高校生の

新　編　数　学　A

解答編

平成 20 年 8 月 10 日

Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

目 次

第 1 章　場合の数と確率

1.1　集合と要素の個数

1.1.1　集合

練習 1.1 次の集合を，要素を書き並べて表せ.

(1) 12 の正の約数全体の集合 A

(2) $B = \{x \mid x \text{ は } 10 \text{ 以下の正の奇数}\}$

(3) $C = \{3n \mid n \text{ は } 20 \text{ 以下の自然数}\}$

【答】 (1) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

(2) $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

(3) $C = \{3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 60\}$

練習 1.2 次の 2 つの集合の関係を，$\subset$，$\supset$，$=$ を使って表せ.

(1) $A = \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$，$B = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$

(2) $C = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$，8 の正の約数全体の集合 D

(3) $P = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ 以下の自然数}\}$，$Q = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ の正の約数}\}$

【解】 (1) $A \subset B$

(2) $C = D$

(3) $P = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12\}$，$Q = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

よって　　$P \supset Q$

練習 1.3 次の集合の部分集合をすべてあげよ．

(1) {1, 2}　　(2) {a, b, c}

【答】 (1)　ϕ, {1}, {2}, {1, 2}

(2)　ϕ, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}

練習 1.4 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$, $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$，$C = \{1,\ 3\}$ について，次の集合を求めよ．

(1) $A \cap B$　　(2) $A \cup B$　　(3) $B \cap C$　　(4) $B \cup C$

【答】 (1) $A \cap B = \{2,\ 4,\ 6\}$　　(2) $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$

(3) $B \cap C = \phi$　　(4) $B \cup C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$

例 1.6 補集合を求める．

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ を全体集合とする．

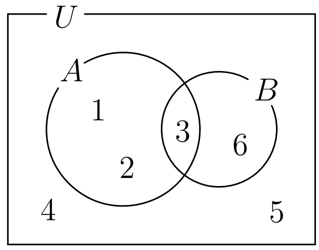
U の部分集合

$$A = \{1,\ 2,\ 3\}, \quad B = \{3,\ 6\}$$

について　$\overline{A} = \{4,\ 5,\ 6\}$

また，$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ であるから

$$\overline{A \cup B} = \{4,\ 5\}$$



練習 1.5 例 1.6 の集合 A，B について，次の集合を求めよ．

(1) $\overline{B}$　　(2) $\overline{A} \cap \overline{B}$　　(3) $\overline{A} \cup \overline{B}$

(4) $\overline{A \cap B}$　　(5) $\overline{A} \cap B$　　(6) $A \cap \overline{B}$

【答】 (1) $\overline{B} = \{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$　(2) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{4,\ 5\}$　(3) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6\}$

(4) $\overline{A \cap B} = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6\}$　(5) $\overline{A} \cap B = \{6\}$　(6) $A \cap \overline{B} = \{1,\ 2\}$

1.1.2　集合の要素の個数

練習 1.6 100 以下の自然数のうち，次のような数の個数を求めよ．

(1) 6 の倍数　　(2) 6 の倍数でない数

(3) 4 の倍数かつ 6 の倍数　　(4) 4 の倍数または 6 の倍数

【解】 100 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で 6 の倍数全体の集合を A，4 の倍数全体の集合を B とすると

$$A = \{6{\cdot}1,\ 6{\cdot}2,\ 6{\cdot}3,\ \cdots,\ 6{\cdot}16\}$$

$$B = \{4{\cdot}1,\ 4{\cdot}2,\ 4{\cdot}3,\ \cdots,\ 4{\cdot}25\}$$

(1) $n(A) = 16$　　(答) 16 個

(2) 求めるのは $n(\overline{A})$ である．

$$n(\overline{A}) = n(U) - n(A) = 100 - 16 = 84$$　　(答) 84 個

(3) 求めるのは $n(A \cap B)$ である．

$$A \cap B = \{12{\cdot}1,\ 12{\cdot}2,\ 12{\cdot}3,\ \cdots,\ 12{\cdot}8\}$$

よって　$n(A \cap B) = 8$　　(答) 8 個

(4) 求めるのは $n(A \cup B)$ である．

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 16 + 25 - 8 = 33 \end{aligned}$$　　(答) 33 個

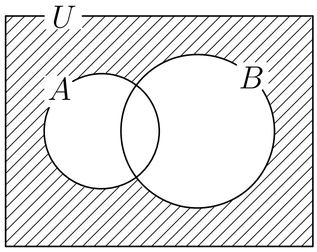
応用例題 1.1 100人の人に2つの提案a，bをしたところ，aに賛成の人は77人，bに賛成の人は83人，aにもbにも賛成の人は66人であった．aにもbにも賛成でない人は何人いるか．

考え方 集合でいうと，$n(\overline{A} \cap \overline{B})$ すなわち $n(\overline{A \cup B})$ を求めればよい．

【解】 この100人の集合を U とし，aに賛成の人の集合を A，bに賛成の人の集合を B とすると

$$n(A) = 77, \quad n(B) = 83, \quad n(A \cap B) = 66$$

aにもbにも賛成でない人の集合は $\overline{A \cup B}$ である．



$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 77 + 83 - 66 = 94 \end{aligned}$$

より $$\begin{aligned} n(\overline{A \cup B}) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 100 - 94 = 6 \end{aligned}$$ (答) 6人

練習 1.7 応用例題1.1について，右のような人数の表を作った．表の空らんをうめ，次の人数を求めよ．

(1) aにだけ賛成の人

(2) bにだけ賛成の人

	B	$\overline{B}$	合計
A	66		77
$\overline{A}$		6	
合計	83		100

【解】 (1) 11人
(2) 17人

	B	$\overline{B}$	合計
A	66	11	77
$\overline{A}$	17	6	23
合計	83	17	100

練習 1.8 あるクラス 40 人の生徒を対象に通学方法を調べたところ，自転車を利用する人が 13 人，バスを利用する人が 16 人，自転車もバスも利用する人が 5 人いた．次の人は何人いるか．

(1) 自転車もバスも利用しない人

(2) 自転車を利用するが，バスは利用しない人

【解】 この 40 人の集合を U とし，通学に自転車を利用する人の集合を A，バスを利用する人の集合を B とすると

$$n(A)=13,\ n(B)=16,\ n(A\cap B)=5$$

(1) 自転車もバスも利用しない人の集合は $\overline{A\cup B}$ である．

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=13+16-5=24$$

より　$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=40-24=16$　　(答) 16 人

(2) 自転車を利用するが，バスは利用しない人の集合は $A\cap\overline{B}$ である．

$$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=13-5=8$$　　(答) 8 人

1.1.3　補充問題

1　100 から 200 までの自然数のうち，次のような数の個数を求めよ．

(1) 3 の倍数　　(2) 4 の倍数

(3) 3 の倍数または 4 の倍数　　(4) 3 の倍数でも 4 の倍数でもない数

【解】 100 から 200 までの自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，3 の倍数全体の集合を A，4 の倍数全体の集合を B とすると

$$A = \{3\cdot 34,\ 3\cdot 35,\ 3\cdot 36,\ \cdots,\ 3\cdot 66\}$$
$$B = \{4\cdot 25,\ 4\cdot 26,\ 4\cdot 27,\ \cdots,\ 4\cdot 50\}$$

(1) $n(A) = 66 - (34 - 1) = 33$ (個)

(2) $n(B) = 50 - (25 - 1) = 26$ (個)

(3) 求めるのは $n(A \cup B)$ である．

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$n(A \cap B)$ は，3 の倍数かつ 4 の倍数すなわち 12 の倍数全体の個数である．

$$A \cap B = \{12\cdot 9,\ 12\cdot 10,\ 12\cdot 11,\ 12\cdot 12,\ \cdots,\ 12\cdot 16\}$$

よって　$n(A \cap B) = 16 - (9 - 1) = 8$

したがって，3 の倍数または 4 の倍数の個数は

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 33 + 26 - 8 = 51 \text{ (個)} \end{aligned}$$

(4) 求めるのは $n(\overline{A \cup B})$ である．

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cup B}) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 101 - 51 = 50 \text{ (個)} \end{aligned}$$

2 200 人の人に 2 つのテーマパーク A，B に行ったことがあるかどうかのアンケート調査をしたところ，A に行ったことのある人は 116 人，B に行ったことのある人は 90 人いた．また，A にも B にも行ったことのない人が 32 人いた．

(1) A または B に行ったことがある人は何人いるか．

(2) A にも B にも行ったことがある人は何人いるか．

【解】 この 200 人の集合を U とし，テーマパーク A，B に行ったことのある人の集合を，それぞれ A，B とすると

$$n(A)=116,\ n(B)=90,\ n(\overline{A\cup B})=32$$

(1) $$\begin{aligned} n(A\cup B) &= n(U)-n(\overline{A\cup B}) \\ &= 200-32=168\ (\text{人}) \end{aligned}$$

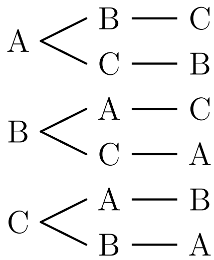
(2) $$\begin{aligned} n(A\cap B) &= n(A)+n(B)-n(A\cup B) \\ &= 116+90-168=38\ (\text{人}) \end{aligned}$$

1.2　場合の数

1.2.1　和の法則・積の法則

練習 1.9 アルファベットの A，B，C を，ACB のように重複なしに 1 個ずつすべて並べるとき，その並べ方をすべて書き出せ．

【解】 ABC，ACB，BAC，
BCA，CAB，CBA

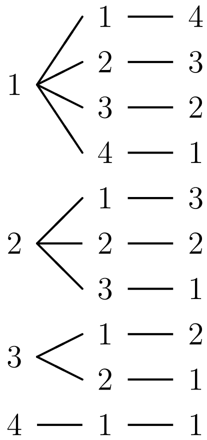


練習 1.10 大中小の 3 個のさいころを投げるとき，次の場合は何通りあるか．

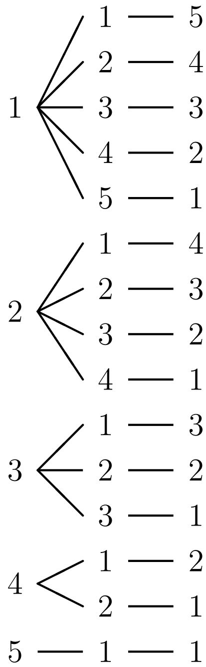
(1) 目の和が 6 になる場合　　(2) 目の和が 7 になる場合

【解】 (1) 10 通り
(2) 15 通り

(1)

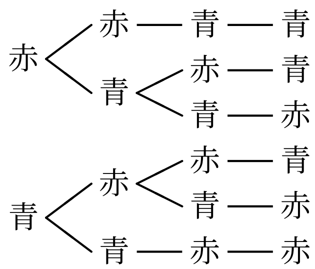


(2)



練習 1.11　赤玉 2 個と青玉 2 個の入った箱の中から，1 個ずつ玉を取り出して順に 1 列に並べる．全部の玉を取り出すとき，玉の並べ方は何通りあるか．

【解】 6 通り



練習 1.12　1 個のさいころを 2 回投げるとき，目の和が次のようになる場合は，何通りあるか．

(1) 7 または 8　　　(2) 4 の倍数

【解】 (1) 目の和が 7 になるのは

$$(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$$

の 6 通り．

目の和が 8 になるのは

$$(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$$

の 5 通り．

よって，和の法則により　$6+5=11$　(答) 11 通り

(2) 目の和が 4 または 8 または 12 になる場合である．

目の和が 4 になるのは　$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$　の 3 通り．

目の和が 8 になるのは　5 通り．

目の和が 12 になるのは $(6,\ 6)$ の 1 通り．

よって，和の法則により　$3+5+1=9$　(答) 9 通り

練習 1.13 大小2個のさいころを投げるとき，次の問いに答えよ．

(1) 2個のさいころの目の出方は何通りあるか．

(2) 大きいさいころの目が3以上，小さいさいころの目が偶数である出方は何通りあるか．

【解】 (1) 積の法則により　$6 \times 6 = 36$ (通り)

(2) 大きいさいころの目が3以上であるのは4通り．
小さいさいころの目が偶数であるのは3通り．
よって，積の法則により　$4 \times 3 = 12$ (通り)

練習 1.14 次の問いに答えよ．

(1) 大中小3個のさいころを投げるとき，目の出方は何通りあるか．

(2) 積 $(a+b)(c+d)(x+y+z)$ を展開すると，項は何個できるか．

【解】 (2) 積の法則により　$6 \times 6 \times 6 = 216$ (通り)
(1) 積の法則により　$2 \times 2 \times 3 = 12$ (通り)

練習 1.15 次の数について，正の約数は何個あるか．

(1) 16　　(2) 144

【解】 (1) $16 = 2^4$ であるから，16の正の約数は 1，2，2^2，2^3，2^4 である．
よって，5個ある．　(答) 5個

(2) $144 = 2^4 \cdot 3^2$ であるから，144の正の約数は，2^4 の正の約数と 3^2 の正の約数の積で表される．
2^4 の正の約数は5個あり，3^2 の正の約数は 1，3，3^2 の3個ある．
よって，積の法則により　$5 \times 3 = 15$　(答) 15個

