高校生の

新 編 数 学 III

解答編

平成 21 年 3 月 22 日

Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

目 次

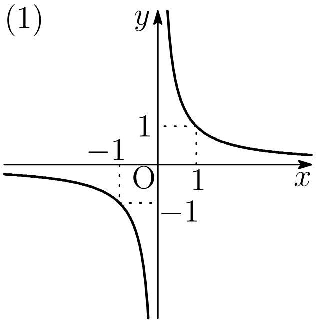
第 1 章　関数

1.1.1　分数関数

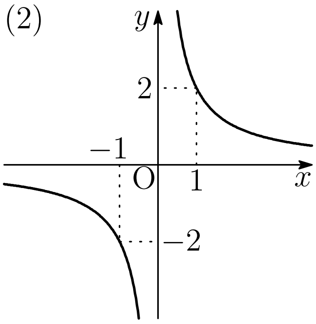
練習 1.1 次の関数のグラフをかけ.

(1)　$y = \dfrac{1}{x}$　　(2)　$y = \dfrac{2}{x}$　　(3)　$y = -\dfrac{3}{x}$

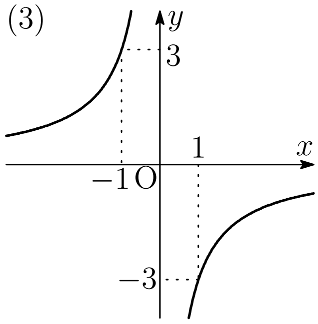
【答】 (1)



(2)



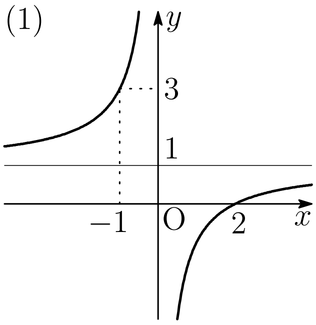
(3)



練習 1.2 次の関数のグラフをかけ．また，その定義域，値域を求めよ.

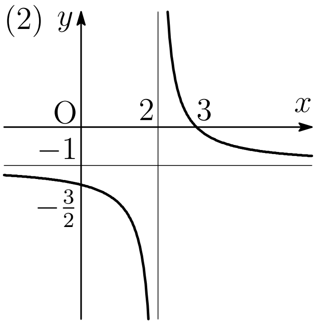
(1)　$y = -\dfrac{2}{x} + 1$　　(2)　$y = \dfrac{1}{x-2} - 1$　　(3)　$y = \dfrac{2}{x+1} - 3$

【答】 (1)



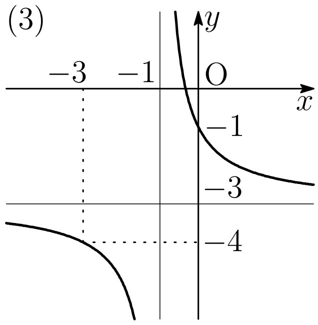
定義域 $x \neq 0$
値域 $y \neq 1$

(2)



定義域 $x \neq 2$
値域 $y \neq -1$

(3)



定義域 $x \neq -1$
値域 $y \neq -3$

練習 1.3 次の関数のグラフをかけ．また，その定義域，値域を求めよ．

(1) $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ (2) $y=\dfrac{-2x+5}{x-1}$ (3) $y=\dfrac{3x+1}{x+1}$

【解】(1) $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{(x-2)+1}{x-2}$ であるから $y=\dfrac{1}{x-2}+1$

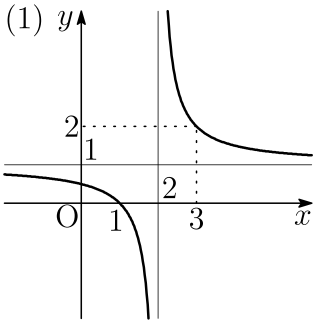
よって，定義域は $x\neq 2$，値域は $y\neq 1$ である．

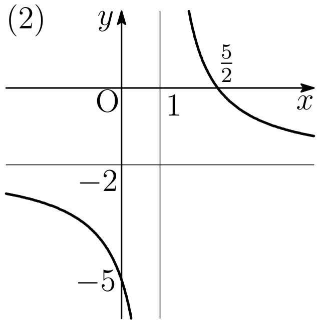
(2) $\dfrac{-2x+5}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+3}{x-1}$ であるから $y=\dfrac{3}{x-1}-2$

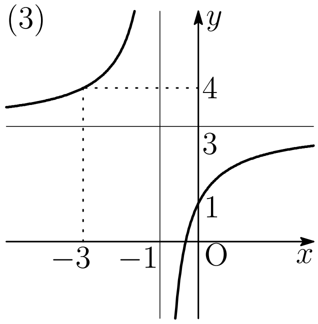
よって，定義域は $x\neq 1$，値域は $y\neq -2$ である．

(3) $\dfrac{3x+1}{x+1}=\dfrac{3(x+1)-2}{x+1}$ であるから $y=-\dfrac{2}{x+1}+3$

よって，定義域は $x\neq -1$，値域は $y\neq 3$ である．







練習 1.4 関数 $y=\dfrac{3}{x+1}$ のグラフと次の直線の共有点の座標を求めよ．

(1) $y=x-1$ (2) $y=\dfrac{1}{2}x$ (3) $y=-3$

【解】 (1) $\dfrac{3}{x+1}=x-1$ より $3=(x-1)(x+1)$

すなわち $x^2-4=0$ これを解くと $x=2,-2$

$y=x-1$ であるから，求める共有点の座標は $(2,\ 1),\ (-2,-3)$

(2) $\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{1}{2}x$ より $6=x(x+1)$

すなわち $x^2+x-6=0$ これを解くと $x=-3,\ 2$

$y=\dfrac{1}{2}x$ であるから，求める共有点の座標は $\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$，$(2,\ 1)$

(3) $\dfrac{3}{x+1}=-3$ より $3=-3(x+1)$ すなわち $x=-2$

よって，求める共有点の座標は $(-2,-3)$

練習 1.5 次の不等式を解け.

(1)　$\dfrac{2}{x-1} < x$　　(2)　$\dfrac{2}{x+2} \geqq 3$　　(3)　$\dfrac{1}{x-1} \leqq 1$

【解】 (1) 関数 $y = \dfrac{2}{x-1}$ のグラフと直線 $y = x$ の共有点の x 座標は

$\dfrac{2}{x-1} = x$ より　$2 = x(x-1)$

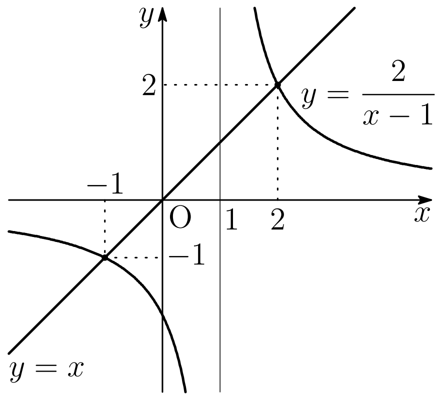
すなわち　$x^2 - x - 2 = 0$

これを解くと　$x = -1,\ 2$

グラフから，不等式

$$\frac{2}{x-1} < x$$

の解は　$-1 < x < 1,\ 2 < x$



(2) 関数 $y = \dfrac{2}{x+2}$ のグラフと直線 $y = x + 3$ の共有点の x 座標は

$\dfrac{2}{x+2} = x + 3$ より

$$2 = (x+3)(x+2)$$

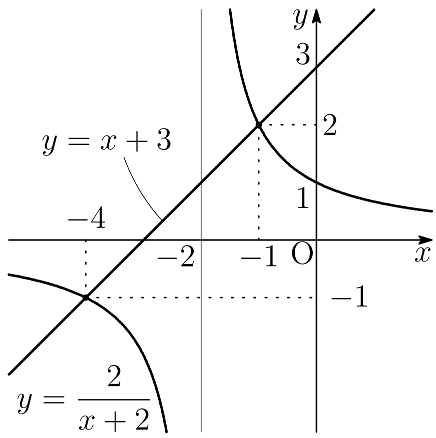
すなわち　$x^2 + 5x + 4 = 0$

これを解くと　$x = -4, -1$

グラフから，不等式

$$\frac{2}{x+2} \geqq x + 3$$

の解は　$x \leqq -4,\ -2 < x \leqq -1$



(3) 関数 $y = \dfrac{1}{x-1}$ のグラフと直線 $y = 1$ の共有点の x 座標は

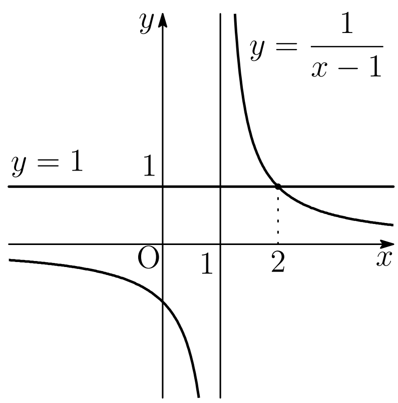
$\dfrac{1}{x-1} = 1$ より　$1 = x - 1$

すなわち　$x = 2$

グラフから，不等式

$$\frac{1}{x-1} \leqq 1$$

の解は　$x < 1,\ 2 \leqq x$

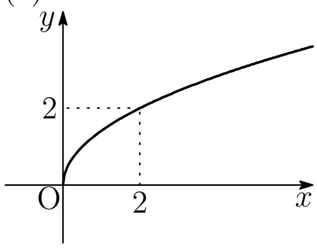


1.1.2 無理関数

練習 1.6 次の関数のグラフをかけ．また，その定義域，値域を求めよ．

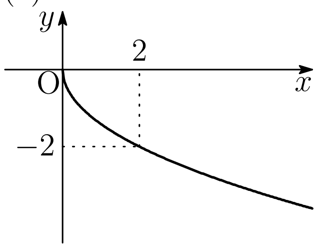
(1) $y=\sqrt{2x}$　　(2) $y=-\sqrt{2x}$　　(3) $y=\sqrt{-2x}$

【答】 (1)



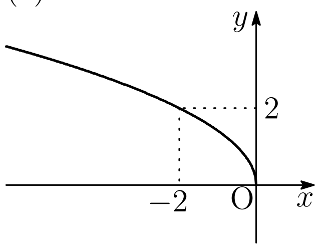
定義域 $x \geqq 0$
値域 $y \geqq 0$

(2)



定義域 $x \geqq 0$
値域 $y \leqq 0$

(3)



定義域 $x \leqq 0$
値域 $y \geqq 0$

練習 1.7 次の関数のグラフをかけ．また，その定義域，値域を求めよ．

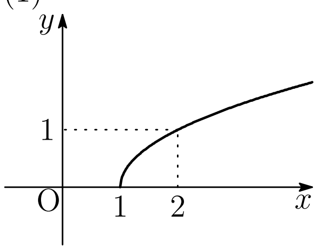
(1) $y=\sqrt{x-1}$　　(2) $y=\sqrt{-2x+4}$　　(3) $y=-\sqrt{3x+3}$

【解】 (1) 求めるグラフは，$y=\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである．定義域は $x \geqq 1$，値域は $y \geqq 0$ である．

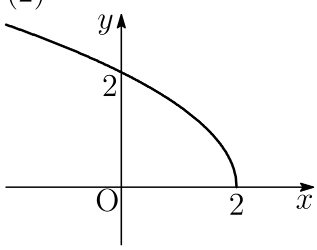
(2) 変形すると　$y=\sqrt{-2(x-2)}$
このグラフは，$y=\sqrt{-2x}$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したものである．定義域は $x \leqq 2$，値域は $y \geqq 0$ である．

(3) 変形すると　$y=-\sqrt{3(x+1)}$
このグラフは，$y=-\sqrt{3x}$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したものである．定義域は $x \geqq -1$，値域は $y \leqq 0$ である．

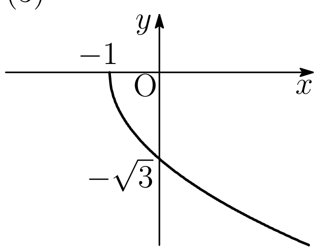
(1)



(2)



(3)



練習 1.8 次の 2 つの関数について，グラフの共有点の座標を求めよ．

(1)　$y=\sqrt{2x+2}$，$y=x-3$　　　(2)　$y=-\sqrt{x+1}$，$y=x-1$

【解】 (1)　$\sqrt{2x+2}=x-3$　$\cdots$ ① の両辺を 2 乗して整理すると　$x^2-8x+7=0$
これを解いて　　$x=1,\ 7$
このうち，① を満たすのは $x=7$ で，このとき ① の両辺の値は 4 である．
よって，共有点の座標は　　$(7,\ 4)$

(2)　$-\sqrt{x+1}=x-1$　$\cdots$ ① の両辺を 2 乗して整理すると　$x^2-3x=0$
これを解いて　　$x=0,\ 3$
このうち，① を満たすのは $x=0$ で，このとき ① の両辺の値は -1 である．よって，共有点の座標は　　$(0,-1)$

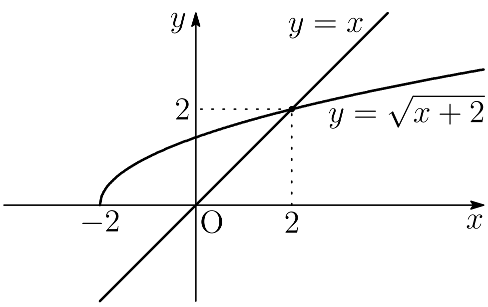
練習 1.9 次の不等式を解け．

(1)　$\sqrt{x+2}\leqq x$　　　(2)　$-\sqrt{x+2}>x$

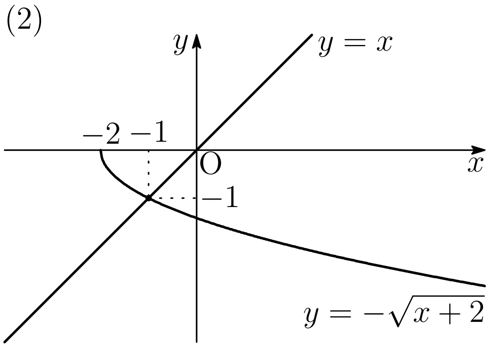
【解】 (1)　$\sqrt{x+2}=x$ より　　$x^2-x-2=0$
これを解くと　　$x=-1,\ 2$
このうち，等式 $\sqrt{x+2}=x$ を満たすのは $x=2$ で，
このとき両辺の値は 2 である．
グラフから，不等式 $\sqrt{x+2}\leqq x$ を解くと　　$x\geqq 2$

(2)　$-\sqrt{x+2}=x$ より　　$x^2-x-2=0$
これを解くと　　$x=-1,\ 2$
このうち，等式 $-\sqrt{x+2}=x$ を満たすのは $x=-1$ で，
このとき両辺の値は -1 である．
グラフから，不等式 $-\sqrt{x+2}>x$ を解くと　　$-2\leqq x<-1$

(1)



(2)



1.1.3　逆関数と合成関数

練習 1.10 次の関数の逆関数を求めよ．

(1)　$y = 2x - 1 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$　　　(2)　$y = -\sqrt{x}$

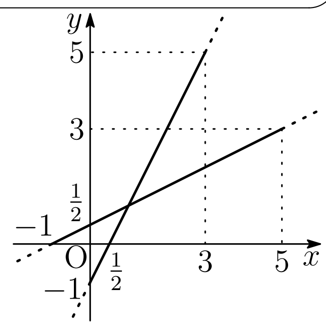
【解】(1)　与えられた関数の値域は　$-1 \leqq y \leqq 5$

$y = 2x - 1$ を x について解くと

$$x = \frac{y+1}{2} \quad (-1 \leqq y \leqq 5)$$

x と y を入れ替えて，求める逆関数は

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (-1 \leqq x \leqq 5)$$



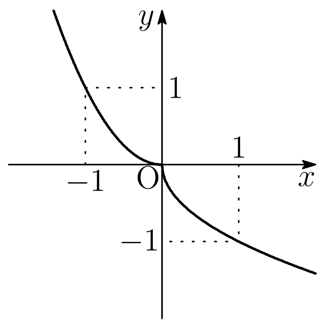
(2)　与えられた関数の値域は　$y \leqq 0$

$y = -\sqrt{x}$ を x について解くと

$$x = y^2 \quad (y \leqq 0)$$

x と y を入れ替えて，求める逆関数は

$$y = x^2 \quad (x \leqq 0)$$



練習 1.11 次の関数の逆関数を求めよ．

(1)　$y = 3^x$　　　(2)　$y = \log_4 x$

【解】(1)　$y = 3^x$ を x について解くと　　$x = \log_3 y$

x と y を入れ替えて，求める逆関数は　　$y = \log_3 x \quad (x > 0)$

(2)　$y = \log_4 x$ を x について解くと　　$x = 4^y$

x と y を入れ替えて，求める逆関数は　　$y = 4^x$

練習 1.12 次の関数の逆関数を求めよ.

(1)　$y = \dfrac{2x+3}{x-1}$　　(2)　$y = \dfrac{-x+2}{x+3}$

【解】 (1)　$\dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{5}{x-1} + 2$ であるから,

関数 $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ の値域は $y \neq 2$ である.

$y(x-1) = 2x+3$ より　$(y-2)x = y+3$

ここで, $y \neq 2$ であるから　$x = \dfrac{y+3}{y-2}$

よって, 求める逆関数は　$y = \dfrac{x+3}{x-2}$

(2)　$\dfrac{-x+2}{x+3} = \dfrac{5}{x+3} - 1$ であるから,

関数 $y = \dfrac{-x+2}{x+3}$ の値域は $y \neq -1$ である.

$y(x+3) = -x+2$ より　$(y+1)x = -3y+2$

ここで, $y \neq -1$ であるから　$x = \dfrac{-3y+2}{y+1}$

よって, 求める逆関数は　$y = \dfrac{-3x+2}{x+1}$

練習 1.13 次の関数の逆関数を求めよ.

(1)　$y = x^2 + 2$　$(x \geqq 0)$　　(2)　$y = -x^2$　$(x \leqq 0)$

【解】 (1)　$y = x^2 + 2$ を x について解くと　$x = \pm\sqrt{y-2}$

$x \geqq 0$ であるから　$x = \sqrt{y-2}$

よって, 求める逆関数は　$y = \sqrt{x-2}$

(2)　$y = -x^2$ を x について解くと　$x = \pm\sqrt{-y}$

$x \leqq 0$ であるから　$x = -\sqrt{-y}$

よって, 求める逆関数は　$y = -\sqrt{-x}$

練習 1.14 $a \neq 0$ とする．関数 $f(x) = ax + b$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f(2) = 4$，$f^{-1}(1) = -4$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

【解】 $f(2) = 4$ であるから　$2a + b = 4$　$\cdots$①

$f^{-1}(1) = -4$ のとき $f(-4) = 1$ であるから　$-4a + b = 1$　$\cdots$②

①，② を解いて　$a = \dfrac{1}{2}$，$b = 3$

練習 1.15 次の関数およびその逆関数のグラフを同じ図中にかけ．

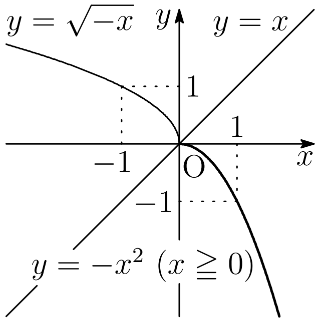
(1)　$y = \sqrt{-x}$　　(2)　$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

【解】 (1)　$y = \sqrt{-x}$ を x について解くと

$$x = -y^2 \quad (y \geqq 0)$$

よって，与えられた関数の逆関数は

$$y = -x^2 \quad (x \geqq 0)$$

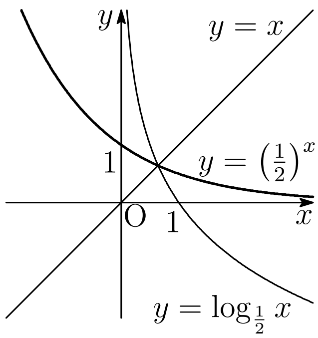


(2)　$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ を x について解くと

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$$

よって，与えられた関数の逆関数は

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



練習 1.16 $f(x) = x^2$，$g(x) = \log_2(x+1)$ について，次の合成関数を求めよ．

(1)　$(g \circ f)(x)$　　(2)　$(f \circ g)(x)$

【解】 (1)　$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \log_2(x^2 + 1)$

(2)　$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_2(x+1)) = \{\log_2(x+1)\}^2$

1.1.4　補充問題

1 関数 $y=\dfrac{4x+3}{2x+1}$ のグラフをかけ．また，定義域，値域を求めよ．

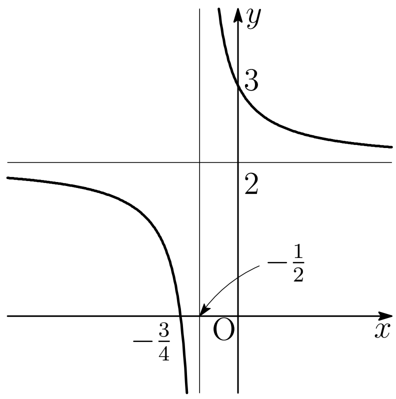
【解】 $\dfrac{4x+3}{2x+1}=\dfrac{1}{2x+1}+2$ であるから

$$y=\frac{4x+3}{2x+1}$$

よって，グラフは右の図である．
漸近線は，次の 2 直線である．

$$x=-\frac{1}{2},\ y=2$$

定義域は $x\neq-\dfrac{1}{2}$，値域は $y\neq 2$ である．



2 次の関数のグラフ上に点 $(2,-a)$ があるように，定数 a の値を定めよ．

(1)　$y=\dfrac{3x-a}{x-a}$　　(2)　$y=\sqrt{3x-a}$

【解】 (1)　条件より　$-a=\dfrac{3\cdot2-a}{2-a}$　$\cdots$①

よって　$a^2-a-6=0$
これを解くと　$a=-2,\ 3$
これらは ① を満たす．　(答) $a=-2,\ 3$

(2)　条件より　$-a=\sqrt{3\cdot2-a}$　$\cdots$②
両辺を 2 乗して整理すると　$a^2+a-6=0$
これを解くと　$a=-3,\ 2$
$a=2$ は ② を満たさない．　(答) $a=-3$

3 次の方程式を解け.

