高校生の

新 編 数 学 III

書込みノート

平成 21 年 3 月 21 日

Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

目 次

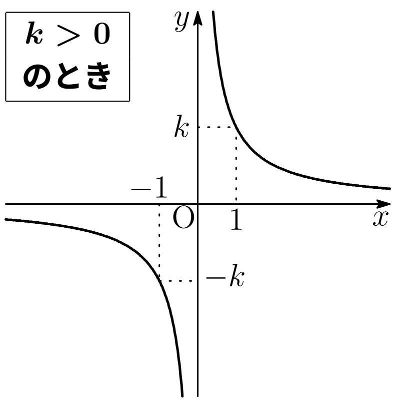
第 1 章　関数

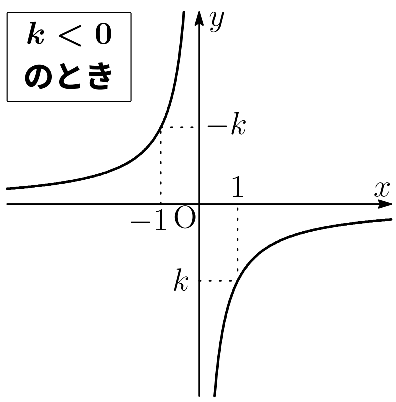
1.1.1　分数関数

A》分数関数とそのグラフ

x の分数式で表される関数を，x の**分数関数**という．分数関数の定義域は，分母を 0 とする x の値を除く実数 x 全体の集合である．

k を 0 でない定数とする．関数 $y = \dfrac{k}{x}$ の定義域は $x \neq 0$，値域は $y \neq 0$ で，そのグラフは下の図のようになる．x 軸と y 軸が漸近線である．

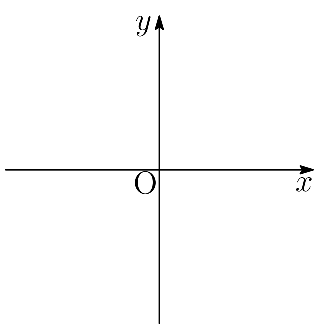


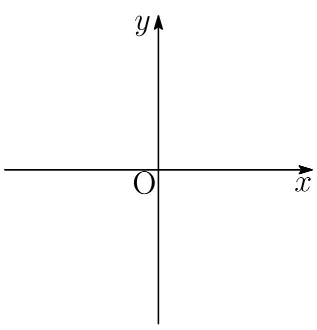


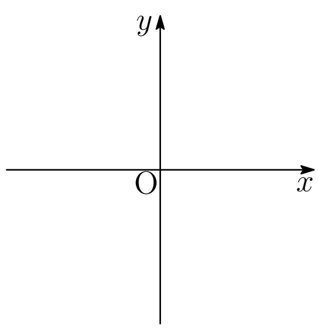
補足　上のグラフは，**直角双曲線**と呼ばれる曲線で，直角に交わる 2 本の漸近線の交点，すなわち原点に関して対称である．

練習 1.1　次の関数のグラフをかけ．

(1)　$y = \dfrac{1}{x}$　　(2)　$y = \dfrac{2}{x}$　　(3)　$y = -\dfrac{3}{x}$







2次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである．

分数関数 $y = \dfrac{k}{x-p} + q$ については，次のことがいえる．

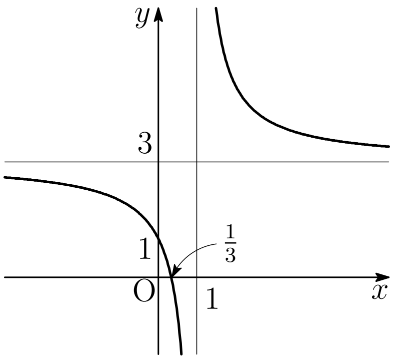
1 グラフは，$y = \dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線で，漸近線は2直線 $x = p$，$y = q$ である．

2 定義域は $x \neq p$，値域は $y \neq q$ である．

一般に，関数 $y = f(x-p) + q$ のグラフは，関数 $y = f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである．

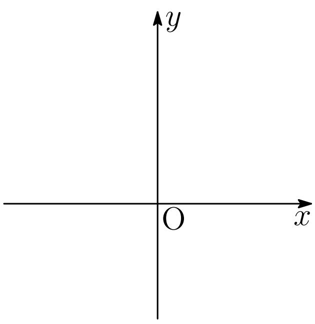
例 1.1 関数 $\boldsymbol{y = \dfrac{2}{x-1} + 3}$

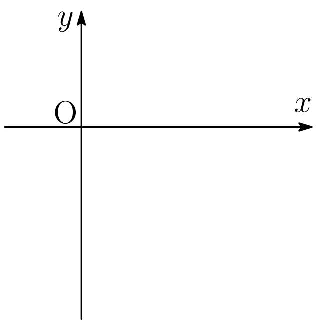
このグラフは，$y = \frac{2}{x}$ のグラフを，x 軸方向に1，y 軸方向に3だけ平行移動したもので，右の図のようになる．漸近線は，2直線 $x = 1$，$y = 3$ である．定義域は $x \neq 1$，値域は $y \neq 3$ である．

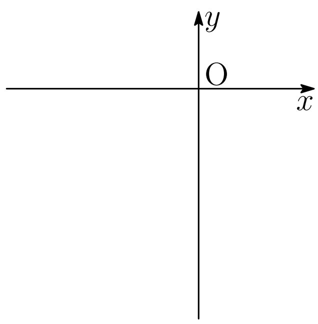


練習 1.2 次の関数のグラフをかけ．また，その定義域，値域を求めよ．

(1)　$y = -\dfrac{2}{x} + 1$　　(2)　$y = \dfrac{1}{x-2} - 1$　　(3)　$y = \dfrac{2}{x+1} - 3$







例題 1.1 関数 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$ のグラフをかけ．また，その定義域，値域を求めよ．

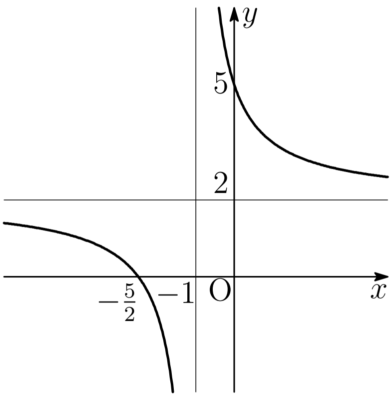
解答 $\dfrac{2x+5}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+3}{x+1}$ であるから

$$y=\frac{3}{x+1}+2$$

よって，グラフは右の図である．
漸近線は，次の 2 直線である．

$$x=-1,\ y=2$$

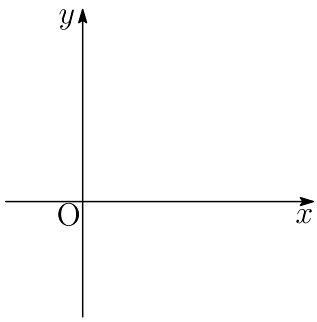
定義域は $x \neq -1$，値域は $y \neq 2$ である．



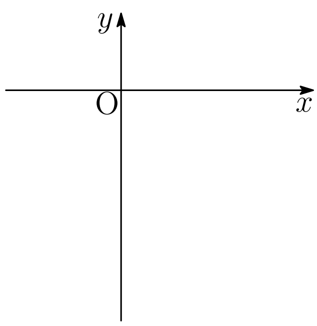
一般に，分数式 $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ は，$\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形できる．

練習 1.3 次の関数のグラフをかけ．また，その定義域，値域を求めよ．

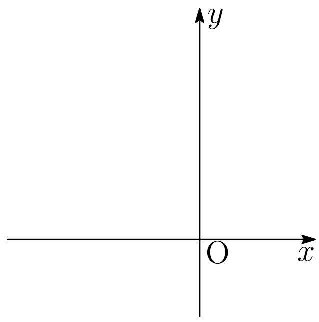
(1) $y=\dfrac{x-1}{x-2}$



(2) $y=\dfrac{-2x+5}{x-1}$



(3) $y=\dfrac{3x+1}{x+1}$



B 》分数関数の応用

応用例題 1.1 関数 $y=\dfrac{2}{x-1}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の座標を求めよ.

考え方》 方程式 $\dfrac{2}{x-1}=x$ の解が共有点の x 座標である.

解答 $\dfrac{2}{x-1}=x$ より　　$2=x(x-1)$

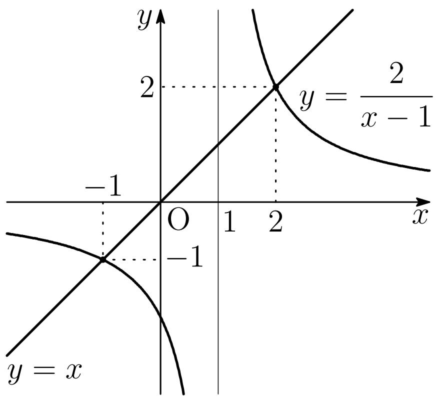
すなわち　　$x^2-x-2=0$

これを解いて　　$x=-1,\ 2$

これが共有点の x 座標である.

$y=x$ であるから, 求める共有点の座標は

$$(-1,\ -1),\ \ (2,\ 2)$$



練習 1.4 関数 $y=\dfrac{3}{x+1}$ のグラフと次の直線の共有点の座標を求めよ.

(1) $y=x-1$

(2) $y = \dfrac{1}{2}x$

(3) $y = -3$

応用例題 1.1 の結果とグラフから，不等式

$$\frac{2}{x-1} > x$$

の解は $x < -1$，$1 < x < 2$ である．

$\longleftarrow$ $y = \dfrac{2}{x-1}$ のグラフが直線 $y = x$ より上側にある x の値の範囲．

練習 1.5 次の不等式を解け.

(1) $\dfrac{2}{x-1} < x$

(2) $\dfrac{2}{x+2} \geqq x+3$

(3) $\dfrac{1}{x-1} \leqq 1$

1.1.2　無理関数

A 》無理関数とそのグラフ

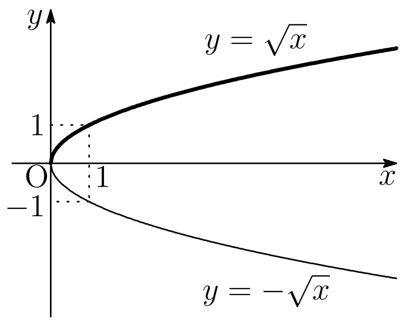
根号 $\sqrt{}$ の中に文字 x を含む式で表された関数を，x の**無理関数**という[1]．その定義域は，根号の中が 0 以上となる実数 x の値全体の集合である．

無理関数　　$y=\sqrt{x}$　　$\cdots$ ①

の定義域は $x \geqq 0$，値域は $y \geqq 0$ である．

① の両辺を 2 乗すると　　$y^2=x$　　$\cdots$ ②

② は軸が x 軸，頂点が原点である放物線を表すから，① のグラフは，放物線 ② の $y \geqq 0$ の部分，すなわち x 軸より上側の部分である．ただし，原点を含む．



同様に，無理関数

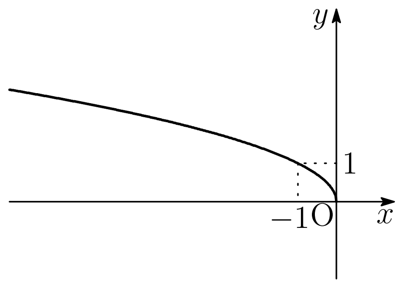
$$y=-\sqrt{x} \qquad \cdots ③$$

のグラフは，放物線 ② の $y \leqq 0$ の部分，すなわち x 軸より下側の部分である．ただし，原点を含む．③ の定義域は $x \geqq 0$，値域は $y \leqq 0$ である．③ と ① のグラフは，x 軸に関して対称である．

無理関数　　$y=\sqrt{-x}$　　$\cdots$ ④

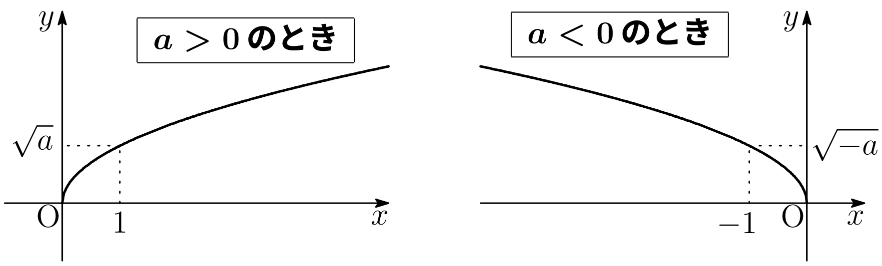
のグラフは，右の図のようになる．

これは，放物線 $y^2=-x$ の $y \geqq 0$ の部分，すなわち x 軸より上側の部分である．ただし，原点を含む．



④ の定義域は $x \leqq 0$，値域は $y \geqq 0$ である．　　← 定義域は $-x \geqq 0$ より $x \leqq 0$

一般に，関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフと特徴は，次のようになる．



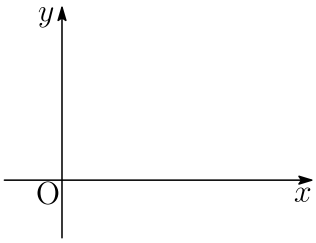
$a>0$ のとき，定義域は $x \geqq 0$，値域は $y \geqq 0$ で，増加関数である．

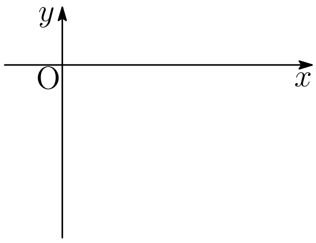
$a<0$ のとき，定義域は $x \leqq 0$，値域は $y \geqq 0$ で，減少関数である．

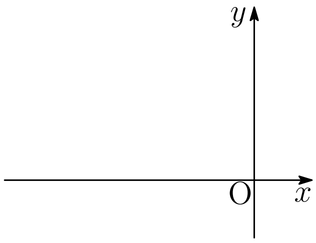
[1] 根号の中に文字を含む式を**無理式**という．これに対して，多項式または分数式で表される式を**有理式**という．

練習 1.6 次の関数のグラフをかけ．また，その定義域と値域を求めよ．

(1)　$y = \sqrt{2x}$　　　　(2)　$y = -\sqrt{2x}$　　　　(3)　$y = \sqrt{-2x}$

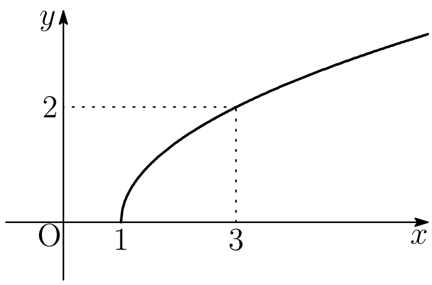






例題 1.2 関数 $y = \sqrt{2x-2}$ のグラフをかけ．また，その定義域と値域を求めよ．

解答 変形すると　　$y = \sqrt{2(x-1)}$
このグラフは，$y = \sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，右の図のようになる．
定義域は $x \geqq 1$，値域は $y \geqq 0$ である．

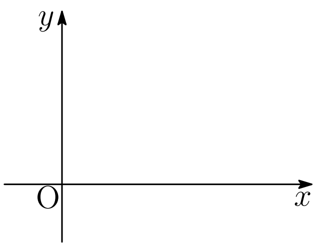


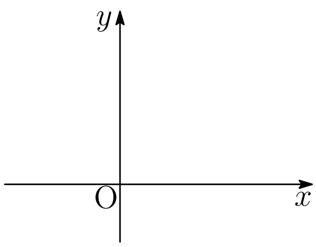
無理関数 $y = \sqrt{a(x-p)}$ について，次のことがいえる．

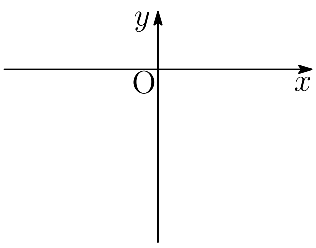
1 グラフは，$y = \sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動した曲線である．
2 定義域は $a(x-p) \geqq 0$ を満たす実数 x の値全体，値域は $y \geqq 0$

練習 1.7 次の関数のグラフをかけ．また，その定義域，値域を求めよ．

(1)　$y = \sqrt{x-1}$　　　　(2)　$y = \sqrt{-2x+4}$　　　　(3)　$y = -\sqrt{3x+3}$







B ≫ 無理関数の応用

応用例題 1.2 関数 $y=\sqrt{x+2}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の座標を求めよ．

考え方 ≫ $\sqrt{x+2}=x$ の両辺を 2 乗した方程式の解は，もとの方程式の解とは限らない．得られた x の値がもとの方程式を満たすかどうかを調べて，解を決定する．

解答　$\sqrt{x+2}=x \quad \cdots ①$

の両辺を 2 乗して整理すると

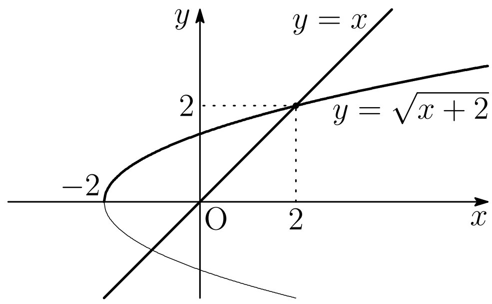
$$x^2-x-2=0$$

これを解いて　$x=-1,\ 2$

このうち，① を満たすのは $x=2$ で，

このとき ① の両辺の値は 2 である．

よって，共有点の座標は　$(2,\ 2)$



補足 $x=-1$ の方は，関数 $y=-\sqrt{x+2}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の x 座標で，方程式 $-\sqrt{x+2}=x$ の解である．

練習 1.8 次の 2 つの関数について，グラフの共有点の座標を求めよ．

(1) $y=\sqrt{2x+2}$，$y=x-3$

(2) $y=-\sqrt{x+1}$，$y=x-1$

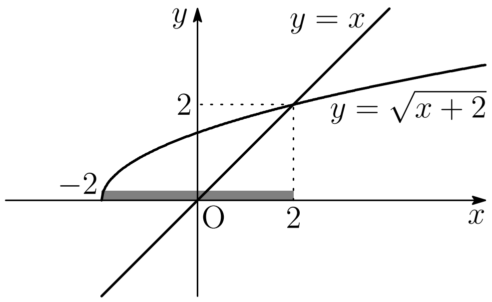
不等式

$$\sqrt{x+2} > x$$

の解は，$y = \sqrt{x+2}$ のグラフが直線 $y = x$ より上側にある x の値の範囲である．

右の図から，不等式 $\sqrt{x+2} > x$ の解は

$$-2 \leqq x < 2$$



練習 1.9 次の不等式を解け．

(1) $\sqrt{x+2} \leqq x$

(2) $-\sqrt{x+2} > x$

1.1.3　逆関数と合成関数

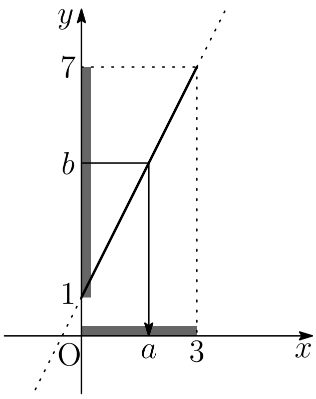
A ≫ 逆関数

2 つの変数 x，y について，x の値を定めると，それに対応して y の値がただ 1 つ定まるとき，y は x の関数である．ここでは，逆に，関数 $y=f(x)$ について，y の値に対応する x の値を考えてみよう．

$$f(x)=2x+1 \quad (0 \leqq x \leqq 3) \qquad \cdots ①$$

とする．この関数の定義域は $0 \leqq x \leqq 3$，値域は $1 \leqq y \leqq 7$ である．

$f(x)$ は増加関数であるから，$1 \leqq b \leqq 7$ である値 b に対して，$b=f(a)$ となる a の値がただ 1 つ定まる．$b=2a+1$ から，この a は



$$a=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}$$

と表される．

以上から，b に a を対応させる関数は，次のようになる．

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \quad (1 \leqq x \leqq 7)$$

一般に，関数 $y=f(x)$ が，増加関数または減少関数のとき，値域の中の y の値を定めると，それに対応して x の値がただ 1 つ定まる．すなわち，x は y の関数である．この関数を $x=g(y)$ で表す．このとき，変数 y を x に書き直した関数 $g(x)$ を，もとの関数 $f(x)$ の**逆関数**といい，$\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ で表す．

① の関数 $f(x)$ の逆関数は，次のようになる．

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \quad (1 \leqq x \leqq 7)$$

関数とその逆関数では，定義域と値域が入れ替わる．

逆関数を求めるための一般的な手順は，次のようになる．

$f(x)$ の逆関数 $g(x)$ の求め方

1　$y=f(x)$ を x について解き，$x=g(y)$ の形にする．

2　x と y を入れ替えて，$y=g(x)$ とする．
逆関数 $g(x)$ の定義域は，もとの関数 $f(x)$ の値域と同じにとる．

例 1.2 関数 $y=\sqrt{x}$ の逆関数

この関数の値域は，$y \geqq 0$ である．

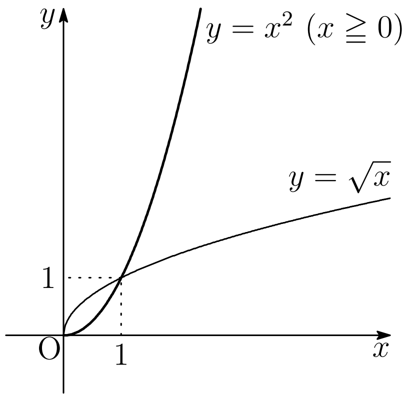
$y=\sqrt{x}$ を x について解くと

$$x=y^2 \quad (y \geqq 0)$$

x と y を入れ替えて

$$y=x^2 \quad (x \geqq 0)$$

これが，$y=\sqrt{x}$ の逆関数である．



練習 1.10 次の関数の逆関数を求めよ．

(1) $y=2x-1 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$

(2) $y=-\sqrt{x}$

例 1.3　指数関数 $y=2^x$ の逆関数

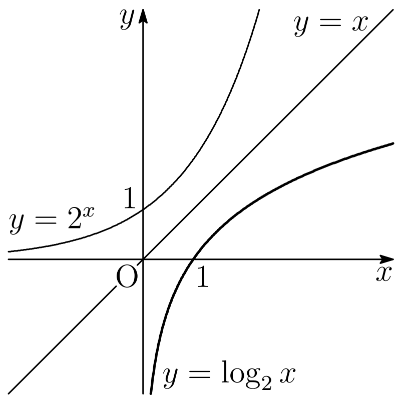
$y=2^x$ を x について解くと

$$x=\log_2 y \quad (y>0)$$

x と y を入れ替えて

$$y=\log_2 x \quad (x>0)$$

これが指数関数 $y=2^x$ の逆関数である．



注意　関数 $y=\log_2 x$ $(x>0)$ では，定義域の表示を省略して $y=\log_2 x$ としてよい．

練習 1.11　次の関数の逆関数を求めよ．

(1)　$y=3^x$

(2)　$y=\log_4 x$

例題 1.3 関数 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ の逆関数を求めよ．

解答 $\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}+1$ であるから，関数 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ の値域は

$y \neq 1$ である．

$y(x-2)=x+1$ より $\qquad (y-1)x=2y+1$

ここで，$y \neq 1$ であるから $\qquad x=\dfrac{2y+1}{y-1}$

よって，求める逆関数は $\qquad y=\dfrac{2x+1}{x-1}$

練習 1.12 次の関数の逆関数を求めよ．

(1) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$

(2) $y=\dfrac{-x+2}{x+3}$

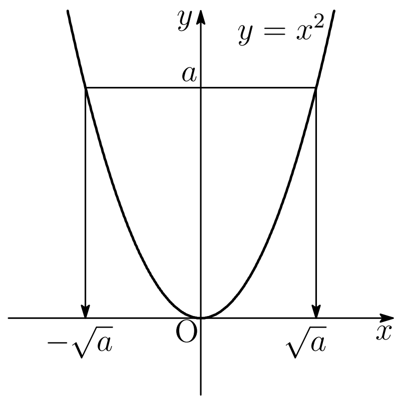
関数が逆関数をもたない場合もある．

例 1.4 関数 $y = x^2$ の逆関数

$y = x^2$ を x について解くと

$$x = \pm\sqrt{y}$$

この場合，y の値を 1 つ決めても x の値はただ 1 つには定まらない．すなわち，x は y の関数ではない．したがって，関数 $y = x^2$ は逆関数をもたない．



注意 定義域を制限した関数 $y = x^2$ $(x \geqq 0)$ は逆関数をもつ．その逆関数は $y = \sqrt{x}$ である．

練習 1.13 次の関数の逆関数を求めよ．

(1) $y = x^2 + 2 \quad (x \geqq 0)$

(2) $y = -x^2 \quad (x \leqq 0)$

B》逆関数の性質

逆関数の定義から，次のことが成り立つ．

> **関数 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとき**
> $$\boldsymbol{b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)}$$

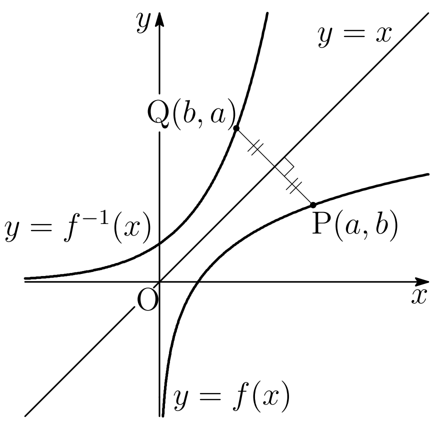
例 1.5 関数 $f(x)$ が逆関数をもち，$f^{-1}(2) = 4$ のとき
$$f(4) = 2$$
が成り立つ．

練習 1.14 $a \neq 0$ とする．関数 $f(x) = ax+b$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f(2) = 4$，$f^{-1}(1) = -4$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

例 1.2 や例 1.3 の図からもわかるように，一般に次のことが成り立つ．

> **関数 $y = f(x)$ のグラフとその逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $y = x$ について対称である．**

証明 $$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$
が成り立つから，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が関数 $y = f(x)$ のグラフ上にあることと，点 $\mathrm{Q}(b,\ a)$ が関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフ上にあることとは同値である．
また，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と点 $\mathrm{Q}(b,\ a)$ は，直線 $y = x$ に関して対称である．
よって，関数 $y = f(x)$ のグラフとその逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $y = x$ について対称である． **証終**



練習 1.15 次の関数およびその逆関数のグラフを同じ図中にかけ.

(1) $y = \sqrt{-x}$

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

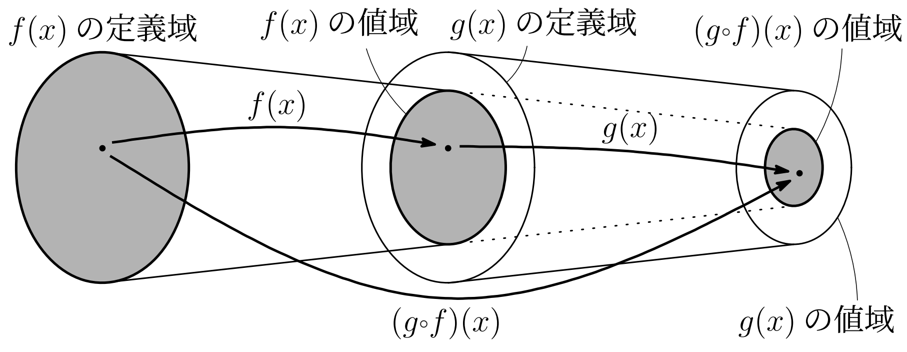
C 》合成関数

2 つの関数 $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^2$ について, $g(f(x))$ を

$$g(f(x)) = g(x-1) = (x-1)^2$$

のように考えると, $g(f(x))$ は x に $(x-1)^2$ を対応させる関数といえる.

一般に, 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について, $f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれているとき, 新しい関数 $g(f(x))$ が考えられる. この関数を, $f(x)$ と $g(x)$ の**合成関数**という. $g(f(x))$ を $\boldsymbol{(g \circ f)(x)}$ とも書く.



なお, 2 つの関数 $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^2$ について, $(f \circ g)(x)$ は次のようになる.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 - 1$$

となる.

注意 一般に, $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ は同じ関数ではない.

例題 1.4 $f(x)=x+1$，$g(x)=2^x$ について，次の合成関数を求めよ．

(1) $(g\circ f)(x)$ (2) $(f\circ g)(x)$

解答 (1) $f(x)$ の値域は実数全体で，$g(x)$ の定義域と同じである．

よって $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=2^{x+1}$

(2) $g(x)$ の値域は正の数全体で，$f(x)$ の定義域に含まれる．

よって $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2^x)=2^x+1$

練習 1.16 $f(x)=x^2$，$g(x)=\log_2(x+1)$ について，次の合成関数を求めよ．

(1) $(g\circ f)(x)$

(2) $(f\circ g)(x)$

1.1.4 補充問題

1 関数 $y=\dfrac{4x+3}{2x+1}$ のグラフをかけ．また，定義域，値域を求めよ．

2 次の関数のグラフ上に点 $(2, -a)$ があるように，定数 a の値を定めよ．

(1) $y = \dfrac{3x - a}{x - a}$　　(2) $y = \sqrt{3x - a}$

3 次の方程式，不等式を解け．

(1) $\dfrac{2x - 4}{x - 1} = x - 2$　　(2) $\dfrac{2x - 4}{x - 1} < x - 2$

(3) $\sqrt{x - 1} = 7 - x$　　(4) $\sqrt{x - 1} \leqq 7 - x$

4 次の関数を，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ の合成関数として表したい．各場合に $f(x)$ と $g(x)$ を定め，$y=f(g(x))$，$y=g(f(x))$ のいずれであるかを示せ．ただし，$f(x)$ を三角関数とせよ．

(1) $y=\sin 2x$　　(2) $y=2\cos x$　　(3) $y=\tan^2 x$

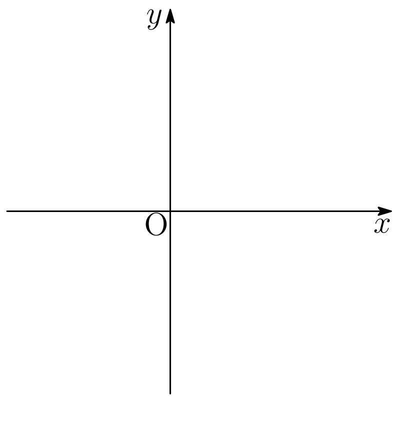
1.2　章末問題

1.2.1　章末問題 A

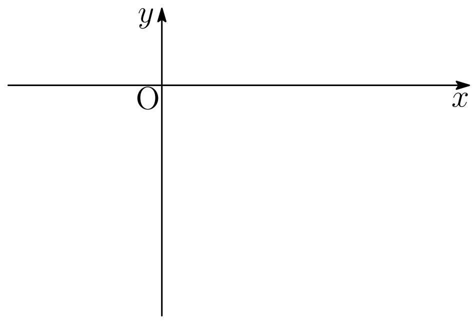
1 関数 $y=\dfrac{3x+4}{x+2}$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{x}{x+2}$ のグラフを，どのように平行移動したものか.

2 次の関数のグラフをかけ．また，その値域を求めよ.

(1) $y=\dfrac{3+x}{3-x}\quad (0\leqq x\leqq 2)$



(2) $y=-\sqrt{2x+6}\quad(-1\leqq x\leqq 5)$



3 $k\neq 0$ とする．関数 $f(x)=kx+k^2$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f(1)=6$, $f^{-1}(2)=-1$ であるとき，定数 k の値を求めよ．

1.2.2　章末問題 B

4 次の不等式を解け.