1.2.2　順列

練習 1.16 次の値を求めよ．

(1) ${}_5\mathrm{P}_2$　(2) ${}_8\mathrm{P}_4$　(3) ${}_3\mathrm{P}_1$　(4) ${}_6\mathrm{P}_6$

【解】 (1) ${}_5\mathrm{P}_2 = 5\cdot4 = 20$　(2) ${}_8\mathrm{P}_4 = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1680$

(3) ${}_3\mathrm{P}_1 = 3$　(4) ${}_6\mathrm{P}_6 = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$

練習 1.17 次のものの総数を求めよ．

(1) 10 人の生徒から 3 人を選んで 1 列に並べるときの並べ方

(2) 1 から 6 までの数字から異なる 4 個を選んで作る 4 桁の数

【解】 (1) ${}_{10}\mathrm{P}_3 = 10\cdot9\cdot8 = 720$ (通り)

(2) ${}_6\mathrm{P}_4 = 6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360$ (通り)

練習 1.18 次のような並べ方の総数を求めよ．

(1) 1 から 5 までの自然数すべてを 1 列に並べる．

(2) A，B，C，D，E，F，G の 7 文字すべてを 1 列に並べる．

【解】 (1) $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$ (通り)

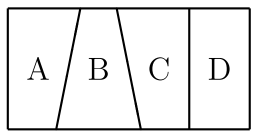
(2) $7! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5040$ (通り)

練習 1.19 6 人の候補選手の中から，リレーの第 1 走者から第 4 走者までを選ぶとき，4 人の走者の選び方は何通りあるか．

【解】 6 人から 4 人選んで 1 列に並べる順列の総数と同じである．

よって，選び方の総数は　${}_6\mathrm{P}_4 = 6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360$ (通り)

練習 1.20 右の図のような A，B，C，D の 4 つの部分を，すべて違う色で塗り分ける．5 種類の色があるとき，何通りの塗り方があるか．



【解】 5 種類から 4 種類を選んで 1 列に並べる順列の総数と同じである．

よって，塗り方の総数は　${}_5\mathrm{P}_4 = 5\cdot4\cdot3\cdot2 = 120$ (通り)

練習 1.21 母音 a，i，u，e，o と子音 k，s，t の 8 個を 1 列に並べるとき，次のような並べ方は何通りあるか．

(1) 両端が母音である． (2) すべての母音が続いて並ぶ．

【解】 (1) 両端の母音の並べ方は，${}_5\mathrm{P}_2$ 通りある．
間に並ぶ残り 6 文字の並べ方は，6! 通りある．
よって，並べ方の総数は，積の法則により

$$ {}_5\mathrm{P}_2 \times 6! = 5{\cdot}4 \times 6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 14400 \ (\text{通り}) $$

(2) 母音 5 個をひとまとめにする．
母音ひとまとめと子音 3 個の並べ方は，4! 通りある．
また，ひとまとめにした母音 5 個の並べ方は，5! 通りある．
よって，並べ方の総数は，積の法則により

$$ 4! \times 5! = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 \times 5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 2880 \ (\text{通り}) $$

練習 1.22 1，2，3，4，5 の 5 個の数字を 1 個ずつ使って，3 桁の数を作る．次のような数は何個作れるか．

(1) 5 の倍数 (2) 奇数

(3) 偶数 (4) 300 より大きい数

【解】 (1) 5 の倍数となるのは，一の位が 5 のときである．
百の位，十の位には，5 以外の 4 個の数字から 2 個取って並べる．
よって，求める個数は　${}_4\mathrm{P}_2 = 4{\cdot}3 = 12$ (個)

(2) 奇数となるのは，一の位が 1，3，5 のときで，選び方は 3 通り．
百の位，十の位には，一の位以外の 4 個の数字から 2 個取って並べる．
よって，求める個数は　$3 \times {}_4\mathrm{P}_2 = 3 \times 4{\cdot}3 = 36$ (個)

(3) 偶数となるのは，一の位が 2，4 のときで，選び方は 2 通り．
百の位，十の位には，一の位以外の 4 個の数字から 2 個取って並べる．
よって，求める個数は　$2 \times {}_4\mathrm{P}_2 = 2 \times 4{\cdot}3 = 24$ (個)

(4) 百の位は，3，4，5 の 3 通り．
十と一の位には，百の位以外の数字 4 個から 2 個取って並べる．
よって，求める個数は　$3 \times {}_4\mathrm{P}_2 = 3 \times 4{\cdot}3 = 36$ (個)

【別解】 (3) 5 個の数字を使って作れる 3 桁の数の総数は，${}_5\mathrm{P}_3$ 個である．
これらの数の中で，奇数を除いたものが偶数なので，求める数の個数は

$$ {}_5\mathrm{P}_3 - 36 = 5{\cdot}4{\cdot}3 - 36 = 60 - 36 = 24 \ (\text{個}) $$

練習 1.23 4 個の数字 0,1,2,3 を 1 個ずつ使って，3 桁の数を作る．百の位は 0 でないことに注意して，作れる 3 桁の数の個数を求めよ．

【解】 百の位には 0 以外の数字がくるから，その選び方は　3 通り

十，一の位の数字の並べ方は，残りの 3 個から 2 個とる順列で

$$_3\mathrm{P}_2 = 3{\cdot}2 = 6 \text{ (通り)}$$

ゆえに，求める整数の個数は　　$3 \times 6 = 18$ (個)

練習 1.24 次の場合に，並べ方は何通りあるか．

(1) 5 人を輪の形に並べる．　(2) 異なる 6 個の玉を円形に並べる．

【解】 (1) 5 人で輪を作るとき，並ぶ順は円順列であるから，その総数は

$$(5-1)! = 4! = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 24 \text{ (通り)}$$

(2) 異なる 6 個の玉を円形に並べるとき，並ぶ順は円順列であるから，その総数は

$$(6-1)! = 5! = 5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 120 \text{ (通り)}$$

練習 1.25 大人 5 人と子供 5 人が輪の形に並ぶとき，大人と子供が交互に並ぶような並び方は何通りあるか．

【解】 大人 5 人の円順列の総数は，$(5-1)!$ 通り．
子供 5 人を大人の間に 1 人ずつ並べる方法は，$5!$ 通り．
よって，並び方の総数は，積の法則により
$(5-1)! \times 5! = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 \times 5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 2880$ 通り

練習 1.26 男子 4 人と女子 2 人が，丸いテーブルの周りの 6 個の席に着席するとき，女子が隣り合うような並び方は何通りあるか．

【解】 女子 2 人をひとまとめにする．

男子 4 人と女子ひとまとめの円順列の総数は，$(5-1)!$ 通りある．

また，ひとまとめにした女子 2 人の並び方は，$2!$ 通りある．

よって，並び方の総数は

$$(5-1)! \times 2! = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 \times 2{\cdot}1 = 48 \text{ (通り)}$$

練習 1.27 4 種類の文字 a，b，c，d を，重複を許して次の個数だけ 1 列に並べるとき，何通りの文字列が作れるか．

(1) 2 個　　(2) 3 個

【解】 (1) 4 個から 2 個取る重複順列であるから

$$4^2 = 4 \times 4 = 16 \text{ (通り)}$$

(2) 4 個から 3 個取る重複順列であるから

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64 \text{ (通り)}$$

1.2.3　組合せ

練習 1.28 次の値を求めよ．

(1) ${}_7\mathrm{C}_3$　　(2) ${}_6\mathrm{C}_2$　　(3) ${}_8\mathrm{C}_1$　　(4) ${}_5\mathrm{C}_5$

【解】 (1) ${}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35$　　(2) ${}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\cdot5}{2\cdot1} = 15$

(3) ${}_8\mathrm{C}_1 = \dfrac{8}{1} = 8$　　(4) ${}_5\mathrm{C}_5 = 1$

練習 1.29 次のような選び方の総数を求めよ．

(1) 4 人から 2 人を選ぶ．　　(2) 6 色から 3 色を選ぶ．

【解】 (1) ${}_4\mathrm{C}_2 = \dfrac{4\cdot3}{2\cdot1} = 6$ (通り)　　(2) ${}_6\mathrm{C}_3 = \dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$ (通り)

練習 1.30 次の値を求めよ．

(1) ${}_5\mathrm{C}_4$　(2) ${}_8\mathrm{C}_6$　(3) ${}_9\mathrm{C}_6$

【解】 (1) ${}_5\mathrm{C}_4 = {}_5\mathrm{C}_{5-4} = {}_5\mathrm{C}_1 = 5$

(2) ${}_8\mathrm{C}_6 = {}_8\mathrm{C}_{8-6} = {}_8\mathrm{C}_2 = \dfrac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = 28$

(3) ${}_9\mathrm{C}_6 = {}_9\mathrm{C}_{9-6} = {}_9\mathrm{C}_3 = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$

練習 1.31 正六角形について，次の数を求めよ．

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形の個数

(2) 2 個の頂点を結ぶ線分の本数

(3) 対角線の本数

(4) 4 個の頂点を結んでできる四角形の個数

【解】 (1) ${}_6\mathrm{C}_3 = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$ (個)

(2) ${}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15$ (本)

(3) (2) の結果から辺の数 6 を引いて　$15 - 6 = 9$ (本)

(4) ${}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = 15$ (個)

練習 1.32 1 組のトランプのハートのカード 13 枚の中から 5 枚を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか．

(1) 絵札がちょうど 2 枚含まれる．　(2) エースが含まれる．

【解】 (1) 絵札 2 枚の選び方は ${}_3\mathrm{C}_2$ 通り，絵札以外の 3 枚の選び方は ${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通りある．よって，求める選び方の総数は，積の法則により

$$ {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_{10}\mathrm{C}_3 = {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_{10}\mathrm{C}_3 = 3 \times \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 360 \text{ (通り)} $$

(2) 求める総数は，エース以外の 4 枚の選び方の総数と同じである．

よって　$${}_{12}\mathrm{C}_4 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 495 \text{ (通り)}$$

練習 1.33 8 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか.

(1) A，B，C，D の 4 つの組に，2 人ずつ分ける.

(2) 2 人ずつの 4 つの組に分ける.

(3) 3 人，3 人，2 人の 3 つの組に分ける.

【解】 (1) A 組の 2 人の選び方は，${}_8C_2$ 通りある.
残りの 6 人から B 組の 2 人の選び方は ${}_6C_2$ 通り，さらに残りの 4 人から C 組の 2 人の選び方は ${}_4C_2$ 通りある.
A 組，B 組，C 組の人が決まれば，残りの D 組の 2 人は決まる.
よって，分け方の総数は

$$ {}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} \times \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} \times \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 2520 \text{ (通り)} $$

(2) (1) の分け方で，A，B，C，D の区別をなくすと同じ組が 4! 通りできる.
よって，分け方の総数は

$$ \frac{2520}{4!} = \frac{2520}{24} = 105 \text{ (通り)} $$

(3) A 組 3 人，B 組 3 人，C 組 2 人の 3 つの組に分けることを考え，A と B の区別をなくせばよい．よって，分け方の総数は

$$ \frac{{}_8C_3 \times {}_5C_3}{2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} \times \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} \times \frac{1}{2\cdot 1} = 280 \text{ (通り)} $$

練習 1.34 BANANA の 6 文字をすべて使って文字列を作るとき，何通りの文字列ができるか.

【解】 A が 3 個，N が 2 個，B が 1 個あるから

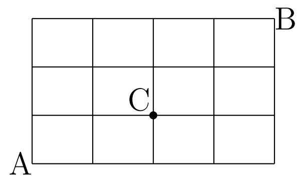
$$ \frac{6!}{3!2!1!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1 \times 2\cdot 1 \times 1} = 60 \text{ (通り)} $$

練習 1.35 右の図のような道のある地域で，次のような最短の道順は何通りあるか．

(1) C から B へ行く．

(2) C を通って A から B へ行く．

(3) C を通らないで A から B へ行く．



【解】 右へ 1 区画進むことを→で，上へ 1 区画進むことを↑で表す．

(1) C から B へ行く最短距離は，→ 2 個と↑ 2 個の順列で表される．
よって，その道順の総数は
$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 \text{ (通り)}$$

(2) A から C へ行く最短の道順は，→ 2 個と↑ 1 個の順列で表される．
C から B へ行く最短の道順は 6 通りである．
よって，求める道順の総数は
$$\frac{3!}{2!1!} \times 6 = 3 \times 6 = 18 \text{ (通り)}$$

(3) A から B へ行く最短の道順は，→ 4 個と↑ 3 個の順列で表されるから，その総数は
$$\frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \text{ (通り)}$$
このうち，C を通るものが 18 通りあるから，求める道順の総数は
$$35 - 18 = 17 \text{ (通り)}$$

1.2.4　二項定理

練習 1.36 次の式の展開式を，係数だけを取り出す計算によって求めよ.