(1) $\dfrac{2x-4}{x-1}=x-2$　　(2) $\dfrac{2x-4}{x-1}<x-2$

(3) $\sqrt{x-1}=7-x$　　(4) $\sqrt{x-1}\leqq 7-x$

【解】 (1) $\dfrac{2x-4}{x-1}=x-2$ より　$2x-4=(x-2)(x-1)$

すなわち　$x^2-5x+6=0$

これを解いて　$x=2,\ 3$

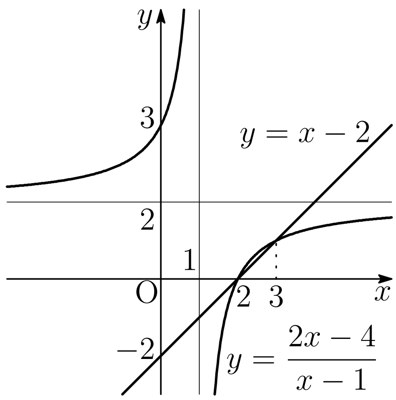
(2) $\dfrac{2x-4}{x-1}=-\dfrac{2}{x-1}+2$ であるから

$$y=\frac{2x-4}{x-1}$$

このグラフと直線 $y=x-2$ は右の図である．(1) の結果とグラフから，不等式

$$\frac{2x-4}{x-1}<x-2$$

の解は　$1<x<2,\ 3<x$



(3) $\sqrt{x-1}=7-x$　$\cdots ①$

の両辺を 2 乗して整理すると

$$x^2-15x+50=0$$

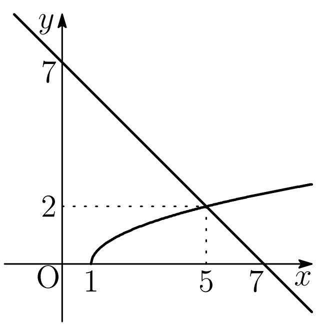
これを解いて　$x=5,\ 10$

このうち，① を満たすのは　$x=5$

(4) $y=\sqrt{x-1}$ のグラフと直線 $y=7-x$ は右の図である．(3) の結果とグラフから，不等式

$$\sqrt{x-1}\leqq 7-x$$

の解は　$1\leqq x\leqq 5$



4 次の関数を，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ の合成関数として表したい．各場合に $f(x)$ と $g(x)$ を定め，$y=f(g(x))$，$y=g(f(x))$ のいずれであるかを示せ．ただし，$f(x)$ を三角関数とせよ．

(1)　$y=\sin 2x$　　(2)　$y=2\cos x$　　(3)　$y=\tan^2 x$

【答】 (1)　$f(x)=\sin x$，$g(x)=2x$，$y=f(g(x))$
(2)　$f(x)=\cos x$，$g(x)=2x$，$y=g(f(x))$
(3)　$f(x)=\tan x$，$g(x)=x^2$，$y=g(f(x))$

1.2　章末問題

1.2.1　章末問題 A

1 関数 $y=\dfrac{3x+4}{x+2}$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{x}{x+2}$ のグラフを，どのように平行移動したものか．

【解】

$$\frac{3x+4}{x+2}=\frac{3(x+2)-2}{x+2}=-\frac{2}{x+2}+3$$

$$\frac{x}{x+2}=\frac{(x+2)-2}{x+2}=-\frac{2}{x+2}+1$$

よって，$y=\dfrac{3x+4}{x+2}$ のグラフは，$y=\dfrac{x}{x+2}$ のグラフを **y 軸方向に 2 だけ平行移動したもの**である．

2 次の関数のグラフをかけ．また，その値域を求めよ．

(1)　$y = \dfrac{3+x}{3-x}$　$(0 \leqq x \leqq 2)$　　　(2)　$y = -\sqrt{2x+6}$　$(-1 \leqq x \leqq 5)$

【解】 (1)　$\dfrac{3+x}{3-x} = \dfrac{-x-3}{x-3} = \dfrac{-(x-3)-6}{x-3}$　であるから

$$y = -\frac{6}{x-3} - 1 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$$

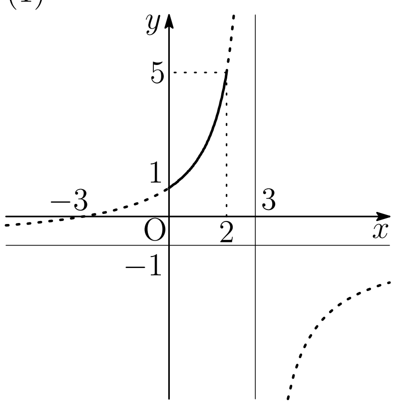
漸近線は2直線 $x=3$，$y=-1$

値域は $1 \leqq y \leqq 5$

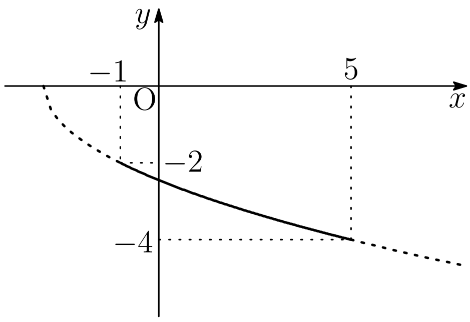
(2)　$y = -\sqrt{2(x+3)}$ であるから，$y = -\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に -3 だけ平行移動したものである．

値域は　$-4 \leqq y \leqq -2$

(1)



(2)



3 $k \neq 0$ とする．関数 $f(x) = kx + k^2$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f(1) = 6$，$f^{-1}(2) = -1$ であるとき，定数 k の値を求めよ．

【解】 $f(1) = 6$ より　　$k + k^2 = 6$　$\cdots$①

$f^{-1}(2) = -1$ より　$f(-1) = 2$

よって　　　　$-k + k^2 = 2$　$\cdots$②

① より　$(k+3)(k-2) = 0$

　　　　ゆえに　$k = -3,\ 2$

② より　$(k+1)(k-2) = 0$

　　　　ゆえに　$k = -1,\ 2$

したがって，①，② を同時に満たす k の値は，$k = 2$ で，これは $k \neq 0$ も満たす．　(答) $k = 2$

1.2.2　章末問題 B

4 次の方程式，不等式を解け.

(1)　$\sqrt{3x-5}=x-1$　　　(2)　$\sqrt{3x-5}<x-1$

(3)　$\sqrt{1-2x}=-x+1$　　　(4)　$\sqrt{1-2x}\geqq -x+1$

【解】 (1) $\sqrt{3x-5}=x-1$　$\cdots$①

の両辺を 2 乗して整理すると　$x^2-5x+6=0$

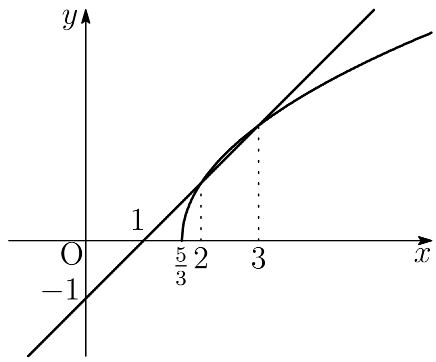
これを解いて　$x=2,\ 3$

これらは ① を満たす.　(答) $x=2,\ 3$

(2) $y=\sqrt{3x-5}$ と $y=x-1$ のグラフは，右の図のようになる．(1) の結果とグラフから，不等式

$$\sqrt{3x-5}<x-1$$

の解は　$\dfrac{5}{3}\leqq x<2,\ 3<x$



(3) $\sqrt{1-2x}=-x+1$　$\cdots$②

の両辺を 2 乗して整理すると　$x^2=0$

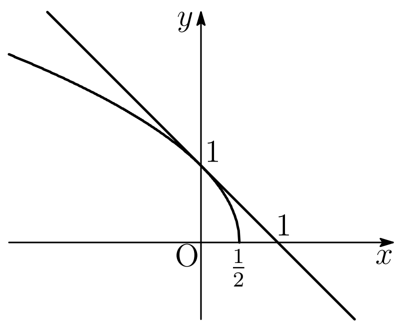
これを解いて　$x=0$

これは ② を満たす.　(答) $x=0$

(4) $y=\sqrt{1-2x}$ と $y=-x+1$ のグラフは，右の図のようになる．(3) の結果とグラフから，不等式

$$\sqrt{1-2x}\geqq -x+1$$

の解は　$x=0$



5 関数 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-a}$ について，$f^{-1}(x) = f(x)$ が成り立つように，定数 a の値を定めよ．

【解】 $y = \dfrac{x+1}{x-a}$ を x について解くと

$$(x-a)y = x+1$$
$$(y-1)x = ay+1$$
$$x = \frac{ay+1}{y-1} \quad (y \neq 1)$$

よって，逆関数は　$y = \dfrac{ax+1}{x-1}$

$\dfrac{ax+1}{x-1} = \dfrac{x+1}{x-a}$ が常に成り立つことから　$a = 1$

6 2 つの関数 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$，$g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ について，次の合成関数を求めよ．

(1)　$f(g(x))$　　(2)　$g(g(x))$

【解】 (1)　$f(g(x)) = \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}} = \dfrac{x-1}{(x-1)-x} = -(x-1)$

ただし，$g(x)$ の定義域は　$x \neq 1$

よって　$f(g(x)) = 1-x \quad (x \neq 1)$

(2)　$g(g(x)) = \dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1} = \dfrac{x}{x-(x-1)} = x$

ただし，$g(x)$ の定義域は　$x \neq 1$

よって　$g(g(x)) = x \quad (x \neq 1)$

第 2 章　極限

2.1　数列の極限

2.1.1　数列の極限

練習 2.1 次の数列の極限値をいえ.

(1) $\dfrac{2}{1},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{4}{3},\ \cdots,\ \dfrac{n+1}{n},\ \cdots$

(2) $-1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \cdots,\ \dfrac{(-1)^n}{n},\ \cdots$

(3) $\cos\pi,\ \cos 3\pi,\ \cos 5\pi,\ \cdots,\ \cos(2n-1)\pi,\ \cdots$

【答】 (1) 1　(2) 0　(3) -1

練習 2.2 第 n 項が次の式で表される数列について，その極限を調べよ.

(1)　$2n$　　(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$　　(3)　$-n^2$　　(4)　$1+(-1)^n$

【答】 (1) 極限は ∞　(2) 極限は 0　(3) 極限は $-\infty$　(4) 極限はない

練習 2.3 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$，$\lim_{n\to\infty} b_n = -2$ のとき，次の極限値を求めよ．

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$　　(2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n + 2b_n)$　　(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n - 1)$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$　　(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n + 5}{2a_n - 1}$　　(6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n - b_n}{a_n + b_n}$

【解】 (1) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = 1 - (-2) = 3$

(2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n + 2b_n) = 3\lim_{n\to\infty} a_n + 2\lim_{n\to\infty} b_n = 3\cdot 1 + 2\cdot(-2) = -1$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n - 1) = \lim_{n\to\infty} a_n - 1 = 1 - 1 = 0$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = 1\cdot(-2) = -2$

(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n + 5}{2a_n - 1} = \dfrac{\lim_{n\to\infty}(b_n + 5)}{\lim_{n\to\infty}(2a_n - 1)} = \dfrac{-2 + 5}{2\cdot 1 - 1} = 3$

(6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n - b_n}{a_n + b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)}{\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)} = \dfrac{1 - (-2)}{1 + (-2)} = -3$

練習 2.4 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n-n^3)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$ (5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}$ (6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n+1}$

【解】 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(2-\frac{1}{n}\right)=\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n}-3\right)=-\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n-n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{2}{n^2}-1\right)=-\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=0$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{2+\frac{1}{n}}=\infty$

練習 2.5 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$

【解】(1)
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}{\sqrt{n^2-n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-n)-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n\sqrt{1-\frac{1}{n}}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}=-\frac{1}{2}$$

練習 2.6 θ を定数とするとき，次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}$

【解】(1) 常に $-1\leqq\sin n\theta\leqq 1$ であるから
$$-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\sin\theta\leqq\frac{1}{n}$$
ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta=0$$

(2) 常に $-1\leqq\cos\dfrac{n\theta}{6}\leqq 1$ であるから
$$-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}\leqq\frac{1}{n}$$
ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}=0$$

2.1.2 無限等比数列

練習 2.7 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ．

(1) $(\sqrt{3}\,)^n$ (2) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ (3) $\left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$ (4) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

【解】 (1) 数列 $\{(\sqrt{3})^n\}$ では $\sqrt{3} > 1$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3})^n = \infty$

(2) 数列 $\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$ では $\left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

(3) 数列 $\left\{\left(-\dfrac{4}{3}\right)^n\right\}$ では $-\dfrac{4}{3} < -1$ であるから，極限はない (振動).

(4) 数列 $\left\{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}$ では $\left|-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$

練習 2.8 数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ．またそのときの極限値を求めよ．

【解】 数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するための必要十分条件は

$$-1 < x - 1 \leqq 1 \quad \text{すなわち} \quad 0 < x \leqq 2$$

$-1 < x-1 < 1$ すなわち $0 < x < 2$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x-1)^n = 0$

$x - 1 = 1$ すなわち $x = 2$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x-1)^n = 1$

練習 2.9 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n}$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n-2^n}$

【解】 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^n+2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n} = 1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} = \infty$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n-2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n} = 0$

練習 2.10 数列 $\left\{\dfrac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ．

(1)　$r>1$　　(2)　$r=1$　　(3)　$|r|<1$　　(4)　$r<-1$

【解】 (1)　$r>1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n+1}=-1$$

(2)　$r=1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$

(3)　$|r|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$

(4)　$r<-1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n+1}=-1$$

練習 2.11 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

(1) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

(2) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

【解】 (1) 与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{3}\left(a_n - \dfrac{3}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{a_n - \dfrac{3}{2}\right\}$ は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である．

その初項は，$a_1 - \dfrac{3}{2} = 1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}$ であるから

$$a_n - \frac{3}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{3}{2}\right) = 0$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$

(2) 与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1} - 2 = -\dfrac{1}{2}(a_n - 2)$

よって，数列 $\{a_n - 2\}$ は公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．

その初項は，$a_1 - 2 = 3 - 2 = 1$ であるから

$$a_n - 2 = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - 2) = 0$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

2.1.3　無限等比級数

練習 2.12 次の無限級数は収束することを示し，その和を求めよ．

$$\frac{1}{1{\cdot}3}+\frac{1}{2{\cdot}4}+\frac{1}{3{\cdot}5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}+\cdots$$

【解】 第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{1{\cdot}3}+\frac{1}{2{\cdot}4}+\frac{1}{3{\cdot}5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\end{aligned}$$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

したがって，この無限級数は収束して，その和は $\dfrac{3}{4}$ である．

練習 2.13 次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ．

(1) 初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$　　(2) 初項 $\sqrt{2}$，公比 $-\sqrt{2}$

(3) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots$　　(4) $(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\cdots$

【解】(1) 公比について $\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$ であるから収束して，その和は

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

(2) 公比について $|-\sqrt{2}|>1$ であるから，発散する．

(3) 公比 $r=-\dfrac{1}{3}$

公比について $\left|-\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから収束して，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

(4) 公比 $r=\sqrt{2}-1$

公比について $|\sqrt{2}-1|<1$ であるから収束して，その和は

$$\frac{\sqrt{2}+1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{4-2}=\frac{4+3\sqrt{2}}{2}$$

練習 2.14 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ．

(1) $1+(2-x)+(2-x)^2+\cdots$

(2) $x+x(2-x)+x(2-x)^2+\cdots$

【解】(1) 初項が 1，公比が $2-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は $|2-x|<1$ より　$-1<2-x<1$
よって　$1<x<3$

(2) 初項が x，公比が $2-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は　$x=0$ または $|2-x|<1$
$|2-x|<1$ より　$1<x<3$
よって　$x=0$，$1<x<3$

練習 2.15 数直線上で，点 P が原点 O から正の向きに 1 だけ進み，そこから負の向きに $\frac{1}{2^2}$，そこから正の向きに $\frac{1}{2^4}$，そこから負の向きに $\frac{1}{2^6}$ と進む．以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P の極限の位置の座標を求めよ．

【解】 点 P の座標は，順に次のようになる．

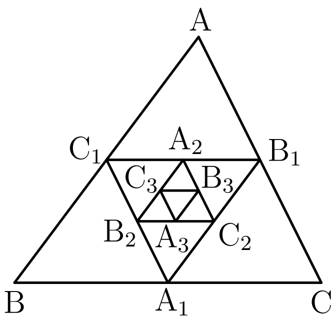
$$1,\ 1-\frac{1}{2^2},\ 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4},\ 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6}$$

よって，点 P の極限の位置の座標は，初項 1，公比 $-\frac{1}{2^2}$ の無限等比級数で表される．公比について $\left|-\frac{1}{2^2}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して，その和は

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6}+\cdots=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2^2}\right)}=\frac{4}{5}$$

したがって，点 P の極限の位置の座標は　$\frac{4}{5}$

応用例題 2.4 面積 a の $\triangle\mathrm{ABC}$ がある．その各辺の中点を結んで $\triangle\mathrm{A_1B_1C_1}$ を作り，次に $\triangle\mathrm{A_1B_1C_1}$ の各辺の中点を結んで $\triangle\mathrm{A_2B_2C_2}$ を作る．
このようにして無数の三角形 $\triangle\mathrm{A_1B_1C_1}$，$\triangle\mathrm{A_2B_2C_2}$，$\triangle\mathrm{A_3B_3C_3}$，$\cdots$，$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$，$\cdots$ を作るとき，これらの面積の和 S を求めよ．



【解】 $\triangle\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$ と $\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ は相似で，相似比は $1:2$ であるから，面積比は $1^2:2^2$ である．$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の面積を S_n とすると

$$S_1=\frac{1}{4}a,\quad S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$$

よって，

$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n+\cdots$$

は，初項 $\frac{1}{4}a$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数である．

公比について $\left|\frac{1}{4}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束する．

よって，求める和 S は　$S=\dfrac{\frac{1}{4}a}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{3}a$

練習 2.16 応用例題2.4において，$\triangle\mathrm{ABC}$ の周の長さが b であるとき，$\triangle\mathrm{A_1B_1C_1}$，$\triangle\mathrm{A_2B_2C_2}$，$\triangle\mathrm{A_3B_3C_3}$，$\cdots$，$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$，$\cdots$ の周の長さの和 l を求めよ．

【解】 $\triangle\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$ と $\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ は相似で，相似比は $1:2$ であるから，$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の周の長さを l_n とすると

$$l_1=\frac{1}{2}b,\quad l_{n+1}=\frac{1}{2}l_n$$

よって，$l_1+l_2+l_3+\cdots+l_n+\cdots$ は，初項 $\frac{1}{2}b$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数である．公比について $\left|\frac{1}{2}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束する．

よって，求める l は　$l=\dfrac{\frac{1}{2}b}{1-\frac{1}{2}}=b$

練習 2.17 次の無限級数の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{2}{3^n}\right)$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n}$

【解】 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ は，初項 $\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数であり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ は，初項 $\dfrac{2}{3}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数である．

公比について，$\left|\dfrac{1}{4}\right|<1$，$\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから，これらの無限等比級数はともに収束して，それぞれの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{2}{3^n}\right)=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

(2) $\displaystyle\frac{2^n-3^n}{4^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ は，初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数であり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ は，初項 $\dfrac{3}{4}$，公比 $\dfrac{3}{4}$ の無限等比級数である．

公比について，$\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$，$\left|\dfrac{3}{4}\right|<1$ であるから，これらの無限等比級数はともに収束して，それぞれの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=3$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=1-3=-2$

2.1.4　補充問題

1 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-n}-n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^{n+1}}{2^{2n}-3^n}$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}-2^n}{3^n+(-2)^n}$

【解】 (1) (与式)$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+n\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}=1$$

(2) (与式)$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}+n}{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}+n}{(n^2-n)-n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+n}{-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+1}{-1}=-2$$

(3) (与式)$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4}{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}=4$

(4) (与式)$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}$

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ．

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

【解】 与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1} + 1 = 2\,(a_n + 1)$

よって，数列 $\{a_n + 1\}$ は公比 2 の等比数列である．

その初項は，$a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$ であるから

$$a_n + 1 = 2{\cdot}2^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_n = 2^n - 1$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(2^n - 1) = \infty$

3 次の無限級数は発散することを示せ．

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + \cdots$$

【解】 $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

$$= \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

よって，この無限級数の部分和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1 \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ であるから，この無限級数は発散する．

4 循環小数 $0.3\dot{1}\dot{8} = 0.3 + 0.018 + 0.00018 + 0.0000018 + \cdots$ を，無限等比級数の和を利用して，分数に直せ．

右辺の第2項以下は，初項 0.018，公比 0.01 の無限等比級数となるから

$$0.3\dot{1}\dot{8} = 0.3 + \frac{0.018}{1-0.01} = \frac{3}{10} + \frac{18}{990} = \frac{7}{22}$$

2.2 関数の極限

2.2.1 関数の極限 (1)

練習 2.18 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}(2x^2-3x-1)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-2}(x-3)(x+2)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2x-3}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\sqrt{1-x}$

【解】(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}(2x^2-3x-1)=2\cdot1^2-3\cdot1-1=-2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-2}(x-3)(x+2)=(-2-3)\cdot(-2+2)=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2x-3}=\frac{0+1}{2\cdot0-3}=-\frac{1}{3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\sqrt{1-x}=\sqrt{1-(-1)}=\sqrt{2}$

練習 2.19 次の極限値を求めよ．ただし，(3) の a は 0 でない定数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}\right)$

【解】(1) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\lim_{x\to-3}(x-3)=-6$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-2}=-3$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\frac{(a+x)-a}{a(a+x)}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{1}{a(a+x)}=\frac{1}{a^2}$

練習 2.20 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

【解】(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-2^2}=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)=4$

練習 2.21 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=-1$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}=1$

【解】 (1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=-1 \quad \cdots ①$

において，$\displaystyle\lim_{x\to2}(x-2)=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to2}(a\sqrt{x}+b)=0$

ゆえに，$\sqrt{2}a+b=0$ となり $b=-\sqrt{2}a \quad \cdots ②$

このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{a}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

① から $\dfrac{a}{2\sqrt{2}}=-1$ であるから $a=-2\sqrt{2}$

このとき，② から $b=4$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}=1 \quad \cdots ①$

において，$\displaystyle\lim_{x\to0}x=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to0}(a\sqrt{x+4}+b)=0$

ゆえに，$2a+b=0$ となり $b=-2a \quad \cdots ②$

このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{a(\sqrt{x+4}-2)}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{a(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{a}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{a}{4}\end{aligned}$$

① から $\dfrac{a}{4}=1$ であるから $a=4$

このとき，② から $b=-8$

練習 2.22 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\left\{-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}$

【答】 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\left\{-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}=-\infty$

練習 2.23 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

【解】 (1) $x>0$ のとき　$\dfrac{|x|}{x}=1$　よって　$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x}=1$

(2) $x<0$ のとき　$\dfrac{|x|}{x}=-1$　よって　$\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x}=-1$

(3) $x>1$ のとき　$\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=2$

(4) $x<1$ のとき　$\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}=-(x+1)$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=-2$

練習 2.24 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}$

【答】 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=\infty$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty$

2.2.2 関数の極限 (2)

練習 2.25 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x+x^3)$

【解】(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)=\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x+x^3)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty$

練習 2.26 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x+3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+4}{2x^2-3x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{3x+2}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x}{x^2-4x+1}$

【解】(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{4+\frac{3}{x}}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+4}{2x^2-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5+\frac{4}{x^2}}{2-\frac{3}{x}}=\frac{5}{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}-x}{3+\frac{2}{x}}=-\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x}{x^2-4x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$

練習 2.27 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+2x}+2x)$

【解】(1)
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}=1$$

(2) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ であるから
$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+2x}+2x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2-2t}-2t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{4t^2-2t}-2t)(\sqrt{4t^2-2t}+2t)}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(4t^2-2t)-(2t)^2}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{t\sqrt{4-\dfrac{2}{t}}+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{4-\dfrac{2}{t}}+2}=-\frac{1}{2}$$

練習 2.28 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2 x$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_{0.5} x$

【答】(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x=0$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2 x=\infty$
(4) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_{0.5} x=\infty$

練習 2.29 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^{-3x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^{-2x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_2 \frac{4x-1}{x+2}$

【解】 (1) $x \longrightarrow \infty$ のとき $-3x \longrightarrow -\infty$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^{-3x} = 0$

(2) $x \longrightarrow -\infty$ のとき $-2x \longrightarrow \infty$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^{-2x} = \infty$

(3) $\displaystyle\frac{4x-1}{x+2} = \frac{4-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$ であるから，$x \longrightarrow \infty$ のとき $\displaystyle\frac{4x-1}{x+2} \longrightarrow 4$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_2 \frac{4x-1}{x+2} = \log_2 4 = 2$

2.2.3 三角関数と極限

練習 2.30 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sin\frac{1}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos\frac{1}{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \tan x$

【答】 (1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos\frac{1}{x} = 1$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \tan x = 0$

練習 2.31 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\cos x}{x}$

【解】(1) 常に $0 \leqq \left|\cos\dfrac{1}{x}\right| \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq \left|x\cos\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leqq |x|$$

ここで, $\displaystyle\lim_{x\to 0}|x| = 0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left|x\cos\frac{1}{x}\right| = 0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$

