b_n$  とすると、 $b_n = 2n - 1$  である。

よって、 $n \geq 2$  のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 1) = 1 + (n-1)^2 \quad \text{すなわち} \quad a_n = n^2 - 2n + 2$$

初項は  $a_1 = 1$  なので、上の  $a_n$  は  $n = 1$  のときにも成り立つ。

したがって、一般項  $a_n$  は  $a_n = n^2 - 2n + 2$

練習 3.35 初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  が,  $S_n = n^2 + n$  で表される数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.

【解】  $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} = 2n \end{aligned}$$

初項は  $a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2$

よって,  $a_n = 2n$  は  $n = 1$  のときにも成り立つ.

したがって, 一般項は  $a_n = 2n$

## 3.2.3 補充問題

5 恒等式  $k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$  を用いて、次の公式を確かめよ。

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

【解】恒等式  $k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$  により

$$\sum_{k=1}^n \{k^4 - (k-1)^4\} = \sum_{k=1}^n \{4k^3 - 6k^2 + 4k - 1\}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) \\ &= 4 \sum_{k=1}^n k^3 - 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 4 \sum_{k=1}^n k^3 - 6 \times \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 4 \times \frac{1}{2}n(n+1) - n \\ &= 4 \sum_{k=1}^n k^3 - 2n^3 - n^2 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n \{k^4 - (k-1)^4\} = n^4 \text{ であるから}$$

$$n^4 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 - 2n^3 - n^2$$

$$\text{よって} \quad \sum_{k=1}^n k^4 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

**6** 次の数列の第  $k$  項を  $k$  の式で表せ．また，初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  を求めよ．

$$1, 1+2, 1+2+3, \dots, 1+2+3+\dots+n, \dots$$

**【解】** 第  $k$  項は  $1+2+3+\dots+k = \frac{1}{2}k(k+1)$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2}k(k+1) \right\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)\{(2n+1)+3\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

**7** 次の和を求めよ．ただし，(2) では問題5の公式を用いてよい．

$$(1) \sum_{k=1}^n 2^k$$

$$(2) \sum_{k=1}^{10} k(k+1)(k+2)$$

**【解】** (1)  $\sum_{k=1}^n 2^k = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2(2^n - 1)$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \sum_{k=1}^{10} k(k+1)(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^{10} k(k+1)(k+2) \cdot \frac{1}{4} \{(k+3) - (k-1)\} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{10} \{k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)\} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 4290 \end{aligned}$$

8 次の和を求めよ.

$$(1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \qquad (2) \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)}$$

【解】 (1) 
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1 \end{aligned}$$

(2) 
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{(k+2) - k}{k(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \\ &\quad \cdots + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

### 3.3 数学的帰納法

#### 3.3.1 漸化式

練習 3.36 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  の第2項から第5項を求めよ.

$$(1) a_1 = 100, a_{n+1} = a_n - 5 \qquad (2) a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 2$$

【解】(1)  $a_2 = a_1 - 5 = 100 - 5 = 95$

$$a_3 = a_2 - 5 = 95 - 5 = 90$$

$$a_4 = a_3 - 5 = 90 - 5 = 85$$

$$a_5 = a_4 - 5 = 85 - 5 = 80$$

(2)  $a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \times 2 + 2 = 8$

$$a_3 = 3a_2 + 2 = 3 \times 8 + 2 = 26$$

$$a_4 = 3a_3 + 2 = 3 \times 26 + 2 = 80$$

$$a_5 = 3a_4 + 2 = 3 \times 80 + 2 = 242$$

練習 3.37 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.

$$(1) a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3 \qquad (2) a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$$

【解】(1) 数列  $\{a_n\}$  は初項2, 公差3の等差数列であるから, 一般項は

$$a_n = 2 + (n - 1) \times 3$$

すなわち  $a_n = 3n - 1$

(2) 数列  $\{a_n\}$  は初項1, 公比2の等比数列であるから, 一般項は

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$$

すなわち  $a_n = 2^{n-1}$

練習 3.38 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ .

$$(1) a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 3^n \qquad (2) a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + 2n + 1$$

【解】 (1) 条件より  $a_{n+1} - a_n = 3^n$

数列  $\{a_n\}$  の階差数列の第  $n$  項が  $3^n$  であるから

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 1 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$$

初項は  $a_1 = 1$  なので, 上の  $a_n$  は  $n = 1$  のときも成り立つ .