(1) $\sqrt{3x-5}=x-1$　　(2) $\sqrt{3x-5}<x-1$

(3) $\sqrt{1-2x}=-x+1$　　(4) $\sqrt{1-2x}\geqq -x+1$

5 関数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-a}$ について，$f^{-1}(x)=f(x)$ が成り立つように，定数 a の値を定めよ．

6 2つの関数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$g(x)=\dfrac{x}{x-1}$ について，次の合成関数を求めよ．

(1) $f(g(x))$

(2) $g(g(x))$

ヒント

1 漸近線の位置関係を利用する．

3 $f^{-1}(a)=b \quad \Longleftrightarrow \quad a=f(b)$

5 $y=\dfrac{x+1}{x-a}$ として逆関数を求め，恒等式の性質から a の値を定める．

第 2 章　極限

2.1　数列の極限

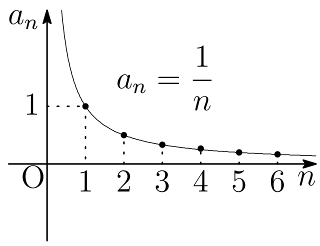
2.1.1　数列の極限

A 》 数列と極限

数を一列に並べたものを数列といい，数列における各数を項という．数列の項は，最初の項を初項，n 番目の項を第 n 項という．

数列 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$ を記号で $\{a_n\}$ と書くこともある．a_1 が初項，a_n が第 n 項である．以下では，項が限りなく続く**無限数列**を考える．

たとえば，無限数列　　$1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots$　　①



においては，n を限りなく大きくすると，第 n 項は 0 に限りなく近づく．

このように，無限数列において，n を限りなく大きくするに従って第 n 項がどのようになっていくかを調べることにしよう．

一般に，数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくするとき，a_n がある値 α に限りなく近づくならば，$\{a_n\}$ は α に**収束**する，または $\{a_n\}$ の**極限**は α であるという．また，値 α を $\{a_n\}$ の**極限値**という．

このことを，記号では次のように書き表す[1]．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad n \longrightarrow \infty \text{ のとき} \quad a_n \longrightarrow \alpha$$

たとえば，数列 ① では，次のようになる．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{または} \quad n \longrightarrow \infty \text{ のとき} \quad \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

[1] 記号 ∞ は「無限大」と読む．∞ は，値すなわち数を表すものではない．

例 2.1　(1)　数列 1.1，1.01，1.001，$\cdots$，$1+(0.1)^n$，$\cdots$
は，1に収束する．　$\longleftarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty}\{1+(0.1)^n\}=1$
すなわち，この数列の極限値は1である．

(2)　数列 -0.1，0.01，-0.001，$\cdots$，$(-0.1)^n$，$\cdots$
では，各項の符号は負，正，負，$\cdots$ と交互に変わりながら数列は0に収束する．　$\longleftarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty}\{(-0.1)^n\}=0$
すなわち，この数列の極限値は0である．

1つの数 c が無限に続く数列 c，c，c，$\cdots$，c，$\cdots$ は c に収束し，その極限値は c である．すなわち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c = c$ である．

練習 2.1 次の数列の極限値をいえ．

(1) $\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，$\cdots$，$\dfrac{n+1}{n}$，$\cdots$

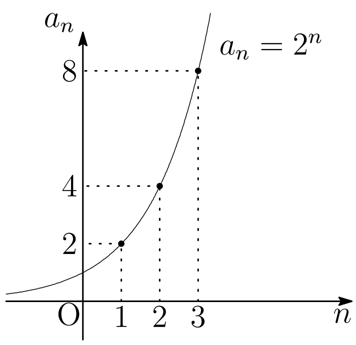
(2) -1，$\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{3}$，$\cdots$，$\dfrac{(-1)^n}{n}$，$\cdots$

(3) $\cos\pi$，$\cos 3\pi$，$\cos 5\pi$，$\cdots$，$\cos(2n-1)\pi$，$\cdots$

B》収束しない数列

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，$\{a_n\}$ は**発散**するという．発散する数列には次のように3つの場合がある．

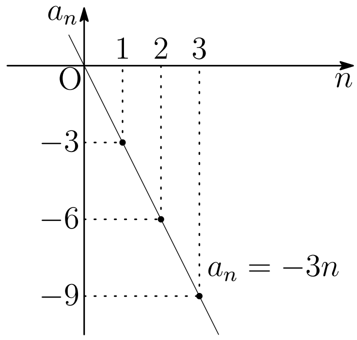
［1］　数列 2，4，8，$\cdots$，2^n，$\cdots$
では，n を限りなく大きくすると，2^n の値は，限りなく大きくなる．



［1］のような場合，数列 $\{a_n\}$ は**正の無限大に発散**する，または $\{a_n\}$ の**極限は正の無限大**であるといい，次のように書き表す．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{または} \qquad n \longrightarrow \infty \text{ のとき } \ a_n \longrightarrow \infty$$

［2］　数列 -3，-6，-9，$\cdots$，$-3n$，$\cdots$
では，n を限りなく大きくすると，$-3n$ の値は負で，絶対値は限りなく大きくなる．



［2］のような場合，数列 $\{a_n\}$ は**負の無限大に発散**する，または $\{a_n\}$ の**極限は負の無限大**であるといい，次のように書き表す．

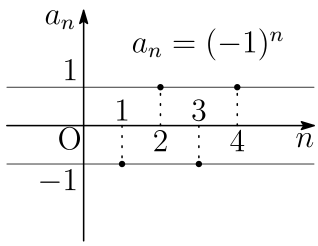
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{または} \qquad n \longrightarrow \infty \text{ のとき } a_n \longrightarrow -\infty$$

［1］,［2］の数列については，次のように書き表される．

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} (-3n) = -\infty$$

注意　数列の極限が ∞ または $-\infty$ の場合，これらを極限値とはいわない．

［3］　数列 -1，1，-1，$\cdots$，$(-1)^n$，$\cdots$
では，n を限りなく大きくすると，$(-1)^n$ の値は収束しない．また，正の無限大に発散もせず，負の無限大に発散もしない．



［3］のような場合，数列は**振動**するという．

数列 $\{a_n\}$ の収束，発散についてまとめると，次のようになる．

数列の収束・発散

収束	値 α に収束	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$	$\cdots$	極限は	α
発散 **(収束しない)**	正の無限大に発散	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$	$\cdots$	極限は	∞
	負の無限大に発散	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$\cdots$	極限は	$-\infty$
	振動		$\cdots$	極限は	ない

練習 2.2　第 n 項が次の式で表される数列について，その極限を調べよ．

(1)　$2n$　　　(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(3)　$-n^2$　　　(4)　$1+(-1)^n$

C》数列の極限の性質 (1)

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに収束するとき，次のことが成り立つ．

数列の極限の性質 (1)

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$ とする．

1 $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} k\,a_n = k\,\alpha}$　　ただし，k は定数

2 $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta}$，　$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta}$

3 $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta}$

4 $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}}$　　ただし，$\beta\neq 0$

例 2.2　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-3$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}(3a_n+b_n)=3\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=3\cdot 2+(-3)=3$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=\lim_{n\to\infty}a_n-2=2-2=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+4}{a_n-3}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n+4)}{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-3)}=\frac{-3+4}{2-3}=-1$$

練習 2.3　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-2$　のとき，次の極限値を求めよ．

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+2b_n)$　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-1)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$　　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n+5}{2a_n-1}$　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{a_n+b_n}$

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ であるとき，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$$

は明らかである．$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ と $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ はどうなるだろうか．

例 2.3 (1)
$$\lim_{n\to\infty}(n^2-3n) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\frac{3}{n}\right) = \infty$$

$\longleftarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n}\right) = 1$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}(n^2-4n^3) = \lim_{n\to\infty} n^3\left(\frac{1}{n}-4\right) = -\infty$$

$\longleftarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^3 = \infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-4\right) = -4$

(3)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$\longleftarrow$ 分母が 0 以外の値に収束するように分母と分子を n で割る．

(4)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n^2-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}} = 0$$

$\longleftarrow$ 分母と分子を n^2 で割る．

練習 2.4 次の極限を求めよ．

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^3-n^2)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-3n^2)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-n^3)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-2}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n+1}$

例題 2.1 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$

解答
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

練習 2.5 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$

D》数列の極限の性質 (2)

数列の極限について，さらに次のことが成り立つ．

数列の極限の性質 (2)

5　すべての n について $a_n \leqq b_n$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば　$\alpha \leqq \beta$

6　すべての n について $a_n \leqq b_n$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば　$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

7　すべての n について $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ならば　$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$

補足　上の **5** において，常に $a_n < b_n$ であっても，$\alpha = \beta$ の場合がある．

たとえば，$a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$，$b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ では，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ である．

また，性質 **7** を「はさみうちの原理」ということがある．

応用例題 2.1　極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{n\pi}{3}$ を求めよ．

考え方》 $-1 \leqq \sin \dfrac{n\pi}{3} \leqq 1$ であることから，上の性質 **7** を使う．

解答　$-1 \leqq \sin \dfrac{n\pi}{3} \leqq 1$ より　$-\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{n\pi}{3} \leqq \dfrac{1}{n}$

ここで，$\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3} = 0$$

練習 2.6　θ を定数とするとき，次の極限値を求めよ．

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sin n\theta$　　　(2)　$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{n\theta}{6}$

2.1.2　無限等比数列

A 》数列 $\{r^n\}$ の極限

初項に一定の数 r を次々と掛けて得られる数列を等比数列，r を公比という．初項 r，公比 r の無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限を調べてみよう．

［1］$r>1$ のとき　　$r=1+h$ とおくと　　$h>0$，$r^n=(1+h)^n$

二項定理により　　$(1+h)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n$

$$=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n$$

$h>0$ であるから　　$r^n \geqq 1+nh$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$ であるから，前ページの性質 **6** により

$$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$$

［2］$r=1$ のとき　　$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\lim\limits_{n\to\infty} 1^n=\lim\limits_{n\to\infty} 1=1$

［3］$0<r<1$ のとき　　$\dfrac{1}{r}=s$ とおくと　　$s>1$，$r^n=\dfrac{1}{s^n}$

［1］により，$\lim\limits_{n\to\infty} s^n=\infty$ であるから　　$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{s^n}=0$

［4］$r=0$ のとき　　$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\lim\limits_{n\to\infty} 0^n=\lim\limits_{n\to\infty} 0=0$

［5］$-1<r<0$ のとき　　$-r=s$ とおくと　　$0<s<1$，$|r^n|=s^n$

［3］により，$\lim\limits_{n\to\infty} s^n=0$ であるから　　$\lim\limits_{n\to\infty}|r^n|=0$

よって　　$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$

［6］$r=-1$ のとき　　数列 $\{r^n\}$ は，-1，1，-1，$\cdots$ となる．

よって，数列 $\{r^n\}$ は振動する．すなわち，極限はない．

［7］$r<-1$ のとき　　$-r=s$ とおくと　　$s>1$，$r^n=(-1)^ns^n$

［1］により，$\lim\limits_{n\to\infty}|r^n|=\lim\limits_{n\to\infty} s^n=\infty$ で，数列 $\{r^n\}$ の項の符号は交互に変わる．よって，数列 $\{r^n\}$ は振動する．すなわち，極限はない．

数列 $\{r^n\}$ の極限についてまとめると，次のようになる．

数列 $\{r^n\}$ の極限

$r>1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

$r=1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 1$

$|r|<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

$r \leqq -1$ のとき　**振動する　$\cdots$　極限はない**

例 2.4　(1)　数列 $\{(\sqrt{2}\,)^n\}$ では $\sqrt{2}>1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\,)^n=\infty$

(2)　数列 $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ では $\left|-\dfrac{1}{2}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$

(3)　数列 $\{(-2)^n\}$ では $-2<-1$ であるから，極限はない．

練習 2.7 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ．

(1)　$(\sqrt{3}\,)^n$　　(2)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

(3)　$\left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$　　(4)　$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

B 》 数列 $\{r^n\}$ の極限の応用

上で示した「数列 $\{r^n\}$ の極限」から，次のことが成り立つ．

数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は，$-1<r\leqq 1$ である．

例 2.5 数列 $\left\{\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\right\}$ が収束するための必要十分条件は

$$-1<\frac{x}{2}\leqq 1 \qquad \text{すなわち} \qquad -2<x\leqq 2$$

極限値は $-2<x<2$ のとき 0，$x=2$ のとき 1 である．

練習 2.8 数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ．また，そのときの極限値を求めよ．

例題 2.2 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{4^n-3^n}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n+2^n}$

解答 (1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{4^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}=1$$ ← 分母が 0 以外の値に収束するように分母と分子を 4^n で割る．

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\infty$$ ← 分母と分子を 3^n で割る．

練習 2.9 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n-2^n}$

応用例題 2.2 数列 $\left\{\dfrac{r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の場合について求めよ．

(1)　$|\,r\,| < 1$　　　(2)　$r < -1$

考え方》 (2) 分母が 0 以外の値に収束するように変形する．

$$\frac{r^n}{1+r^n} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n + 1}$$

解答　(1)　$|\,r\,| < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n} = \frac{0}{1+0} = 0$$

(2)　$r < -1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right| < 1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n + 1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

練習 2.10 数列 $\left\{\dfrac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ．

(1)　$r > 1$　　　(2)　$r = 1$

(3)　$|\,r\,| < 1$　　　(4)　$r < -1$

C 》漸化式で表された数列の極限

応用例題 2.3 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

考え方 》 極限値が存在するとしてその値を α とすると，$\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + 1$ が成り立つ．この値 α を利用して，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - \alpha) = 0$ を示す．

解答 与えられた漸化式を変形すると

← 漸化式と $\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + 1$ より $a_{n+1} - \alpha = \dfrac{1}{2}(a_n - \alpha)$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

よって，数列 $\{a_n - 2\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．

その初項は，$a_1 - 2 = 1 - 2 = -1$ であるから

$$a_n - 2 = (-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから　　$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - 2) = 0$

したがって　　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

補足 数列において前の項から次の項を決めるための関係式を漸化式という．

$p \neq 1$ のとき，漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ は $\alpha = p\alpha + q$ を満たす α を用いて，

$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ の形に変形できる．

練習 2.11 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ.

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

(2) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

2.1.3 無限等比級数

A 》無限等比級数の収束・発散

無限数列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$
の各項を順に＋の記号で結んだ式

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \qquad ①$$

を**無限級数**という．

この式を和の記号 $\sum$ を用いて，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{a_n}$ と書き表すこともある．

無限級数 ① において，a_1 をその**初項**，a_n を**第 $\boldsymbol{n}$ 項**という．

無限数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n で表す．

$$S_1=a_1,\quad S_2=a_1+a_2,\quad S_3=a_1+a_2+a_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

この S_n を無限級数 ① の第 n 項までの**部分和**という．

部分和 S_n を第 n 項として，新たに次の無限数列 $\{S_n\}$ を作る．

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

無限数列 $\{S_n\}$ が収束してその極限値が S のとき，すなわち

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=S$$

となるとき，無限級数 ① は S に**収束**する，または無限級数 ① の**和**は S であるという．この和 S も $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{a_n}$ で書き表すことがある．

無限級数の和

無限級数 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ の部分和 S_n から作られる無限数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき，この無限級数の和は S である．

無限数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数 ① は**発散**するという．

例題 2.3 次の無限級数は収束することを示し，その和を求めよ．

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

考え方》 各項が差の形に変形できることを利用して，無限級数の部分和を求める．

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

解答 第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

よって　$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

したがって，この無限級数は収束して，その和は 1 である．

補足 一般に，$k\neq 0$ のとき $\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}\right)$ と変形できる．

練習 2.12 次の無限級数は収束することを示し，その和を求めよ．

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}+\cdots$$

B》無限等比級数

初項が a，公比が r の無限等比数列から作られる無限級数

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

を，初項 a，公比 r の**無限等比級数**という．

無限等比級数の収束，発散について調べてみよう．

初項 a，公比 r の無限等比級数

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

の第 n 項までの部分和を S_n とする．$a=0$ のとき，無限数列 $\{S_n\}$ は0に収束する．$a \neq 0$ のときは，次のようになる．

［1］$r=1$ のとき

$$S_n=a+a+a+\cdots+a=na$$

$a \neq 0$ であるから，無限数列 $\{S_n\}$ は発散する．

［2］$r \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{a}{1-r}-\frac{a}{1-r}r^n \qquad ① \end{aligned}$$

$|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-r}$$

$r \leqq -1$ または $r>1$ のとき，数列 $\{r^n\}$ は発散するから，① により無限数列 $\{S_n\}$ も発散する．

以上から，次のことがいえる．

無限等比級数の収束，発散

無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ の収束，発散は次のようになる．

$a \neq 0$ のとき

$|r|<1$ ならば収束し，その和は $\dfrac{a}{1-r}$ である．

$|r| \geqq 1$ ならば発散する．

$a=0$ のとき　収束し，その和は0である．

例題 2.4 次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ.

(1) 初項 2，公比 $\dfrac{1}{3}$ (2) 初項 1，公比 $-\sqrt{3}$

解答 (1) 初項が 2，公比について $\left|\dfrac{1}{3}\right| < 1$ であるから収束して，

その和は $$\frac{2}{1-\dfrac{1}{3}} = 3$$

(2) 初項が 1，公比について $|-\sqrt{3}| > 1$ であるから，発散する.

練習 2.13 次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ.

(1) 初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$ (2) 初項 $\sqrt{2}$，公比 $-\sqrt{2}$

(3) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots$ (4) $(\sqrt{2}+1) + 1 + (\sqrt{2}-1) + \cdots$

例題 2.5 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ.

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \cdots$$

解答 初項が x, 公比が $1-x$ であるから, この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$$x = 0 \quad \text{または} \quad |1-x| < 1$$

$|1-x| < 1$ のとき　$-1 < 1-x < 1$　すなわち　$0 < x < 2$

よって, 求める x の値の範囲は　$0 \leqq x < 2$

練習 2.14 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ.

(1) $1 + (2-x) + (2-x)^2 + \cdots$

(2) $x + x(2-x) + x(2-x)^2 + \cdots$

C》点の運動と無限等比級数

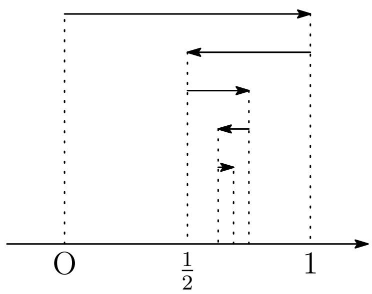
応用例題 2.4 数直線上で，点 P が原点 O から正の向きに 1 だけ進み，そこから負の向きに $\frac{1}{2}$，そこから正の向きに $\frac{1}{2^2}$，そこから負の向きに $\frac{1}{2^3}$ と進む．以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P の極限の位置の座標を求めよ．

考え方》 求める座標は，無限等比級数で表される．

解答 点 P の座標は，順に次のようになる．

$$1,\ 1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3},\ \cdots$$

よって，点 P の極限の位置の座標は，初項 1，公比 $-\frac{1}{2}$ の無限等比級数で表される．



公比について $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して，その和は

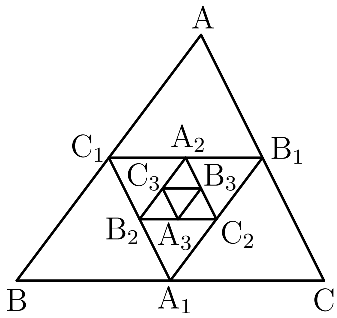
$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$$

したがって，点 P の極限の位置の座標は $\frac{2}{3}$

練習 2.15 数直線上で，点 P が原点 O から正の向きに 1 だけ進み，そこから負の向きに $\frac{1}{2^2}$，そこから正の向きに $\frac{1}{2^4}$，そこから負の向きに $\frac{1}{2^6}$ と進む．以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P の極限の位置の座標を求めよ．

D》相似な図形と無限等比級数

応用例題 2.5 面積 a の $\triangle\mathrm{ABC}$ がある．その各辺の中点を結んで $\triangle\mathrm{A_1B_1C_1}$ を作り，次に $\triangle\mathrm{A_1B_1C_1}$ の各辺の中点を結んで $\triangle\mathrm{A_2B_2C_2}$ を作る．このようにして無数の三角形 $\triangle\mathrm{A_1B_1C_1}$，$\triangle\mathrm{A_2B_2C_2}$，$\triangle\mathrm{A_3B_3C_3}$，$\cdots$，$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$，$\cdots$ を作るとき，これらの面積の和 S を求めよ．



考え方》 新しく作られる三角形はもとの三角形と相似であり，相似比は $1:2$，面積の比は $1^2:2^2$ である．

解答 $\triangle\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$ と $\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ は相似で，相似比は $1:2$ であるから，面積比は $1^2:2^2$ である．$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の面積を S_n とすると

$$S_1=\frac{1}{4}a,\quad S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$$

よって，

$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n+\cdots$$

は，初項 $\frac{1}{4}a$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数である．

公比について $\left|\frac{1}{4}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束する．

よって，求める和 S は　　$S=\dfrac{\frac{1}{4}a}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{3}a$

練習 2.16 応用例題 2.5 において，$\triangle\mathrm{ABC}$ の周の長さが b であるとき，$\triangle\mathrm{A_1B_1C_1}$，$\triangle\mathrm{A_2B_2C_2}$，$\triangle\mathrm{A_3B_3C_3}$，$\cdots$，$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$，$\cdots$ の周の長さの和 l を求めよ．

E》無限級数の性質

無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束するとき，26 ページで学んだ数列の「数列の極限の性質 (1)」から，次の性質が得られる．

無限級数の性質

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S,\ \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = T \text{ のとき}$$

1　$\displaystyle \boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = kS}$　　ただし，k は定数

2　$\displaystyle \boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T,}\qquad \boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = S - T}$

例題 2.6 無限級数 $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$ の和を求めよ．

解答 $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ は，初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数であり，

$\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ は，初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数である．

公比について，$\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$，$\left|\dfrac{1}{3}\right| < 1$ であるから，これらの無限等比級数はともに収束して，それぞれの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

よって　$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

練習 2.17 次の無限級数の和を求めよ．

(1) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{2}{3^n}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n}$

2.1.4 補充問題

1 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-n} - n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 4^{n+1}}{2^{2n} - 3^n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1} - 2^n}{3^n + (-2)^n}$

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ.

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

3 次の無限級数は発散することを示せ.

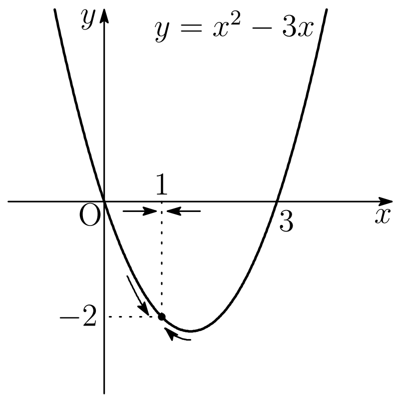
$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + \cdots$$

4 循環小数 $0.3\dot{1}\dot{8} = 0.3 + 0.018 + 0.00018 + 0.0000018 + \cdots$ を，無限等比級数の和を利用して，分数に直せ.

2.2 関数の極限

2.2.1 関数の極限 (1)

A ≫ 関数の極限とその性質



関数 $f(x)=x^2-3x$ において，x が 1 と異なる値をとりながら 1 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値は -2 に限りなく近づく．

一般に，関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，この値 α を $x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の**極限値**または**極限**という．このことを，次のように書き表す．

$$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha \qquad \text{または} \qquad x \longrightarrow a \text{ のとき } \ f(x) \longrightarrow \alpha$$

数列の場合と同様に，関数の極限について，次のことが成り立つ．

関数の極限の性質 (1)

$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$，$\lim_{x \to a} g(x)=\beta$ とする．

1 $\quad \displaystyle\lim_{x \to a} k\,f(x)=k\,\alpha$ 　　ただし，k は定数

2 $\quad \displaystyle\lim_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta, \quad \lim_{x \to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$

3 $\quad \displaystyle\lim_{x \to a}\{f(x)g(x)\}=\alpha\beta$

4 $\quad \displaystyle\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ 　　ただし，$\beta \neq 0$

x の多項式で表される関数や分数関数，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数などについては，a が関数 $f(x)$ の定義域の値であれば，次の等式が成り立つ．

$$\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$$

例 2.6 (1) $\displaystyle\lim_{x\to2}(x^2+3x-4)=2^2+3\cdot2-4=6$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{2x+1}{x+3}=\frac{2\cdot(-1)+1}{-1+3}=-\frac{1}{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\sqrt{x+4}=\sqrt{4}=2$

練習 2.18 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}(2x^2-3x-1)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-2}(x-3)(x+2)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2x-3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\sqrt{1-x}$

指数関数，対数関数，三角関数の極限については，60 ページ以降で扱っている．

B 》 極限値の計算

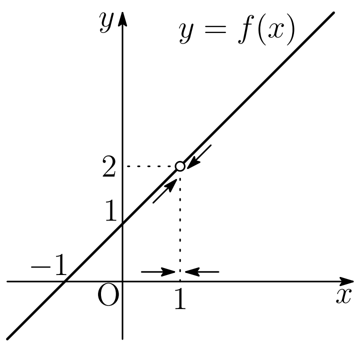
極限値の定義からもわかるように，関数 $f(x)$ が $x=a$ で定義されていなくても，$x\longrightarrow a$ のときの極限値が存在することがある．

例 2.7 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ は，$x=1$ で定義されていないが，$x\neq1$ のとき

$$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$$

となる．よって

$$x\longrightarrow 1 \text{ のとき } \ f(x)\longrightarrow 2$$



例題 2.7 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right)$

解答 (1)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}&=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1}(x^2-x+1)=3\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2+x-2}{2(2+x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{2(2+x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(2+x)}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

練習 2.19 次の極限値を求めよ．ただし，(3) の a は 0 でない定数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}\right)$

例題 2.8 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

← 分子を有理化すると,
約分できるタイプ.

解答

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(x+4)-2^2}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

練習 2.20 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

応用例題 2.6 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ．

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$$

考え方》 $x \longrightarrow 1$ のとき (分母) $\longrightarrow 0$ であるから，与えられた極限値が存在するためには，$x \longrightarrow 1$ のとき (分子) $\longrightarrow 0$ でなければならない．

解答

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2 \qquad \cdots ①$$

において，$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ であるから

$$\lim_{x\to 1}(a\sqrt{x}+b)=0$$

ゆえに，$a+b=0$ となり

$$b=-a \qquad \cdots ②$$

このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}=\frac{a}{2}\end{aligned}$$

① から $\dfrac{a}{2}=2$ であるから　　$a=4$

このとき，② から　　$b=-4$

(答) $a=4$，$b=-4$

練習 2.21 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=-1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}=1$

C》極限が有限な値でない場合

関数の極限が有限な値でない場合について考えてみよう．

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば，

$x \longrightarrow a$ のとき $f(x)$ は**正の無限大に発散**する

または　$x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の**極限は** ∞ である

といい，次のように書き表す．

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

または　$x \longrightarrow a$ のとき　$f(x) \longrightarrow \infty$

また，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が負で，その絶対値が限りなく大きくなるならば，

$x \longrightarrow a$ のとき $f(x)$ は**負の無限大に発散**する

または　$x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の**極限は** $-\infty$ である

といい，次のように書き表す．

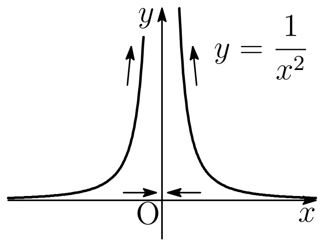
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

または　$x \longrightarrow a$ のとき　$f(x) \longrightarrow -\infty$

注意 関数の極限が ∞ または $-\infty$ の場合，これらを極限値とはいわない．

例 2.8　$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

$$\lim_{x \to 1} \left\{ -\frac{1}{(x-1)^2} \right\} = -\infty$$



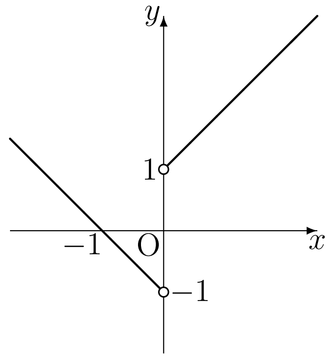
練習 2.22 次の極限を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2}$　　　(2)　$\displaystyle\lim_{x \to -1} \left\{ -\frac{1}{(x+1)^2} \right\}$

D》片側からの極限

関数 $f(x)$ の極限において，x が a に限りなく近づく場合，$x > a$ あるいは $x < a$ など片方の範囲だけで考える場合がある．

例 2.9 関数 $f(x) = \dfrac{x^2+x}{|x|}$ の極限



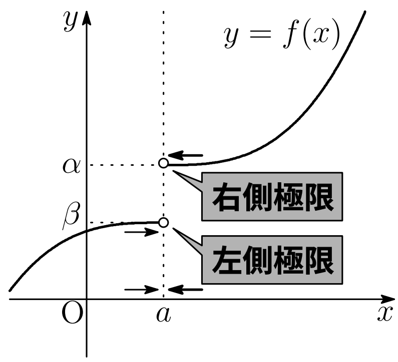
$x > 0$ のとき

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x} = x+1$$

$x < 0$ のとき

$$f(x) = \frac{x^2+x}{-x} = -x-1$$

$x > 0$ の範囲で x が 0 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値は 1 に限りなく近づく．
$x < 0$ の範囲で x が 0 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値は -1 に限りなく近づく．



一般に，$x > a$ の範囲で x が a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，α を x が a に近づくときの $f(x)$ の**右側極限**といい，次のように書き表す．

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha$$

$x < a$ の範囲で x が a に限りなく近づくときの**左側極限**も同様に定義され，その極限値が β のとき，次のように書き表す．

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \beta$$

$a = 0$ のときは，$x \longrightarrow a+0$，$x \longrightarrow a-0$ を，それぞれ次のように書く．

$$x \longrightarrow +0, \qquad x \longrightarrow -0$$

関数 $f(x)$ において，次のことが成り立つ．

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ が存在してもそれらが一致しないとき，
$x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限はない．

例 2.10 関数 $f(x) = \dfrac{x^2+x}{|x|}$ は

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x>0) \\ -x-1 & (x<0) \end{cases}$$

と表され $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to-0} f(x) = 1$

したがって，$x \longrightarrow 0$ のときの $f(x)$ の極限はない．

練習 2.23 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{|x|}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-0} \frac{|x|}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1+0} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to1-0} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

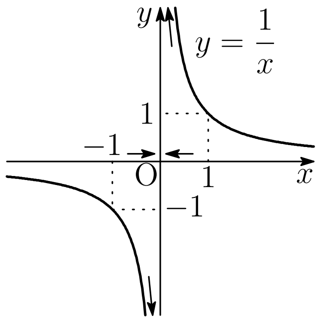
右側極限，左側極限が ∞ または $-\infty$ になる場合には，たとえば次のように書き表す．

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty$$

例 2.11 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ について

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=\infty$$

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty$$



練習 2.24 次の極限を求めよ．

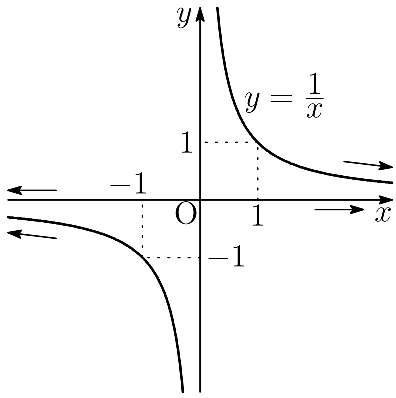
(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}$

2.2.2　関数の極限 (2)

A》$x \longrightarrow \infty$，$x \longrightarrow -\infty$ のときの極限

変数 x が，限りなく大きくなることを，$x \longrightarrow \infty$ で書き表す．また，x が負であって，絶対値が限りなく大きくなることを，$x \longrightarrow -\infty$ で書き表す．このような場合について，関数 $f(x)$ の極限を調べてみよう．



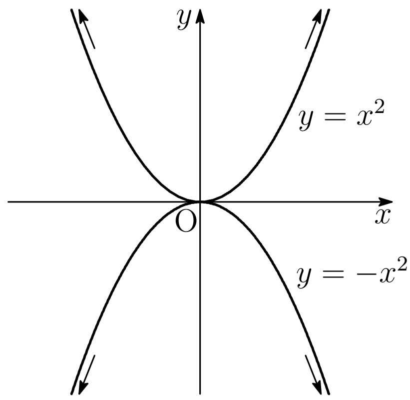
関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ において，$x \longrightarrow \infty$ のとき，$f(x)$ の値は 0 に限りなく近づく．また，$x \longrightarrow -\infty$ のときも，$f(x)$ の値は 0 に限りなく近づく．

一般に，$x \longrightarrow \infty$ のとき $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，この値 α を $x \longrightarrow \infty$ のときの $f(x)$ の**極限値**または**極限**という．このことを，次のように書き表す．

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$$

$x \longrightarrow -\infty$ のときも同様に考える．たとえば，次のようになる．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$



$x \longrightarrow \infty$ や $x \longrightarrow -\infty$ のときに，関数 $f(x)$ の極限が ∞ または $-\infty$ になる意味も，$x \longrightarrow a$ のときと同様に考える．

たとえば，次のようになる．

$$\lim_{x\to\infty} x^2=\infty, \qquad \lim_{x\to\infty}(-x^2)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2=\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty$$

例 2.12

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$ $\qquad\longleftarrow \dfrac{\text{定数}}{\infty}$ の形

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3+1}=0$ $\qquad\longleftarrow \dfrac{\text{定数}}{-\infty}$ の形

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-x^3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=-\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^2-3x)=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)=\infty$

練習 2.25 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x+x^3)$

例題 2.9 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{3x^2-4x+1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x-2}$

解答 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{3x^2-4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x^2}}{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$ $\qquad\longleftarrow$ 分母が 2 次式のとき，x^2 で分母と分子を割るとよい.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}=-\infty$ $\qquad\longleftarrow$ 分母が 1 次式のとき，x で分母と分子を割るとよい.

練習 2.26 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x+3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+4}{2x^2-3x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{3x+2}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x}{x^2-4x+1}$

応用例題 2.7 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$

考え方》 (1) 28 ページ例題 2.1 参照.
(2) $x<0$ のとき，$\sqrt{x^2}=-x$ であることに注意する.