(1) $(a+b)^5$　　(2) $(a+b)^6$

【解】 (1) $(a+b)^5=(a+b)^4(a+b)$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
\times) & 1 & 1 & & & & \\
\hline
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
\hline
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

よって　$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

(2) $(a+b)^6=(a+b)^5(a+b)$

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
\times) & 1 & 1 & & & & & \\
\hline
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\hline
 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

よって　$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

練習 1.37 次の式の展開式を，二項定理を使って求めよ．

(1) $(x+1)^4$ (2) $(x-1)^5$ (3) $(x+2)^6$

【解】 二項定理により

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nb^n$$

(1) $n=4$ として，a を x，b を 1 におき換えると

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= {}_4\mathrm{C}_0x^4 + {}_4\mathrm{C}_1x^3\cdot 1 + {}_4\mathrm{C}_2x^2\cdot 1^2 + {}_4\mathrm{C}_3x\cdot 1^3 + {}_4\mathrm{C}_4 1^4 \\ &= x^4+4x^3+6x^2+4x+1\end{aligned}$$

(2) $n=5$ として，a を x，b を -1 におき換えると

$$\begin{aligned}(x-1)^5 &= {}_5\mathrm{C}_0x^5 + {}_5\mathrm{C}_1x^4\cdot(-1) + {}_5\mathrm{C}_2x^3\cdot(-1)^2 \\ &\qquad + {}_5\mathrm{C}_3x^2\cdot(-1)^3 + {}_5\mathrm{C}_4x\cdot(-1)^4 + {}_5\mathrm{C}_5(-1)^5 \\ &= x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1\end{aligned}$$

(3) $n=6$ として，a を x，b を 2 におき換えると

$$\begin{aligned}(x+2)^6 &= {}_6\mathrm{C}_0x^6 + {}_6\mathrm{C}_1x^5\cdot 2 + {}_6\mathrm{C}_2x^4\cdot 2^2 + {}_6\mathrm{C}_3x^3\cdot 2^3 \\ &\qquad + {}_6\mathrm{C}_4x^2\cdot 2^4 + {}_6\mathrm{C}_5x\cdot 2^5 + {}_6\mathrm{C}_6 2^6 \\ &= x^6+12x^5+60x^4+160x^3+240x^2+192x+64\end{aligned}$$

練習 1.38 次の式の展開式における x^3 の項の係数を求めよ．

(1) $(2x+3)^4$ (2) $(3x-1)^5$

【解】 (1) $(2x+3)^4$ の展開式の一般項は ${}_4\mathrm{C}_r(2x)^{4-r}\cdot 3^r = {}_4\mathrm{C}_r2^{4-r}\cdot 3^rx^{4-r}$

$4-r=3$ とすると $r=1$

よって，求める係数は ${}_4\mathrm{C}_1\times 2^3\times 3 = 96$

(2) $(3x-1)^5$ の展開式の一般項は ${}_5\mathrm{C}_r(3x)^{5-r}(-1)^r = {}_5\mathrm{C}_r3^{5-r}(-1)^rx^{5-r}$

$5-r=3$ とすると $r=2$

よって，求める係数は ${}_5\mathrm{C}_2\times 3^3\times(-1)^2 = 270$

二項定理により，次の等式が成り立つ．

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n \qquad \cdots ①$$

この等式に $x=1$ を代入すると，次の等式が得られる．

$${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$$

練習 1.39 次の等式を，上の等式 ① を利用して導け．

$${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n = 0$$

【解】 等式 $(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$

において，$x=-1$ を代入すると

(左辺) $= (1-1)^n = 0$，(右辺) $= {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n$

よって $\quad {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n = 0$

練習 1.40 $(a+b+c)^6$ の展開式における次の項の係数を求めよ．

(1) a^3bc^2 (2) $a^2b^2c^2$ (3) a^2b^4

【解】 (1) $\{(a+b)+c\}^6$ の展開式において，c^2 を含む項は ${}_6\mathrm{C}_2(a+b)^4c^2$ であり，$(a+b)^4$ の展開式における a^3b の項の係数は ${}_4\mathrm{C}_1$ である．

よって，求める係数は $\quad {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_1 = \dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1} \times 4 = 60$

(2) $\{(a+b)+c\}^6$ の展開式において，c^2 を含む項は ${}_6\mathrm{C}_2(a+b)^4c^2$ であり，$(a+b)^4$ の展開式における a^2b^2 の項の係数は ${}_4\mathrm{C}_2$ である．

よって，求める係数は $\quad {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1} \times \dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 90$

(3) $\{(a+b)+c\}^6$ の展開式において，c を含まない項は ${}_6\mathrm{C}_0(a+b)^6$ であり，$(a+b)^6$ の展開式における a^2b^4 の項の係数は ${}_6\mathrm{C}_4$ である．

よって，求める係数は $\quad {}_6\mathrm{C}_0 \times {}_6\mathrm{C}_4 = 1 \times {}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15$

1.2.5　補充問題

3 大中小 3 個のさいころを投げるとき，次のような場合は何通りあるか.

(1) すべて異なる目が出る.　(2) 目の積が奇数になる.

(3) 目の積が偶数になる.　(4) 目の積が 20 になる.

【解】 (1) $6 \times 5 \times 4 = 120$ (通り)

(2) 目の積が奇数になるのは，3 個の目が奇数のときであるから

$$3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ (通り)}$$

(3) すべての目の出方は　$6 \times 6 \times 6 = 216$ (通り)
目の積が奇数の場合の数を除けばよいから

$$216 - 27 = 189 \text{ (通り)}$$

(4) $20 = 2^2 \cdot 5$ であるから，積が 20 になる目の組合せは
$(2, 2, 5)$，$(1, 4, 5)$ の 2 種類.
$(2, 2, 5)$ の組合せからできる 3 つの数の並び方は 3 通り.
$(1, 4, 5)$ の組合せからできる 3 つの数の並び方は $3!$ 通り.
よって，積が 20 になる目の出方は

$$3 + 3! = 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9 \text{ (通り)}$$

4 0, 1, 2, 3, 4 の 5 個の数字を使って 4 桁の数を作る.

(1) 各桁の数字が異なるとき, 偶数は何個作れるか.

(2) 各桁の数字に重複を許すとき, 奇数は何個作れるか.

【解】 (1) 偶数となるのは, 一の位が 0, 2, 4 の場合である.

一の位が 0 になる場合

他の位には, 残りの 4 個の数字から 3 個を並べるから,
その総数は ${}_4\mathrm{P}_3$ 通り.

一の位が 2 または 4 になる場合

千の位は 0 以外の 3 通り, 百と十の位は残りの 3 個の数字から 2 個を並べるから, その総数は ${}_3\mathrm{P}_2$ 通り.

よって, 一の位が 2 または 4 になる数の総数は, $2 \times 3 \times {}_3\mathrm{P}_2$ 通り.

したがって, 作れる偶数の個数は

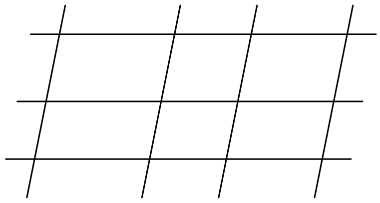
$$\begin{aligned}{}_4\mathrm{P}_3 + 2 \times 3 \times {}_3\mathrm{P}_2 &= 4 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \times 3 \cdot 2 \\ &= 24 + 36 = 60 \text{ (個)}\end{aligned}$$

(2) 千の位は 0 以外の 4 通り, 百と十の位はそれぞれ 5 通り,
一の位は 1, 3 の 2 通り.

よって, 重複を許すとき作れる奇数の個数は

$$4 \times 5 \times 5 \times 2 = 200 \text{ (個)}$$

5 右の図のように，4 本の平行線とそれらに交わる 3 本の平行線がある．これらの平行線によって作られる平行四辺形は，全部で何個あるか．



【解】 4 本の平行線から 2 本を選び，それらに交わる 3 本の平行線から 2 本を選ぶと，平行四辺形が 1 個できる．

よって，求める平行四辺形の個数は

$$ {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2 = \frac{4\cdot3}{2\cdot1} \times \frac{3\cdot2}{2\cdot1} = 18 \text{ (個)} $$

6 次の等式が成り立つことを，組合せの考えを用いて説明せよ．

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r $$

【解】 異なる n 個から r 個を取り出すとき，特定のもの a を含む組と含まない組ができる．

a を含む組の総数は，$(n-1)$ 個から $(r-1)$ 個取る組合せの総数 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ に等しい．

a を含まない組の総数は，$(n-1)$ 個から r 個取る組合せの総数 ${}_{n-1}\mathrm{C}_r$ に等しい．

よって，和の法則により等式 ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ が成り立つ．

1.3　確率

1.3.1　事象と確率

練習 1.41 大小 2 個のさいころを同時に投げるとき，すべての目の出方を例 1.14 にならって示せ.

【解】(大の目，小の目) のように，目の出方を表すと

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\
(2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\
(3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\
(4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\
(5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\
(6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6)
\end{array}$$

の 36 通りである.

練習 1.42 1 個のさいころを投げるとき，次の場合の確率を求めよ.

(1) 奇数の目が出る.　　(2) 3 以上の目が出る.

【解】起こりうるすべての出方は 6 通り.

(1) 奇数の目が出るのは，3 通り.
よって，奇数の目が出る確率は　$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

(2) 3 以上の目の出るのは，4 通り.
よって，3 以上の目が出る確率は　$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

練習 1.43 赤玉 2 個と白玉 3 個の入った袋から，玉を 1 個取り出すとき，赤玉の出る確率を求めよ.

【解】玉の出方は全部で 5 通りあり，このうち赤玉が出るのは 2 通りある.

よって，赤玉を取り出す確率は　$\dfrac{2}{5}$

練習 1.44 ジョーカーを除く 1 組のトランプのカード 52 枚からカードを 1 枚引くとき，エースが出る確率を求めよ.

【解】エースは 4 枚あるから，エースが出る確率は　$\dfrac{4}{52}=\dfrac{1}{13}$

練習 1.45 3 枚の硬貨を同時に投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) すべて表が出る．　(2) 1 枚だけ裏が出る．

【解】 起こりうるすべての場合の数は　$2 \times 2 \times 2 = 8$ (通り)

(1) すべて表が出るのは 1 通り．

よって，すべて表が出る確率は　$\dfrac{1}{8}$

(2) 1 枚だけ裏が出るのは 3 通り．

よって，1 枚だけ裏が出る確率は　$\dfrac{3}{8}$

練習 1.46 2 個のさいころを同時に投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 目の和が 7 になる．　(2) 2 個とも偶数の目が出る．

【解】 2 個のさいころの目の出方は　$6 \times 6 = 36$ (通り)

(1) 目の和が 7 になるのは，以下の 6 通り．

$(1,\ 6)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$，$(5,\ 2)$，$(6,\ 1)$

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

(2) 2 個とも偶数の目が出るのは　$3 \times 3 = 9$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

練習 1.47 1 組のトランプの 4 枚のエースをでたらめに横 1 列に並べるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) ハートが左端に並ぶ．

(2) クラブが左端，ハートが右端に並ぶ．

【解】 4 枚の並べ方は，4! 通りある．

(1) 左端以外の 3 枚の並び方は 3! 通り．

よって，求める確率は　$\dfrac{3!}{4!} = \dfrac{1}{4}$

(2) 間の 2 枚の並び方は 2! 通り．

よって，求める確率は　$\dfrac{2!}{4!} = \dfrac{1}{4 \cdot 3} = \dfrac{1}{12}$

練習 1.48 くじが 10 本あり，そのうち 3 本が当たりくじである．

(1) 同時に 2 本引くとき，2 本とも当たる確率を求めよ．

(2) 同時に 3 本引くとき，3 本ともはずれる確率を求めよ．

【解】 (1) 10 本から 2 本引く組合せは，${}_{10}\mathrm{C}_2$ 通りある．
当たりくじ 3 本から 2 本引く組合せは，${}_{3}\mathrm{C}_2$ 通りある．
よって，求める確率は　$\dfrac{{}_{3}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} = \dfrac{{}_{3}\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2} = 3 \times \dfrac{2\cdot 1}{10\cdot 9} = \dfrac{1}{15}$

(2) 10 本から 3 本引く組合せは，${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通りある．
はずれくじ 7 本から 3 本引く組合せは，${}_{7}\mathrm{C}_3$ 通りある．
よって，求める確率は　$\dfrac{{}_{7}\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} \times \dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8} = \dfrac{7}{24}$

練習 1.49 男子 6 人，女子 4 人の合計 10 人の中から抽選で 5 人を選ぶとき，次のように選ばれる確率を求めよ．

(1) 男子が 3 人，女子が 2 人　　　(2) 女子は 1 人だけ

【解】 10 人から 5 人選ぶ組合せは，${}_{10}\mathrm{C}_5$ 通りある．

(1) 男子が 3 人，女子が 2 人の組合せは，${}_{6}\mathrm{C}_3 \times {}_{4}\mathrm{C}_2$ 通りある．
よって，求める確率は

$$\frac{{}_{6}\mathrm{C}_3 \times {}_{4}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} \times \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} \times \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = \frac{10}{21}$$

(2) 男子が 4 人，女子が 1 人の組合せは，${}_{6}\mathrm{C}_4 \times {}_{4}\mathrm{C}_1$ 通りある．
よって，求める確率は

$$\frac{{}_{6}\mathrm{C}_4 \times {}_{4}\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{{}_{6}\mathrm{C}_2 \times 4}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} \times 4 \times \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = \frac{5}{21}$$

1.3.2 確率の基本性質

練習 1.50 1 から 10 までの番号札 10 枚から 1 枚引くとき,「奇数番号を引く」という事象を A,「7 以上の番号を引く」という事象を B とするとき，積事象 $A\cap B$, 和事象 $A\cup B$ を集合で表せ.