したがって, 一般項は  $a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

(2) 条件より  $a_{n+1} - a_n = 2n + 1$

数列  $\{a_n\}$  の階差数列の第  $n$  項が  $2n + 1$  であるから

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1) = 0 + (n^2 - 1) = n^2 - 1$$

初項は  $a_1 = 0$  なので, 上の  $a_n$  は  $n = 1$  のときも成り立つ .

したがって, 一般項は  $a_n = n^2 - 1$

練習 3.39 次の  $\square$  に適する数を求めよ .

$$(1) a_{n+1} = 4a_n - 6 \text{ を変形すると } a_{n+1} - \square = 4(a_n - \square)$$

$$(2) a_{n+1} = 2a_n + 1 \text{ を変形すると } a_{n+1} + \square = 2(a_n + \square)$$

$$(3) a_{n+1} = -2a_n + 3 \text{ を変形すると } a_{n+1} - \square = -2(a_n - \square)$$

【解】 (1)  $c = 4c - 6$  を解くと  $c = 2$

$$\text{よって} \quad a_{n+1} - 2 = 4(a_n - 2)$$

$\square$  に適する数は 2

(2)  $c = 2c + 1$  を解くと  $c = -1$

$$\text{よって} \quad a_{n+1} - (-1) = 2\{a_n - (-1)\}$$

$$\text{すなわち} \quad a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

$\square$  に適する数は 1

(3)  $c = -2c + 3$  を解くと  $c = 1$

$$\text{よって} \quad a_{n+1} - 1 = -2(a_n - 1)$$

$\square$  に適する数は 1

練習 3.40 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ .

- (1)  $a_1 = 5, a_{n+1} = 4a_n - 6$                       (2)  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$   
 (3)  $a_1 = 2, a_{n+1} = -2a_n + 3$                       (4)  $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$

【解】 (1) 漸化式を変形すると  $a_{n+1} - 2 = 4(a_n - 2)$

$$b_n = a_n - 2 \text{ とすると } b_{n+1} = 4b_n$$

よって, 数列  $\{b_n\}$  は公比 4 の等比数列で, 初項は

$$b_1 = a_1 - 2 = 5 - 2 = 3$$

$$\text{数列 } \{b_n\} \text{ の一般項は } b_n = 3 \cdot 4^{n-1}$$

したがって, 数列  $\{a_n\}$  の一般項は,  $a_n = b_n + 2$  より

$$a_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 2$$

(2) 漸化式を変形すると  $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

$$b_n = a_n + 1 \text{ とすると } b_{n+1} = 2b_n$$

よって, 数列  $\{b_n\}$  は公比 2 の等比数列で, 初項は

$$b_1 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\text{数列 } \{b_n\} \text{ の一般項は } b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

したがって, 数列  $\{a_n\}$  の一般項は,  $a_n = b_n - 1$  より

$$a_n = 2^n - 1$$

(3) 漸化式を変形すると  $a_{n+1} - 1 = -2(a_n - 1)$

$$b_n = a_n - 1 \text{ とすると } b_{n+1} = -2b_n$$

よって, 数列  $\{b_n\}$  は公比  $-2$  の等比数列で, 初項は

$$b_1 = a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\text{数列 } \{b_n\} \text{ の一般項は } b_n = 1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}$$

したがって, 数列  $\{a_n\}$  の一般項は,  $a_n = b_n + 1$  より

$$a_n = (-2)^{n-1} + 1$$

(4) 漸化式を変形すると  $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

$b_n = a_n - 2$  とすると  $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$

よって、数列  $\{b_n\}$  は公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列で、初項は

$$b_1 = a_1 - 2 = 3 - 2 = 1$$

数列  $\{b_n\}$  の一般項は  $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって、数列  $\{a_n\}$  の一般項は、 $a_n = b_n + 2$  より

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$$

### 3.3.2 数学的帰納法

練習 3.41 数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

(1)  $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

(2)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$

(1) [証明] この等式を (A) とする。

[1]  $n = 1$  のとき 左辺 = 1, 右辺 =  $1^2 = 1$

よって、 $n = 1$  のとき、(A) が成り立つ。

[2]  $n = k$  のとき (A) が成り立つ、すなわち

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

であると仮定すると、 $n = k + 1$  のときの (A) の左辺は

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \{2(k + 1) - 1\} &= k^2 + \{2(k + 1) - 1\} \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

$n = k + 1$  のときの (A) の右辺は  $(k + 1)^2$

よって、 $n = k + 1$  のときも (A) が成り立つ。

[1] [2] から、すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ。

[証終]

(2) [証明] この等式を (A) とする .

$$[1] n = 1 \text{ のとき 左辺} = 1 \cdot 2 = 2, \text{ 右辺} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 2) = 2$$

よって,  $n = 1$  のとき, (A) が成り立つ .