解答 (1)

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x}-2x)(\sqrt{4x^2+x}+2x)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$$
$$=\frac{(4x^2+x)-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2}$$
$$=\frac{1}{4}$$

(2)

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{\sqrt{x^2+x}-x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}$$

$\leftarrow$ $x<0$ のとき $\sqrt{x^2}=-x$

$$=-\frac{1}{2}$$

補足 (2) において $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}=-\frac{1}{2}$$

練習 2.27 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+2x}+2x)$

B 》指数関数，対数関数の極限

指数関数の極限については，次のことがいえる．

$a > 1$ のとき

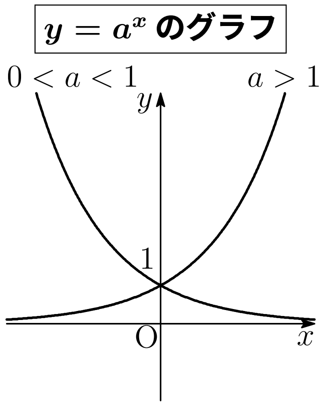
$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty,$$

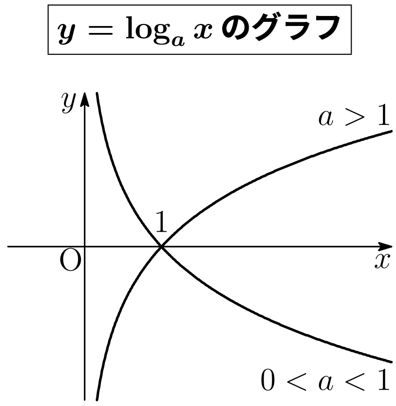
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

$0 < a < 1$ のとき

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$$





対数関数の極限については，次のことがいえる．

$a > 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty,\quad \lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty$

$0 < a < 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty,\quad \lim_{x\to+0} \log_a x = \infty$

練習 2.28 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^x$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_2 x$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \log_{0.5} x$

例題 2.10 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^{-2x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_2 \frac{2x+3}{x}$

解答 (1) $x \longrightarrow \infty$ のとき $-2x \longrightarrow -\infty$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^{-2x} = 0$

(2) $\dfrac{2x+3}{x} = 2 + \dfrac{3}{x}$ であるから，$x \longrightarrow \infty$ のとき $\dfrac{2x+3}{x} \longrightarrow 2$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_2 \frac{2x+3}{x} = \lim_{x\to\infty} \log_2 \left(2 + \frac{3}{x}\right) = \log_2 2 = 1$

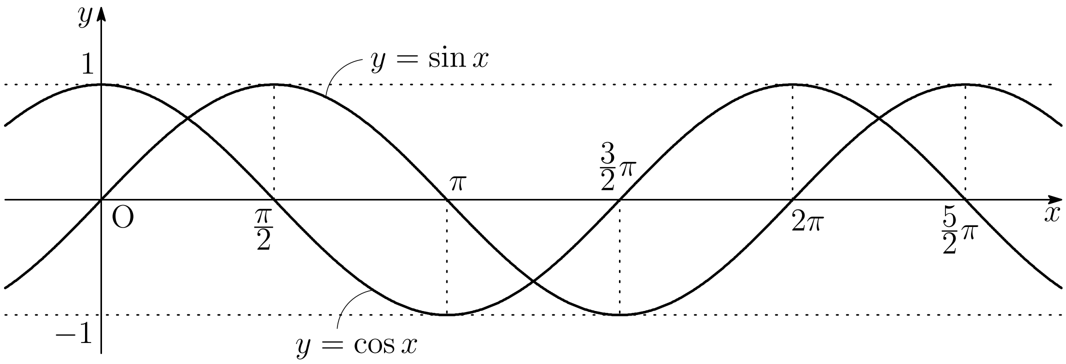
練習 2.29 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^{-3x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^{-2x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_2 \frac{4x-1}{x+2}$

2.2.3　三角関数と極限

A 》三角関数の極限

三角関数 $\sin x$，$\cos x$ は周期関数であり，-1 と 1 の間の値を繰り返しとるから，$x \longrightarrow \infty$ のときの関数の値は一定の値に近づかない．すなわち，$x \longrightarrow \infty$ のときの $\sin x$，$\cos x$ の極限はない．

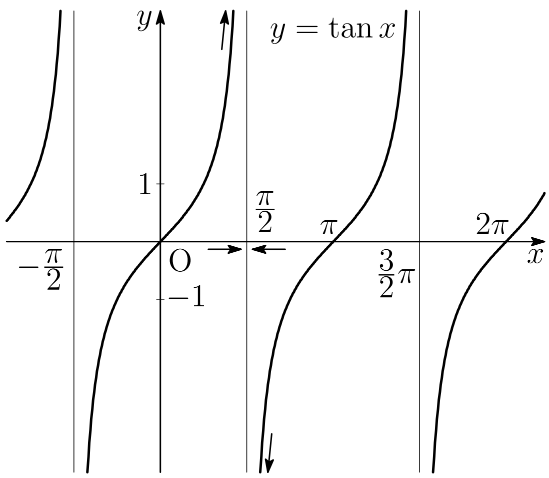


また，$\tan x$ については，グラフから次のことがいえる．

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \tan x = \infty$$

注意　$x \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$ のときの $\tan x$ の極限はない．



例 2.13　$\displaystyle\lim_{x \to 0} \sin x = 0,\qquad \lim_{x \to 0} \cos x = 1$

$$\lim_{x \to \infty} \sin \frac{1}{x} = 0,\qquad \lim_{x \to \infty} \cos \frac{1}{x} = 1$$

練習 2.30　次の極限を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \sin \frac{1}{x}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \cos \frac{1}{x}$　　(3)　$\displaystyle\lim_{x \to \pi} \tan x$

関数の極限には，次の性質もある．

関数の極限の性質 (2)

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ とする．

5　$x = a$ の近くで常に $f(x) \leqq g(x)$ ならば　$\alpha \leqq \beta$

6　$x = a$ の近くで常に $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ かつ $\alpha = \beta$ ならば

$$\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$$

補足 性質 **6** を「はさみうちの原理」ということがある．

性質 **5**，**6** は,「$x = a$ の近くで」を「十分大きい x で」と読み替えると，$x \longrightarrow \infty$ のときにも成り立つ．同様に，$x \longrightarrow -\infty$ のときにも成り立つ．

また，$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ のとき，次のことも成り立つ．

十分大きい x で常に $f(x) \leqq g(x)$ ならば　$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$

応用例題 2.8 極限値 $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$ を求めよ．

考え方》 $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right|$ と $0 \leqq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leqq 1$ より，上の性質 **6** を使う．

解答 $0 \leqq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leqq 1$ より　$0 \leqq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leqq |x|$

ここで，$\lim_{x \to 0} |x| = 0$ であるから　$\lim_{x \to 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0$

よって　$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

練習 2.31 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\cos x}{x}$

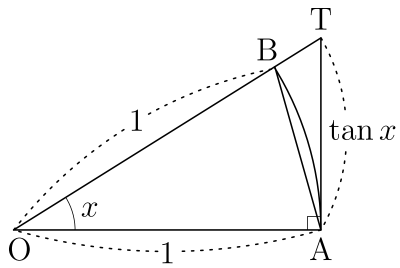
B》 $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限

三角関数 $\sin x$ に関する極限については，次のことが成り立つ．

$\dfrac{\sin x}{x}$ の極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

証明 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　右の図のように，半径が 1，中心角が x ラジアンの扇形 OAB の点 A における円の接線と直線 OB の交点を T とすると，面積について



$$\triangle\mathrm{OAB}<\text{扇形}\,\mathrm{OAB}<\triangle\mathrm{OAT}$$

が成り立つから　$\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin x<\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$

よって　$\sin x<x<\tan x$

$\sin x>0$ より　$1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$　　← 各辺を $\sin x$ で割った．

ゆえに　$1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$　　$\cdots$ ①

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき　$0<-x<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，① により

$$1>\frac{\sin(-x)}{-x}>\cos(-x)\qquad\text{すなわち}\qquad 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

以上から，$x=0$ の近くで　$1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x=1$ であることと，極限の性質 **6** により

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

証終

例題 2.11 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

解答 (1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)=2\cdot 1=2$$ $\longleftarrow x\longrightarrow 0$ のとき $2x\longrightarrow 0$

(2) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot 1=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

練習 2.32 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

応用例題 2.9 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}$$

考え方》 $(\cos x + 1)(\cos x - 1) = \cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$ である．
そこで，分母と分子に $\cos x + 1$ を掛けて式を変形する．

解答
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x + 1}\right) = -1\cdot\frac{0}{1+1} = 0\end{aligned}$$

練習 2.33 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

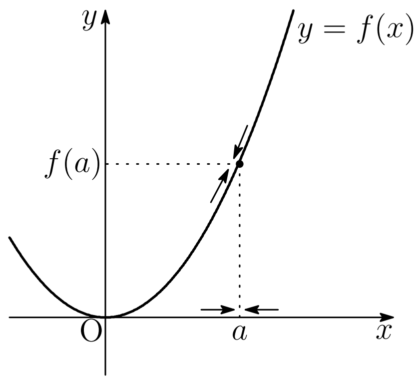
2.2.4 関数の連続性

A 》関数の連続性

x の多項式で表された関数は，定義域でそのグラフが切れ目のない曲線になるという性質をもつ．それは，関数 $f(x)$ において，定義域の任意の x の値 a に対して

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つということである．しかし，このことが成り立たない関数もある．

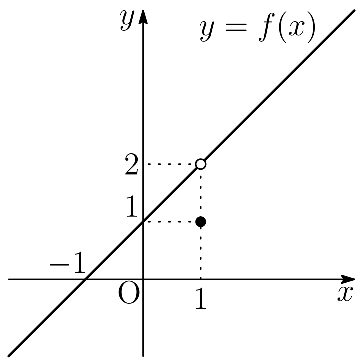


例 2.14 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$

とすると，関数 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになり，$x = 1$ でグラフは切れている．

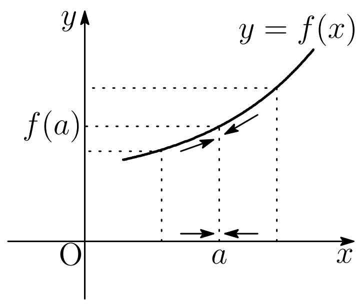
また　$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$，$f(1) = 1$

となるから，$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ である．



補足 例 2.14 の関数 $f(x)$ は，$x \neq 1$ のとき $f(x) = x + 1$ である．

一般に，関数 $f(x)$ において，その定義域の x の値 a に対して，極限値 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在し，かつ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき，$f(x)$ は $x = a$ で**連続**であるという．このとき，$y = f(x)$ のグラフは $x = a$ でつながっている．



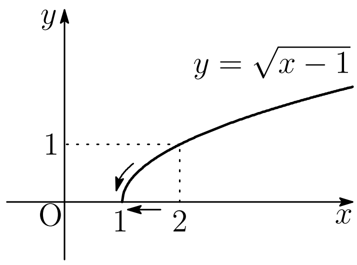
例 2.15 関数 $f(x)$ が指数関数，対数関数，三角関数，分数関数であるとき，$f(x)$ はその定義域内のすべての x の値で連続である． **[終]**

値 a が関数 $f(x)$ の定義域の左端または右端であるときは，それぞれ

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) \quad \text{または} \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a)$$

が成り立てば，$f(x)$ は $x = a$ で連続であるという．

例 2.16 関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ の定義域は $x \geqq 1$ である．



$$\lim_{x\to 1+0}\sqrt{x-1}=0,\quad f(1)=0 \text{ より}$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=f(1)$$

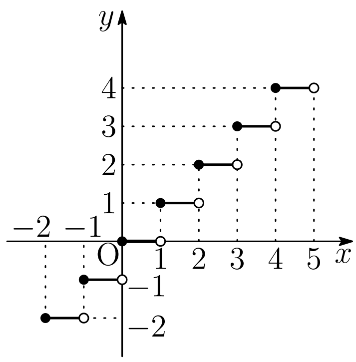
が成り立つ．

よって，関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ は $x=1$ で連続である．

注意 無理関数は定義域内のすべての x の値で連続である．

x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．記号 [　] を**ガウス記号**という．

$f(x)=[x]$ とすると，関数 $y=f(x)$ のグラフは右の図のようになり，x が整数の値をとるところで切れている．



例 2.17 関数 $f(x)=[x]$ について

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=1,\qquad \lim_{x\to 1-0} f(x)=0$$

であるから，$x \longrightarrow 1$ のときの $f(x)$ の極限はない．

よって，関数 $f(x)=[x]$ は $x=1$ で連続でない．**[終]**

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続でないとき，$x=a$ で**不連続**であるという．このとき，グラフは $x=a$ で切れている．

たとえば，関数 $f(x)=[x]$ は，x の整数値で不連続である．

練習 2.34 次の関数 $f(x)$ が，$x=0$ で連続であるか不連続であるかを調べよ．

(1) $f(x)=x[x]$

(2) $f(x)=(x+1)[x]$

(3) $f(x)=\sqrt{x}$

46ページで示した関数の極限の性質**1**〜**4**により，関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに $x=a$ で連続ならば，次の関数はいずれも $x=a$ で連続である．

$$k\,f(x),\quad f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x)g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

ただし，k は定数であり，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ においては $g(a)\neq 0$ とする．

B ≫ 区間における連続

集合 $\{x|a<x<b\}$，$\{x|a\leqq x\leqq b\}$，$\{x|a\leqq x\}$，$\{x|x<b\}$ などを**区間**といい，それぞれ $(a,\ b)$，$[a,\ b]$，$[a,\ \infty)$，$(-\infty,\ b)$ のように書き表す．実数全体の集合は，$(-\infty,\ \infty)$ で表す．

また，区間 $(a,\ b)$ を**開区間**といい，区間 $[a,\ b]$ を**閉区間**という．

関数 $f(x)$ が，ある区間のすべての x の値で連続であるとき，$f(x)$ はその**区間で連続**であるという．また，定義域のすべての x の値で連続な関数を**連続関数**という．

例 2.18　(1) x の多項式で表された関数や，指数関数 a^x，三角関数 $\sin x$，$\cos x$ は，区間 $(-\infty,\ \infty)$ で連続である．

(2) 対数関数 $\log_a x$ は，区間 $(0,\ \infty)$ で連続である．

(3) 分数関数 $\dfrac{x}{x-1}$ は，実数全体のうち，$x=1$ を除いた 2 つの区間 $(-\infty,\ 1)$，$(1,\ \infty)$ のそれぞれで連続である．

(4) 無理関数 $y=\sqrt{x-1}$ は，区間 $[1,\ \infty)$ で連続である．

一般に，関数 $f(x)$ と $g(x)$ が区間 I でともに連続ならば，次の関数はいずれも区間 I で連続である．ただし，k は定数とする．

$$k\,f(x),\quad f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x)g(x)$$

また，関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は区間 I から $g(x)=0$ となる x の値を除いたそれぞれの区間で定義され，それらの各区間で連続である．

練習 2.35 次の関数が連続である区間を求めよ．

(1)　$f(x)=\sqrt{1-x}$　　(2)　$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

C》連続関数の性質

閉区間で連続な関数には，次のような性質がある．

閉区間で連続な関数は，その区間で最大値および最小値をもつ．

例 2.19　関数 $f(x)=\sin x$ は，閉区間 $[0,\ \pi]$ で連続である．この区間において，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 1，$x=0,\ \pi$ で最小値 0 をとる．

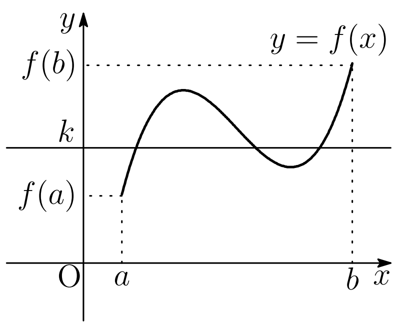
← $y=\sin x$ のグラフは 61 ページ参照.

練習 2.36 次の区間における関数 $f(x)=\cos x$ の最大値，最小値について調べよ．

(1)　$[0,\ \pi]$　　(2)　$[-\pi,\ \pi]$

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続であるとき，そのグラフはこの区間で切れ目なくつながっている．

とくに，$f(a)\neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間のどの値 k に対しても，直線 $y=k$ と曲線 $y=f(x)$ は，$a<x<b$ の範囲で共有点を少なくとも 1 つもつ．



前ページのことから，次の**中間値の定理**が成り立つ．

中間値の定理

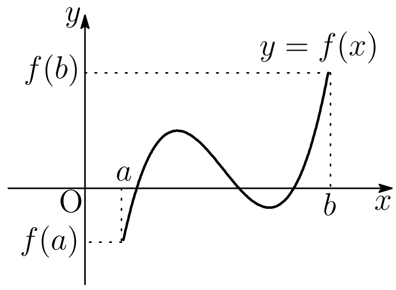
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して

$$f(c) = k, \qquad a < c < b$$

を満たす数 c が少なくとも 1 つある．

中間値の定理を用いると，次に述べるように，方程式の実数解の範囲を推測するための重要な事実が成り立つ．

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ の符号が異なれば，方程式 $f(x) = 0$ は $a < x < b$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ．



例題 2.12 方程式 $x - \cos x = 0$ は，$0 < x < \pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ．

解答 $f(x) = x - \cos x$ とおくと，$f(x)$ は閉区間 $[0,\ \pi]$ で連続である．

また　$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$

$f(\pi) = \pi - \cos \pi = \pi + 1 > 0$

であり，$f(0)$ と $f(\pi)$ は符号が異なる．

したがって，方程式 $f(x) = 0$ すなわち $x - \cos x = 0$ は，

$0 < x < \pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ．

練習 2.37 方程式 $2^x - 3x = 0$ は，$3 < x < 4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ．

2.2.5 補充問題

5 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_2(x^2+4)-\log_2 2x^2\}$

6 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin 3x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos 2x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$

7 次の関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるように定数 a の値を定めよ．

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x} & (x\neq 0)\\[2ex] a & (x=0)\end{cases}$$

8 3 次方程式 $x^3-3x+1=0$ は負の解をもつことを示せ．

2.3 章末問題

2.3.1 章末問題 A

1 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{(1+2+3+\cdots+n)^2}$

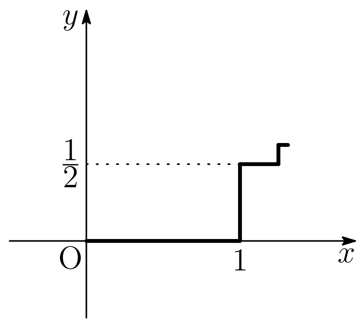
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}}{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}$

2 n を自然数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $2^n \geqq 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2}$ が成り立つことを示せ．

(2) (1) の不等式を用いて，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$ を求めよ．

3 座標平面上で，点 P が原点 O から x 軸の正の向きに 1 だけ進み，次に y 軸の正の向きに $\dfrac{1}{2}$ だけ進み，次に x 軸の正の向きに $\dfrac{1}{2^2}$ だけ進み，次に y 軸の正の向きに $\dfrac{1}{2^3}$ だけ進む．以下，同様な運動を限りなく続けるとき，点 P の極限の位置の座標を求めよ．



4 次の極限を求めよ．ただし，(4) の a は 1 でない正の定数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_a(ax^2+1)-\log_a x^2\}$

5 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\tan x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

6 方程式 $\log_2 x+\dfrac{1}{2}x=1$ は，$1<x<2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ.

2.3.2　章末問題B

7 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ.

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(1)　$a_n = \dfrac{2^{n-1} + 2}{2^{n-1} + 1}$ を示せ.

(2)　数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ.

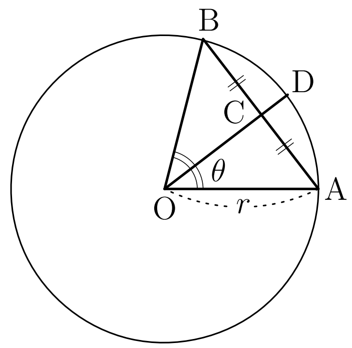
8 和が1の無限等比級数がある．この各項を2乗して得られる無限等比級数の和は2である．もとの無限等比級数の初項と公比を求めよ.

9 次の 2 つの条件［1］,［2］をともに満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ.

［1］ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=2$　　　［2］ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1$

10 半径 r の円 O の周上に中心角 θ ラジアンの弧 AB をとり，弦 AB，弧 AB を 2 等分する点を，それぞれ C，D とする．次の極限を求めよ.

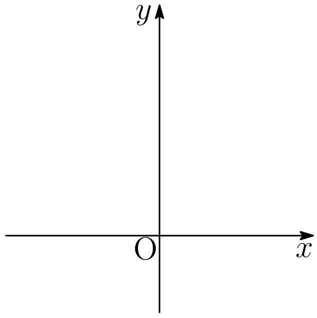
(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}^2}$



11 x を実数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 無限等比級数 $x^2 + \dfrac{x^2}{x^2+1} + \dfrac{x^2}{(x^2+1)^2} + \cdots + \dfrac{x^2}{(x^2+1)^{n-1}} + \cdots$ が収束することを示せ．

(2) (1) の無限級数の和を $f(x)$ とするとき，関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ．



(3) 関数 $f(x)$ が不連続となる x の値を求めよ．

ヒント

7 (1) 数学的帰納法を用いる．

8 初項を a，公比を r とする．$\dfrac{a^2}{1-r^2} = \dfrac{a}{1+r} \cdot \dfrac{a}{1-r}$ を利用する．

9 $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく．　　**11** 初項が 0 の場合に注意する．

第 3 章　微分法

3.1　導関数

3.1.1　微分係数と導関数

A 》微分係数

関数 $f(x)$ について，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるという．また，この値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**または変化率といい，$\boldsymbol{f'(a)}$ で表す.

微分係数

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

注意　$a+h=x$ とおくと $h=x-a$ であり，$h\longrightarrow 0$ のとき $x\longrightarrow a$ となる.

例 3.1　関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の $x=3$ における微分係数 $f'(3)$

$$\begin{aligned}
f'(3)&=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{3+h}-\sqrt{3})(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)-3}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

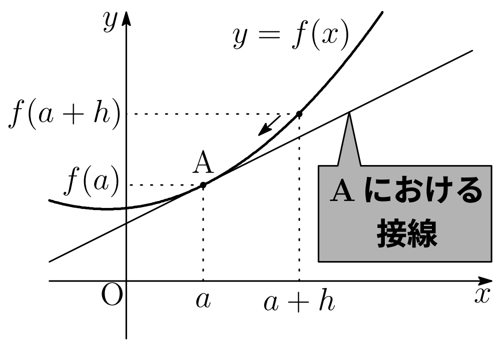
注意　関数 $f(x)=\sqrt{x}$ では，定義域の端 $x=0$ では微分係数を考えない.

練習 3.1 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ について，次の微分係数を求めよ．

(1) $f'(1)$

(2) $f'(2)$

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きを表す[1]．



練習 3.2 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ のグラフ上の点 $(3,\ \sqrt{3})$ における接線の傾きを求めよ．

[1] 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能でないとき，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線が存在しないか，または接線が x 軸に垂直である．

B》微分可能と連続

関数 $f(x)$ について，次のことが成り立つ．

微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$x=a$ で連続である．

証明　$x \neq a$ のとき　$$f(x)-f(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)$$

ここで，関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$
であり，かつ　$\displaystyle\lim_{x\to a}(x-a)=0$

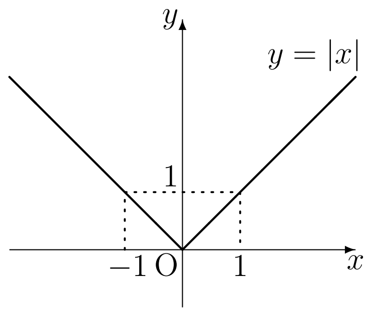
が成り立つから
$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=f'(a)\cdot 0=0$$
よって　$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

したがって，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続である．　**証終**

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であっても，$x=a$ で微分可能であるとは限らない．すなわち，グラフが $x=a$ でつながっていても，その点における接線が存在しないような関数 $f(x)$ がある．

例 3.2　関数 $f(x)=|x|$ について，
$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$
が成り立つから，$f(x)$ は $x=0$ で連続である．

一方 $f(x)=|x|$ について
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}$$
である．ここで
$$\lim_{h\to+0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=1$$
$$\lim_{h\to-0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h}{h}=-1$$



であるから，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$　すなわち $f'(0)$ は存在しない．

よって，関数 $f(x)=|x|$ は $x=0$ で微分可能でない．

補足　関数 $y=|x|$ のグラフには，原点 $(0,\ 0)$ における接線が存在しない．

練習 3.3 次の関数 $f(x)$ は $x = 1$ で微分可能でないことを示せ.

(1) $f(x) = |x - 1|$

(2) $f(x) = |x^2 - 1|$

C》 導関数

関数 $f(x)$ が，ある区間のすべての x の値で微分可能であるとき，$f(x)$ はその**区間で微分可能**であるという．関数 $f(x)$ が，ある区間で微分可能であるとき，その区間の各値 a に微分係数 $f'(a)$ を，それぞれ対応させる関数を，$f(x)$ の**導関数**といい，記号 $\boldsymbol{f'(x)}$ で表す.

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式で定義される.

$f(x)$ の導関数

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

関数 $y = f(x)$ の導関数は，$\boldsymbol{y'}$，$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d}{dx}f(x)}$ などの記号でも表す.

関数 $y = f(x)$ において，x の変化量を表すのに，h の代わりに記号 $\boldsymbol{\Delta x}$ を用いることがある．Δx を x の**増分**という．このとき，y の変化量 $f(x + \Delta x) - f(x)$ を $\boldsymbol{\Delta y}$ で表し y の増分という.

増分を用いると，

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

と表される.

例 3.3 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の導関数は

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}\right\}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x}\\
&= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

練習 3.4 次の関数の導関数を，定義に従って求めよ．

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2x}$

(2) $f(x)=\sqrt{x}$

3.1.2　導関数の計算

A》導関数の性質

関数 $f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを，その関数を**微分する**という．関数を微分するために，導関数の計算方法を調べることにしよう．

導関数について，次の公式が成り立つ．

導関数の公式

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき

1　$\boldsymbol{\{k\,f(x)\}' = k\,f'(x)}$　　　ただし，k は定数

2　$\boldsymbol{\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)}$

3　$\boldsymbol{\{f(x)-g(x)\}' = f'(x)-g'(x)}$

4　$\boldsymbol{\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$

1〜**3** は，すでに数学 II で学んだ公式である．そこで，**4** を証明する．

4 の証明

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),\quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$$

また，微分可能ならば連続であるから　　$\displaystyle\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$

よって　　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　　**証終**

関数 x^n の導関数について，数学 II で次のことを学んでいる．

$$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2$$

また，c を定数とするとき $\qquad (c)' = 0$
これらと導関数の公式 **4** を用いて，関数 x^4 の導関数を求めてみよう．

例 3.4 $\qquad (x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)'x + x^3(x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1$

よって $\qquad (x^4)' = 4x^3$

練習 3.5 例 3.4 と同様にして，次のことを示せ．

(1) $(x^5)' = 5x^4$

(2) $(x^6)' = 6x^5$

一般に，次のことが成り立つ[2]．

x^n の導関数

n が自然数のとき $\qquad \boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$

[2] 数学的帰納法によって証明できる．
$n = k$ のとき成り立つ，すなわち $(x^k) = kx^{k-1}$ であると仮定すると

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)'x + x^k(x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k+1)x^k$$

よって，$n = k + 1$ のときも成り立つ．

例題 3.1　次の関数を微分せよ．

(1)　$y = 2x^5 - 5x^4$　　　(2)　$y = (x^2 - 3)(4x^2 + 5)$

解答　(1)　$y' = 2{\cdot}5x^4 - 5{\cdot}4x^3$

$= 10x^4 - 20x^3$

(2)　$y' = (x^2 - 3)'(4x^3 + 5) + (x^2 - 3)(4x^2 + 5)'$　　$\longleftarrow$ 公式 **4** を用いている．

$= 2x(4x^2 + 5) + (x^2 - 3){\cdot}8x$

$= 8x^3 + 10x + 8x^3 - 24x$

$= 16x^3 - 14x$

練習 3.6　次の関数を微分せよ．

(1)　$y = x^5 + 2x^4$

(2)　$y = 3x^6 - 4x^3$

(3)　$y = (x + 1)(x^3 - 4x)$

(4)　$y = (3x^2 - 2)(x^2 + x + 1)$

B ≫ 商の導関数

関数の和や積で表される関数の導関数を計算してきたが，次に関数の商として表される関数の導関数についても調べてみよう．

関数 $g(x)$ および $\dfrac{1}{g(x)}$ が微分可能であるとする．

$g(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}=1$ の両辺を，86 ページの公式 **4** を用いて微分すると

$$g'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+g(x)\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=0$$

よって
$$g(x)\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=-\frac{g'(x)}{g(x)}$$

これより
$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

商の導関数については，次の公式が成り立つ．

商の導関数

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき

5 $$\boldsymbol{\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$$

6 $$\boldsymbol{\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$$

練習 3.7 次の問いに答えよ．

(1) 導関数の定義に従って，公式 **5** を証明せよ．

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$ と公式 **4**，**5** を用いて公式 **6** を証明せよ．

例題 3.2 次の関数を微分せよ.

(1)　$y = \dfrac{1}{3x+2}$　　　　(2)　$y = \dfrac{x^2}{x-1}$

解答　(1)　$y' = -\dfrac{(3x+2)'}{(3x+2)^2} = -\dfrac{3}{(3x+2)^2}$

(2)　$y' = \dfrac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

練習 3.8 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{1}{2x-3}$

(2) $y = \dfrac{x^2}{x+3}$

(3) $y = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$

公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は，正の整数n について成り立つ．n が負の整数のとき，$n = -m$ とおくと，m は正の整数であるから

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} \qquad \longleftarrow \frac{x^{m-1}}{x^{2m}} = x^{(m-1)-2m} = x^{-m-1} \\ &= -mx^{-m-1} = nx^{n-1}\end{aligned}$$

一般に，次のことが成り立つ．

x^n の導関数

n が整数のとき　　　$\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$

注意 $n = 0$ の場合は，$x^0 = 1$ であることから成り立つ．

例 3.5 $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

練習 3.9 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{1}{x}$

(2) $y = \dfrac{1}{x^3}$

(3) $y = -\dfrac{4}{x^2}$

C》合成関数の微分法

関数 $y=(x^3+1)^2$ において，$u=x^3+1$ という関数を考えると，$y=u^2$ となり，y は u の関数である．すなわち，y は2つの関数

$$y=u^2, \qquad u=x^3+1$$

の合成関数である．

合成関数 $y=f(g(x))$ の導関数を，2つの関数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ の導関数で表すことを考えてみよう．

u の関数 $y=f(u)$，x の関数 $u=g(x)$ がともに微分可能なとき，

x の増分 Δx に対する u の増分を Δu，
u の増分 Δu に対する y の増分を Δy

とすると，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は次のように書くことができる．

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$u=g(x)$ は連続関数であるから，$\Delta x \longrightarrow 0$ のとき　$\Delta u \longrightarrow 0$ となる．

よって
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\&=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

以上から，次のことが成り立つ．

合成関数の微分法

$y=f(u)$ が u の関数として微分可能，$u=g(x)$ が x の関数として微分可能であるとする．このとき，合成関数 $y=f(g(x))$ は x の関数として微分可能で

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

例 3.6　関数 $y=\dfrac{1}{(2x+1)^3}$ の導関数

$u=2x+1$ とすると $y=\dfrac{1}{u^3}$ である．
合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left(-\frac{3}{u^4}\right)\cdot 2\\&=-\frac{6}{(2x+1)^4}\end{aligned}$$

$\longleftarrow \frac{dy}{du}=-\frac{3}{u^4}$，$\frac{du}{dx}=2$

練習 3.10 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (3x+1)^4$

(2) $y = \dfrac{1}{(4x+3)^2}$

練習 3.11 次の関数を微分せよ．ただし，a，b は定数とする.