(2) 常に $0 \leqq |\sin x| \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leqq \frac{1}{|x|}$$

ここで, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|} = 0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$

(3) 常に $0 \leqq |\cos x| \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq \left|\frac{\cos x}{x}\right| = \frac{|\cos x|}{|x|} \leqq \frac{1}{|x|}$$

ここで, $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{|x|} = 0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left|\frac{\cos x}{x}\right| = 0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\cos x}{x} = 0$

練習 2.32 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

【解】(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right) = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = 1\cdot 1 = 1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\right) = \frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1 = \frac{3}{5}$

練習 2.33 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

【解】 (1)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right\} = 1^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right) = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2.2.4 関数の連続性

練習 2.34 次の関数 $f(x)$ が，$x=0$ で連続であるか不連続であるかを調べよ．

(1) $f(x)=x[x]$ (2) $f(x)=(x+1)[x]$ (3) $f(x)=\sqrt{x}$

【解】 (1) $\displaystyle\lim_{x\to-0} x[x]=0\cdot(-1)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x[x]=0\cdot0=0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x)=0$

また $f(0)=0\cdot0=0$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$ が成り立つから，関数 $f(x)=x[x]$ は $x=0$ で連続である．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-0}(x+1)[x]=1\cdot(-1)=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}(x+1)[x]=1\cdot0=0$

よって，$x\longrightarrow 0$ のときの $f(x)$ の極限はない．

したがって，関数 $f(x)=(x+1)[x]$ は $x=0$ で不連続である．

(3) 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の定義域は $x\geqq 0$ で $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=0$，$f(0)=0$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=f(0)$ が成り立つから，関数 $f(x)=\sqrt{x}$ は $x=0$ で連続である．

練習 2.35 次の関数が連続である区間を求めよ．

(1) $f(x)=\sqrt{1-x}$ (2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

【解】 (1) $f(x)=\sqrt{-(x-1)}$

関数 $f(x)=\sqrt{1-x}$ が連続である区間は $(-\infty,\ 1]$

(2) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}$

関数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$ が連続である区間は $(-\infty,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ \infty)$

練習 2.36 次の区間における関数 $f(x) = \cos x$ の最大値，最小値について調べよ．

(1)　$[0,\ \pi]$　　(2)　$[-\pi,\ \pi]$

【解】 (1)　区間 $[0,\ \pi]$ において，$f(x)$ は

$$x = 0 \text{ で最大値 } 1,\ \ x = \pi \text{ で最小値 } -1$$

をとる．

(2)　区間 $[-\pi,\ \pi]$ において，$f(x)$ は

$$x = 0 \text{ で最大値 } 1,\ \ x = -\pi,\ \pi \text{ で最小値 } -1$$

をとる．

練習 2.37 方程式 $2^x - 3x = 0$ は，$3 < x < 4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ．

【解】 $f(x) = 2^x - 3x$ とおくと，$f(x)$ は閉区間 $[3,\ 4]$ で連続である．

また　$f(3) = 2^3 - 3{\cdot}3 = -1 < 0$

$f(4) = 2^4 - 3{\cdot}4 = 4 > 0$

であり，$f(3)$ と $f(4)$ は符号が異なる．
したがって，方程式 $f(x) = 0$ すなわち $2^x - 3x = 0$ は，
$3 < x < 4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ．

2.2.5 補充問題

5 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_2(x^2+4)-\log_2 2x^2\}$

【解】(1) 分母，分子を 2^{-x} で割って

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\{\log_2(x^2+4)-\log_2 2x^2\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{x^2+4}{2x^2}=\lim_{x\to\infty}\log_2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{x^2}\right)$$
$$=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$$

6 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin 3x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\cos 2x-1}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$

【解】(1) 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin 3x}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

(2) 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{(1-2\sin^2 x)-1}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{-2\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

(3) $x-\pi=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\pi$ のとき　$\theta\longrightarrow0$ より

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{1+\cos(\pi+\theta)}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}=\frac{1}{2}$$

7 次の関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるように定数 a の値を定めよ．

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x} & (x\neq 0)\\[2ex] a & (x=0)\end{cases}$$

【解】 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1$，$f(0)=a$

よって　　$a=1$

8 3 次方程式 $x^3-3x+1=0$ は負の解をもつことを示せ．

【解】 $f(x)=x^3-3x+1$ とおくと，$f(x)$ は閉区間 $[-2,\ 0]$ で連続であり，かつ

$$f(-2)=-1<0,\quad f(0)=1>0$$

よって，方程式 $f(x)=0$ は $-2<x<0$ の範囲に少なくとも 1 つの負の解をもつ．

2.3 章末問題

2.3.1 章末問題 A

1 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{(1+2+3+\cdots+n)^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}}{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}$

【解】(1) 分子 $=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, 分母 $=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

よって 与式 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}}=0$$

(2) 分子 $=\dfrac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$, 分母 $=\dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

よって 与式 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^n-1}{2}}{2^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}=\infty$

2 n を自然数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $2^n \geqq 1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}$ が成り立つことを示せ．

(2) (1) の不等式を用いて，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$ を求めよ．

【解】 (1) 二項定理により

$$2^n=(1+1)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$$

${}_n\mathrm{C}_r>0$ であるから　　${}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n \geqq 0$

よって　　$2^n \geqq {}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2=1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}$

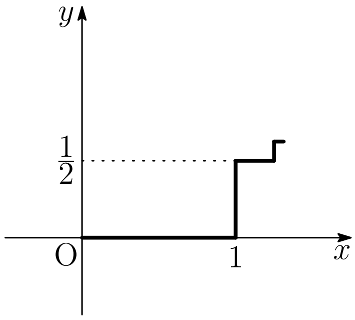
(2) (1) の不等式から

$$0<\frac{n}{2^n}\leqq\frac{n}{1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}}=\frac{2n}{2+2n+n^2-n}=\frac{2n}{n^2+n+2}$$

ここで　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=0$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$

3 座標平面上で，点 P が原点 O から x 軸の正の向きに 1 だけ進み，次に y 軸の正の向きに $\frac{1}{2}$ だけ進み，次に x 軸の正の向きに $\frac{1}{2^2}$ だけ進み，次に y 軸の正の向きに $\frac{1}{2^3}$ だけ進む．以下，同様な運動を限りなく続けるとき，点 P の極限の位置の座標を求めよ．



【解】 求める点の座標を $(x,\ y)$ とする．点 P の x 座標は原点 O から順に

$$1,\ 1,\ 1+\frac{1}{2^2},\ 1+\frac{1}{2^2},\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4},\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4},\ \cdots$$

となる．

$$x = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{4}{3}$$

点 P の y 座標は原点 O から順に

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5},\ \cdots$$

となる．

$$y = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{2}{3}$$

よって，点 P の極限の位置の座標は $\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

4 次の極限を求めよ．ただし，(4) の a は 1 でない正の定数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}}{x-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-0}2^{\frac{1}{x}}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_a(ax^2+1)-\log_a x^2\}$

【解】 (1)

$$与式=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)-(3x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2)

$$与式=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\left(-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\frac{1}{x}\right)=-1$$

(3) $x\longrightarrow-0$ のとき　$\dfrac{1}{x}\longrightarrow-\infty$

$t\longrightarrow-\infty$ のとき　$2^t\longrightarrow0$ より

$$\lim_{x\to-0}2^{\frac{1}{x}}=0$$

(4)

$$与式=\lim_{x\to\infty}\log_a\frac{ax^2+1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\log_a\left(a+\frac{1}{x^2}\right)=\log_a a=1$$

5 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\tan x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

【解】(1) 与式$\displaystyle =\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\frac{4x}{\dfrac{\sin x}{\cos x}}\cdot\frac{1}{1+\cos 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{4\cos x}{1+\cos 2x}=1^2\cdot 1\cdot\frac{4}{1+1}=2$$

【別解】 $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ より

$$\text{与式}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x=2\cdot 1\cdot 1=2$$

(2) 与式$\displaystyle =\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=1^3\cdot\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

6 方程式 $\log_2 x+\dfrac{1}{2}x=1$ は，$1<x<2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ．

【解】 $f(x)=\log_2 x+\dfrac{1}{2}x-1$ とすると，$f(x)$ は閉区間 $[1,\ 2]$ で連続であり

$$f(1)=-\frac{1}{2}<0,\quad f(2)=1>0$$

したがって，$f(c)=0$，$1<c<2$ を満たす c がある．

すなわち方程式 $\log_2 x+\dfrac{1}{2}x=1$ は，$1<x<2$ の範囲に実数解をもつ．

2.3.2 章末問題B

7 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ．

$$a_1 = \frac{3}{2},\quad a_{n+1} = \frac{2}{3-a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(1)　$a_n = \dfrac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}$ を示せ．　(2)　数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ．

【解】(1)　**［証明］** 数学的帰納法で証明する．

$$a_n = \frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1} \quad \cdots ① \quad \text{とする．}$$

［1］ $n=1$ のとき，① は $a_1 = \dfrac{1+2}{1+1} = \dfrac{3}{2}$ となるから，① は $n=1$ のとき成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち $a_k = \dfrac{2^{k-1}+2}{2^{k-1}+1}$ であると仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{2}{3-a_k} = \frac{2}{3-\dfrac{2^{k-1}+2}{2^{k-1}+1}} \\ &= \frac{2(2^{k-1}+1)}{3(2^{k-1}+1)-(2^{k-1}+2)} \\ &= \frac{2\cdot 2^{k-1}+2}{2\cdot 2^{k-1}+1} = \frac{2^{(k+1)-1}+2}{2^{(k+1)-1}+1} \end{aligned}$$

よって，① は $n=k+1$ のときも成り立つ．

［1］，［2］から，① はすべての自然数 n について成り立つ．　**［証終］**

(2) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{2}{2^{n-1}}}{1+\dfrac{1}{2^{n-1}}} = 1$$

8 和が 1 の無限等比級数がある．この各項を 2 乗して得られる無限等比級数の和は 2 である．もとの無限等比級数の初項と公比を求めよ．

【解】 初項を a，公比を r とすると，$|r| < 1$ のとき収束して

$$\frac{a}{1-r} = 1 \quad \cdots ①$$

$|r| < 1$ のとき，$|r^2| = |r|^2 < 1$ だから，各項を 2 乗して得られる無限等比級数も収束して

$$\frac{a^2}{1-r^2} = 2 \quad \cdots ②$$

② より　$\dfrac{a}{1+r} \cdot \dfrac{a}{1-r} = 2$

① を代入して　$\dfrac{a}{1+r} = 2 \quad \cdots ③$

① より　$a = 1 - r$，③ より　$a = 2 + 2r$

よって　$1 - r = 2 + 2r$　これを解いて　$r = -\dfrac{1}{3}$

これは，$|r| < 1$ を満たす．

また　$a = 1 - r = 1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4}{3}$

したがって，初項は $\dfrac{4}{3}$，公比は $-\dfrac{1}{3}$

9 次の 2 つの条件［1］,［2］をともに満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ.

［1］ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=2$ ［2］ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1$

【解】 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とすると

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=a$$

条件 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=2$ より　$a=2$

一方，条件 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1$ と $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$ から　$\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)=0$

また　$\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(2x^2+bx+c)=2+b+c$ であるから

$$2+b+c=0$$

ゆえに　$c=-b-2$

このとき

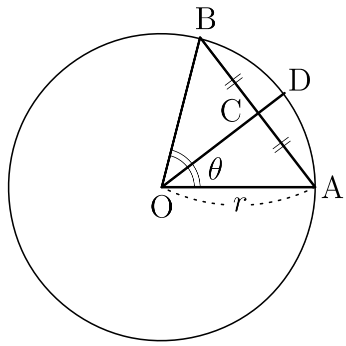
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+bx-b-2}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+b+2)}{(x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{2x+b+2}{x+1}=\frac{b+4}{2}=-1\end{aligned}$$

ゆえに　$b=-6$　　よって　$c=4$

したがって　$f(x)=2x^2-6x+4$

10 半径 r の円 O の周上に中心角 θ ラジアンの弧 AB をとり，弦 AB，弧 AB を 2 等分する点を，それぞれ C，D とする．次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}^2}$



【解】 (1) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=r\theta$

AB と OC は垂直で OC は ∠AOB の 2 等分線より $\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\theta}{2}$ であるから

$$\mathrm{AC}=r\sin\frac{\theta}{2}$$

ゆえに　$\mathrm{AB}=2\mathrm{AC}=2r\sin\dfrac{\theta}{2}$

よって　$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}}=\lim_{\theta\to+0}\frac{r\theta}{2r\sin\frac{\theta}{2}}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=1$$

(2) $\mathrm{CD}=\mathrm{OD}-\mathrm{OC}=r-r\cos\dfrac{\theta}{2}=r\left(1-\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$ であるから

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{r\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\left(2r\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{4r}\cdot\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{4r}\cdot\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{4r\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{1}{8r}$$

11 x を実数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 無限等比級数 $x^2+\dfrac{x^2}{x^2+1}+\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}+\cdots+\dfrac{x^2}{(x^2+1)^{n-1}}+\cdots$ が収束することを示せ．

(2) (1) の無限級数の和を $f(x)$ とするとき，関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ．

(3) 関数 $f(x)$ が不連続となる x の値を求めよ．

【解】 (1) この無限等比級数は，初項 x^2，公比 $\dfrac{1}{x^2+1}$ の無限等比級数である．

［1］ $x=0$ のとき
初項が 0 だからこの級数は収束し，和は 0 である．
ゆえに　$f(0)=0$

［2］ $x\neq 0$ のとき

$0<x^2$ より　$0<\dfrac{1}{x^2+1}<1$

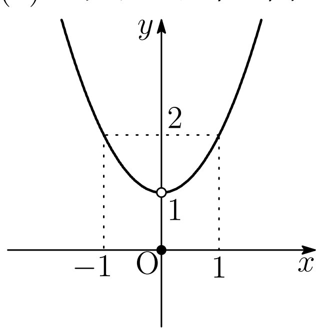
よって $|$ 公比 $|<1$ であるから，この級数は収束し，和は

$$\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{x^2+1}}=\frac{x^2(x^2+1)}{(x^2+1)-1}=\frac{x^2(x^2+1)}{x^2}=x^2+1$$

ゆえに　$f(x)=x^2+1$

［1］，［2］より　$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

(2) $y=f(x)$ のグラフは下の図のようになる．



(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2+1)=1$，$f(0)=1$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$

よって，$f(x)$ が不連続となる x の値は　$x=0$

第 3 章　微分法

3.1　導関数

3.1.1　微分係数と導関数

練習 3.1 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ について，次の微分係数を求めよ．
(1)　$f'(1)$　　(2)　$f'(2)$

【解】 (1)

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h) - 1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{2}$$

(2)

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h) - 2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

練習 3.2 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ のグラフ上の点 $(3,\ \sqrt{3})$ における接線の傾きを求めよ．

【解】

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{3+h} - \sqrt{3})(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h) - 3}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

よって，求める接線の傾きは　$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

練習 3.3 次の関数 $f(x)$ は $x=1$ で微分可能でないことを示せ.

(1)　$f(x)=|x-1|$　　　(2)　$f(x)=|x^2-1|$

【解】 (1) $$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{|h|}{h}$$

ここで $$\lim_{h\to+0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=1,\quad \lim_{h\to-0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h}{h}=-1$$

よって，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ すなわち $f'(1)$ は存在しない.

したがって，関数 $f(x)$ は $x=1$ で微分可能でない.

(2) $$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{|h(h+2)|}{h}$$

ここで $$\lim_{h\to+0}\frac{|h(h+2)|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h(h+2)}{h}=\lim_{h\to+0}(h+2)=2$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{|h(h+2)|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h(h+2)}{h}=\lim_{h\to-0}(-h-2)=-2$$

よって，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ すなわち $f'(1)$ は存在しない.

したがって，関数 $f(x)$ は $x=1$ で微分可能でない.

練習 3.4 導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ.

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{2x}$　　　(2)　$f(x)=\sqrt{x}$

【解】 (1)
$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{2(x+h)}-\frac{1}{2x}\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{x-(x+h)}{2(x+h)x}\right\}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(x+h)x}=-\frac{1}{2x^2}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

3.1.2 導関数の計算

例 3.4
$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)'x + x^3(x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1$$

よって $$(x^4)' = 4x^3$$

練習 3.5 例 3.4 と同様にして，次のことを示せ．

(1) $(x^5)' = 5x^4$　　(2) $(x^6)' = 6x^5$

【解】 (1) は例 3.4 の結果を利用し，(2) は (1) の結果を利用する．

(1) $(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = (x^4)'x + x^4(x)' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4$

(2) $(x^6)' = (x^5 \cdot x)' = (x^5)'x + x^5(x)' = 5x^4 \cdot x + x^5 \cdot 1 = 6x^5$

練習 3.6 次の関数を微分せよ．

(1) $y = x^5 + 2x^4$　　(2) $y = 3x^6 - 4x^3$

(3) $y = (x+1)(x^3 - 4x)$　　(4) $y = (3x^2 - 2)(x^2 + x + 1)$

【解】 (1) $y' = 5x^4 + 2 \cdot 4x^3 = 5x^4 + 8x^3$

(2) $y' = 3 \cdot 6x^5 - 4 \cdot 3x^2 = 18x^5 - 12x^2$

(3)
$$\begin{aligned} y' &= (x+1)'(x^3 - 4x) + (x+1)(x^3 - 4x)' \\ &= 1 \cdot (x^3 - 4x) + (x+1)(3x^2 - 4) \\ &= x^3 - 4x + 3x^3 + 3x^2 - 4x - 4 \\ &= 4x^3 + 3x^2 - 8x - 4 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} y' &= (3x^2 - 2)'(x^2 + x + 1) + (3x^2 - 2)(x^2 + x + 1)' \\ &= 6x(x^2 + x + 1) + (3x^2 - 2)(2x + 1) \\ &= 6x^3 + 6x^2 + 6x + 6x^3 + 3x^2 - 4x - 2 \\ &= 12x^3 + 9x^2 + 2x - 2 \end{aligned}$$

導関数の公式

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき

4 $$\boldsymbol{\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

商の導関数

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき

5 $$\boldsymbol{\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$$

6 $$\boldsymbol{\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$$

練習 3.7 次の問いに答えよ.

(1) 導関数の定義に従って，公式 **5** を証明せよ.

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$ と公式 **4**，**5** を用いて公式 **6** を証明せよ.

証明 (1)
$$\begin{aligned}
\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{-\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)}\right\}
\end{aligned}$$

ここで，$g(x)$ は微分可能であるから $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$

また，微分可能ならば連続であるから $\displaystyle\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$

よって $$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -g'(x)\cdot\frac{1}{g(x)g(x)} = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$ の両辺を微分すると

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' &= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' \\
&= \frac{f'(x)g(x)}{\{g(x)\}^2} + f(x)\left\{-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}\right\}
\end{aligned}$$

したがって $$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

練習 3.8 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{1}{2x-3}$ (2) $y = \dfrac{x^2}{x+3}$ (3) $y = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$

【解】 (1) $y' = -\dfrac{(2x-3)'}{(2x-3)^2} = -\dfrac{2}{(2x-3)^2}$

(2) $y' = \dfrac{(x^2)'(x+3) - x^2(x+3)'}{(x+3)^2} = \dfrac{2x(x+3) - x^2}{(x+3)^2} = \dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2}$

(3) $y' = \dfrac{(2x-1)'(x^2+1) - (2x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(x^2+1) - (2x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$

練習 3.9 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{1}{x}$ (2) $y = \dfrac{1}{x^3}$ (3) $y = -\dfrac{4}{x^2}$

【解】 (1) $y' = (x^{-1})' = -1x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

(2) $y' = (x^{-3})' = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$

(3) $y' = (-4x^{-2})' = -4\cdot(-2)x^{-3} = 8x^{-3} = \dfrac{8}{x^3}$

練習 3.10 次の関数を微分せよ．

(1) $y=(3x+1)^4$ (3) $y=\dfrac{1}{(4x+3)^2}$

【解】(1) $u=3x+1$ とすると $y=u^4$ であり

$$\frac{dy}{du}=4u^3,\qquad \frac{du}{dx}=3$$

よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=4u^3\cdot 3=12(3x+1)^3$

(2) $u=4x+3$ とすると $y=u^{-2}$ であり

$$\frac{dy}{du}=-2u^{-3},\qquad \frac{du}{dx}=4$$

よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=-2u^{-3}\cdot 4=-8u^{-3}=-\dfrac{8}{(4x+3)^3}$

【別解】(1) $y'=4(3x+1)^3\cdot(3x+1)'=4(3x+1)^3\cdot 3=12(3x+1)^3$

(2) $y=(4x+3)^{-2}$ であるから

$$y'=-2(4x+3)^{-3}\cdot(4x+3)'=-2(4x+3)^{-3}\cdot 4=-\frac{8}{(4x+3)^3}$$

練習 3.11 次の関数を微分せよ．ただし，a，b は定数とする．

(1) $y=(ax+b)^6$ (2) $y=\dfrac{1}{(ax+b)^3}$

【解】(1) $u=ax+b$ とすると $y=u^6$ であり $\dfrac{dy}{du}=6u^5,\quad \dfrac{du}{dx}=a$

よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=6u^5\cdot a=6a(ax+b)^5$

(2) $u=ax+b$ とすると $y=u^{-3}$ であり $\dfrac{dy}{du}=-3u^{-4},\quad \dfrac{du}{dx}=a$

よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=-3u^{-4}\cdot a=-3a(ax+b)^{-4}=-\dfrac{3a}{(ax+b)^4}$

【別解】(1) $y'=6(ax+b)^5\cdot(ax+b)'=6a(ax+b)^5$

(2) $y'=\{(ax+b)^{-3}\}'=-3(ax+b)^{-4}\cdot(ax+b)'$

$$=-3a(ax+b)^{-4}=-\frac{3a}{(ax+b)^4}$$

練習 3.12 次の関数を微分せよ.

(1)　$y = (2x^2+5)^3$　　(2)　$y = (1-2x^2)^3$

(3)　$y = (x^2+x+1)^4$　　(4)　$y = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

【解】 (1)
$$\begin{aligned} y' &= 3(2x^2+5)^2 \cdot (2x^2+5)' \\ &= 3(2x^2+5)^2 \cdot 4x \\ &= 12x(2x^2+5)^2 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} y' &= 3(1-2x^2)^2 \cdot (1-2x^2)' \\ &= 3(1-2x^2)^2 \cdot (-4x) \\ &= -12x(1-2x^2)^2 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} y' &= 4(x^2+x+1)^3 \cdot (x^2+x+1)' \\ &= 4(x^2+x+1)^3 \cdot (2x+1) \\ &= 4(2x+1)(x^2+x+1)^3 \end{aligned}$$

(4) $y = \dfrac{1}{(x^2+1)^3} = (x^2+1)^{-3}$ より

$$\begin{aligned} y' &= -3(x^2+1)^{-4} \cdot (x^2+1)' \\ &= -\frac{3}{(x^2+1)^4} \cdot 2x \\ &= -\frac{6x}{(x^2+1)^4} \end{aligned}$$

練習 3.13 逆関数の微分法の公式を用いて，次の関数を微分せよ．

(1)　$y = \sqrt[6]{x}$　　(2)　$y = \sqrt[3]{x}$　$(x > 0)$

【解】 (1)　$y = \sqrt[6]{x}$ を x について解くと，$x = y^6$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{6y^5} = \frac{1}{6(\sqrt[6]{x})^5} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$$

(2)　$y = \sqrt[3]{x}$ を x について解くと，$x = y^3$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad (x > 0)$$

練習 3.14 次の関数を微分せよ．

(1)　$y = \sqrt{x}$　　(2)　$y = \sqrt[3]{x^2}$　　(3)　$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

【解】 (1)　$y = x^{\frac{1}{2}}$ より　　$y' = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(2)　$y = x^{\frac{2}{3}}$ より　　$y' = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(3)　$y = x^{-\frac{1}{2}}$ より　　$y' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

3.1.3　補充問題

1 関数 $y=f(x)g(x)h(x)$ の導関数は

$$y' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

であることを示せ．また，これを用いて，次の関数を微分せよ．

$$y = (x^2+1)(x+2)(3x-4)$$

【解】(前半)

$$\begin{aligned} y' &= \{f(x)g(x)\}'h(x) + \{f(x)g(x)\}h'(x) \\ &= \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \end{aligned}$$

(後半)

$$\begin{aligned} y' &= 2x(x+2)(3x-4) + (x^2+1)\cdot 1\cdot(3x-4) + (x^2+1)(x+2)\cdot 3 \\ &= 12x^3 + 6x^2 - 10x + 2 \end{aligned}$$

2 次のことを示せ．ただし，a，b は定数，p は有理数とする．

(1)　$\dfrac{d}{dx}f(ax+b) = af'(ax+b)$　　(2)　$\dfrac{d}{dx}\{f(x)\}^p = p\{f(x)\}^{p-1}f'(x)$

【解】　(1)　$y=f(ax+b)$，$u=ax+b$ とすると $y=f(u)$ であるから

$$\frac{d}{dx}f(ax+b) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = f'(u)\cdot a = af'(ax+b)$$

(2)　$y=\{f(x)\}^n$，$u=f(x)$ とすると $y=u^n$ であるから

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\}^p = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = pu^{p-1}f'(x) = p\{f(x)\}^{p-1}f'(x)$$

3 次の関数を微分せよ.

