高校生の

新　編　数　学　A

書込みノート

平成 20 年 8 月 10 日

Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

目次

第 1 章　場合の数と確率

1.1　集合とその要素の個数

1.1.1　集合

数学では,「1 から 10 までの自然数の集まり」のように，範囲がはっきりしたものの集まりを**集合**といい，集合に入っている 1 つ 1 つのものをその集合の**要素**という．ここでは，要素の個数が有限である集合について考えよう．

A》集合と要素

集合の表し方には，{　} の中に要素を書き並べて表す方法がある．

例 1.1 (1) 18 の正の約数全体の集合 A は

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$$

(2) 20 以下の正の偶数全体の集合 B は

$$B = \{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 20\}$$

[終]

補足　(2) のように要素が多い場合は，省略記号 $\cdots$ を用いて表してもよい．

要素が満たすべき条件を示して，集合を表す場合もある．例 1 の集合 A，B は，それぞれ次のようにも表される．

例 1.2 (1) $A = \{x \,|\, x$ は 18 の正の約数$\}$

(2) $B = \{2n \,|\, n$ は 10 以下の自然数$\}$

補足　(2) では，$2n$ の n に $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10$ を代入すると，要素が得られる．

練習 1.1 次の集合を，要素を書き並べて表せ．

(1) 12 の正の約数全体の集合 A

(2) $B = \{x \,|\, x$ は 10 以下の正の奇数$\}$

(3) $C = \{3n \,|\, n$ は 20 以下の自然数$\}$

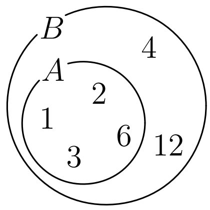
B》部分集合

集合 A と集合 B について，Aのすべての要素がBの要素でもあるとき，A を B の**部分集合**という．このとき，A は B に**含まれる**，または B は A を**含む**といい，$\boldsymbol{A \subset B}$，または $\boldsymbol{B \supset A}$ で表す．集合 A 自身は A の部分集合である．すなわち，$A \subset A$ である．

また，A と B の要素がすべて一致しているとき，A と B は**等しい**といい，$\boldsymbol{A = B}$ で表す．

例 1.3　2つの集合の関係

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ と
$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ については，
$A \subset B$ である．
また，6 の正の約数全体の集合を C とすると，$A = C$ である．



練習 1.2　次の 2 つの集合の関係を，$\subset$，$\supset$，$=$ を使って表せ．

(1)　$A = \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$，$B = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$

(2)　$C = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$，8 の正の約数全体の集合 D

(3)　$P = \{x \mid x$ は 12 以下の自然数$\}$，$Q = \{x \mid x$ は 12 の正の約数$\}$

要素が 1 つもない集合も考えることができる．これを**空集合**といい，$\boldsymbol{\phi}$ で表す．空集合 ϕ は，どんな集合においても，その部分集合であると約束する．

例 1.4　文字 a, b の集合 {a, b} の部分集合は，次の 4 個である．

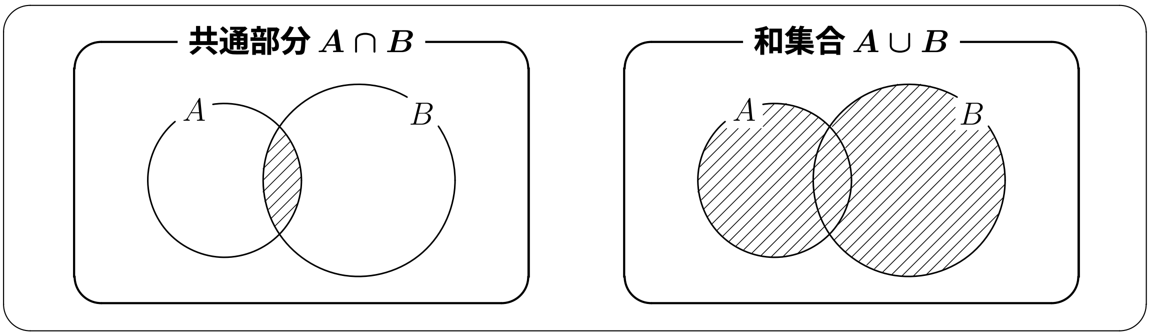
ϕ，{a}，{b}，{a, b}　　　$\longleftarrow$ 空集合 ϕ および {a, b} 自身も部分集合である．

練習 1.3　次の集合の部分集合をすべてあげよ．

(1)　$\{1,\ 2\}$　　　　(2)　{a, b, c}

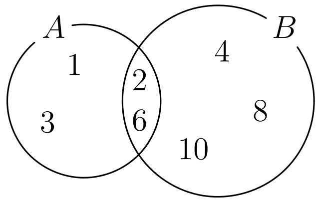
C》共通部分と和集合

集合 A，B の両方に入っている要素全体の集合を A と B の**共通部分**といい，$\boldsymbol{A \cap B}$ で表す．また，A，B の少なくとも一方に入っている要素全体の集合を A と B の**和集合**といい，$\boldsymbol{A \cup B}$ で表す．



例 1.5 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$,
$B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ について

$$A \cap B = \{2,\ 6\},$$
$$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$$



練習 1.4 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$, $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$，$C = \{1,\ 3\}$ について，次の集合を求めよ．

(1) $A \cap B$

(2) $A \cup B$

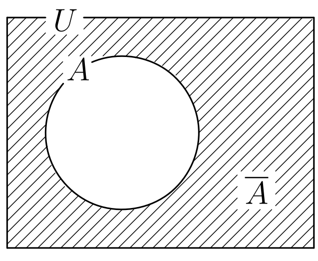
(3) $B \cap C$

(4) $B \cup C$

D》補集合

集合を考えるときは，1つの集合 U を決めて，その部分集合について考えることが多い．このとき，U を**全体集合**という．

U の部分集合 A に対して，U の要素で，A には入っていない要素全体の集合を，U に関する A の**補集合**といい，$\boldsymbol{\overline{A}}$ で表す．



例 1.6 補集合を求める.

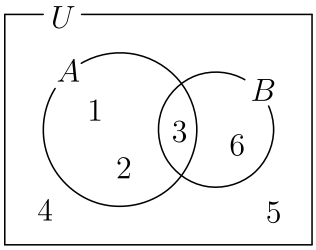
$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ を全体集合とする.
U の部分集合

$$A=\{1,\ 2,\ 3\},\quad B=\{3,\ 6\}$$

について $\overline{A}=\{4,\ 5,\ 6\}$

また，$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ であるから

$$\overline{A\cup B}=\{4,\ 5\}$$



練習 1.5 例 1.6 の集合 A，B について，次の集合を求めよ.

(1) $\overline{B}$　　(2) $\overline{A}\cap\overline{B}$

(3) $\overline{A}\cup\overline{B}$　　(4) $\overline{A\cap B}$

(5) $\overline{A}\cap B$　　(6) $A\cap\overline{B}$

補集合の定義から，次のことが成り立つ.

補集合の性質

U を全体集合とし，A，B をその部分集合とするとき

$$\boldsymbol{A\cap\overline{A}=\phi,\qquad A\cup\overline{A}=U,\qquad \overline{\overline{A}}=A}$$

$$\boldsymbol{A\subset B}\quad\textbf{ならば}\quad\boldsymbol{\overline{A}\supset\overline{B}}$$

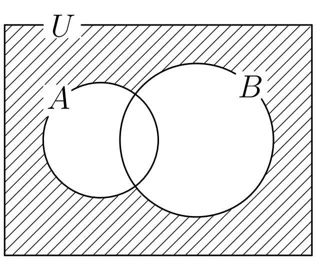
注意 $\overline{\overline{A}}$ は $\overline{A}$ の補集合を表す.

また，次の**ド・モルガンの法則**が成り立つ[1].

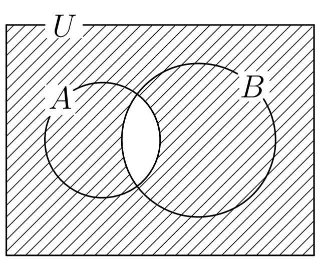
ド・モルガンの法則

1 $\boldsymbol{\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}}$

2 $\boldsymbol{\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}}$



$\boldsymbol{\overline{A\cup B}}$**と**$\boldsymbol{\overline{A}\cap\overline{B}}$



$\boldsymbol{\overline{A\cap B}}$**と**$\boldsymbol{\overline{A}\cup\overline{B}}$

[1] この法則が成り立っていることは，例 1.6 と練習 1.5(2)，(3)，(4) の結果からも確かめられる.

研究

集合についての表記

ここでは，集合についてもう少し詳しく説明しておこう．
x が集合 A の要素であるとき，x は集合 A に**属する**といい，
$\boldsymbol{x \in A}$ で表す．x が集合 A の要素でないときは，$\boldsymbol{x \notin A}$ で表す．

例 1　1桁(けた)の素数全体の集合 $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ について

$$2 \in A, \qquad 1 \notin A$$

[終]

例 2　集合 A，B の共通部分と和集合は，次のように表される．

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{かつ} \quad x \in B\}$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{または} \quad x \in B\}$$

[終]

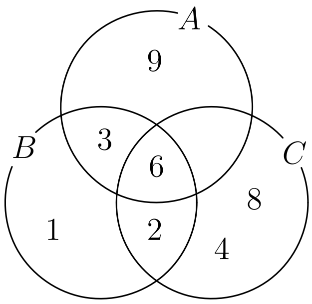
集合 A，B，C のすべてに属する要素全体の集合を，A，B，C の**共通部分**といい，$\boldsymbol{A \cap B \cap C}$ で表す．
また，A，B，C の少なくとも 1 つに属する要素全体の集合を，A，B，C の**和集合**といい，$\boldsymbol{A \cup B \cup C}$ で表す．

例 3　$A=\{3,\ 6,\ 9\}$，
$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$，
$C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

について

$A \cap B \cap C = \{6\}$
$A \cup B \cup C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$

である．　**[終]**



1.1.2　集合の要素の個数

集合についていろいろ調べてきたが，ここでは集合の要素の個数を考えよう．

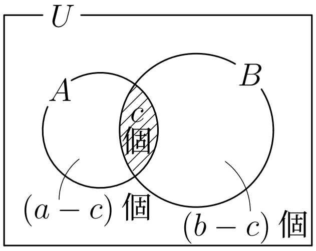
A》集合の要素の個数

集合 A の要素の個数が有限のとき，その個数を $\boldsymbol{n(A)}$ で表す．

例 1.7 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6\}$ について

$n(A)=4$，$n(B)=3$，$n(A\cap B)=2$　　**[終]**　　← $A\cap B=\{2,\ 4\}$

全体集合 U の集合 A，B に対して，$n(A\cup B)$ を考えよう．



$$n(A)=a,\quad n(B)=b,\quad n(A\cap B)=c$$

とすると，右の図から分かるように

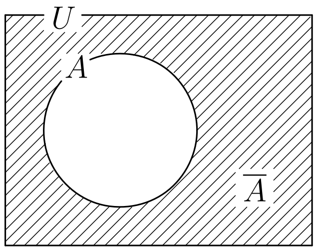
$$\begin{aligned} n(A\cup B) &= (a-c)+(b-c)+c \\ &= a+b-c \end{aligned}$$

である．すなわち，次の等式が成り立つ．

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

A の補集合 $\overline{A}$ の要素は，全体集合 U の要素から A の要素を除いたものである．

したがって，次の等式が成り立つ．



$$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$$

これまでのことをまとめておこう．

和集合，補集合の要素の個数

1　$\boldsymbol{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$

2　$\boldsymbol{n(\overline{A})=n(U)-n(A)}$　　ただし，U は全体集合

1 において，とくに $A\cap B=\phi$ のときは，次のことが成り立つ．

$\boldsymbol{A\cap B=\phi}$ のとき　　$\boldsymbol{n(A\cup B)=n(A)+n(B)}$

B ≫ 倍数の個数

例題 1.1 100 以下の自然数のうち，次のような数の個数を求めよ．

(1) 3 の倍数　　(2) 3 の倍数でない数

(3) 3 の倍数かつ 5 の倍数　　(4) 3 の倍数または 5 の倍数

解答 100 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，3 の倍数全体の集合を A，5 の倍数全体の集合を B とすると

$$A = \{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots,\ 3\cdot33\}$$
$$B = \{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots,\ 5\cdot20\}$$

(1) $n(A) = 33$　　(答) 33 個

(2) 求めるのは $n(\overline{A})$ である．

$$n(\overline{A}) = n(U) - n(A) = 100 - 33 = 67$$
(答) 67 個

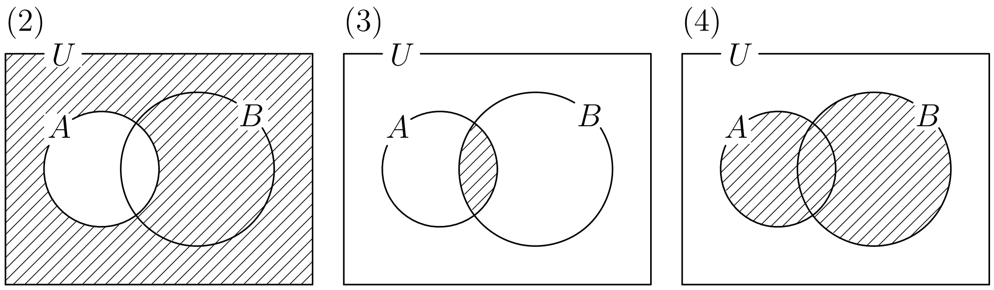
(3) 求めるのは $n(A \cap B)$ である．

$$A \cap B = \{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ 15\cdot3,\ \cdots,\ 15\cdot6\}$$

よって　$n(A \cap B) = 6$　　(答) 6 個

(4) 求めるのは $n(A \cup B)$ である．

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 33 + 20 - 6 = 47 \end{aligned}$$
(答) 47 個



注意 3·1，3·2 などにおける・は，積を表す記号である．

練習 1.6 100 以下の自然数のうち，次のような数の個数を求めよ．

(1) 6 の倍数　　(2) 6 の倍数でない数

(3) 4 の倍数かつ 6 の倍数　　(4) 4 の倍数または 6 の倍数

C》集合の応用

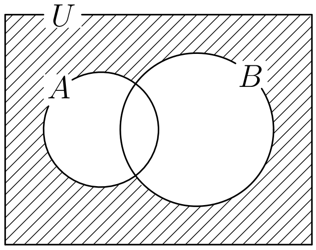
応用例題 1.1　100 人の人に 2 つの提案 a，b をしたところ，a に賛成の人は 77 人，b に賛成の人は 83 人，a にも b にも賛成の人は 66 人いた．a にも b にも賛成でない人は何人いるか．

考え方》　集合でいうと，$n(\overline{A} \cap \overline{B})$ すなわち $n(\overline{A \cup B})$ を求めればよい．

解答　この 100 人の集合を U とし，a に賛成の人の集合を A，b に賛成の人の集合を B とすると

$$n(A) = 77, \quad n(B) = 83, \quad n(A \cap B) = 66$$

a にも b にも賛成でない人の集合は $\overline{A \cup B}$ である．



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 77 + 83 - 66 = 94$$

より　$$n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B)$$
$$= 100 - 94 = 6$$

(答) 6 人

練習 1.7　応用例題 1.1 について，右のような人数の表を作った．表の空らんをうめ，次の人数を求めよ．

	B	$\overline{B}$	合計
A	66		77
$\overline{A}$		6	
合計	83		100

(1)　a にだけ賛成の人

(2)　b にだけ賛成の人

練習 1.8　あるクラス 40 人の生徒を対象に通学方法を調べたところ，自転車を利用する人が 13 人，バスを利用する人が 16 人，自転車もバスも利用する人が 5 人いた．次の人は何人いるか．

(1)　自転車もバスも利用しない人

(2)　自転車を利用するが，バスは利用しない人

1.1.3 補充問題

1 100 から 200 までの自然数のうち，次のような数の個数を求めよ．

(1) 3 の倍数

(2) 4 の倍数

(3) 3 の倍数または 4 の倍数

(4) 3 の倍数でも 4 の倍数でもない数

2 200 人の人に 2 つのテーマパーク A，B に行ったことがあるかどうかのアンケート調査をしたところ，A に行ったことのある人は 116 人，B に行ったことのある人は 90 人いた．また，A にも B にも行ったことのない人が 32 人いた．

(1) A または B に行ったことがある人は何人いるか．

(2) A にも B にも行ったことがある人は何人いるか．

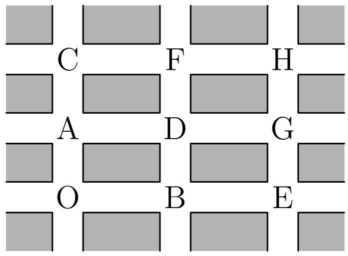
1.2　場合の数

1.2.1　和の法則・積の法則

ある事柄が起こる場合の数を知るには，すべての場合をもれがなくかつ重複もなく数える必要がある．
ここでは，そのような数え上げの方法について考えてみよう．

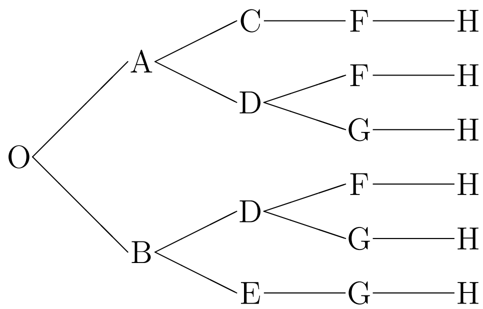
A 》 樹形図

右の図のように道路がある町で，地点Oから地点Hまで遠回りしないで行くのに，どのような道順があるかを調べてみよう．



条件を満たす道順を，交差点を示す文字の順にすべて書き出してみると

O → A → C → F → H
O → A → D → F → H
O → A → D → G → H
O → B → D → F → H
O → B → D → G → H
O → B → E → G → H



となる．

これらは，右の図のように次々と枝分かれしていく図でも表すことができる．このような図を**樹形図**という．樹形図は，起こりうるすべての場合を，もれも重複もなく示すのに便利である．

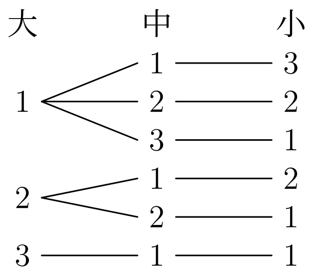
練習 1.9 アルファベットのA，B，Cを，ACBのように重複なしに1個ずつすべて並べるとき，その並べ方をすべて書き出せ．

樹形図を使って，起こりうる場合の数を求めてみよう．

例題 1.2 大中小の 3 個のさいころを投げるとき，目の和が 5 になる場合は何通りあるか．

解答 右の樹形図により

6 通り



練習 1.10 大中小の 3 個のさいころを投げるとき，次の場合は何通りあるか．

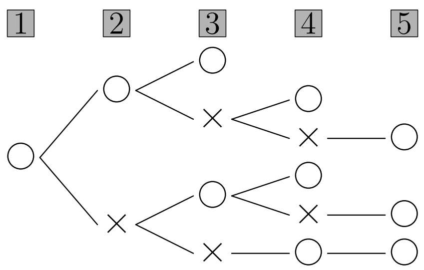
(1) 目の和が 6 になる場合　　(2) 目の和が 7 になる場合

応用例題 1.2 ある競技の予選は 5 試合のうち 3 勝すれば通過できる．ただし，引き分けはなく，3 勝したらそれ以降の試合はない．最初に 1 勝したとき，この予選を通過するための勝敗の順は何通りあるか．

考え方》 勝ちを○，負けを×で表し，5 回目までに○が 3 回出てくる場合の樹形図をかく．

解答 勝ちを○，負けを×で表し，3 勝する場合の樹形図をかくと，右の図のようになる．

よって　　6 通り



練習 1.11 赤玉 2 個と青玉 2 個の入った箱の中から，1 個ずつ玉を取り出して順に 1 列に並べる．全部の玉を取り出すとき，玉の並べ方は何通りあるか．

B》 和の法則

10 ページの道順の例では，A を通るものと B を通るものがある．これらに重複はなく，次の関係が成り立っている．

道順の総数		**A を通るもの**		**B を通るもの**
6通り	$=$	3通り	$+$	3通り

一般に，次の**和の法則**が成り立つ．

和の法則

> 2つの事柄 A と B の起こり方に重複はないとする．
> A の起こり方が a 通りあり，B の起こり方が b 通りあれば，
> A または B の起こる場合は，$\boldsymbol{a+b}$ 通りある．

和の法則は，3つ以上の事柄についても，同じように成り立つ．

例題 1.3 1個のさいころを2回投げるとき，目の和が5の倍数になる場合は何通りあるか．

解答 目の和が5または10になる場合である．
目の和が5になるのは，

$$(1, 4),\ (2, 3),\ (3, 2),\ (4, 1)$$

← (1回目，2回目) のように，出る目を示している．

の4通り．目の和が10になるのは，

$$(4, 6),\ (5, 5),\ (6, 4)$$

の3通り．よって，和の法則により

$$4 + 3 = 7 \qquad \text{(答) 7通り}$$

練習 1.12 1個のさいころを2回投げるとき，目の和が次のようになる場合は，何通りあるか．

(1) 7 または 8　　　　(2) 4 の倍数

C》 積の法則

2 種類の食べ物と 3 種類の飲み物からそれぞれ 1 種類ずつ選ぶとき，そのセットの種類の数を求めよう．

食べ物の選び方は 2 通りあり，どの場合に対しても，飲み物の選び方は 3 通りある．

よって，食べ物と飲み物のセットは，

$$2 \times 3 = 6 \quad \text{すなわち} \quad 6\,\text{通り}$$

ある．

一般に，次の**積の法則**が成り立つ．

積の法則

> 事柄 A の起こり方が a 通りあり，そのどの場合に対しても
> 事柄 B の起こり方が b 通りあれば，A と B がともに起こる
> 場合は，$\boldsymbol{a \times b}$ 通りある．