(1) $y = (ax+b)^6$

(2) $y = \dfrac{1}{(ax+b)^3}$

92 ページに示した「合成関数の微分法」の公式において，

$$\frac{dy}{dx}=\{f(g(x))\}',\quad \frac{dy}{du}=f'(u)=f'(g(x)),\quad \frac{du}{dx}=g'(x)$$

と表すと，この公式は次のようになる．

$$\boldsymbol{\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)}$$

例 3.7 関数 $y=(3x^2-2)^5$ の導関数

$$\begin{aligned} y' &= 5(3x^2-2)^4\cdot(3x^2-2)' \\ &= 5(3x^2-2)^4\cdot 6x \\ &= 30x(3x^2-2)^4 \end{aligned}$$

$y=\boxed{}^5$ について
$y'=5\boxed{}^4\cdot\left(\boxed{}\right)'$

練習 3.12 次の関数を微分せよ．

(1) $y=(2x^2+5)^3$　　(2) $y=(1-2x^2)^3$

(3) $y=(x^2+x+1)^4$　　(4) $y=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

D ≫ 逆関数の微分法

逆関数を利用してもとの関数の導関数を求めることを考えよう．

例 3.8 関数 $y=\sqrt[4]{x}$ の式を x について解くと，

$$x=y^4 \qquad \cdots ①$$

← $y=x^4$ $(x \geqq 0)$ は $y=\sqrt[4]{x}$ の逆関数になっている．

である．合成関数の微分法の公式を用いると

$$\frac{d}{dx}y^4=\frac{d}{dy}y^4\cdot\frac{dy}{dx}=4y^3\frac{dy}{dx}$$

であるから，① の両辺を x で微分すると

$$1=4y^3\frac{dy}{dx}$$

よって，関数 $y=\sqrt[4]{x}$ の導関数は，次のようになる．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4y^3}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

一般に，$f(x)$，$g(x)$ が互いに逆関数で，ともに微分可能であるとする．

$y=f(x)$ を x について解くと $\qquad x=g(y)$

この両辺を x で微分すると $\qquad 1=\dfrac{d}{dx}g(y)$

すなわち $\qquad 1=\dfrac{d}{dy}g(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}$

← 右辺は合成関数の微分法による．

ここで，$g(y)=x$ であるから $\qquad 1=\dfrac{dx}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

したがって，次の公式が得られる．

逆関数の微分法

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

逆関数の微分法の公式を用いて，例 3.8 の関数 $y=\sqrt[4]{x}$ の導関数を求めてみよう．

$y=\sqrt[4]{x}$ を x について解くと，$x=y^4$ であるから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{4y^3}=\frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^3}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

練習 3.13 逆関数の微分法の公式を用いて，次の関数を微分せよ．

(1) $y = \sqrt[6]{x}$

(2) $y = \sqrt[3]{x} \quad (x > 0)$

E 》 x^p の導関数

関数 $y = \sqrt[4]{x}$ は，$y = x^{\frac{1}{4}}$ とも表される．

このように，分数の指数で表された関数の導関数を調べてみよう．

n が正の整数であるとき，関数 $y = x^{\frac{1}{n}}$ の導関数は，逆関数の微分法の公式を用いて，次のようにして求められる．

$y = x^{\frac{1}{n}}$ を x について解くと

$$x = y^n$$

よって $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}}$$ ← 逆関数の微分法

ここで $$\frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} = x^{\frac{1}{n}-1}$$

したがって $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$ すなわち $$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

上の結果は，すでに学んだ導関数の公式

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

において，指数 n を $\dfrac{1}{n}$ に置き換えたものであることがわかる．

一般に，次の公式が成り立つ．

$\boldsymbol{x^p}$ の導関数

p が有理数のとき　　$\boldsymbol{(x^p)' = px^{p-1}}$

証明　p が有理数のとき，$p=\dfrac{m}{n}$ となる正の整数 n と整数 m がある．

よって　$x^p = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$

$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$　と合成関数の微分法の公式を用いると

$$\begin{aligned}(x^p)' &= \left\{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right\}' \\ &= m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\cdot\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' \\ &= m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \\ &= px^{p-1}\end{aligned}$$

証終

$\longleftarrow$ 指数を計算すると

$$\begin{aligned}&\frac{m-1}{n}+\left(\frac{1}{n}-1\right)\\ &=\left(\frac{m}{n}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-1\right)\\ &=\frac{m}{n}-1\end{aligned}$$

例 3.9　関数 $\boldsymbol{y=\sqrt[4]{x^3}}$ の導関数

$y=\sqrt[4]{x^3}$ は $y=x^{\frac{3}{4}}$ とも表せるから

$$y' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

練習 3.14　次の関数を微分せよ．

(1)　$y=\sqrt{x}$

(2)　$y=\sqrt[3]{x^2}$

(3)　$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3.1.3 補充問題

1 関数 $y = f(x)g(x)h(x)$ の導関数は

$$y' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

であることを示せ．また，これを用いて，次の関数を微分せよ．

$$y = (x^2 + 1)(x + 2)(3x - 4)$$

2 次のことを示せ．ただし，a，b は定数，p は有理数とする．

(1) $\dfrac{d}{dx}\, f(ax + b) = a\, f'(ax + b)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\, \{f(x)\}^p = p\{f(x)\}^{p-1} f'(x)$

3 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2$

(2) $y = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^3$

(3) $y = \sqrt{4 - x^2}$

(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

3.2 いろいろな関数の導関数

3.2.1 いろいろな関数の導関数

A 》三角関数の導関数

まず，関数 $\sin x$ の導関数を調べよう．

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \qquad \longleftarrow \text{導関数の定義}$$

において，$\sin(x+h)-\sin x = \sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x$
$$= (\cos h - 1)\sin x + \cos x\sin h$$

であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h - 1}{h}\sin x + \frac{\sin h}{h}\cos x\right)$$

ここで，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ により[3]

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = 0\cdot\sin x + 1\cdot\cos x = \cos x$$

よって $\qquad (\sin x)' = \cos x$

練習 3.15 関数 $\cos x$ の導関数が，次のようになることを示せ．

$$(\cos x)' = -\sin x$$

関数 $\tan x$ については，$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ と，商の導関数の公式により

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

[3] $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$ は 66 ページの応用例題 2.9，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ は 64 ページを参照．

前ページの結果をまとめると，次のようになる．

三角関数の導関数

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

例題 3.3 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \sin 3x$　　(2) $y = \cos^2 x$　　(3) $y = \dfrac{1}{\tan x}$

解答 (1) $y' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x$

(2) $y' = 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2\cos x \cdot (-\sin x)$　　$\longleftarrow 2\sin x \cos x = \sin 2x$

$= -\sin 2x$

(3) $y' = -\dfrac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\dfrac{1}{\tan^2 x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$　　$\longleftarrow \tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$= -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

補足 (1) $f(x) = \sin x$ とすると，$y = f(3x)$，$f'(x) = \cos x$ である．

合成関数の微分法の公式により　$y' = f'(3x) \cdot (3x)' = 3\cos 3x$

(2)，(3) も同様である．

練習 3.16 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \cos 2x$

(2) $y = \sqrt{2}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) $y = \sin^2 x$

(4) $y = \tan^2 x$

(5) $y = \dfrac{1}{\sin x}$

(6) $y = \cos^2 3x$

練習 3.17 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x \sin x + \cos x$

(2) $y = x \cos x - \sin x$

B ≫ 対数関数の導関数

a を 1 でない正の定数とする．対数関数 $\log_a x$ の導関数を調べよう．

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right\}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{h}{x}=k$ とおくと，$h \longrightarrow 0$ のとき　$k \longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\log_a(1+k)^{\frac{1}{k}} \qquad \cdots ①$$

0 に近い k の値について，$(1+k)^{\frac{1}{k}}$ の値を計算すると，次の表のようになる．

k	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$	k	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$
0.1	$2.593742\cdots$	-0.1	$2.867971\cdots$
0.01	$2.704813\cdots$	-0.01	$2.731999\cdots$
0.001	$2.716923\cdots$	-0.001	$2.719642\cdots$
0.0001	$2.718145\cdots$	-0.0001	$2.718417\cdots$
0.00001	$2.718268\cdots$	-0.00001	$2.718295\cdots$

この表から，$k \longrightarrow 0$ のとき $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ は一定の値に限りなく近づくと予想される．また，実際に極限値をもつことが知られている．この極限値を $\boldsymbol{e}$ で表す．

$$e = \lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$$

← $e=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とも表される．

e は次のような数で，無理数であることが知られている．

$$e = 2.71828182845\cdots$$

正の定数 e を用いると，① から次が成り立つ．

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\log_e a}$$

とくに，対数の底が e のときは，次のようになる．

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}\log_e e = \frac{1}{x}$$

← $\log_e e = 1$

e を底とする対数を**自然対数**という．微分法や積分法では $\log_e x$ の底 e を省略して，単に $\boldsymbol{\log x}$ と書くことが多く，自然対数を単に対数ということもある．

対数関数の導関数についてまとめると，次のようになる．

対数関数の導関数

1 $\quad \boldsymbol{(\log x)' = \dfrac{1}{x}}$ $\qquad$ **2** $\quad \boldsymbol{(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}}$

例題 3.4 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \log(2x+3)$ $\qquad$ (2) $y = x\log_2 x$

解答 (1) $y' = \dfrac{1}{2x+3}\cdot(2x+3)' = \dfrac{2}{2x+3}$ $\qquad$ ⟵ 合成関数の微分法の公式を利用．

(2) $y' = (x)'\log_2 x + x(\log_2 x)' = 1\cdot\log_2 x + x\cdot\dfrac{1}{x\log 2}$

$= \log_2 x + \dfrac{1}{\log 2}$

一般に，次のことが成り立つ．

$$\boldsymbol{\{\log f(x)\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

練習 3.18 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \log 3x$ $\qquad$ (2) $y = \log_2(2x-1)$

(3) $y = \log(x^2+1)$ $\qquad$ (4) $y = x\log x - x$

C 》対数関数の導関数の応用

対数関数の導関数を用いて，関数 $\log|x|$ の導関数を求めよう．

$x>0$ のとき　$(\log|x|)' = (\log x)' = \dfrac{1}{x}$

$x<0$ のとき　$(\log|x|)' = \{\log(-x)\}' = \dfrac{1}{-x}\cdot(-x)' = \dfrac{1}{x}$

したがって，$\log|x|$ の導関数は，次の式で表される．

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

練習 3.19 $(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\log a}$ であることを示せ．

以上をまとめると，次のようになる．

絶対値を含む導関数

3　$\boldsymbol{(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}}$　　**4**　$\boldsymbol{(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\log a}}$

例題 3.5 次の関数を微分せよ．

(1)　$y = \log|\cos x|$　　(2)　$y = \log_2|x^2-1|$

解答　(1)　$y' = \dfrac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

(2)　$y' = \dfrac{1}{(x^2-1)\log 2}\cdot(x^2-1)' = \dfrac{2x}{(x^2-1)\log 2}$

一般に，次のことが成り立つ．

$$\boldsymbol{\{\log|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

練習 3.20 次の関数を微分せよ．

(1)　$y = \log|2x+3|$　　　　(2)　$y = \log|\sin x|$

(3)　$y = \log_4|2x-1|$　　　　(4)　$y = \log_2|x^2-4|$

応用例題 3.1 $\log|y|$ の導関数を利用して，次の関数を微分せよ．

$$y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$$

考え方 》
$$\begin{aligned}\log|y| &= \log|(x+1)(x+2)^2(x+3)^3| \\ &= \log|x+1| + \log|x+2|^2 + \log|x+3|^3 \\ &= \log|x+1| + 2\log|x+2| + 3\log|x+3|\end{aligned}$$

と変形してから，微分の公式を適用する．

解答 両辺の絶対値の対数をとると

$$\log|y| = \log|x+1| + 2\log|x+2| + 3\log|x+3|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3} = \frac{2(3x^2+11x+9)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

よって
$$\begin{aligned}y' &= (x+1)(x+2)^2(x+3)^3 \cdot \frac{3(3x^2+11x+9)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= 2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)\end{aligned}$$

練習 3.21 $\log|y|$ の導関数を利用して，次の関数を微分せよ．

(1) $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$

(2) $y=\dfrac{(x+2)(x+3)^3}{x^2+1}$

D ≫ 指数関数の導関数

a を 1 でない正の定数とする．指数関数 $y=a^x$ の導関数を調べよう．

$y=a^x$ を x について解くと　　$x=\log_a y$

逆関数の微分法と対数関数の導関数の公式により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\dfrac{1}{y\log a}}=y\log a$$

よって　　$(a^x)'=a^x\log a$

練習 3.22 $(e^x)'=e^x$ であることを確かめよ．

指数関数の導関数をまとめると，次のようになる．

指数関数の導関数

1 $\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$ **2** $\boldsymbol{(a^x)' = a^x \log a}$

例題 3.6 次の関数を微分せよ．

(1) $y = e^{3x}$ (2) $y = x \cdot 2^x$

解答 (1) $y' = e^{3x} \cdot (3x)' = 3e^{3x}$

(2) $y' = (x)' 2^x + x(2^x)' = 1 \cdot 2^x + x \cdot 2^x \log 2$

$= 2^x (1 + x \log 2)$

練習 3.23 次の関数を微分せよ．ただし，(6) の a は 1 でない正の定数とする．

(1) $y = e^{2x}$ (2) $y = e^{-x^2}$

(3) $y = 3^x$ (4) $y = 2^{-3x}$

(5) $y = xe^x$ (6) $y = (2x-1)a^x$

3.2.2　第 n 次導関数

関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は x の関数である．この関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，さらに微分して得られる導関数を，関数 $y = f(x)$ の**第 2 次導関数**といい，$\boldsymbol{y''}$，$\boldsymbol{f''(x)}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)}$ などの記号で表す．さらに，$f''(x)$ の導関数を $y = f(x)$ の**第 3 次導関数**といい，$\boldsymbol{y'''}$，$\boldsymbol{f'''(x)}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^3y}{dx^3}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)}$ などの記号で表す．

注意　y'，$f'(x)$ を第 1 次導関数ということがある．

例 3.10　(1)　$y = \sin x$ について

$$y' = \cos x,\quad y'' = -\sin x,\quad y''' = -\cos x$$

(2)　$y = e^{-x}$ について

$$y' = -e^{-x},\quad y'' = e^{-x},\quad y''' = -e^{-x}$$

練習 3.24　次の関数について，第 3 次までの導関数を求めよ．ただし，(1) の a は 0 でない定数とする．

(1)　$y = ax^3$　　　(2)　$y = \dfrac{1}{x}$

(3)　$y = \cos x$　　　(4)　$y = \log x$

(5) $y = e^x$ (6) $y = e^{-2x}$

一般に，関数 $y = f(x)$ を n 回微分して得られる関数を，$y = f(x)$ の**第 $\boldsymbol{n}$ 次導関数**といい，$\boldsymbol{y^{(n)}}$，$\boldsymbol{f^{(n)}(x)}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^n y}{dx^n}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^n}{dx^n} f(x)}$ などの記号で表す．なお，$y^{(1)}$，$y^{(2)}$，$y^{(3)}$ は，それぞれ y'，y''，y''' を表す．

たとえば，関数 $y = e^{-x}$ の導関数について，例 3.10(2) でも調べたが，第 n 次導関数は $y^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$ である．

練習 3.25 次の関数の第 n 次導関数を求めよ．

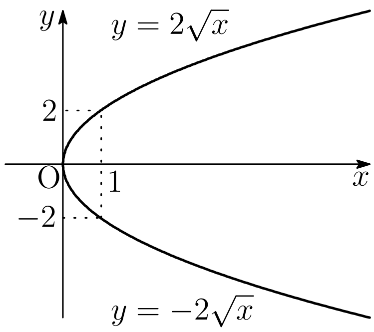
(1) $y = x^n$

(2) $y = e^{2x}$

3.2.3　曲線の方程式と導関数

A 》 x，y の方程式と導関数

方程式 $y^2 = 4x$ の表す曲線は，右の図のような放物線である．ところで，この方程式を y について解くと，次のようになる．



$$y = \pm 2\sqrt{x}$$

よって，この放物線は，2 つの関数

$$y = 2\sqrt{x} \qquad \cdots ①$$

$$y = -2\sqrt{x} \qquad \cdots ②$$

のグラフを合わせたものである．

関数 ① を微分すると

$$\frac{dy}{dx} = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{y}$$

$\longleftarrow (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$
$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

関数 ② を微分すると

$$\frac{dy}{dx} = -2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{y}$$

これらは，次のようにまとめて表すことができる．

$$y^2 = 4x \text{ ついて} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} \qquad \text{ただし}, y \neq 0$$

練習 3.26 円 $x^2+y^2=1$ について，次の問いに答えよ．

(1) 方程式を y について解け．

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ であることを示せ．

x，y の方程式が与えられたとき，この方程式は x の関数 y を定めると考え，合成関数の微分法により，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めることができる．

方程式 $y^2=4x$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めてみよう．

y を x の関数と考えて，方程式の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}y^2=4 \quad \cdots ①$$

合成関数の微分法により　$\dfrac{d}{dx}y^2=\dfrac{d}{dy}y^2\cdot\dfrac{dy}{dx}=2y\,\dfrac{dy}{dx}$

であるから，① は　$2y\,\dfrac{dy}{dx}=4$

よって，$y\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$

このように，前ページで求めた $\dfrac{dy}{dx}$ と同じ結果が得られた．

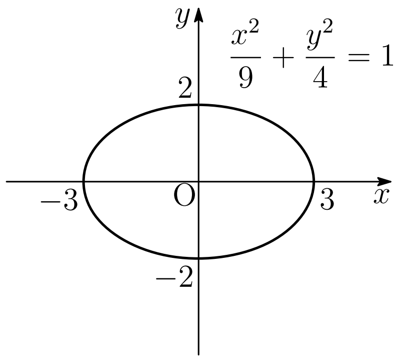
例題 3.7 方程式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

解答 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{9}+\frac{2y}{4}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

よって，$y \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{9y}$$



注意 例題 3.7 の方程式が表す曲線は，円 $x^2+y^2=9$ を x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍に縮小したものである．このような曲線を**楕円**（だ）という．

練習 3.27 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

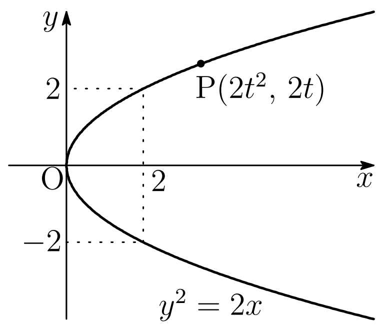
(1)　$y^2=x$　　　　(2)　$x^2-y^2=1$

B 》曲線の媒介変数表示と導関数

曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の x 座標，y 座標が，いずれもある1つの変数 t の関数として表されるとき，曲線 C について調べてみよう．

例 3.11 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 x 座標，y 座標が，t の関数によって，

$$x = 2t^2 \quad \cdots ①$$
$$y = 2t \quad \cdots ②$$



で表されるとする．

①，② から t を消去すると

$$y^2 = 4t^2$$

から

$$y^2 = 2x$$

よって，曲線 C は，放物線 $y^2 = 2x$ である．　**[終]**

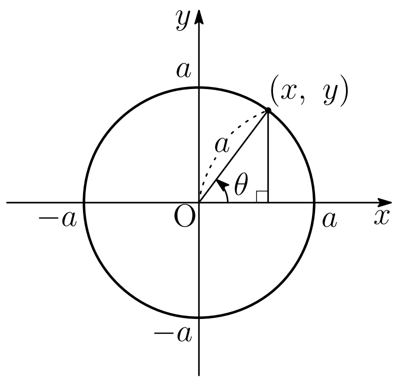
一般に，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の x 座標，y 座標が1つの変数 t の関数 $f(t)$，$g(t)$ によって

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

と表されるとき，この表し方を曲線 C の**媒介変数表示**といい，t を**媒介変数**または**パラメータ**という．媒介変数には t 以外の文字を用いることもある．

例 3.12 原点を中心とする半径 a の円

$$x^2 + y^2 = a^2$$



は，媒介変数 θ を用いて

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta$$

と表される．

注意 円の媒介変数表示では，媒介変数として θ を用いることもある．

座標平面上の曲線 C が，媒介変数 t を用いて

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

と表されているとき，y を x の関数と考えると，合成関数および逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$$

となる．したがって，次のことが成り立つ．

曲線の媒介変数表示と導関数

$x = f(t)$，$y = g(t)$ のとき $\qquad \boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}}$

例題 3.8 x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ．

(1) $x = 2t^2$，$y = 4t$ (2) $x = \cos t$，$y = \sin t$

解答 (1) $\dfrac{dx}{dt} = 4t$，$\dfrac{dy}{dt} = 4$ から $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{4t} = \dfrac{1}{t}$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = -\sin t$，$\dfrac{dy}{dt} = \cos t$ から $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos t}{-\sin t} = -\dfrac{1}{\tan t}$

補足 x または y を用いて表すと，次のようになる．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{y}$ (2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

練習 3.28 x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ．

(1) $x = 2t$，$y = t^2 - 1$ (2) $x = 3\cos t$，$y = 2\sin t$

3.2.4 補充問題

4 次の関数を微分せよ．ただし，(6) の a は 1 でない正の定数とする．

(1) $y = \dfrac{1}{1+\cos x}$

(2) $y = \sin^2 x \cos 2x$

(3) $y = (\log x)^2$

(4) $y = \log \left| \dfrac{x+1}{x+2} \right|$

(5) $y = \log \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

(6) $y = a^{2x+1}$

5 a を定数とするとき，次のことを示せ．

$$\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2+a})=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

6 α を実数とするとき，次のことを示せ．

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1} \qquad \text{ただし，} x>0$$

3.3　章末問題

3.3.1　章末問題 A

1 関数 $y = x\sqrt{x}$ を，導関数の定義に従って微分せよ.

2 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}}$

(2) $y = \sqrt{1 + \cos x}$

(3) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

(4) $y = 2^{\log x}$

3 次の関数について，y' および y'' を求めよ．

(1) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

(2) $y = e^{-2x^2}$

4 n を正の整数とすると，$x \neq 1$ のとき，次の等式が成り立つ．

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

この両辺を x の関数とみて微分し，$x \neq 1$ のとき，次の和を求めよ．

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

5 関数 $f(x) = \sin x$ について，次のことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

6 関数 $y = e^x(\sin x + \cos x)$ について，次の等式が成り立つことを示せ．

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

7 a，b を正の定数とする．次のことを示せ．

(1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ のとき　$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ のとき　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b^2x}{a^2y}$

3.3.2　章末問題 B

8 $x = a$ で微分可能な関数 $f(x)$ について，次のことを示せ.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = 2f'(a)$$

9 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

10 $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ であることを用いて，次の値を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$　　(2) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n}$　　(3) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n}$

11 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$

(2) $y = x^2 (\log x)^3$

(3) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

12 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x^x \ (x > 0)$

(2) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x+2)^2}}$

13 任意の定数 a, b に対して, t の関数 $y = a\cos 2t + b\sin 2t$ は $\dfrac{d^2y}{dt^2} = ky$ を満たすという. この定数 k の値を求めよ.

14 方程式 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ と表せることを示せ．

ヒント

8 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=f'(a)$

9 微分係数の定義を利用する．　(1) $\log 1=0$　(2) $e^0=1$ に注意する．

12 (1) $\log y$ の導関数を利用する．　(2) $\log|y|$ の導関数を利用する．

第 4 章　微分法の応用

4.1　導関数の応用

4.1.1　接線の方程式

A》曲線 $\boldsymbol{y = f(x)}$ の接線

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きに等しい．

したがって，次のことが成り立つ．

接線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

例題 4.1 次の曲線上の点 $(4,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ．

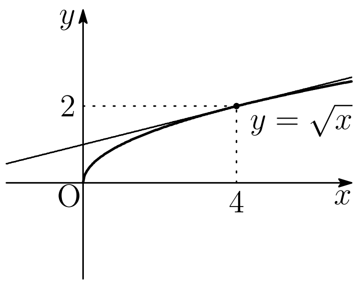
$$y = \sqrt{x}$$

解答 $f(x) = \sqrt{x}$ とすると

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

であるから　　$f'(4) = \dfrac{1}{4}$

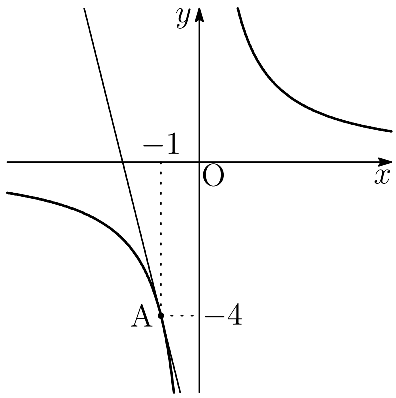
よって，点 $(4,\ 2)$ における接線の方程式は



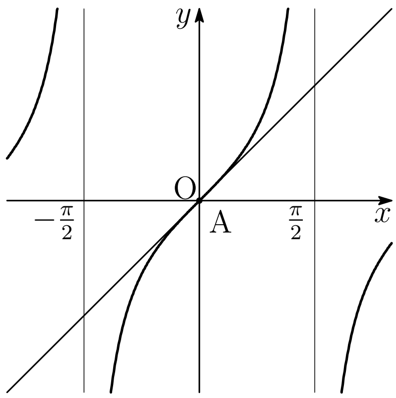
$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \qquad \text{すなわち} \qquad y = \frac{1}{4}x + 1$$

練習 4.1 次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ.

(1) $y = \dfrac{4}{x}$,　A$(-1, -4)$



(2) $y = \tan x$,　A$(0, 0)$



応用例題 4.1 曲線 $y=\log x$ について，次のような接線の方程式を求めよ．

(1) 傾きが e である　　(2) 原点を通る

考え方》 接点の座標を $(a,\ \log a)$ として，この点における接線の方程式を作り，条件を満たすように a の値を定める．

解答 $y=\log x$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{x}$

ここで，接点の座標を $(a,\ \log a)$ とすると，接線の方程式は

$$y-\log a=\frac{1}{a}(x-a) \qquad \cdots ①$$

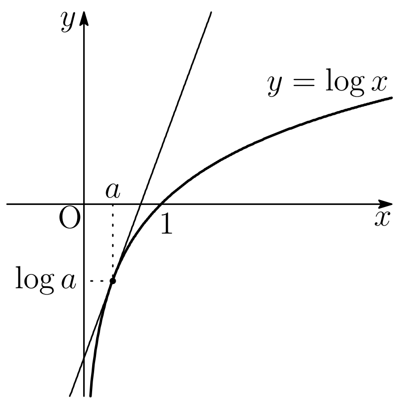
(1) 接線 ① の傾きが e であるから

$$\frac{1}{a}=e \quad \text{すなわち} \quad a=\frac{1}{e}$$

① に代入すると

$$y-\log\frac{1}{e}=e\left(x-\frac{1}{e}\right)$$

整理して　$y=ex-2$



(2) 接線 ① が原点 $(0,\ 0)$ を通るから

$$0-\log a=\frac{1}{a}(0-a)$$

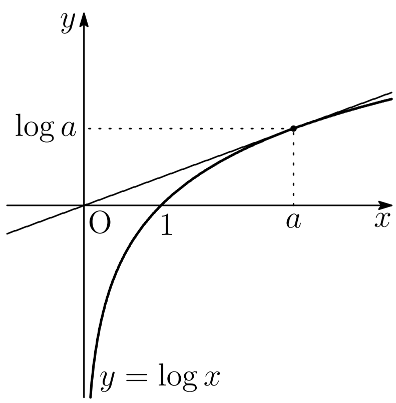
よって　$\log a=1$

ゆえに　$a=e$

① に代入すると

$$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$$

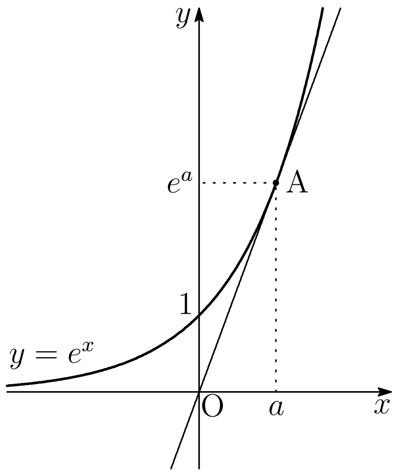
整理して　$y=\dfrac{1}{e}x$



練習 4.2 曲線 $y = e^x$ について，次のような接線の方程式を求めよ．

(1) 傾きが 1 である

(2) 原点を通る



B 》曲線の方程式と接線

曲線が x, y の方程式で表されている場合には，y を x の関数とみて，方程式を x で微分して導関数 y' を求めることができる．

例 4.1 円 $x^2+y^2=4$ 上の点 $(\sqrt{3},\ 1)$ における接線の傾き m

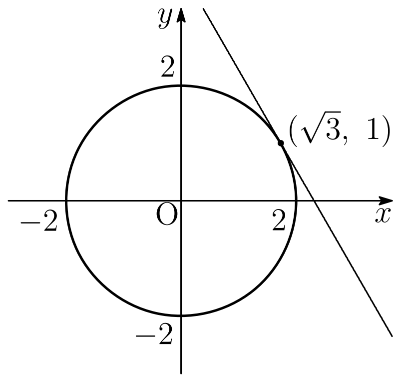
$x^2+y^2=4$ の両辺を x で微分すると

$$2x+2yy'=0$$

よって，$y \neq 0$ のとき　$y'=-\dfrac{x}{y}$

$x=\sqrt{3}$, $y=1$ を代入して

$$m=-\frac{\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$$



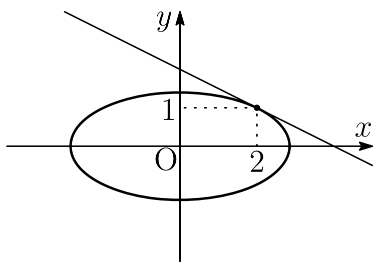
例題 4.2 楕円 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $(2,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ．

解答 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{8}+\frac{2yy'}{2}=0$$

ゆえに，$y \neq 0$ のとき

$$y'=-\frac{x}{4y}$$



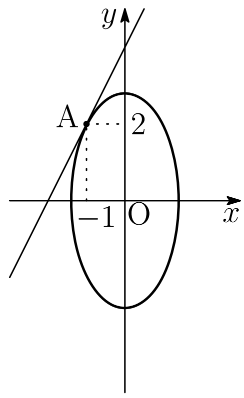
よって，点 $(2,\ 1)$ における接線の傾きは　$-\dfrac{2}{4\cdot 1}=-\dfrac{1}{2}$

したがって，求める接線の方程式は

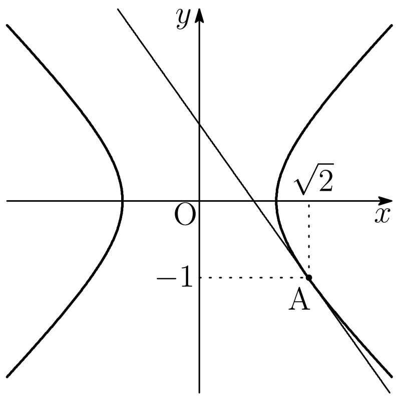
$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2) \qquad \text{すなわち} \qquad y=-\frac{1}{2}x+2$$

練習 4.3 次の方程式で表される曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$， A$(-1,\ 2)$



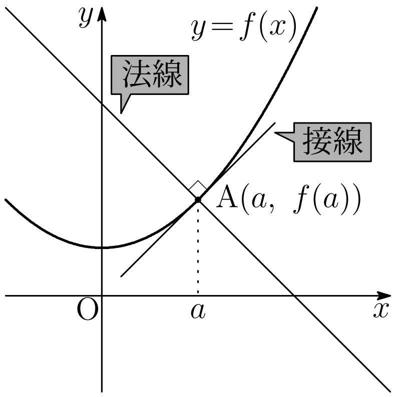
(2) $x^2-y^2=1$， A$(\sqrt{2},-1)$



C》法線の方程式

曲線上の点 A を通り，A におけるこの曲線の接線と垂直な直線を，点 A におけるこの曲線の**法線**という．

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ に等しいから，$f'(a) \neq 0$ のとき，点 A における法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(a)}$ である．



したがって，次のことが成り立つ．

> 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は
>
> $f'(a) \neq 0$ のとき　　$\boldsymbol{y - f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}(x - a)}$

補足 $f'(a) = 0$ のとき，法線の方程式は $x = a$ である．

例 4.2 曲線 $\boldsymbol{y = e^x}$ 上の点 $\boldsymbol{(1,\ e)}$ における法線の方程式

$f(x) = e^x$ とすると

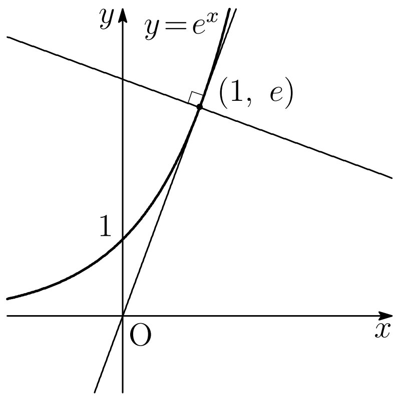
$$f'(x) = e^x$$

よって　　$f'(1) = e$

したがって，この法線の方程式は

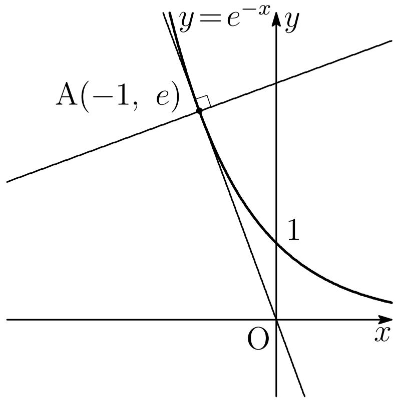
$$y - e = -\frac{1}{e}(x - 1)$$

すなわち　　$y = -\dfrac{1}{e}x + e + \dfrac{1}{e}$

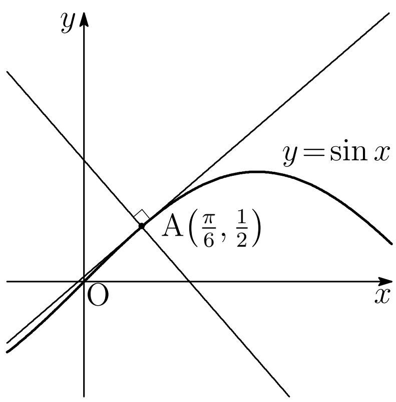


練習 4.4 次の曲線上の点 A における法線の方程式を求めよ.