[2]  $n = k$  のとき (A) が成り立つ, すなわち

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k + 1) = \frac{1}{3}k(k + 1)(k + 2)$$

であると仮定すると,  $n = k + 1$  のときの (A) の左辺は

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k + 1) + (k + 1)\{(k + 1) + 1\} \\ = \frac{1}{3}k(k + 1)(k + 2) + (k + 1)\{(k + 1) + 1\} \\ = \frac{1}{3}(k + 1)(k + 2)(k + 3) \end{aligned}$$

$n = k + 1$  のときの (A) の右辺は

$$\frac{1}{3}(k + 1)\{(k + 1) + 1\}\{(k + 1) + 2\} = \frac{1}{3}(k + 1)(k + 2)(k + 3)$$

よって,  $n = k + 1$  のときも (A) が成り立つ .

[1] [2] から, すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ .

[証終]

練習 3.42  $n$  を 3 以上の自然数とするととき, 次の不等式を証明せよ.

$$2^n > 2n + 1$$

[証明] この不等式を (A) とする.

[1]  $n = 3$  のとき

$$\text{左辺} = 2^3 = 8, \quad \text{右辺} = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

よって,  $n = 3$  のとき, (A) が成り立つ.

[2]  $k \geq 3$  として,  $n = k$  のとき (A) が成り立つ, すなわち

$$2^k > 2k + 1$$

であると仮定する.

$n = k + 1$  のときの (A) の両辺の差を考えると

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - \{2(k+1) + 1\} &= 2 \cdot 2^k - (2k + 3) \\ &> 2(2k + 1) - (2k + 3) \\ &= 2(k - 1) + 1 > 0 \end{aligned}$$

すなわち  $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$

したがって,  $n = k + 1$  のときも (A) が成り立つ.

[1][2] から, 3 以上のすべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ. [証終]

練習 3.43 すべての自然数  $n$  について、 $n^3 + 2n$  は 3 の倍数である。このことを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

[証明] 「 $n^3 + 2n$  は 3 の倍数である」を (A) とする。

[1]  $n = 1$  のとき

$$1^3 + 2 \cdot 1 = 3$$

よって、 $n = 1$  のとき、(A) が成り立つ。

[2]  $n = k$  のとき (A) が成り立つと仮定する。

すなわち、整数  $m$  を用いて

$$k^3 + 2k = 3m$$

と表されると仮定する。

$n = k + 1$  のときを考えると

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 5k + 3 \\ &= (k^3 + 2k) + 3k^2 + 3k + 3 \\ &= 3m + 3k^2 + 3k + 3 \\ &= 3(m + k^2 + k + 1) \end{aligned}$$

よって、 $(k+1)^3 + 2(k+1)$  は 3 の倍数であるから、 $n = k + 1$  のときも (A) が成り立つ。

[1] [2] から、すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ。 [証終]

### 3.3.3 補充問題

9 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  の第 4 項を、それぞれ求めよ。

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = 2b_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

【解】  $a_2 = a_1 + b_1 = 1 + 0 = 1$ ,  $b_2 = 2b_1 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$   
 $a_3 = a_2 + b_2 = 1 + 1 = 2$ ,  $b_3 = 2b_2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$   
よって  $a_4 = a_3 + b_3 = 2 + 3 = 5$ ,  $b_4 = 2b_3 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

10 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ .

$$(1) a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(2) a_1 = 1, a_{n+1} + a_n = 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(3) a_1 = 2, 2a_{n+1} = a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

【解】 (1) 条件より  $a_{n+1} - a_n = 2^{n-1}$

数列  $\{a_n\}$  の階差数列の第  $n$  項が  $2^{n-1}$  であるから

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} + 1$$

初項は  $a_1 = 2$  なので, 上の  $a_n$  は  $n = 1$  のときも成り立つ .