練習 1.13 大小 2 個のさいころを投げるとき，次の問いに答えよ．

(1) 2 個のさいころの目の出方は何通りあるか．

(2) 大きいさいころの目が 3 以上，小さいさいころの目が偶数である出方は何通りあるか．

積の法則は，3 つ以上の事柄についても，同じように成り立つ．

例題 1.4 大中小 3 個のさいころを投げるとき，すべての目が奇数である出方は何通りあるか．

解答 1 個のさいころで，奇数の目の出方は 3 通りある．
よって，積の法則により　　$3 \times 3 \times 3 = 27$　　(答) 27 通り

練習 1.14 次の問いに答えよ．

(1) 大中小 3 個のさいころを投げるとき，目の出方は何通りあるか．

(2) 積 $(a+b)(c+d)(x+y+z)$ を展開すると，項は何個できるか．

応用例題 1.3 次の数について，正の約数は何個あるか．

(1) 8　　　　(2) 72

考え方》 約数を調べるときは，素数の積で表す．

(1) $8 = 2^3$　　(2) $72 = 2^3{\cdot}3^2$

解答 (1) $8 = 2^3$ であるから，8 の正の約数は 1，2，2^2，2^3 である．

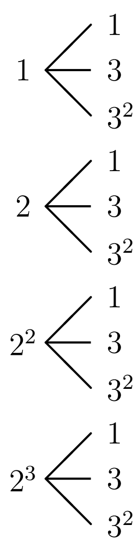
よって，4 個ある．　(答) 4 個

(2) $72 = 2^3{\cdot}3^2$ であるから，72 の正の約数は，2^3 の正の約数と 3^2 の正の約数の積で表される．

2^3 の正の約数は (1) で求めたように 4 個あり，3^2 の正の約数は 1，3，3^2 の 3 個ある．

よって，積の法則により　$4 \times 3 = 12$　(答) 12 個

応用例題 1.3 において，72 の正の約数は，次のような式の展開にすべて現れる．



$$
\begin{aligned}
&(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)\\
&\quad = 1{\cdot}1 + 1{\cdot}3 + 1{\cdot}3^2 + 2{\cdot}1 + 2{\cdot}3 + 2{\cdot}3^2\\
&\qquad + 2^2{\cdot}1 + 2^2{\cdot}3 + 2^2{\cdot}3^2 + 2^3{\cdot}1 + 2^3{\cdot}3 + 2^3{\cdot}3^2
\end{aligned}
$$

展開した項の個数 4×3 が，72 の正の約数の個数に等しい．

練習 1.15 次の数について，正の約数は何個あるか．

(1) 16

(2) 144

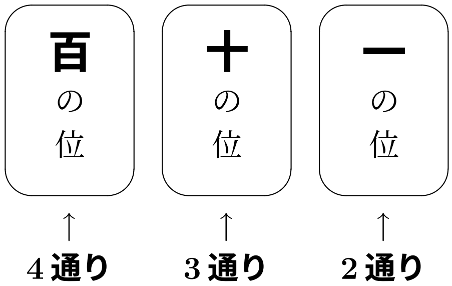
1.2.2　順列

いくつかのものの中からその一部を取り出して 1 列に並べるとき，並べ方の総数について調べてみよう．

A 》順列の総数

4 個の数字 1，2，3，4 のうちの異なる 3 個を並べて，3桁の数が何個できるかを考えてみる．

百の位から順に数字を決めていこう．



① 百の位は，どれでもよいから 4 通り．

② 十の位は，①で決めた以外の 3 通り．

③ 一の位は，①，②で決めた以外の 2 通り．

したがって，作ることできる 3 桁の数の個数は，積の法則により

$$4 \times 3 \times 2 = 24 \quad \text{すなわち} \quad 24 \text{ 個}$$

である．

このように，いくつかのものを順に 1 列に並べるとき，その並びの 1 つ 1 つを**順列**という．

一般に，異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して並べる順列を

n 個から r 個取る順列

といい，その総数を，$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r}$ で表す[2]．ただし，$r \leqq n$ である．

たとえば，4 個から 3 個取る順列の総数は ${}_4\mathrm{P}_3$ で表され，上で調べたことから次のようになる．

$${}_4\mathrm{P}_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

[2] ${}_n\mathrm{P}_r$ の P は，「順列」を意味する英語 permutation の頭文字である．

n 個から r 個取る順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$ についても，積の法則を使って求めると，次のような結果が得られる．

順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個の積}}}$$

← ${}_n\mathrm{P}_r$ は，r 個の数の積

1 番目	2 番目	3 番目	$\cdots\cdots$	r 番目
n 通り	$(n-1)$ 通り	$(n-2)$ 通り		$\{n-(r-1)\}$ 通り $= n-r+1$

例 1.8　7 人から 3 人を選んで 1 列に並べるとき，並べ方の総数は

$$ {}_7\mathrm{P}_3 = \underbrace{7 \times 6 \times 5}_{3\text{ 個の数の積}} = 210 \quad (\text{通り}) $$

練習 1.16　次の値を求めよ．

(1) ${}_5\mathrm{P}_2$　　(2) ${}_8\mathrm{P}_4$　　(3) ${}_3\mathrm{P}_1$　　(4) ${}_6\mathrm{P}_6$

練習 1.17　次のものの総数を求めよ．

(1)　10 人の生徒から 3 人を選んで 1 列に並べるときの並べ方

(2)　1 から 6 までの数字から異なる 4 個を選んで作る 4 桁の数

順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$ の式で，とくに $r=n$ のときは

$$ {}_n\mathrm{P}_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 $$

という等式が得られる．

この等式の右辺は，1 から n までのすべての自然数の積である．

これを n の**階乗**といい，$\boldsymbol{n!}$ で表す．

n の階乗

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

一般に，次のことがいえる．

異なる n 個すべてを並べる順列の総数は $n!$ 通り

例 1.9 4 人の生徒全員を 1 列に並べるとき，並べ方の総数は

$$4! = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 24 \text{ (通り)}$$

練習 1.18 次のような並べ方の総数を求めよ．

(1) 1 から 5 までの自然数すべてを 1 列に並べる．

(2) A，B，C，D，E，F，G の 7 文字すべてを 1 列に並べる．

B 》順列の考え方の利用

順列の考え方を利用して，いろいろな場合の数を求めてみよう．

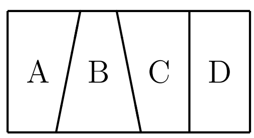
例題 1.5 1 から 10 までの 10 枚の番号札がある．この番号札のうちの 3 枚を A，B，C の 3 人に 1 枚ずつ配るとき，配り方は何通りあるか．

解答 10 枚から 3 枚を選んで 1 列に並べる順列の総数と同じである．
よって，配り方の総数は

$${}_{10}\mathrm{P}_3 = 10{\cdot}9{\cdot}8 = 720 \qquad \text{(答) 720 通り}$$

練習 1.19 6 人の候補選手の中から，リレーの第 1 走者から第 4 走者までを選ぶとき，4 人の走者の選び方は何通りあるか．

練習 1.20 右の図のような A，B，C，D の 4 つの部分を，すべて違う色で塗り分ける．5 種類の色があるとき，何通りの塗り方があるか．



応用例題 1.4 男子4人と女子3人が1列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか．

(1) 両端が男子である．　　(2) 女子3人が続いて並ぶ．

考え方》 並びに決まりのある部分は別に考え，積の法則を使う．

(1) 男 **残り5人** 男　　(2) 男 男 男 **女子3人** 男

解答　(1)　両端の男子2人の並び方は，${}_4\mathrm{P}_2$ 通りある．

間に並ぶ残り5人の並び方は，5! 通りある．

よって，並び方の総数は，積の法則により

$${}_4\mathrm{P}_2 \times 5! = 4\cdot 3 \times 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 1440$$

(答) 1440通り

(2)　女子3人をひとまとめにする．

男子4人と女子ひとまとめの並び方は，5! 通りある．

また，ひとまとめにした女子3人の並び方は，3! 通りある．

よって，並び方の総数は，積の法則により

$$5! \times 3! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \times 3\cdot 2\cdot 1 = 720$$

(答) 720通り

練習 1.21 母音a，i，u，e，oと子音k，s，tの8個を1列に並べるとき，次のような並べ方は何通りあるか．

(1) 両端が母音である．

(2) すべての母音が続いて並ぶ．

練習 1.22 1，2，3，4，5 の 5 個の数字を 1 個ずつ使って，3 桁の数を作る．次のような数は何個作れるか．

(1) 5 の倍数

(2) 奇数

(3) 偶数

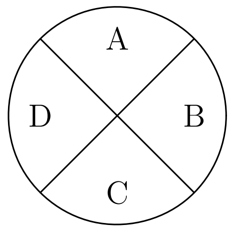
(4) 300 より大きい数

練習 1.23 4 個の数字 0，1，2，3 を 1 個ずつ使って，3 桁の数を作る．百の位は 0 でないことに注意して，作れる 3 桁の数の個数を求めよ．

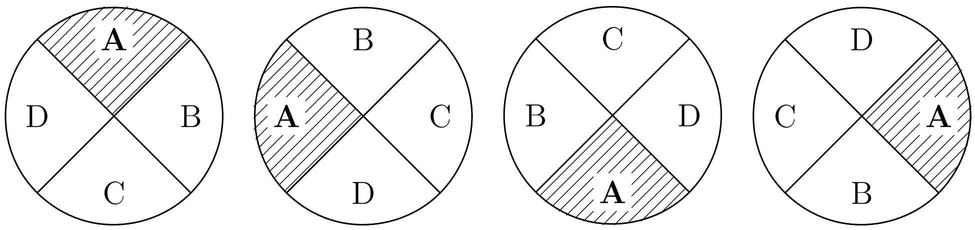
C 》円順列

ものを円形に並べる順列を**円順列**という．円順列では，適当に回転して並びが同じになれば同じ並べ方とみなす．

右の図のように円盤を 4 等分した各部分を，A，B，C，D の 4 色をすべて使って塗り分けるとき，色の並びは円順列になる．



このとき，次の並びは円順列として同じものである．



たとえば，A に着目して A に続く色の並びを時計回りの順に並べると，どれも BCD である．すなわち，4 色の円順列の総数は，A を除いた残り 3 色の順列の総数に等しく，次のようになる．

$$(4-1)! = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \quad (\text{通り})$$

円順列の総数については，次のことがいえる．

円順列の総数

異なる n 個の円順列の総数は $\boldsymbol{(n-1)!}$ 通り

← $(n-1)$ 個の順列の総数

例 1.10 7 人で輪を作るとき，並ぶ順は円順列であるから，その総数は

$$(7-1)! = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \ (\text{通り})$$

[終]

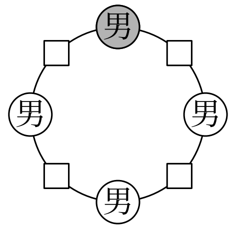
練習 1.24 次の場合に，並べ方は何通りあるか．

(1) 5 人を輪の形に並べる．

(2) 異なる 6 個の玉を円形に並べる．

応用例題 1.5 男子 4 人と女子 4 人が輪の形に並ぶとき，男女が交互に並ぶような並び方は何通りあるか.

考え方 》 男子を円形に並べて，間に女子を並べていくと考える. 特定の男子に着目すると，間に入る女子の並び方はふつうの順列と考えられる.



解答 男子 4 人の円順列の総数は，$(4-1)!$ 通り.
女子 4 人を男子の間に 1 人ずつ並べる方法は，$4!$ 通り.
よって，並び方の総数は，積の法則により

$$(4-1)! \times 4! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 144 \text{ (通り)}$$

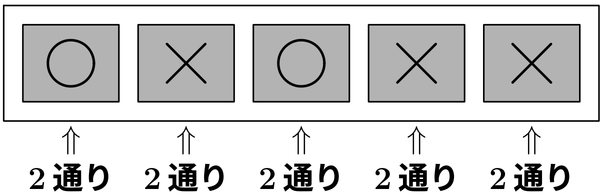
練習 1.25 大人 5 人と子供 5 人が輪の形に並ぶとき，大人と子供が交互に並ぶような並び方は何通りあるか.

練習 1.26 男子 4 人と女子 2 人が，丸いテーブルの周りの 6 個の席に着席するとき，女子が隣り合うような並び方は何通りあるか.

D 》重複順列

これまでは，異なるものだけを取って並べる順列を考えてきた．ここでは，重複を許して取って並べる順列を考えてみよう．

記号○と×を，重複を許して5個並べるとする．このとき，右の図のように，5個のどの位置にも，○と×の2種類の記号を並べてよい．



したがって，このような順列の総数は，積の法則により

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \text{ (通り)}$$

$\longleftarrow 2^5=32$

一般に，異なるn個のものから重複を許してr個取って並べる順列を，n個からr個取る**重複順列**という．

← 重複順列では，$r > n$ であってもよい．

重複順列の総数については，次のことがいえる．

重複順列の総数

n個からr個取る重複順列の総数は $\boldsymbol{n^r}$ 通り

$\longleftarrow \underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{n\text{ が } r\text{ 個}}$

例題 1.6 3個の数字1，2，3を重複を許して並べて，4桁の数を作るとき，何個の数が作れるか．

解答　3個から4個取る重複順列であるから

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$　　(答) 81個

練習 1.27 4種類の文字a，b，c，dを，重複を許して次の個数だけ1列に並べるとき，何通りの文字列が作れるか．

(1) 2個

(2) 3個

研究

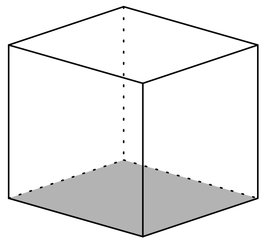
立方体の色塗り

立方体の 6 個の面を，赤青黄白緑黒の 6 色で塗り分けるとき，塗り方の総数を求めてみよう．なお，適当に回転してすべての面の色の並びが同じになれば同じ塗り方とみなす．

［1］　赤色の面は，下に固定する．

［2］　上の面は，残り 5 色のどれかになる．

［3］　側面は，残り 4 色の円順列になる．



以上から，6 色による立方体の色塗りの総数は

$$5 \times (4-1)! = 5 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30 \text{ (通り)}$$

1.2.3　組合せ

いくつかのものの中からその一部を取り出して組を作るとき，その組の総数を調べてみよう．

A》組合せの総数

4個の文字a，b，c，dから，異なる3個を取り出して文字の組を作るとき，次のような組が作れる．

$$\{\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c}\},\ \{\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{d}\},\ \{\mathrm{a},\ \mathrm{c},\ \mathrm{d}\},\ \{\mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \mathrm{d}\} \qquad \cdots ①$$

このように，ものを取り出す順序を無視した組を作るとき，これらの組の1つ1つを**組合せ**という．

一般に，異なるn個のものから異なるr個を取り出して作る組合せを

n 個から r 個取る組合せ

といい，その総数を $\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r}$ で表す[3]．ただし，$r \leqq n$ である．

たとえば，4個から3個取る組合せの総数は ${}_4\mathrm{C}_3$ で表される．

上の ① から ${}_4\mathrm{C}_3 = 4$ であるが，これを順列の総数から求めてみよう．

① の1つの組 {a，b，c} について，3個の文字の順列は3! 通りできる．他の組についても同じだけできる．

よって，${}_4\mathrm{C}_3$ 個ある組すべてでは，3個の文字の順列は，${}_4\mathrm{C}_3 \times 3!$ 個できる．4個から3個取る順列の総数は ${}_4\mathrm{P}_3$ であるから

$${}_4\mathrm{C}_3 \times 3! = {}_4\mathrm{P}_3$$

したがって　${}_4\mathrm{C}_3 = \dfrac{{}_4\mathrm{P}_3}{3!} = \dfrac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1} = 4$

組合せ		順　列
		abc　acb
{a，b，c}	$\Longleftrightarrow$	bac　bca
		cab　cba
1組		**6通り** (3! = 6)

n 個から r 個取る組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ については，

${}_n\mathrm{C}_r \times r! = {}_n\mathrm{P}_r$　となるから　${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$　　$\longleftarrow$ ${}_n\mathrm{C}_r$ と ${}_n\mathrm{P}_r$ の関係式

したがって，${}_n\mathrm{C}_r$ は次の式で表される．

組合せの総数 $\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r}$

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)}^{r\text{ 個の積}}}{r(r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}}$$

$\longleftarrow$ ${}_n\mathrm{C}_r$ は分母も分子も r 個の数の積

注意　とくに，${}_n\mathrm{C}_n = 1$ である．

また，$0! = 1$，${}_n\mathrm{C}_0 = 1$ と定めると，$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}}$ とも表される．

[3] ${}_n\mathrm{C}_r$ のCは,「組合せ」を意味する英語combinationの頭文字である．

例 1.11 5 人から 3 人を選ぶとき，選び方の総数は

$$ {}_5\mathrm{C}_3 = \frac{\overbrace{5\cdot4\cdot3}^{3\text{ 個の数の積}}}{\underbrace{3\cdot2\cdot1}_{3\text{ 個の数の積}}} = 10\ (\text{通り}) $$

練習 1.28 次の値を求めよ．

(1) ${}_7\mathrm{C}_3$　(2) ${}_6\mathrm{C}_2$　(3) ${}_8\mathrm{C}_1$　(4) ${}_5\mathrm{C}_5$

練習 1.29 次のような選び方の総数を求めよ．

(1) 4 人から 2 人を選ぶ．　(2) 6 色から 3 色を選ぶ．

B》 ${}_n\mathrm{C}_r$ の性質

例 1.11 において，5 人から 3 人を選ぶことは，選ばない 2 人を決めることと結果的には同じである．

よって，次の等式が成り立つ．

$$ {}_5\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 $$

3 人の組		**2 人の組**
{a，b，c}		{d，e}
{a，b，d}		{c，e}
{a，b，e}		{c，d}
⋮		⋮
${}_5\mathrm{C}_3$ 個	=	${}_5\mathrm{C}_2$ 個

一般に，n 個から r 個取る組合せの総数は，n 個から $(n-r)$ 個取る組合せの総数に等しい．すなわち，次の等式が成り立つ．

${}_n\mathrm{C}_r$ の性質

$$ {}_n\mathbf{C}_r = {}_n\mathbf{C}_{n-r} $$

$$ {}_{\bigcirc}\mathrm{C}_{\triangle} = {}_{\bigcirc}\mathrm{C}_{\square} $$
$$ \triangle + \square = \bigcirc $$

例 1.12 ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ を使って，${}_{10}\mathrm{C}_7$ を求める．

$$ {}_{10}\mathrm{C}_7 = {}_{10}\mathrm{C}_{10-7} = {}_{10}\mathrm{C}_3 = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} = 120 $$

練習 1.30 次の値を求めよ．

(1) ${}_5\mathrm{C}_4$　(2) ${}_8\mathrm{C}_6$　(3) ${}_9\mathrm{C}_6$

C ≫ 組合せの考え方の利用

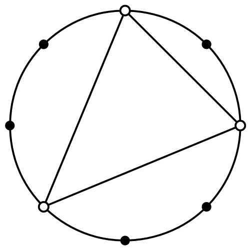
組合せの考え方を利用して，いろいろな場合の数を求めてみよう．

例題 1.7 円周上に異なる 8 個の点がある．これらの点を頂点とする三角形は，何個作れるか．

解答 3 個の点を 1 組決めると三角形が 1 個作れる．
よって，作れる三角形の個数は

$$ {}_8\mathrm{C}_3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56 $$

(答) 56 個



練習 1.31 正六角形について，次の数を求めよ．

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形の個数

(2) 2 個の頂点を結ぶ線分の本数

(3) 対角線の本数

(4) 4 個の頂点を結んでできる四角形の個数

例題 1.8 5 人の男子の中から 2 人，4 人の女子の中から 2 人を選んで 4 人の組を作るとき，何通りの組が作れるか．

解答 男子 2 人の選び方は ${}_5\mathrm{C}_2$ 通り，女子 2 人の選び方は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りある．
よって，4 人の組の総数は，積の法則により

$$ {}_5\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} \times \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 60 \qquad \text{(答) 60 通り} $$

練習 1.32 1 組のトランプのハートのカード 13 枚の中から 5 枚を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか．

(1) 絵札がちょうど 2 枚含まれる．　　(2) エースが含まれる．

D》組分けの総数

応用例題 1.6 6 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか．

(1)　A，B，C の 3 つの組に，2 人ずつ分ける．

(2)　2 人ずつの 3 つの組に分ける．

考え方》(2)　同人数の 3 つの組に A，B，C の名前のつけ方が 3! 通りあるから，(1) の総数 =(2) の総数 ×3! が成り立つ．

解答 (1)　A 組の 2 人の選び方は，${}_6C_2$ 通りある．

残りの 4 人から B 組の 2 人の選び方は，${}_4C_2$ 通りある．

A 組，B 組の人が決まれば，残りの C 組の 2 人は決まる．

よって，分け方の総数は，積の法則により

$$ {}_6C_2 \times {}_4C_2 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} \times \frac{4\cdot3}{2\cdot1} = 90 $$