(1) $y = e^{-x}$, A$(-1,\ e)$



(2) $y = \sin x$, A$\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)$

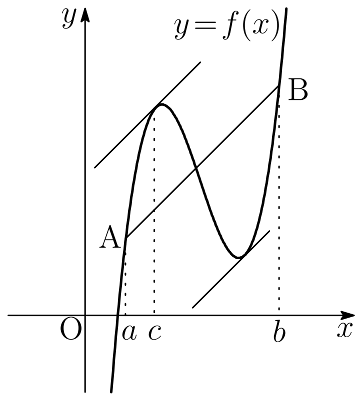


4.1.2　平均値の定理

A 》平均値の定理

$f(x)$ が連続関数のとき，$y = f(x)$ の グラフ上に 2 点 A$(a,\ f(a))$，B$(b,\ f(b))$ をとって，直線 AB と平行な接線を考えてみよう．

$f(x)$ が区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，このグラフ上の A，B 間の点における接線で，直線 AB と平行なものが少なくとも 1 本存在することが知られている．直線 AB の傾きは $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ である．また，接点の x 座標を c とすると，接線の傾きは $f'(c)$ である．したがって，次のことが成り立つ．



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \qquad a < c < b$$

一般に，次の**平均値の定理**が成り立つ．

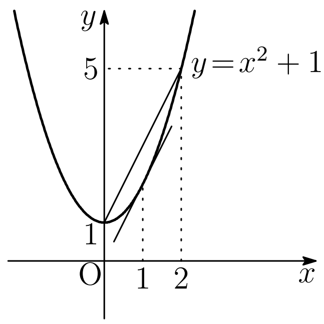
平均値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$$\boldsymbol{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \quad a < c < b}$$

を満たす c が存在する．

例 4.3 $f(x) = x^2+1$ は，区間 $[0,\ 2]$ で連続で，区間 $(0,\ 2)$ で微分可能である．



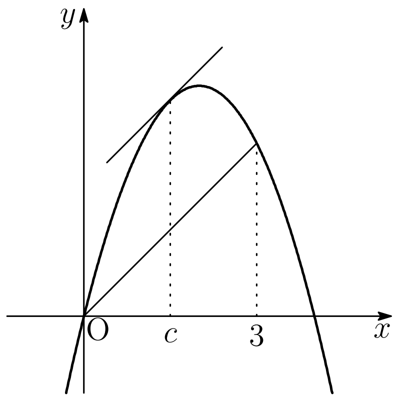
$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$f'(c) = 2c$$

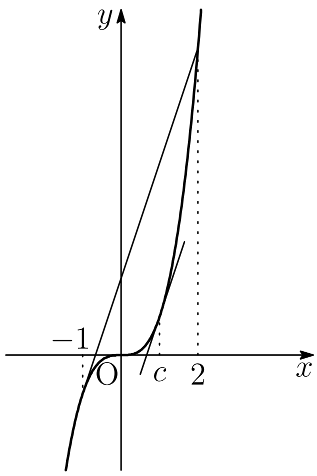
よって，$2c = 2$ から　$c = 1$

練習 4.5 次の各場合に，平均値の定理における c の値を求めよ．

(1) $f(x) = -x^2 + 4x$，$a = 0$，$b = 3$



(2) $f(x) = x^3$，$a = -1$，$b = 2$



B》不等式への応用

平均値の定理を利用して，不等式を証明できる場合がある．

応用例題 4.2 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ．

$$0 < a < b \text{ のとき} \qquad \frac{1}{b} < \frac{\log b - \log a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

考え方》 関数 $f(x) = \log x$ と区間 $[a,\ b]$ について，平均値の定理を適用する．

証明 関数 $f(x) = \log x$ は，$x > 0$ で微分可能で $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

区間 $[a,\ b]$ において平均値の定理を用いると

$$\frac{\log b - \log a}{b - a} = \frac{1}{c} \quad \cdots ①$$

$$a < c < b \quad \cdots ②$$

を満たす実数 c が存在する．

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ は $x > 0$ で減少するから，② より

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{c} > \frac{1}{b} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

よって，① より $\qquad \dfrac{1}{b} < \dfrac{\log b - \log a}{b - a} < \dfrac{1}{a}$ **証終**

練習 4.6 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ．

$$a < b \text{ のとき} \qquad e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$$

4.1.3 関数の値の変化

A 》関数の増減

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとき，平均値の定理から，関数の増減[1] について次のことが成り立つ．

導関数の符号と関数の増減

1 区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) > 0$ ならば,
$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で増加する．

2 区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) < 0$ ならば,
$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で減少する．

3 区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) = 0$ ならば,
$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で定数である．

[1 の証明] 区間 $[a,\ b]$ において，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ となる任意の 2 数 x_1，x_2 に対して，平均値の定理により

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2$$

を満たす c が存在する．

ここで，区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) > 0$ ならば，x_1，x_2 のとり方によらず，常に $f'(c) > 0$ となる．$x_2 - x_1 > 0$ であるから,

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{すなわち} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

が成り立つ．よって，**1** が成り立つ． **証終**

[1] 区間 I に含まれる任意の 2 数 x_1，x_2 について,「$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$」が成り立つとき，関数 $f(x)$ は区間 I で増加するという.「$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$」が成り立つとき，関数 $f(x)$ は区間 I で減少するという.

練習 4.7 前ページの **2**，**3** を証明せよ．

関数 $f(x)$，$g(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとき，前ページの **3** を用いると，次のことが導かれる．

> 区間 $(a,\ b)$ で常に $g'(x) = f'(x)$ ならば，区間 $[a,\ b]$ で
>
> $g(x) = f(x) + C$　　ただし，C は定数

練習 4.8 上のことを証明せよ．

導関数 $f'(x)$ の符号を調べて，関数 $f(x)$ の増減を調べてみよう．

例題 4.3 次の関数の増減を調べよ．

$$f(x) = x - 2\sqrt{x}$$

解答 $f(x)$ の定義域は $x \geqq 0$ である．

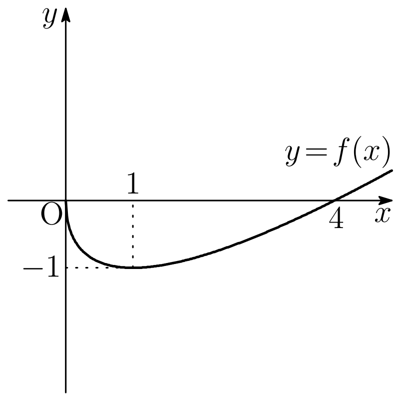
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

$f'(x) = 0$ となる x の値は

$$x = 1$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

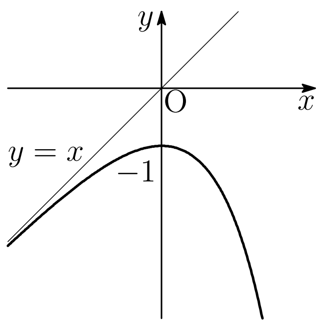
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$



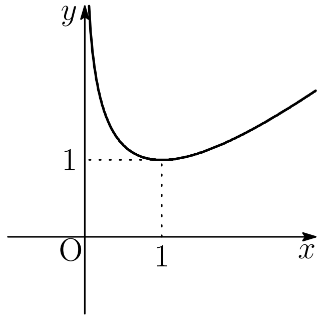
したがって，$f(x)$ は，$0 \leqq x \leqq 1$ で減少，$1 \leqq x$ で増加する．

練習 4.9 次の関数の増減を調べよ．

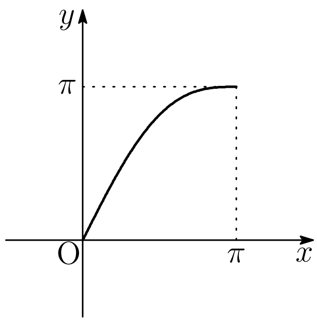
(1) $f(x) = x - e^x$



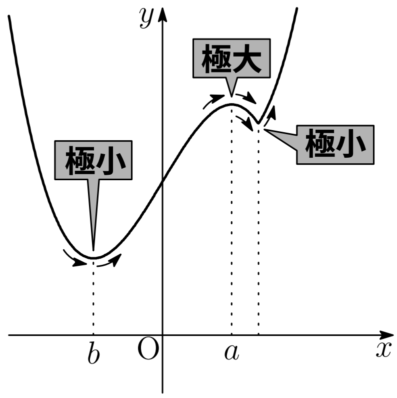
(2) $f(x) = x - \log x$



(3)　$f(x) = x + \sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$



B ≫ 関数の極大と極小



連続な関数 $f(x)$ が，$x = a$ を境目として，増加から減少に移るとき，$f(x)$ は $x = a$ で**極大**であるといい，関数の値 $f(a)$ を**極大値**という．関数 $f(x)$ が，$x = b$ を境目として減少から増加に移るとき，$f(x)$ は $x = b$ で**極小**であるといい，関数の値 $f(b)$ を**極小値**という．極大値と極小値をまとめて**極値**という．

関数 $f(x)$ が $x = a$ を含むある区間で微分可能なとき，増減が次のようになる場合は，$f(a)$ が極値である．

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗

一般に，次が成り立つことが知られている．

極値をとるための必要条件

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき

$f(x)$ が $x = a$ で極値をとるならば　　$f'(a) = 0$

ただし，逆は成り立たない．すなわち，

$f'(a) = 0$でも，$f(x)$が$x = a$で極値をとるとは限らない．

たとえば，関数 $f(x) = x^3$ は，$f'(x) = 3x^2$，$f'(0) = 0$ であるが，$x = 0$ で極値をとらない．

$f(x) = x^3$ の増減表

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗

したがって，関数 $f(x)$ の極値を求めるには，まず $f'(x) = 0$ となる x の値を求め，その値の前後における $f'(x)$ の符号を調べる必要がある．

例題 4.4 次の関数の極値を求めよ．

(1)　$f(x) = xe^{-x}$　　　　(2)　$f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

解答　(1)　$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

$f'(x) = 0$ となる x の値を求めると　$x = 1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．　　← $e^{-x} > 0$ に注意

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大 $\dfrac{1}{e}$	↘

← $f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

よって，極大値は $f(1) = \dfrac{1}{e}$，極小値はない．

(2)　定義域は $x \neq 0$ である．

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$$

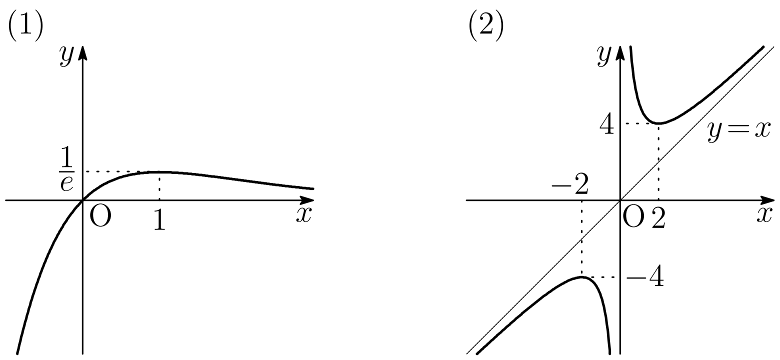
$f'(x) = 0$ となる x の値を求めると　$x = -2,\ 2$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．　　← $x^2 > 0$ に注意

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 -4	↘	／	↘	極小 4	↗

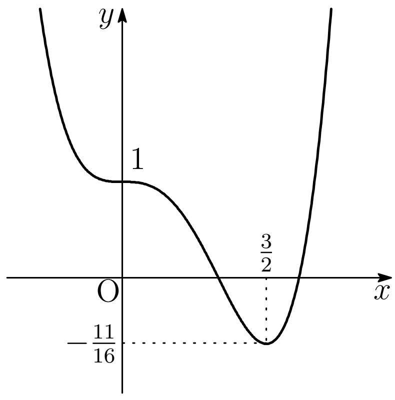
よって，極大値は $f(-2) = -4$，極小値は $f(2) = 4$ である．

補足 例題 4.4 の各関数のグラフは，次のようになる．

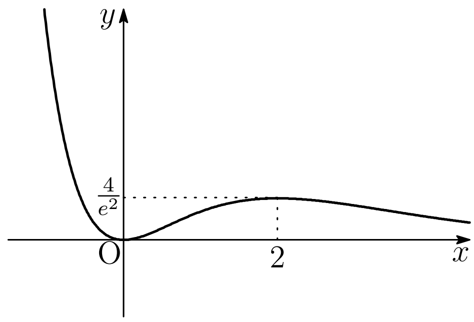


練習 4.10 次の関数の極値を求めよ.

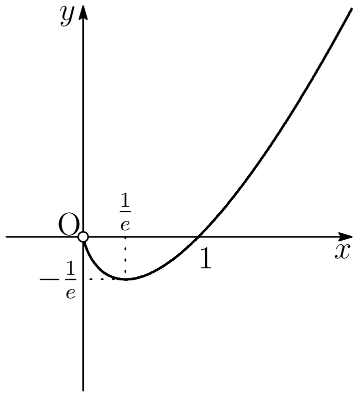
(1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$



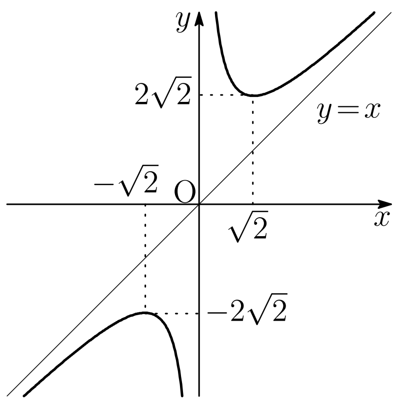
(2) $f(x) = x^2 e^{-x}$



(3) $f(x) = x\log x$



(4) $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$



$x=a$ で微分可能でなくても，$x=a$ で極値をとる関数がある．

応用例題 4.3 関数 $f(x)=|x|\sqrt{x+1}$ の極値を求めよ．

考え方》 $x \geqq 0$ のとき $|x|=x$，$x<0$ のとき $|x|=-x$ である．
それぞれの区間で導関数の符号を調べ，増減表を作る．

解答 関数の定義域は，$x \geqq -1$ である．

$x \geqq 0$ のとき　　$f(x)=x\sqrt{x+1}$

$x>0$ において

$$f'(x)=\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{2(x+1)+x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

よって，$x>0$ では，常に　　$f'(x)>0$

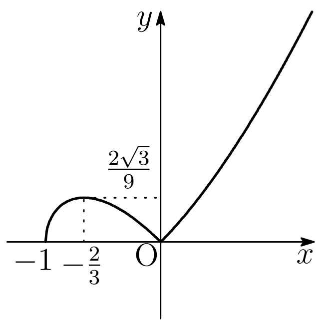
$-1 \leqq x<0$ のとき　　$f(x)=-x\sqrt{x+1}$

$-1<x<0$ において　　$f'(x)=-\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

$f'(x)=0$ となる x の値は　　$x=-\dfrac{2}{3}$

以上から，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

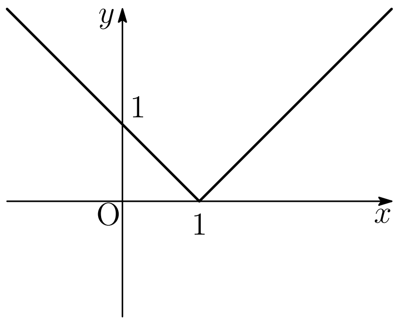
x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	／	$+$
$f(x)$	0	↗	極大 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	極小 0	↗



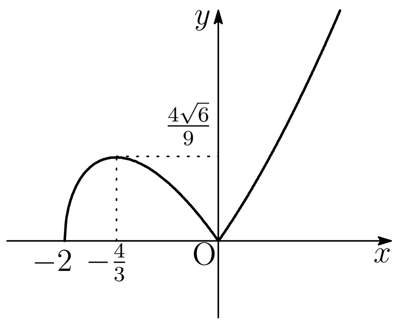
よって，極大値は $f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，極小値は $f(0)=0$ である．

練習 4.11 次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x) = |x-1|$



(2) $f(x) = |x|\sqrt{x+2}$



応用例題 4.4 関数 $f(x) = \dfrac{x^2+x+a}{x-1}$ が $x=-1$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ．また，このとき，関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

考え方　$x=-1$ で極値をとるので，$f'(-1)=0$ から a の値の候補を求めて，増減表で確認する．

解答

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x+a)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1-a}{(x-1)^2}$$

$f(x)$ は $x=-1$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるならば

$$f'(-1)=0$$

すなわち

$$\frac{2-a}{4}=0$$

$\longleftarrow f'(-1)=\dfrac{2-a}{4}$

これを解くと，$a=2$ となる．

このとき

$$f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．　$\longleftarrow (x-1)^2>0$ に注意

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 -1	$\searrow$	／	$\searrow$	極小 7	$\nearrow$

したがって，$a=2$ のとき，$x=-1$ で確かに極値をとる．

このとき，極大値は $f(-1)=-1$，極小値は $f(3)=7$ である．

(答) $a=2$，極大値 -1，極小値 7

練習 4.12 関数 $f(x) = x + \dfrac{a}{x}$ が $x = 1$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ．また，このとき，関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

C》関数の最大と最小

増減を利用して，関数の最大値，最小値を求めてみよう．

例題 4.5 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

$$y = (1+\sin x)\cos x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

解答

$$\begin{aligned} y' &= \cos x \cdot \cos x + (1+\sin x)\cdot(-\cos x) \\ &= \cos^2 x - \sin x - \sin^2 x \\ &= -2\sin^2 x - \sin x + 1 \\ &= -(2\sin x - 1)(\sin x + 1) \end{aligned}$$

$0 < x < 2\pi$ において $y' = 0$ となる x の値を求めると

$$2\sin x - 1 = 0 \quad \text{または} \quad \sin x + 1 = 0$$

より $\qquad x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

よって，y の増減表は次のようになる．

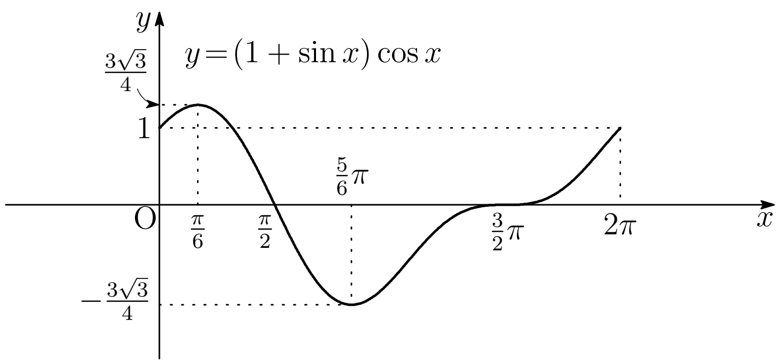
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	1	↗	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	極小 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0	↗	1

したがって，y は

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ で最大値} \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad x = \frac{5}{6}\pi \text{ で最小値} -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

をとる．

補足 例題 4.5 のグラフは次のようになる．



練習 4.13 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = (1 + \cos x)\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

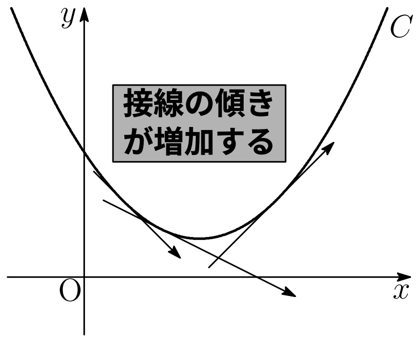
(2) $y = \dfrac{4 - 3x}{x^2 + 1} \quad (1 \leqq x \leqq 4)$

4.1.4　関数のグラフ

A 》曲線の凹凸

関数 $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ の正負が何を表すか調べてみよう．

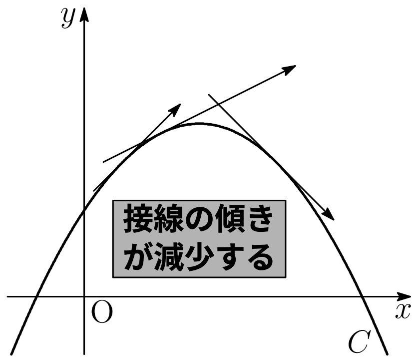
関数 $y=f(x)$ のグラフを C とする．$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数であるから，$f'(x)$ の値の増減は $f''(x)$ の符号で調べることができる．また，$f'(x)$ の値の増減は，接線の傾きの増減を表す．



よって，次のことがいえる．

$f''(x)>0$ である区間では，$f'(x)$ の値は増加する．すなわち，曲線 C の接線の傾きが増加する．

$f''(x)<0$ である区間では，$f'(x)$ の値は減少する．すなわち，曲線 C の接線の傾きが減少する．



一般に，ある区間で，x の値が増加すると曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きが増加するとき，曲線はこの区間で**下に凸**であるという．また，接線の傾きが減少するとき，曲線はこの区間で**上に凸**であるという．

上で調べたことをまとめると，次のことがいえる．

$f''(x)$ の符号と曲線 $y=f(x)$ の凹凸

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき

1　$f''(x)>0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は下に凸である．

2　$f''(x)<0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は上に凸である．

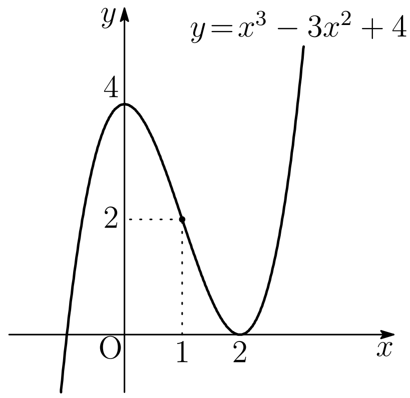
例 4.4 曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 4$ の凹凸

$$y' = 3x^2 - 6x$$
$$y'' = 6x - 6 = 6(x-1)$$

y'' の符号により，この曲線の凹凸は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	2	下に凸

[終]



例 4.4 の曲線では，点 $(1,\ 2)$ を境目として曲線の凹凸が入れ替わる．このように，曲線の凹凸が入れ替わる境目の点を**変曲点**という．

変曲点について，次のことが成り立つ．

曲線 $y = f(x)$ の変曲点

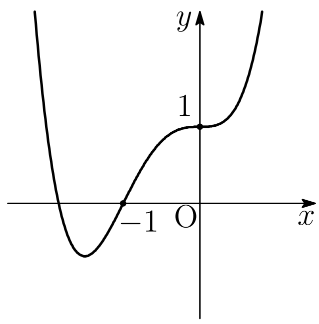
> $f''(a) = 0$ のとき，$x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，
> 点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y = f(x)$ の変曲点である．

点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y = f(x)$ の変曲点ならば $f''(a) = 0$ である．
しかし，$f''(a) = 0$ でも，点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y = f(x)$ の変曲点であるとは限らない．
たとえば，$f(x) = x^4$ を考える．
$f'(x) = 4x^3$，$f''(x) = 12x$ より，曲線 $y = f(x)$ の凹凸は，右の表のようになる．
よって，$f''(0) = 0$ でも，原点 $(0,\ 0)$ はこの曲線の変曲点ではない．

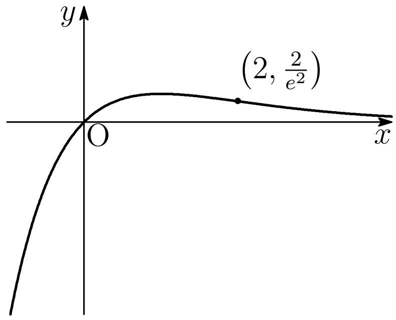
x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	上に凸	2	下に凸

練習 4.14 次の曲線の凹凸を調べよ．また，変曲点があればその座標を求めよ．

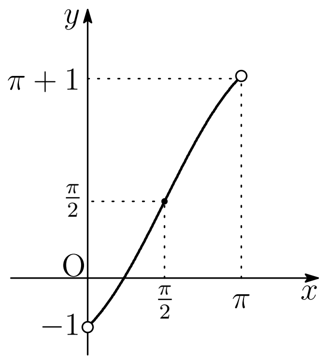
(1) $y = x^4 + 2x^3 + 1$



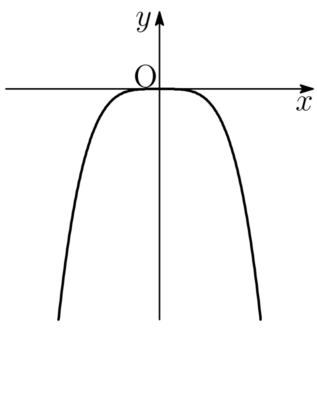
(2) $y = xe^{-x}$



(3) $y = x - \cos x \ (0 < x < \pi)$



(4) $y = -x^4$



B 》グラフのかき方

例題 4.6 関数 $y = e^{-2x^2}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線を調べて，グラフの概形をかけ．

解答

$$y' = -4xe^{-2x^2}$$

$$y'' = -4\{e^{-2x^2} + x(-4xe^{-2x^2})\} = 4(4x^2-1)e^{-2x^2}$$

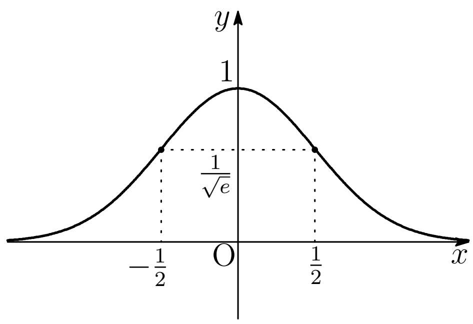
よって，y の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	⤴	変曲点 $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	↗	極大 1	↘	変曲点 $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	⤵

また

$$\lim_{x\to+\infty} y = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} y = 0$$

であるから，x 軸はこの曲線の漸近線である．
以上から，この関数のグラフの概形は，右の図のようになる．



注意 上の表において，⤴ は下に凸で増加，↗ は上に凸で増加，↘ は上に凸で減少，⤵ は下に凸で減少であることを示している．

例題 4.6 で $f(x) = e^{-2x^2}$ とすると，この関数は $f(-x) = f(x)$ を満たしているから，グラフは y 軸に関して対称である．グラフの概形をかくときは，グラフの対称性にも注意するとよい．

練習 4.15 関数 $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線を調べて，グラフの概形をかけ.

例題 4.7 関数 $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ のグラフの概形をかけ.

解答 関数の定義域は $x\neq 1$ である.

$y=x+1+\dfrac{1}{x-1}$ であるから

$$y'=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

よって，y の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	／	$+$	$+$	$+$
y	↗	極大 0	↘	／	↘	極小 4	↗

また，　$\displaystyle\lim_{x\to 1+0} y=\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} y=-\infty$

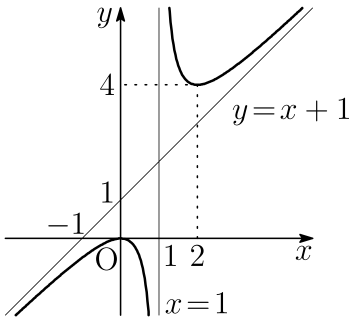
であるから，直線 $x=1$ はこの曲線の漸近線である.

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{y-(x+1)\}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{y-(x+1)\}=0$

であるから，直線 $y=x+1$ もこの曲線の漸近線である.

以上から，このグラフの概形は，右の図のようになる.



補足 関数 $y=f(x)$ のグラフにおいて，$\displaystyle\lim_{x\to c+0} y$，$\displaystyle\lim_{x\to c-0} y$ のうち，少なくとも1つが ∞ または $-\infty$ であるとき，直線 $x=c$ が漸近線である.

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{y-(ax+b)\}=0$ または $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{y-(ax+b)\}=0$ であるとき，直線 $y=ax+b$ が漸近線である.

練習 4.16 関数 $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$ のグラフの概形をかけ.

C 》第 2 次導関数と極値

関数 $f(x)$ の極値を判定するのに，第 2 次導関数 $f''(x)$ を利用する方法がある．$f''(x)$ が連続関数であるとき，次のことが成り立つ．

第 2 次導関数と極限

1　$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば，$f(a)$ は極小値である．

2　$f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば，$f(a)$ は極大値である．

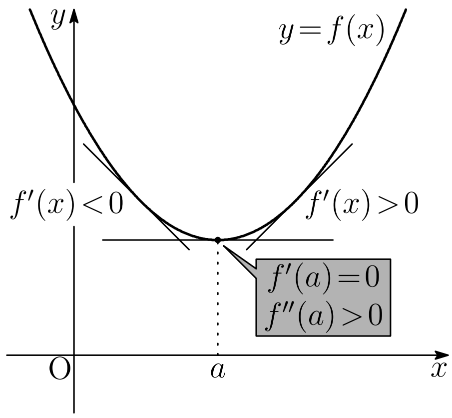
[1 の証明]　$f''(a)>0$ のとき，a に十分近い x では $f''(x)>0$ となり，$f'(x)$ は増加する．

ここで，$f'(a)=0$ であるから，

$x<a$ では　$f'(x)<0$

$x>a$ では　$f'(x)>0$

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	
$f(x)$	↘	極小	↗



よって，このとき $f(a)$ は極小値である．

証終

2 についても，同様にして証明することができる．

例 4.5　関数 $f(x)=-x^3+3x$ の極限

$f'(x)=-3x^2+3$，$f''(x)=-6x$

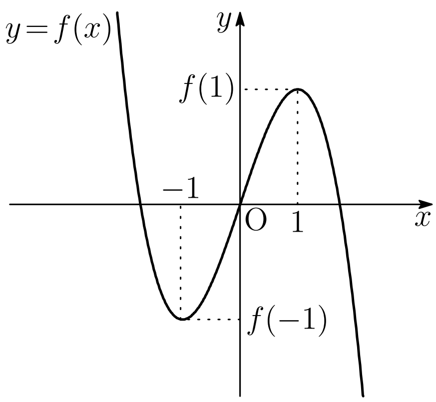
$f'(x)=0$ となる x の値は

$$x=-1,\ 1$$

$f''(-1)=6>0$，$f''(1)=-6<0$

であるから，

$f(-1)$ が極小値，$f(1)$ が極大値



例題 4.8 次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ．

$$f(x) = x + 2\cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

解答 $$f'(x) = 1 - 2\sin x,\quad f''(x) = -2\cos x$$

$0 < x < \pi$ において，$f'(x) = 0$ となる x の値は

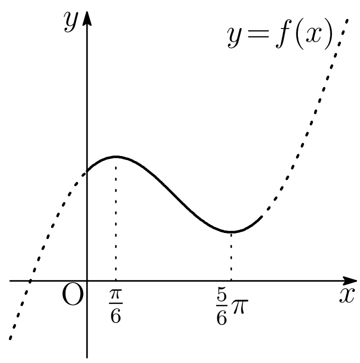
$$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$ ← $\sin x = \frac{1}{2}$ の解

ここで $$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} < 0,$$
$$f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sqrt{3} > 0$$

よって，極値は次のようになる．

極大値は $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$,

極小値は $f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$



練習 4.17 次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ．

(1) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

(2) $f(x) = x + 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

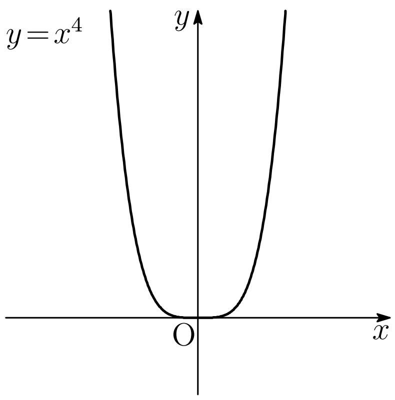
関数 $f(x)$ について，$f'(a) = 0$，$f''(a) = 0$ であるときは，$f(a)$ は極値となることもあるし，極値とならないこともある．

例 4.6　(1)　関数 $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$，$f''(x) = 12x^2$

$f'(0) = 0$，$f''(0) = 0$

$f(0)$ は極小値である．

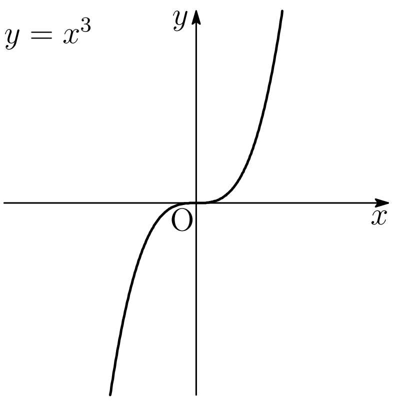


(2)　関数 $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$，$f''(x) = 6x$

$f'(0) = 0$，$f''(0) = 0$

$f(0)$ は極値ではない．



4.1.5 補充問題

1 p を 0 でない定数とする．放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，$y_1 y = 2p(x + x_1)$ であることを示せ．

2 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = x\sqrt{4 - x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$

(2) $y = x + \sqrt{4 - x^2}$

3 曲線 $y = x^4 + ax^3 + 3ax^2 + 1$ が変曲点をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．

4.2 いろいろな応用

4.2.1 方程式，不等式への応用

A 》不等式の証明

応用例題 4.5 $x > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$e^x > 1 + x$$

考え方》 $x > 0$ のとき，関数 $f(x) = e^x - (1 + x)$ の増減を利用する．

証明 $f(x) = e^x - (1 + x)$ とすると　$f'(x) = e^x - 1$

$x > 0$ のとき　$f'(x) > 0$　　$\longleftarrow x > 0$ のとき $e^x > 1$

よって，$f(x)$ は $x \geqq 0$ で増加する．

ゆえに，$x > 0$ のとき

$$f(x) > f(0) = 0 \qquad \longleftarrow f(0) = e^0 - (1 + 0) = 0$$

したがって，$x > 0$ のとき　$e^x > 1 + x$　**証終**

練習 4.18 $x > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

(1) $e^x > 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$

(2) $\log(x+1) < x$

$x > 0$ のとき，練習 4.18(1) の不等式から，さらに次の不等式が成り立つ．

$$e^x > \frac{x^2}{2} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}, \quad \frac{x}{e^x} < \frac{2}{x}$$

ここで，$x \longrightarrow \infty$ のとき，$\dfrac{x}{2} \longrightarrow \infty$，$\dfrac{2}{x} \longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

注意　一般に，自然数 n に対して，次が成り立つことが知られている．

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

B 》方程式の実数解の個数

応用例題 4.6 a を定数とする．次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ．

$$\frac{e^x}{x} = a$$

考え方》 $y = \dfrac{e^x}{x}$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数を調べる．
グラフの漸近線にも注意する．

解答 $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ とすると

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

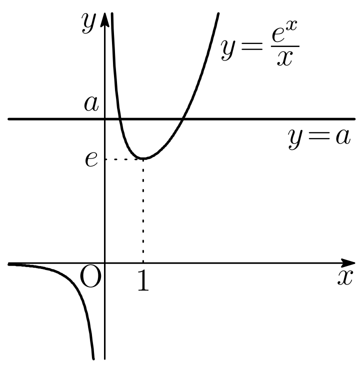
よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる．また

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	極小 e	$\nearrow$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to-0} f(x) = -\infty$$

ゆえに，$y = f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．
このグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する．したがって