したがって, 一般項は  $a_n = 2^{n-1} + 1$

(2) 漸化式を変形すると  $a_{n+1} - \frac{3}{2} = -\left(a_n - \frac{3}{2}\right)$

$$b_n = a_n - \frac{3}{2} \text{ とすると} \quad b_{n+1} = -b_n$$

よって, 数列  $\{b_n\}$  は公比  $-1$  の等比数列で, 初項は

$$b_1 = a_1 - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

数列  $\{b_n\}$  の一般項は  $b_n = -\frac{1}{2}(-1)^{n-1} = \frac{1}{2}(-1)^n$

したがって, 数列  $\{a_n\}$  の一般項は,  $a_n = b_n + \frac{3}{2}$  より

$$a_n = \frac{(-1)^n + 3}{2}$$

(3) 漸化式を変形すると  $a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1)$

$$b_n = a_n - 1 \text{ とすると} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$$

よって, 数列  $\{b_n\}$  は公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列で, 初項は

$$b_1 = a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

数列  $\{b_n\}$  の一般項は  $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって, 数列  $\{a_n\}$  の一般項は,  $a_n = b_n + 1$  より

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$$

11 次の条件によって定まる数列  $\{a_n\}$  がある .

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1)  $a_2, a_3, a_4$  を求めよ .  
 (2) 第  $n$  項  $a_n$  を推測して , それを数学的帰納法を用いて証明せよ .

【解】 (1)  $a_2 = 2 - \frac{1}{a_1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$a_3 = 2 - \frac{1}{a_2} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$a_4 = 2 - \frac{1}{a_3} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

(2)  $a_n = \frac{n+1}{n}$

[証明] この結論を (A) とする .

[1]  $n = 1$  のとき ,  $a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$  であり , (A) が成り立つ .

[2]  $n = k$  のとき , (A) が成り立つ ,

すなわち  $a_k = \frac{k+1}{k}$  であると仮定すると ,

$$a_{k+1} = 2 - \frac{1}{a_k} = 2 - \frac{k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1} = \frac{(k+1)+1}{k+1}$$

となり ,  $n = k+1$  のときも (A) が成り立つ .

[1] [2] から , すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ . [証終]

## 3.4 章末問題

### 3.4.1 章末問題 A

1 第4項が14, 第8項が30である等差数列がある. 次の数は, この数列の項であるかどうかを調べよ. また, 項であるときは第何項かを求めよ.

(1) 70

(2) 123

【解】初項を  $a$ , 公差を  $d$ , 一般項を  $a_n$  とすると

$$a_n = a + (n - 1)d$$

第4項が14であるから  $a + 3d = 14$  … ①

第8項が30であるから  $a + 7d = 30$  … ②

①, ②を解くと  $a = 2, d = 4$

よって, 一般項は

$$a_n = 2 + (n - 1) \times 4 \quad \text{すなわち} \quad a_n = 4n - 2$$

(1)  $4n - 2 = 70$  を解くと  $n = 18$

よって, 70はこの数列の第18項である.

(2)  $4n - 2 = 123$  を満たす自然数は存在しないから,  
123はこの数列の項ではない.

2 初項が60, 末項が-30である等差数列の和が240であるとき, この数列の公差と項数を求めよ.

【解】この等差数列の公差を  $d$ , 項数を  $n$  とする.

第  $n$  項が -30 であるから

$$60 + (n - 1)d = -30 \quad \dots \text{①}$$

また, 和が240であるから

$$\frac{1}{2}n\{60 + (-30)\} = 240 \quad \dots \text{②}$$

①, ②を解くと  $n = 16, d = -6$

よって 公差 -6, 項数 16

**3** 1日目に1円, 2日目に2円, 3日目に4円, 4日目に8円, … というように, 前日の2倍の金額を毎日貯金するとき, 15日間での貯金の総額を求めよ.

【解】15日間の貯金の総額は, 初項1, 公比2の等比数列の第15項までの和であるから

$$\frac{1 \cdot (2^{15} - 1)}{2 - 1} = 2^{15} - 1 = 32,767 \text{ (円)}$$

**4** 初項が正の数である等比数列  $\{a_n\}$  の, 第2項と第4項の和が20で, 第4項と第6項の和が80であるとき, 次のものを求めよ.

- (1) 初項と公比                      (2) 初項から第10項までの和

【解】(1) この等比数列の初項を  $a$ , 公比を  $r$  とする.