(答) 90 通り

(2)　(1) の分け方で，A，B，C の区別をなくすと同じ組が 3! 通りずつできる．

よって，分け方の総数は　$\dfrac{90}{3!} = \dfrac{90}{6} = 15$　(答) 15 通り

練習 1.33 8 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか．

(1) A，B，C，D の 4 つの組に，2 人ずつ分ける．

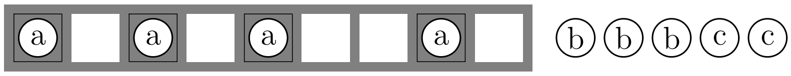
(2) 2 人ずつの 4 つの組に分ける．

(3) 3 人，3 人，2 人の 3 つの組に分ける．

E》同じものを含む順列

順列の総数を求めるのに，組合せの考え方が利用できるものがある．

a が 4 個，b が 3 個，c が 2 個の全部を 1 列に並べる順列を考える．



［1］ 9 個の場所から a を置く 4 個の選び方は，${}_9\mathrm{C}_4$ 通り．

［2］ 残り 5 個の場所から b を置く 3 個の選び方は，${}_5\mathrm{C}_3$ 通り．

［3］ 最後に残った 2 個の場所に c を 2 個置く方法は，1 通り．

よって，この順列の総数は，積の法則により

$${}_9\mathrm{C}_4 \times {}_5\mathrm{C}_3 \times 1 = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} \times \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} \times 1 = 1260 \text{ (通り)}$$

一般に，a が p 個，b が q 個，c が r 個の合計 n 個全部を 1 列に並べる順列の総数は，次のようになる．

$${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!} = \frac{n!}{p!q!r!}$$

同じものを含む順列の総数

a が p 個，b が q 個，c が r 個あるとき，それら全部を 1 列に並べる順列の総数は

$${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q = \boldsymbol{\frac{n!}{p!q!r!}} \qquad \text{ただし}\quad p+q+r=n$$

注意　$r=0$ のときは，順列の総数は ${}_n\mathrm{C}_p = \dfrac{n!}{p!q!}$ である．

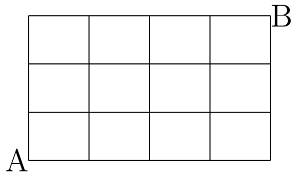
例題 1.9　1，1，1，2，2，3，3 の 7 個の数字全部を使って 7 桁の数を作るとき，何個の数ができるか．

解答　同じ数字が 3 個，2 個，2 個あり，これらを 1 列に並べるから

$$\frac{7!}{3!2!2!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\times2\cdot1\times2\cdot1} = 210 \qquad\qquad \text{(答) 210 個}$$

練習 1.34　BANANA の 6 文字をすべて使って文字列を作るとき，何通りの文字列ができるか．

応用例題 1.7 右の図は，ある地域の道を直線で示したものである．交差点 A から交差点 B まで遠回りをしないで行く最短の道順は，何通りあるか．

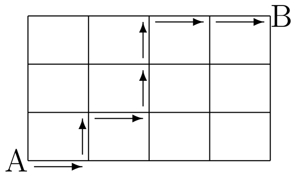


考え方》 交差点から次の交差点まで行くのに，→と↑の向きがある．
最短の道順は，→ 4 個と↑ 3 個を並べて表される．

解答 右へ 1 区画進むことを→で，上へ 1 区画進むことを↑で表す．
A から B まで行く最短の道順は，
→ 4 個と↑ 3 個の順列で表される．
よって，求める最短の道順の総数は

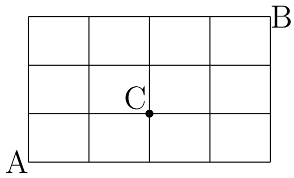
$$\frac{7!}{4!3!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35$$

(答) 35 通り



この道順は
→↑→↑↑→→
で表される．

練習 1.35 右の図のような道のある地域で，次のような最短の道順は何通りあるか．



(1) C から B へ行く．

(2) C を通って A から B へ行く．

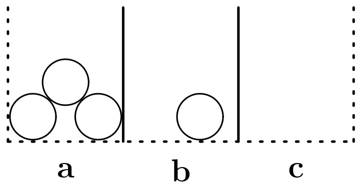
(3) C を通らないで A から B へ行く．

研究

重複を許して作る組合せ

これまでの組合せでは，異なるものだけを取る場合を考えてきた．ここでは，重複を許して作る組合せを考えてみよう．3 種類の文字 a，b，c から，重複を許して 4 個取って作る組合せの総数を求める．

3 つの箱 a，b，c を用意し，4 個の玉を分けて入れる．そして，箱の玉の個数と同じだけその文字を取ることにする．右の図の場合は，a を 3 個，b を 1 個取る．



順列 ◯ ◯ ◯| ◯ |

箱の区切りを | で表し玉を ◯ で表すと，玉の入れ方は，4 個の ◯ と 2 個の | を並べる順列で表される．
したがって，その総数は

$$\frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ (通り)}$$

一般に，異なる n 個のものから重複を許して r 個を取って作る組合せの総数は，r 個の ◯ と $(n-1)$ 個の | を並べる順列の総数に等しく，次のようになる．

$$\frac{\{r+(n-1)\}!}{r!(n-1)!} \qquad \text{すなわち} \qquad {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

例 1 5 種類の果物から重複を許して 3 個取って作る組合せの総数は，3 個の ◯ と 4 個の | の並べ方の総数と等しいから

$$\frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \text{ (通り)}$$

1.2.4　二項定理

組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ は，$(a+b)^n$ を展開した式における項の係数にも関連している．ここでは，そのことについて調べてみよう．

A》$(a+b)^n$ の展開式

$(a+b)^2$，$(a+b)^3$ の展開式は，次のようになる．

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

さらに，$(a+b)^4$ の展開式は，

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$$

として，右の計算より

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\begin{array}{rlllll} & a^3 & +3a^2b & +3ab^2 & +b^3 & \\ \times) & a & +b & & & \\ \hline & a^4 & +3a^3b & +3a^2b^2 & +ab^3 & \\ & & a^3b & +3a^2b^2 & +3ab^3 & +b^4 \\ \hline & a^4 & +4a^3b & +6a^2b^2 & +4ab^3 & +b^4 \end{array}$$

この計算で，各項の係数だけを取り出してみると，右のようになる．

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ \times) & 1 & 1 & & & \\ \hline & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ \hline & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

練習 1.36 次の式の展開式を，係数だけを取り出す計算によって求めよ．

(1) $(a+b)^5$

(2) $(a+b)^6$

B》パスカルの三角形

$(a+b)^1$ から $(a+b)^6$ までの展開式で，各項の係数だけを取り出して順に並べると，右の図のようになる．

この三角形状の数の配列を**パスカルの三角形**という．

$$\begin{array}{l} (a+b)^1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ (a+b)^2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ (a+b)^3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ (a+b)^4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ (a+b)^5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ (a+b)^6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

パスカルの三角形は，左右対称である．また，次のことがいえる．

パスカルの三角形

1　各行の両端の数は1である．

2　2行目以降の両端以外の数は，左上と右上の数の和に等しい．

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

C》二項定理

$(a+b)^5$ を展開する仕組みから，項の係数を求めてみよう．

$$
(a+b)^5 = \underset{①}{(a+b)}\underset{②}{(a+b)}\underset{③}{(a+b)}\underset{④}{(a+b)}\underset{⑤}{(a+b)}
$$

右辺の式を展開するときは，①②…⑤ それぞれから a または b を取り出す．たとえば，積が a^3b^2 となる項をかけた順番のまま書き出すと

$$aaabb,\ aabab,\ aabba,\ abaab,\ ababa,\ \cdots$$

となり，a を3個，b を2個並べる順列で，その総数は，$\dfrac{5!}{3!2!} = {}_5\mathrm{C}_2$ 通りである．

よって，$(a+b)^5$ の展開式における a^3b^2 の項の係数は ${}_5\mathrm{C}_2$ である．

同様に考えて，一般の $(a+b)^n$ の展開式における $a^{n-r}b^r$ の項[4] の係数は ${}_n\mathrm{C}_r$ である．一般に次の**二項定理**が成り立つ．

二項定理

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots} \\
\boldsymbol{\cdots + {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_nb^n}
\end{aligned}
$$

二項定理における ${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$ を，$(a+b)^n$ の展開式の**一般項**といい，係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を**二項係数**という．

[4] 累乗の指数が0である数は1と約束する．すなわち，$a^0 = 1$，$b^0 = 1$ である．

例 1.13 $(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^{\mathbf{5}}$ の展開式

二項定理の等式

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots \\ &\qquad \cdots + {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_nb^n\end{aligned}$$

で，$n=5$ として，a を x，b を -2 におきかえると

$$\begin{aligned}(x-2)^5 &= {}_5\mathrm{C}_0x^5 + {}_5\mathrm{C}_1x^4(-2) + {}_5\mathrm{C}_2x^3(-2)^2 \\ &\qquad + {}_5\mathrm{C}_3x^2(-2)^3 + {}_5\mathrm{C}_4x(-2)^4 + {}_5\mathrm{C}_5(-2)^5 \\ &= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32\end{aligned}$$

練習 1.37 次の式の展開式を，二項定理を使って求めよ．

(1) $(x+1)^4$

(2) $(x-1)^5$

(3) $(x+2)^6$

例題 1.10　$(2x-1)^6$ の展開式における x^3 の項の係数を求めよ．

解答　$(2x-1)^6$ の展開式の一般項は

$$ {}_6\mathrm{C}_r(2x)^{6-r}(-1)^r = {}_6\mathrm{C}_r 2^{6-r}(-1)^r x^{6-r} $$

$6-r=3$ とすると　　$r=3$

よって，求める係数は　　${}_6\mathrm{C}_3 \times 2^3 \times (-1)^3 = -160$

注意　$(2x)^{6-r} = 2^{6-r}x^{6-r}$ である．一般に，$(ab)^n = a^n b^n$ が成り立つ．

練習 1.38　次の式の展開式における x^3 の項の係数を求めよ．

(1) $(2x+3)^4$　　　　(2) $(3x-1)^5$

D ≫ 二項定理の応用

二項定理により，次の等式が成り立つ．

$$ (1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n \qquad \cdots ① $$

この等式に $x=1$ を代入すると，次の等式が得られる．

$$ 2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n $$

練習 1.39　次の等式を，上の等式 ① を利用して導け．

$$ {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n = 0 $$

応用例題 1.8 $(a+b+c)^7$ の展開式における $a^3b^2c^2$ の項の係数を求めよ．

考え方》 $a+b=A$ とおいて，$(A+c)^7$ の展開式で A^5c^2 の項の係数，さらに $(a+b)^5$ の展開式で a^3b^2 の項の係数を求める．

解答 $\{(a+b)+c\}^7$ の展開式において，c^2 を含む項は　${}_7\mathrm{C}_2(a+b)^5c^2$

$(a+b)^5$ の展開式において a^3b^2 の項は　${}_5\mathrm{C}_2a^3b^2$

よって，求める係数は

$$ {}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 21 \times 10 = 210 $$

練習 1.40 $(a+b+c)^6$ の展開式における次の項の係数を求めよ．

(1) a^3bc^2

(2) $a^2b^2c^2$

(3) a^2b^4

研究

$(a+b+c)^n$ の展開式

$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ の項の係数を求めよう．
この項 $a^pb^qc^r$ の係数は，二項定理を導いたときと同様に考えると，a を p 個，b を q 個，c を r 個並べる順列の総数に等しい．
したがって，次のことがいえる．

$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ の項の係数は

$$ \frac{n!}{p!q!r!} \qquad \text{ただし} \quad p+q+r=n $$

たとえば，$(a+b+c)^7$ における $a^3b^2c^2$ の項の係数は

$$ \frac{7!}{3!2!2!} = 210 $$

1.2.5 補充問題

3 大中小3個のさいころを投げるとき，次のような場合は何通りあるか.

(1) すべて異なる目が出る.

(2) 目の積が奇数になる.

(3) 目の積が偶数になる.

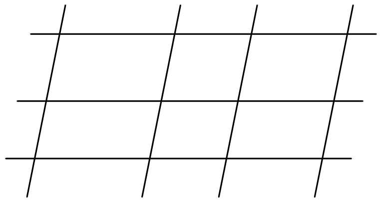
(4) 目の積が20になる.

4 0，1，2，3，4の5個の数字を使って4桁の数を作る.

(1) 各桁の数字が異なるとき，偶数は何個作れるか.

(2) 各桁の数字に重複を許すとき，奇数は何個作れるか.

5 右の図のように，4 本の平行線とそれらに交わる 3 本の平行線がある．これらの平行線によって作られる平行四辺形は，全部で何個あるか．



6 次の等式が成り立つことを，組合せの考えを用いて説明せよ．

$${}_{n}\mathrm{C}_{r} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$$

1.3　確率

1.3.1　事象と確率

私たちの身の回りには偶然に左右されて起こる事柄が多くある．このような事柄について，それがどの程度起こりやすいのか，または起こりにくいのかを考えることにしよう．

A》事柄の起こりやすさ

天気予報に，降水確率というものがある．たとえば

午前の降水確率は 30%，　午後の降水確率は 60%

という予報からは，
「午後は午前よりも雨が降りやすい」というような判断ができる．
このように，事柄の起こりやすさという不確かなものも数値で表すと，その事柄が起こりやすいかどうかの判断がしやすくなる．

トランプのハート１枚とスペード４枚の合計５枚から，２枚をでたらめに選ぶとき，次のどちらの方が起こりやすいのだろうか．

① ２枚ともスペードが出る

② ２枚のうちの１枚にハートが出る

以下では数学的に事柄の起こりやすさを考えることにしよう．

B》試行と事象

１個のさいころを投げると，

1，2，3，4，5，6

のいずれかの目が出る．
また，１組のトランプから１枚引くとき，

[1]　絵札が出る　　[2]　ハートが出る

というような事柄に着目することがある．

「さいころを投げる」とか「トランプのカードを引く」などのように，同じ条件のもとで繰り返すことができる実験や観測を**試行**という．また，試行の結果として起こる事柄を**事象**（じしょう）という．

1個のさいころを投げる試行では，たとえば1の目が出ることを，単に1で表すと，試行の結果全体は，次の集合 U で表すことができる．

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

このとき,「奇数の目が出る」という事象 A は，U の部分集合

$$A = \{1, 3, 5\}$$

で表される．

このように，1つの試行の起こりうる結果全体を集合 U で表すとき，その試行における どの事象も，集合 U の部分集合で表すことができる．

U 自身で表される事象を**全事象**，U のただ1つの要素からなる集合で表される事象を**根元事象**（こんげん）という．

たとえば，1個のさいころを投げる試行の根元事象は，次の6個である．

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$$

注意 今後，事象 A を表す集合を A で表し，事象と集合を区別しない．

例 1.14 10円硬貨1枚と100円硬貨1枚を同時に投げるとき，表裏の出方を求める．

10円硬貨に表が出て，100円硬貨に裏が出ることを，(表，裏) で表すことにすると，起こりうるすべての場合は

(表，表)，(表，裏)，(裏，表)，(裏，裏)

の4通りである．

練習 1.41 大小2個のさいころを同時に投げるとき，すべての目の出方を例 1.14 にならって示せ．

C》同様に確からしいときの確率

1個のさいころを投げるとき，どの目が出ることも同程度に期待できる．一般に，ある試行において，どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき，これらの根元事象は**同様に確からしい**という．このような試行で，起こりうるすべての場合の数を N，事象 A の起こる場合の数を a とするとき，$\dfrac{a}{N}$ を事象 A の**確率**といい，$\boldsymbol{P(A)}$ で表す[5]．

事象 A の確率

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}} = \frac{a}{N}}$$

注意 全事象を U とし，その要素の個数を $n(U)$，事象 A の要素の個数を $n(A)$ で表すと，事象 A の確率は $\boldsymbol{P(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)}}$ とも表される．

例 1.15 1個のさいころを投げるとき，偶数の目が出る確率を求める．

起こりうるすべての目の出方は，6通りある．
このうち，偶数の目が出るのは，3通りある．
よって，偶数の目が出る確率は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \leftarrow N = 6,\ a = 3$$

練習 1.42 1個のさいころを投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 奇数の目が出る． (2) 3以上の目が出る．

---

5 $P(A)$ の P は,「確率」を意味する英語 probability の頭文字である．

練習 1.43 赤玉 2 個と白玉 3 個の入った袋から，玉を 1 個取り出すとき，赤玉の出る確率を求めよ．

練習 1.44 ジョーカーを除く 1 組のトランプのカード 52 枚からカードを 1 枚引くとき，エースが出る確率を求めよ．

例 1.16 3 枚の硬貨を同時に投げるとき，そのうち 1 枚だけ表が出る確率を求める．

3 枚の硬貨に，それぞれ表，裏の 2 通りの出方がある．
よって，起こりうるすべての場合の数は

$$2 \times 2 \times 2 = 8\ (\text{通り})$$

このうち，1 枚だけ表が出るのは，3 通りある．
よって，1 枚だけ表が出る確率は

$$\frac{3}{8}$$

起こりうるすべての場合

(表, 表, 表)
(表, 表, 裏)
(表, 裏, 表)
(裏, 表, 表)
(表, 裏, 裏)
(裏, 表, 裏)
(裏, 裏, 表)
(裏, 裏, 裏)

練習 1.45 3 枚の硬貨を同時に投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) すべて表が出る．　　(2) 1 枚だけ裏が出る．

D》いろいろな事象の確率

例題 1.11 2 個のさいころを同時投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 同じ目が出る．　(2) 目の和が 5 になる．

解答 2 個のさいころの目の出方は，6×6 の 36 通り．

(1) 同じ目が出るのは，以下の 6 通り．

$$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$$

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

(2) 目の和が 5 になるのは，以下の 4 通り．

$$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$$

よって，求める確率は　$\dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

練習 1.46 2 個のさいころを同時に投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 目の和が 7 になる．　(2) 2 個とも偶数の目が出る．

例題 1.12 A，B の 2 人を含む 6 人のリレー選手がいる．走る順番をくじ引きで決めるとき，A が 1 番目，B が 6 番目になる確率を求めよ．

解答 6 人全員の並び方は，6! 通りある．
A が 1 番目，B が 6 番目になる並び方は，4! 通りある．

よって，求める確率は　$\dfrac{4!}{6!} = \dfrac{1}{30}$

練習 1.47 1 組のトランプの 4 枚のエースをでたらめに横 1 列に並べるとき，次の場合の確率を求めよ.

(1) ハートが左端に並ぶ.

(2) クラブが左端，ハートが右端に並ぶ.

例題 1.13 赤玉 3 個と白玉 4 個の入った袋から，同時に 2 個の玉を取り出すとき，2 個とも白玉が出る確率を求めよ.

解答 全部の 7 個から 2 個取る組合せは，${}_7\mathrm{C}_2$ 通りある.
白玉 4 個から 2 個取る組合せは，${}_4\mathrm{C}_2$ 通りある.
よって，求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} \times \frac{2\cdot 1}{7\cdot 6} = \frac{2}{7}$$

練習 1.48 くじが 10 本あり，そのうち 3 本が当たりくじである.

(1) 同時に 2 本引くとき，2 本とも当たる確率を求めよ.

(2) 同時に 3 本引くとき，3 本ともはずれる確率を求めよ.