$a > e$ のとき 2 個

$a = e$，$a < 0$ のとき 1 個

$0 \leqq a < e$ のとき 0 個

練習 4.19 a を定数とする．次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ．

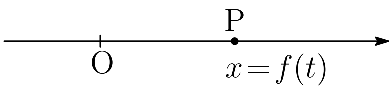
$$\frac{x^3}{x-1} = a$$

4.2.2　速度と加速度

A 》 直線上の点の運動

直線上を運動する点の速度と加速度について考えてみよう．

数直線上を運動する点 P の座標 x が，時刻 t の関数として



$$x = f(t)$$

と表されるとする．このとき，時刻 t から $t + \Delta t$ までの**平均速度**は，

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

で表される．

この平均速度において，$\Delta t \longrightarrow 0$ のときの極限値を，時刻 t における点 P の**速度**という．速度を v で表すと

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

である．点 P は，$v > 0$ のとき数直線上を正の向きに動き，$v < 0$ のとき負の向きに動く．また，v の絶対値 $|v|$ を**速さ**という．

さらに，速度 v の時刻 t における変化率を**加速度**という．加速度を α で表すと，次のようになる．

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

以上のことをまとめると，次のようになる．

速度と加速度

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標 x が $x = f(t)$ で表されるとき，時刻 t における点 P の速度 v，加速度 α は

$$\boldsymbol{v = \frac{dx}{dt} = f'(t), \qquad \alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)}$$

例題 4.9 数直線上を運動する点 P の座標 x が，時刻 t の関数として，$x = 2\sin(\pi t - a)$ で表されるとき，時刻 t における速度 v，加速度 α を求めよ．ただし，a は定数とする．

解答　速度 v は　$v = \dfrac{dx}{dt} = 2\pi\cos(\pi t - a)$

加速度 α は　$\alpha = \dfrac{dv}{dt} = -2\pi^2\sin(\pi t - a)$

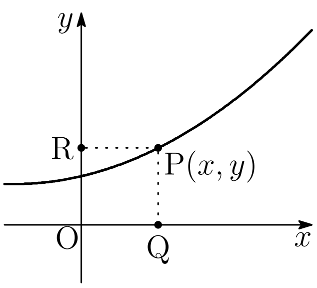
補足 この点 P の運動を単振動という．$\alpha = -\pi^2 x$ とも表される．

練習 4.20　地上から，初速度 v_0 m/秒 でボールを真上に打ち上げるとき，t 秒後の高さ x m は，$x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ で与えられる．ただし，g は定数とする．t 秒後におけるボールの速度 v m/秒 と加速度 α m/秒^2 を求めよ．

B 》平面上の点の運動

座標平面上を運動する点 P の速度と加速度について考えてみよう．

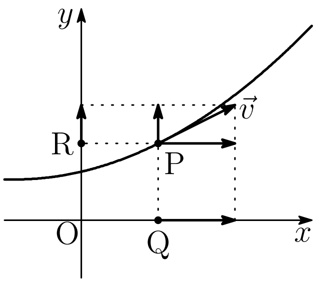
時刻 t における点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，x，y は t の関数となる．このとき，点 P から x 軸，y 軸に下ろした垂線を，それぞれ PQ，PR とすると，点 Q は x 軸上で，点 R は y 軸上で，それぞれ直線運動をする．したがって，時刻 t における



点 Q の速度は $\dfrac{dx}{dt}$，点 R の速度は $\dfrac{dy}{dt}$

である．これらを，それぞれ点 P の

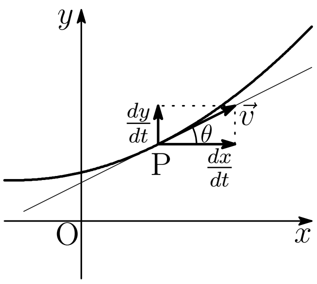
x 軸方向の速度，y 軸方向の速度といい，これらを成分とするベクトル



$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

を，時刻 t における点 P の**速度**という．

座標平面上を運動する点 P$(x,\ y)$ の速度 $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ が x 軸の正の向きとなす角を θ とすると，



$$\tan\theta = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$$

である．

よって，速度 $\vec{v}$ の向きは，点 P の描く曲線の点 P における接線の方向と同じであることがわかる．

速度 $\vec{v}$ の大きさ $|\vec{v}|$ を，点 P の**速さ**という．

さらに，x 軸方向の加速度 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$，y 軸方向の加速度 $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を成分とするベクトル $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ を，時刻 t における点 P の**加速度**という．また，加速度 $\vec{\alpha}$ の大きさ $|\vec{\alpha}|$ を，点 P の**加速度の大きさ**という．

これまでのことをまとめると，次のようになる．

速度と加速度

座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における x 座標，y 座標が t の関数であるとき，時刻 t における点 P の速度 $\vec{v}$, 速さ $|\vec{v}|$, 加速度 $\vec{\alpha}$, 加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$\boldsymbol{\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right),\qquad |\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}$$

$$\boldsymbol{\vec{\alpha}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right),\qquad |\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}}$$

例題 4.10 座標平面上を運動する点 P の座標が，時刻 t の関数として

$$x=a\cos\omega t,\quad y=a\sin\omega t\qquad (a,\ \omega\text{は正の定数})$$

で表されるとき，点 P の時刻 t における速さと加速度の大きさを求めよ．

解答 点 P の時刻 t における速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とする．

$\vec{v}$ の成分は　$\dfrac{dx}{dt}=-a\omega\sin\omega t,\ \dfrac{dy}{dt}=a\omega\cos\omega t$

よって，速さ $|\vec{v}|$ は

$$\begin{aligned}|\vec{v}|&=\sqrt{(-a\omega\sin\omega t)^2+(a\omega\cos\omega t)^2}\\&=\sqrt{a^2\omega^2(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)}=aw\end{aligned}$$

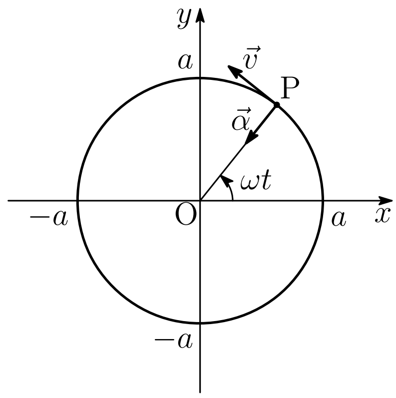
$\vec{\alpha}$ の成分は　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-a\omega^2\cos\omega t,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-a\omega^2\sin\omega t$

よって，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$\begin{aligned}|\vec{\alpha}|&=\sqrt{(-a\omega^2\cos\omega t)^2+(-a\omega^2\sin\omega t)^2}\\&=\sqrt{a^2\omega^4(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)}=a\omega^2\end{aligned}$$

例題 4.10 の点 P は円 $x^2+y^2=a^2$ の周上を動く．この円運動の速さは $a\omega$ であるから一定である．このように，速さが一定の円運動を**等速円運動**という．

また，例題 4.10 では，$\vec{\alpha}=\omega^2(-x,-y)$ と表される．一般に，等速円運動する点 P の加速度 $\vec{\alpha}$ の向きは，P から円の中心に向かう向きである．



練習 4.21 時刻 t における点 P の座標 $(x,\ y)$ が次の式で与えられるとき，$t=3$ における点 P の速さ，加速度の大きさを求めよ．

(1) $x=2t+1,\ y=t^2-4t$

(2) $x=2\cos\pi t,\ y=2\sin\pi t$

4.2.3 近似式

A》 $\boldsymbol{f(a+h)}$ の近似式

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ は

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

で定義される．よって，h が 0 に十分近い値のときは

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\fallingdotseq f'(a)$$

であると考えてよい．すなわち，次のことがいえる．

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$$

これは，h が 0 に十分近い値のとき，$f(a+h)$ の値を h の 1 次式で近似した式となっている．

1 次の近似式

$h\fallingdotseq 0$ のとき　　$\boldsymbol{f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h}$

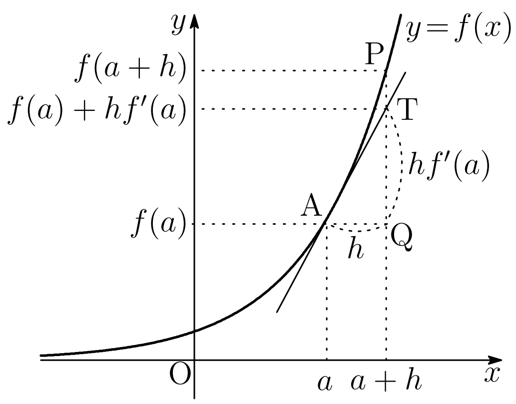
上の近似式の意味を，グラフで考えてみよう．

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

と表される．

よって，$h\fallingdotseq 0$ のときは，右の図において，点 P の y 座標を点 T の y 座標で近似するということである．



例 4.7　$\boldsymbol{h\fallingdotseq 0}$ のとき，$\boldsymbol{\sin(a+h)}$ の 1 次の近似式

$(\sin x)'=\cos x$ であるから，$h\fallingdotseq 0$ のとき

$$\sin(a+h)\fallingdotseq\sin a+h\cos a$$

練習 4.22 $h \fallingdotseq 0$ のとき，次の関数の値について，1次の近似式を作れ.

(1) $\cos(a+h)$

(2) $\tan(a+h)$

B 》 $\boldsymbol{x \fallingdotseq 0}$ のときの近似式

前ページの「1次の近似式」で，とくに $a=0$ のときを考え，h を x におき替えると，次の近似式が得られる.

$\boldsymbol{x \fallingdotseq 0}$ のときの1次の近似式

$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$\boldsymbol{f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)x}$

例題 4.11 p を有理数とするとき，次の近似式を導け.

$$x \fallingdotseq 0 \text{ のとき} \qquad (1+x)^p \fallingdotseq 1+px$$

また，この近似式を用いて，$\sqrt[3]{1.006}$ の近似値を求めよ.

解答 $f(x)=(1+x)^p$ について　　$f'(x)=p(1+x)^{p-1}$

よって　　$f(0)=1,\quad f'(0)=p$

これらを，$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$ に代入して

$$x \fallingdotseq 0 \text{ のとき} \qquad (1+x)^p \fallingdotseq 1+px$$

また，$\sqrt[3]{1.006}=(1+0.006)^{\frac{1}{3}}$ であるから

$$\sqrt[3]{1.006} \fallingdotseq 1+\frac{1}{3}\times 0.006 = 1.002$$

練習 4.23 $x \fallingdotseq 0$ のとき，次の関数について，1 次の近似式を作れ.

(1) e^x

(2) $\log(1+x)$

(3) $\dfrac{1}{1+x}$

練習 4.24 1 次の近似式を用いて，次の数の近似値を求めよ.

(1) $\sqrt[4]{16.1}$

(2) $\log 1.01$

(3) $\dfrac{1}{0.998}$

4.2.4　補充問題

4 方程式 $x^2 = ae^x$ が異なる 3 個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．

5 座標平面上を運動する点 P の，時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が次の式で与えられるとき，加速度の大きさを求めよ．

$$x = a(\omega t - \sin \omega t), \quad y = a(1 - \cos \omega t) \qquad (a,\ \omega \text{ は正の定数})$$

6 球が毎秒 $8\mathrm{cm}^3$ の割合で体積を増しているとする．体積を増し始めてから t 秒後の球の半径，表面積，体積を，それぞれ $r\,\mathrm{cm}$，$S\,\mathrm{cm}^2$，$V\,\mathrm{cm}^3$ とするとき，$r=2$ のときの変化率 $\dfrac{dV}{dt}$，$\dfrac{dr}{dt}$，$\dfrac{dS}{dt}$ をそれぞれ求めよ．

4.3　章末問題

4.3.1　章末問題 A

1 次の曲線の，与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ．

(1) $y=\dfrac{x-2}{x+2}$，点 $(2,\ 0)$

(2) $y=\tan x$，点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$

2 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ．

(1) $y = x^2 \log x$

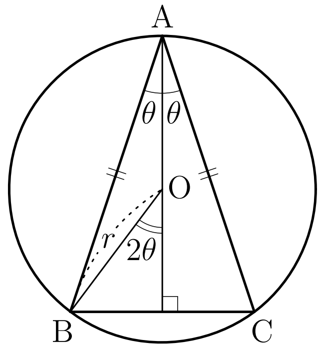
(2) $y = |x^3 - 3x|$

3 次の関数のグラフの概形をかけ.

(1) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

(2)　$y = \sin 2x + 2\cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

4 円に内接する二等辺三角形の中で，周の長さが最大になるものは正三角形である．このことを，円の半径を r，二等辺三角形の頂角の大きさを 2θ とし，周の長さ l を θ の関数で表すことによって証明せよ．



5　a を定数とする．曲線 $y = \dfrac{x}{x^2 + a}$ の変曲点の個数を，次の各場合について求めよ．

(1)　$a > 0$　　(2)　$a = 0$　　(3)　$a < 0$

6 $x > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

(1) $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$

(2) $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$

4.3.2　章末問題 B

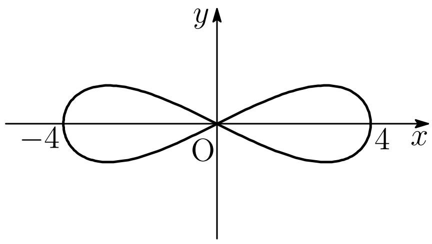
7 曲線 $y = \sqrt{x}$ 上の原点以外の任意の点 P における法線が x 軸と交わる点を Q とし，P から x 軸に下ろした垂線を PR とする．このとき，線分 QR の長さは一定であることを証明せよ．

8 2 つの曲線 $y = ax^2 + b$，$y = \log x$ が，点 $\mathrm{A}(e,\ 1)$ を共有し，かつ点 A で共通な接線をもつように，定数 a，b の値を定めよ．

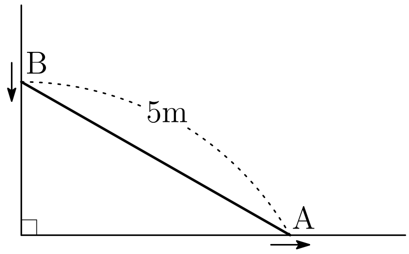
9 体積が一定である直円柱の表面積を最小にするには，高さと底面の半径の比をどのようにすればよいか．

10 3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ のグラフを C とし，曲線 C の変曲点を A とする．曲線 C 上に A 以外の任意の点 P をとり，点 A に関して点 P と対称な点を Q とすると，Q も曲線 C 上にあることを示せ．

11 座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標が，$x = 4\cos t$，$y = \sin 2t$ で与えられるとき，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ における点Pの速さの最大値と最小値を求めよ．



12 地面に垂直な壁に長さ5mの棒を立てかけ，この棒の下端Aを，地面上を毎秒0.3mの速さで壁から垂直に遠ざける．棒の下端Aが壁から4m離れたときに，棒の上端Bが壁面上を動く速さを求めよ．



ヒント

9　体積を定数 k，底面の半径を変数 x として，表面積を x の関数で表す．

12　点Oを座標平面の原点とし，直線OAを x 軸，直線OBを y 軸とする．
OA $= x$，OB $= y$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt} = 0.3$ である．

第 5 章　積分法とその応用

5.1　不定積分

5.1.1　不定積分とその基本性質

A 》 不定積分

数学 II で学んだように，微分すると $f(x)$ になる関数があれば，その関数を $f(x)$ の**原始関数**という．$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき，すなわち $F'(x) = f(x)$ のとき，任意の定数 C に対して

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

が成り立つから，$F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数である．

また，$F(x)$ と $G(x)$ がともに $f(x)$ の原始関数ならば，$G'(x) = F'(x)$ となるから，139 ページで学んだように

$$G(x) = F(x) + C$$

となる定数 C が存在する．

以上からわかるように，関数 $f(x)$ の原始関数が存在するならば，それは無数にある．その 1 つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の原始関数全体は，次の形に書き表される．

$$F(x) + C \qquad C \text{ は任意の定数}$$

この表示を $f(x)$ の**不定積分**といい[1]，$\displaystyle\int \boldsymbol{f(x)\,dx}$ で表す．$f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を**積分する**といい，上の定数 C を**積分定数**という．また，$f(x)$ を**被積分関数**といい，x を**積分変数**という．

$f(x)$ の不定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき，$f(x)$ の不定積分は

$$\boldsymbol{\int f(x)\,dx = F(x) + C} \qquad C \text{ は積分定数}$$

[1] 不定積分を原始関数と同じ意味で用いることもある．

関数の不定積分を求めるには，導関数の公式が逆に利用される．

実数 α について，$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha}$ が成り立つ．また，$(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ が成り立つ．これらのことから，次の公式が得られる．

x^{α} の不定積分

$$\int \boldsymbol{x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C} \qquad \text{ただし，} \alpha \neq -1$$

$$\int \boldsymbol{\frac{1}{x}dx = \log|x| + C}$$

注意 不定積分における C は積分定数を表すが，今後はその断りを省略する．

例 5.1 (1)
$$\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}\,dx = \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + C$$
$$= -\frac{1}{3}x^{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$$

(2)
$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$
$\longleftarrow x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$

注意 今後は，$\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}dx$ を $\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$ と書くことがある．

練習 5.1 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^5\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3}$

(3) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx$

(5) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$　　(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

B》不定積分の基本性質

不定積分について，次の公式が成り立つ．ただし，このように書いた不定積分についての等式では，両辺の積分定数の違いは無視することにする．

関数の定数倍および和，差の不定積分

1 $\displaystyle \int \boldsymbol{kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx}$ 　　k は定数

2 $\displaystyle \int \boldsymbol{\{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$

3 $\displaystyle \int \boldsymbol{\{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx}$

例 5.2

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}dx &= \int \frac{x^2-3x+2}{x^2}dx = \int \left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx \\ &= \int dx - 3\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x^2} \\ &= x - 3\log|x| - \frac{2}{x} + C\end{aligned}$$

注意 不定積分を求める計算では，記号 $\int$ が取れた段階で積分定数 C をつければよい．また，$\displaystyle \int 1\,dx$ は 1 を省略して $\displaystyle \int dx$ と書くことがある．

積分変数が x 以外の場合も，同様にして不定積分が求められる．

練習 5.2 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle \int \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$　　(2) $\displaystyle \int \frac{(x^2-2)(x^2-3)}{x^4}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1-y-y^2}{y^2}dy$

(6) $\displaystyle\int \left(3t^2-\frac{1}{t}\right)^2 dt$

C》三角関数，指数関数の不定積分

三角関数，指数関数の微分については，次の公式を学んだ．

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \log a$$

これらの公式から，次の公式が得られる．

三角関数，指数関数の不定積分

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

例 5.3 (1)
$$\int (2\sin x + 3\cos x)dx = 2\int \sin x\,dx + 3\int \cos x\,dx$$
$$= -2\cos x + 3\sin x + C$$

(2)
$$\int \tan^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \qquad \longleftarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= \tan x - x + C$$

例 5.4
$$\int (3e^x - 2^x)dx = 3\int e^x\,dx - \int 2^x\,dx = 3e^x - \frac{2^x}{\log 2} + C$$

練習 5.3 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (\cos x - 2\sin x)dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{2\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x - 1}$　　　　(4) $\displaystyle\int (2 - \tan\theta)\cos\theta\, d\theta$

(5) $\displaystyle\int 4^x\, dx$　　　　(6) $\displaystyle\int (3^x - 2e^x)dx$

5.1.2　置換積分法と部分積分法

A 》 $\boldsymbol{f(ax+b)}$ の不定積分

関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を利用して，合成関数 $f(ax+b)$ の不定積分を求めることを考えよう．

$F'(x) = f(x)$ であるから，合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}F(ax+b) = aF'(ax+b) = af(ax+b)$$

が成り立つ．したがって，次の公式が得られる．

$\boldsymbol{f(ax+b)}$ の不定積分

$F'(x) = f(x)$，$a \neq 0$ とするとき

$$\boldsymbol{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C}$$

例 5.5 (1)

$$\int \sqrt{3x+2}\,dx = \int (3x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= \frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$$

(2) $$\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\sin 4x + C$$

(3) $$\int e^{1-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{1-2x} + C$$

練習 5.4 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (3x+1)^4\,dx$

(2) $\displaystyle\int (4x-3)^{-3}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$

(5) $\displaystyle\int \sin 2x\,dx$

(6) $\displaystyle\int e^{3x-1}\,dx$

B》置換積分法

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする．x が t の関数として $x=g(t)$ と表されるとき，$y=F(x)$ は t の関数でもある．$g(t)$ が微分可能なとき

$$\frac{dy}{dx}=F'(x)=f(x)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)g'(t)=f(g(t))g'(t) \qquad \longleftarrow \text{合成関数の微分法}$$

y を2通りの不定積分で表すと，次の**置換積分法**の公式が成り立つ．

置換積分法 (1)

1　$$\boldsymbol{\int f(x)\,dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt} \qquad \text{ただし}\quad x=g(t)$$

注意　$g'(t)=\dfrac{dx}{dt}$ であるから，$\displaystyle\int f(x)\,dx=\int f(g(t))\frac{dx}{dt}dt$ と書くことができる．

例題 5.1　不定積分 $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,dx$ を求めよ．

解答　$\sqrt{1-x}=t$ とおくと　　$x=1-t^2$，$\dfrac{dx}{dt}=-2t$

よって

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x}\,dx&=\int(1-t^2)t\cdot(-2t)dt=2\int(t^4-t^2)dt\\&=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+C=\frac{2}{15}t^3(3t^2-5)+C\\&=-\frac{2}{15}(3x+2)(1-x)\sqrt{1-x}+C\end{aligned}$$

練習 5.5　例題 5.1 の不定積分を，$1-x=t$ とおいて求めよ．

練習 5.6 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x(1-x)^4\,dx$

(2) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

C》$f(g(x))g'(x)$ の不定積分

前ページの置換積分法 (1) の公式において，左辺と右辺を入れ替えて，積分変数 t, x をそれぞれ x，u に書き変えると，次の公式が得られる．

置換積分法 (2)

2　$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \qquad \text{ただし}\quad u = g(x)$$

注意　$g'(x) = \dfrac{du}{dx}$ を形式的に $g'(x)\,dx = du$ と書き表すと，公式が覚えやすい．

例題 5.2　次の不定積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$　　　(2)　$\displaystyle\int \cos^2 x \sin x\,dx$

解答　(1)　$x^2+1 = u$ とおくと　　$2x\,dx = du$　　$\longleftarrow 2x = \dfrac{du}{dx}$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+1}\cdot 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C\end{aligned}$$

(2)　$\cos x = u$ とおくと　　$(-\sin x)dx = du$　　$\longleftarrow -\sin x = \dfrac{du}{dx}$

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \sin x\,dx &= -\int \cos^2 x(-\sin x)dx \\ &= -\int u^2\,du = -\frac{1}{3}u^3 + C \\ &= -\frac{1}{3}\cos^3 x + C\end{aligned}$$

練習 5.7 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

(4) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$

194 ページの公式 **2** において，とくに $f(u) = \dfrac{1}{u}$ とすると

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{1}{u}du = \log|u| + C = \log|g(x)| + C$$

となる．すなわち，次の公式が成り立つ．

3 $$\boldsymbol{\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \log|g(x)| + C}$$

例題 5.3 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-3}dx$　　(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

解答 (1) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-3}dx = \int \frac{(x^2-3)'}{x^2-3}dx = \log|x^2-3| + C$

(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\log|\cos x| + C$

練習 5.8 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}$

D 》部分積分法

積の微分法の公式　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

より，$f(x)g(x)$ は右辺の関数の原始関数である．

よって　$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$

これより，次の**部分積分法**の公式が成り立つ．

部分積分法

4　$$\boldsymbol{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

例題 5.4 不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を求めよ．

解答
$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= \int x(\sin x)'\,dx \\ &= x\sin x - \int (x)'\sin x\,dx \\ &= x\sin x - \int \sin x\,dx \\ &= x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

$\longleftarrow \int x\,g'(x)\,dx$ の形と考える．

部分積分法の公式を利用すると，とくに次のことが成り立つ．

$$\int x\,g'(x)\,dx = x\,g(x) - \int g(x)\,dx$$

練習 5.9 次の不定積分を求めよ．

(1)　$\int x\sin x\,dx$　　(2)　$\int xe^{-x}\,dx$

応用例題 5.1 次の不定積分を求めよ．

$$\int \log x \, dx$$

考え方 》 $\log x = (\log x)\cdot 1 = (\log x)\cdot(x)'$ と考える．

解答

$$\begin{aligned}\int \log x \, dx &= \int (\log x)\cdot(x)' \, dx \\ &= (\log x)\cdot x - \int (\log x)'\cdot x \, dx \\ &= x\log x - \int \frac{1}{x}\cdot x \, dx \\ &= x\log x - x + C\end{aligned}$$

練習 5.10 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \log 2x \, dx$

(2) $\displaystyle\int \log x^2 \, dx$

(3) $\displaystyle\int x\log x \, dx$

5.1.3 いろいろな関数の不定積分

A 》 分数関数の不定積分

分数関数の不定積分を求めるとき，式をうまく変形すると，これまでに学んだ不定積分の公式が利用できるようになる場合がある．

例題 5.5 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x+1}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$

解答 (1) $\displaystyle\frac{2x^2+1}{x+1} = 2x-2+\frac{3}{x+1}$ であるから

← $2x^2+1$ を $x+1$ で割った商が $2x-2$，余りが 3 である．

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+1}{x+1}dx &= \int \left(2x-2+\frac{3}{x+1}\right)dx \\ &= x^2-2x+3\log|x+1|+C\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$ であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}(\log|x-1|-\log|x+1|)+C \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C\end{aligned}$$

注意 例題 5.5(2) のように，1 つの分数式を簡単な分数式の差や和の形で表わす変形を，**部分分数に分解**するという．

練習 5.11 $\displaystyle\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$ を満たす定数 a，b の値を求めよ．また，この結果を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$ を求めよ．

練習 5.12 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x+2}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{2x-1}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+x-2}dx$

B 》三角関数に関する不定積分

三角関数に関する積分では，次の公式がよく使われる．

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},\quad \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

また，積を和や差の形にするとき，次の公式が使われる．

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

$\longleftarrow$ 右辺を計算すれば左辺を導くことができる．

例題 5.6 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin 3x\cos x\,dx$

解答 (1)

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(2)

$$\int \sin 3x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 4x+\sin 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$

$$= -\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

練習 5.13 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int \sin^2 3x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \cos 3x \cos 2x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sin x \sin 3x\,dx$

5.1.4　補充問題

1 次のことを示せ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x} + C$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\tan x} - x + C$

2 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + 1}$

(3) $\displaystyle\int \frac{\log(x+1)}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int (\sin x + \cos x)^2\,dx$

(5) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$

(6) $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$

3 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$ を，次の各方法により求めよ．

(1) 分母と分子に $1-\cos x$ を掛ける．

(2) $1+\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$ を利用する．

4 次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ．

［1］ $F'(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ ［2］ $F(0)=0$

5.2　定積分

5.2.1　定積分とその基本性質

A》定積分

数学 II で学んだように，関数 $f(x)$ の**定積分** $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx}$ は，次のように定義される．a をこの定積分の**下端**，b を**上端**という．

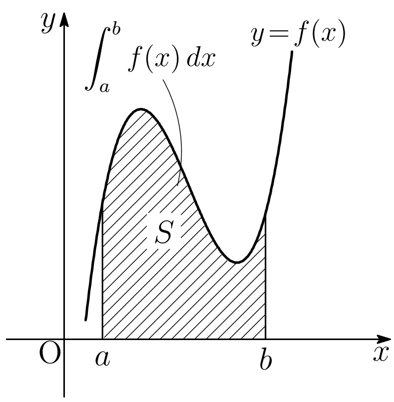
定積分

区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} = \Big[\boldsymbol{F(x)}\Big]_a^b = \boldsymbol{F(b) - F(a)}$$

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を求めることを，$f(x)$ を a から b まで**積分する**という．

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた右の図の斜線部分の面積 S を表す．



例 5.6　(1)　$\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\,\frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\right]_1^4 = \frac{2}{3}(4\sqrt{4} - 1) = \frac{14}{3}$

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta = \Big[-\cos\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$

練習 5.14 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$

(2) $\displaystyle\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta$

(4) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$

(5) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$

(6) $\displaystyle\int_{-1}^1 2^x\,dx$

B》定積分の基本性質

数学 II で学んだように，定積分について，次のことが成り立つ．

定積分の性質

1　$\displaystyle \int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$　　k は定数

2　$\displaystyle \int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3　$\displaystyle \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

4　$\displaystyle \int_a^a f(x)\,dx = 0$

5　$\displaystyle \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

6　$\displaystyle \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

例 5.7　(1)
$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{3x-4}{x^2}dx &= \int_1^2\left(\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx = 3\int_1^2\frac{dx}{x} - 4\int_1^2\frac{dx}{x^2}\\ &= 3\Big[\log x\Big]_1^2 - 4\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2\\ &= 3(\log 2-\log 1) - 4\left(-\frac{1}{2}+1\right)\\ &= 3\log 2 - 2\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx &= \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)dx\\ &= \frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

練習 5.15 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 (e^t - e^{-t})dt$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta\,d\theta$

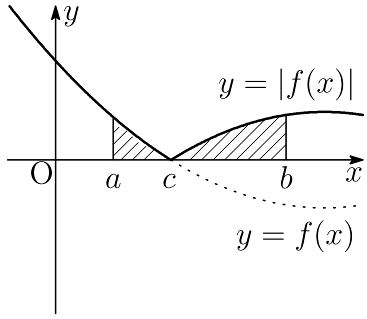
C》絶対値のついた関数の定積分

関数 $f(x)$ が

$$a \leqq x \leqq c \text{ で } \quad f(x) \geqq 0, \qquad c \leqq x \leqq b \text{ で } \quad f(x) \leqq 0$$

であるとき，絶対値のついた関数 $|f(x)|$ を a から b まで積分するには，次のように区間を分けて行う．

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b \{-f(x)\}\, dx$$



この定積分は，$y = |f(x)|$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を表している．

例題 5.7 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx$ を求めよ．

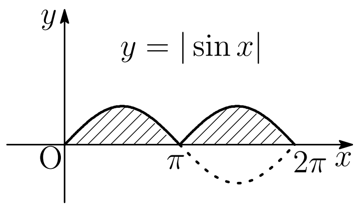
解答 $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$|\sin x| = \sin x$$

$\pi \leqq x \leqq 2\pi$ のとき

$$|\sin x| = -\sin x$$

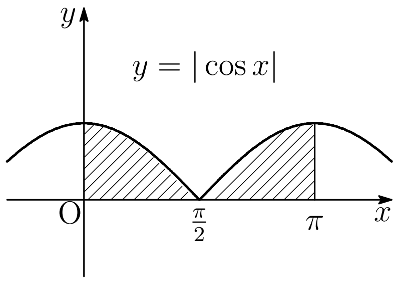
であるから



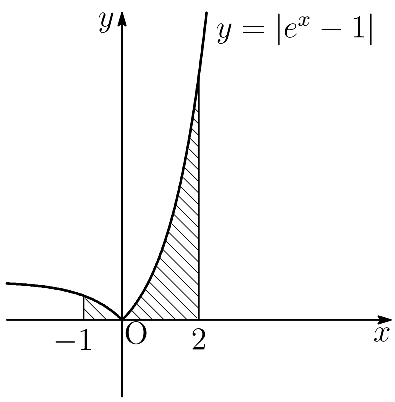
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx &= \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx \\ &= \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi} + \Big[\cos x \Big]_{\pi}^{2\pi} \\ &= (1+1) + (1+1) = 4\end{aligned}$$

練習 5.16 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos x| dx$

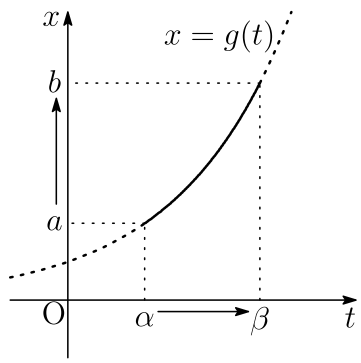


(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |e^x - 1| dx$



5.2.2　置換積分法と部分積分法

A 》定積分の置換積分法



$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする．x が微分可能な関数 $g(t)$ を用いて，$x = g(t)$ と表されるとき，合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = f(g(t))g'(t)$$

となる．$a = g(\alpha)$，$b = g(\beta)$ とすると

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt &= \Big[F(g(t))\Big]_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

となる．したがって，次の公式が成り立つ．

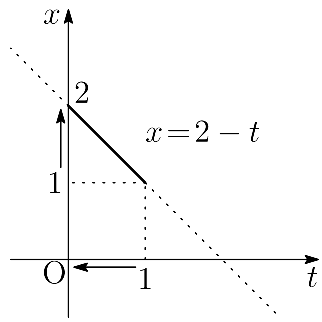
定積分の置換積分法

$x = g(t)$ とおくとき，$a = g(\alpha)$，$b = g(\beta)$ ならば

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt}$$

x	$a \longrightarrow b$
t	$\alpha \longrightarrow \beta$

例 5.8　定積分 $\displaystyle\int_1^2 x(2-x)^4\,dx$ を求めてみよう．



$2 - x = t$ とおくと

$x = 2 - t$，$dx = (-1)dt$　　$\leftarrow \frac{dx}{dt} = -1$

x と t の対応は右のようになる．

x	$1 \longrightarrow 2$
t	$1 \longrightarrow 0$

よって

$$\begin{aligned}\int_1^2 x(2-x)^4\,dx &= \int_1^0 (2-t)t^4\cdot(-1)dt = \int_0^1 (2t^4 - t^5)dt \\ &= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{6}t^6\right]_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{6} = \frac{7}{30}\end{aligned}$$

練習 5.17 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^5\,dx$

(2) $\displaystyle\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

例題 5.8 a を正の定数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を求めよ．

解答 $x = a\sin\theta$ とおくと　　$dx = a\cos\theta\,d\theta$　　$\longleftarrow \frac{dx}{d\theta} = a\cos\theta$

x と θ の対応は右のようになる．
この範囲では $\cos\theta \geqq 0$ である．
また，$a > 0$ であるから

x	$0 \longrightarrow a$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\cos\theta$$

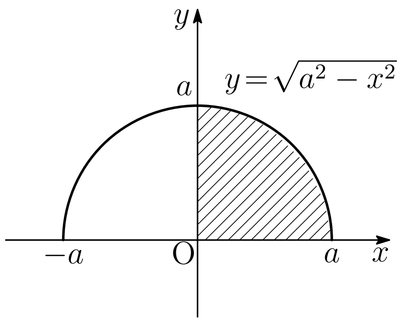
よって

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos\theta)a\cos\theta\,d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta \\ &= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

補足 例題 5.8 の定積分において，被積分関数

$$y = \sqrt{a^2-x^2}$$

のグラフは，右の図のような半円を表す．
定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は，半径 a の四分円の面積を表す．



練習 5.18 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

応用例題 5.2 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ を求めよ.