【答】 $A\cap B=\{7,9\}$, $A\cup B=\{1,3,5,7,8,9,10\}$

練習 1.51 ジョーカーを除く 1 組のトランプのカード 52 枚から 1 枚引くとき,「ハートが出る」という事象を A,「7 が出る」という事象を B,「絵札が出る」という事象を C とする．どの事象とどの事象が互いに排反であるか.

【解】 事象 A と事象 B は同時に起こる．(ハートの 7 が出る)
事象 A と事象 C は同時に起こる．(ハートの絵札が出る)
事象 B と事象 C は同時には起こらない.
よって B と C は互いに排反.

例 1.18 確率の加法定理の利用

各等の当たる確率が，右のようなくじがある.
このくじを 1 本引くとき，各等が当たる事象は互いに排反である.

	1 等	2 等	3 等	4 等
確率	$\frac{2}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{20}{100}$

このくじを 1 本引くとき，1 等または 2 等が当たる確率は

$$\frac{2}{100}+\frac{5}{100}=\frac{7}{100}$$ ← 確率の加法定理

また，1 等から 3 等までのいずれかが当たる確率は

$$\frac{2}{100}+\frac{5}{100}+\frac{10}{100}=\frac{17}{100}$$

練習 1.52 例 1.18 のくじを 1 本引くとき，次の場合の確率を求めよ.

(1) 3 等または 4 等が当たる.

(2) 2 等から 4 等までのいずれかが当たる.

【解】 (1) $\frac{10}{100}+\frac{20}{100}=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$

(2) $\frac{5}{100}+\frac{10}{100}+\frac{20}{100}=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$

練習 1.53 赤玉2個，白玉3個，青玉4個の入った袋から，3個の玉を同時に取り出すとき，3個とも同じ色である確率を求めよ．

【解】「3個とも同じ色である」という事象は，

「3個とも白玉である」という事象 A,「3個とも青玉である」という事象 B の和事象 $A \cup B$ である．

A，B は互いに排反であるから，加法定理により

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3} + \frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}$$

$$= \frac{1}{84} + \frac{4}{84} = \frac{5}{84}$$

練習 1.54 1から200までの200枚の番号札から1枚引くとき，3の倍数でない番号を引く確率を求めよ．

【解】「3の倍数でない」という事象は,「3の倍数である」

という事象の余事象である．

また，1から200までの番号のうち，3の倍数は66個ある．

よって，3の倍数の番号を引く確率は　$\frac{66}{200}$

したがって，求める確率は　$1 - \frac{66}{200} = 1 - \frac{33}{100} = \frac{67}{100}$

練習 1.55 1から9までの番号札9枚から4枚を同時に引くとき，少なくとも1枚が偶数の番号である確率を求めよ．

【解】奇数の番号札は5枚ある．

よって，引いた4枚すべてが奇数である確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4} = 5 \times \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{126}$$

求めるのは，この事象の余事象であるから

$$1 - \frac{5}{126} = \frac{121}{126}$$

練習 1.56 3 個のさいころを同時に投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 少なくとも 1 個は 1 の目が出る．

(2) 少なくとも 1 個は偶数の目が出る．

【解】 (1) 3 個の目すべてが 1 でない確率は　$\dfrac{5^3}{6^3} = \dfrac{125}{216}$

求めるのはこの余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{125}{216} = \dfrac{91}{216}$

(2) 3 個の目すべてが奇数である確率は　$\dfrac{3^3}{6^3} = \dfrac{1}{8}$

求めるのはこの余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$

練習 1.57 1 から 50 までの 50 枚の番号札から 1 枚引くとき，その番号が次のような数である確率を求めよ．

(1) 3 の倍数または 4 の倍数

(2) 3 の倍数でも 4 の倍数でもない数

【解】 $A = \{3, 6, 9, \cdots, 48\}$，$B = \{4, 8, 12, \cdots, 48\}$ とすると

$$A \cap B = \{12, 24, 36, 48\}$$

$$n(A) = 16,\ n(B) = 12,\ n(A \cap B) = 4$$

(1) 求める確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{16}{50} + \frac{12}{50} - \frac{4}{50} = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$$

(2) 求める確率は

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$$

1.3.3　独立な試行と確率

練習 1.58 2枚の硬貨と1個のさいころを投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 硬貨は2枚とも表が出て，さいころは偶数の目が出る．

(2) 硬貨は1枚だけ表が出て，さいころは2以下の目が出る．

【解】 2枚の硬貨を投げる試行と1個のさいころを投げる試行は独立である．

(1) $\dfrac{1}{2^2} \times \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{8}$　　(2) $\dfrac{2}{2^2} \times \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{6}$

練習 1.59 1枚の硬貨を3回続けて投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 3回とも表が出る確率　　(2) 少なくとも1回は裏が出る確率

【解】 (1) $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

(2) (1) の事象の余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$

練習 1.60 A，B，C の3つのくじがあり，それぞれが当たる確率は右の表の通りである．
これらのくじを1本ずつ引くとき，次の確率を求めよ．

くじ	A	B	C
確率	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{10}$

(1) 3本とも当たる確率　　(2) 少なくとも1本が当たる確率

【解】 (1) $\dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{10} \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{500}$

(2) すべてがはずれる確率は

$$\left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \left(1 - \frac{1}{10}\right) \times \left(1 - \frac{3}{10}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{9}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{63}{125}$$

よって，少なくとも1本が当たる確率は

$$1 - \frac{63}{125} = \frac{62}{125}$$

例題 1.16 A の袋には青玉 3 個と白玉 2 個，B の袋には青玉 2 個と白玉 4 個が入っている．A，B の袋から 1 個ずつ玉を取り出すとき，同じ色の玉を取り出す確率を求めよ．

【解】 同じ色が青の場合と白の場合がある．

ともに青玉を取り出す確率は

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{30}$$

← A から玉を取り出すことと B から玉を取り出すことは独立である．

ともに白玉を取り出す確率は

$$\frac{2}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{8}{30}$$

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{6}{30} + \frac{8}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

練習 1.61 例題 1.16 において，次の確率を求めよ．

(1) A から青玉，B から白玉を取り出す確率

(2) A，B から取り出す玉の色が異なる確率

【解】 (1) $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{6} = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5}$

(2) (1) の場合と，A から白玉，B から青玉を取り出す場合がある．

A から白玉，B から青玉を取り出す確率は　$\dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{6} = \dfrac{4}{30}$

よって，求める確率は　$\dfrac{12}{30} + \dfrac{4}{30} = \dfrac{16}{30} = \dfrac{8}{15}$

練習 1.62 1個のさいころを4回投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 1の目がちょうど3回出る．

(2) 5以上の目がちょうど2回出る．

【解】 (1) さいころを1回投げるとき，1の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$

よって，4回投げて1の目がちょうど3回出る確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-3}=4\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\frac{5}{6}=\frac{5}{324} $$

(2) さいころを1回投げるとき，5以上の目が出る確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

よって，4回投げて5以上の目がちょうど2回出る確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^{4-2}=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27} $$

練習 1.63 赤玉2個と白玉4個の入った袋から玉を1個取り出し，色を見てからもとにもどす．この試行を5回行うとき，赤玉が4回以上出る確率を求めよ．

【解】 1回の試行で，赤玉が出る確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

この試行を5回行って赤玉が4回以上出る確率は

$$ {}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(1-\frac{1}{3}\right)^{5-4}+\left(\frac{1}{3}\right)^5=5\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{10}{243}+\frac{1}{243}=\frac{11}{243} $$

1.3.4 期待値

練習 1.64 2 個のさいころを投げて出る目の和を考える．下の表を完成させて，出る目の和の期待値を求めよ．

和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$		$\frac{6}{36}$			$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

【解】

和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

出る目の期待値は

$$\begin{aligned}&2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}\\&\quad+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}=\frac{252}{36}=7\end{aligned}$$

練習 1.65 500 円硬貨 3 枚を同時に投げて，表が出た硬貨を全部もらえるゲームがある．1 回のゲームで，受け取る金額の期待値を求めよ．
また，このゲームの参加料が 1 回 800 円のとき，このゲームに参加することは得といえるか．

【解】 表が 0 枚の確率は $\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$， 表が 1 枚の確率は $\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}$

表が 2 枚の確率は $\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}$， 表が 3 枚の確率は $\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

よって，受け取る金額を X 円と
とすると，右のような表ができる．
X の期待値は

X	0	500	1000	1500	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$0\times\frac{1}{8}+500\times\frac{3}{8}+1000\times\frac{3}{8}+1500\times\frac{1}{8}=\frac{6000}{8}=750\ (円)$$

参加料はこの期待値より高いから，このゲームに参加することは得とはいえない．

1.3.5　補充問題

7 A，B，Cの3人がじゃんけんを1回行うとき，次の確率を求めよ．

(1) Aだけが勝つ確率　　(2) 全員が違う手を出す確率

(3) 誰も勝たない，すなわちあいこになる確率

【解】 3人の手の出し方は　$3 \times 3 \times 3 = 27$

(1) Aだけが勝つ手の出し方は3通り．

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{27} = \dfrac{1}{9}$

(2) 全員が違う手の出し方は　$3! = 6$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{27} = \dfrac{2}{9}$

(3) あいこになるのは，全員が違う手か全員が同じ手を出す出す場合で

$6 + 3 = 9$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3}$

8 1組のトランプのハートのカード13枚すべてをでたらめに1列に並べるとき，次の確率を求めよ．

(1) 3枚の絵札が続いて並ぶ確率　(2) 両端に絵札が並ぶ確率

(3) エースが端には並ばない確率

【解】 13枚のカードの並び方の総数は13!通り．

(1) 続いて並ぶ3枚の絵札をひとまとめにする．残りの10枚と絵札ひとまとめの並び方は11!通り．また，ひとまとめにした3枚のカードの並び方は3!通り．

よって，求める確率は　$\dfrac{11! \times 3!}{13!} = \dfrac{1}{26}$

(2) 両端の絵札の並び方は${}_3\mathrm{P}_2$通り．両端以外の11枚のカードの並び方は11!通り．

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_3\mathrm{P}_2 \times 11!}{13!} = \dfrac{1}{26}$

(3) 余事象はエースが端に並ぶことで，そのような並び方は$2 \times 12!$通り．

よって，エースが端に並ぶ確率は　$\dfrac{2 \times 12!}{13!} = \dfrac{2}{13}$

したがって，求める確率は　$1 - \dfrac{2}{13} = \dfrac{11}{13}$

9 三者択一式の問題が3問続けて出題される．どの問題でもでたらめに答えを選ぶとき，次のものを求めよ．ただし，各問題でどの答えを選ぶ確率も，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ と考えてよいとする．

(1) 1問だけ正解する確率　　(2) 正解する問題数の期待値

【解】 (1) ${}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2=3\times\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{12}{27}=\dfrac{4}{9}$

(2) 正解数が0，2，3となる確率は，それぞれ

$\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$，${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{6}{27}$，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$

正解数	0	1	2	3	計
確率	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{12}{27}$	$\dfrac{6}{27}$	$\dfrac{1}{27}$	1

よって，正解する問題数の期待値は

$$0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{12}{27}+2\times\frac{6}{27}+3\times\frac{1}{27}=\frac{27}{27}=1\ (\text{題})$$

1.4　章末問題

1.4.1　章末問題 A

1 0，1，2，3，4，5 の 6 個の数字を 1 個ずつ使って 3 桁の数を作る．

(1) 5 の倍数は何個できるか．

(2) 3 桁の数を小さい順に並べるとき，22 番目の数を求めよ．

【解】 (1) 5 の倍数は一の位が 0 または 5 である．

一の位が 0 の場合

百の位，十の位の並べ方は $_5\mathrm{P}_2$ 通りある．

一の位が 5 の場合

百の位は 0 と 5 以外の 4 通り，十の位は残りの 4 通りある．

よって，5 の倍数の個数は

$$_5\mathrm{P}_2 + 4 \times 4 = 36 \text{ (個)}$$

(2) 百の位が 1 である 3 桁の数は $_5\mathrm{P}_2$ 個ある．

$_5\mathrm{P}_2 = 5 \cdot 4 = 20$ であるから，20 番目の数までは百の位が 1 である．

この後は，百の位が 2 となり，順に 201，203 と続くから，

22 番目の数は　203

2 大人 2 人と子供 4 人が，円形の 6 人席のテーブルに着席するとき，次のような並び方は何通りあるか．

(1) 大人 2 人が向かい合う．

(2) 大人 2 人の間に子供がちょうど 1 人入る．

【解】 (1) 大人 1 人の位置を固定して考えると，もう 1 人の大人の位置はその向かい合う席に決まる．残りの席に子供 4 人が座ればよいから，求める並び方は

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ (通り)}$$

(2) 大人 1 人の位置を固定して考えると，もう 1 人の大人の位置は 2 通りある．残りの席に子供 4 人が座ればよいから，求める並び方は

$$2 \times 4! = 2 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48 \text{ (通り)}$$