応用例題 1.9 1組のトランプのハートのカード13枚から，同時に4枚引くとき，絵札を1枚だけ引く確率を求めよ．

考え方》 3枚の絵札から1枚，絵札以外の10枚から3枚引く．

解答 全部の13枚から4枚引く組合せは，${}_{13}\mathrm{C}_4$ 通りある．
絵札3枚から1枚，絵札以外の10枚から3枚引く組合せは，
${}_{3}\mathrm{C}_1 \times {}_{10}\mathrm{C}_3$ 通りある．
よって，求める確率は

$$\frac{{}_{3}\mathrm{C}_1 \times {}_{10}\mathrm{C}_3}{{}_{13}\mathrm{C}_4} = 3 \times \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{13\cdot12\cdot11\cdot10} = \frac{72}{143}$$

練習 1.49 男子6人，女子4人の合計10人の中から抽選で5人を選ぶとき，次のように選ばれる確率を求めよ．

(1) 男子が3人，女子が2人

(2) 女子は1人だけ

1.3.2 確率の基本性質

集合を使って確率の基本性質を明らかにし，複雑な事象の確率を求めるのに，その性質を利用してみよう．

A 》 いろいろな事象

確率の基本性質を調べる前に，事象 A，B に対して，次のような事象を定義しておく．

用　語	意　　味	記 号
A，B の**積事象**	A と B がともに起こる事象	$A \cap B$
A，B の**和事象**	A または B が起こる事象	$A \cup B$

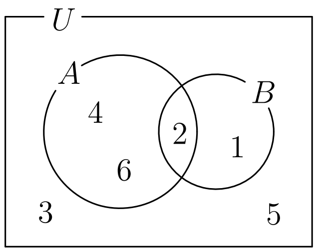
例 1.17 積事象と和事象

1 個のさいころを投げるとき，

「偶数の目が出る」という事象を A,

「2 以下の目が出る」という事象を B

とする．



積事象 $A \cap B$ は

「偶数かつ 2 以下の目が出る」,

和事象 $A \cup B$ は

「偶数または 2 以下の目が出る」

という事象であり，それぞれ次のような集合で表される．

$$A \cap B = \{2\},\ \ A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$$

練習 1.50 1 から 10 までの番号札 10 枚から 1 枚引くとき,「奇数番号を引く」という事象を A,「7 以上の番号を引く」という事象を B とするとき，積事象 $A \cap B$，和事象 $A \cup B$ を集合で表せ．

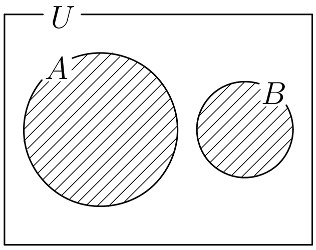
2つの事象 A，B が決して同時に起こらないこともある．このとき，

　　A，B は互いに**排反**である

という．または，

　　A，B は互いに**排反事象**である

ともいう．



A，B が互いに排反であるとは，$A \cap B = \phi$ と同じことである．

空集合 ϕ で表される事象を**空事象**という．

練習 1.51 ジョーカーを除く1組のトランプのカード52枚から1枚引くとき,「ハートが出る」という事象を A,「7が出る」という事象を B,「絵札が出る」という事象を C とする．どの事象とどの事象が互いに排反であるか．

B》確率の基本性質

1つの試行における全事象 U と事象 A の要素の個数について，

$$0 \leqq n(A) \leqq n(U)$$ 　　$\longleftarrow$ $A=\phi$ のとき $n(A)=0$

が成り立つ．

よって，事象 A の確率 $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)}$ の値の範囲は

$$0 \leqq P(A) \leqq 1$$ 　　$\longleftarrow$ $0 \leqq \frac{n(A)}{n(U)} \leqq \frac{n(U)}{n(U)}$

とくに，$P(\phi) = 0$，$P(U) = 1$ である．

また，事象 A，B が互いに排反であるとき，$A \cap B = \phi$ であるから，6ページで学んだことにより，次の等式が成り立つ．

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

よって，両辺を $n(U)$ で割れば，次の等式が得られる．

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

これまでに得られた確率の性質をまとめると，次のようになる．

確率の基本性質

1　どんな事象 A についても　$\boldsymbol{0 \leqq P(A) \leqq 1}$

2　空事象 ϕ について　$\boldsymbol{P(\phi) = 0}$，　全事象 U について　$\boldsymbol{P(U) = 1}$

3　A，Bが互いに排反であるとき　$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

上の **3** を，確率の**加法定理**という．

3 つ以上の事象について，どの 2 つの事象も互いに排反であるとき，これらは 互いに排反である という．3 つ以上の排反な事象についても，2 つの場合の加法定理と同様なことが成り立つ．

例 1.18　確率の加法定理の利用

各等の当たる確率が，右のようなくじがある．
このくじを 1 本引くとき，各等が当たる事象は互いに排反である．

	1 等	2 等	3 等	4 等
確率	$\frac{2}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{20}{100}$

このくじを 1 本引くとき，1 等または 2 等が当たる確率は

$$\frac{2}{100} + \frac{5}{100} = \frac{7}{100}$$

$\longleftarrow$ 確率の加法定理

また，1 等から 3 等までのいずれかが当たる確率は

$$\frac{2}{100} + \frac{5}{100} + \frac{10}{100} = \frac{17}{100}$$

練習 1.52　例 1.18 のくじを 1 本引くとき，次の場合の確率を求めよ．

(1)　3 等または 4 等が当たる．

(2)　2 等から 4 等までのいずれかが当たる．

例題 1.14 赤玉4個，白玉5個の入った袋から，2個の玉を同時に取り出すとき，2個が同じ色である確率を求めよ．

解答 「2個が同じ色である」という事象は，

「2個とも赤玉である」という事象 A,

「2個とも白玉である」という事象 B

の和事象 $A \cup B$ である．

A，B は互いに排反であるから，加法定理により

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} + \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}$$
$$= \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

練習 1.53 赤玉2個，白玉3個，青玉4個の入った袋から，3個の玉を同時に取り出すとき，3個とも同じ色である確率を求めよ．

C》余事象とその確率

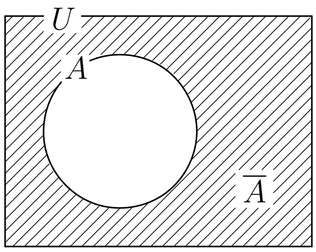
全事象を U とする．事象 A に対して,「A が起こらない」という事象を，A の**余事象**といい，$\boldsymbol{\overline{A}}$ で表す．A，$\overline{A}$ は互いに排反である．

加法定理により

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

一方，$A \cup \overline{A} = U$ であるから

$$P(A \cup \overline{A}) = P(U) = 1$$



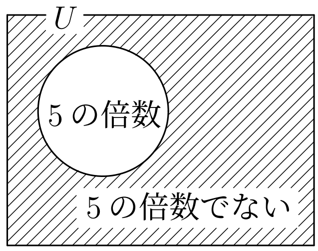
したがって，次のことがいえる．

余事象と確率

$$\boldsymbol{P(A) + P(\overline{A}) = 1} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

例題 1.15 1 から 100 までの 100 枚の番号札から 1 枚引くとき，5 の倍数でない番号を引く確率を求めよ．

解答 「5 の倍数でない」という事象は,
「5 の倍数である」という事象の
余事象である．
5 の倍数の番号を引く確率は $\dfrac{20}{100}$
よって，求める確率は



$$1-\frac{20}{100}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

練習 1.54 1 から 200 までの 200 枚の番号札から 1 枚引くとき，3 の倍数でない番号を引く確率を求めよ．

応用例題 1.10 1 組のトランプのハートのカード 13 枚から 3 枚を同時に引くとき，3 枚のうちの少なくとも 1 枚が絵札である確率を求めよ．

考え方 》「少なくとも 1 枚が絵札」という事象は,「絵札が 1 枚もない」という事象の余事象である．

解答 絵札でないカードは 10 枚ある．
よって，絵札が 1 枚もない確率は

$$\frac{{}_{10}\mathrm{C}_3}{{}_{13}\mathrm{C}_3}=\frac{60}{143}$$

求めるのはこの余事象の確率であるから

$$1-\frac{60}{143}=\frac{83}{143}$$

練習 1.55 1 から 9 までの番号札 9 枚から 4 枚を同時に引くとき，少なくとも 1 枚が偶数の番号である確率を求めよ．

練習 1.56 3 個のさいころを同時に投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 少なくとも 1 個は 1 の目が出る．

(2) 少なくとも 1 個は偶数の目が出る．

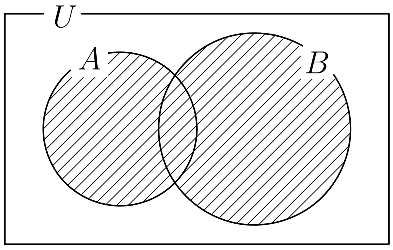
D》一般の和事象の確率

全事象をUとする．2つの事象A，Bについて，確率$P(A\cup B)$を考えてみよう．6ページで学んだように，等式

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

が成り立つ．

よって，両辺を$n(U)$で割れば，次の等式が得られる．



$$\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

例 1.19　1から30までの番号札から1枚引くとき，その番号が2の倍数または3の倍数である確率を求める．

$$A=\{2,4,6,\cdots,30\},\quad B=\{3,6,9,\cdots,30\}$$

とすると　$A\cap B=\{6,12,18,24,30\}$

$$n(A)=15,\quad n(B)=10,\quad n(A\cap B)=5$$

よって，番号が2の倍数または3の倍数である確率は

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{15}{30}+\frac{10}{30}-\frac{5}{30}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

練習 1.57　1から50までの50枚の番号札から1枚引くとき，その番号が次のような数である確率を求めよ．

(1)　3の倍数または4の倍数

(2)　3の倍数でも4の倍数でもない数

1.3.3　独立な試行と確率

これまでは，1つの試行における事象の確率を考えてきた．ここでは，複数の試行を考え，それぞれの試行における事象が同時に起こる確率を考えよう．

A》独立な試行の確率

A，Bの2人がさいころを投げる．

Aが1個のさいころを投げる試行と，Bが1個のさいころを投げる試行を考える．

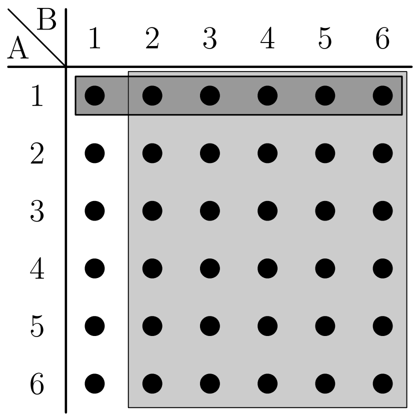
この2つの試行を行った結果は6×6通りあり，それらは同様に確からしい．

このうち，

「Aは1の目が出る」

「Bは1以外の目が出る」

という2つの事象が同時に起こる場合は，1×5通りある．



よって，それが起こる確率pは

$$p=\frac{1\times 5}{6\times 6}=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$$

のように表される．

この確率pは，次のような2つの確率の積になっているといえる．

さいころを1回投げるときに，1の目が出る確率 $\dfrac{1}{6}$

さいころを1回投げるときに，1以外の目が出る確率 $\dfrac{5}{6}$

また，Aがさいころを投げる試行と，Bがさいころを投げる試行では，それぞれの結果は互いに影響を与えない．

このように，いくつかの試行において，どの試行の結果も他の試行の結果に影響を与えないとき，これらの試行は**独立**であるという．

一般に，独立な2つの試行における事象の確率について，次のことが成り立つ．

独立な試行の確率

2つの試行SとTが独立であるとき，Sで事象Aが起こり，かつTで事象Bが起こる確率pは，$P(A)$と$P(B)$の積に等しい．

すなわち　　$\boldsymbol{p=P(A)\times P(B)}$

独立な3つ以上の試行についても，上と同様なことが成り立つ．

例 1.20　1 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げるときの確率

これらの 2 つの試行は独立である．
たとえば,「硬貨は表が出て，さいころは 5 以上の目が出る」という事象の確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

練習 1.58　2 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1)　硬貨は 2 枚とも表が出て，さいころは偶数の目が出る．

(2)　硬貨は 1 枚だけ表が出て，さいころは 2 以下の目が出る．

例 1.21　1 個のさいころを 3 回続けて投げるときの確率

たとえば，3 回続けて 1 以外の目が出る確率は

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率は

$$1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

⟵ 余事象は,「3 回続けて 1 以外の目が出る」

練習 1.59　1 枚の硬貨を 3 回続けて投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 3 回とも表が出る確率　　(2) 少なくとも 1 回は裏が出る確率

練習 1.60 A，B，C の3つのくじがあり，それぞれが当たる確率は右の表の通りである．
これらのくじを1本ずつ引くとき，次の確率を求めよ．

くじ	A	B	C
確率	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

(1) 3本とも当たる確率　(2) 少なくとも1本が当たる確率

例題 1.16 A の袋には青玉3個と白玉2個，B の袋には青玉2個と白玉4個が入っている．A，B の袋から1個ずつ玉を取り出すとき，同じ色の玉を取り出す確率を求めよ．

解答 同じ色が青の場合と白の場合がある．
ともに青玉を取り出す確率は

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{6}=\frac{6}{30}$$

←A から玉を取り出すことと B から玉を取り出すことは独立である．

ともに白玉を取り出す確率は

$$\frac{2}{5}\times\frac{4}{6}=\frac{8}{30}$$

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{6}{30}+\frac{8}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$$

練習 1.61 例題 1.16 において，次の確率を求めよ．

(1) A から青玉，B から白玉を取り出す確率

(2) A，B から取り出す玉の色が異なる確率

B 》 反復試行の確率

1 個のさいころを続けて 3 回投げるとき，6 の目がちょうど 1 回出る確率を求めてみよう．

たとえば，1 回目に 6 の目が出て，2 回目と 3 回目はどちらも 6 以外の目が出る事象の確率は，次のようになる．

$$\frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)$$

また，3 回のうち 1 回 6 の目が出る事象は，${}_3\mathrm{C}_1$ 通りある．

	1 回目	2 回目	3 回目	確率
${}_3\mathrm{C}_1$ 通り	○	×	×	$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$
	×	○	×	$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$
	×	×	○	$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$

■表の説明■
○は 6 の目が出ること，
×は 6 以外の目が出る
ことを表す．

これらの事象は互いに排反であり，どの事象の確率も $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$ である．

よって，求める確率は，次のように計算される．

$$ {}_3\mathrm{C}_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$$

1 個のさいころを何回か投げる場合などのように，同じ条件のもとで，1 つの試行を何回か繰り返すとき，これらの試行は互いに独立である．このような試行の繰り返しを**反復試行**という．

反復試行の確率について，一般に次のことがいえる．

反復試行の確率

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする．この試行を n 回行う反復試行で，A がちょうど r 回起こる確率は $\qquad {}_n\mathbf{C}_r \boldsymbol{p}^r (\mathbf{1} - \boldsymbol{p})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}}$

← A が r 回起こり，$\overline{A}$ が $(n-r)$ 回起こる確率

例 1.22 1 枚の硬貨を 5 回投げて表がちょうど 2 回出る確率

硬貨を 1 回投げるとき，表が出る確率は $\frac{1}{2}$

よって，5 回投げて表がちょうど 2 回出る確率は

$$\begin{aligned} {}_5\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-2} &= 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

練習 1.62 1個のさいころを4回投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 1の目がちょうど3回出る．

(2) 5以上の目がちょうど2回出る．

例題 1.17 赤玉2個と白玉3個の入った袋から玉を1個取り出し，色を見てからもとにもどす．この試行を4回行うとき，赤玉が3回以上出る確率を求めよ．

解答 1回の試行で，赤玉が出る確率は $\dfrac{2}{5}$

この試行を4回行って赤玉が3回以上出る確率は

$$
\begin{aligned}
&{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(1-\frac{2}{5}\right)^{4-3}+\left(\frac{2}{5}\right)^4 \\
&\quad=4\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^4 \\
&\quad=\frac{96}{625}+\frac{16}{625}=\frac{112}{625}
\end{aligned}
$$

← 赤玉が3回または4回出る確率

練習 1.63 赤玉2個と白玉4個の入った袋から玉を1個取り出し，色を見てからもとにもどす．この試行を5回行うとき，赤玉が4回以上出る確率を求めよ．

研究

くじ引きの確率

10本のくじがあり，そのうちの3本が当たりであるとする．このくじを，AとBの2人が順に1本ずつ引くとき，Bが当たる確率を考えてみよう．

［1］Aが当たり，Bも当たる場合

Bは当たり2本を含む9本のくじから1本を引く．

そのとき，Bの当たる確率は $\dfrac{2}{9}$

［2］Aがはずれ，Bが当たる場合

Bは当たり3本を含む9本のくじから1本を引く．

そのとき，Bの当たる確率は $\dfrac{3}{9}$

［1］が起こる確率は，10本から2本取って並べるときに2本とも当たりが並ぶ確率 $\dfrac{3\times 2}{10\times 9}$ に等しい．すなわち,［1］が起こる確率は，次のような2つの確率の積になっている．

$$\left[\begin{array}{c}\text{Aが当たる}\\ \text{確　率}\end{array}\right]\times\left[\begin{array}{c}\text{そのときBが}\\ \text{当たる確率}\end{array}\right]=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}$$

また,［2］が起こる確率は，次のような確率の積になっている．

$$\left[\begin{array}{c}\text{Aがはずれる}\\ \text{確　率}\end{array}\right]\times\left[\begin{array}{c}\text{そのときBが}\\ \text{当たる確率}\end{array}\right]=\frac{7}{10}\times\frac{2}{9}$$

［1］と［2］は同時には起こらないから，Bが当たる確率は

$$\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{3}{10}$$

←Aが当たる確率に等しい

一般に，くじが当たる確率は引く順番に関係なく一定である．

1.3.4　期待値

宝くじの1等賞金は高額であるが，それが当たる確率はかなり小さい．そして，2等，3等では賞金額は下がるが，当たる確率は大きくなる．
このようなくじでは，賞金の総額をくじの総数で割った平均の値に意味がある．この値と確率の関係を調べてみよう．

A》期待値

1000本のくじがあり，その賞金および本数は右の表のようになっている．

	賞　金	本　数
1等	10000円	1本
2等	1000円	5本
3等	100円	50本
はずれ	0円	944本
計		1000本

このくじを1本引くとき，期待できる賞金の額を考えてみよう．
このくじ1000本の賞金の総額は

$$10000 \times 1 + 1000 \times 5 + 100 \times 50 + 0 \times 944$$

である．これを，くじの総数で割ると

$$\frac{1}{1000}(10000 \times 1 + 1000 \times 5 + 100 \times 50 + 0 \times 944) = 20 \qquad \cdots①$$

となる．すなわち，くじ1本当たりの賞金額は20円と考えられる．
右上の表を，確率を示す表に書き換えると，次のようになる．

賞 金	10000円	1000円	100円	0円	計
確 率	$\frac{1}{1000}$	$\frac{5}{1000}$	$\frac{50}{1000}$	$\frac{944}{1000}$	1

また，上の等式①は，次のように書き表すこともできる．

$$10000 \times \frac{1}{1000} + 1000 \times \frac{5}{1000} + 100 \times \frac{50}{1000} + 0 \times \frac{944}{1000} = 20$$

したがって，この等式の左辺は，賞金の額とそれが当たる確率の積をすべて加えたものになっていることがわかる．

一般に，ある試行の結果に応じて，x_1，x_2，x_3，$\cdots$，x_n のどれか1つの値をとる数量 X があり，各値をとる確率が

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n \qquad \text{ただし}\quad p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$$

であるとき，$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n$ を数量 X の**期待値**という．

期待値

X のとる値と確率が右の表のようなとき，X の期待値は，次の式で与えられる．

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

$$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n$$

例 1.23 1 個のさいころを投げるとき，出る目の期待値を求める．

どの目が出る確率も

$$\frac{1}{6}$$

である．

目	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって，出る目の期待値は

$$\begin{aligned} & 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\ & = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

練習 1.64 2 個のさいころを投げて出る目の和を考える．下の表を完成させて，出る目の和の期待値を求めよ．

和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$		$\frac{6}{36}$			$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

B 》期待値の利用

例題 1.18 赤玉2個と白玉4個が入った袋から，3個の玉を同時に取り出し，出た赤玉1個につき1000円もらえるゲームがある．1回のゲームで受け取る金額の期待値を求めよ．

解答 出る赤玉の個数は，0，1，2のいずれかである．

赤玉が0個の確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\dfrac{4}{20}$

赤玉が1個の確率は　$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\dfrac{12}{20}$

赤玉が2個の確率は　$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\dfrac{4}{20}$

よって，受け取る金額を X 円とすると，右のような表ができる．
したがって，求める期待値は

X	0	1000	2000	計
確率	$\dfrac{4}{20}$	$\dfrac{12}{20}$	$\dfrac{4}{20}$	1

↑ 確率の和が1

$$0\times\frac{4}{20}+1000\times\frac{12}{20}+2000\times\frac{4}{20}$$
$$=\frac{20000}{20}=1000$$

(答) 1000円

例題1.18において，ゲームの参加料が1回1200円なら，参加料より受け取る金額の期待値の方が少ない．すなわち，このゲームに参加しても，得とはいえない．しかし，参加料が1回800円なら，得といえる．

期待値は，このような判断をするのに役に立つ．

練習 1.65 500円硬貨3枚を同時に投げて，表が出た硬貨を全部もらえるゲームがある．1回のゲームで，受け取る金額の期待値を求めよ．
また，このゲームの参加料が1回800円のとき，このゲームに参加することは得といえるか．

1.3.5 補充問題

7 A，B，C の 3 人がじゃんけんを 1 回行うとき，次の確率を求めよ．

(1) A だけが勝つ確率

(2) 全員が違う手を出す確率

(3) 誰も勝たない，すなわちあいこになる確率

8 1 組のトランプのハートのカード 13 枚すべてをでたらめに 1 列に並べるとき，次の確率を求めよ．

(1) 3 枚の絵札が続いて並ぶ確率

(2) 両端に絵札が並ぶ確率

(3) エースが端には並ばない確率

9 三者択一式の問題が3問続けて出題される．どの問題でもでたらめに答えを選ぶとき，次のものを求めよ．ただし，各問題でどの答えを選ぶ確率も，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ と考えてよいとする．

(1) 1問だけ正解する確率

(2) 正解する問題数の期待値

1.4　章末問題

1.4.1　章末問題A

1 0，1，2，3，4，5の6個の数字を1個ずつ使って3桁の数を作る．

(1) 5の倍数は何個できるか．

(2) 3桁の数を小さい順に並べるとき，22番目の数を求めよ．

2 大人 2 人と子供 4 人が，円形の 6 人席のテーブルに着席するとき，次のような並び方は何通りあるか．

(1) 大人 2 人が向かい合う．

(2) 大人 2 人の間に子供がちょうど 1 人入る．

3 男子 6 人，女子 4 人の中から 3 人を選ぶとき，女子が少なくとも 1 人含まれるような選び方は何通りあるか．

4 男子 4 人と女子 3 人をくじ引きで 1 列に並べるとき，次の確率を求めよ．

(1) 男子と女子が交互に並ぶ確率

(2) 両端に女子が並ぶ確率

5 1 から 9 までの 9 枚の番号札から 4 枚選ぶとき，次の確率を求めよ．

(1) 全部が 6 以下である確率

(2) 最大の番号が 7 以上である確率

6 白玉 4 個と黒玉 6 個が入っている袋から，玉を 2 個取り出すとき，次の各場合に，取り出した 2 個の玉の色が異なる確率を求めよ．

(1) 最初に 1 個を取り出し，袋にもどしてから 2 個目を取り出す場合

(2) 2 個を同時に取り出す場合

7 1から5までの番号札が，それぞれ番号の数だけ用意されている．この中から1枚を取り出すとき，次のどちらを選ぶ方が得といえるか.