考え方》 $x = \tan\theta$ とおいて，$\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を利用する.

解答 $x = \tan\theta$ とおくと $\quad dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる.

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

注意 被積分関数が $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ $(a>0)$ のときは，$x = a\tan\theta$ とおくとよい.

練習 5.19 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$

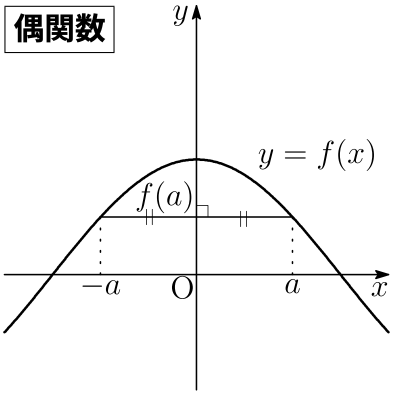
B ≫ 偶関数と奇関数の定積分

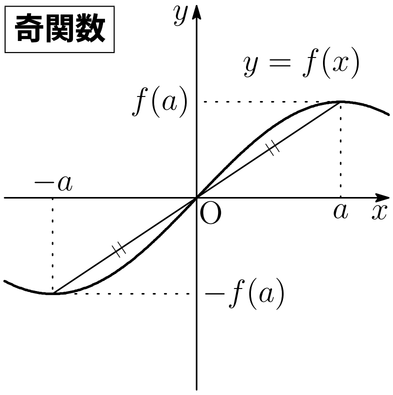
関数 $f(x)$ において

$f(-x) = f(x)$ が常に成り立つとき，この関数を**偶関数**といい，

$f(-x) = -f(x)$ が常に成り立つとき，この関数を**奇関数**という[2].

たとえば，x^2，$\cos x$ は偶関数であり，x，$\sin x$ は奇関数である．





練習 5.20 次の関数の中から，偶関数，奇関数を選べ．

①　x^3　　②　x^4+3　　③　$\tan x$　　④　$x+\cos x$

[2]偶関数のグラフは y 軸について対称で，奇関数のグラフは原点について対称である．

関数 $f(x)$ が偶関数または奇関数のとき，次のことが成り立つ．

偶関数，奇関数と定積分

1　偶関数 $f(x)$ について　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

2　奇関数 $f(x)$ について　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

証明　常に次の等式が成り立つ．

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad \cdots ①$$

$\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ において $x=-t$ とおくと　　$dx = (-1)dt$　　　$\leftarrow \frac{dx}{dt} = -1$

また，x と t の対応は右のようになる．

x	$-a \longrightarrow 0$
t	$a \longrightarrow 0$

よって

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(x)\,dx &= \int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)dt \\ &= \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx\end{aligned}$$

したがって，① から　　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \{f(-x)+f(x)\}dx$

右辺において，$f(x)$ が偶関数ならば $f(-x)=f(x)$，奇関数ならば $f(-x)=-f(x)$ であるから，**1**，**2** が成り立つ．　**証終**

例 5.9　(1)　$f(x)=\cos x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

(2)　$f(x)=\sin x$ は奇関数であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = 0$$

練習 5.21 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2+4x+5)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$

C 》定積分の部分積分

不定積分の部分積分法の公式から，次の公式が得られる.

定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[\,f(x)g(x)\,\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

例題 5.9 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ を求めよ.

解答

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'dx \\ &= \Big[\,x\sin x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x)'\sin x\,dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

練習 5.22 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{1} x e^x \, dx$

(3) $\displaystyle\int_1^{2} x \log x \, dx$

練習 5.23 部分積分法によって，定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+1)^3(x-1)\,dx$ を求めよ．

5.2.3 定積分のいろいろな問題

A 》 定積分と導関数

a を定数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は x の関数である．

$F'(t)=f(t)$ とすると $\qquad \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = F(x)-F(a)$

この両辺の関数を x で微分すると，次の公式が得られる．

定積分と導関数

a が定数のとき $\qquad \boldsymbol{\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}$

練習 5.24 次の関数を x で微分せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^x \sin t\,dt$ $\qquad$ (2) $\displaystyle\int_1^x t\log t\,dt$

応用例題 5.3 関数 $G(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)\cos t\,dt$ の導関数を求めよ．

考え方》 定積分の計算では，積分変数 t と異なる x は定数として扱う．

すなわち，$\displaystyle\int_0^x x\cos t\,dt = x\int_0^x \cos t\,dt$ となる．

なお，$\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt$ は x の関数である．

解答　$G(x) = x\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt - \int_0^x t\cos t\,dt$ であるから

$$\begin{aligned} G'(x) &= (x)'\int_0^x \cos t\,dt + x\left(\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t\,dt\right) - \frac{d}{dx}\int_0^x t\cos t\,dt \\ &= \int_0^x \cos t\,dt + x\cdot\cos x - x\cos x \\ &= \Big[\sin t\Big]_0^x = \sin x \end{aligned}$$

練習 5.25 次の関数 $G(x)$ について，$G'(x)$，$G''(x)$ を求めよ．

$$G(x) = \int_0^x (x-t)e^t\,dt$$

B 》 定積分と和の極限

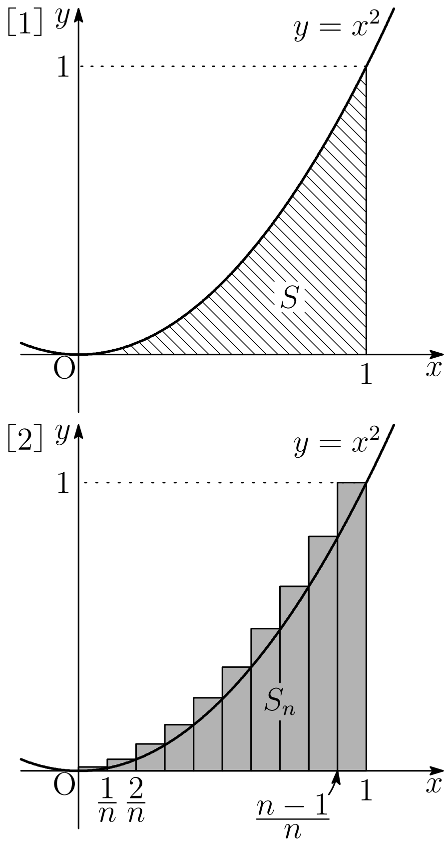
関数 $f(x) = x^2$ について，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積 S を考えてみよう．

定積分を用いて S を求めると

$$S = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

である．

一方，図［2］のように区間 $[0,\ 1]$ を n 等分して n 個の長方形を作り，それらの面積の和を S_n とする．$n \longrightarrow \infty$ のとき，この長方形の集まりは図［1］の斜線で示した図形に限りになく近づくから，$S_n \longrightarrow S$ と予想される．



実際に計算してみよう．

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

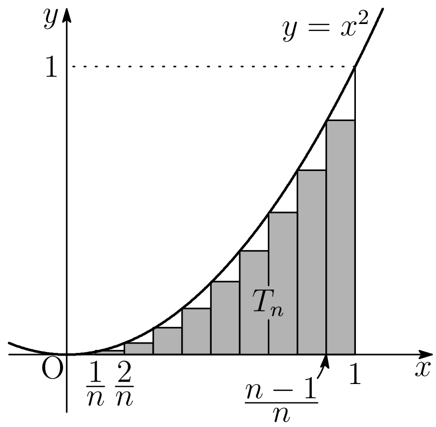
であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$$

よって，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ が成り立つことが計算で確かめられた．

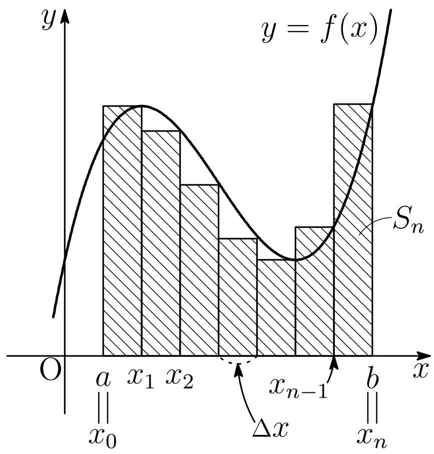
練習 5.26 前ページの S_n の代わりに，右の図［3］の長方形の面積の和 T_n を考えても，$\lim_{n\to\infty} T_n = S$ となることを示せ．

［3］



これまでに示したような方法で，与えられた図形の面積を求めることを，一般に**区分求積法**という．

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，常に $f(x) \geqq 0$ のとき，面積 $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を区分求積法で考えてみよう．



区間 $[a,\ b]$ を n 等分して，その分点の座標を，a に近い方から順に

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{n-1}$$

とし，次のようにおく．

$$a = x_0,\ b = x_n,\ \frac{b-a}{n} = \Delta x$$

このとき，右の図の斜線部分の面積 S_n は

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

であり，$n \longrightarrow \infty$ のとき $S_n \longrightarrow S$ と考えられる．

一般に，常に $f(x) \geqq 0$ と仮定しなくても，次のことが成り立つ．

区分求積法と定積分

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{ただし}\quad \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x$$

上の公式で，とくに $a=0$，$b=1$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$\longleftarrow \Delta x = \frac{1}{n},\ x_k = \frac{k}{n}$

応用例題 5.4 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$ を求めよ.

考え方》 $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形を作るために，$\dfrac{1}{n}$ をくくり出す.

解答 この極限値を S とする.

$$
\begin{aligned}
S &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)
\end{aligned}
$$

ここで，$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ とすると，求める極限値は

$$
S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2
$$

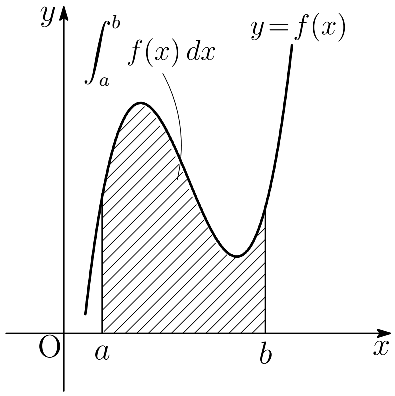
練習 5.27 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{2}{n^3}}+\sqrt{\frac{3}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n^3}}\right)$

C》 定積分と不等式

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続なとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積について考えると，次のことが成り立つ．



> $f(x) \geqq 0$ で，常には $f(x)=0$ でない
>
> ならば　　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$

さらに，次のことが成り立つ．

定積分と不等式

> 区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$，$g(x)$ について
>
> $$\boldsymbol{f(x) \geqq g(x)}\quad \textbf{ならば}\quad \boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx}$$
>
> 等号は，常に $f(x)=g(x)$ のときに成り立つ．

例題 5.10 次のことを示せ．

(1)　$x \geqq 0$ のとき　　$\dfrac{1}{x^2+x+1} \geqq \dfrac{1}{(x+1)^2}$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \frac{1}{2}$

解答　(1)　$x \geqq 0$ のとき　　$x^2+x+1 \leqq (x^2+x+1)+x$

すなわち　　$x^2+x+1 \leqq (x+1)^2$

両辺とも正なので，逆数をとって　　$\dfrac{1}{x^2+x+1} \geqq \dfrac{1}{(x+1)^2}$

(2)　(1) の不等式では，常には $\dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ でないから

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$$

右辺は　　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

よって　　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \frac{1}{2}$

練習 5.28 次のことを示せ．

(1) $x \geqq 0$ のとき　$\dfrac{1}{x^2+x+1} \leqq \dfrac{1}{x+1}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} < \log 2$

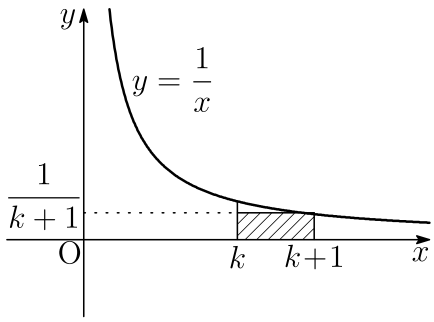
応用例題 5.5 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ．

$$\log n > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n} \qquad \text{ただし，} n \text{ は } 2 \text{ 以上の自然数}$$

考え方》 自然数 k に対して，$k \leqq x \leqq k+1$ では $f(x) \geqq f(k+1)$ である．
常には $f(x)=f(k+1)$ ではないから，
$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx > \int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\,dx$ が成り立つ．

証明 自然数 k に対して，$k \leqq x \leqq k+1$ では

$$\frac{1}{x} \geqq \frac{1}{k+1}$$

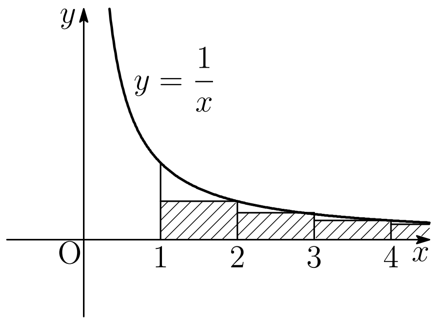


常には $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{k+1}$ ではないから

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx > \int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\,dx$$

すなわち

$$\int_k^{k+1}\frac{dx}{x} > \frac{1}{k+1}$$



$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$ として，
辺々を加えると

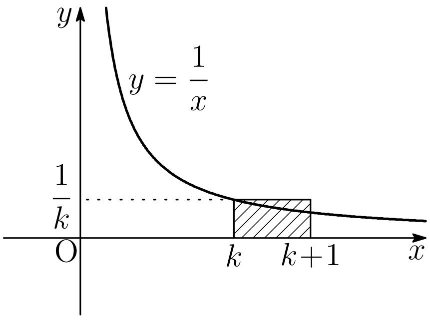
$$\int_1^2\frac{dx}{x}+\int_2^3\frac{dx}{x}+\int_3^4\frac{dx}{x}+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{dx}{x} > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$$

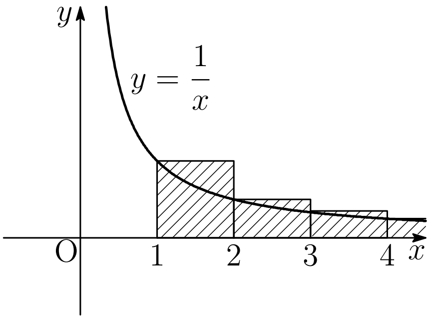
ここで　　左辺 $=\displaystyle\int_1^n\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_1^n=\log n$ 　　$\longleftarrow \log 1 = 0$

したがって　　$\log n > \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ 　　**証終**

練習 5.29 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ．

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1) \qquad \text{ただし，} n \text{ は自然数}$$





5.2.4 補充問題

5 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan\theta\,d\theta$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos^2 2\theta\,d\theta$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(3-x)^2}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\log x\,dx$

6 a を正の定数とする．次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{x^2}{x^2+a^2}\,dx$

7 次の関数を x で微分せよ．ただし，(2) では $x > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_x^{2x} \sin\theta\, d\theta$ (2) $\displaystyle\int_x^{x^2} \log t\, dt$

8 等式 $f(x) = x + \displaystyle\int_0^x f(t)\sin t\, dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

5.3　積分法の応用

5.3.1　面積

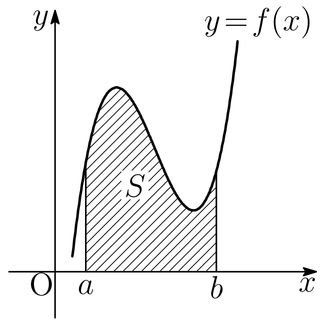
A 》曲線 $y = f(x)$ と面積

曲線 $y = f(x)$ と面積について，次のことが成り立つ．

曲線 $y = f(x)$ と面積

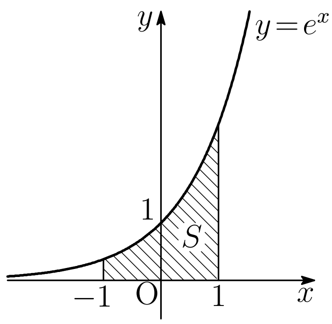
区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積 S は,

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$



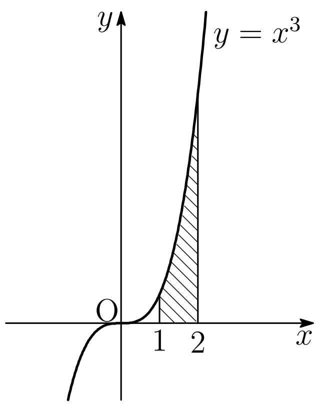
例 5.10 曲線 $y = e^x$ と x 軸および 2 直線 $x = -1$, $x = 1$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_{-1}^{1} e^x\,dx = \Big[e^x\Big]_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e}$$

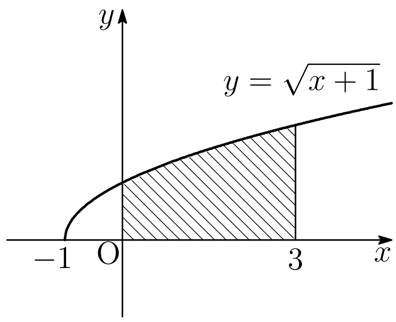


練習 5.30 次の曲線と 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $y = x^3$, $x = 1$, $x = 2$

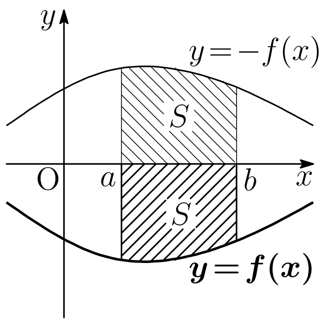


(2) $y=\sqrt{x+1}$, $x=0$, $x=3$



上の公式において，区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \leqq 0$ のときは，S は次の式で表される．

$$\boldsymbol{S=\int_a^b \{-f(x)\}\,dx}$$



例題 5.11 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

$$y=x(x+2)^2$$

解答 この曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

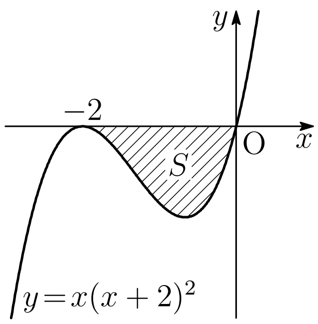
$$x(x+2)^2=0$$

を解いて

$$x=0,-2$$

区間 $-2 \leqq x \leqq 0$ では，常に

$$y \leqq 0$$

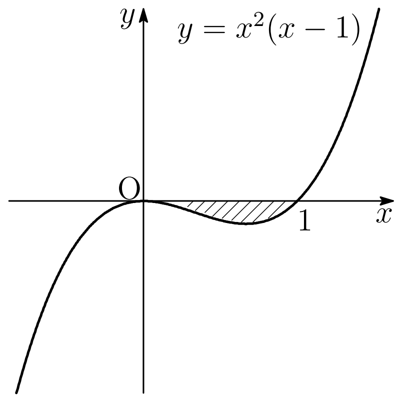


であるから，求める面積 S は，

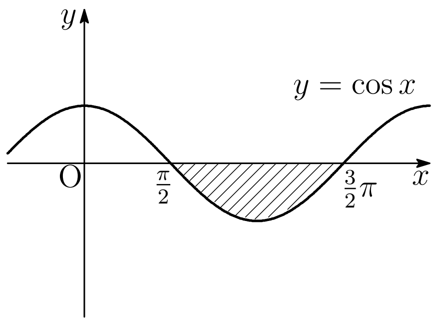
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{0}\{-x(x+2)^2\}\,dx = -\int_{-2}^{0}(x^3+4x^2+4x)\,dx \\ &= -\left[\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{-2}^{0} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

練習 5.31 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) $y = x^2(x-1)$

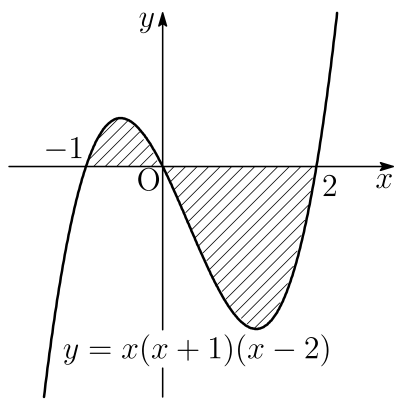


(2) $y = \cos x \ \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$



練習 5.32 次の曲線と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ.

$$y = x(x+1)(x-2)$$

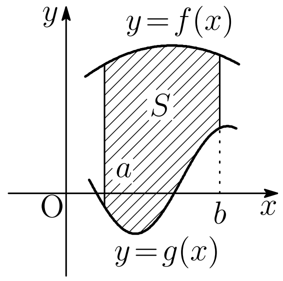


また，数学 II で学んだように，次のことが成り立つ．

2 曲線間の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

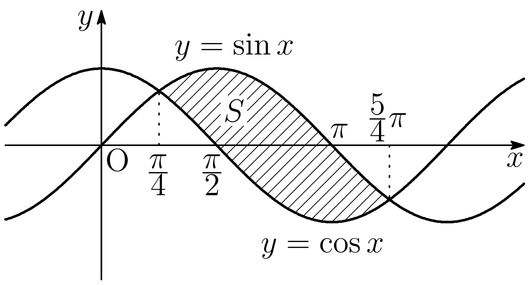
$$\boldsymbol{S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx}$$



例題 5.12 2 つの曲線

$$y=\sin x,\quad y=\cos x$$

で囲まれた右の図の斜線部分の面積 S を求めよ．



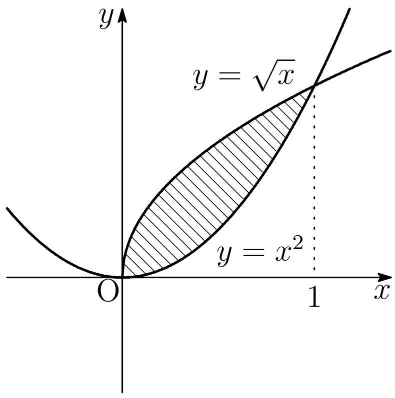
解答 2 つの曲線の共有点の x 座標は，$x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi$ である．

斜線部分の範囲では，$\sin x \geqq \cos x$ であるから

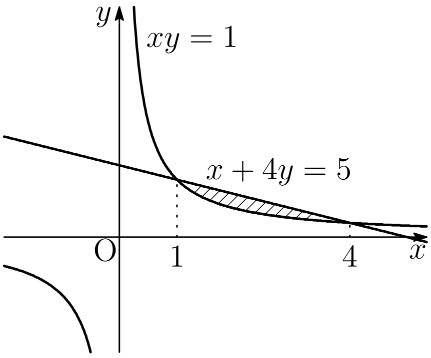
$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)\,dx=\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}=2\sqrt{2}$$

練習 5.33 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $y=x^2$，$y=\sqrt{x}$



(2) $x+4y=5$，$xy=1$



y の関数 $x=g(y)$ で表される曲線については，次のことが成り立つ．

> 区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $g(y) \geqq 0$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分の面積 S は
>
> $$\boldsymbol{S=\int_c^d g(y)\,dy}$$

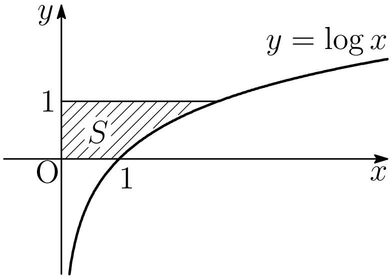
例題 5.13 曲線 $y=\log x$ と x 軸，y 軸および直線 $y=1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答 $y=\log x$ より

$$x=e^y$$

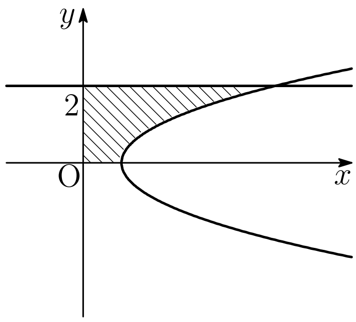
常に $e^y>0$ であるから

$$S=\int_0^1 e^y\,dy=\Big[\ e^y\ \Big]_0^1=e-1$$

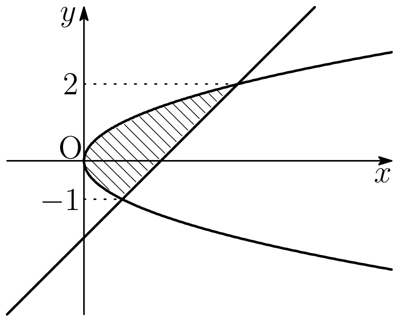


練習 5.34 次の放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) $y^2 = x - 1$, x 軸, y 軸, $y = 2$



(2) $x = y^2$, $x = y + 2$



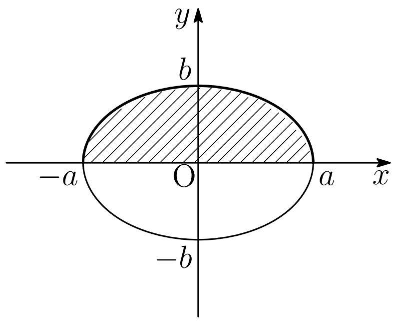
B 》曲線で囲まれた図形の面積

応用例題 5.6 $a>0$，$b>0$ とする．楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ によって囲まれた図形の面積は πab であることを示せ．

考え方 》この楕円は x 軸に関して対称である．$y \geqq 0$ のとき，方程式を y について解き，$y \geqq 0$ の部分を 2 倍すればよい．

解答 求める面積 S は，右の図の斜線部分の面積を 2 倍したものに等しい．
$y \geqq 0$ のとき，方程式を y について解くと

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$



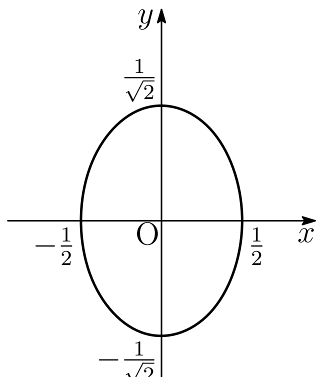
よって $$S=2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は，半径 a の円の面積の半分である．

したがって $$S=\frac{2b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{2}=\pi ab$$

練習 5.35 次の曲線で囲まれた図形の面積を求めよ．

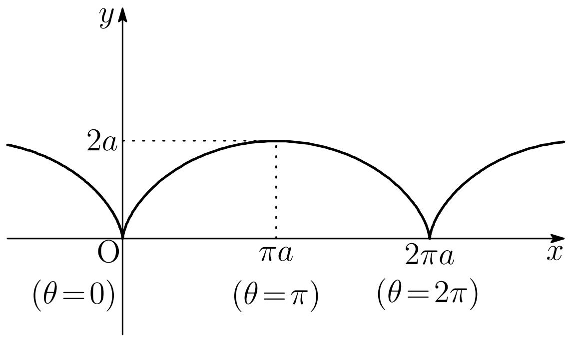
$$4x^2+2y^2=1$$



aを正の定数とする．θを媒介変数として，媒介変数表示

$$x = a(\theta - \sin\theta),$$
$$y = a(1 - \cos\theta)$$

の表す曲線は，右の図のようになる．この曲線を**サイクロイド**という．



応用例題 5.7 $a > 0$ とする．サイクロイド

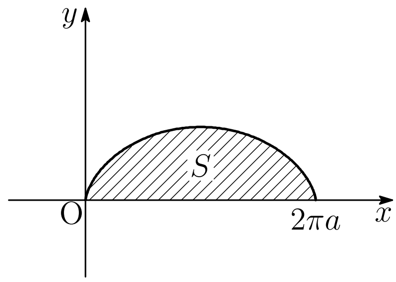
$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta) \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

考え方》曲線が x 軸と交わる点の x 座標は，$x = 0,\ 2\pi a$ であるから，

$S = \displaystyle\int_0^{2\pi a} y\,dx$ である．置換積分法によって求める．

解答 求める面積は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx$$

また，$x = a(\theta - \sin\theta)$ より

$$dx = a(1 - \cos\theta)d\theta$$

$\longleftarrow \dfrac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$

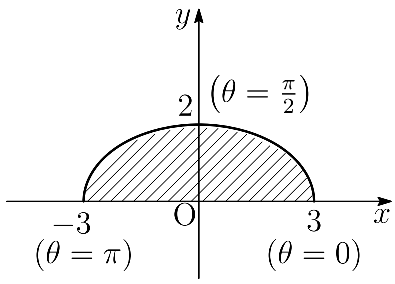
で，x と θ の対応は右のようになる．
よって，置換積分法により

x	$0 \longrightarrow 2\pi a$
θ	$0 \longrightarrow 2\pi$

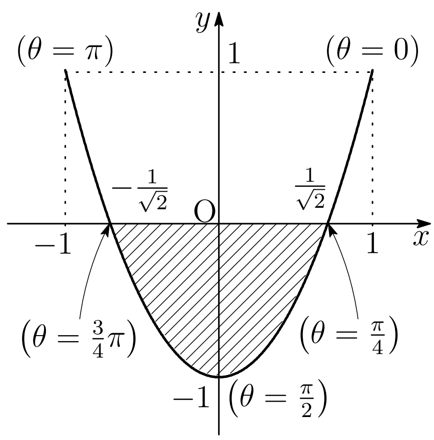
$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi a} y\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta)\cdot a(1 - \cos\theta)\,d\theta \\
&= a^2\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\
&= a^2\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= a^2\left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= 3\pi a^2
\end{aligned}$$

練習 5.36 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $x = 3\cos\theta,\ \ y = 2\sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$



(2) $x = \cos\theta,\ \ y = \cos 2\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$



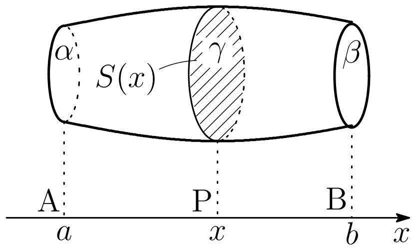
5.3.2　体積

A 》定積分と体積

立体図形の体積を計算する方法を考えよう．

226 ページでは，平面図形の面積を区分求積法によって計算し，定積分を和の極限で表した．立体図形の体積についても，区分求積法の考えを利用して定積分で表すことができる．

右の図のように，1 つの立体が x 軸に垂直な 2 平面 α，β に挟まれているとする．この部分の体積を V とし，2 平面 α，β と x 軸との交点 A，B の座標を，それぞれ a，b とする．ただし，$a < b$ である．



このとき，座標が x である点 P を通り x 軸に垂直な平面 γ による立体の切り口の断面積を $S(x)$ とすると，体積 V は次の式で与えられる．

断面積 $S(x)$ と立体の体積 V

$$V = \int_a^b S(x)\,dx \qquad \text{ただし}\quad a < b$$

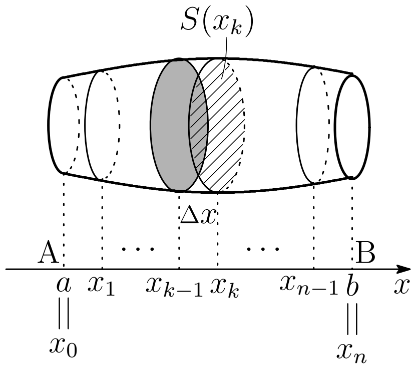
【解説】 区間 $a \leqq x \leqq b$ を n 等分し，その分点の座標を a に近いほうから順に

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{n-1}$$

とする．また，

$$a = x_0,\ b = x_n,\ \frac{b-a}{n} = \Delta x$$

とおく．



そして，各分点を通り x 軸に垂直な平面でこの立体を分割する．

このとき

$$V_n = S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + \cdots + S(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x$$

とすると，$n \longrightarrow \infty$ のとき $V_n \longrightarrow V$ と考えられる．

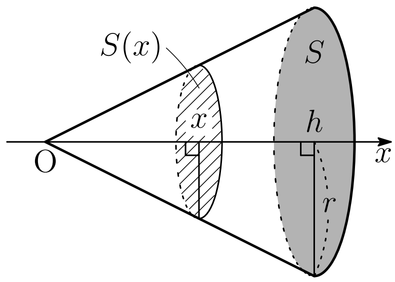
したがって，226 ページの「区分求積法と定積分」の関係から

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x = \int_a^b S(x)\,dx$$

[終]

例題 5.14 底面の半径が r，高さが h の直円錐(すい)の体積 V は，$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ で与えられることを示せ．

解答 この直円錐の頂点から底面に垂線を下ろし，これを x 軸とし，頂点を原点にとる．
座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面による直円錐の切り口の断面積を $S(x)$ とする．