(1)　$y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2$　　(2)　$y = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^3$

(3)　$y = \sqrt{4 - x^2}$　　(4)　$y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

【解】 (1)
$$\begin{aligned} y' &= 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{x}\right)' \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{2}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} y' &= 3\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(x - \frac{1}{x}\right)' \\ &= 3\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

(3) $y = (4 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ より
$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(4 - x^2)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}}\cdot(-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \end{aligned}$$

(4) $y = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ より
$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1 - x^2)' \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{(1 - x^2)^3}}\cdot(-2x) \\ &= \frac{x}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

3.2　いろいろな関数の導関数

3.2.1　いろいろな関数の導関数

練習 3.15 関数 $\cos x$ の導関数が，次のようになることを示せ.

$$(\cos x)' = -\sin x$$

[証明]

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

において，
$$\begin{aligned}\cos(x+h)-\cos x &= \cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x\\ &= (\cos h-1)\cos x - \sin x\sin h\end{aligned}$$

であるから
$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\cos x - \frac{\sin h}{h}\sin x\right)$$

ここで
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(-\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{\cos h+1}\right) = -1\cdot\frac{0}{1+1} = 0\end{aligned}$$

よって
$$(\cos x)' = 0\cdot\cos x - 1\cdot\sin x = -\sin x$$
[証終]

[別証] $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ であるから，合成関数の微分法により

$$(\cos x)' = \left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)' = -\sin x$$

よって
$$(\cos x)' = -\sin x$$
[証終]

練習 3.16 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \cos 2x$　　(2) $y = \sqrt{2}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) $y = \sin^2 x$　　(4) $y = \tan^2 x$

(5) $y = \dfrac{1}{\sin x}$　　(6) $y = \cos^2 3x$

【解】 (1) $y' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2\sin 2x$

(2) $y' = \sqrt{2}\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)' = 3\sqrt{2}\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) $y' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$

(4) $y' = 2\tan x \cdot (\tan x)' = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x} = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$

(5) $y' = -\dfrac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

(6) $y' = 2\cos 3x \cdot (\cos 3x)' = 2\cos 3x \cdot (-3\sin 3x) = -6\sin 3x \cos 3x = -3\sin 6x$

練習 3.17 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x\sin x + \cos x$　　(2) $y = x\cos x - \sin x$

【解】 (1) $y' = (x)'\sin x + x(\sin x)' + (\cos x)'$
$= 1 \cdot \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$

(2) $y' = (x)'\cos x + x(\cos x)' - (\sin x)'$
$= 1 \cdot \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$

練習 3.18 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \log 3x$　　(2) $y = \log_2(2x-1)$

(3) $y = \log(x^2+1)$　　(4) $y = x\log x - x$

【解】 (1) $y' = \dfrac{1}{3x}\cdot(3x)' = \dfrac{3}{3x} = \dfrac{1}{x}$

(2) $y' = \dfrac{1}{(2x-1)\log 2}\cdot(2x-1)' = \dfrac{2}{(2x-1)\log 2}$

(3) $y' = \dfrac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)' = \dfrac{2x}{x^2+1}$

(4) $y' = 1\cdot\log x + x\cdot\dfrac{1}{x} - 1 = \log x + 1 - 1 = \log x$

練習 3.19 次のことを示せ.

$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x\log a}$$

【解】 $x > 0$ のとき　$(\log_a|x|)' = (\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}$

$x < 0$ のとき　$(\log_a|x|)' = \{\log_a(-x)\} = \dfrac{1}{-x\log a}\cdot(-x)' = \dfrac{1}{x\log a}$

よって　$(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\log a}$

練習 3.20 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \log|2x+3|$　(2) $y = \log|\sin x|$

(3) $y = \log_4|2x-1|$　(4) $y = \log_2|x^2-4|$

【解】 (1) $y' = \dfrac{1}{2x+3}\cdot(2x+3)' = \dfrac{2}{2x+3}$

(2) $y' = \dfrac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}$

(3) $y' = \dfrac{1}{(2x-1)\log 4}\cdot(2x-1)' = \dfrac{2}{(2x-1)\log 4}$

(4) $y' = \dfrac{1}{(x^2-4)\log 2}\cdot(x^2-4)' = \dfrac{2x}{(x^2-4)\log 2}$

練習 3.21 $\log|y|$ の導関数を利用して，次の関数を微分せよ.

(1) $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$　(2) $y = \dfrac{(x+2)(x+3)^3}{x^2+1}$

【解】 (1) 両辺の絶対値の対数をとると

$$\log|y| = \log|x-1| + 2\log|x-2| + 3\log|x-3|$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{2(3x^2-11x+9)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

よって
$$\begin{aligned} y' &= (x-1)(x-2)^2(x-3)^2\cdot\frac{2(3x^2-11x+9)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= 2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9) \end{aligned}$$

(2) 両辺の絶対値の対数をとると

$$\log|y| = \log|x+2| + 3\log|x+3| - \log(x^2+1)$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+3} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^3-x^2-8x+9}{(x+2)(x+3)(x^2+1)}$$

よって
$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x+2)(x+3)^3}{x^2+1}\cdot\frac{2x^3-x^2-8x+9}{(x+2)(x+3)(x^2+1)} \\ &= \frac{(x+3)^2(2x^3-x^2-8x+9)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

練習 3.22 $(e^x)' = e^x$ であることを確かめよ．

【解】$y = e^x$ を x について解くと　$x = \log y$

逆関数の微分法と対数関数の導関数の公式により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$$

よって　$(e^x)' = e^x$

練習 3.23 次の関数を微分せよ．ただし，(6) の a は 1 でない正の定数とする．

(1) $y = e^{2x}$　(2) $y = e^{-x^2}$　(3) $y = 3^x$

(4) $y = 2^{-3x}$　(5) $y = xe^x$　(6) $y = (2x-1)a^x$

【解】(1) $y' = e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x}$

(2) $y' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = -2xe^{-x^2}$

(3) $y' = 3^x \log 3$

(4) $y' = 2^{-3x} \log 2 \cdot (-3x)' = -3 \cdot 2^{-3x} \log 2$

(5) $y' = 1 \cdot e^x + xe^x = (x+1)e^x$

(6)
$$\begin{aligned} y' &= (2x-1)'a^x + (2x-1)(a^x)' \\ &= 2a^x + (2x-1)a^x \log a \\ &= a^x\{2 + (2x-1)\log a\} \end{aligned}$$

3.2.2　第 n 次導関数

練習 3.24 次の関数について，第 3 次までの導関数を求めよ．ただし，(1) の a は 0 でない定数とする．

(1)　$y = ax^3$　　(2)　$y = \dfrac{1}{x}$　　(3)　$y = \cos x$

(4)　$y = \log x$　　(5)　$y = e^x$　　(6)　$y = e^{-2x}$

【答】 (1)　$y' = 3ax^2$，$y'' = 6ax$，$y''' = 6a$

(2)　$y = x^{-1}$ であるから　　$y' = -x^{-2}$，$y'' = 2x^{-3}$，$y''' = -6x^{-4}$

よって　$y' = -\dfrac{1}{x^2}$，$y'' = \dfrac{2}{x^3}$，$y''' = -\dfrac{6}{x^4}$

(3)　$y' = -\sin x$，$y'' = -\cos x$，$y''' = \sin x$

(4)　$y' = \dfrac{1}{x}$，$y'' = -\dfrac{1}{x^2}$，$y''' = \dfrac{2}{x^3}$

(5)　$y' = e^x$，$y'' = e^x$，$y''' = e^x$

(6)　$y' = -2e^{-2x}$，$y'' = 4e^{-2x}$，$y''' = -8e^{-2x}$

練習 3.25 次の関数の第 n 次導関数を求めよ．

(1)　$y = x^n$　　(2)　$y = e^{2x}$

【解】 (1)　$y' = nx^{n-1}$，$y'' = n(n-1)x^{n-2}$，$\cdots$，$y^{(n)} = n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1 = n!$

(2)　$y' = 2e^{2x}$，$y'' = 2^2e^{2x}$，$\cdots$，$y^{(n)} = 2^ne^{2x}$

3.2.3 曲線の方程式と導関数

練習 3.26 円 $x^2+y^2=1$ について，次の問いに答えよ．

(1) 方程式を y について解け．

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ であることを示せ．

【解】 (1) $y^2=1-x^2$ より　$y=\pm\sqrt{1-x^2}$

(2) $y=\sqrt{1-x^2}$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{y}$$

$y=-\sqrt{1-x^2}$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{y}$$

よって，$x^2+y^2=1$ について　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

練習 3.27 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(1)　$y^2=x$　　　(2)　$x^2-y^2=1$

【解】 (1) $y^2=x$ の両辺を x で微分すると　$2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=1$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2y}$

(2) $x^2-y^2=1$ の両辺を x で微分すると　$2x-2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$

練習 3.28 x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ．

(1) $x = 2t$，$y = t^2 - 1$ (2) $x = 3\cos t$，$y = 2\sin t$

【解】 (1) $\dfrac{dx}{dt} = 2$，$\dfrac{dy}{dt} = 2t$ から $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t}{2} = t$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = -3\sin t$，$\dfrac{dy}{dt} = 2\cos t$ から $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\cos t}{-3\sin t} = -\dfrac{2\cos t}{3\sin t}$

3.2.4 補充問題

4 次の関数を微分せよ．ただし，(6) の a は 1 でない正の定数とする．

(1) $y = \dfrac{1}{1+\cos x}$ (2) $y = \sin^2 x \cos 2x$ (3) $y = (\log x)^2$

(4) $y = \log\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$ (5) $y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ (6) $y = a^{2x+1}$

【解】 (1) $y' = -\dfrac{-\sin x}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(2) $y = \sin^2 x(1 - 2\sin^2 x) = \sin^2 x - 2\sin^4 x$ より

$$\begin{aligned} y' &= 2\sin x\cos x - 8\sin^3 x\cos x \\ &= \sin 2x - 4\sin 2x \sin^2 x \\ &= \sin 2x(1 - 4\sin^2 x) \end{aligned}$$

(3) $y' = 2(\log x)\cdot(\log x)' = \dfrac{2\log x}{x}$

(4) $y = \log|x+1| - \log|x+2|$

$$y' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

(5) $y' = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

(6) $y' = 2a^{2x+1}\log a$

5 a が定数のとき，次のことを示せ．

$$\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2+a})=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

【解】 $u=x+\sqrt{x^2+a}$，$y=\log u$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2+a})&=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=\frac{1}{u}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)=\frac{1}{u}\left(\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\end{aligned}$$

6 α を実数とするとき，次のことを示せ．

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}\qquad \text{ただし，} x>0$$

【解】 $x^\alpha>0$ であるから，$y=x^\alpha$ について，両辺の対数をとると

$$\log y=\alpha\log x$$

この両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\alpha\cdot\frac{1}{x}\qquad\qquad \longleftarrow (\log y)'=\frac{y'}{y}$$

すなわち　$y'=\alpha\cdot\dfrac{y}{x}$

よって　$(x^\alpha)'=\alpha\cdot\dfrac{x^\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$

3.3 章末問題

3.3.1 章末問題 A

1 関数 $y = x\sqrt{x}$ を，導関数の定義に従って微分せよ.

【解】
$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\sqrt{x+h} - x\sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h\{(x+h)\sqrt{x+h} + x\sqrt{x}\}} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h\{(x+h)\sqrt{x+h} + x\sqrt{x}\}} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 3xh + h^2}{(x+h)\sqrt{x+h} + x\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x^2}{x\sqrt{x} + x\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

2 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}}$ (2) $y = \sqrt{1 + \cos x}$

(3) $y = \dfrac{\sin x}{x}$ (4) $y = 2^{\log x}$

【解】 (1) $y' = \dfrac{(2x+1)\sqrt{x} - (x^2 + x + 1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{3x^2 + x - 1}{2x\sqrt{x}}$

【別解】 $y = x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ より

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x^2 + x - 1}{2x\sqrt{x}}$$

(2) $y' = \dfrac{(1 + \cos x)'}{2\sqrt{1 + \cos x}} = -\dfrac{\sin x}{2\sqrt{1 + \cos x}}$

(3) $y' = \dfrac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

(4) $y' = 2^{\log x} \cdot \log 2 \cdot (\log x)' = \dfrac{2^{\log x} \log 2}{x}$

3 次の関数について，y' および y'' を求めよ．

(1)　$y = \dfrac{x^2}{x-1}$　　　　(2)　$y = e^{-2x^2}$

【解】 (1) $y = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ より

$$y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

(2) $y' = e^{-2x^2}\cdot(-2x^2)' = -4xe^{-2x^2}$

$$\begin{aligned} y'' &= (-4x)'e^{-2x^2} + (-4x)\cdot(e^{-2x^2})' \\ &= -4e^{-2x^2} + (-4x)\cdot(-4xe^{-2x^2}) = 4(4x^2-1)e^{-2x^2} \end{aligned}$$

4 n を正の整数とすると，$x \neq 1$ のとき，次の等式が成り立つ．

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

この両辺を x の関数とみて微分し，$x \neq 1$ のとき，次の和を求めよ．

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

【解】 $(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ の左辺は

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' &= \frac{-(n+1)x^n\cdot(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{(n+1)(x^{n+1}-x^n) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

よって，$x \neq 1$ のとき　$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$

5 関数 $f(x)=\sin x$ について，次のことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

[証明] $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$　$\cdots$(A) とする．

［1］ $f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

ゆえに，(A) は $n=1$ のとき成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$$

と仮定する．このとき

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x)&=\frac{d}{dx}\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\\
&=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\\
&=\sin\left\{\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}\\
&=\sin\left\{x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right\}
\end{aligned}$$

よって，(A) は $n=k+1$ のときも成り立つ．

［1］，［2］から (A) はすべての自然数 n について成り立つ．　**[証終]**

6 関数 $y = e^x(\sin x + \cos x)$ について，次の等式が成り立つことを示せ.

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

[証明]

$$y' = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$$
$$y'' = 2(e^x \cos x - e^x \sin x) = 2e^x(\cos x - \sin x)$$

であるから

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 2y &= 2e^x(\cos x - \sin x) - 2{\cdot}2e^x \cos x + 2e^x(\sin x + \cos x) \\ &= 2e^x \cos x - 2e^x \sin x - 4e^x \cos x + 2e^x \sin x + 2e^x \cos x \\ &= 0 \end{aligned}$$

[証終]

7 a，b は正の定数とする．次のことを示せ.

(1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ のとき　$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ のとき　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b^2 x}{a^2 y}$

【解】 (1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}{\cdot}\frac{dy}{dx} = 0$$

よって　$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}{\cdot}\frac{dy}{dx} = 0$$

よって　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b^2 x}{a^2 y}$

3.3.2 章末問題B

8 微分可能な関数 $f(x)$ について，次のことを示せ.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=2f'(a)$$

【解】 左辺 $=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\{f(a-h)-f(a)\}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$

$$=f'(a)+f'(a)=2f'(a)$$

9 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

【解】 (1) $f(x)=\log(1+x)$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\log 1}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\&=f'(0)=\frac{1}{1+0}=1\end{aligned}$$

(2) $g(x)=e^x$ とすると　$g'(x)=e^x$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\\&=g'(0)=e^0=1\end{aligned}$$

10 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ であることを用いて，次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$

【解】 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^2 = e^2$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^2 = e^2$

11 次の関数を微分せよ．

(1) $\displaystyle y = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$　(2) $y = x^2(\log x)^3$　(3) $\displaystyle y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

【解】 (1) $$y' = \frac{-\dfrac{1}{\cos^2 x}(1+\tan x) - (1-\tan x)\dfrac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{-(1+\tan x)-(1-\tan x)}{(1+\tan x)^2\cos^2 x} = \frac{-2}{\{(1+\tan x)\cos x\}^2}$$

$$= -\frac{2}{(\cos x+\sin x)^2}$$

【別解】 $\displaystyle y = \frac{2-(1+\tan x)}{1+\tan x} = \frac{2}{1+\tan x} - 1$ より

$$y' = -2\cdot\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan x)^2} = -2\cdot\frac{1}{\{\cos x(1+\tan x)\}^2}$$

$$= -\frac{2}{(\cos x+\sin x)^2}$$

(2) $\displaystyle y' = 2x(\log x)^3 + x^2\cdot 3(\log x)^2\cdot\frac{1}{x} = 2x(\log x)^3 + 3x(\log x)^2$

(3) $\displaystyle y' = \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

12 次の関数を微分せよ．

(1) $y=x^x \quad (x>0)$ (2) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x+2)^2}}$

【解】 (1) $x^x>0$ であるから，$y=x^x$ について，両辺の対数をとると

$$\log y = x\log x$$

この両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

よって $y'=y(\log x+1)=x^x(\log x+1)$

(2) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x+2)}}$ について，両辺の絶対値の対数をとると

$$\log|y|=\frac{1}{3}\log|x+1|-\frac{2}{3}\log|x+2|$$

この両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{3(x+2)}=-\frac{x}{3(x+1)(x+2)}$$

よって
$$\begin{aligned}y'&=-\frac{x}{3(x+1)(x+2)}\cdot y\\&=-\frac{x}{3(x+1)(x+2)}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x+2)}}\\&=-\frac{x}{3(x+2)\sqrt[3]{(x+1)^2(x+2)^2}}\end{aligned}$$

13 任意の定数 a，b に対して，t の関数 $y = a\cos 2t + b\sin 2t$ は $\dfrac{d^2y}{dt^2} = ky$ を満たすという．この定数 k の値を求めよ．

【解】 $\dfrac{dy}{dt} = -2a\sin 2t + 2b\cos 2t$，　$\dfrac{d^2y}{dt^2} = -4a\cos 2t - 4b\sin 2t$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = ky$ より　$-4a\cos 2t - 4b\sin 2t = k(a\cos 2t + b\sin 2t)$

よって　$k = -4$

14 方程式 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx} = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ と表せることを示せ．

【解】 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ において，y を x の関数とみなして，両辺を x で微分すると

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

よって　$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

第 4 章　微分法の応用

4.1　導関数の応用

4.1.1　接線の方程式

練習 4.1 次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ．

(1)　$y = \dfrac{4}{x}$，A$(-1, -4)$　　　　(2)　$y = \tan x$，A$(0, 0)$

【解】(1)　$f(x) = \dfrac{4}{x}$ とすると $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2}$ であるから

$$f'(-1) = -4$$

よって，点 $(-1, -4)$ における接線の方程式は

$$y - (-4) = -4\{x - (-1)\} \qquad \text{すなわち} \qquad y = -4x - 8$$

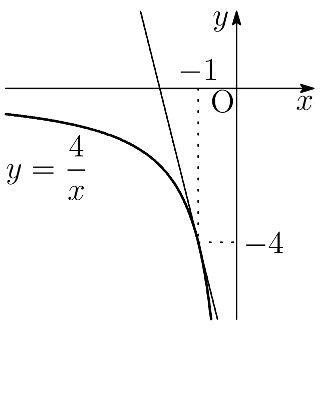
(2)　$f(x) = \tan x$ とすると $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるから

$$f'(0) = 1$$

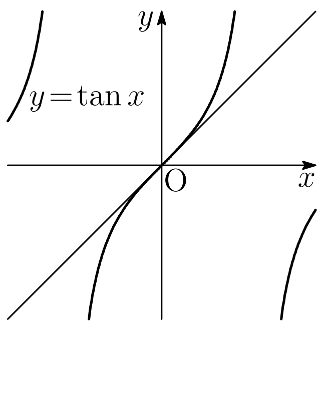
よって，点 $(0,\ 0)$ における接線の方程式は

$$y - 0 = 1(x - 0) \qquad \text{すなわち} \qquad y = x$$

(1)



(2)



練習 4.2 曲線 $y = e^x$ について，次のような接線の方程式を求めよ．

(1)　傾きが1である　　(2)　原点を通る

【解】 $y = e^x$ を微分すると　$y' = e^x$

ここで，接点の座標を $(a,\ e^a)$ とすると，接線の方程式は

$$y - e^a = e^a(x - a) \quad \cdots ①$$

(1)　接線 ① の傾きが1であるから

$$e^a = 1 \qquad \text{すなわち} \qquad a = 0$$

① に代入すると　$y - 1 = x$

整理して　$y = x + 1$

(2)　接線 ① が原点 $(0,\ 0)$ を通るから　$0 - e^a = e^a(0 - a)$

$$-e^a = -ae^a \qquad \text{すなわち} \qquad e^a(a - 1) = 0$$

$e^a \neq 0$ であるから　$a = 1$

① に代入すると　$y - e = e(x - 1)$

整理して　$y = ex$

練習 4.3 次の方程式で表される曲線上の点Aにおける接線の方程式を求めよ．

(1)　$\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} = 1$，$\mathrm{A}(-1,\ 2)$　　(2)　$x^2 - y^2 = 1$，$\mathrm{A}(\sqrt{2}, -1)$

【解】 (1)　$\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ の両辺を x で微分すると　$\dfrac{2x}{2} + \dfrac{2yy'}{8} = 0$

ゆえに，$y \neq 0$ のとき　$y' = -\dfrac{4x}{y}$

よって，点 $(-1,\ 2)$ における接線の傾きは　$-\dfrac{4\cdot(-1)}{2} = 2$

したがって，求める接線の方程式は

$$y - 2 = 2(x + 1) \qquad \text{すなわち} \qquad y = 2x + 4$$

(2)　$x^2 - y^2 = 1$ の両辺を x で微分すると　$2x - 2yy' = 0$

ゆえに，$y \neq 0$ のとき　$y' = \dfrac{x}{y}$

よって，点 $(\sqrt{2}, -1)$ における接線の傾きは　$\dfrac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$

したがって，求める接線の方程式は

$$y + 1 = -\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \qquad \text{すなわち} \qquad y = -\sqrt{2}x + 1$$

練習 4.4 次の曲線上の点 A における法線の方程式を求めよ．

(1)　$y = e^{-x}$，$\mathrm{A}(-1,\ e)$　　　(2)　$y = \sin x$，$\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)$

【解】(1)　$f(x) = e^{-x}$ とすると　　$f'(x) = -e^{-x}$

よって　　$f'(-1) = -e$

したがって，この法線の方程式は

$$y - e = \frac{1}{e}(x+1) \qquad \text{すなわち} \qquad y = \frac{1}{e}x + e + \frac{1}{e}$$