① 出た番号と同じ枚数の100円硬貨をもらう.

② 5の番号が出たときだけ1000円をもらう.

1.4.2　章末問題 B

8 A，B，C，Dの4人が品物を1個ずつ持ち寄り，それらを分けることにした.各人が他の人の品物をもらうような分け方は何通りあるか.

9 次の問いに答えよ.

(1) 6人をA，Bの2部屋に入れる方法は，何通りあるか．ただし，全部の人を1つの部屋に入れてもよい.

(2) 6人を2つの組に分ける方法は何通りあるか.

10 0000から9999までの番号のうちで，次のような番号は何個あるか.

(1) 0101，0033のように，同じ数字を2個ずつ含むもの

(2) 1248のように，異なる数字が左から小さい順に並んでいるもの

11 二項定理を用いて，次のことを示せ.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 \qquad \text{ただし}, n \text{は2以上の自然数}$$

12 赤玉と白玉の入った 3 つの箱 A，B，C の中から玉を 1 個取り出すとき，赤玉の出る確率は，それぞれ $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{5}$ であるとする．各箱の中から玉を 1 個ずつ取り出すとき，赤玉が 2 個出る確率を求めよ．

13 1 枚の硬貨を投げて，表が出たときは数直線上の点 P を正の向きに 2 だけ進め，裏が出たときは P を負の向きに 1 だけ進める．硬貨を 9 回投げ終わったとき，P が最初の位置にもどっている確率を求めよ．

ヒント

8　4 人の品物を a，b，c，d として，適する場合の樹形図をかく．

10　(2) 異なる 4 つの数字の組合せ 1 組で，数字の並びが 1 つ決まる．

13　表の回数を r 回とすると，$2r-(9-r)=0$ が成り立つ．

第 2 章　論理と集合

2.1.1　命題と条件

「正方形は長方形である」という文は，正しいといえるだろうか．ここでは，ある事柄について述べられた文や式が，正しいか正しくないかを論理的に考えるために，命題と条件について学ぼう．

A 》命題

次の 2 つの文が述べている内容について考えてみよう．

(A)「自然数 4 は偶数である」
(B)「数 1 と数 2 について $1 > 2$ である」

(A) の文は正しく，(B) の文は正しくない．

一般に，正しいか正しくないかが定まる文や式を**命題**という．また，命題が正しいとき，その命題は**真**であるといい，正しくないとき，その命題は**偽**であるという．
たとえば，上の命題 (A) は真であり，命題 (B) は偽である．

命題の中には，次のような図形に関するものもある．

(C)「正方形は長方形である」

四角形の中で，正方形であるものはすべて長方形であるから，この命題は真である．

長方形の中で，
4 辺の長さが等しい
ものが正方形

練習 2.1 次の命題の真偽を調べよ．

(1) 自然数 4 は素数である．　← 素数：1 より大きい整数で 1 とその数自身以外に約数をもたない数

(2) 数 -1 について $(-1)^2 > 0$ である．

(3) 正三角形は二等辺三角形である．

(4) 台形は平行四辺形である．

B》条件

命題の中には，次のように文字を含むものもある．

「どんな実数[1] x についても $x^2 \geqq 0$ である」

この命題は真である．
一方，文字 x を含んだ文や式でも，次のようなものもある．

「x は素数である」，　「$x \geqq 1$」

これらは，x に値を代入しないと正しいか正しくないかが定まらないから，命題ではない．しかし，たとえば x を自然数と指定し，x に 1，2，3 などを代入すると，代入した文や式はそれぞれが真偽の定まる命題になる．
このような文字 x を含んだ文や式を，x に関する**条件**という．
条件を考える場合には，条件に含まれる文字がどんな集合の要素かをはっきりさせておく．この集合を，その条件の**全体集合**という．

例 2.1 自然数全体の集合を N とし，x は N の要素とする．
x に関する条件「x は素数である」は，

$x = 2$ のとき 真の命題
$x = 4$ のとき 偽の命題　　← 「4 は素数である」は偽の命題である．

である．

練習 2.2 実数全体の集合を R とし，x は R の要素とする．x に関する条件「$x \geqq 1$」について，x が次の値をとるとき，その命題の真偽を調べよ．

(1) $x = 2$　　(2) $x = -1$　　(3) $x = 1$　　(4) $x = \sqrt{2}$

条件の中には，文字を 2 つ以上含むものもある．
たとえば，a，b が実数を表すとき，「$a > 0$ かつ $b > 0$」，「$a + b > 0$」などは，a，b に関する条件である．

[1] 数直線上の点で表される数が実数である．

2.1.2　命題・条件と集合

命題には，条件を満たすものの集合を考えると，その真偽が調べやすいものがある．
ここでは，命題や条件について集合との関係を調べることにしよう．
今後，条件を単に p，q などで表すことにする．

A》命題 $p \Longrightarrow q$

実数について「3 より大きければ，1 より大きい」という文は，実数 x に関する 2 つの条件

$$p : x > 3, \qquad q : x > 1$$

を用いて，

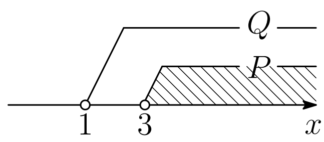
$$p \text{ ならば } q$$

←$x > 3$ ならば $x > 1$

と表現することができる．このような命題を，$\boldsymbol{p \Longrightarrow q}$ と書く．
命題 $p \Longrightarrow q$ について，p を**仮定**，q を**結論**という．

実数全体の集合 R の要素のうち，

$x > 3$ を満たす x の値全体の集合を P，
$x > 1$ を満たす x の値全体の集合を Q



とすると，$P \subset Q$ が成り立つ．

← $P = \{x \mid x > 3\}$，$Q = \{x \mid x > 1\}$

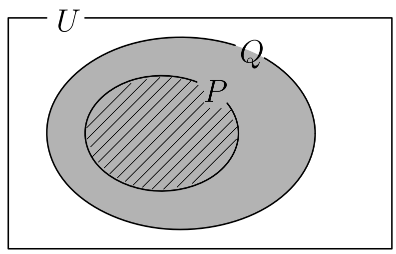
一般に，全体集合を U とし，U の要素のうち，

条件 p を満たすもの全体の集合を P，
条件 q を満たすもの全体の集合を Q

とすると，命題 $p \Longrightarrow q$ は

P の要素はすべて Q の要素である

すなわち $P \subset Q$ であることを表している．



$\boxed{P \subset Q}$

以上のことから，次のことがいえる．

命題 $p \Longrightarrow q$

1　命題 $p \Longrightarrow q$ は，「p を満たすものはすべて q を満たす」ということを表す．

2　条件 p を満たすもの全体の集合を P，条件 q を満たすもの全体の集合を Q とするとき，「命題 $p \Longrightarrow q$ が真である」と「$P \subset Q$ が成り立つ」は同じである．

練習 2.3 次の条件 p，q について，命題 $p \implies q$ の真偽を，集合を使って調べよ．

(1) 実数 x に関する 2 つの条件　　$p : x \leqq 2$，$q : x \leqq 4$

(2) 自然数 m に関する 2 つの条件
$p : m$ は 12 の約数，$q : m$ は 24 の約数

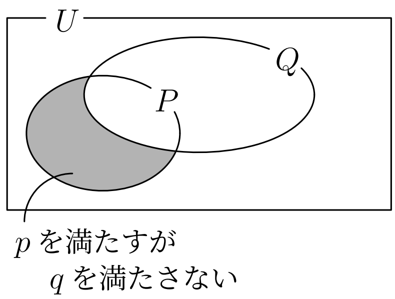
命題 $p \implies q$ が偽であるときは

p を満たすが，q を満たさないもの　　(∗)

が存在する．

したがって，命題 $p \implies q$ が偽であることをいうには，(∗) の例を 1 つだけ示せばよい．

そのような例を**反例**という．



例 2.2 a，b が実数であるときの命題「$a^2 = b^2 \implies a = b$」の真偽

$a = 1$，$b = -1$ は，$a^2 = b^2$ を満たすが，$a = b$ を満たさない．

よって，この命題は偽である．　　← $a = 1$，$b = -1$ が反例の 1 つ

練習 2.4 n は自然数とする．次の命題が偽であることを示せ．

n が素数ならば，n は奇数である．

B ≫ 命題の逆

命題 $p \implies q$ に対して，仮定と結論を入れかえた命題 $q \implies p$ を，もとの命題の**逆**という．

例 2.3 a，b は実数とする．

命題「$a = b \implies a^2 = b^2$」の逆は「$a^2 = b^2 \implies a = b$」

例 2.3 において，もとの命題「$a = b \implies a^2 = b^2$」は真である．
しかし，その逆「$a^2 = b^2 \implies a = b$」は，例 2.2 で調べたように偽である．

一般に，命題とその逆の真偽については，次のことがいえる．

命題とその逆の真偽

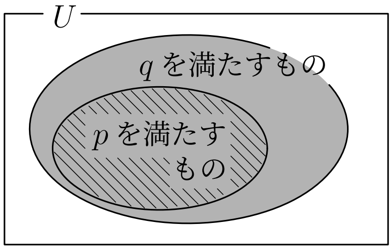
もとの命題が真であっても，その逆が真であるとは限らない．

練習 2.5 x，a，b，c は実数とする．次の命題の逆を述べ，逆の真偽を調べよ．

(1) $x = 2 \implies x^2 = 4$

(2) $ac = bc \implies a = b$

C 》 必要条件と十分条件



2 つの条件 p，q を考える．

命題 $p \implies q$ が真のとき，

qはpであるための**必要条件**である，

pはqであるための**十分条件**である

という．

例 2.4 x は実数とする．

命題「$x = 3 \implies x^2 = 9$」は真であるから，

$x^2 = 9$ は $x = 3$ であるための必要条件

であり，

$x = 3$ は $x^2 = 9$ であるための十分条件

である．

$$\boldsymbol{p} \implies \boldsymbol{q}$$
十分条件　**必要条件**

練習 2.6 a，b は実数とする．次の$\boxed{\quad}$に，適する言葉を入れよ．

(1) $(a-b)a = 0$ は，$a = b$ であるための$\boxed{\quad}$条件である．

(2) $a = b$ は，$a^2 = b^2$ であるための$\boxed{\quad}$条件である．

2つの条件 p，q について,「$p \implies q$ かつ $q \implies p$」を $\boldsymbol{p} \iff \boldsymbol{q}$ と書く．命題 $p \implies q$ とその逆 $q \implies p$ がともに真のとき，すなわち $p \iff q$ が成り立つとき，p と q は**同値**であるという．

また，このとき，q は p であるための**必要十分条件**であるという．

同様に，p は q であるための必要十分条件である．

例 2.5 a が実数であるとき,「$a^2 = 0 \iff a = 0$」が成り立つ．
すなわち，$a^2 = 0$ と $a = 0$ は同値である．
$a^2 = 0$ は $a = 0$ であるための必要十分条件である．
同様に，$a = 0$ は $a^2 = 0$ であるための必要十分条件である．

練習 2.7 a，b，c は実数とする．次の条件の中で，$a = b$ と同値な条件を選べ．

① $a + c = b + c$　　② $a^2 = b^2$　　③ $(a - b)^2 = 0$

D ≫ 条件の否定

条件 p に対して,「p でない」という条件を p の**否定**といい，$\overline{\boldsymbol{p}}$ で表す．

例 2.6 実数 x に関する条件の否定

(1) 条件「x は有理数[2]である」の否定は,

「x は有理数でない」　すなわち　「x は無理数である」

(2) 条件「$x > 0$」の否定は,

「$x > 0$ でない」　すなわち　「$x \leqq 0$」

練習 2.8 自然数 n に関する次の条件の否定を述べよ．

(1) n は偶数である　　(2) n は5より小さい

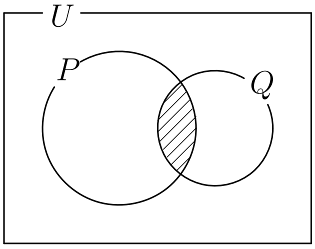
[2]実数のうち，分数の形に表せる数が有理数，表せない数が無理数である．

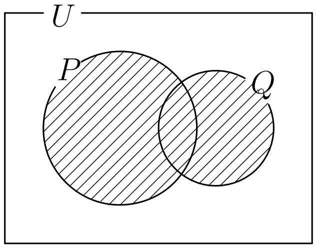
E》条件と集合

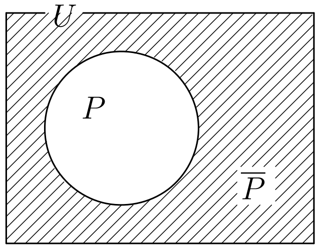
以下では全体集合を U とし，U の要素の中で，条件 p を満たすもの全体の集合を P で，条件 q を満たすもの全体の集合を Q で表す．

条件 p かつ q，p または q，$\overline{p}$ と集合の関係は，次のようになる．

条件	$\boldsymbol{p}$ **かつ** $\boldsymbol{q}$	**条件**	$\boldsymbol{p}$ **または** $\boldsymbol{q}$	**条件**	$\boldsymbol{\overline{p}}$
集合	$\boldsymbol{P \cap Q}$	**集合**	$\boldsymbol{P \cup Q}$	**集合**	$\boldsymbol{\overline{P}}$







2 つの集合 P，Q について，ド・モルガンの法則

$$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}, \qquad \overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$$

←4 ページ参照

が成り立つことから，条件 p，q に対して，次が成り立つ．

条件「かつ」,「または」の否定

$$\overline{\boldsymbol{p}\ \text{かつ}\ \boldsymbol{q}} \iff \overline{\boldsymbol{p}}\ \text{または}\ \overline{\boldsymbol{q}}$$

$$\overline{\boldsymbol{p}\ \text{または}\ \boldsymbol{q}} \iff \overline{\boldsymbol{p}}\ \text{かつ}\ \overline{\boldsymbol{q}}$$

例 2.7　a，b は実数とする．

(1)「$a = 0$ かつ $b = 0$」の否定は　「$a \neq 0$ または $b \neq 0$」

(2)「$a > 0$ または $b > 0$」の否定は　「$a \leqq 0$ かつ $b \leqq 0$」

練習 2.9　a，b は実数とする．次の条件の否定を述べよ．

(1) $a > 0$ かつ $b > 0$

(2) $a = 0$ または $b = 0$

(3) $a \leqq 1$ かつ $b \leqq 1$

F 》命題の対偶

命題 $p \implies q$ に対し，$\overline{q} \implies \overline{p}$ をもとの命題の**対偶**という．

例 2.8 n は自然数とする．

(1) 命題「n は 4 の倍数 $\implies$ n は 2 の倍数」の対偶は
「n は 2 の倍数でない $\implies$ n は 4 の倍数でない」

(2) 命題「n は奇数 $\implies$ n^2 は偶数」の対偶は　←「n は奇数」の否定は「n は偶数」
「n^2 は奇数 $\implies$ n は偶数」

例 2.8 の (1) では，もとの命題は真であり，その対偶も真である．
また，(2) では，もとの命題は偽であり，その対偶も偽である．

練習 2.10 m，n は自然数とする．次の命題の対偶を述べ，その真偽を調べよ．

(1) n は 6 の倍数 $\implies$ n は 3 の倍数

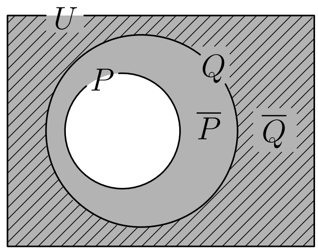
(2) n^2 は偶数 $\implies$ n は奇数

(3) 積 mn は偶数 $\implies$ m は偶数 かつ n は偶数

一般に，集合 P，Q について

$$P \subset Q \iff \overline{Q} \subset \overline{P}$$

が成り立つ．



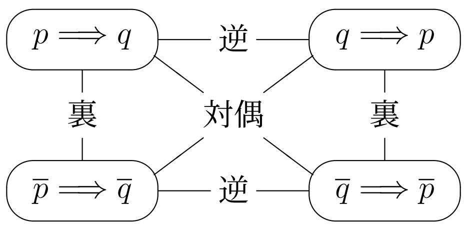
このことから，次のことがいえる．

命題とその対偶の真偽

命題 $p \implies q$ とその対偶 $\overline{q} \implies \overline{p}$ の真偽は一致する．

G 》命題の逆・対偶，裏

命題 $p \implies q$ に対して，$\overline{p} \implies \overline{q}$ をもとの命題の**裏**という．命題 $p \implies q$ とその逆，対偶，裏は，互いに右の図のような関係にある．



2.1.3　命題と証明

命題 $p \implies q$ が真であることを証明したいとき，p を仮定して q を導くのが困難なこともある．このような場合に有効な証明方法を学ぼう．

A》対偶を利用する証明

命題とその対偶の真偽は一致するから，次のことがいえる．

対偶を利用する証明

> 命題 $p \implies q$ を証明するのに，
> その対偶 $\overline{q} \implies \overline{p}$ を証明してもよい．

注意　「命題が真であることを証明」することを，単に「命題を証明する」と表現した．

例題 2.1　n は整数とする．対偶を利用して，次の命題を証明せよ．

n^2 が偶数ならば，n は偶数である．

[証明]　この命題の対偶は，次の命題である．

n が奇数ならば，n^2 は奇数である．　　$\cdots$ (A)

奇数 n は，ある整数 m を用いて $n = 2m + 1$ と表され，

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1 \end{aligned}$$

となる．$2m^2 + 2m$ は整数であるから，n^2 は奇数である．
よって，命題 (A) は真であり，もとの命題も真である．　**[証終]**

練習 2.11　n は整数とする．対偶を利用して，次の命題を証明せよ．

n^2 が奇数ならば，n は奇数である．

B》背理法を利用する証明

例題 2.2 次のことを証明せよ．

$\sqrt{2}$ が無理数ならば，$1+\sqrt{2}$ は無理数である．

[証明] $1+\sqrt{2}$ は無理数でないと仮定すると，$1+\sqrt{2}$ は有理数である．
$1+\sqrt{2}=r$ とすると　　$\sqrt{2}=r-1$
r が有理数ならば $r-1$ も有理数であるから，この等式は $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．
したがって，$1+\sqrt{2}$ は無理数である．**[証終]**

例題 2.2 の証明は，次のような流れである．

① 命題が成り立たない[3]と仮定する．

② ① の仮定のもとので矛盾を導く．

③ ② で矛盾が生じたのは，① の仮定が間違っているからである．

④ したがって，もとの命題が成り立つ．

このような証明法を**背理法**という．
背理法を利用して命題を証明するには，次のように行う．

命題 $p \Longrightarrow q$ の背理法による証明

命題が成り立たないと仮定して矛盾を導くことにより，
命題 $p \Longrightarrow q$ が真であると結論する．

練習 2.12 背理法を利用して，次のことを証明せよ．

$\sqrt{2}$ が無理数ならば，$1+3\sqrt{2}$ は無理数である．

[3] 命題 $p \Longrightarrow q$ が成り立たないとは，p を満たすが q を満たさないものが存在するということである．

研究

$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明

例題 2.2 では,「$\sqrt{2}$ は無理数である」ということを認めていた.
この事実を，背理法を利用して証明してみよう.
「$\sqrt{2}$ は無理数でない」すなわち

「$\sqrt{2}$ は有理数である」

と仮定すると，$\sqrt{2}$ は自然数 m，n を用いて

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n} \qquad \cdots ①$$

と表すことができる．このとき，できる限り約分して，m と n に 1 以外の公約数がないような分数にする．　← このような分数を既約分数という.

① より　$\sqrt{2}\,n=m$

この両辺を 2 乗すると

$$2n^2=m^2 \qquad \cdots ②$$

よって，m^2 は偶数である.
77 ページの例題 2.1 により，m^2 が偶数ならば，m も偶数となる.
偶数 m は，ある自然数 k を用いて，$m=2k$ と表されるから，② に代入して

$$2n^2=4k^2$$

すなわち　$n^2=2k^2$

よって，n^2 は偶数となり，n も偶数となる.
m と n がともに偶数となることは，m と n に 1 以外の公約数がないことに矛盾する.
したがって，$\sqrt{2}$ は有理数ではなく，無理数である.　**[証終]**

2.1.4　補充問題

1 a，bは実数とする．次の命題の対偶を述べ，その真偽を調べよ．

$$a+b\text{は無理数} \Longrightarrow a,\ b\text{の少なくとも一方は無理数}$$

2 p，qは有理数とする．$\sqrt{2}$が無理数であることを用いて，次のことを証明せよ．

$$p+q\sqrt{2}=0 \implies p=q=0$$

2.2 章末問題

2.2.1 章末問題 A

1 x は実数，n は自然数とする．次の命題の真偽を調べよ．

(1) $x^2 - x - 6 = 0 \implies x = -2$

(2) n^2 は 3 の倍数 $\implies$ n は 3 の倍数

2 m，n，k は自然数とする．次の命題の逆，対偶をそれぞれ述べ，それらの真偽を調べよ．

$$\text{積 } mnk \text{ は偶数} \implies m,\ n,\ k \text{ の少なくとも 1 つは偶数}$$

3 次の $\boxed{}$ の中には,「必要条件である」「十分条件である」「必要十分条件である」のうち，それぞれどれが最も適するか．

ただし，a，b は実数とし，m，n は整数とする．

(1) 「△ABC が正三角形である」は「△ABC が二等辺三角形である」ための $\boxed{}$.