この断面は円であり，底面の円と相似である．また，底面の面積を S とすると，$S=\pi r^2$ である．

断面と底面の相似比は $x:h$ であるから，面積の比は

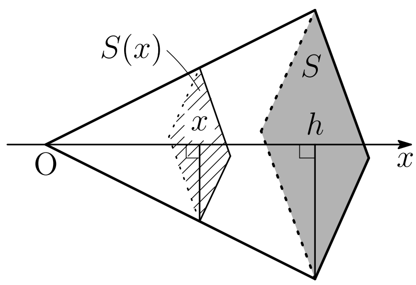
$$S(x):S=x^2:h^2$$

← 相似比が $a:b$ ならば面積の比は $a^2:b^2$

よって　$$S(x)=\frac{S}{h^2}x^2$$

したがって　$$V=\int_0^h S(x)\,dx=\int_0^h \frac{S}{h^2}x^2\,dx=\frac{S}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$
$$=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

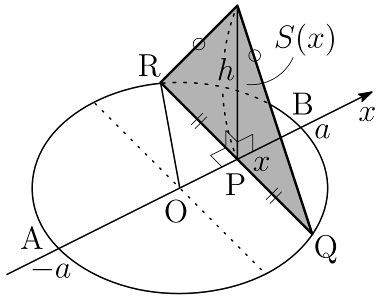
練習 5.37 底面積が S，高さが h の角錐の体積 V は，$V=\frac{1}{3}Sh$ で与えられることを示せ．



応用例題 5.8 半径 a の円 O がある．この直径 AB 上の点 P を通り直線 AB に垂直な弦 QR を底辺とし，高さが h である二等辺三角形を，円 O の面に対して垂直に作る．P が A から B まで動くとき，この三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ．

考え方》 円の中心 O を原点，直線 AB を x 軸にとる．点 P の座標を x とし，二等辺三角形の面積を x の式で表す．

解答 円の中心 O を原点に，直線 AB を x 軸にとる．点 P の座標を x とすると



$$\mathrm{QR} = 2\mathrm{PR} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

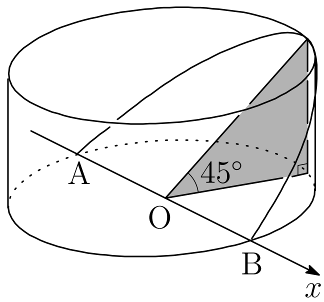
よって，線分 QR を底辺とする高さ h の二等辺三角形の面積 $S(x)$ は

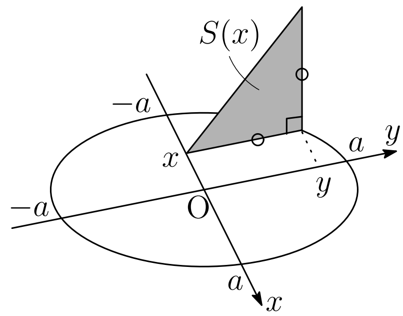
$$S(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{a^2 - x^2} \times h = h\sqrt{a^2 - x^2}$$

したがって

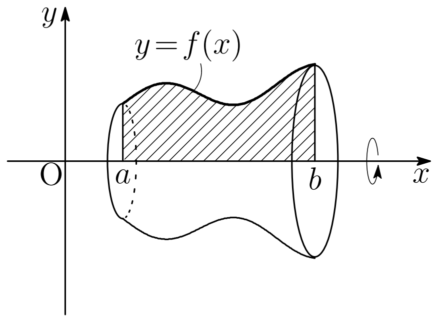
$$V = \int_{-a}^{a} S(x)\,dx = \int_{-a}^{a} h\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = h \times \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi}{2}a^2 h$$

練習 5.38 底面の半径が a で高さも a である直円柱がある．この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きをなす平面で，直円柱を 2 つの立体に分けるとき，小さい方の立体の体積を求めよ．

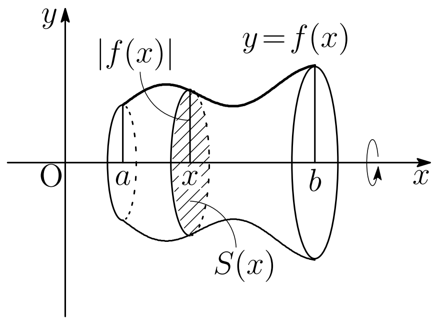




B 》回転体の体積



右の図のように，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を考えてみよう．



点 $(x,\ 0)$ を通り，x 軸に垂直な平面でこの立体を切ると，その断面は半径が $|f(x)|$ の円である．

よって，その断面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=\pi|f(x)|^2=\pi\{f(x)\}^2$$

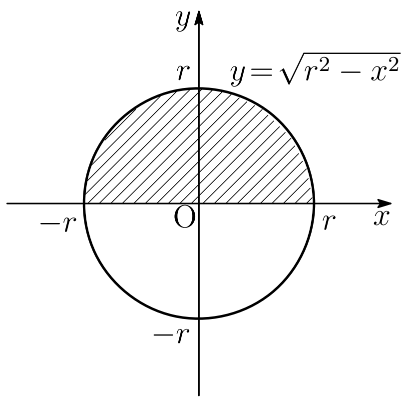
であるから，次の公式が成り立つ．

回転体の体積

$$\boldsymbol{V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx} \qquad \text{ただし}\quad a<b$$

例題 5.15 半径 r の球の体積 V は，$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ で与えられることを示せ．

解答 半径 r の球は，半円 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに1回転するとできる．

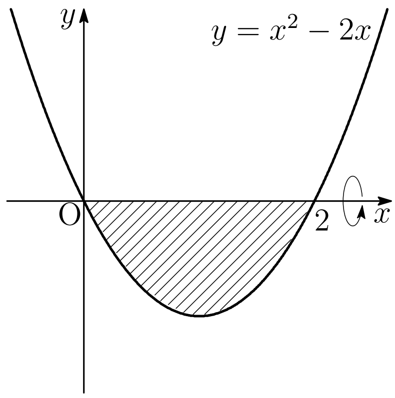


よって

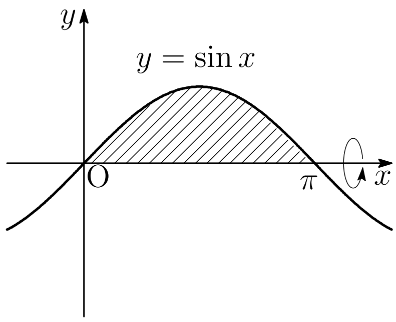
$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-r}^{r} y^2\,dx\\&=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx\\&=2\pi\int_0^r(r^2-x^2)\,dx\\&=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\frac{4}{3}\pi r^3\end{aligned}$$

練習 5.39 次の曲線と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

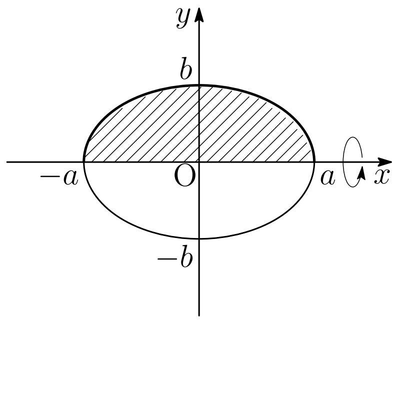
(1) $y = x^2 - 2x$



(2) $y = \sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$



練習 5.40 $a > 0$，$b > 0$ とする．楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

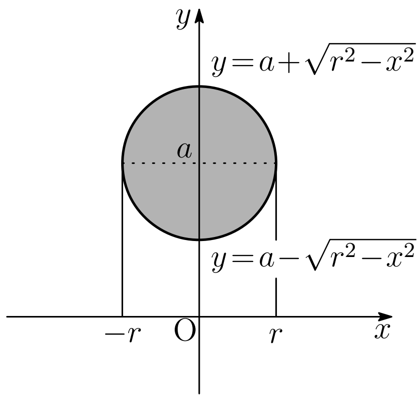


応用例題 5.9　$0 < r < a$ とする．円 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ が x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

考え方》 方程式を y について解く．V は2つの回転体の体積の差になる．

解答　$x^2 + (y-a)^2 = r^2$ を y について解くと

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$



半円 $y = a + \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸および2直線 $x = -r$，$x = r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を V_1，半円 $y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸および2直線 $x = -r$，$x = r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を V_2 とすると

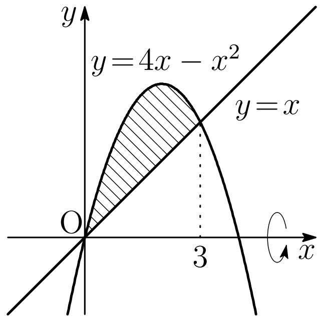
$$V_1 = \pi \int_{-r}^{r} (a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx, \quad V_2 = \pi \int_{-r}^{r} (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx$$

よって

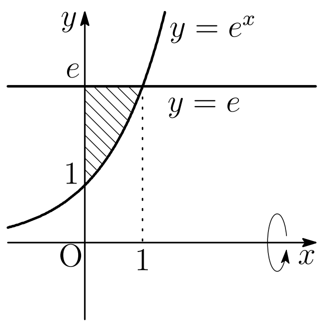
$$\begin{aligned} V = V_1 - V_2 &= 4\pi a \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \\ &= 4\pi a \times \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 r^2 a \end{aligned}$$

補足　応用例題 5.9 の回転体を円環体またはトーラスという．

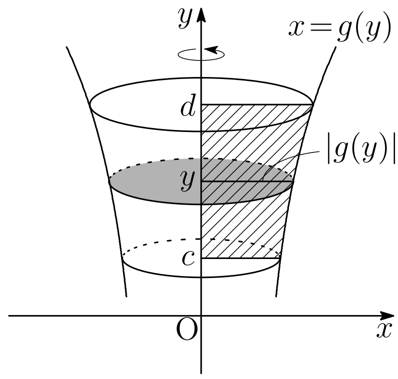
練習 5.41 放物線 $y = 4x - x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．



練習 5.42 曲線 $y = e^x$ と y 軸および直線 $y = e$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．



C》y 軸の周りの回転体の体積



右の図のように，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を考えてみよう．この場合も，x 軸の周りの回転体の体積と同様に考えれば，次の公式が成り立つ．

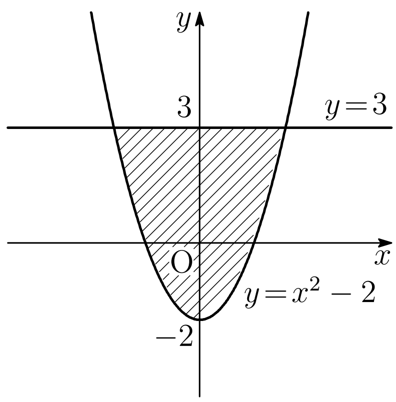
y 軸の周りの回転体の体積

$$\boldsymbol{V=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2\,dy=\pi\int_c^d x^2\,dy} \qquad \text{ただし}\quad c<d$$

例題 5.16 放物線 $y=x^2-2$ と直線 $y=3$ で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

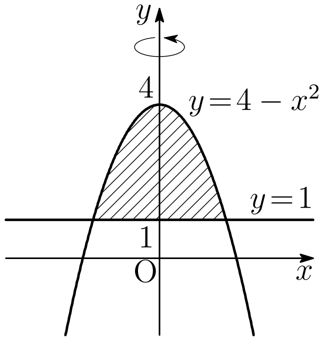
解答

$$\begin{aligned} V&=\pi\int_{-2}^{3} x^2\,dy \\ &=\pi\int_{-2}^{3}(y+2)\,dy \\ &=\pi\left[\frac{y^2}{2}+2y\right]_{-2}^{3} \\ &=\frac{25}{2}\pi \end{aligned}$$

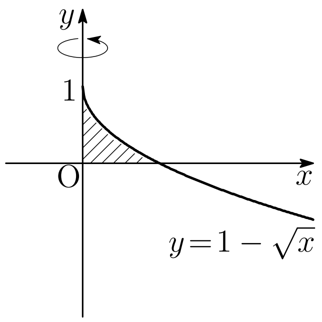


練習 5.43 次の曲線と直線で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

(1) $y = 4 - x^2$，$y = 1$

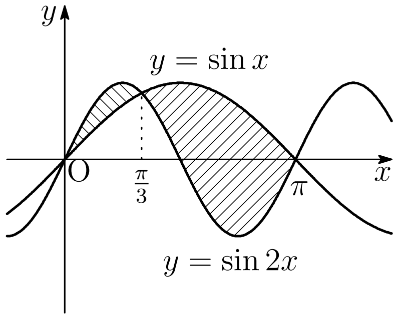


(2) $y = 1 - \sqrt{x}$，x 軸，y 軸

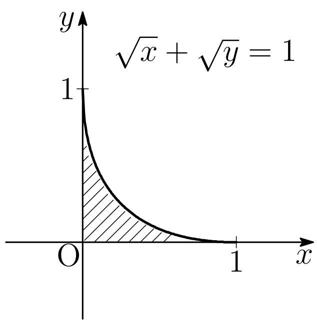


5.3.3　補充問題

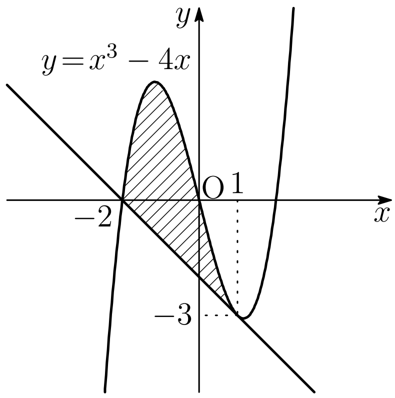
9 $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，2 つの曲線 $y = \sin x$，$y = \sin 2x$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ．



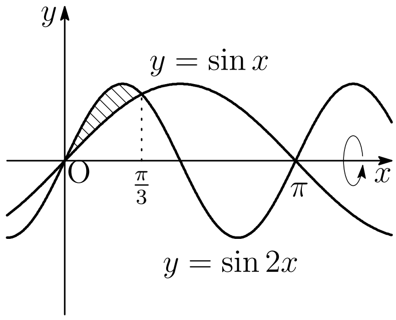
10 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．



11 曲線 $y = x^3 - 4x$ と，その上の点 $(1, -3)$ における接線とで囲まれた部分の面積を求めよ.



12 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ の範囲において，2 つの曲線 $y = \sin x$，$y = \sin 2x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.



5.4　章末問題

5.4.1　章末問題 A

1 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $e^x\sqrt{e^x+1}$

(2) $\dfrac{x}{(x-1)^3}$

(3) $\dfrac{x}{x^2-3x+2}$

(4) $\cos^5 x$

(5) $\dfrac{1}{e^x - e^{-x}}$

(6) $2x\log(x^2+1)$

2 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e x^2 \log x \, dx$

(4) $\displaystyle\int_0^4 |(x-4)(x-1)^3|\,dx$

(5) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

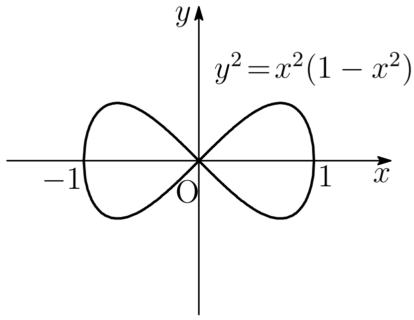
(6) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$

3 m，n を自然数とする．定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt \, dt$ を，$m \neq n$，$m = n$ の場合に分けて求めよ．

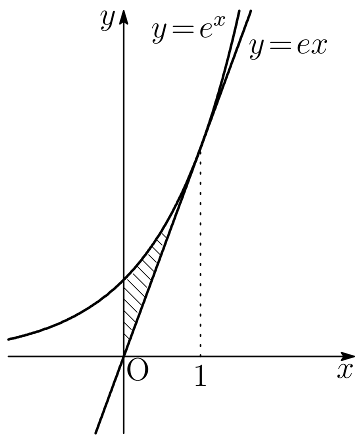
4 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$$

5 曲線 $y^2 = x^2(1 - x^2)$ で囲まれた部分の面積の和を求めよ．



6 曲線 $y = e^x$ とこの曲線上の点 $(1,\ e)$ における接線および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．また，この部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．



5.4.2　章末問題 B

7 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+3)}$

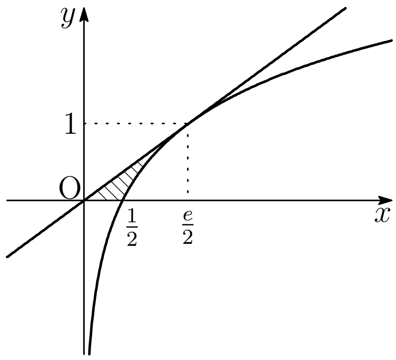
(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

8 a を定数とする．定積分 $I = \displaystyle\int_0^1 (e^x - ax)^2\,dx$ を最小にする a の値と，I の最小値を求めよ．

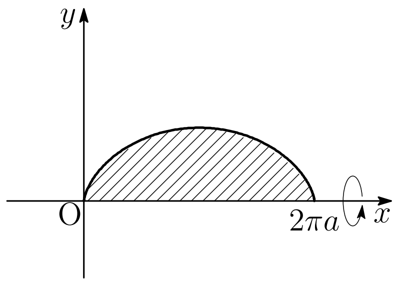
9 連続な関数 $f(x)$ について，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$ を証明せよ．

10 a を正の定数とする．$x > 0$ で定義された関数 $f(x)$ が等式 $\displaystyle\int_a^{x^2} f(t)\,dt = \log x$ を満たすように，$f(x)$ と a の値を定めよ．

11 原点から曲線 $y = \log 2x$ に引いた接線とこの曲線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．



12 サイクロイド $x = a(\theta - \sin\theta)$，$y = a(1 - \cos\theta)$　$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．



ヒント

7　(1) $\dfrac{1}{x^2(x+3)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x+3}$ と分解する．

(2) $\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin x}{1 - \cos^2 x}$

9　置換積分法を利用する．

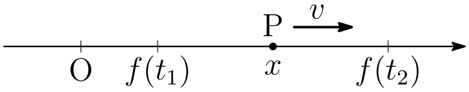
第 6 章　発展

6.1.1　道のり

■速度と位置

　数直線上を運動する点 P の座標や速度は，時刻 t の関数である．時刻 t における点 P の座標を $x = f(t)$，速度を v とすると，167 ページで学んだように，

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$



が成り立つ．
よって，点 P の $t = t_1$ から $t = t_2$ までの位置の変化量 $f(t_2) - f(t_1)$ は，

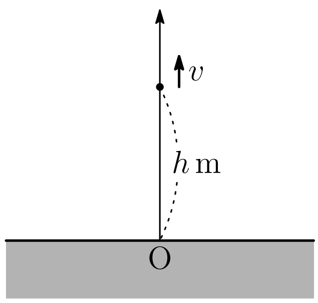
$$f(t_2) - f(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$

で表される．
　したがって，時刻 $t = t_2$ における点 P の座標 x は，次のようになる．

$$\boldsymbol{x = f(t_2) = f(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v\,dt}$$

例 6.1 30m/秒の速さで地上から真上に打ち上げられた物体の t 秒後の速度 v m/秒は，$v = 30 - 9.8t$ で与えられるという．ただし，$0 \leqq t \leqq 6$ である．打ち上げられてから 2 秒後における物体の高さ h m は

$$h = \int_0^2 (30 - 9.8t)\,dt = \Big[\,30t - 4.9t^2\,\Big]_0^2$$
$$= 60 - 19.6 = 40.4\ (\mathrm{m})$$

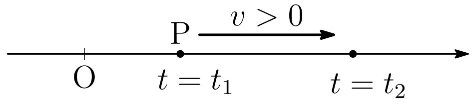


■道のり

数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度を v とし，時刻 t_1 から t_2 までに点 P が通過する道のりを s とする．

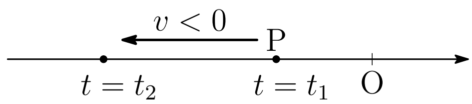
$t_1 \leqq t \leqq t_2$ において常に $v > 0$ ならば，
前ページで調べたことから

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$



である．また，$t_1 \leqq t \leqq t_2$ において常に
$v < 0$ ならば

$$s = \int_{t_1}^{t_2} (-v)\,dt$$



である．

以上のことから，時刻 t_1 から t_2 までに点 P が通過する道のり s は，v の正負に関係なく次の式で表される．

$$\boldsymbol{s = \int_{t_1}^{t_2} |v|\,dt}$$

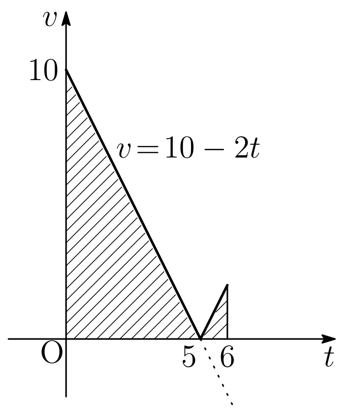
ここで，$|v|$ は点 P の速度の大きさ，すなわち速さを表している．

例 6.2　数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度 v が，

$$v = 10 - 2t \quad (0 \leqq t \leqq 6)$$

で与えられるとき，$t = 0$ から $t = 6$ までに点 P が通過する道のり s は

$$\begin{aligned} s &= \int_0^6 |10 - 2t|\,dt \\ &= \Big[10t - t^2\Big]_0^5 + \Big[-10t + t^2\Big]_5^6 \\ &= (25 - 0) + \{-24 - (-25)\} = 26 \end{aligned}$$

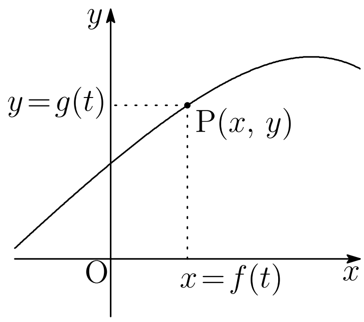


補足　例 6.2 において，点 P の道のり s は，斜線部の面積に等しい．

■座標平面上の運動における道のり

座標平面上を運動する点 P の道のりについて考えてみよう．

点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ を

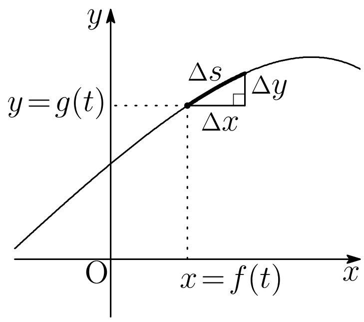


$$x = f(t),\ y = g(t)$$

とする．いま，時刻 t_1 から t までに点 P が通過する道のりを t の関数とみて，$s(t)$ で表す．また，t の増分 Δt に対する

$$s(t),\ x = f(t),\ y = g(t)$$

の増分を，それぞれ



$$\Delta s, \quad \Delta x, \quad \Delta y$$

とする．

$\Delta t > 0$ で Δt が十分小さいときは

$$\Delta s \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

と考えられるから

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \fallingdotseq \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

である．$\Delta t < 0$ のときも同様である．

ここで，$\Delta t \longrightarrow 0$ のときの極限を考えると，次が成り立つ．

$$s'(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

169 ページで学んだように，時刻 t における点 P の速度ベクトル $\vec{v}$ は $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$ であり，上の結果から，$s'(t) = |\vec{v}|$ が成り立つ．

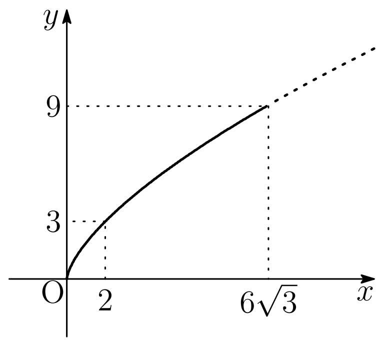
以上のことから，時刻 t_1 から t_2 までに点 P が通過する道のり s は，次の式で表される．

$$\boldsymbol{s = s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}|\,dt}$$

例 6.3 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が

$$x = 2t^3,\ y = 3t^2$$

で表されるとき，P が $t = 0$ から $t = \sqrt{3}$ までに通過する道のり s は



$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(6t^2)^2 + (6t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} 6t\sqrt{t^2+1}\, dt \end{aligned}$$

ここで，$t^2 + 1 = u$ とおくと，$2t\,dt = du$ と考えられるから

t	$0 \longrightarrow \sqrt{3}$
u	$1 \longrightarrow\ 4$

$$s = \int_1^4 3\sqrt{u}\, du = \Big[\, 2u\sqrt{u} \,\Big]_1^4 = 14$$

練習 6.1 数直線上を運動する点 P があり，時刻 t における P の速度は $v = \sin t + \sin 2t$ であるという．ただし，$t = 0$ のとき，P は原点にあるとする．

(1) 時刻 t における P の座標を求めよ．

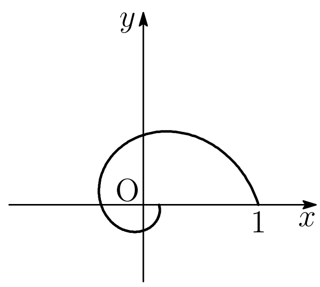
(2) $t = 0$ から $t = \pi$ までに P が通過する道のりを求めよ．

【答】 (1) $-\cos t - \dfrac{1}{2}\cos 2t + \dfrac{3}{2}$　(2) $\dfrac{5}{2}$

練習 6.2 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が

$$x = e^{-t}\cos \pi t, \quad y = e^{-t}\sin \pi t$$

で表されるとき，$t = 0$ から $t = 2$ までに P が通過する道のりを求めよ．



【答】 $\sqrt{1+\pi^2}(1 - e^{-2})$

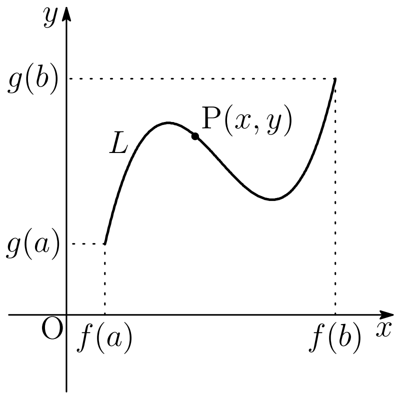
6.1.2　曲線の長さ

■媒介変数表示された曲線の長さ

座標平面上の曲線 C が，媒介変数 t を用いて

$$x = f(t),\quad y = g(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$$

で表されているとき，この曲線の長さ L を求めてみよう．



曲線 C 上の点 P の座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として

$$x = f(t),\quad y = g(t)$$

で表されると考えると，P が時刻 a から b までに通過する道のりが，この曲線の長さ L になる．

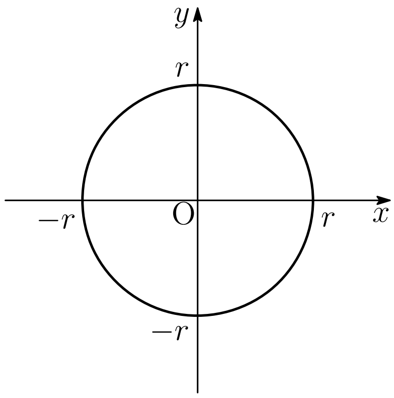
したがって，L は次の式で表される．

$$\boldsymbol{L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt}$$
$$\boldsymbol{= \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\, dt}$$

例 6.4 $r > 0$ とするとき，曲線

$$x = r\cos t,\quad y = r\sin t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

の長さ L を求めてみよう．

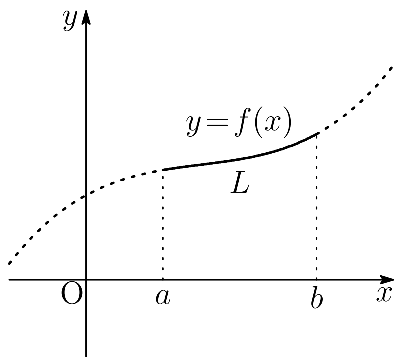


$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} r\, dt = r\Big[\ t\ \Big]_0^{2\pi} = 2\pi r$$

例 6.4 によって，半径 r の円の周の長さが $2\pi r$ になることが示された．

■曲線 $y=f(x)$ の長さ

次の曲線の長さ L を考えてみよう．



$$y=f(x) \quad (a \leqq x \leqq b)$$

この曲線は，媒介変数 t を用いて

$$x=t,\ y=f(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$$

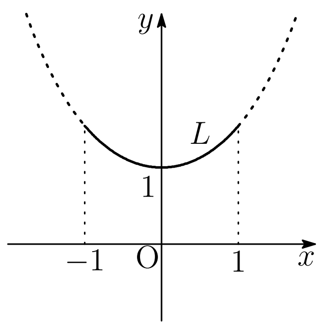
と表される．

$$\frac{dx}{dt}=1,\ \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f'(x)$$

であることから，この曲線の長さ L は，次の式で表される．

$$\boldsymbol{L=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}$$

例 6.5 曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ の長さ L を求めてみよう．



$y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ であるから

$$1+y'^2=1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$$

よって

$$L=\int_{-1}^1 \sqrt{1+y'^2}\,dx=2\int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1=e-\frac{1}{e}$$

練習 6.3 a を正の定数とする．次のサイクロイドの長さを求めよ．

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t) \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

【答】 $8a$

練習 6.4 a を正の定数とする．次の曲線の長さを求めよ．

$$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

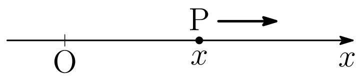
【答】 $\dfrac{3}{2}a$

6.1.3　微分方程式

■微分方程式

点 P が x 軸上を等速度 a で運動する場合，時刻 t における P の座標を x とすると，x は t の関数であって，

$$\frac{dx}{dt} = a \qquad \cdots ①$$

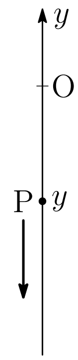


を満たす．

また，物体が地点 O から自由に落下する場合，鉛直上向きの直線を y 軸にとり，時刻 t における物体の位置を座標 y で表すと，y は t の関数であって，

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \qquad \cdots ②$$

を満たす．ただし，g は重力加速度の大きさである．



等式 ①，② のように，未知の関数の導関数を含む等式を**微分方程式**という．

■微分方程式の解き方

a，g を定数とするとき，上の微分方程式 ①，② を満たす関数を，それぞれ求めてみよう．

① において，両辺を t で積分すると

$$y = at + C, \qquad C \text{ は任意の定数} \qquad \cdots ③$$

② において，両辺を t で積分すると

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1, \qquad C_1 \text{ は任意の定数}$$

さらに，両辺を t について積分すると

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \qquad C_1,\ C_2 \text{ は任意の定数} \qquad \cdots ④$$

以上のことから，微分方程式 ① を満たす関数は ③，微分方程式 ② を満たす関数は ④ であることがわかる．

一般に，微分方程式を満たす関数を，その微分方程式の**解**といい，すべての解を求めることを，その微分方程式を**解く**という．

微分方程式を解くと，いくつかの任意の定数を含んだ解が得られる．その定数に特定の値を与えれば，解の 1 つが定まる．

例 6.6 y を x の関数，k を定数とするとき，次の微分方程式を解いてみよう．

$$y' = ky$$

［1］定数関数 $y=0$ は明らかに解である．

［2］$y \neq 0$ のとき，方程式を変形すると

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = k$$

よって　$$\int \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx = \int k\,dx$$

左辺に置換積分法の公式を適用すると

$$\int \frac{1}{y}dy = \int k\,dx$$

ゆえに　$\log|y| = kx + C$，C は任意の定数

$$|y| = e^C e^{kx}$$

すなわち　$$y = \pm e^C e^{kx}$$

ここで，$\pm e^C = A$ とおくと A は 0 以外の任意の値をとる．

［1］で求めた解 $y=0$ は，$y = Ae^{kx}$ において，$A=0$ とおくと得られる．
したがって，求める解は　$y = Ae^{kx}$，A は任意の定数　**[終]**

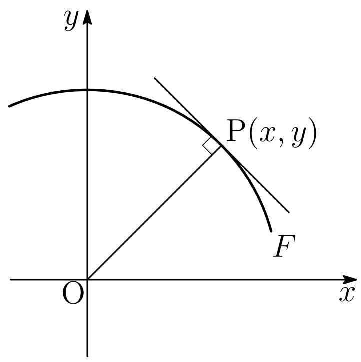
一般に，　$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

の形に変形できる微分方程式の解は，次の等式から求めることができる．

$$\boldsymbol{\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx}$$

例 6.7 曲線 F 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ における接線が，原点 O と点 P を結ぶ直線に常に垂直であるという．この曲線が点 $(3,\ 4)$ を通るとき，この曲線 F の方程式を求めてみよう．

点 P における接線が直線 OP と垂直であるから，それらの傾きの積は，



$xy \neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{y}{x} = -1$

すなわち　$y\dfrac{dy}{dx} = -x$

両辺を x で積分すると

$$\int y\,dy = \int (-x)\,dx$$

よって　$\dfrac{1}{2}y^2 = -\dfrac{1}{2}x^2 + C$

ゆえに　$x^2 + y^2 = 2C$，C は任意の定数

この曲線が点 $(3,\ 4)$ を通るから　$3^2 + 4^2 = 2C$

よって，$x^2 + y^2 = 25$ で，$xy = 0$ のときも条件を満たす．

したがって，曲線 F の方程式は　$x^2 + y^2 = 25$　**[終]**

例 6.7 において，$\sqrt{2C} = r$ とおくと，この方程式は $x^2 + y^2 = r^2$ となり，曲線が原点を中心とする任意の半径の円であることがわかる．

練習 6.5 y を x の関数とするとき，微分方程式 $y' = 2xy$ を解け．

【答】 $y = Ae^{x^2}$，A は任意の定数

練習 6.6 A を 0 でない任意の定数として，方程式 $xy = A$ の表す直角双曲線全体を考える．これらの直角双曲線のどれとも直交するような曲線の方程式を求めよ．ただし，2 つの曲線が直交するとは，2 つの曲線の交点におけるそれぞれの接線が垂直に交わることである．

【答】 $x^2 - y^2 = C$，C は任意の定数