3 男子6人，女子4人の中から3人を選ぶとき，女子が少なくとも1人含まれるような選び方は何通りあるか．

【解】 選び方の総数 ${}_{10}\mathrm{C}_3$ から，3人とも男子となる選び方の総数 ${}_6\mathrm{C}_3$ を引いて

$$ {}_{10}\mathrm{C}_3 - {}_6\mathrm{C}_3 = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} - \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 120 - 20 = 100\ (\text{通り}) $$

4 男子4人と女子3人をくじ引きで1列に並べるとき，次の確率を求めよ．

(1) 男子と女子が交互に並ぶ確率

(2) 両端に女子が並ぶ確率

【解】 (1) 7人を1列に並べる順列は $7!$ 通りある．

男子と女子が交互に並ぶのは

男女男女男女男

の場合で，このような並び方は $4!\times3!$ 通りある．

よって，求める確率は　$\dfrac{4!\times3!}{7!}=\dfrac{1}{35}$

(2) 両端の女子2人の並び方は ${}_3\mathrm{P}_2$ 通り，

両端以外の5人の並び方は $5!$ 通りある．

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_3\mathrm{P}_2\times5!}{7!}=\dfrac{1}{7}$

5 1 から 9 までの 9 枚の番号札から 4 枚選ぶとき，次の確率を求めよ．

(1) 全部が 6 以下である確率　　(2) 最大の番号が 7 以上である確率

【解】 9 枚の番号札から 4 枚選ぶときの選び方は ${}_9\mathrm{C}_4$ 通りある．

(1) 6 以下の番号札から 4 枚選ぶような選び方は ${}_6\mathrm{C}_4$ 通りある．よって，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{42}$$

(2) 「最大の番号が 7 以上である」という事象は,「全部が 6 以下である」という事象の余事象である．よって，求める確率は

$$1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$$

6 白玉 4 個と黒玉 6 個が入っている袋から，玉を 2 個取り出すとき，次の各場合に，取り出した 2 個の玉の色が異なる確率を求めよ．

(1) 最初に 1 個を取り出し，袋にもどしてから 2 個目を取り出す場合

(2) 2 個を同時に取り出す場合

【解】 (1) 「1 個目が白玉，2 個目が黒玉」である確率は

$$\frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{24}{100}$$

「1 個目が黒玉，2 個目が白玉」である確率は

$$\frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{24}{100}$$

よって，求める確率は

$$\frac{24}{100} + \frac{24}{100} = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$$

(2) 10 個から 2 個取る組合せは，${}_{10}\mathrm{C}_2$ 通りある．

白玉 1 個，黒玉 1 個である組合せは，${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_1$ 通りある．

よって，求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2} = 4 \times 6 \times \frac{2 \cdot 1}{10 \cdot 9} = \frac{8}{15}$$

7 1から5までの番号札が，それぞれ番号の数だけ用意されている．この中から1枚を取り出すとき，次のどちらを選ぶ方が得といえるか．

① 出た番号と同じ枚数の100円硬貨をもらう．

② 5の番号が出たときだけ1000円をもらう．

【解】 番号札の枚数は　$1+2+3+4+5=15$ (枚)

それぞれの番号札を引く確率は，次の表のようになる．

番号	1	2	3	4	5	計
確率	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

よって，① でもらえる金額の期待値は

$$100\times\frac{1}{15}+200\times\frac{2}{15}+300\times\frac{3}{15}+400\times\frac{4}{15}+500\times\frac{5}{15}=\frac{5500}{15}=\frac{1100}{3}$$

② でもらえる金額の期待値は

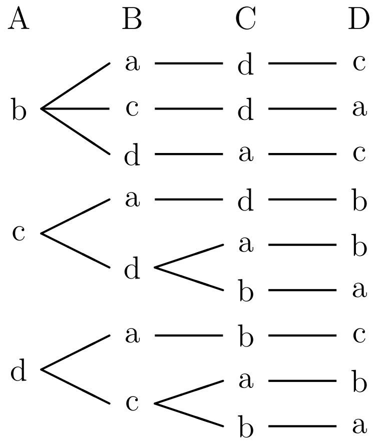
$$1000\times\frac{5}{15}=\frac{1000}{3}$$

したがって，もらえる金額の期待値が大きい ① を選ぶ方が得である．

1.4.2　章末問題 B

8 A，B，C，D の 4 人が品物を 1 個ずつ持ち寄り，それらを分けることにした．各人が他の人の品物をもらうような分け方は何通りあるか．

【解】 A，B，C，D の品物をそれぞれ a，b，c，d として，適する場合の樹形図をかくと，下の図のようになる．よって　9 通り



9 次の問いに答えよ．

(1) 6 人を A，B の 2 部屋に入れる方法は，何通りあるか．ただし，全部の人を 1 つの部屋に入れてもよい．

(2) 6 人を 2 つの組に分ける方法は何通りあるか．

【解】 (1) 6 人それぞれについて，A に入れるか B に入れるかの 2 通りであるから

$$2^6 = 64 \text{ (通り)}$$

(2) (1) の分け方のうち，A に全員入れる方法と B に全員入れる方法を除くと

$$64 - 2 = 62 \text{ (通り)}$$

この分け方で，A，B の区別をなくせばよいから

$$\frac{62}{2!} = 31 \text{ (通り)}$$

10 0000 から 9999 までの番号のうちで，次のような番号は何個あるか．

(1) 0101，0033 のように，同じ数字を 2 個ずつ含むもの

(2) 1248 のように，異なる数字が左から小さい順に並んでいるもの

【解】 (1) 0 から 9 までの 10 個の数字から 2 個を選ぶ組合せは ${}_{10}\mathrm{C}_2$ 通りある．

同じ数字を 2 個ずつ含む 4 個の数字を 1 列に並べる順列は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通りある．

よって，条件を満たす番号の総数は

$$ {}_{10}\mathrm{C}_2 \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} \times \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 270\ (\text{個}) $$

(2) 異なる 4 個の数字を 1 組決めると適する数字の並び方が 1 個作れる．

よって，条件を満たす番号の総数は

$$ {}_{10}\mathrm{C}_4 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210\ (\text{個}) $$

11 二項定理を用いて，次のことを示せ．

$$ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 \qquad \text{ただし}, n \text{ は 2 以上の自然数} $$

【解】 二項定理により

$$ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{n} + {}_n\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n $$

ここで

$$ (\text{右辺}) > 1 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{n} = 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 1 + 1 = 2 $$

よって　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n > 2$

12 赤玉と白玉の入った3つの箱A，B，Cの中から玉を1個取り出すとき，赤玉の出る確率は，それぞれ$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{5}$であるとする．各箱の中から玉を1個ずつ取り出すとき，赤玉が2個出る確率を求めよ．

【解】 赤玉がAとBからだけ出る確率は

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{30}$$

赤玉がAとCからだけ出る確率は

$$\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{5}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{30}$$

赤玉がBとCからだけ出る確率は

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{30}$$

よって，3つの箱から赤玉が2個出る確率は

$$\frac{6}{30}+\frac{4}{30}+\frac{2}{30}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$$

13 1枚の硬貨を投げて，表が出たときは数直線上の点Pを正の向きに2だけ進め，裏が出たときはPを負の向きに1だけ進める．硬貨を9回投げ終わったとき，Pが最初の位置にもどっている確率を求めよ．

【解】 表の回数をr回とすると，裏の回数は$(9-r)$回である．このときに最初の位置にもどるとすると

$$2r-(9-r)=0$$

これを解くと　$r=3$

よって，求める確率は，9回のうち表がちょうど3回出る確率に等しい．

したがって

$$ {}_9\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{9-3}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{21}{128}$$

第 2 章　論理と集合

2.1.1　命題と条件

練習 2.1 次の命題の真偽を調べよ．

(1) 自然数 4 は素数である．　$\longleftarrow$ 素数：1 より大きい数で 1 とその数自身以外に約数をもたない数

(2) 数 -1 について $(-1)^2 > 0$ である．

(3) 正三角形は二等辺三角形である．

(4) 台形は平行四辺形である．

【答】 (1) 偽　(2) 真　(3) 真　(4) 偽

練習 2.2 実数全体の集合を R とし，x は R の要素とする．x に関する条件「$x \geqq 1$」について，x が次の値をとるとき，その命題の真偽を調べよ．

(1) $x = 2$　(2) $x = -1$　(3) $x = 1$　(4) $x = \sqrt{2}$

【答】 (1) 真　(2) 偽　(3) 真　(4) 真

2.1.2 命題・条件と集合

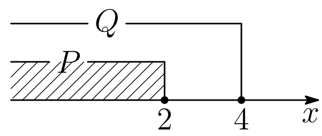
練習 2.3 次の条件 p, q について，命題 $p \Longrightarrow q$ の真偽を，集合を使って調べよ．

(1) 実数 x に関する2つの条件 $p : x \leqq 2$, $q : x \leqq 4$

(2) 自然数 m に関する2つの条件

$p : m$ は12の約数，$q : m$ は24の約数

【解】 (1) 条件 p を満たすもの全体の集合を P，条件 q を満たすもの全体の集合を Q とする．
右の図より $P \subset Q$ が成り立つから，
命題 $p \Longrightarrow q$ は真である．



(2) 条件 p を満たすもの全体の集合を P，条件 q を満たすもの全体の集合を Q とする．

$$P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\},\ Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

よって，$P \subset Q$ が成り立つから，命題 $p \Longrightarrow q$ は真である．

練習 2.4 n は自然数とする．次の命題が偽であることを示せ．

n が素数ならば，n は奇数である．

【解】 $n = 2$ は素数であるが奇数ではない．
よって，この命題は偽である．

練習 2.5 x, a, b, c は実数とする．次の命題の逆を述べ，その真偽を調べよ．

(1) $x = 2 \implies x^2 = 4$　　(2) $ac = bc \implies a = b$

【解】 (1) $x^2 = 4 \implies x = 2$
この命題は偽 (反例：$x = -2$)

(2) $a = b \implies ac = bc$
この命題は真

練習 2.6 a，b は実数とする．次の $\boxed{}$ に，適する言葉を入れよ．

(1) $(a-b)a=0$ は，$a=b$ であるための $\boxed{}$ 条件である．

(2) $a=b$ は，$a^2=b^2$ であるための $\boxed{}$ 条件である．

【解】 (1) 「$(a-b)a=0 \implies a=b$」は偽,「$a=b \implies (a-b)a=0$」は真
よって　必要

(2) 「$a=b \implies a^2=b^2$」は真,「$a^2=b^2 \implies a=b$」は偽
よって　十分

練習 2.7 a，b，c は実数とする．次の条件の中で，$a=b$ と同値な条件を選べ．

① $a+c=b+c$　② $a^2=b^2$　③ $(a-b)^2=0$

【解】 ① 「$a=b \iff a+c=b+c$」が成り立つ．
② 「$a^2=b^2 \implies a=b$」は偽
③ 「$(a-b)^2=0 \iff a-b=0$」が成り立つ．
よって，$a=b$ と同値なのは　①，③

練習 2.8 自然数 n に関する次の条件の否定を述べよ．

(1) n は偶数である　(2) n は 5 より小さい

【解】 (1) n は偶数でない　(n は奇数である)
(2) n は 5 以上である

練習 2.9 a，b は実数とする．次の条件の否定を述べよ．

(1) $a>0$ かつ $b>0$　(2) $a=0$ または $b=0$
(3) $a \leqq 1$ かつ $b \leqq 1$

【答】 (1) $a \leqq 0$ または $b \leqq 0$　(2) $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$　(3) $a>1$ または $b>1$

練習 2.10 m，n は自然数とする．次の命題の対偶を述べ，その真偽を調べよ．

(1) n は 6 の倍数 $\Longrightarrow$ n は 3 の倍数

(2) n^2 は偶数 $\Longrightarrow$ n は奇数

(3) 積 mn は偶数 $\Longrightarrow$ m は偶数 かつ n は偶数

【解】 (1) n は 3 の倍数でない $\Longrightarrow$ n は 6 の倍数でない

真

(2) n は偶数 $\Longrightarrow$ n^2 は奇数

偽 (反例：$n = 2$)

(3) m は奇数 または n は奇数 $\Longrightarrow$ 積 mn は奇数

偽 (反例：$m = 3$，$n = 2$)

2.1.3 命題と証明

練習 2.11 n は整数とする．対偶を利用して，次の命題を証明せよ．

n^2 が奇数ならば，n は奇数である．

[証明] この命題の対偶は，次の命題である．

n が偶数ならば，n^2 は偶数である．　　$\cdots$ (A)