(2) 「$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$」は「$ab \neq 0$」であるための $\boxed{}$.

(3) 「積 mn が偶数である」は「m が偶数である」ための $\boxed{}$.

2.2.2 章末問題B

4 a, bは実数とする．次の命題が真であることを証明せよ．

$$a+b>0 \quad \Longrightarrow \quad a>0 \text{ または } b>0$$

5 1から10までの10個の整数から異なる5個を取り，それらの積をa，残りの5個の積をbとする．このとき，$a \neq b$であることを証明せよ．

第 3 章　平面図形

3.1　三角形の性質

3.1.1　三角形の辺の比

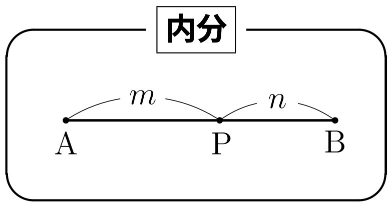
三角形については，いろいろな興味深い性質がある．ここでは，角の二等分線と辺の交点がその辺をどのような比に分けるかについて調べよう．

A 》線分の比と三角形の角の二等分線

m，n を正の数とする．
線分 AB 上の点 P が

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

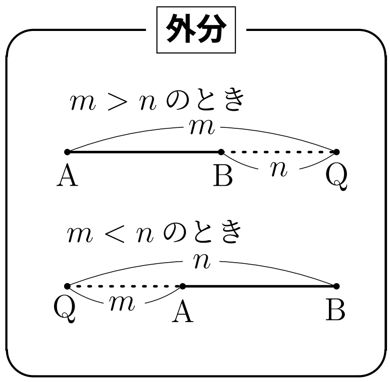
を満たすとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に**内分する**という．



次に，m，n を異なる正の数とする．
線分 AB の延長上の点 Q が

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n$$

を満たすとき，点 Q は線分 AB を $m : n$ に**外分する**という．

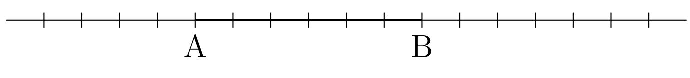


補足 m と n の大小関係と点 Q の位置は，右の図のようになる．

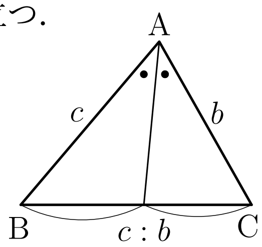
練習 3.1 次の点を下の図にしるせ，

(1) 線分 AB を $2 : 1$ に内分する点 P

(2) 線分 AB を $2 : 1$ に外分する点 Q



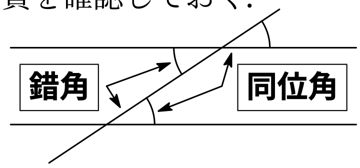
三角形の角の二等分線に関して，次の定理が成り立つ．



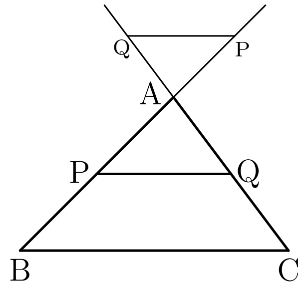
三角形の角の二等分線と比

定理 1　$\triangle$ABC の $\angle$A の二等分線と辺 BC との交点は，辺 BC を AB : AC に内分する．

定理 1 を証明するために，平行線に関する次の性質を確認しておく．



［1］平行な 2 直線に 1 つの直線が交わるとき，同位角は等しい．
また，錯角も等しい．

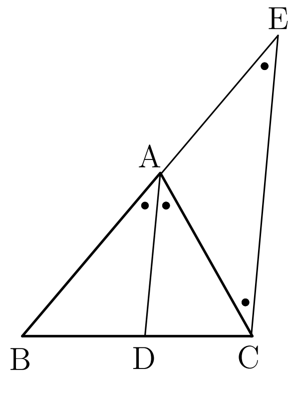


［2］$\triangle$ABC において，辺 AB 上に点 P があり，辺 AC 上に点 Q があるとき，次が成り立つ．

$$\mathrm{PQ} /\!/ \mathrm{BC} \iff \mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \mathrm{AQ} : \mathrm{QC}$$
$$\mathrm{PQ} /\!/ \mathrm{BC} \iff \mathrm{AP} : \mathrm{AB} = \mathrm{AQ} : \mathrm{AC}$$
$$\mathrm{PQ} /\!/ \mathrm{BC} \implies \mathrm{AP} : \mathrm{AB} = \mathrm{PQ} : \mathrm{BC}$$

注意　［2］は，点 P が辺 AB の A を越える延長上，点 Q が辺 AC の A を越える延長上にあっても成り立つ．

［定理 1 の証明］　$\angle$A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると



$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{DAC} \qquad \cdots ①$$

頂点 C を通り直線 AD に平行な直線を引き，辺 AB の A を越える延長との交点を E とすると，AD // EC から

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{AEC} \qquad \cdots ②$$
$$\angle \mathrm{DAC} = \angle \mathrm{ACE} \qquad \cdots ③$$

①，②，③ から，$\triangle$ACE において
$\angle$AEC $= \angle$ACE となるから　　AE = AC
また，AD // EC から　BD : DC = BA : AE
したがって　　　　　BD : DC = AB : AC

［証終］

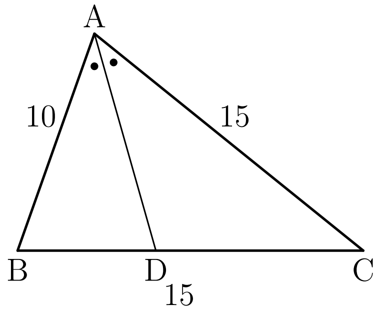
例題 3.1　$AB = 10$，$BC = 15$，$AC = 15$ である $\triangle ABC$ において，$\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする．線分 BD の長さを求めよ．

解答　AD は $\angle A$ の二等分線であるから

$$\begin{aligned} BD : DC &= AB : AC \\ &= 10 : 15 = 2 : 3 \end{aligned}$$

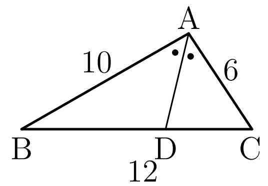
よって，線分 BD の長さは

$$BD = \frac{2}{2+3}BC = \frac{2}{5} \times 15 = 6$$



練習 3.2　$AB = 10$，$BC = 12$，$AC = 6$ である $\triangle ABC$ において，$\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする．次のものを求めよ．

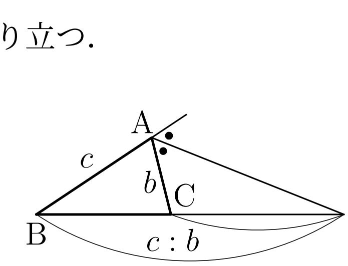
(1) BD : DC　　(2) 線分 BD の長さ



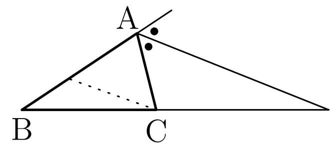
三角形の外角の二等分線に関して，次の定理が成り立つ．

三角形の外角の二等分線と比

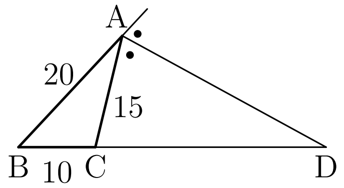
定理 2　$AB \neq AC$ である $\triangle ABC$ の $\angle A$ の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点は，辺 BC を AB : AC に外分する．



練習 3.3 定理 2 を定理 1 の証明にならって証明せよ．
ただし，AB > AC の場合とする．

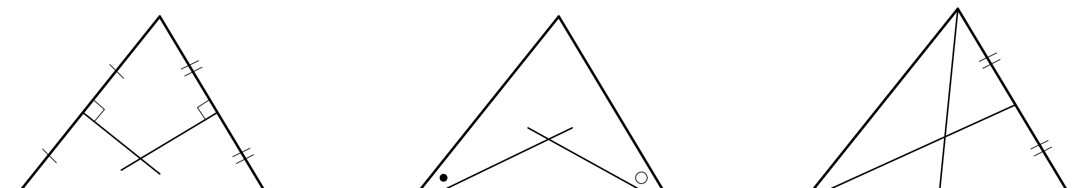


練習 3.4 AB = 20，BC = 10，AC = 15 である △ABC において，∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とする．線分 BD の長さを求めよ．



3.1.2　三角形の外心・内心・重心

三角形において，3 辺の垂直二等分線[1]を引いてみよう．また，3 つの角の二等分線を引いてみよう．それらには興味深い性質が成り立つのである．さらに，頂点と向かい合う辺の中点を結ぶ線分についても，興味深い性質が成り立つ．ここでは，それらの性質について学ぶことにしよう．



辺の垂直二等分線　　**角の二等分線**　　**頂点と向かい合う辺の中点を結ぶ線分**

[1] 線分の垂直二等分線，角の二等分線の作図について，106 ページで扱っている．

A 》三角形の外心

三角形には，どんな形の三角形にも共通する性質がある．
まず，三角形の辺の垂直二等分線について，次の定理が成り立つ．

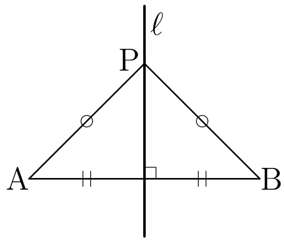
三角形の辺の垂直二等分線

定理 3　三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる．

定理 3 を証明するために，
次のことを確認しておく．

線分 AB の垂直二等分線 ℓ と点 P について，
次が成り立つ．

点 P が ℓ 上にある $\iff$ PA = PB

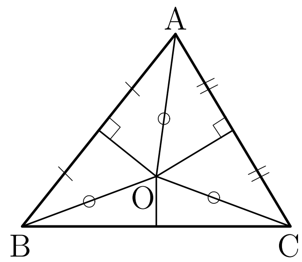


[定理 3 の証明]

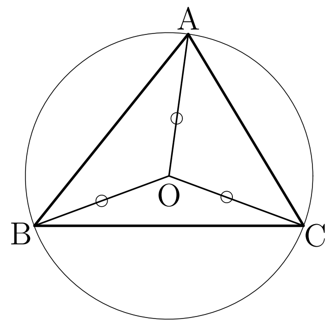
△ABC において，辺 AB の垂直二等分線と辺 AC の垂直二等分線の交点を O とすると

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB}, \quad \mathrm{OA} = \mathrm{OC}$$

よって，OB = OC となるから，O は辺 BC の垂直二等分線上にもある．
したがって，三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる．　**[証終]**



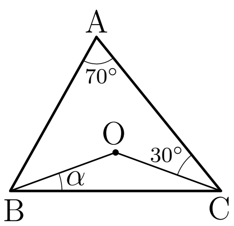
上の証明の中で示したように，点 O は △ABC の 3 つの頂点から等距離にある．
よって，この点 O を中心とする半径 OA の円は，△ABC の 3 つの頂点を通る．
この円を △ABC の**外接円**といい，点 O を △ABC の**外心**という．



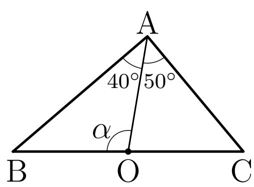
三角形の外心は，3辺の垂直二等分線の交点である．

練習 3.5　下の図で，点 O は △ABC の外心である．α を求めよ．

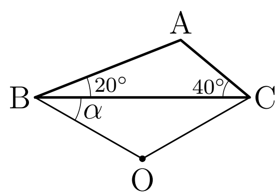
(1)



(2)



(3)



B》三角形の内心

三角形の角の二等分線について，次の定理が成り立つ.

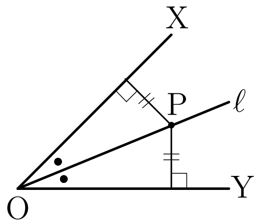
三角形の角の二等分線

定理 4　三角形の3つの角の二等分線は1点で交わる.

定理4を証明するために，次のことを確認しておく.

$\angle$XOYの二等分線ℓと点Pについて，次が成り立つ.

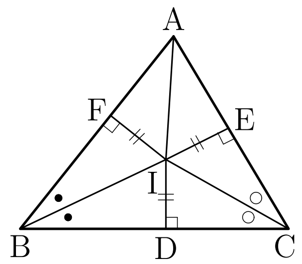
点Pがℓ上にある　$\Longleftrightarrow$　点Pが2辺OX，OYから等距離にある



[定理4の証明]

△ABCにおいて，∠Bの二等分線と∠Cの二等分線の交点をIとし，Iから辺BC，CA，ABに下ろした垂線を，それぞれID，IE，IFとすると

$$\mathrm{IF} = \mathrm{ID}, \quad \mathrm{IE} = \mathrm{ID}$$



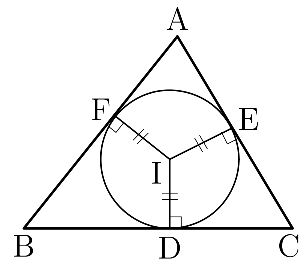
よって，IF = IE となるから，Iは∠Aの二等分線上にもある.

したがって，三角形の3つの角の二等分線は1点で交わる.　**[証終]**

上の証明により，次のことがいえる.

$$\mathrm{ID}\perp\mathrm{BC},\ \mathrm{IE}\perp\mathrm{CA},\ \mathrm{IF}\perp\mathrm{AB}$$

$$\mathrm{ID} = \mathrm{IE} = \mathrm{IF}$$

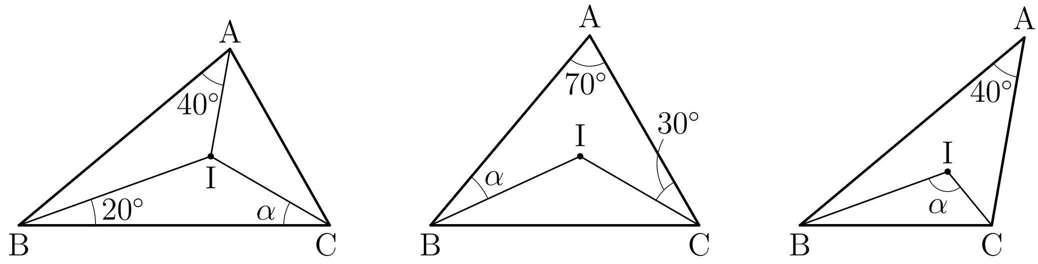


よって，この点Iを中心とする半径IDの円は，△ABCの3辺に接する．この円を△ABCの**内接円**といい，点Iを△ABCの**内心**という.

三角形の内心は，3つの角の二等分線の交点である.

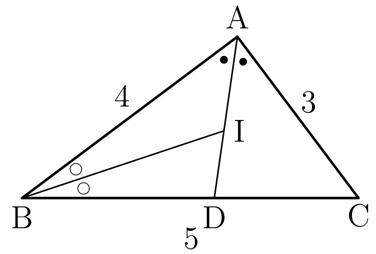
練習 3.6 下の図で，点 I は △ABC の内心である．α を求めよ．

(1)　　(2)　　(3)



練習 3.7 AB = 4，BC = 5，CA = 3 である △ABC の内心を I とする．直線 AI と辺 BC の交点を D とするとき，次のものを求めよ．

(1) 線分 BD の長さ　　(2) AI : ID

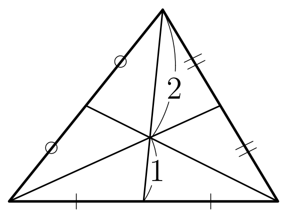


C》三角形の重心

三角形の頂点と向かい合う辺の中点を結ぶ線分を，三角形の**中線**という．三角形の中線には，次のような性質がある．

三角形の中線

定理 5 三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，その点は各中線を 2 : 1 に内分する．



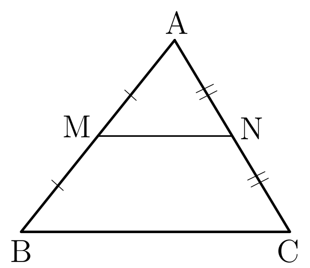
三角形の3本の中線が交わる点を，三角形の**重心**という．

定理 5 を証明するために，次の**中点連結定理**を確認しておく．

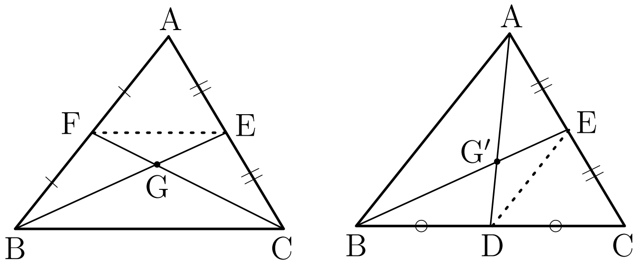
中点連結定理

△ABC において，辺 AB の中点を M，辺 AC の中点を N とするとき，次のことが成り立つ．

$$\mathrm{MN} \mathbin{/\!/} \mathrm{BC}, \quad \mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}$$



[定理 5 の証明] $\triangle$ABC の中線 BE と中線 CF の交点を G とし，
中線 AD と中線 BE の交点を G′ とする．
このとき，まず 2 点 G，G′ が一致することを示す．



中点連結定理により

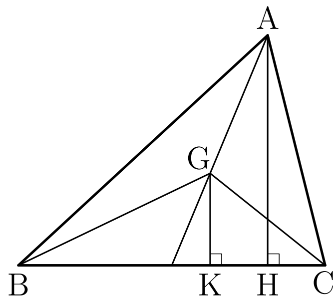
$$\mathrm{FE} \,/\!/\, \mathrm{BC}, \quad \mathrm{BC} : \mathrm{FE} = 2 : 1$$

となるから　$\mathrm{BG} : \mathrm{GE} = \mathrm{BC} : \mathrm{FE} = 2 : 1$　　← 平行線と線分の比
84 ページの注意を参照
よって，点 G は線分 BE を 2 : 1 に内分する．
同様にして　$\mathrm{BG}' : \mathrm{G}'\mathrm{E} = \mathrm{AB} : \mathrm{ED} = 2 : 1$
よって，点 G′ は線分 BE を 2 : 1 に内分する．
線分 BE を 2 : 1 に内分する点は 1 点だけであるから，2 点 G，G′ は一致する．
したがって，3 つの中線は点 G で交わる．
また，$\mathrm{AG} : \mathrm{GD} = \mathrm{BG} : \mathrm{GE} = \mathrm{CG} : \mathrm{GF} = 2 : 1$ であるから，3 つの中線の交点は各中線を 2 : 1 に内分する．　**[証終]**

練習 3.8 $\triangle$ABC の重心を G とし，G から辺 BC に下ろした垂線を GK，A から辺 BC に下ろした垂線を AH とする．

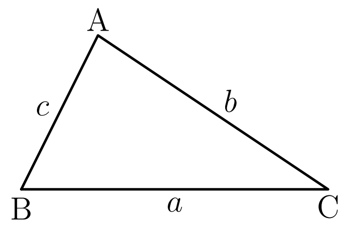
(1) GK : AH を求めよ．

(2) $\triangle$GBC と $\triangle$ABC の面積比を求めよ．



3.1.3　三角形の辺と角

ここでは，3 辺の大小関係や，辺と角の大小関係について，調べることにしよう．
以下では，△ABC の ∠A，∠B，∠C に向かい合う辺 BC，CA，AB の長さを，それぞれ a，b，c で表す．

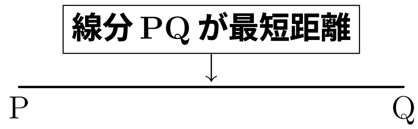


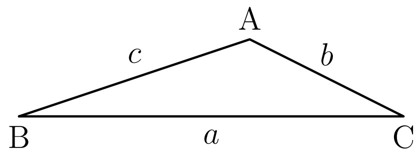
A ≫ 三角形の 3 辺の大小関係

平面上で，2 点 P，Q を結ぶ最短経路は，線分 PQ で与えられる．
これにより，△ABC において

$$a < b + c$$

であることがわかる．
一般に，次の定理が成り立つ．





三角形の 3 辺の長さ

定理 6　1 つの三角形において
［1］　2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さよりも大きい．
［2］　2 辺の長さの差は，他の 1 辺の長さよりも小さい．

また，正の数 a，b，c を 3 辺の長さとする三角形が存在するための必要十分条件は，次の大小関係が成り立つことである．

$$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}| < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} \qquad \longleftarrow |\boldsymbol{A}| \text{ は } \boldsymbol{A} \text{ の絶対値を表す}$$