(2)　$f(x) = \sin x$ とすると　　$f'(x) = \cos x$

よって　　$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，この法線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \qquad \text{すなわち} \qquad y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$$

4.1.2　平均値の定理

練習 4.5 次の各場合に，平均値の定理における c の値を求めよ．

(1) $f(x) = -x^2 + 4x$，$a = 0$，$b = 3$

(2) $f(x) = x^3$，$a = -1$，$b = 2$

【解】(1)　$f(x) = -x^2 + 4x$ は，区間 $[0,\ 3]$ で連続で，区間 $(0,\ 3)$ で微分可能である．

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{3 - 0}{3} = 1, \qquad f'(c) = -2c + 4$$

よって，$-2c + 4 = 1$ から　　$c = \dfrac{3}{2}$

(2)　$f(x) = x^3$ は，区間 $[-1,\ 2]$ で連続で，区間 $(-1,\ 2)$ で微分可能である．

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{8 - (-1)}{3} = 3, \qquad f'(c) = 3c^2$$

よって　　$3c^2 = 3$　すなわち　$c^2 = 1$

$-1 < c < 2$ であるから　　$c = 1$

練習 4.6 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ．

$$a < b \text{ のとき} \qquad e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$$

[証明] 関数 $f(x) = e^x$ は，$(a,\ b)$ で微分可能で，$f'(x) = e^x$
区間 $[a,\ b]$ において平均値の定理を用いると

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^c \quad \cdots ①$$

$$a < c < b \qquad \cdots ②$$

を同時に満たす c が存在する．
e^x は増加関数であるから，② より $\qquad e^a < e^c < e^b$

よって，① により $\qquad e^a < \dfrac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$ **[証終]**

4.1.3 関数の値の変化

導関数の符号と関数の増減

1 区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) > 0$ ならば，
$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で増加する．

2 区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) < 0$ ならば，
$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で減少する．

3 区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) = 0$ ならば，
$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で定数である．

[1 の証明] 区間 $[a,\ b]$ において，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ となる任意の 2 数 x_1，x_2 に対して，平均値の定理により

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2$$

を満たす c がとれる．

区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) > 0$ ならば，x_1，x_2 のとり方によらず，常に $f'(c) > 0$ となる．ここで，$x_2 - x_1 > 0$ であるから，

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{すなわち} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

が成り立つ．よって，**1** が成り立つ． **[証終]**

練習 4.7 前ページの **2**，**3** を証明せよ．

[2 の証明] 区間 $[a,\ b]$ において，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ となる任意の 2 数 x_1，x_2 に対して，平均値の定理により

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),\quad x_1 < c < x_2$$

を満たす c がとれる．

区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) < 0$ ならば，x_1，x_2 のとり方によらず，常に $f'(c) < 0$ となる．ここで，$x_2 - x_1 > 0$ であるから，

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \qquad \text{すなわち} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

が成り立つ．よって，**2** が成り立つ． **[証終]**

[3 の証明] 区間 $[a,\ b]$ において，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ となる任意の 2 数 x_1，x_2 に対して，平均値の定理により

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),\quad x_1 < c < x_2$$

を満たす c がとれる．

区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) = 0$ ならば，x_1，x_2 のとり方によらず，常に $f'(c) = 0$ であるから，

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \qquad \text{すなわち} \quad f(x_1) = f(x_2)$$

が成り立つ．よって，**3** が成り立つ． **[証終]**

関数 $f(x)$，$g(x)$ が区間 $(a,\ b)$ でともに微分可能で，常に $g'(x) = f'(x)$ ならば，$f(x)$，$g(x)$ には次の関係がある．

区間 $[a,\ b]$ で $\qquad g(x) = f(x) + C \qquad$ ただし，C は定数

練習 4.8 上のことを証明せよ．

[証明] $h(x) = g(x) - f(x)$ とおくと，区間 $(a,\ b)$ で，常に $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$ であるから，$h(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で定数である．
したがって，定数 C を用いて，$h(x) = C$ とおける．
ゆえに，区間 $[a,\ b]$ で $\qquad g(x) = f(x) + C \qquad$ ただし，C は定数． **[証終]**

練習 4.9 次の関数の増減を調べよ．

(1)　$f(x) = x - e^x$　　　(2)　$f(x) = x - \log x$

(3)　$f(x) = x + \sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

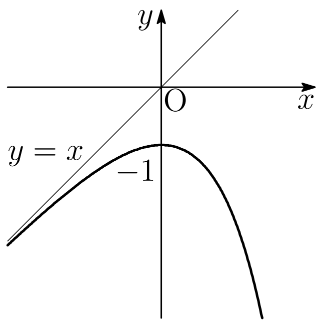
【解】(グラフは参考)

(1) $f'(x) = 1 - e^x$

$f'(x)$ の符号を調べると，
$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$

よって，$f(x)$ は $x \leqq 0$ で増加，
$0 \leqq x$ で減少する．

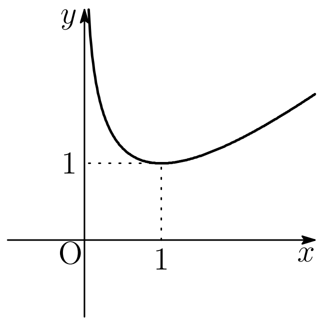


(2) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

$f'(x)$ の符号を調べると，
$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	$\searrow$	1	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は $0 < x \leqq 1$ で減少，
$1 \leqq x$ で増加する．

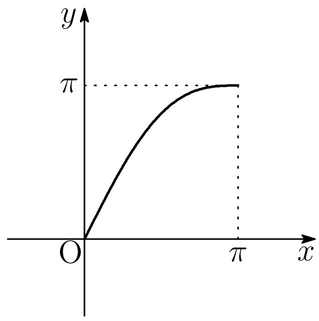


(3) $f'(x) = 1 + \cos x$

$f'(x)$ の符号を調べると，
$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	π

よって，$f(x)$ は定義域で常に増加する．



練習 4.10 次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ (2) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(3) $f(x) = x \log x$ (4) $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$

【解】(1) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$

$f'(x) = 0$ となる x の値を求めると $x = 0,\ \dfrac{3}{2}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$	極小 $-\frac{11}{16}$	$\nearrow$

よって，極小値は $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{11}{16}$，極大値はない．

(2) $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2 - x)xe^{-x}$

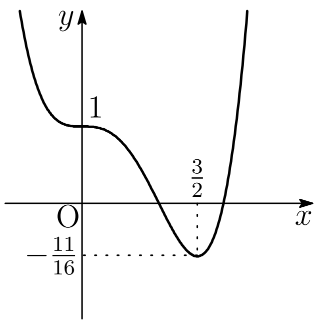
$f'(x) = 0$ となる x の値を求めると $x = 0,\ 2$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

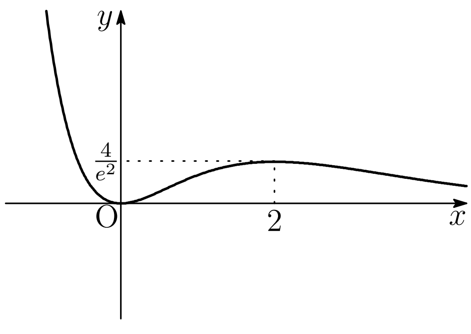
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

よって，極小値は $f(0) = 0$，極大値は $f(2) = \dfrac{4}{e^2}$ である．

(1)



(2)



(3) 定義域は $x>0$ である．　$f'(x)=1\cdot\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\log x+1$

$f'(x)=0$ となる x の値を求めると　$x=\dfrac{1}{e}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	極小 $-\frac{1}{e}$	↗

よって，極小値は $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$，極大値はない．

(4) 定義域は $x\neq 0$ である．　$f'(x)=1-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{x^2-2}{x^2}$

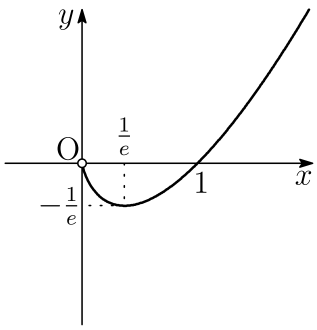
$f'(x)=0$ となる x の値を求めると　$x=-\sqrt{2},\ \sqrt{2}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

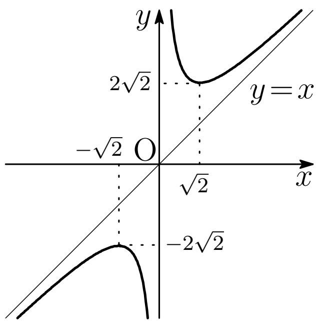
x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $-2\sqrt{2}$	↘	／	↘	極小 $2\sqrt{2}$	↗

よって，極大値は $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$，極小値は $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ である．

(3)



(4)



練習 4.11 次の関数の極値を求めよ．

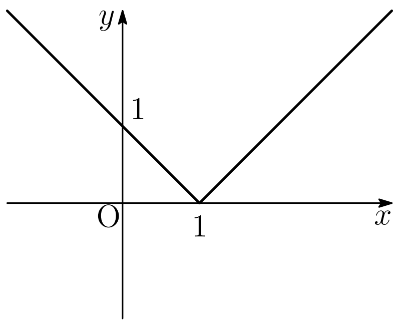
(1)　$f(x) = |x-1|$　　　(2)　$f(x) = |x|\sqrt{x+2}$

【解】 (1) $x \geqq 1$ のとき　$f(x) = x - 1$

$$f'(x) = 1 > 0$$

$x < 1$ のとき　$f(x) = -x + 1$

$$f'(x) = -1 < 0$$



よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

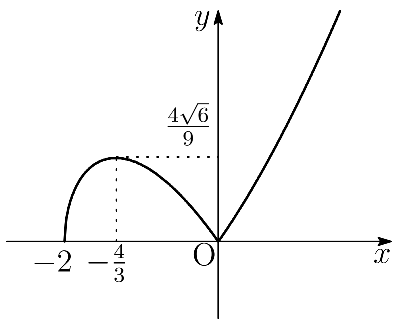
よって，極小値は $f(1) = 0$，極大値はない．

(2) この関数の定義域は，$x \geqq -2$ である．

$x \geqq 0$ のとき　$f(x) = x\sqrt{x+2}$

$$f'(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x}{2\sqrt{x+2}} = \frac{2(x+2)+x}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$$

よって，$x > 0$ では，常に　$f'(x) > 0$



$-2 \leqq x < 0$ のとき　$f(x) = -x\sqrt{x+2}$

$$f'(x) = -\frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$$

$f'(x) = 0$ となる x の値を求めると　$x = -\dfrac{4}{3}$

以上から，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-2	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大 $\frac{4\sqrt{6}}{9}$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

よって，極大値は $f\left(-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{4\sqrt{6}}{9}$，極小値は $f(0) = 0$ である．

練習 4.12 関数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ が $x = 1$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ．また，このとき，関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

【解】
$$f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} = \frac{x^2 - a}{x^2}$$

$f(x)$ は $x = 1$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x = 1$ で極値をとるならば

$$f'(1) = 0 \qquad \text{すなわち} \qquad 1 - a = 0$$

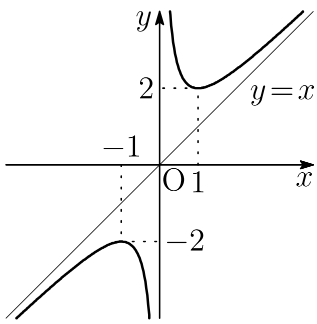
これを解くと　$a = 1$

このとき　$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 -2	$\searrow$	／	$\searrow$	極小 2	$\nearrow$



ゆえに，$a = 1$ のとき，$x = 1$ で確かに極値をとる．

このとき，極大値は $f(-1) = -2$，極小値は $f(1) = 2$

(答) $a = 1$，極大値 -2，極小値 2

練習 4.13 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1) $y=(1+\cos x)\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

(2) $y=\dfrac{4-3x}{x^2+1} \quad (1 \leqq x \leqq 4)$

【解】 (1)

$$\begin{aligned} y' &= -\sin x \cdot \sin x+(1+\cos x)\cos x \\ &= \cos^2 x-1+\cos x+\cos^2 x \\ &= 2\cos^2 x+\cos x-1 \\ &= (2\cos x-1)(\cos x+1) \end{aligned}$$

$0<x<2\pi$ で $y'=0$ となる x の値は

$$\cos x=\frac{1}{2},\ \cos x=-1$$

より $\quad x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \pi$

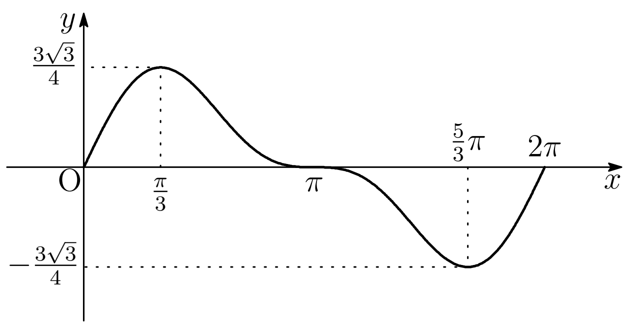
ゆえに，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における y の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	極小 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0

したがって，y は

$$x=\frac{\pi}{3}\ で最大値\ \frac{3\sqrt{3}}{4},\quad x=\frac{5}{3}\pi\ で最小値\ -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

をとる．



(2)
$$y' = \frac{-3(x^2+1)-(4-3x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{3x^2-8x-3}{(x^2+1)^2} = \frac{(3x+1)(x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$1 < x < 4$ で $y' = 0$ となる x の値は　　$x = 3$

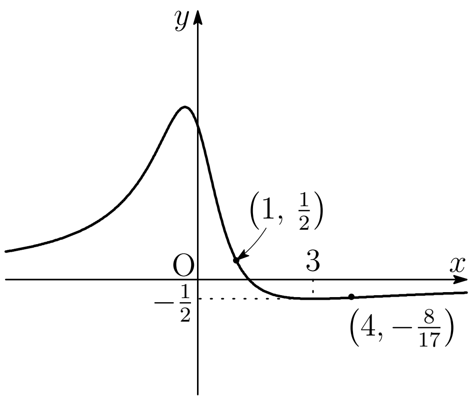
ゆえに，$1 \leqq x \leqq 4$ における y の増減表は

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{1}{2}$	↘	極小 $-\frac{1}{2}$	↗	$-\frac{8}{17}$

したがって，y は

$$x = 1 \text{ で最大値 } \frac{1}{2},\ \ x = 3 \text{ で最小値 } -\frac{1}{2}$$

をとる.



4.1.4 関数のグラフ

練習 4.14 次の曲線の凹凸を調べよ．また，変曲点があればその座標を求めよ．

(1) $y = x^4 + 2x^3 + 1$ (2) $y = xe^{-x}$

(3) $y = x - \cos x \ (0 < x < \pi)$ (4) $y = -x^4$

【解】 (1) $$y' = 4x^3 + 6x^2,\ y'' = 12x^2 + 12x = 12x(x+1)$$

よって，この曲線の凹凸は，次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	下に凸	変曲点 0	上に凸	変曲点 1	下に凸

変曲点の座標は $(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$

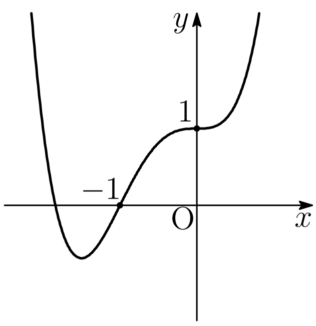
(2) $$y' = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$
$$y'' = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$$

よって，この曲線の凹凸は，次のようになる．

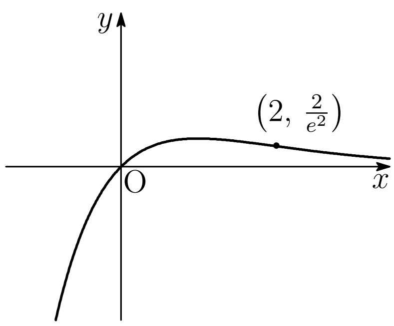
x	$\cdots$	2	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	変曲点 $\frac{2}{e^2}$	下に凸

変曲点の座標は $\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$

(1)



(2)



(3)　$y' = 1 + \sin x$，$y'' = \cos x$

よって，この曲線の凹凸は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
y''		$+$	0	$-$	
y		下に凸	変曲点 $\frac{\pi}{2}$	上に凸	

変曲点の座標は　$\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

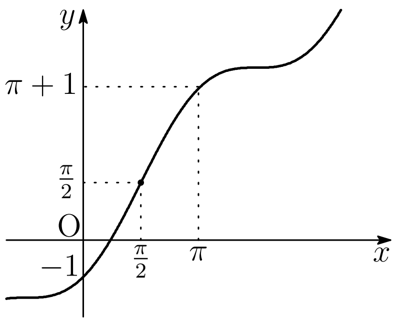
(4)　$y' = -4x^3$，$y'' = -12x^2$

よって，この曲線の凹凸は，次のようになる．

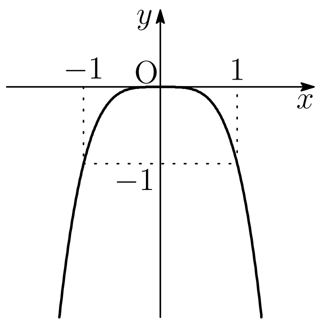
x	$\cdots$	0	$\cdots$
y''	$-$	0	$-$
y	上に凸	0	上に凸

変曲点はない

(3)



(4)



練習 4.15 関数 $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線を調べて，グラフの概形をかけ.

【解】 $y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

$y'' = -e^{-\frac{x^2}{2}} - x(-xe^{-\frac{x^2}{2}}) = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$

よって，増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる.

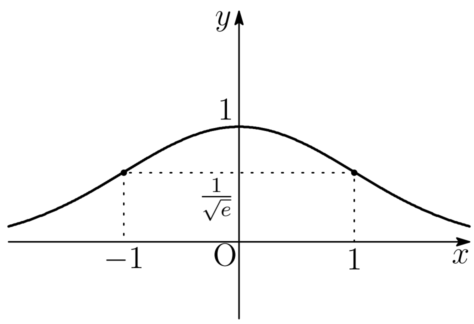
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	⤴	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	極大 1	↘	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	⤷

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ であるから，x 軸は漸近線である.

また，$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ とすると　$f(-x) = f(x)$

ゆえに，曲線は y 軸について対称である.

以上から，この関数のグラフの概形は，下の図のようになる.



練習 4.16 関数 $y=\dfrac{x^2-x-2}{x-1}$ のグラフの概形をかけ.

【解】

$$y=\frac{x(x-1)-2}{x-1}=x-\frac{2}{x-1}$$

$$y'=1+\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$y''=-\frac{4}{(x-1)^3}$$

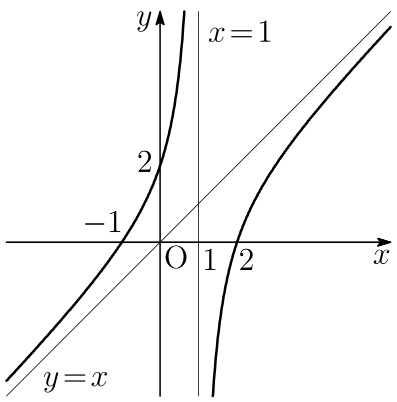
よって，増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$		$+$
y''	$+$		$-$
y	⤴		⤴

$$\lim_{x\to 1-0} y=\infty,\quad \lim_{x\to 1+0} y=-\infty,\quad \lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=0$$

よって，漸近線は直線 $x=1$，直線 $y=x$ である.

以上から，この関数のグラフの概形は，下の図のようになる.



練習 4.17 次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ．

(1) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$　　(2) $f(x) = x + 2\sin x \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

【解】 (1) $f'(x) = 4x^3 - 12x$，$f''(x) = 12x^2 - 12$

$f'(x) = 0$ を解くと　$x = 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$

$f''(0) = -12 < 0$，$f''(\sqrt{3}) = 24 > 0$，$f'(-\sqrt{3}) = 24 > 0$

よって　$f(0)$ は極大値，$f(\pm\sqrt{3})$ は極小値

ゆえに，$f(x)$ は

$$x = 0 \text{ で極大値 } 5,\ x = \pm\sqrt{3} \text{ で極小値 } -4$$

をとる．

(2) $f'(x) = 1 + 2\cos x$，$f''(x) = -2\sin x$

$f'(x) = 0$ を解くと　$\cos x = -\dfrac{1}{2}$

$0 < x < 2\pi$ では　$x = \dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{4}{3}\pi$

$f''\left(\dfrac{2}{3}\pi\right) = -\sqrt{3} < 0$，$f''\left(\dfrac{4}{3}\pi\right) = \sqrt{3} > 0$

よって　$f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)$ は極大値，$f\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)$ は極小値

ゆえに，$f(x)$ は

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ で極大値 } \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3},\ x = \frac{4}{3}\pi \text{ で極小値 } \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

をとる．

4.1.5　補充問題

1 p は 0 でない定数とする．放物線 $y^2=4px$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，$y_1y=2p(x+x_1)$ であることを示せ．

【解】 $y^2=4px$ より　$2yy'=4p$

$\underline{y_1\neq 0 \text{ のとき}}$　　$y-y_1=\dfrac{2p}{y_1}(x-x_1)$

$y_1y=2px+{y_1}^2-2px_1$

${y_1}^2=4px_1$ であるから　$y_1y=2px+2px_1$

ゆえに　　$y_1y=2p(x+x_1)$　$\cdots$①

$\underline{y_1=0 \text{ のとき}}$　点 $(0,\ 0)$ における接線の方程式は $x=0$ で，

$p\neq 0$ より ① が得られる．

2 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1)　$y=x\sqrt{4-x^2}$　$(-1\leqq x\leqq 2)$　　(2)　$y=x+\sqrt{4-x^2}$

【解】　(1) $y'=\sqrt{4-x^2}+x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$

$-1<x<2$ において $y'=0$ となる x の値は，$x=\sqrt{2}$ である．

よって，y の増減表は

x	-1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	0

$x=\sqrt{2}$ で最大値 2，$x=-1$ で最小値 $-\sqrt{3}$

(2) 定義域は，$4 - x^2 \geqq 0$ より　　$-2 \leqq x \leqq 2$

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}} \quad (-2 < x < 2)$$

$y' = 0$ とすると，$\sqrt{4-x^2} = x$ より　$x = \sqrt{2}$

したがって，y の増減表は

x	-2	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	$\nearrow$	極大 $2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

$x = \sqrt{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}$，$x = -2$ で最小値 -2

3 曲線 $y = x^4 + ax^3 + 3ax^2 + 1$ が変曲点をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．

【解】

$$y = x^4 + ax^3 + 3ax^2 + 1 \quad \cdots ①$$

$$y' = 4x^3 + 3ax^2 + 6ax,\ \ y'' = 12x^2 + 6ax + 6a$$

$$y'' = 0 \text{ とすると} \quad 2x^2 + ax + a = 0 \quad \cdots ②$$

曲線 ① が変曲点をもつためには，② が実数解 α をもち，$x = \alpha$ の前後で y'' の符号が変わらなければならない．したがって，② が異なる 2 つの実数解をもたなければならない．

逆に ② が異なる 2 つの実数解をもつとき，これを α，β $(\alpha < \beta)$ とすると，下の表のように確かに曲線 ① は変曲点をもつ．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	下に凸	変曲点	上に凸	変曲点	下に凸