偶数 n は，ある整数 m を用いて $n = 2m$ と表され，

$$n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$$

となる．すなわち，n^2 は偶数である．
よって，命題 (A) は真であり，もとの命題も真である． **[証終]**

練習 2.12 背理法を利用して，次のことを証明せよ．

$\sqrt{2}$ が無理数ならば，$1+3\sqrt{2}$ は無理数である．

[証明] $1+3\sqrt{2}$ は無理数でないと仮定すると，$1+3\sqrt{2}$ は有理数である．

$1+3\sqrt{2}=r$ とすると　　$\sqrt{2}=\dfrac{r-1}{3}$

r が有理数ならば $\dfrac{r-1}{3}$ も有理数であるから，この等式は $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．

よって，$1+3\sqrt{2}$ は無理数である．　**[証終]**

2.1.4　補充問題

1 a，b は実数とする．次の命題の対偶を述べ，その真偽を調べよ．

$a+b$ は無理数 $\Longrightarrow$ a，b の少なくとも一方は無理数

【解】 対偶「a，b はいずれも有理数 $\Longrightarrow$ $a+b$ は有理数」は真

2 p，q は有理数とする．$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，次のことを証明せよ．

$$p+q\sqrt{2}=0 \implies p=q=0$$

【解】 $q \neq 0$ と仮定すると　　$\sqrt{2}=-\dfrac{p}{q}$

p，q が有理数ならば $-\dfrac{p}{q}$ も有理数であるから，この等式は $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．

よって　　　　$q=0$

$q=0$ のとき　　$p+0\cdot\sqrt{2}=0$ から　$p=0$

したがって，命題は真である．

2.2　章末問題

2.2.1　章末問題 A

1 x は実数，n は自然数とする．次の命題の真偽を調べよ．

(1) $x^2 - x - 6 = 0 \implies x = -2$

(2) n^2 は 3 の倍数 $\Longrightarrow$ n は 3 の倍数

【解】 (1) 偽 ($x^2 - x - 6 = 0$ を解くと $x = -2, 3$ であるから，反例は $x = 3$)

(2) 真 (対偶「n は 3 の倍数でない $\Longrightarrow$ n^2 は 3 の倍数でない」
すなわち「n は 3 で割り切れない $\Longrightarrow$ n^2 は 3 で割り切れない」は真)

2 m，n，k は自然数とする．次の命題の逆，対偶をそれぞれ述べ，それらの真偽を調べよ．

「積 mnk は偶数 $\Longrightarrow$ m，n，k の少なくとも 1 つは偶数」

【解】 逆「m，n，k の少なくとも 1 つは偶数 $\Longrightarrow$ 積 mnk は偶数」は真
対偶「m，n，k のいずれも奇数 $\Longrightarrow$ 積 mnk は奇数」は真

3 次の$\boxed{}$の中には,「必要条件である」「十分条件である」「必要十分条件である」のうち，それぞれどれが最も適するか.

ただし，a，b は実数とし，m，n は整数とする.

(1) 「$\triangle$ABC が正三角形である」は「$\triangle$ABC が二等辺三角形である」ための$\boxed{}$.

(2) 「$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$」は「$ab \neq 0$」であるための$\boxed{}$.

(3) 「積 mn が偶数である」は「m が偶数である」ための$\boxed{}$.

【解】 (1) 「$\triangle$ABC が正三角形である $\Longrightarrow$ $\triangle$ABC が二等辺三角形である」は真

「$\triangle$ABC が二等辺三角形である $\Longrightarrow$ $\triangle$ABC が正三角形である」は偽

よって　十分条件である.

(2) 「$a \neq 0$ かつ $b \neq 0 \Longleftrightarrow ab \neq 0$ である」は成り立つ.

よって　必要十分条件である.

(3) 「積 mn が偶数である $\Longrightarrow$ m が偶数である」は偽

「m が偶数である $\Longrightarrow$ 積 mn が偶数である」は真

よって　必要条件である.

2.2.2 章末問題 B

4 a，b は実数とする．次の命題が真であることを証明せよ．

$$a+b>0 \quad \Longrightarrow \quad a>0 \text{ または } b>0$$

[証明] この命題の対偶は，次の命題である．

「$a \leqq 0$ かつ $b \leqq 0 \Longrightarrow a+b \leqq 0$」 $\cdots$(A)

命題 (A) は真であるから，もとの命題も真である． **[証終]**

5 1 から 10 までの 10 個の整数から異なる 5 個を取り，それらの積を a，残りの 5 個の積を b とする．このとき，$a \neq b$ であることを証明せよ．

[証明] $a=b$ であると仮定すると

$$\begin{aligned} ab = a^2 &= 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6{\cdot}7{\cdot}8{\cdot}9{\cdot}10 \\ &= 2^8{\cdot}3^4{\cdot}5^2{\cdot}7 \end{aligned}$$

$a>0$ であるから

$$a = \sqrt{2^8{\cdot}3^4{\cdot}5^2{\cdot}7} = 2^4{\cdot}3^2{\cdot}5{\cdot}\sqrt{7}$$

これは，a が整数であることに矛盾する．
よって，$a \neq b$ である． **[証終]**

第 3 章　平面図形

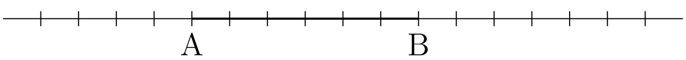
3.1　三角形の性質

3.1.1　三角形の辺と角

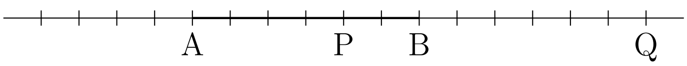
練習 3.1 次の点を下の図にしるせ,

(1) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P

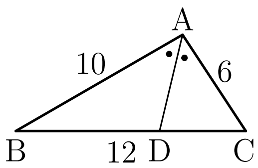
(2) 線分 AB を 2 : 1 に外分する点 Q



【解】



練習 3.2 AB = 10, BC = 12, AC = 6 である $\triangle$ABC において, $\angle$A の二等分線と辺 BC の交点を D とする．次のものを求めよ．
(1) BD : DC　　(2) 線分 BD の長さ

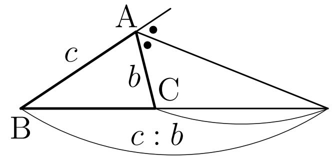


【解】 (1) BD : DC = AB : AC = 10 : 6 = 5 : 3

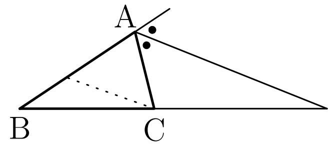
(2) $\mathrm{BD} = \dfrac{5}{5+3}\mathrm{BC} = \dfrac{5}{8} \times 12 = \dfrac{15}{2}$

三角形の二等分線と比

定理 2 $AB \neq AC$ である $\triangle ABC$ の $\angle A$ の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点は，辺 BC を AB : AC に外分する．

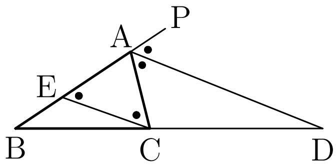


練習 3.3 定理 2 を定理 1 の証明にならって証明せよ．
ただし，$AB > AC$ の場合とする．



[証明] 辺 AB の A を越える延長上に点 P をとる．
$\angle PAC$ の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とすると

$$\angle PAD = \angle DAC \qquad \cdots ①$$

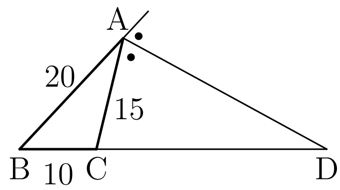


頂点 C を通り直線 AD に平行な直線を引き，辺 AB との交点を E とすると，$AD \,/\!/\, EC$ から

$$\angle PAD = \angle AEC \qquad \cdots ②$$
$$\angle DAC = \angle ACE \qquad \cdots ③$$

①，②，③ から，$\triangle ACE$ において
$\angle AEC = \angle ACE$ となるから　　$AE = AC$
また，$AD \,/\!/\, EC$ から　$BD : DC = BA : AE$
したがって　　　　　$BD : DC = AB : AC$ **[証終]**

練習 3.4 $AB = 20$，$BC = 10$，$AC = 15$ である $\triangle ABC$ において，$\angle A$ の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とする．線分 BD の長さを求めよ．



【解】 AD は $\angle A$ の外角の二等分線であるから

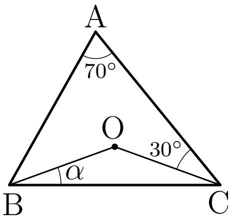
$$\begin{aligned} BD : DC &= AB : AC \\ &= 20 : 15 = 4 : 3 \end{aligned}$$

よって　　$BD = \dfrac{4}{4-3}BC = 4 \times 10 = 40$

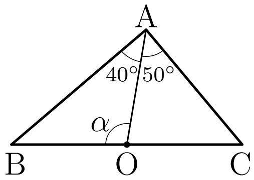
3.1.2 三角形の外心・内心・重心

練習 3.5 下の図で，点 O は △ABC の外心である．α を求めよ．

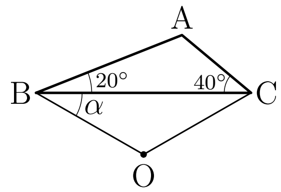
(1)



(2)



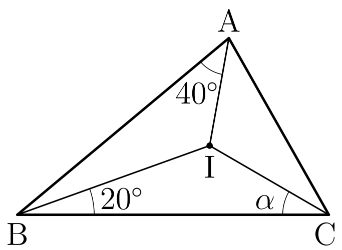
(3)



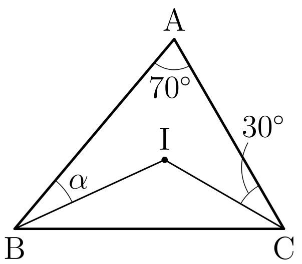
【答】 (1) $\alpha = 20^\circ$　(2) $\alpha = 100^\circ$　(3) $\alpha = 30^\circ$

練習 3.6 下の図で，点 I は △ABC の内心である．α を求めよ．

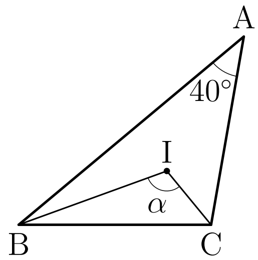
(1)



(2)



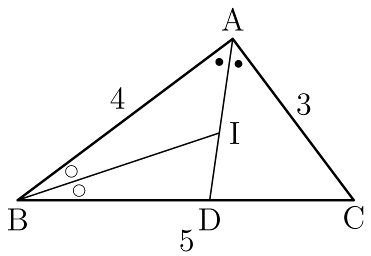
(3)



【答】 (1) $\alpha = 30^\circ$　(2) $\alpha = 25^\circ$　(3) $\alpha = 110^\circ$

練習 3.7 $\mathrm{AB} = 4$，$\mathrm{BC} = 5$，$\mathrm{CA} = 3$ である △ABC の内心を I とする．直線 AI と辺 BC の交点を D とするとき，次のものを求めよ．

(1) 線分 BD の長さ　　(2) AI : ID



【解】 (1) 線分 AD は ∠A の二等分線であるから

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 4 : 3$$

よって　　$$\mathrm{BD} = \frac{4}{4+3} \times 5 = \frac{20}{7}$$

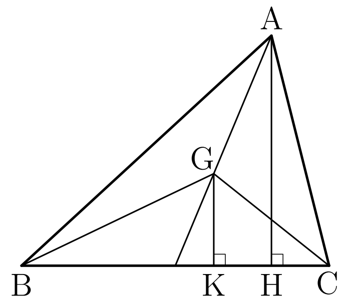
(2) 線分 BI は ∠B の二等分線であるから

$$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = \mathrm{AB} : \mathrm{BD} = 4 : \frac{20}{7} = 7 : 5$$

練習 3.8 $\triangle$ABC の重心を G とし，G から辺 BC に下ろした垂線を GK，A から辺 BC に下ろした垂線を AH とする．

(1) GK : AH を求めよ．

(2) $\triangle$GBC と $\triangle$ABC の面積比を求めよ．



【解】 (1) 辺 BC の中点を M とする．

G は $\triangle$ABC の重心であるから　　$\mathrm{MG} : \mathrm{GA} = 1 : 2$

GK//AH，$\mathrm{MG} : \mathrm{MA} = 1 : 3$ より　　$\mathrm{GK} : \mathrm{AH} = 1 : 3$

(2) $\triangle$GBC と $\triangle$ABC は底辺 BC が共通であるから，面積の比は高さの比に等しい．高さの比は GK : AH であるから，面積の比は　　$1 : 3$