補足　3 辺の長さ a，b，c の中で，a が最大であれば，三角形が存在するための必要十分条件は，$a < b + c$ が成り立つことである．

練習 3.9　3 辺の長さが次のような三角形は存在するかどうかを調べよ．

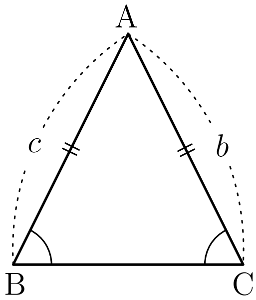
(1) 4，6，8　　(2) 4，6，4　　(3) 4，6，10

B 》三角形の辺と角の大小関係

△ABC の辺と角については，次が成り立つ．

$$b = c \quad \text{ならば} \quad \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$$

これは二等辺三角形の性質である．
この逆「$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$ ならば $b = c$」も成り立つ．



例 3.1　△ABC において，次が成り立つ．

$$b > c \quad \text{ならば} \quad \angle\mathrm{B} > \angle\mathrm{C}$$

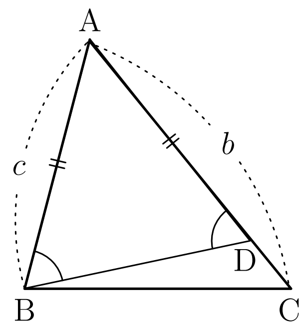
[証明] $b > c$ であるならば，辺 AC 上に AB=AD となる点 D がとれる．
このとき，△ABD において

$$\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{ADB}$$

ここで，$\angle\mathrm{B} > \angle\mathrm{ABD}$，
$\angle\mathrm{ADB} > \angle\mathrm{C}$ であるから

$$\angle\mathrm{B} > \angle\mathrm{C}$$

[証終]



$\leftarrow \angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{C} + \angle\mathrm{DBC} > \angle\mathrm{C}$

例 3.1 について，その逆「$\angle\mathrm{B} > \angle\mathrm{C}$ ならば $b > c$」も成り立つことが知られている．

一般に，次の定理が成り立つ．

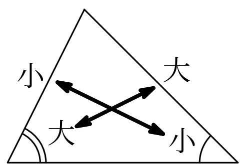
三角形の辺と角の大小関係

定理 7　△ABC において

$$\boldsymbol{b > c \iff \angle\mathrm{B} > \angle\mathrm{C}}$$

$$\boldsymbol{b = c \iff \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}}$$

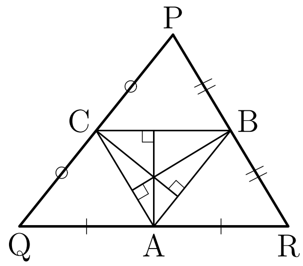
$$\boldsymbol{b < c \iff \angle\mathrm{B} < \angle\mathrm{C}}$$



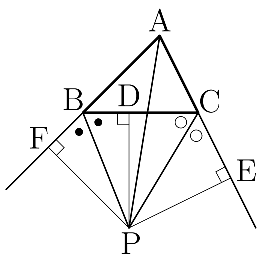
練習 3.10　次が成り立つことを示せ．
直角三角形では，3 辺のうち斜辺が最大である．

3.1.4　補充問題

1 △PQR の辺 QR，RP，PQ の中点を，それぞれ A，B，C とする．△ABC において，各頂点からその向かい合う辺に下ろした 3 本の垂線は，△PQR の外心で交わることを証明せよ．



2 △ABC において，右の図のように ∠B の外角の二等分線と ∠C の外角の二等分線との交点を P とするとき，P は ∠A の二等分線上にある．このことを証明せよ．
▶ 定理 4 の証明と同様に考えられる．



3.2　円の性質

3.2.1　円周角

円については，次のような性質をすでに中学校で学んでいる．

円の弧の長さは，中心角の大きさに比例する．

円はその中心を通る直線について対称である．

ここでは，円についての性質をさらに調べることにしよう．

A 》円の弧と弦の性質

円の弧と弦については，次のような性質がある．

円の弧と弦の性質

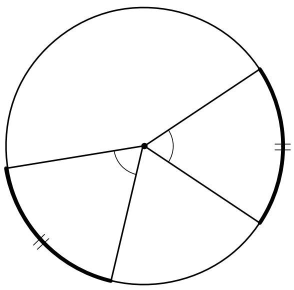
［1］1 つの円で，等しい中心角に対する弧の長さは等しい．
逆に，長さの等しい弧に対する中心角は等しい．

［2］1 つの円で，長さの等しい弧に対する弦の長さは等しい．

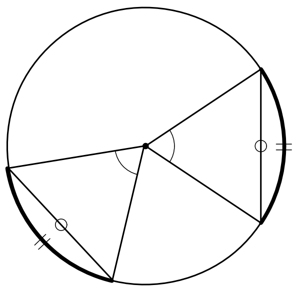
［3］弦の垂直二等分線は，円の中心を通る．

［4］円の中心から弦に引いた垂線は，その弦を 2 等分する．

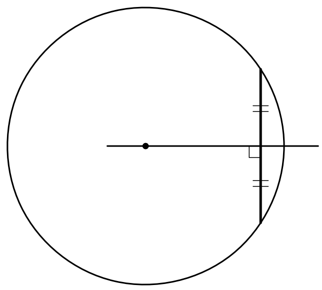
［1］



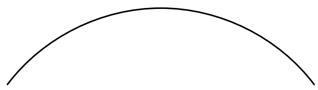
［2］



［3］，［4］



練習 3.11　右の図は円の一部分である．この円の中心を求める方法を述べよ．



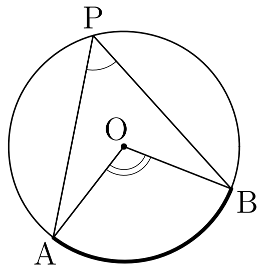
B》円周角

次の**円周角の定理**については，すでに中学校で学んでいる．

円周角の定理

1 つの弧に対する円周角は一定であり，
その弧に対する中心角の半分である．
たとえば，右の図の円 O において

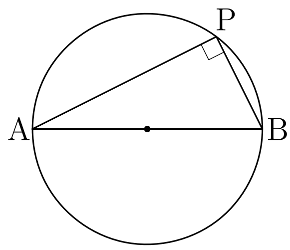
$$\angle \mathrm{APB} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}$$



注意　中心が点 O である円を**円 O** という．

また，次のことがいえる．

線分 AB を直径とする円の周上に A，B と異なる点 P をとるとき，$\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$ である．逆に，$\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$ のとき，点 P は線分 AB を直径とする円の周上にある．



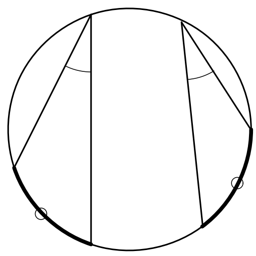
円周角と弧の長さについては，次の定理が成り立つ．

円周角と弧の長さ

定理 8　1 つの円において

［1］等しい円周角に対する弧の長さは等しい．

［2］長さの等しい弧に対する円周角は等しい．

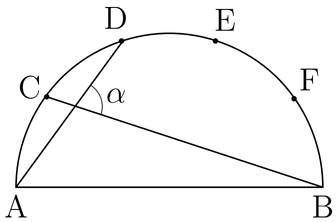


[定理 8 の証明]

［1］2 つの弧に対する円周角が等しいとき，それらの弧に対する中心角も等しいから，2 つの弧の長さも等しい．

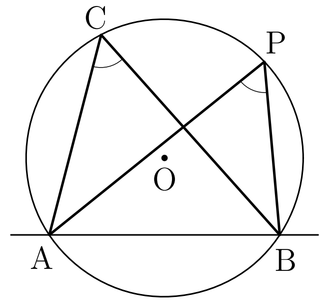
［2］長さの等しい弧に対する中心角は等しいから，2 つの弧に対する円周角も等しい．　**[証終]**

練習 3.12　右の図のように，直径を AB とする半円の周を 5 等分する点を C，D，E，F とするとき，α を求めよ．



C》円周角の定理の逆

円 O の周上に 3 点 A，B，C がある．



［1］　直線 AB について点 C と同じ側に点 P をとるとき，P が円 O の周上にあれば，円周角の定理により，

$$\angle APB = \angle ACB$$

が成り立つ．

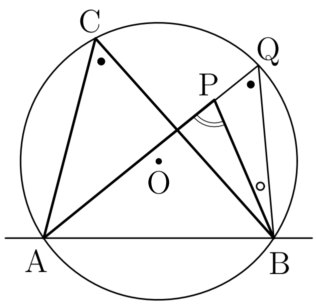
点 P が円 O の周上にないときは，次のことがいえる．

［2］　点 P が円 O の内部にあるとき

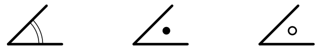
$$\angle APB > \angle ACB$$

［3］　点 P が円 O の外部にあるとき

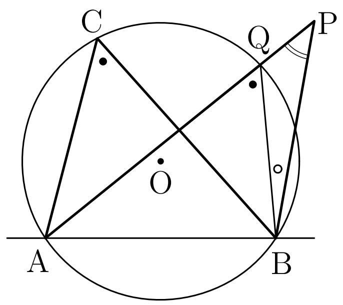
$$\angle APB < \angle ACB$$



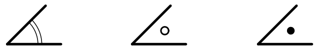
$\angle APB = \angle AQB + \angle PBQ$



$\angle APB > \angle ACB$



$\angle APB + \angle PBQ = \angle AQB$



$\angle APB \qquad\qquad < \angle ACB$

［1］～［3］から，$\angle APB = \angle ACB$ が成り立つのは，点 P が円 O の周上にあるときに限られることがわかる．

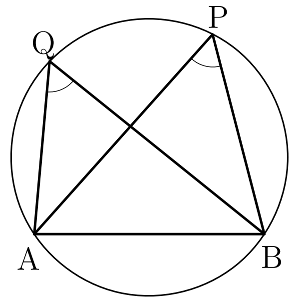
前ページで調べたことから，次の定理が得られる．

円周角の定理の逆

定理 9　2点P，Qが直線ABについて同じ側にあるとき，

$$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{AQB}$$

が成り立つならば，4点A，B，P，Qは1つの円周上にある．



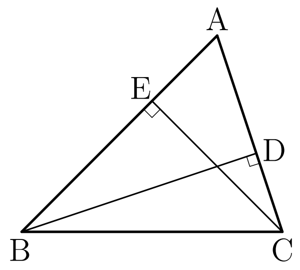
例題 3.2　△ABCの頂点Bから辺CAに下ろした垂線をBDとし，頂点Cから辺ABに下ろした垂線をCEとするとき，4点B，C，D，Eは1つの円周上にあることを証明せよ．

[証明]　$\mathrm{BD}\perp\mathrm{CA}$，$\mathrm{CE}\perp\mathrm{AB}$であるから

$$\angle\mathrm{BDC} = 90^\circ, \quad \angle\mathrm{BEC} = 90^\circ$$

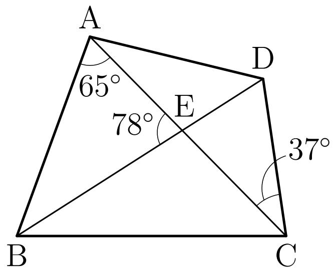
よって　　$\angle\mathrm{BDC} = \angle\mathrm{BEC}$

したがって，4点B，C，D，Eは1つの円周上にある．　**[証終]**

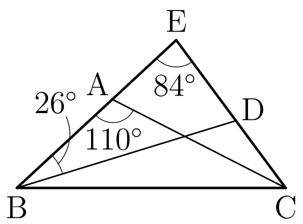


練習 3.13　下の図において，4点A，B，C，Dが1つの円周上にあることを示せ．

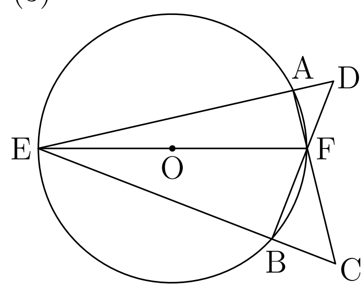
(1)



(2)



(3)

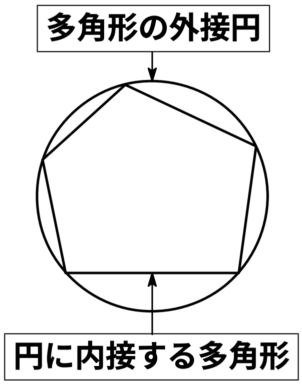


点Oは円の中心
EFは円の直径

D 》円に内接する四角形

右の図のように，多角形のすべての頂点が1つの円周上にあるとき，この多角形は円に**内接する**という．また，この円をその多角形の**外接円**という．

三角形には必ず外接円が存在するが，四角形の場合は外接円が存在するとは限らない．



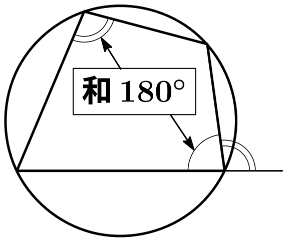
円に内接する四角形には，次の性質がある．

円に内接する四角形

定理 10　四角形が円に内接するとき，次の［1］，［2］が成り立つ．

［1］対角の和は 180° である．

［2］外角は，それと隣り合う内角の対角に等しい．



注意　四角形において，1つの内角に向かい合う内角をその**対角**という．

［定理 10 の証明］　四角形 ABCD が円 O に内接するとき，

$$\angle\mathrm{BAD} = \alpha, \quad \angle\mathrm{BCD} = \beta$$

とする．中心角と円周角の関係により

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$

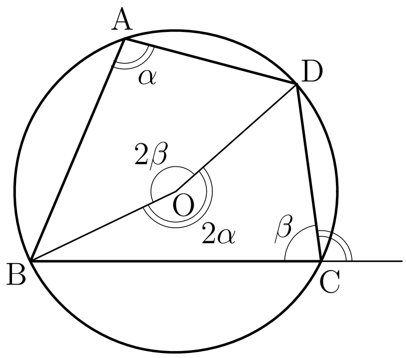
となるから，$\alpha + \beta = 180^\circ$ である．

よって，［1］が成り立つ．

また，∠BCD の外角の大きさは

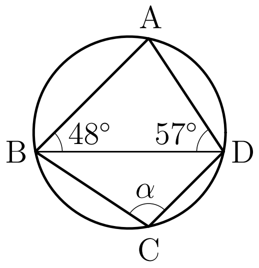
$180^\circ - \beta = \alpha$ となるから，［2］が成り立つ．

［証終］

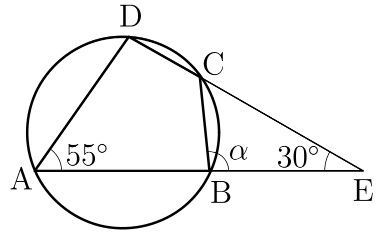


練習 3.14 下の図において，α を求めよ．

(1)



(2)



定理 10 の逆も成り立つ．

四角形が円に内接するための条件

定理 11 次の［1］または［2］が成り立つ四角形は，円に内接する．

［1］1 組の対角の和が 180° である．

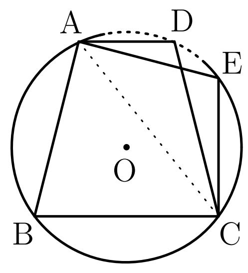
［2］1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しい．

［1］と［2］は同値である．ここでは,［1］を証明する．

［定理 11［1］の証明］ 四角形 ABCD において，

$$\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{ADC} = 180^\circ \qquad \cdots ①$$

とする．右の図のように，△ABC の外接円 O の，B を含まない弧 AC 上に点 E をとると，四角形 ABCE は円 O に内接する．
よって，定理 10［1］により

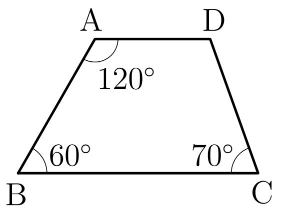


$$\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{AEC} = 180^\circ \qquad \cdots ②$$

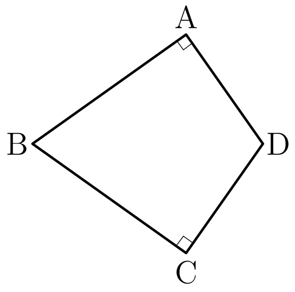
①，② から　　$\angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{AEC}$
よって，定理 9 により，4 点 A，C，E，D は 1 つの円周上にある．
そして，その円は △AEC の外接円すなわち円 O である．
点 B も円 O 上にあるから，四角形 ABCD は円 O に内接する．　**［証終］**

練習 3.15　次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものはどれか．

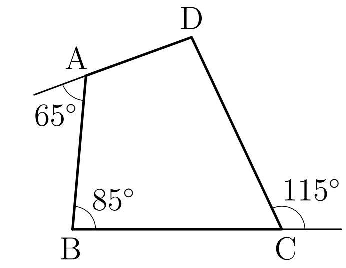
①



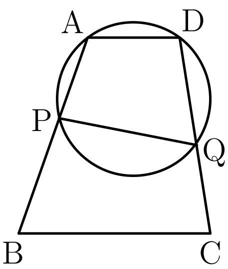
②



③

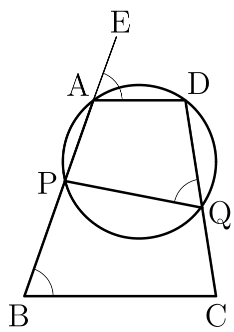


応用例題 3.1　AD // BC である台形 ABCD において，A，D を通る円が 2 辺 AB，CD と，右の図のように点 P，Q で交わるとき，四角形 PBCQ は円に内接する．このことを証明せよ．



考え方 》　定理 11 を使って証明する．AD // BC と四角形 APQD が円に内接することから，∠PBC = ∠PQD を導く．

[証明]　AD // BC であるから，右の図で
∠EAD = ∠PBC となる．
また，四角形 APQD は円に内接するから，
∠EAD = ∠PQD となる．
よって，四角形 PBCQ において，
∠PBC = ∠PQD となるから，四角形 PBCQ は円に内接する．　**[証終]**

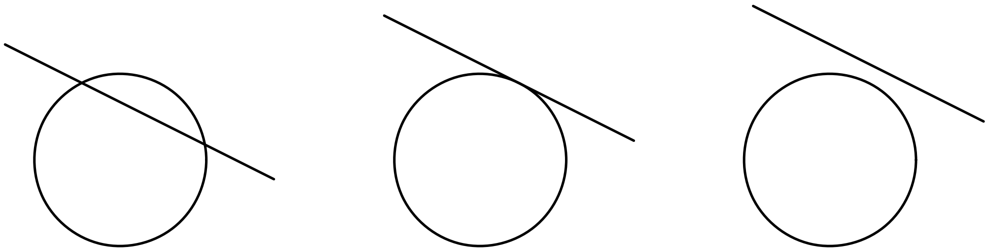


練習 3.16　AD // BC である台形 ABCD において，∠ABC = ∠BCD であるとき，この台形は円に内接する．このことを証明せよ．

3.2.2 円と直線

円と直線の位置関係には，次のような 3 つの場合がある．

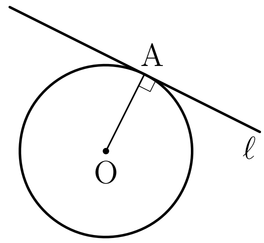
[1] 2 点で交わる　　**[2] 接する**　　**[3] 離れている**



直線が円に接するのは，共有点がただ 1 点の場合である．このとき，この直線を円の接線といい，その共有点を接点という．
ここでは，円の接線や円と直線に関する性質を調べてみよう．

A ≫ 円の接線

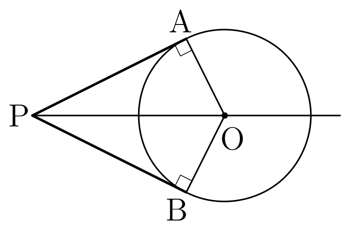
円 O の周上の点 A を通る直線 ℓ について，次が成り立つ．



直線 ℓ が点 A で円 O に接する $\iff$ $\mathrm{OA}\perp\ell$

この直線 ℓ が，点 A における円 O の接線である．

右の図のように，円 O には外部の点 P から 2 つの接線を引くことができる．
図で点 A，B が接点のとき，線分 PA または PB の長さを，P から円 O に引いた**接線の長さ**という．

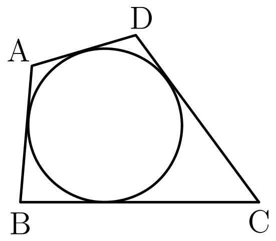


円の接線の長さについては，次のことがいえる．

円の外部の 1 点からその円に引いた 2 つの接線の長さは等しい．

例題 3.3 右の図のように，円が四角形 ABCD の各辺に接している．
このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}=\mathrm{BC}+\mathrm{DA}$$



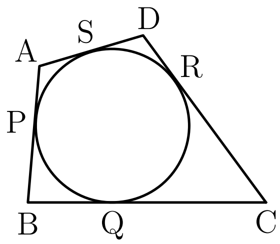
考え方》 辺の長さを接線の長さの和に分解する．

[証明] 接点を右の図のように，P，Q，R，S とすると

$$\mathrm{AP}=\mathrm{AS},\quad \mathrm{BP}=\mathrm{BQ}$$
$$\mathrm{CQ}=\mathrm{CR},\quad \mathrm{DR}=\mathrm{DS}$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}+\mathrm{CD}&=(\mathrm{AP}+\mathrm{BP})+(\mathrm{CR}+\mathrm{DR})\\&=(\mathrm{AS}+\mathrm{BQ})+(\mathrm{CQ}+\mathrm{DS})\\&=(\mathrm{BQ}+\mathrm{CQ})+(\mathrm{AS}+\mathrm{DS})\\&=\mathrm{BC}+\mathrm{DA}\end{aligned}$$