よって，$D = a^2 - 8a > 0$ が必要かつ十分な条件である．

これを解いて　　$a < 0$，$8 < a$

4.2　いろいろな応用

4.2.1　方程式，不等式への応用

応用例題 4.5 $x > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$e^x > 1 + x$$

考え方　$x > 0$ のとき，関数 $f(x) = e^x - (1 + x)$ の増減を利用する．

[証明] $f(x) = e^x - (1 + x)$ とすると　　$f'(x) = e^x - 1$

$x > 0$ のとき，$e^x > 1$ であるから　　$f'(x) > 0$

よって，$f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ で増加する．

ゆえに，$x > 0$ のとき　　$f(x) > f(0) = 0$　　$\longleftarrow f(0) = e^0 - (1 + 0) = 0$

したがって　　$e^x > 1 + x$　　**[証終]**

練習 4.18 $x > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

(1)　$e^x > 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$　　　(2)　$\log(x + 1) < x$

[証明]　(1) $f(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{1}{2}x^2\right)$ とすると　　$f'(x) = e^x - (1 + x)$

応用例題 4.5 の結果より，$x > 0$ のとき　　$f'(x) > 0$

よって，$f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ で増加する．

ゆえに，$x > 0$ のとき　　$f(x) > f(0) = 0$

したがって　　$e^x - \left(1 + x + \dfrac{1}{2}x^2\right) > 0$

すなわち　　$e^x > 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$

(2) $f(x) = x - \log(x + 1)$ とすると　　$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{x}{x + 1}$

$x > 0$ のとき，$\dfrac{x}{x + 1} > 0$ であるから　　$f'(x) > 0$

よって，$f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ で増加する．

ゆえに，$x > 0$ のとき　　$f(x) > f(0) = 0$

したがって　　$x - \log(x + 1) > 0$

すなわち　　$\log(x + 1) < x$　　**[証終]**

練習 4.19 a を定数とする．次の方程式の異なる実数解の個数を調べよ．

$$\frac{x^3}{x-1} = a$$

【解】 $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ とすると

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$$

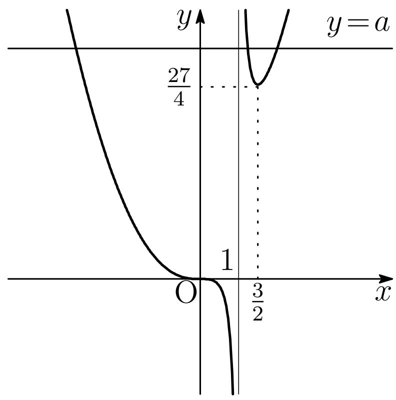
よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	極小 $\frac{27}{4}$	$\nearrow$

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1-\frac{1}{x}} = \infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{1-\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x\to1-0} f(x) = -\infty,\quad \lim_{x\to1+0} f(x) = \infty$$



ゆえに，$y = f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．

このグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する．

したがって　$a > \dfrac{27}{4}$ のとき 3 個，$a = \dfrac{27}{4}$ のとき 2 個，$a < \dfrac{27}{4}$ のとき 1 個

4.2.2　速度と加速度

練習 4.20 地上から，初速度 v_0 m/秒 でボールを真上に打ち上げるとき，t 秒後の高さ x m は，$x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ で与えられる．ただし，g は定数とする．t 秒後におけるボールの速度 v m/秒 と加速度 α m/秒^2 を求めよ．

【解】 速度 v は　$v = \dfrac{dx}{dt} = v_0 - gt$　(m/秒)，　加速度 α は　$\alpha = \dfrac{dv}{dt} = -g$　(m/秒^2)

練習 4.21 時刻 t における点 P の座標 $(x,\ y)$ が次の式で与えられるとき，$t=3$ における点 P の速さ，加速度の大きさを求めよ．

(1)　$x=2t+1,\ y=t^2-4t$　　　　(2)　$x=2\cos\pi t,\ y=2\sin\pi t$

【解】 点 P の時刻 t における速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とする．

(1) $\vec{v}$ の成分は　$\dfrac{dx}{dt}=2,\ \dfrac{dy}{dt}=2t-4$

$t=3$ のとき　$\dfrac{dy}{dt}=2{\cdot}3-4=2$

よって，　速度 $\vec{v}$ は　$\vec{v}=(2,\ 2)$

速さ $|\vec{v}|$ は　$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

また，$\vec{\alpha}$ の成分は　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=2$

よって，　加速度 $\vec{\alpha}$ は　$\vec{\alpha}=(0,\ 2)$

加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{0^2+2^2}=\sqrt{4}=2$

(2) $\vec{v}$ の成分は　$\dfrac{dx}{dt}=-2\pi\sin\pi t,\ \dfrac{dy}{dt}=2\pi\cos\pi t$

$t=3$ のとき　$\dfrac{dx}{dt}=0,\ \dfrac{dy}{dt}=-2\pi$

よって,速度 $\vec{v}$ は　$\vec{v}=(0,\ -2\pi)$

速さ $|\vec{v}|$ は　$|\vec{v}|=\sqrt{0^2+(-2\pi)^2}=\sqrt{4\pi^2}=2\pi$

また，$\vec{\alpha}$ の成分は　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-2\pi^2\cos\pi t,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-2\pi^2\sin\pi t$

$t=3$ のとき　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=2\pi^2,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=0$

よって，　加速度 $\vec{\alpha}$ は　$\vec{\alpha}=(2\pi^2,\ 0)$

加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(2\pi^2)^2+0^2}=\sqrt{(2\pi^2)^2}=2\pi^2$

4.2.3　近似式

練習 4.22 $h \fallingdotseq 0$ のとき，次の関数の値について，1 次の近似式を作れ.

(1)　$\cos(a+h)$　　(2)　$\tan(a+h)$

【解】 (1) $(\cos x)' = -\sin x$ であるから，$h \fallingdotseq 0$ のとき

$$\cos(a+h) \fallingdotseq \cos a - h\sin a$$

(2) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるから，$h \fallingdotseq 0$ のとき

$$\tan(a+h) \fallingdotseq \tan a + \frac{h}{\cos^2 a}$$

練習 4.23 $x \fallingdotseq 0$ のとき，次の関数について，1 次の近似式を作れ.

(1)　e^x　　(2)　$\log(1+x)$　　(3)　$\dfrac{1}{1+x}$

【解】 (1) $f(x) = e^x$ について　$f'(x) = e^x$

よって　$f(0) = 1$，　$f'(0) = 1$

これらを，$f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)x$ に代入して

$$x \fallingdotseq 0 \text{ のとき} \qquad e^x \fallingdotseq 1 + x$$

(2) $f(x) = \log(1+x)$ について　$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

よって　$f(0) = 0$，　$f'(0) = 1$

これらを，$f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)x$ に代入して

$$x \fallingdotseq 0 \text{ のとき} \qquad \log(1+x) \fallingdotseq x$$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ について　$f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$

よって　$f(0) = 1$，　$f'(0) = -1$

これらを，$f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)x$ に代入して

$$x \fallingdotseq 0 \text{ のとき} \qquad \frac{1}{1+x} \fallingdotseq 1 - x$$

練習 4.24 1 次の近似式を用いて，次の数の近似値を求めよ．

(1)　$\sqrt[4]{16.1}$　　(2)　$\log 1.01$　　(3)　$\dfrac{1}{0.998}$

【解】 (1)　　$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$(1+x)^p \fallingdotseq 1+px$

$$\sqrt[4]{16.1} = \sqrt[4]{2^4\left(1+\frac{1}{2^4 \cdot 10}\right)} = 2\sqrt[4]{1+0.00625}$$

$\sqrt[4]{1+0.00625} = (1+0.00625)^{\frac{1}{4}}$ であるから

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{16.1} &= 2\sqrt[4]{1+0.00625} \\ &\fallingdotseq 2\left(1+\frac{1}{4}\times 0.00625\right) = 2.003125 \fallingdotseq 2.003\end{aligned}$$

(2)　　$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$\log(1+x) \fallingdotseq x$

$\log 1.01 = \log(1+0.01)$ であるから

$$\log 1.01 = 0.01$$

(3)　　$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$\dfrac{1}{1+x} \fallingdotseq 1-x$

$\dfrac{1}{0.098} = \dfrac{1}{1+(-0.002)}$ であるから

$$\frac{1}{0.998} \fallingdotseq 1-(-0.002) = 1.002$$

4.2.4　補充問題

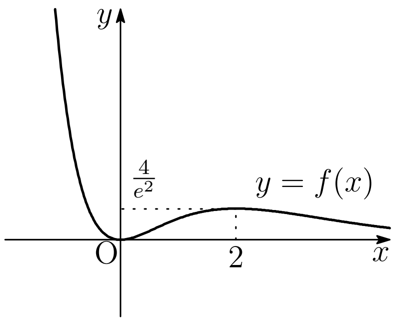
4 方程式 $x^2 = ae^x$ が異なる 3 個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．

【解】 $f(x) = x^2e^{-x}$ とすると

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2\cdot(-e^{-x}) = -x(x-2)e^{-x}$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\frac{4}{e^2}$	$\searrow$



また　$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x} = 0$

ゆえに，$y = f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．このグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数は，方程式の実数解の個数と一致する．

したがって，方程式 $x^2 = ae^x$ が 3 個の実数解をもつのは　$0 < a < \dfrac{4}{e^2}$

5 座標平面上を運動する点 P の，時刻 t における座標が次の式で与えられるとき，加速度の大きさを求めよ．

$x = a(\omega t - \sin\omega t)$,　$y = a(1 - \cos\omega t)$　　(a，ω は正の定数)

【解】

$$\frac{dx}{dt} = a\omega(1 - \cos\omega t),\quad \frac{dy}{dt} = a\omega\sin\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\omega^2\sin\omega t,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = a\omega^2\cos\omega t$$

よって，加速度の大きさは

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{(a\omega^2)^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = a\omega^2$$

6 球が毎秒 8cm^3 の割合で体積を増しているとする．時刻 t におけるこの球の半径，表面積，体積を，それぞれ r cm，S cm^2，V cm^3 とするとき，$r=2$ のときの変化率 $\dfrac{dV}{dt}$，$\dfrac{dr}{dt}$，$\dfrac{dS}{dt}$ をそれぞれ求めよ．

【解】 $S=4\pi r^2$，$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ であるから

$$\frac{dS}{dt}=\frac{dS}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=8\pi r\cdot\frac{dr}{dt} \qquad \cdots ①$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=4\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt} \qquad \cdots ②$$

毎秒 8cm^3 の割合で体積が増加しているから

$$\frac{dV}{dt}=8 \quad (\text{cm}^3/\text{秒}) \qquad \cdots ③$$

③ を ② に代入して $\quad \dfrac{dr}{dt}=\dfrac{2}{\pi r^2} \qquad \cdots ④$

④ を ① に代入して $\quad \dfrac{dS}{dt}=\dfrac{16}{r}$

ゆえに，$r=2$ のとき

$$\frac{dV}{dt}=8 \quad (\text{cm}^3/\text{秒}),\quad \frac{dr}{dt}=\frac{1}{2\pi} \quad (\text{cm}/\text{秒}),\quad \frac{dS}{dt}=8 \quad (\text{cm}^2/\text{秒})$$

4.3　章末問題

4.3.1　章末問題 A

1 次の曲線の，与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ．

(1)　$y = \dfrac{x-2}{x+2}$，点 $(2,\ 0)$　　　(2)　$y = \tan x$，点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$

【解】 (1) $y = 1 - \dfrac{4}{x+2}$ から　　$y' = \dfrac{4}{(x+2)^2}$

ゆえに，$x = 2$ のとき　$y' = \dfrac{4}{(2+2)^2} = \dfrac{1}{4}$

よって，接線の方程式は　$y = \dfrac{1}{4}(x-2)$

すなわち　　$y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}$

法線の方程式は　$y = -4(x-2)$

すなわち　　$y = -4x + 8$

(2) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$x = \dfrac{\pi}{4}$ のとき　$y' = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2$

よって，接線の方程式は　$y - 1 = 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

すなわち　　$y = 2x - \dfrac{\pi}{2} + 1$

法線の方程式は　$y - 1 = -\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

すなわち　　$y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{8} + 1$

2 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ．

(1)　$y = x^2 \log x$　　　　(2)　$y = |x^3 - 3x|$

【解】 (1) 定義域は $x > 0$ で，$y' = x(2\log x + 1)$

$y' = 0$ とすると　　$x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

y の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	極小 $-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$

$x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ で極小値 $-\dfrac{1}{2e}$

(2) $f(x) = x^3 - 3x$ とすると　　$f'(x) = 3(x+1)(x-1)$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 -2	$\nearrow$

$f(x) = 0$ を解くと　$x(x^2 - 3) = 0$ より　　$x = 0,\ \pm\sqrt{3}$

よって，$y = |f(x)|$ の増減表は

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$
y	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

ゆえに，　$x = -\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}$ で極小値 0

$x = -1,\ 1$ で極大値 2

3 次の関数のグラフの概形をかけ.

(1)　$y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$　　　　(2)　$y=\sin 2x+2\cos x\ \ (0\leqq x\leqq \pi)$

【解】 (1) $y=1-\dfrac{2x}{x^2+1}$　　$\cdots$①

$$y'=-2\cdot\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 1$

$$y''=\frac{2x(x^2+1)^2-(x^2-1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=2\cdot\frac{-2x^3+6x}{(x^2+1)^3}=-\frac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

$y''=0$ とすると　$x=0,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3}$

y の増減，極値，グラフの凹凸と変曲点は，次の表のようになる.

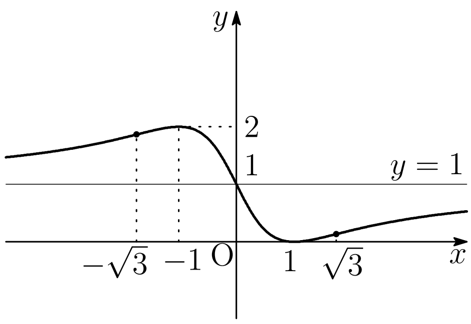
x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	↗	変曲点 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	極大 2	↘	変曲点 1	↘	極小 0	↗	変曲点 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗

また，① より

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=1,\quad \lim_{x\to-\infty} y=1$

よって，漸近線は直線 $y=1$

ゆえに，グラフは下の図のようになる.



(2)
$$\begin{aligned} y' &= 2\cos 2x - 2\sin x \\ &= 2(1 - 2\sin^2 x - \sin x) \\ &= -2(2\sin x - 1)(\sin x + 1) \end{aligned}$$

$y' = 0$ とすると $0 < x < \pi$ では　$x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

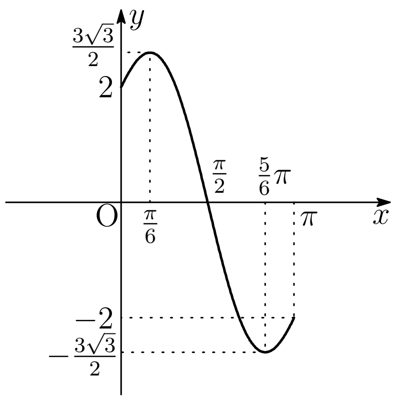
$$\begin{aligned} y'' &= -4\sin 2x - 2\cos x \\ &= -4 \cdot 2\sin x\cos x - 2\cos x \\ &= -2\cos x(4\sin x + 1) \end{aligned}$$

$y'' = 0$ とすると $0 < x < \pi$ では　$x = \dfrac{\pi}{2}$

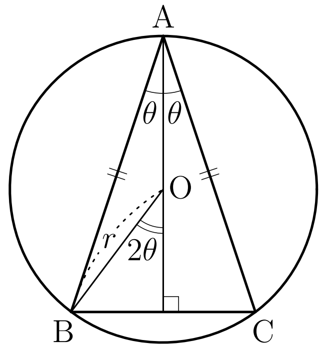
ゆえに，y の増減，極値，グラフの凹凸と変曲点は，次の表のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y	2	$\nearrow$	極大 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\searrow$	変曲点 0	$\searrow$	極小 $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\nearrow$	-2

よって，グラフは下の図のようになる．



4 円に内接する二等辺三角形の中で，周の長さが最大になるものは正三角形である．このことを，円の半径を r，二等辺三角形の頂角の大きさを 2θ とし，周の長さ l を θ の関数で表すことによって証明せよ．



【解】 $\mathrm{AB} = 2r\cos\theta$，$\mathrm{BC} = 2r\sin 2\theta$

ゆえに　$l = 2\mathrm{AB} + \mathrm{BC} = 2r(2\cos\theta + \sin 2\theta)$

よって
$$\frac{dl}{d\theta} = 2r(-2\sin\theta + 2\cos 2\theta)$$
$$= -4r(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1)$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で $\dfrac{dl}{d\theta} = 0$ となる θ は　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

l の増減表は，下の表のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dl}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
l		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ で l は最大となる．

このとき，$2\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるからこの二等辺三角形は正三角形である．

5 a を定数とする．曲線 $y=\dfrac{x}{x^2+a}$ の変曲点の個数を，次の各場合について求めよ．

(1) $a>0$ (2) $a=0$ (3) $a<0$

【解】 $y'=\dfrac{x^2+a-x\cdot 2x}{(x^2+a)^2}=\dfrac{a-x^2}{(x^2+a)^2}$

$$y''=\frac{-2x(x^2+a)^2-(a-x^2)\cdot 4x(x^2+a)}{(x^2+a)^4}=\frac{2x(x^2-3a)}{(x^2+a)^3}$$

(1) $a>0$ より，$y''=0$ とすると

$x=0,\ \pm\sqrt{3a}$

$y''=\dfrac{2(x+\sqrt{3a})x(x-\sqrt{3a})}{(x^2+a)^3}$

であるから，$x=-\sqrt{3a},\ 0,\ \sqrt{3a}$ の前後で y'' の符号は変わる．

ゆえに，変曲点は 3 個

(2) $a=0$ のとき $y''=\dfrac{2}{x^3}\neq 0$

ゆえに，変曲点は 0 個

(3) $a<0$ のとき $x^2-3a>0$

よって，$y''=0$ とすると $x=0$

$x=0$ の前後で，y'' の符号は変わる．

ゆえに，変曲点は 1 個

6 $x > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

(1)　$\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$　　(2)　$\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$

【解】 (1) $f(x) = \cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$ とすると

$$f'(x) = -\sin x + x$$

$x > 0$ のとき $x > \sin x$ であるから　$f'(x) > 0$

よって，$f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ で増加する．

ゆえに，$x > 0$ のとき　　$f(x) > f(0) = 0$

したがって　　$\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$

(2) $g(x) = \sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)$ とすると

$$g'(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

(1) から $x > 0$ のとき　　$g'(x) > 0$

よって，$g(x)$ は区間 $x \geqq 0$ で増加する．

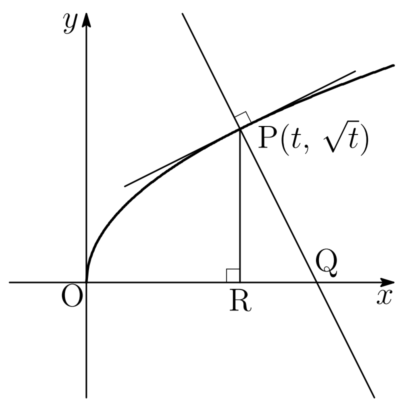
ゆえに，$x > 0$ のとき　　$g(x) > g(0) = 0$

したがって　　$\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$

4.3.2　章末問題 B

7 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の原点以外の任意の点 P における法線が x 軸と交わる点を Q とし，P から x 軸に下ろした垂線を PR とする．このとき，線分 QR の長さは一定であることを証明せよ．

【解】 点 P の x 座標を t とする．



$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

よって，$x=t$ のとき

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

ゆえに，点 P における法線の傾きは $-2\sqrt{t}$ で，その方程式は

$$y-\sqrt{t}=-2\sqrt{t}(x-t)$$

$y=0$ とすると　$x=t+\dfrac{1}{2}$

これが，点 Q の x 座標である．

点 R の x 座標は t であるから　$\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2}$

したがって，線分 QR の長さは一定である．

8 2 つの曲線 $y=ax^2+b$，$y=\log x$ が，点 A$(e,\ 1)$ を共有し，かつ点 A で共通な接線をもつように，定数 a，b の値を定めよ．

【解】 曲線 $y=ax^2+b$ 上に点 A$(e,\ 1)$ があるから，

$$ae^2+b=1 \quad \cdots ①$$

$y'=2ax$ より点 A における接線の傾きは　$2ae$

また，曲線 $y=\log x$ 上の点 A における接線の傾きは　$y'=\dfrac{1}{x}$ より　$\dfrac{1}{e}$

接線が一致するから　$2ae=\dfrac{1}{e} \quad \cdots ②$

② より $a=\dfrac{1}{2e^2}$，これを ① へ代入して　$b=\dfrac{1}{2}$

9 体積が一定である直円柱の表面積を最小にするには，高さと底面の半径の比をどのようにすればよいか.

【解】 この直円柱の底面の半径を x，高さを h，体積を k (定数)，表面積を $S(x)$ とすると

$$S(x) = 2\pi x^2 + 2\pi xh \qquad \cdots ①$$

$$k = \pi x^2 h \qquad \cdots ②$$

② より　$h = \dfrac{k}{\pi x^2}$　　これを ① へ代入して

$$S(x) = 2\pi x^2 + \frac{2k}{x}$$

$$S'(x) = 4\pi x - \frac{2k}{x^2} = \frac{2(2\pi x^3 - k)}{x^2}$$

$S'(x) = 0$ とすると $x^3 = \dfrac{k}{2\pi}$ より　$x = \sqrt[3]{\dfrac{k}{2\pi}}$

$x > 0$ の範囲で $S(x)$ の増減表は，次のようになる.

x	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}}$	$\cdots$
$S'(x)$	／	$-$	0	$+$
$S(x)$	／	↘	極小	↗

よって，$S(x)$ は $x = \sqrt[3]{\dfrac{k}{2\pi}}$ のとき最小となる.