練習 3.9 3 辺の長さが次のような三角形は存在するかどうかを調べよ．

(1) 4，6，8　　(2) 4，6，4　　(3) 4，6，10

【解】 (1) $|6-8| < 4 < 6+8$ が成り立つから，存在する．

(2) $|6-4| < 4 < 6+4$ が成り立つから，存在する．

(3) $|6-10| = 4$ となり，存在しない．

練習 3.10 次が成り立つことを示せ．

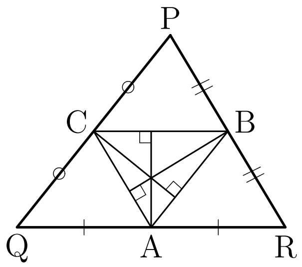
直角三角形では，3 辺のうち斜辺が最大である．

[証明] 直角三角形において，三角形の内角の和が 180° であることから，直角以外の角は，90° より小さい．すなわち，直角が最大の角である．

よって，直角に向かい合う辺すなわち斜辺が 3 辺のうち最大である．　**[証終]**

3.1.3　補充問題

1 △PQR の辺 QR，RP，PQ の中点を，それぞれ A，B，C とする．△ABC において，各頂点からその向かい合う辺に下ろした 3 本の垂線は，△PQR の外心で交わることを証明せよ．

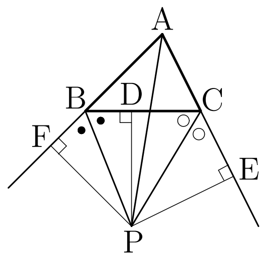


[証明] 中点連結定理により　　CB//QR，CA//PR，AB//QP
△ABC において，点 A から辺 BC に下ろした垂線を AD とすると，
CB//QR から　　AD⊥QR
よって，直線 AD は辺 QR の垂直二等分線である．同様に，点 B，C からその向かい合う辺に下ろした垂線を，それぞれ BE，CF とすると

BE⊥RP，CF⊥PQ

よって，△ABC の各頂点からその向かい合う辺に下ろした 3 本の垂線は，△PQR の各辺の垂直二等分線と一致し，△PQR の外心で交わる．　**[証終]**

2 △ABC において，右の図のように ∠B の外角の二等分線と ∠C の外角の二等分線の交点を P とするとき，P は ∠A の二等分線上にある．このことを証明せよ．
▶ 定理 4 の証明と同様に考えられる．

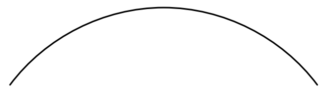


[証明] P は ∠B の外角の二等分線上にあるから　PF = PD
また，P は ∠C の外角の二等分線上にあるから　PE = PD
よって　PF = PE
したがって，P は ∠A の二等分線上にある．　**[証終]**

3.2 円の性質

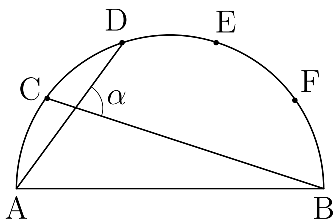
3.2.1 円周角

練習 3.11 右の図は円の一部分である．この円の中心を求める方法を述べよ．



【解】 異なる2本の弦を引き，それぞれの垂直二等分線を引くと，その交点が円の中心である．

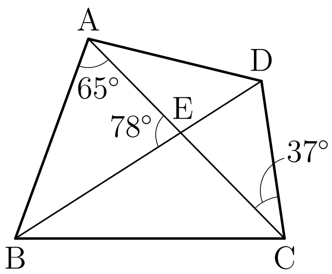
練習 3.12 右の図のように，直径を AB とする半円の周を5等分する点を C，D，E，F とするとき，α を求めよ．



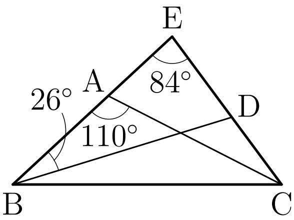
【答】 $\alpha = 72^\circ$

練習 3.13 下の図において，4点 A，B，C，D が1つの円周上にあることを示せ．

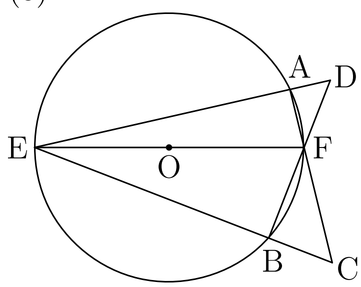
(1)



(2)



(3)



点 O は円の中心
EF は円の直径

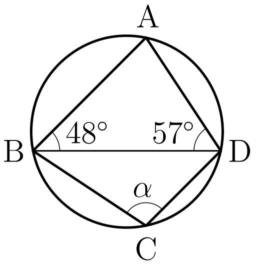
【解】 (1) △ABE において　　$\angle\mathrm{ABE} = 180^\circ - (65^\circ + 78^\circ) = 37^\circ$
よって　　$\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{ACD}$
したがって，4点 A，B，C，D は1つの円周上にある．

(2) △ACE において　　$\angle\mathrm{ACE} = 110^\circ - 84^\circ = 26^\circ$
よって　　$\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{ACD}$
したがって，4点 A，B，C，D は1つの円周上にある．

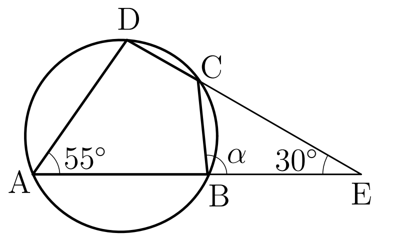
(3) $\angle\mathrm{EAF} = \angle\mathrm{EBF} = 90^\circ$ であるから　　$\angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{CBD} = 90^\circ$
したがって，4点 A，B，C，D は1つの円周上にある．

練習 3.14 下の図において，α を求めよ．

(1)



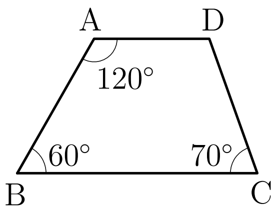
(2)



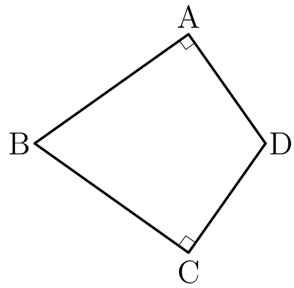
【答】(1) 105°　(2) 95°

練習 3.15 次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものはどれか．

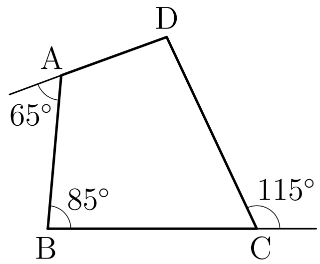
①



②



③



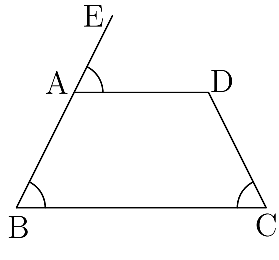
【答】②，③

練習 3.16 AD // BC である台形 ABCD において，$\angle ABC = \angle BCD$ であるとき，この台形は円に内接する．このことを証明せよ．

[証明] 辺 AB の A を越える延長上に点 E をとると，AD // BC であるから，

$$\angle ABC = \angle EAD$$

よって，$\angle ABC = \angle BCD$ であるとき，$\angle BCD = \angle EAD$ となるから台形 ABCD は円に内接する．　**[証終]**

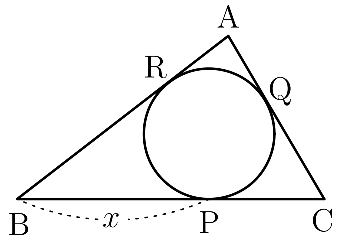


3.2.2　円と直線

練習 3.17 △ABCにおいて，

$$AB = 7,\ BC = 8$$

であるとする．
この三角形の内接円と辺BC，CA，ABとの接点を，それぞれP，Q，Rとするとき，次の問いに答えよ．



(1) BPの長さを x とするとき，AQとQCの長さを，それぞれ x で表せ．

(2) $CA = 5$ であるとき，BPの長さを求めよ．

【解】 (1) $BR = BP$，$AB = 7$ であるから　　$AR = 7 - x$

$AR = AQ$ より　　$AQ = 7 - x$

また，$QC = PC$，$PC = 8 - x$ であるから　　$QC = 8 - x$

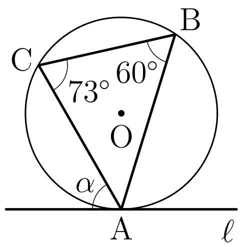
(2) $CA = 5$ より　　$(7 - x) + (8 - x) = 5$

これを解いて　　$x = 5$

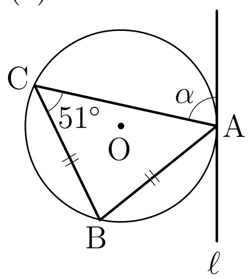
よって　　$BP = 5$

練習 3.18 右の図で，直線 ℓ は円Oの接線で，Aは接点である．α を求めよ．

(1)



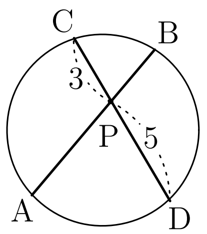
(2)



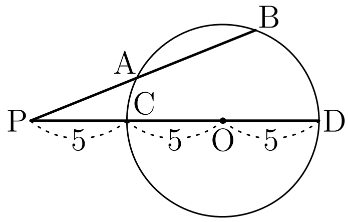
【答】 (1) 60°　(2) 78°

練習 3.19 次の図において，PA·PB を求めよ．

(1)

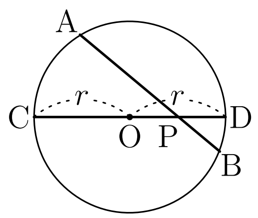


(2)



【答】 (1) 15　(2) 75

練習 3.20 右の図において，円 O の半径を r とするとき，$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = r^2 - \mathrm{PO}^2$ であることを示せ．

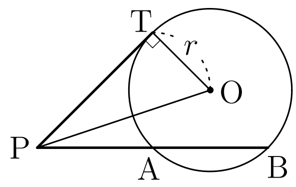


[証明] 方べきの定理により

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} &= \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD} \\
&= (\mathrm{CO}+\mathrm{OP})(\mathrm{OD}-\mathrm{OP}) \\
&= (r+\mathrm{PO})(r-\mathrm{PO})
\end{aligned}
$$

よって　　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = r^2 - \mathrm{PO}^2$　　**[証終]**

練習 3.21 右の図のように，円 O の外部の点 P を通る直線が円 O と 2 点 A，B で交わるとする．P から円 O に接線を引き，その接点を T とすると，$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$ が成り立つことを証明せよ．



[証明] 方べきの定理から

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PO}^2-r^2$$

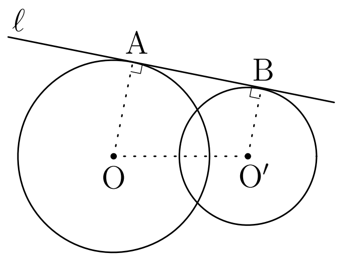
一方，$\triangle\mathrm{POT}$ は直角三角形であるから，三平方の定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{PT}^2&=\mathrm{PO}^2-\mathrm{OT}^2\\&=\mathrm{PO}^2-r^2\end{aligned}$$

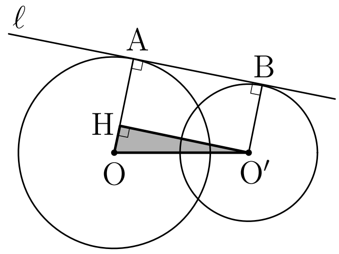
したがって，上の 2 式から　　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$ **[証終]**

3.2.3　2 つの円

練習 3.22 右の図において，直線 ℓ は 2 つの円 O，O′ の共通接線で，A，B は接点である．円 O，O′ の半径を，それぞれ 4，3 とし，O，O′ 間の距離を 5 とするとき，線分 AB の長さを求めよ．



【解】 図のように，O′ から線分 OA に垂線 O′H を下ろすと



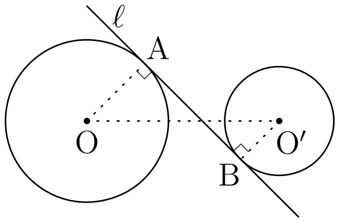
$$\mathrm{OH}=\mathrm{OA}-\mathrm{O'B}=4-3=1$$

$\triangle\mathrm{OO'H}$ は直角三角形であるから

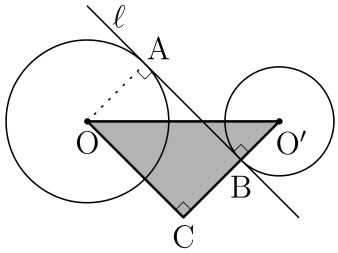
$$\mathrm{O'H}^2=\mathrm{OO'}^2-\mathrm{OH}^2$$

よって　　$\mathrm{AB}=\mathrm{O'H}=\sqrt{5^2-1^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

練習 3.23 右の図において，直線 ℓ は 2 つの円 O，O$'$ の共通接線で，A，B は接点である．円 O の半径を r，円 O$'$ の半径を r' とし，O，O$'$ 間の距離を d とするとき，線分 AB の長さを求めよ．