条件より  $ar + ar^3 = 20 \quad \dots \textcircled{1}$

$$ar^3 + ar^5 = 80 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$  より  $r^2(ar + ar^3) = 80$

$\textcircled{1}$  を代入して

$$20r^2 = 80 \quad \text{すなわち} \quad r^2 = 4$$

よって  $r = \pm 2$

$r = 2$  のとき,  $\textcircled{1}$  より  $a = 2$

$r = -2$  のとき,  $\textcircled{1}$  より  $a = -2$

$a > 0$  であるから 初項2, 公比2

(2) 初項2, 公比2, 項数10の等比数列の和であるから

$$\frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2 \times 1023 = 2046$$

**5** 1 から 100 までの自然数のうち，次のような数の和を求めよ．

- (1) 3 の倍数                      (2) 4 で割ると 3 余る数

【解】 (1) 求める和は

$$\begin{aligned} 3 + 6 + 9 + \cdots + 99 &= 3(1 + 2 + 3 + \cdots + 33) \\ &= 3 \times \frac{1}{2} \cdot 33(33 + 1) \\ &= 1683 \end{aligned}$$

- (2) 求める和は  $3 + 7 + 11 + \cdots + 99$   
 項数を  $n$  とすると  $3 + 4(n - 1) = 99$   
 これを解くと  $n = 25$   
 よって，和は， $\frac{1}{2} \cdot 25(3 + 99) = 1275$

**6** 次の数列の第  $k$  項を  $k$  の式で表せ．また，その和を求めよ．

$$1, 1 + 3, 1 + 3 + 5, \cdots, 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

【解】 第  $k$  項は  $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$

$$\text{よって，和は } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

**7** 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  がある．

$$a_1 = 1, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1)  $b_n = \frac{a_n}{n}$  とするとき，数列  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ．  
 (2) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ．

【解】 (1) 漸化式から  $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n}$  ゆえに  $b_{n+1} = 2b_n$

よって，数列  $\{b_n\}$  は公比 2 の等比数列で，初項は

$$b_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

数列  $\{b_n\}$  の一般項は  $b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

- (2)  $a_n = nb_n$  であるから，(1) の結果を代入して  $a_n = n \cdot 2^{n-1}$

8 すべての自然数  $n$  について,  $7^n - 1$  は 6 の倍数である. このことを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.

[証明] 「 $7^n - 1$  は 6 の倍数である」を (A) とする.

$$[1] n = 1 \text{ のとき } 7^1 - 1 = 6$$

よって,  $n = 1$  のとき, (A) が成り立つ.

[2]  $n = k$  のとき (A) が成り立つと仮定する.

すなわち, 整数  $m$  を用いて

$$7^k - 1 = 6m$$

と表されると仮定する.

$n = k + 1$  のときを考えると

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 1 &= 7 \cdot 7^k - 1 \\ &= 7(6m + 1) - 1 \\ &= 42m + 6 = 6(7m + 1) \end{aligned}$$

よって,  $7^{k+1} - 1$  は 6 の倍数であるから,

$n = k + 1$  のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から, すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ. [証終]

## 3.4.2 章末問題 B

9 次のような分数の列がある .

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

- (1)  $\frac{3}{10}$  は第何項か .                      (2) 第 100 項を求めよ .

【解】 (1)  $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = \frac{1}{2} \cdot 9(9 + 1) = 45$  であるから ,  $\frac{9}{9}$  は第 45 項

したがって  $\frac{3}{10}$  は , 第 48 項

(2)  $1 + 2 + 3 + \dots + 13 = \frac{1}{2} \cdot 13(13 + 1) = 91$  であるから ,  $\frac{13}{13}$  は第 91 項

したがって 第 100 項は  $\frac{9}{14}$

10 項数  $n$  の数列  $1 \cdot n, 2(n - 1), 3(n - 2), \dots, n \cdot 1$  がある .

- (1) この数列の第  $k$  項を  $n$  と  $k$  を用いた式で表せ .  
 (2) この数列の和を求めよ .

【解】 (1) 第  $k$  項は

$$k \cdot \{n - (k - 1)\} = k(n - k + 1)$$

(2) (1) より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(n - k + 1) &= \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n + 1)k\} \\ &= -\sum_{k=1}^n k^2 + (n + 1) \sum_{k=1}^n k \\ &= -\frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) + (n + 1) \times \frac{1}{2}n(n + 1) \\ &= \frac{1}{6}n(n + 1)\{-2n + 1 + 3(n + 1)\} \\ &= \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2) \end{aligned}$$

**11** 数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  が,  $S_n = 2a_n - 1$  であるとする.

(1)  $a_{n+1} = 2a_n$  であることを示せ. (2) 第  $n$  項  $a_n$  を求めよ.