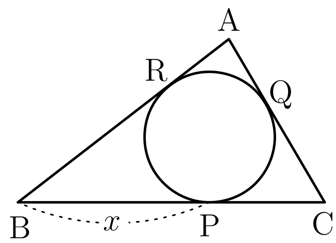


[証終]

練習 3.17 △ABC において，

$$\mathrm{AB}=7,\ \mathrm{BC}=8$$

であるとする．
この三角形の内接円と辺 BC，CA，AB との接点を，それぞれ P，Q，R とするとき，次の問いに答えよ．



(1) BP の長さを x とするとき，AQ と QC の長さを，それぞれ x で表せ．

(2) $\mathrm{CA}=5$ であるとき，BP の長さを求めよ．

B》円の接線と弦の作る角

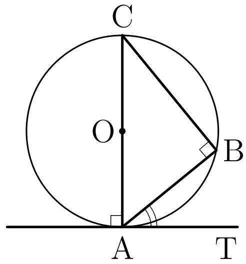
右の図のように，円 O の弦 AB の端点 A における円の接線 AT と弦 AB が作る $\angle BAT$ を考えてみよう．

直径 AC を引くと，

$$\angle BAT + \angle CAB = 90^\circ$$
$$\angle ACB + \angle CAB = 90^\circ$$

となるから，次が成り立つ．

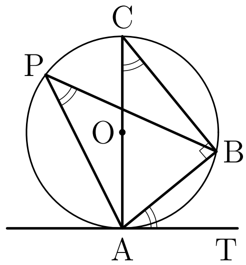
$$\angle BAT = \angle ACB$$



ここで，$\angle ACB$ は弧 AB の円周角であるから，右の図で

$$\angle BAT = \angle APB$$

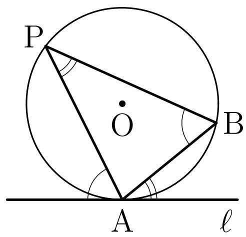
となる．



一般に，次の定理が成り立つ．

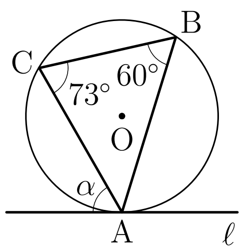
円の接線と弦の作る角

定理 12 円の弦と，その端点における接線が作る角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい．

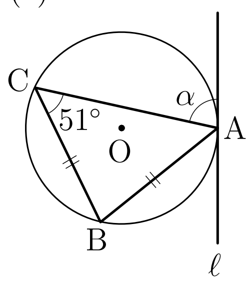


練習 3.18 右の図で，直線 ℓ は円 O の接線で，A は接点である．α を求めよ．

(1)



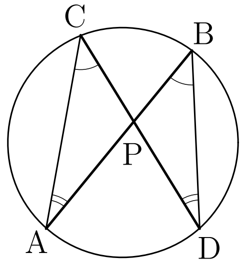
(2)



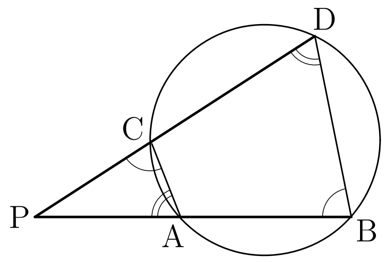
C》方べきの定理

下の図は，円における2つの弦 AB，CD の交点，またはそれらの延長の交点を P とした図である．

［1］



［2］



上のいずれの場合も，△PAC と △PDB が相似[2]であることを示そう．
△PAC と △PDB において，次がいえる．

$$\angle \mathrm{ACP} = \angle \mathrm{DBP}$$

$$\angle \mathrm{CAP} = \angle \mathrm{BDP}$$

← ［1］では円周角の定理,［2］では円に内接する四角形の性質.

よって，対応する2つの角が等しいから

$$\triangle \mathrm{PAC} \backsim \triangle \mathrm{PDB}$$

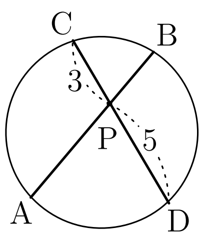
したがって，辺の比について，$\mathrm{PA} : \mathrm{PD} = \mathrm{PC} : \mathrm{PB}$ が成り立つ．
このことから，次の**方べきの定理**が得られる．

方べきの定理

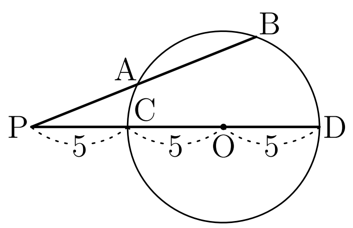
定理 13 円の2つの弦 AB，CD の交点，またはそれらの延長の交点を P とすると，$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$ が成り立つ．

練習 3.19 次の図において，PA·PB を求めよ．

(1)



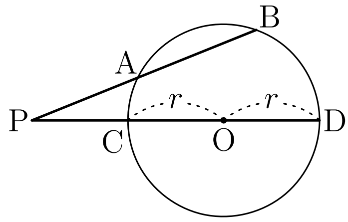
(2)



[2] 対応する2つの角が等しい2つの三角形は相似である．また，相似な三角形では，対応する辺の長さの比はすべて等しい．

方べきの定理における PA·PB の値の意味を調べてみよう．

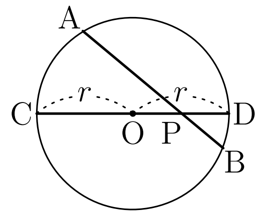
例 3.2 右の図において，円 O の半径を r とするとき



$$\begin{aligned} \mathrm{PA\cdot PB} &= \mathrm{PC\cdot PD} \\ &= (\mathrm{PO} - \mathrm{OC})(\mathrm{PO} + \mathrm{OD}) \\ &= (\mathrm{PO} - r)(\mathrm{PO} + r) \end{aligned}$$

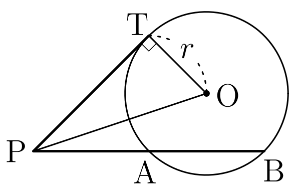
よって　$\mathrm{PA\cdot PB} = \mathrm{PO}^2 - r^2$

練習 3.20 右の図において，円 O の半径を r とするとき，$\mathrm{PA\cdot PB} = r^2 - \mathrm{PO}^2$ である．このことを示せ．



例 3.2，練習 3.20 で調べたことからわかるように，方べきの定理における PA·PB の値は，その円の中心を O，半径を r とすると，$|\mathrm{PO}^2 - r^2|$ に等しい．

練習 3.21 右の図のように，円 O の外部の点 P を通る直線が円 O と 2 点 A，B で交わるとする．P から円 O に接線を引き，その接点を T とすると，$\mathrm{PA\cdot PB} = \mathrm{PT}^2$ が成り立つことを証明せよ．



研究

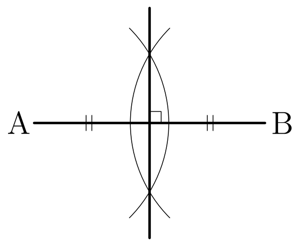
作図について

作図とは，定規とコンパスだけを道具として用いて，図形をかくことである．次の2つの作図は最も基本的なものである．

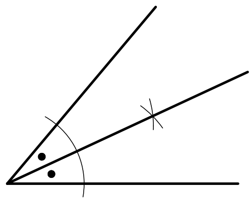
［1］与えられた線分の垂直二等分線を引く．

［2］与えられた角の二等分線を引く．

［1］

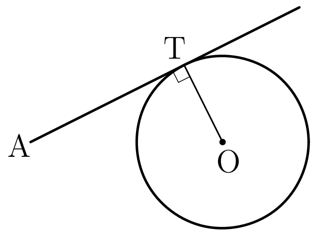


［2］



円Oの外部の点Aから円Oに接線を引く作図を考えよう．

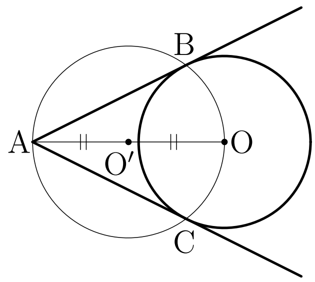
点Aから円Oに引いた接線の接点をTとすると，$\angle \mathrm{ATO} = 90°$ である．
そこで，Tは線分OAを直径とする円の周上にもあることを利用すると，次のような作図が考えられる．



① 線分OAの中点O′を求めて，O′を中心とする半径O′Aの円をかく．

② 円Oと円O′の交点をB，Cとする．

③ 直線AB，直線ACを引く．
これらの直線が求める接線である．



3.2.3 2つの円

ここでは，2つの円の位置関係や共通する接線について調べよう.

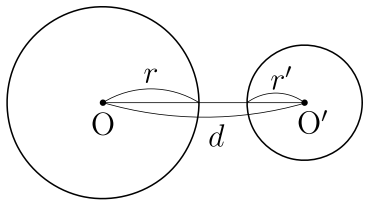
A》2つの円の位置関係

2つの円 O，O′ の位置関係には，次の5つの場合がある.

［1］一方が他方の外部にある

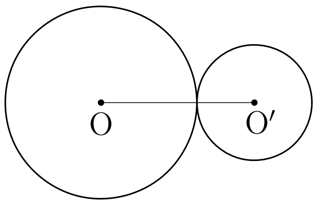
円 O の半径を r，円 O′ の半径を r' とし，円の中心間の距離を d とすると

$$d > r + r'$$



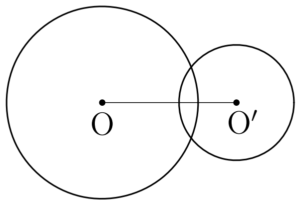
■ 次の［2］〜［5］の各場合について，円 O の半径を r，円 O′ の半径を r' とし，円の中心間の距離を d とするとき，$\boxed{\quad\quad}$ に適する記号として，等号 $=$，不等号 $>$，$<$ のうちのいずれかを入れよ.

［2］1点を共有する



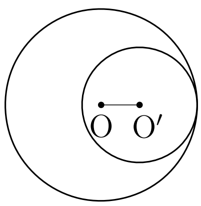
$$d \ \boxed{\quad\quad} \ r + r'$$

［3］2点で交わる



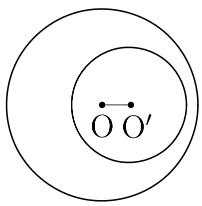
$$r - r' \ \boxed{\quad\quad} \ d \ \boxed{\quad\quad} \ r + r'$$

［4］1点を共有する



$$d \ \boxed{\quad\quad} \ r - r'$$

［5］一方が他方の内部にある

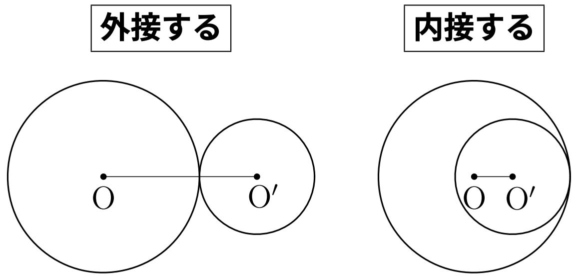


$$d \ \boxed{\quad\quad} \ r - r'$$

前ページの［2］，［4］のように2つの円がただ1つの共有点をもつとき，2つの円は**接する**といい，この共有点を**接点**という．

［2］のように接する場合，2つの円は**外接する**という．
［4］のように接する場合，2つの円は**内接する**という．

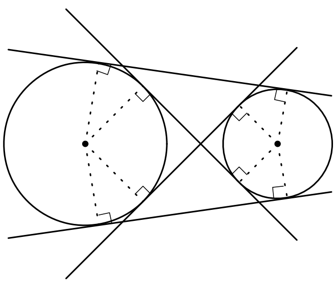
2つの円が接するとき，接点は2つの円の中心を通る直線上にある．



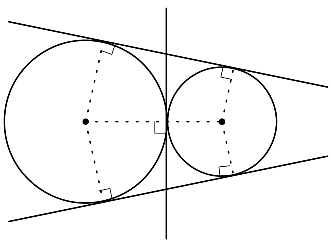
B》2つの円の共通接線

2つの円の両方に接している直線を，2つの円の**共通接線**という．
2つの円の共通接線には，次のような場合がある．

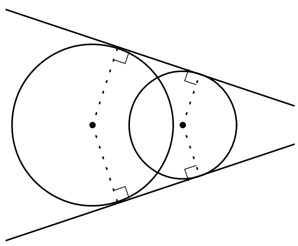
［1］共通接線　4本



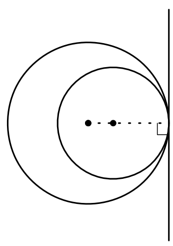
［2］共通接線　3本



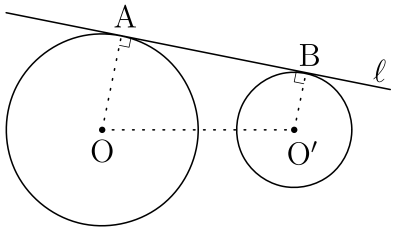
［3］共通接線　2本



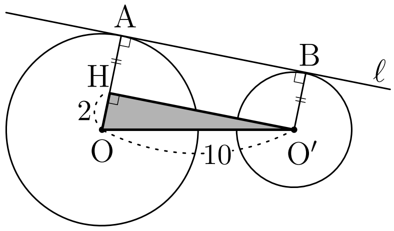
［4］共通接線　1本



例題 3.4 右の図において，直線 ℓ は2つの円O，O$'$ の共通接線で，A，Bは接点である．円O，O$'$ の半径を，それぞれ5，3とし，O，O$'$ 間の距離を10とするとき，線分ABの長さを求めよ．



解答 図のように，O$'$ から線分OAに垂線O$'$H を下ろすと



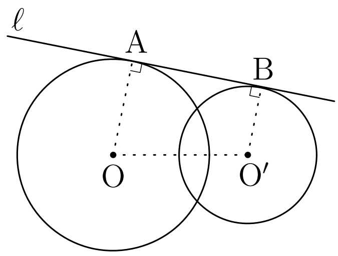
$$\mathrm{OH} = \mathrm{OA} - \mathrm{O'B} = 5 - 3 = 2$$

$\triangle \mathrm{OO'H}$ は直角三角形であるから

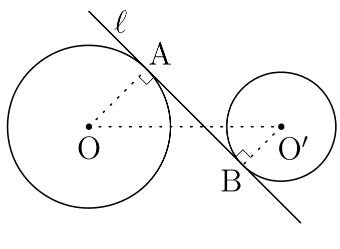
$$\mathrm{O'H}^2 = \mathrm{OO'}^2 - \mathrm{OH}^2$$

よって　　$\mathrm{AB} = \mathrm{O'H} = \sqrt{10^2 - 2^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

練習 3.22 右の図において，直線 ℓ は2つの円O，O$'$ の共通接線で，A，Bは接点である．円O，O$'$ の半径を，それぞれ4，3とし，O，O$'$ 間の距離を5とするとき，線分ABの長さを求めよ．

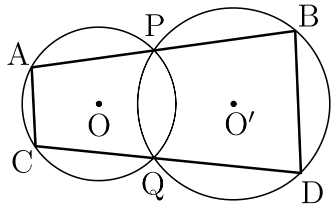


練習 3.23 右の図において，直線 ℓ は2つの円O，O$'$ の共通接線で，A，Bは接点である．円Oの半径を r，円O$'$ の半径を r' とし，O，O$'$ 間の距離を d とするとき，線分ABの長さを求めよ．



3.2.4 補充問題

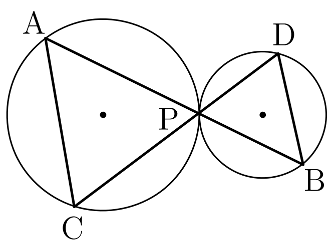
3 右の図のように，交わる2つの円O，O′ の交点をP，Qとする．Pを通る直線が，円O，O′ と交わる点を，それぞれA，Bとし，Qを通る直線が円O，O′ と交わる点を，それぞれC，Dとするとき，AC // BDであることを証明せよ．



4 2つの線分ABとCD，またはABの延長とCDの延長が点Pで交わるとき，PA·PB = PC·PDが成り立つならば，4点A，B，C，Dは1つの円周上にある．このことを証明せよ．

5 点Pで外接する2つの円がある．Pを通る2本の直線が，右の図のように，2つの円とそれぞれA，BおよびC，Dで交わるとき，AC // DBであることを証明せよ．

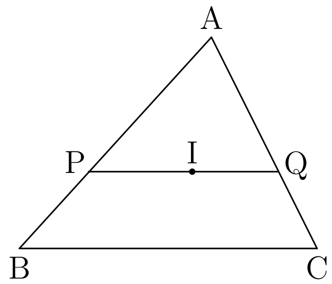
▶ 2つの円の共通接線を引く．



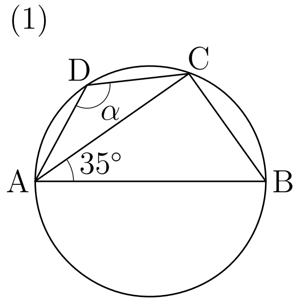
3.3　章末問題

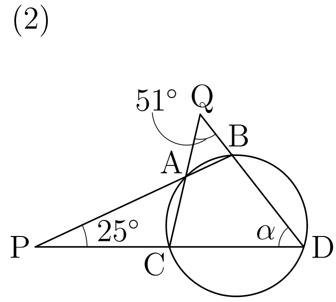
3.3.1　章末問題 A

1 △ABCの内心Iを通り，辺BCに平行な直線と辺AB，ACの交点を，それぞれP，Qとするとき，$PQ = PB + QC$であることを証明せよ．

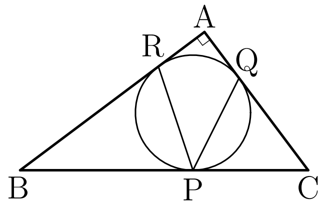


2 右の図において，αを求めよ．ただし，(1)で線分ABは円の直径とする．





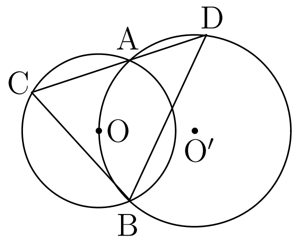
3 右の図で，P，Q，Rは△ABCの内接円と辺との接点である．$\angle A = 90°$，$BP = 6$，$PC = 4$であるとき，次の問いに答えよ．



(1) $\angle RPQ$の大きさを求めよ．

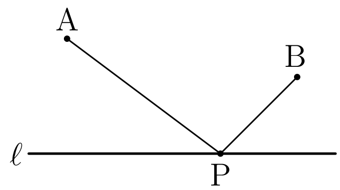
(2) 内接円の半径を求めよ．

4 右の図のように，点A，Bで交わる２つの円O，O′があり，円O′は円Oの中心を通る．Aを通る直線と円O，O′との交点を，それぞれC，Dとするとき，△DCBは二等辺三角形であることを証明せよ．



3.3.2　章末問題B

5 2点A，Bは直線ℓについて同じ側にある．ℓ上に点Pをとり，A，Bからの距離の和AP+PBを最小にするには，点Pの位置はどこにとればよいか．

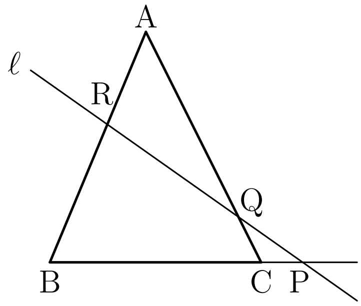


6 次の定理を証明せよ．(1) をメネラウスの定理，(2) をチェバの定理という．

(1) $\triangle$ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長が，頂点を通らない直線 ℓ と，それぞれ P，Q，R で交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

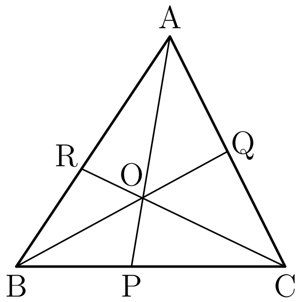
が成り立つ．



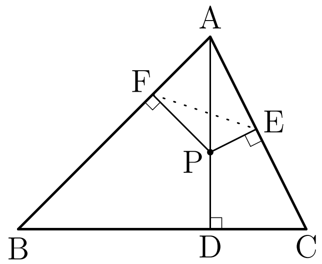
(2) $\triangle$ABC の内部に O がある．頂点 A，B，C と O を結ぶ直線が向かい合う辺と，それぞれ P，Q，R で交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

が成り立つ．



7 △ABC の頂点 A から底辺 BC に垂線 AD を下ろす．線分 AD 上に点 P をとり，P から辺 CA，AB に，それぞれ垂線 PE，PF を下ろすとき，四角形 BCEF は円に内接することを証明せよ．



ヒント

5 直線 ℓ について，A と対称な点 A′ をとると，AP $=$ A′P である．

6 (1) 頂点 C を通り直線 ℓ に平行な直線を引き，平行線と線分の比を利用する．

(2) △ABP と直線 CR，△APC と直線 BQ にメネラウスの定理を用いる．

7 四角形 AFPE，FBDP が，それぞれ円に内接することを利用する．