【解】 点 O を通って直線 ℓ に平行な直線と直線 O$'$B の交点を C とすると



$$\mathrm{AB} = \mathrm{OC}$$

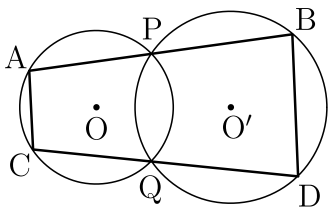
$\triangle \mathrm{OCO'}$ は直角三角形であるから

$$\begin{aligned} \mathrm{OC}^2 &= \mathrm{OO'}^2 - \mathrm{O'C}^2 \\ &= d^2 - (r + r')^2 \end{aligned}$$

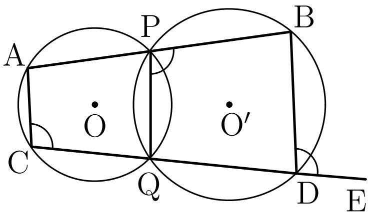
よって　$\mathrm{AB} = \mathrm{OC} = \sqrt{d^2 - (r + r')^2}$

3.2.4　補充問題

3 右の図のように，交わる 2 つの円 O，O$'$ の交点を P，Q とする．P を通る直線が，円 O，O$'$ と交わる点を，それぞれ A，B とし，Q を通る直線が円 O，O$'$ と交わる点を，それぞれ C，D とするとき，AC // BD であることを証明せよ．



[証明] 四角形 ACQP は円に内接するから



$$\angle \mathrm{ACQ} = \angle \mathrm{BPQ}$$

辺 CD の D を越える延長上に点 E をとると，四角形 PQDB も円に内接するから，

$$\angle \mathrm{BPQ} = \angle \mathrm{BDE}$$

よって　$\angle \mathrm{ACQ} = \angle \mathrm{BDE}$

同位角が等しいから　AC//BD　**[証終]**

4 2つの線分ABとCD，またはABの延長とCDの延長が点Pで交わるとき，$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つならば，4点A，B，C，Dは1つの円周上にある．このことを証明せよ．

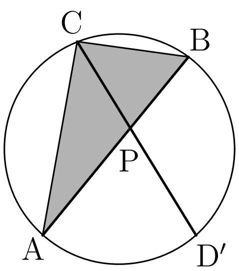
[証明] △ABCの外接円と直線PCとの交点をD′とすると，方べきの定理により

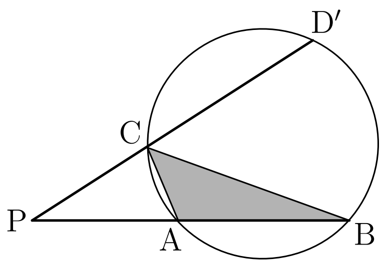
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD' \qquad \cdots ①$$

また，仮定より

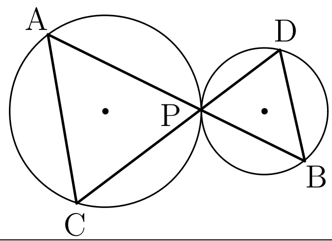
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \qquad \cdots ②$$

①，② から　　$PC \cdot PD' = PC \cdot PD$
よって，$PD' = PD$ となり，D′ とDは一致する．
したがって，4点A，B，C，Dは1つの円周上にある．　**[証終]**





5 点Pで外接する2つの円がある．Pを通る2本の直線が，右の図のように，2つの円とそれぞれA，BおよびC，Dで交わるとき，AC // DBであることを証明せよ．▶ 2つの円の共通接線を引く．



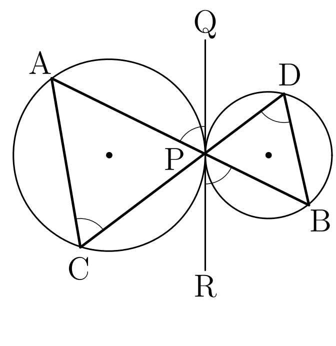
[証明] 点Pにおける共通接線QRを引く．
接線と弦の作る角により

$$\angle QPA = \angle ACP, \quad \angle RPB = \angle BDP$$

また，2直線AB，QRの対頂角により

$$\angle QPA = \angle RPB$$

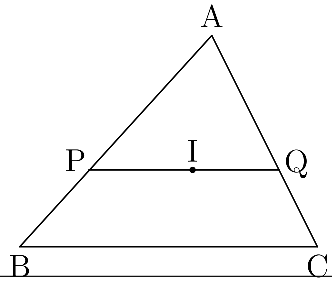
であるから，$\angle ACP = \angle BDP$ である．
錯角が等しいので，AC // DB　　**[証終]**



3.3　章末問題

3.3.1　章末問題 A

1 $\triangle$ABC の内心 I を通り，辺 BC に平行な直線と辺 AB，AC の交点を，それぞれ P，Q とするとき，PQ $=$ PB $+$ QC であることを証明せよ．



[証明] 点 I は $\triangle$ABC の内心であるから

$$\angle \mathrm{PBI} = \angle \mathrm{CBI} \quad \cdots ①$$

また，PQ//BC より

$$\angle \mathrm{PIB} = \angle \mathrm{CBI} \quad \cdots ②$$

①，② から　$\angle \mathrm{PBI} = \angle \mathrm{PIB}$

よって，$\triangle$PBI は二等辺三角形であり

$$\mathrm{PB} = \mathrm{PI}$$

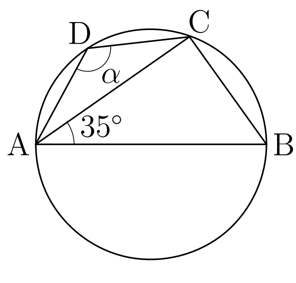
同様にして，QC $=$ QI であるから

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{PI} + \mathrm{IQ} = \mathrm{PB} + \mathrm{QC}$$

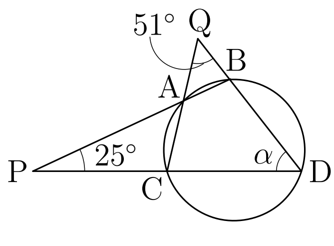
[証終]

2 右の図において，α を求めよ．ただし，(1) で線分 AB は円の直径とする．

(1)



(2)

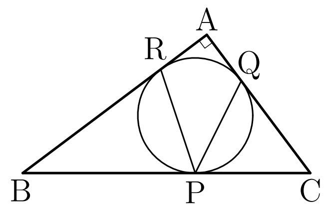


【答】 (1) $\alpha = 125^\circ$　(2) $\alpha = 52^\circ$

3 右の図で，P，Q，R は△ABC の内接円と辺との接点である．$\angle A = 90^\circ$，$BP = 6$，$PC = 4$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) $\angle RPQ$ の大きさを求めよ．

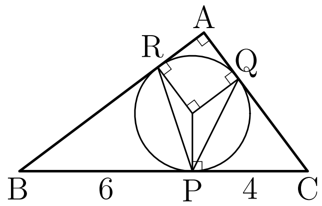
(2) 内接円の半径を求めよ．



【解】 (1) $\angle RPQ = 45^\circ$

(2) 内接円の半径を r とすると

$$AR = AQ = r$$



$AB = AR + RB = r + BP = r + 6$
$AC = AQ + QC = r + PC = r + 4$

直角三角形 ABC において，三平方の定理により

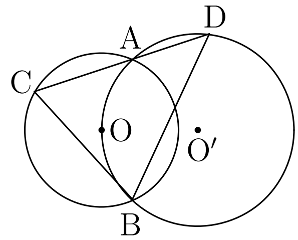
$$(6+4)^2 = (r+4)^2 + (r+6)^2$$

整理すると　$r^2 + 10r - 24 = 0$

すなわち　$(r+12)(r-2) = 0$

$r > 0$ であるから　$r = 2$

4 右の図のように，点 A，B で交わる 2 つの円 O，O′ があり，円 O′ は円 O の中心を通る．A を通る直線と円 O，O′ との交点を，それぞれ C，D とするとき，△DCB は二等辺三角形であることを証明せよ．



[証明] $\angle ACB = \alpha$ とすると，円 O において，円周角と中心角の関係により

$$\angle AOB = 2\alpha$$

また，四角形 AOBD は円に内接するから

$$\angle ADB = 180^\circ - 2\alpha$$

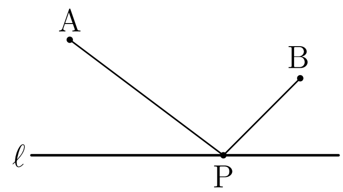
$\angle DCB = \alpha$，$\angle CDB = 180^\circ - 2\alpha$ より，△DCB において

$$\angle CBD = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = \alpha$$

よって，$\angle DCB = \angle CBD$ であるから，△DCB は二等辺三角形である．**[証終]**

3.3.2　章末問題 B

5 2点A，Bは直線ℓについて同じ側にある．ℓ上に点Pをとり，A，Bからの距離の和AP+PBを最小とするには，点Pの位置はどこにとればよいか．

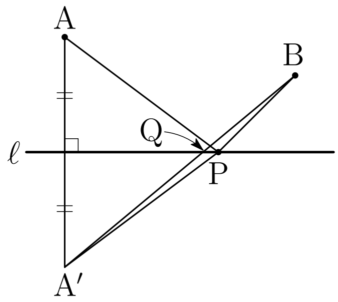


【解】 直線ℓについて，Aと対称な点A$'$をとると

$$\mathrm{AP} = \mathrm{A'P}$$

よって

$$\mathrm{AP} + \mathrm{PB} = \mathrm{A'P} + \mathrm{PB}$$



線分A$'$Bとℓの交点をQとすると，
PとQが異なるときは，△A$'$PBの辺の長さの関係から

$$\mathrm{A'P} + \mathrm{PB} > \mathrm{A'B}$$

また，PとQが一致するときは，次が成り立つ．

$$\mathrm{A'P} + \mathrm{PB} = \mathrm{A'B}$$

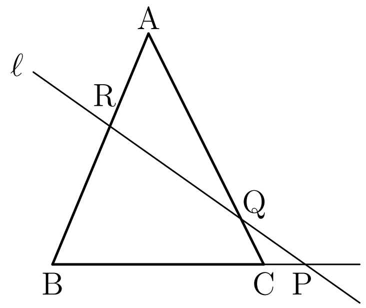
したがって，AP+PBの長さを最小にするには，直線A$'$Bとℓの交点をPにとればよい．

6 次の定理を証明せよ．(1) をメネラウスの定理，(2) をチェバの定理という．

(1) △ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長が，頂点を通らない直線 ℓ と，それぞれ P，Q，R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

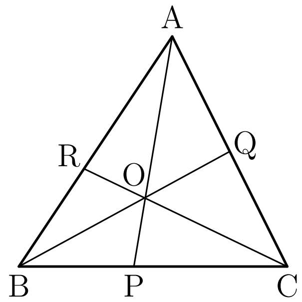
が成り立つ．



(2) △ABC の内部に O がある．頂点 A，B，C と O を結ぶ直線が向かい合う辺と，それぞれ P，Q，R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つ．

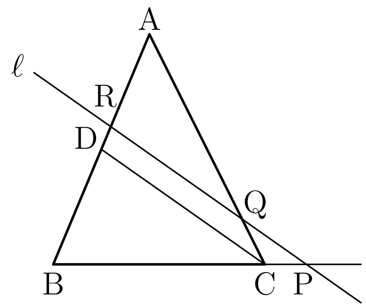


証明 (1) △ABC の頂点 C を通り，直線 ℓ に平行な直線を引き，直線 AB との交点を D とする．平行線と線分の比の関係から

$$\frac{BP}{PC}=\frac{BR}{RD},\quad \frac{CQ}{QA}=\frac{DR}{RA}$$

よって

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BR}{RD}\cdot\frac{DR}{RA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

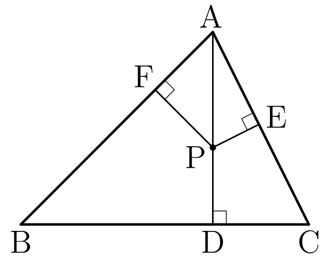


(2) △ABP と直線 CR にメネラウスの定理を用いると $\dfrac{BC}{CP}\cdot\dfrac{PO}{OA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$

△APC と直線 BQ にメネラウスの定理を用いると $\dfrac{PB}{BC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AO}{OP}=1$

2 つの等式の各辺の積を考えて $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$ **[証終]**

7 △ABC の頂点 A から底辺 BC に垂線 AD を下ろす．線分 AD 上に点 P をとり，P から辺 CA，AB に，それぞれ垂線 PE，PF を下ろすとき，四角形 BCEF は円に内接することを証明せよ．



[証明] 四角形 AFPE において，

$$\angle \mathrm{AFP} + \angle \mathrm{AEP} = 180^\circ$$

であるから，この四角形は円に内接する．

よって　$\angle \mathrm{APF} = \angle \mathrm{AEF}$　$\cdots$ ①

また，四角形 FBDP において，

$$\angle \mathrm{PFB} + \angle \mathrm{BDP} = 180^\circ$$

であるから，この四角形は円に内接する．

よって　$\angle \mathrm{APF} = \angle \mathrm{FBD}$　$\cdots$ ②

①，② より，四角形 BCEF において

$$\angle \mathrm{FBC} = \angle \mathrm{AEF}$$

したがって，四角形 BCEF は円に内接する．

[証終]