このとき　$h : x = \dfrac{k}{\pi x^2} : x = \dfrac{k}{\pi x^3} : 1 = \dfrac{k}{\pi \cdot \dfrac{k}{2\pi}} : 1 = 2 : 1$

10 3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ のグラフを C とし，曲線 C の変曲点を A とする．曲線 C 上に A 以外の任意の点 P をとり，点 A について点 P と対称な点を Q とすれば，Q も曲線 C 上にあることを示せ．

【解】 $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3b$，$f''(x) = 6x + 6a$

$f''(x) = 0$ とすると　$x = -a$

よって，曲線 $y = f(x)$ の凹凸は下の表のようになる．

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	$2a^3 - 3ab + c$	下に凸

よって，変曲点 A の座標は　$(-a,\ 2a^3 - 3ab + c)$

曲線 $y = f(x)$ を，点 A が原点に重なるように

x 軸方向に a，y 軸方向に $-2a^3 + 3ab - c$

だけ平行移動すると，その曲線の方程式は

$$y - (-2a^3 + 3ab - c) = (x - a)^3 + 3a(x - a)^2 + 3b(x - a) + c$$

これを整理すると　$y = x^3 + 3(b - a^2)x$

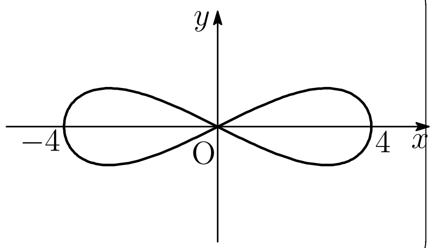
ここで，$g(x) = x^3 + 3(b - a^2)x$ とすると

$$\begin{aligned} g(-x) &= (-x)^3 + 3(b - a^2)(-x) \\ &= -\{x^3 + 3(b - a^2)x\} \end{aligned}$$

よって，$g(-x) = -g(x)$ が成り立つから，曲線 $y = g(x)$ は原点について対称である．

したがって，もとの曲線 $y = f(x)$ は変曲点 A について対称であるから，点 P と対称な点 Q もこの曲線上にある．

11 座標平面上を運動する点Pの時刻tにおける座標が，$x=4\cos t$，$y=\sin 2t$ で与えられるとき，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ における点Pの速さの最大値と最小値を求めよ．



【解】 $\dfrac{dx}{dt}=-4\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=2\cos 2t$ であるから，点Pの速さは

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{(-4\sin t)^2+(2\cos 2t)^2} \\ &= \sqrt{16\sin^2 t+4(1-2\sin^2 t)^2} \\ &= \sqrt{4(4\sin^4 t+1)} \\ &= 2\sqrt{4\sin^4 t+1}\end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq 2\pi$ のとき $-1 \leqq \sin t \leqq 1$ であるから

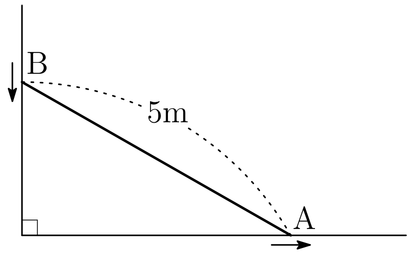
$0 \leqq \sin^2 t \leqq 1$　　よって　　$0 \leqq \sin^4 t \leqq 1$

ゆえに，$\sin^4 t$ は $\sin t=\pm 1$ のとき最大値 1，$\sin t=0$ のとき最小値 0 をとる．

よって，速さは　$t=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ のとき　　最大値 $2\sqrt{5}$

$t=0,\ \pi,\ 2\pi$ のとき　最小値 2

12 地面に垂直な壁に長さ 5m の棒を立てかけ，この棒の下端 A を，地面上を毎秒 0.3m の速さで壁から垂直に遠ざける．棒の下端 A が壁から 4m 離れたときに，棒の上端 B が壁面上を動く速さを求めよ．



【解】 点 A を x 軸上に，点 B を y 軸上にとり，$\mathrm{OA} = x$，$\mathrm{OB} = y$ とおくと，三平方の定理により

$$x^2 + y^2 = 5^2 \qquad \cdots ①$$

よって，$x = 4$ のとき　$y = 3$

x，y は時刻 t の関数であるから，① の両辺を t で微分して 2 で割ると

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

ここで，$\dfrac{dx}{dt} = 0.3$，$x = 4$，$y = 3$ を代入すると

$$4 \times 0.3 + 3 \times \frac{dy}{dt} = 0$$

よって　$$\frac{dy}{dt} = -0.4$$

したがって，棒の上端 B の速さは，0.4m/秒 である．

第 5 章　積分法とその応用

5.1　不定積分

5.1.1　不定積分とその基本性質

練習 5.1 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^5\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3}$　　(3) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx$　　(5) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$　　(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

【解】 C は積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int x^5\,dx = \frac{1}{5+1}x^{5+1} + C = \frac{1}{6}x^6 + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

(3) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

(4) $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{3}+1}x^{-\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$

(5) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

練習 5.2 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{(x^2-2)(x^2-3)}{x^4}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1-y-y^2}{y^2}dy$ (6) $\displaystyle\int \left(3t^2-\frac{1}{t}\right)^2 dt$

【解】 C は積分定数とする.

$$(1)\ \int \frac{x^2-4x+1}{x^3}\,dx = \int \left(\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx = \log|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$$

$$(2)\ \int \frac{(x^2-2)(x^2-3)}{x^4}\,dx = \int \frac{x^4-5x^2+6}{x^4}\,dx = \int \left(1-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^4}\right)dx$$
$$= x + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^3} + C$$

$$(3)\ \int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx = \int \left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C$$

$$(4)\ \int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx = \int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}\,dx = \int \left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= x - 4\sqrt{x} + \log x + C$$

$$(5)\ \int \frac{1-y-y^2}{y^2}dy = \int \left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}-1\right)dy = -\frac{1}{y} - \log|y| - y + C$$

$$(6)\ \int \left(3t^2-\frac{1}{t}\right)^2 dt = \int \left(9t^4-6t+\frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{9}{5}t^5 - 3t^2 - \frac{1}{t} + C$$

練習 5.3 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int(\cos x - 2\sin x)dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{2\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x - 1}$　　(4) $\displaystyle\int(2-\tan\theta)\cos\theta\, d\theta$

(5) $\displaystyle\int 4^x\, dx$　　(6) $\displaystyle\int(3^x - 2e^x)dx$

【解】 C は積分定数とする.

(1) $\displaystyle\int(\cos x - 2\sin x)\, dx = \sin x + 2\cos x + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{2\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}\, dx = \int\left(2\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\, dx = 2\sin x - \tan x + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x - 1} = -\int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\tan x + C$

(4) $\displaystyle\int(2-\tan\theta)\cos\theta\, d\theta = \int(2\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta = 2\sin\theta + \cos\theta + C$

(5) $\displaystyle\int 4^x\, dx = \frac{4^x}{\log 4} + C$

(6) $\displaystyle\int(3^x - 2e^x)\, dx = \frac{3^x}{\log 3} - 2e^x + C$

5.1.2 置換積分法と部分積分法

練習 5.4 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (3x+1)^4\,dx$　(2) $\displaystyle\int (4x-3)^{-3}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,dx$　(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$

(5) $\displaystyle\int \sin 2x\,dx$　(6) $\displaystyle\int e^{3x-1}\,dx$

【解】 C は積分定数とする.

(1) $\displaystyle\int (3x+1)^4\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}(3x+1)^5 + C = \frac{1}{15}(3x+1)^5 + C$

(2) $\displaystyle\int (4x-3)^{-3}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-2}(4x-3)^{-2} + C = -\frac{1}{8}(4x-3)^{-2} + C$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

$\displaystyle= \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,dx = \int (1-2x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{-2}\cdot 2(1-2x)^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-2x} + C$

(5) $\displaystyle\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}(-\cos 2x) + C = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

(6) $\displaystyle\int e^{3x-1}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x-1} + C$

例題 5.1 不定積分 $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,dx$ を求めよ．

【解】 $\sqrt{1-x}=t$ とおくと　$x=1-t^2$，$\dfrac{dx}{dt}=-2t$

よって
$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x}\,dx &= \int(1-t^2)t(-2t)dt = 2\int(t^4-t^2)dt\\ &= 2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+C = \frac{2}{15}t^3(3t^2-5)+C\\ &= -\frac{2}{15}(3x+2)(1-x)\sqrt{1-x}+C\end{aligned}$$

> **練習 5.5** 例題 5.1 の不定積分を，$1-x=t$ とおいて求めよ．

【解】 $1-x=t$ とおくと　$x=1-t$，$\dfrac{dx}{dt}=-1$

よって
$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x}\,dx &= \int(1-t)\sqrt{t}\,(-1)dt = \int(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}})dt\\ &= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{15}t^{\frac{3}{2}}(3t-5)+C\\ &= -\frac{2}{15}(3x+2)(1-x)\sqrt{1-x}+C \quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

練習 5.6 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x(1-x)^4\,dx$ (2) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

【解】 C は積分定数とする.

(1) $1-x=t$ とおくと $x=1-t,\ \dfrac{dx}{dt}=-1$

よって
$$\begin{aligned}\int x(1-x)^4\,dx &= \int (1-t)t^4(-1)\,dt = \int (t^5-t^4)\,dt\\ &= \frac{1}{6}t^6-\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{30}(5t-6)t^5+C\\ &= -\frac{1}{30}(5x+1)(1-x)^5+C\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{2x-1}=t$ とおくと $x=\dfrac{t^2+1}{2},\ \dfrac{dx}{dt}=t$

よって
$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2x-1}\,dx &= \int \frac{t^2+1}{2}\cdot t\cdot t\,dt=\frac{1}{2}\int (t^4+t^2)\,dt\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right)+C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{15}(3t^2+5)t^3+C\\ &= \frac{1}{15}(3x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+C\end{aligned}$$

(3) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと $x=t^2-1,\ \dfrac{dx}{dt}=2t$

よって
$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt=2\int (t^2-1)\,dt\\ &= 2\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)+C=\frac{2}{3}(t^2-3)t+C\\ &= \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+C\end{aligned}$$

練習 5.7 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$ (4) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$

【解】 C は積分定数とする．

(1) $(x^3+2)'=3x^2$ であるから，$x^3+2=u$ とおくと

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx &= \frac{1}{3}\int \sqrt{x^3+2}(x^3+2)'\,dx\\ &= \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{2}{9}(x^3+2)\sqrt{x^3+2}+C\end{aligned}$$

(2) $(\sin x)'=\cos x$ であるから，$\sin x=u$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\cos x\,dx &= \int \sin^3 x(\sin x)'\,dx = \int u^3\,du\\ &= \frac{1}{4}u^4+C = \frac{1}{4}\sin^4 x+C\end{aligned}$$

(3) $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ であるから，$\log x=u$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{x}\,dx &= \int \log x\cdot(\log x)'\,dx = \int u\,du\\ &= \frac{1}{2}u^2+C = \frac{1}{2}(\log x)^2+C\end{aligned}$$

(4) $(x^2)'=2x$ であるから，$x^2=u$ とおくと

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int e^{x^2}(x^2)'\,dx = \frac{1}{2}\int e^u\,du\\ &= \frac{1}{2}e^u+C = \frac{1}{2}e^{x^2}+C\end{aligned}$$

練習 5.8 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}$

【解】 C は積分定数とする.

(1) $$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{(x^2+x-1)'}{x^2+x-1}\,dx = \log|x^2+x-1| + C$$

(2) $$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx = \log(e^x+1) + C$$

(3) $$\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx = \log|\sin x| + C$$

練習 5.9 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$ (2) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$

【解】 C は積分定数とする.

(1) $$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= \int x(-\cos x)'\,dx = x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\int xe^{-x}\,dx &= \int x(-e^{-x})'\,dx = x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx \\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx \\ &= -(x+1)e^{-x} + C\end{aligned}$$

練習 5.10 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \log 2x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \log x^2\,dx$　　(3) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

【解】 C は積分定数とする．

$$
\begin{aligned}
(1)\ \int \log 2x\,dx &= \int (\log 2x)\cdot(x)'\,dx = (\log 2x)\cdot x - \int \frac{2}{2x}\cdot x\,dx \\
&= x\log 2x - x + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\ \int \log x^2\,dx &= \int (\log x^2)\cdot(x)'\,dx = (\log x^2)\cdot x - \int \frac{2x}{x^2}\cdot x\,dx \\
&= x\log x^2 - 2x + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\ \int x\log x\,dx &= \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C
\end{aligned}
$$

5.1.3　いろいろな関数の不定積分

練習 5.11 $\displaystyle\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ を満たす定数 a，b の値を求めよ．また，この結果を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$ を求めよ．

【解】 等式の両辺に $(x+1)(x+2)$ をかけて　$x = a(x+2) + b(x+1)$

よって　　$x = (a+b)x + (2a+b)$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して　$a+b=1$，$2a+b=0$

これを解いて　$a=-1$，$b=2$

よって

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx &= \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}\right)dx \\
&= -\log|x+1| + 2\log|x+2| + C \\
&= \log\frac{(x+2)^2}{|x+1|} + C \qquad (C\ \text{は積分定数})
\end{aligned}
$$

練習 5.12 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x+2}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{2x-1}dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+x-2}dx$

【解】 C は積分定数とする.

(1) $\displaystyle\frac{x^2-1}{x+2} = x-2+\frac{3}{x+2}$ であるから

$$\int \frac{x^2-1}{x+2}\,dx = \int \left(x-2+\frac{3}{x+2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\log|x+2| + C$$

(2) $\displaystyle\frac{4x^2}{2x-1} = 2x+1+\frac{1}{2x-1}$ であるから

$$\int \frac{4x^2}{2x-1}\,dx = \int \left(2x+1+\frac{1}{2x-1}\right) dx$$
$$= x^2 + x + \frac{1}{2}\log|2x-1| + C$$

(3) $\displaystyle\frac{3}{x^2+x-2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$ とする.

等式の両辺に $(x-1)(x+2)$ を掛けて　$3 = a(x+2) + b(x-1)$

よって　$3 = (a+b)x + (2a-b)$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して　$a+b=0$, $2a-b=3$

これを解いて　$a=1$, $b=-1$

したがって　$\displaystyle\frac{3}{x^2+x-2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$

$$\int \frac{3}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$
$$= \log|x-1| - \log|x+2| + C$$
$$= \log\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$$

練習 5.13 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^2 3x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \cos 3x\cos 2x\,dx$ (4) $\displaystyle\int \sin 3x\sin x\,dx$

【解】 C は積分定数とする.

(1) $$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(2) $$\int \sin^2 3x\,dx = \int \frac{1-\cos 6x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$$

(3) $$\begin{aligned}\int \cos 3x\cos 2x\,dx &= \frac{1}{2}\int(\cos 5x + \cos x)\,dx\\ &= \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\int \sin 3x\sin x\,dx &= -\frac{1}{2}\int(\cos 4x - \cos 2x)\,dx\\ &= -\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

5.1.4 補充問題

1 次のことを示せ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x} + C$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\tan x} - x + C$

【解】 C は積分定数とする.

(1) $\displaystyle\left(-\frac{1}{\tan x}\right)' = \frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = \frac{1}{\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$ であるから

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x} + C$$

(2) $\displaystyle\left(-\frac{1}{\tan x} - x\right)' = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \frac{1}{\tan^2 x}$ であるから

$$\int \frac{dx}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\tan x} - x + C$$

2 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$ (3) $\displaystyle\int \frac{\log(x+1)}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int (\sin x+\cos x)^2\,dx$ (5) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$ (6) $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$

【解】 C は積分定数とする．

(1) $4-x^2=t$ とおくと $\quad -2x\dfrac{dx}{dt}=1$

$$与式=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{4-x^2}+C$$

(2) $e^x=t$ とおくと $\quad e^x\dfrac{dx}{dt}=1$

$$\begin{aligned}与式&=\int \frac{dt}{t(t+1)}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt\\&=\log t-\log(t+1)+C=x-\log(e^x+1)+C\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}与式&=-\frac{\log(x+1)}{x}+\int\frac{dx}{x(x+1)}\\&=-\frac{\log(x+1)}{x}+\log\frac{|x|}{x+1}+C\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}与式&=\int(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x)\,dx\\&=\int(1+\sin 2x)\,dx=x-\frac{1}{2}\cos 2x+C\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}与式&=\int \sin x(1-\cos^2 x)\,dx\\&=\int(\sin x-\sin x\cos^2 x)\,dx\\&=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}与式&=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx\\&=\int\left(\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}\right)dx\\&=\frac{1}{32}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x+C\end{aligned}$$

3 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$ を，次の各方法により求めよ．

(1) 分母と分子に $1-\cos x$ をかける．

(2) $1+\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$ を利用する．

【解】 C は積分定数とする．

$$\text{(1)}\quad 与式 = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\,dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) dx = -\tan x + \frac{1}{\sin x} + C$$

$$\text{(2)}\quad 与式 = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 \dfrac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2} + C$$

4 次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ．

［1］ $F'(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ ［2］ $F(0)=0$

【解】 $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+2} = \log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$ （C は積分定数)

［2］より $\log\dfrac{1}{2} + C = 0$ ゆえに $C = \log 2$

よって $F(x) = \log\left|\dfrac{2(x+1)}{x+2}\right|$

5.2 定積分

5.2.1 定積分とその基本性質

練習 5.14 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ (2) $\displaystyle\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta$

(4) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$ (5) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$ (6) $\displaystyle\int_{-1}^1 2^x\,dx$

【解】 (1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx = \left[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\right]_1^8 = \frac{3}{4}(8\sqrt[3]{8}-1) = \frac{45}{4}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = \Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

(4) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx = \Big[e^x\Big]_0^1 = e-1$

(5) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_{-2}^{-1} = -\log 2$

(6) $\displaystyle\int_{-1}^1 2^x\,dx = \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{\log 2}\left(2-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2\log 2}$

練習 5.15 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-1}^1 (e^t - e^{-t})dt$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx$ (5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$ (6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta\,d\theta$

【解】 (1) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\,dx = \left[\frac{1}{8}(2x+1)^4\right]_0^1 = \frac{1}{8}(3^4 - 1) = 10$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 (e^t - e^{-t})\,dt = \left[e^t + e^{-t}\right]_{-1}^1 = 0$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi} = 0$

(5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \pi$

(6)
$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 6\theta + \sin 2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{6}\cos 6\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

練習 5.16 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos x| dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |e^x - 1| dx$

【解】 (1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $|\cos x| = \cos x$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき $|\cos x| = -\cos x$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\cos x|\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\, dx \\ &= \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= (1-0) + (0+1) = 2\end{aligned}$$

(2) $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき $|e^x - 1| = 1 - e^x$

$0 \leqq x \leqq 2$ のとき $|e^x - 1| = e^x - 1$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} |e^x - 1|\, dx &= \int_{-1}^{0} (1 - e^x)\, dx + \int_0^2 (e^x - 1)\, dx \\ &= \Big[x - e^x\Big]_{-1}^{0} + \Big[e^x - x\Big]_0^2 \\ &= \left\{-1 - \left(-1 - \frac{1}{e}\right)\right\} + (e^2 - 2 - 1) \\ &= e^2 + \frac{1}{e} - 3\end{aligned}$$

5.2.2 置換積分法と部分積分法

練習 5.17 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^5\,dx$ (2) $\displaystyle\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

【解】 (1) $1-x=t$ とおくと $x=1-t$，$dx=(-1)dt$

x と t の対応は右のようになる．

したがって

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1-x)^5\,dx &= \int_1^0 (1-t)t^5\,(-1)dt\\ &= \int_1^0 (t^6-t^5)\,dt\\ &= \left[\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{6}t^6\right]_1^0\\ &= 0-\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{6}\right)\\ &= \frac{1}{42}\end{aligned}$$

(2) $x-1=t$ とおくと $x=t+1$，$dx=dt$

x と t の対応は右のようになる．

したがって

x	$2 \longrightarrow 5$
t	$1 \longrightarrow 4$

$$\begin{aligned}\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx &= \int_1^4 (t+1)\sqrt{t}\,dt\\ &= \int_1^4 (t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})\,dt\\ &= \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4\\ &= \left(\frac{64}{5}+\frac{16}{3}\right)-\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)\\ &= \frac{256}{15}\end{aligned}$$

練習 5.18 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

【解】 (1) $x=\sin\theta$ とおくと　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる.

この範囲では $\cos\theta \geqq 0$ であるから

x	0	$\longrightarrow$	1
θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$$

したがって

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

(2) $x=3\sin\theta$ とおくと　$dx=3\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる.

この範囲では $\cos\theta \geqq 0$ であるから

x	-3	$\longrightarrow$	3
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-(3\sin\theta)^2}=\sqrt{9\cos^2\theta}=3\cos\theta$$

したがって

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\cos\theta\cdot 3\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta\,d\theta=9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9\pi}{2}$$

(3) $x = 2\sin\theta$ とおくと　$dx = 2\cos\theta\, d\theta$
x と θ の対応は右のようになる．
この範囲では $\cos\theta \geqq 0$ であるから

x	-1	$\longrightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{6}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4(1-\sin^2\theta)} = \sqrt{4\cos^2\theta} = 2\cos\theta$$

したがって
$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta\, d\theta$$
$$= 4\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\, d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta$$
$$= 2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi + \sqrt{3}$$

(4) $x = 2\sin\theta$ とおくと　$dx = 2\cos\theta\, d\theta$
x と θ の対応は右のようになる．
この範囲では $\cos\theta \geqq 0$ であるから

x	1	$\longrightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{6}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4(1-\sin^2\theta)} = \sqrt{4\cos^2\theta} = 2\cos\theta$$

したがって
$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2\cos\theta} \cdot 2\cos\theta\, d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6}$$

練習 5.19 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$　　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$

【解】 (1) $x = \tan\theta$ とおくと　$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる．

x	0	$\longrightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

したがって

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$$

(2) $x = 2\tan\theta$ とおくと　$dx = \dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる．

x	-2	$\longrightarrow$	2
θ	$-\frac{\pi}{4}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

したがって

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\tan^2\theta+4}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{1}{2}\Big[\ \theta\ \Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

練習 5.20 次の関数の中から，偶関数，奇関数を選べ．

① x^3　　② x^4+3　　③ $\tan x$　　④ $x+\cos x$

【答】 偶関数は ②,　　奇関数は ①，③

練習 5.21 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2+4x+5)\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$

【解】 (1) x^3，$4x$ はともに奇関数，$3x^2$，5 はともに偶関数であるから

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2+4x+5)\,dx &= 2\int_0^2(3x^2+5)\,dx\\ &= 2\Big[x^3+5x\Big]_0^2 = 36\end{aligned}$$

(2) e^x-e^{-x} は奇関数であるから $\displaystyle\int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})\,dx=0$

(3) $x\sqrt{4-x^2}$ は奇関数であるから $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx=0$

(4) $\sin^2 x$ は偶関数であるから

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx\\ &= \left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

練習 5.22 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$

【解】 (1)
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\sin x\,dx &= \int_0^{\pi} x(-\cos x)'\,dx \\ &= \Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot(-\cos x)\,dx \\ &= \pi + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi} = \pi\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x\,dx &= \int_0^1 x(e^x)'\,dx \\ &= \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx \\ &= e - \Big[e^x\Big]_0^1 = 1\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int_1^2 x\log x\,dx &= \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= 2\log 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2\log 2 - \frac{3}{4}\end{aligned}$$

練習 5.23 部分積分法によって，定積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+1)^3(x-1)\,dx$ を求めよ.

【解】
$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (x+1)^3(x-1)\,dx &= \int_{-1}^1 \left\{\frac{1}{4}(x+1)^4\right\}'(x-1)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(x+1)^4(x-1)\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(x+1)^4(x-1)'dx \\ &= 0 - \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(x+1)^4dx \\ &= -\left[\frac{1}{20}(x+1)^5\right]_{-1}^1 = -\frac{8}{5}\end{aligned}$$

5.2.3 定積分のいろいろな問題

練習 5.24 次の関数を x で微分せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^x \sin t\,dt$ (2) $\displaystyle\int_1^x t\log t\,dt$

【答】(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t\,dt = \sin x$ (2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x t\log t\,dt = x\log x$

練習 5.25 次の関数 $G(x)$ について，$G'(x)$，$G''(x)$ を求めよ．

$$G(x) = \int_0^x (x-t)e^t\,dt$$

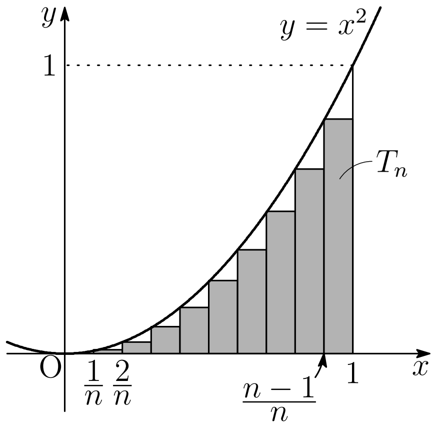
【解】$\displaystyle G(x) = x\int_0^x e^t\,dt - \int_0^x te^t\,dt$ であるから

$$G'(x) = \int_0^x e^t\,dt + xe^x - xe^x = \Big[\ e^t\ \Big]_0^x = e^x - 1$$

$$G''(x) = e^x$$

練習 5.26 前ページの S_n の代わりに，右の図［3］の長方形の面積の和 T_n を考えても，$\lim_{n\to\infty} T_n = S$ となることを示せ.

［3］



【解】 S_n と同様に計算すると

$$T_n = \frac{1}{n}\left\{0 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{n^3}\{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\}$$
$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

よって $\displaystyle \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} = S$

練習 5.27 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{2}{n^3}}+\sqrt{\frac{3}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n^3}}\right)$

【解】 (1)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+\left(\frac{3}{n}\right)^4+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^4\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4=\int_0^1 x^4\,dx=\left[\ \frac{1}{5}x^5\ \right]_0^1=\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{2}{n^3}}+\sqrt{\frac{3}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n^3}}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

練習 5.28 次のことを示せ.