**【解】** (1)  $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$  であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (2a_{n+1} - 1) - (2a_n - 1) \\ &= 2a_{n+1} - 2a_n \end{aligned}$$

よって  $a_{n+1} = 2a_n$

(2) (1) より, 数列  $\{a_n\}$  は公比 2 の等比数列で, 初項は

$$a_1 = S_1 = 2a_1 - 1$$

よって  $a_1 = 1$

したがって, 数列  $\{a_n\}$  の一般項は

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_n = 2^{n-1}$$

**12** 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2(n+1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

**【解】**  $b_n = \frac{1}{a_n}$  とすると

$$b_1 = \frac{1}{a_1} = 2, \quad b_{n+1} - b_n = 2(n+1)$$

数列  $\{b_n\}$  の階差数列の第  $n$  項が  $2(n+1)$  であるから,  $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1) \\ &= 2 + 2 \times \frac{1}{2}(n-1)n + 2(n-1) \\ &= n^2 + n = n(n+1) \end{aligned}$$

初項は  $b_1 = 2$  なので, 上の  $b_n$  は  $n = 1$  のときにも成り立つ.

したがって, 数列  $\{a_n\}$  の一般項は

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n(n+1)}$$

**13**  $a > 0$  で  $n$  を自然数とする．数学的帰納法を用いて，次の不等式を証明せよ．

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

[証明] この不等式を (A) とする．

[1]  $n = 1$  のとき

$$\text{左辺} = 1 + a, \text{右辺} = 1 + 1 \cdot a = 1 + a$$

よって， $n = 1$  のとき，(A) が成り立つ．

[2]  $n = k$  のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$(1 + a)^k \geq 1 + ka$$

であると仮定する．両辺に  $1 + a$  をかけると

$$(1 + a)^{k+1} \geq (1 + ka)(1 + a) \quad \cdots \textcircled{1}$$

次に

$$(1 + ka)(1 + a) \geq 1 + (k + 1)a \quad \cdots \textcircled{2}$$

を示す．

$$(1 + ka)(1 + a) - \{1 + (k + 1)a\} = ka^2 > 0$$

よって， $\textcircled{2}$  も成り立つから， $\textcircled{1}$ ， $\textcircled{2}$  より

$$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$$

したがって， $n = k + 1$  のときも (A) が成り立つ．

[1]，[2] から，すべての自然数について (A) が成り立つ．

[証終]

14 すべての自然数  $n$  について、 $2^{2n-1} + 3^{2n-1}$  は5の倍数である。このことを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

[証明] 「 $2^{2n-1} + 3^{2n-1}$  は5の倍数である」を (A) とする。

[1]  $n = 1$  のとき

$$2^{2 \cdot 1 - 1} + 3^{2 \cdot 1 - 1} = 2 + 3 = 5$$

よって、 $n = 1$  のとき、(A) が成り立つ。

[2]  $n = k$  のとき (A) が成り立つと仮定する。

すなわち、整数  $m$  を用いて

$$2^{2k-1} + 3^{2k-1} = 5m$$

と表されると仮定する。

$n = k + 1$  のときを考えると

$$\begin{aligned} 2^{2(k+1)-1} + 3^{2(k+1)-1} &= 2^2 \cdot 2^{2k-1} + 3^2 \cdot 3^{2k-1} \\ &= 4 \cdot 2^{2k-1} + 9 \cdot 3^{2k-1} \\ &= 4(2^{2k-1} + 3^{2k-1}) + 5 \cdot 3^{2k-1} \\ &= 4 \cdot 5m + 5 \cdot 3^{2k-1} \\ &= 5(4m + 3^{2k-1}) \end{aligned}$$

よって、 $2^{2(k+1)-1} + 3^{2(k+1)-1}$  は5の倍数であるから、

$n = k + 1$  のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ。 [証終]

練習 1 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ .

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

解答 漸化式を変形すると  $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \text{ とすると } b_{n+1} = 3b_n$$

よって, 数列  $\{b_n\}$  は公比 3 の等比数列で, 初項は

$$b_1 = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$$

数列  $\{b_n\}$  の一般項は  $b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

数列  $\{b_n\}$  は数列  $\{a_n\}$  の階差数列であるから

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき } \quad a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k \\ &= 1 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{3^n - 1}{2} \end{aligned}$$

初項は  $a_1 = 1$  なので, 上の  $a_n$  は  $n = 1$  のときにも成り立つ .

したがって, 一般項  $a_n$  は  $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$