(1) $x \geqq 0$ のとき　$\dfrac{1}{x^2+x+1} \leqq \dfrac{1}{x+1}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} < \log 2$

【解】 (1) $x \geqq 0$ のとき　$x^2+x+1 \geqq x+1$

両辺とも正なので，逆数をとって　$\dfrac{1}{x^2+x+1} \leqq \dfrac{1}{x+1}$

(2) (1) の不等式では，常には $\dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{x+1}$ でないから

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} < \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

右辺は　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \Big[\log(x+1)\Big]_0^1 = \log 2$

よって　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} < \log 2$

練習 5.29 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1) \qquad \text{ただし，} n \text{ は自然数}$$

証明 自然数 k に対して，$k \leqq x \leqq k+1$ では

$$\frac{1}{k} \geqq \frac{1}{x}$$

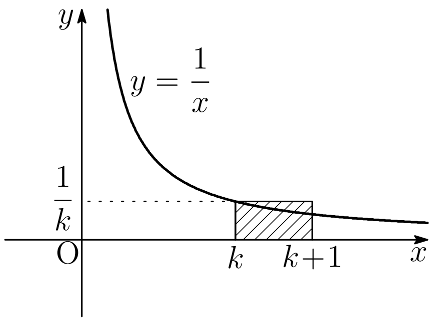
常には $\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{x}$ ではないから

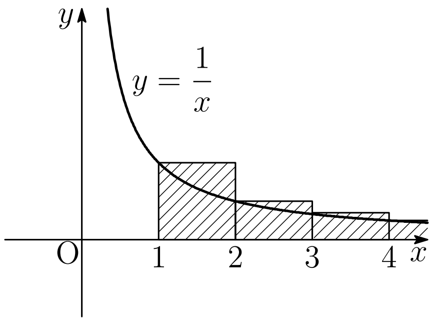
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx > \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$$

すなわち

$$\frac{1}{k} > \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ として，
辺々を加えると





$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n} > \int_1^2 \frac{dx}{x}+\int_2^3 \frac{dx}{x}+\int_3^4 \frac{dx}{x}+\cdots+\int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$$

ここで $\qquad$ 右辺 $=\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_1^{n+1} = \log(n+1)$ $\qquad \leftarrow \log 1 = 0$

したがって $\qquad 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n} > \log(n+1)$ **証終**

5.2.4 補充問題

5 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan\theta\,d\theta$ (3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos^2 2\theta\,d\theta$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(3-x)^2}\,dx$ (5) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\log x\,dx$

【解】 (1) 与式 $\displaystyle=\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)dx=\left[2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4=\frac{20}{3}$

(2) 与式 $\displaystyle=\Big[-\log(\cos\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\log 2$

(3) 与式 $\displaystyle=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi}\frac{1+\cos 4\theta}{2}\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{\sin 4\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi}=\frac{7}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{16}$

(4) $3-x=t$ とおくと

$$\frac{dx}{dt}=-1$$

x	0	$\longrightarrow$	2
t	3	$\longrightarrow$	1

$$与式=\int_3^1\frac{3-t}{t^2}\cdot(-1)dt=\int_1^3\left(\frac{3}{t^2}-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=\left[-\frac{3}{t}-\log t\right]_1^3=2-\log 3$$

(5) $-x^2=t$ とおくと

$$-2x\frac{dx}{dt}=1$$

x	0	$\longrightarrow$	1
t	0	$\longrightarrow$	-1

$$与式=\int_0^{-1}e^t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\,e^t\,\Big]_{-1}^0=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

(6) 与式 $\displaystyle=\left[\,\frac{2}{3}x\sqrt{x}\log x\,\right]_1^4-\int_1^4\frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$$=\frac{16}{3}\log 4-\frac{4}{9}\Big[\,x\sqrt{x}\,\Big]_1^4=\frac{32}{3}\log 2-\frac{28}{9}$$

6 a を正の定数とする．次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{x^2}{x^2+a^2}\,dx$

【解】 (1) 与式 $\displaystyle = 2\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$x = a\sin\theta$ とおくと　$dx = a\cos\theta\,d\theta$

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta{\cdot}a\cos\theta{\cdot}a\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}a^4\left[\ \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{8}
\end{aligned}$$

(2) 与式 $\displaystyle = 2\int_0^a \frac{x^2}{x^2+a^2}\,dx$

$x = a\tan\theta$ とおくと　$dx = \dfrac{a}{\cos^2\theta}d\theta$

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\tan^2\theta{\cdot}\frac{1}{a^2(\tan^2\theta+1)}{\cdot}\frac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= 2a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\,d\theta = 2a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)\,d\theta \\
&= 2a\left[\ \tan\theta - \theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

7 次の関数を x で微分せよ．ただし，(2) では $x > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_x^{2x} \sin\theta\, d\theta$ (2) $\displaystyle\int_x^{x^2} \log t\, dt$

【解】 (1) $F'(\theta) = \sin\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_x^{2x} \sin\theta\, d\theta &= \frac{d}{dx}\{F(2x) - F(x)\}\\ &= F'(2x)(2x)' - F'(x)\\ &= 2\sin 2x - \sin x\end{aligned}$$

(2) $F'(t) = \log t$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \log t\, dt &= \frac{d}{dx}\{F(x^2) - F(x)\}\\ &= F'(x^2)(x^2)' - F'(x)\\ &= 2x\log x^2 - \log x\\ &= (4x-1)\log x\end{aligned}$$

8 等式 $f(x) = x + \displaystyle\int_0^x f(t)\sin t\, dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

【解】 $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\, dt$ は定数であるから $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\, dt = a$ とすると

$$f(x) = x + a \quad \cdots①$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)\sin t\, dt = \int_0^\pi (t+a)\sin t\, dt &= \int_0^\pi (t+a)(-\cos t)'dt\\ &= \Big[\,(t+a)(-\cos t)\,\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (t+a)'(-\cos t)\, dt\\ &= \pi + 2a + \int_0^\pi \cos t\, dt\\ &= \pi + 2a + \Big[\,\sin t\,\Big]_0^\pi = \pi + 2a\end{aligned}$$

ゆえに $a = \pi + 2a$ すなわち $a = -\pi$

これを ① に代入して $f(x) = x - \pi$

5.3　積分法の応用

5.3.1　面積

練習 5.30 次の曲線と 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1)　$y = x^3$，$x = 1$，$x = 2$　　(2)　$y = \sqrt{x+1}$，$x = 0$，$x = 3$

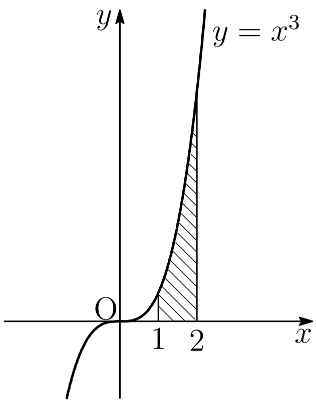
【解】 (1) 求める面積 S は

$$S = \int_1^2 x^3\,dx = \left[\ \frac{x^4}{4}\ \right]_1^2 = \frac{15}{4}$$

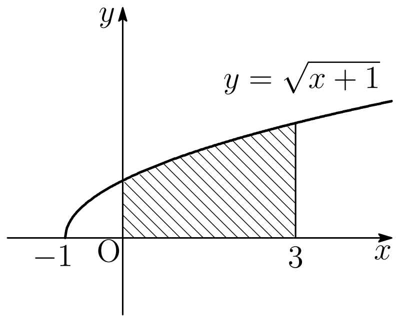
(2) 求める面積 S は

$$S = \int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx = \left[\ \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

(1)



(2)



練習 5.31　次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1)　$y = x^2(x-1)$　　　(2)　$y = \cos x \ \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$

【解】　(1)　この曲線と x 軸の共有点の x 座標は，方程式

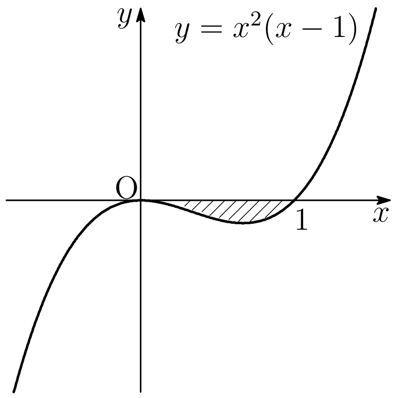
$$x^2(x-1) = 0$$

を解いて

$$x = 0,\ 1$$

区間 $0 \leqq x \leqq 1$ では，常に

$$y \leqq 0$$



であるから，求める面積 S は

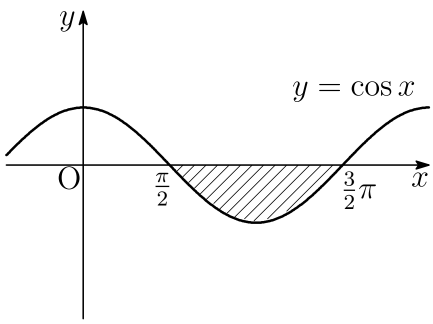
$$S = \int_0^1 \{-x^2(x-1)\}\,dx = -\int_0^1 (x^3 - x^2)\,dx$$
$$= -\left[\ \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\ \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

(2)　この曲線と x 軸の共有点の x 座標は

$$x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

区間 $\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ では，常に

$$y \leqq 0$$

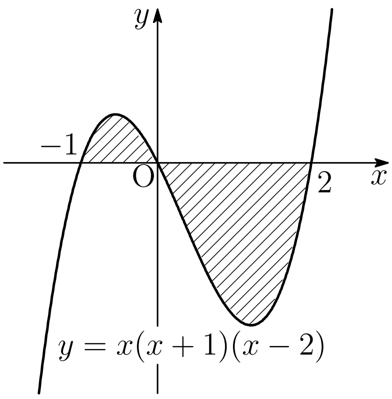


であるから，求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (-\cos x)\,dx$$
$$= -\left[\ \sin x\ \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = -(-1-1) = 2$$

練習 5.32 次の曲線と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ.

$$y = x(x+1)(x-2)$$



【解】 この曲線と x 軸の共有点の x 座標は，方程式 $x(x+1)(x-2)=0$ を解いて

$$x = -1,\ 0,\ 2$$

区間 $-1 \leqq x \leqq 0$ では

$$y \geqq 0$$

区間 $0 \leqq x \leqq 2$ では

$$y \leqq 0$$

であるから，求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{0} x(x+1)(x-2)\,dx + \int_{0}^{2} \{-x(x+1)(x-2)\}\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx - \int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx \\
&= \left[\ \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\ \right]_{-1}^{0} - \left[\ \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\ \right]_{0}^{2} \\
&= \left\{0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right)\right\} - \left\{\left(4 - \frac{8}{3} - 4\right) - 0\right\} = \frac{37}{12}
\end{aligned}$$

練習 5.33 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1)　$y = x^2$，$y = \sqrt{x}$　　　(2)　$x + 4y = 5$，$xy = 1$

【解】 (1) 2 つの曲線の共有点の x 座標は，

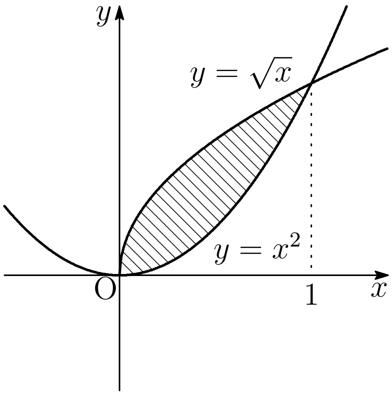
$$x = 0,\ 1$$

である．区間 $0 \leqq x \leqq 1$ では

$$\sqrt{x} \geqq x^2$$

であるから，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx \\ &= \left[\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\,\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



(2) $x + 4y = 5$，$xy = 1$ から y を消去して

$$x \cdot \frac{1}{4}(5 - x) = 1$$

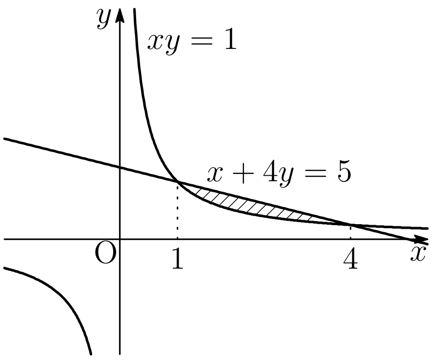
式を整理すると　　$x^2 - 5x + 4 = 0$

2 つの曲線の共有点の x 座標は，この方程式を解いて　$x = 1,\ 4$

区間 $1 \leqq x \leqq 4$ では　$\dfrac{1}{4}(5 - x) \geqq \dfrac{1}{x}$

であるから，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 \left\{ \frac{1}{4}(5 - x) - \frac{1}{x} \right\} dx \\ &= \left[\,\frac{5}{4}x - \frac{x^2}{8} - \log x\,\right]_1^4 \\ &= \frac{15}{8} - 2\log 2 \end{aligned}$$



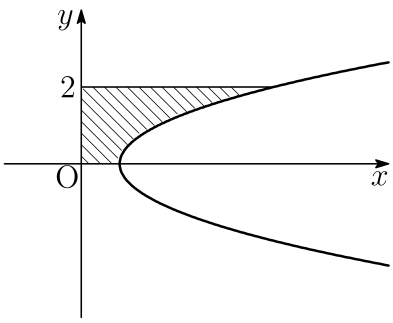
練習 5.34 次の放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1)　$y^2 = x - 1$，x 軸，y 軸，$y = 2$　　(2)　$x = y^2$，$x = y + 2$

【解】 (1) 与式から　$x = y^2 + 1$

常に $y^2 + 1 > 0$ であるから

$$S = \int_0^2 (y^2+1)dy = \left[\ \frac{y^3}{3} + y\ \right]_0^2 = \frac{14}{3}$$



(2) $x = y^2$，$x = y + 2$ から x を消去して

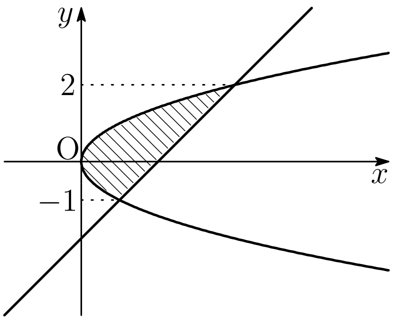
$$y^2 = y + 2$$

式を整理すると　$y^2 - y - 2 = 0$

2 つの曲線の共有点の y 座標は，この方程式を解いて　　$y = -1,\ 2$

区間 $-1 \leqq y \leqq 2$ では　　$y + 2 \geqq y^2$

であるから，求める面積 S は

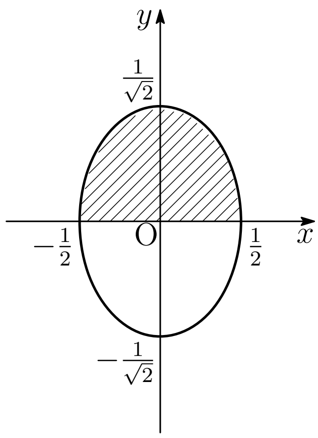


$$S = \int_{-1}^2 \{(y+2) - y^2\}\,dy = \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

練習 5.35 次の曲線で囲まれた図形の面積を求めよ．

$$4x^2+2y^2=1$$

【解】$4x^2+2y^2=1$ より　$\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$



求める面積Sは，右の図の斜線部分の面積を2倍したものに等しい．

$y \geqq 0$ のとき，方程式をyについて解くと

$$y=\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-x^2}$$

よって

$$S=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-x^2}\,dx$$

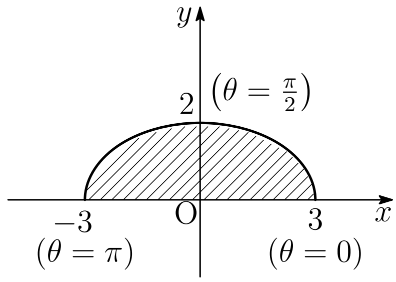
$$=2\sqrt{2}\times\frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

練習 5.36 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) $x = 3\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$ $\quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$

(2) $x = \cos\theta$, $y = \cos 2\theta$ $\quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$

【解】 (1) 求める面積 S は, 右の図の斜線部分の面積であるから



$$S = \int_{-3}^{3} y\,dy$$

また, $x = 3\cos\theta$ のとき

$$dx = -3\sin\theta\,d\theta$$

で, x と θ の対応は次のようになる.

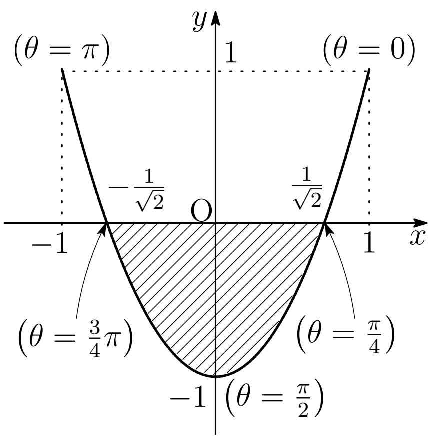
x	-3	$\longrightarrow$	3
θ	π	$\longrightarrow$	0

したがって, 置換積分法によって

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{3} y\,dx = \int_{\pi}^{0} 2\sin\theta\cdot(-3\sin\theta)\,d\theta \\ &= 6\int_{0}^{\pi} \sin^2\theta\,d\theta = 3\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= 3\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{0}^{\pi} = 3\pi \end{aligned}$$

(2) 求める面積 S は，右の図の斜線部分の面積であるから

$$S = -\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y\,dy$$



また，$x=\cos\theta$ のとき

$$dx = -\sin\theta\,d\theta$$

で，x と θ の対応は次のようになる．

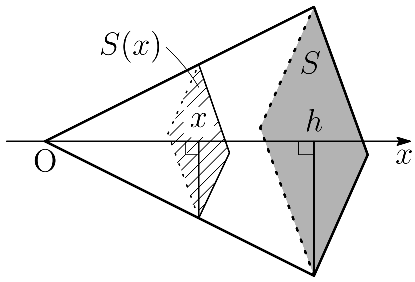
x	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$\frac{3}{4}\pi$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

したがって，置換積分法によって

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y\,dx = -\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\cdot(-\sin\theta)\,d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (2\cos^2\theta - 1)\cdot(\cos\theta)'d\theta = \left[\frac{2}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \\ &= \left\{-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} - \left\{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

5.3.2 体積

練習 5.37 底面積が S，高さが h の角錐の体積 V は，$V=\frac{1}{3}Sh$ で与えられることを示せ．



【解】 この角錐の頂点から底面に垂線を下ろし，これを x 軸とし，頂点を原点にとる．
座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面による角錐の切り口の断面積を $S(x)$ とする．

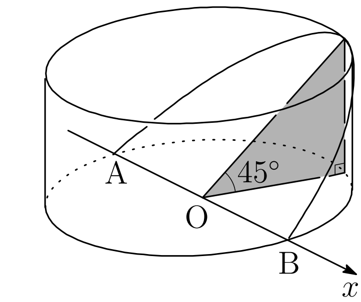
断面と底面の相似比は $x:h$ であるから，面積の比は

$$S(x):S=x^2:h^2$$

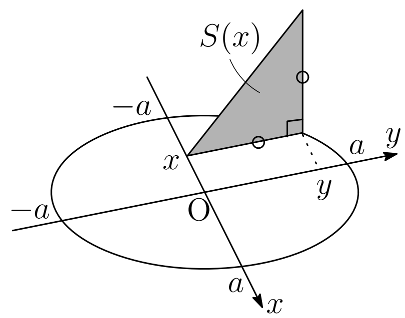
よって
$$S(x)=\frac{S}{h^2}x^2$$

したがって
$$V=\int_0^h S(x)\,dx=\int_0^h \frac{S}{h^2}x^2\,dx=\frac{S}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$
$$=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}Sh$$

練習 5.38　底面の半径が a で高さも a である直円柱がある．この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きをなす平面で，直円柱を2つの立体に分けるとき，小さい方の立体の体積を求めよ．



【解】 底面の中心を O とし，切り取る底面の直径を x 軸にとる．点 $(x, 0)$ に対する直角二等辺三角形の面積を $S(x)$ とすると，底面の円の方程式が $x^2 + y^2 = a^2$ であるから



$$S(x) = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)$$

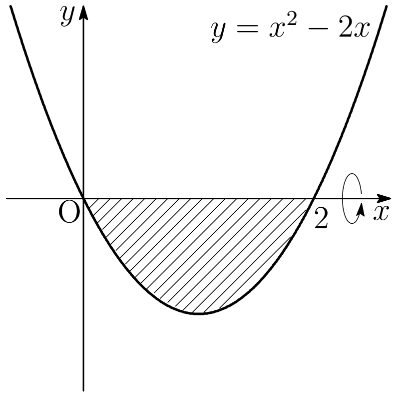
したがって，求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} S(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)\,dx \\ &= \int_{0}^{a}(a^2 - x^2)\,dx = \left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}a^3 \end{aligned}$$

練習 5.39 次の曲線と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

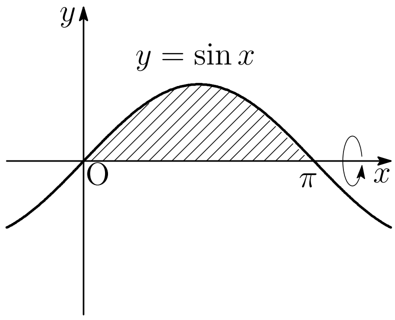
(1)　$y = x^2 - 2x$　　(2)　$y = \sin x$　$(0 \leqq x \leqq \pi)$

【解】 (1) 求める回転体の体積 V は



$$V = \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 \, dx$$
$$= \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) \, dx$$
$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{16}{15}\pi$$

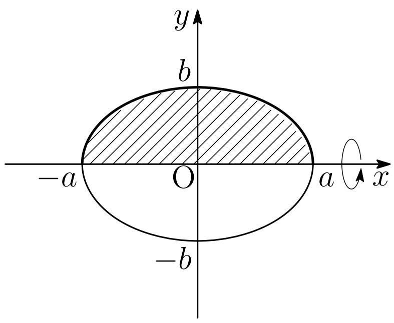
(2) 求める回転体の体積 V は



$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$
$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx$$
$$= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

練習 5.40 $a > 0$，$b > 0$ とする．楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

【解】 求める回転体の体積 V は

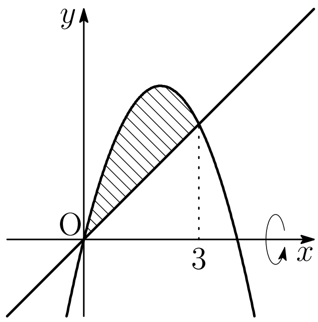


$$V = \pi \int_{-a}^{a} y^2 \, dx = \pi \int_{-a}^{a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$
$$= 2\pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$
$$= 2\pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

練習 5.41　放物線 $y=4x-x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

【解】 放物線 $y=4x-x^2$ と直線 $y=x$ の交点の x 座標は，方程式 $4x-x^2=x$ を解いて

$$x=0,\ 3$$



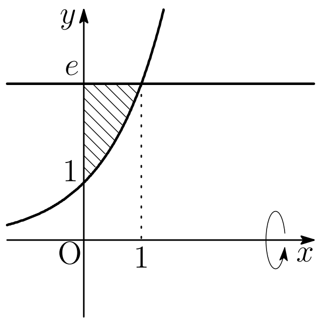
よって，求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^3 \{(4x-x^2)^2-x^2\}\,dx \\ &= \pi\int_0^3 (x^4-8x^3+15x^2)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5}-2x^4+5x^3\right]_0^3 = \frac{108}{5}\pi \end{aligned}$$

練習 5.42　曲線 $y=e^x$ と y 軸および直線 $y=e$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

【解】 曲線と直線の共有点の x 座標は，方程式 $e^x=e$ を解いて

$$x=1$$



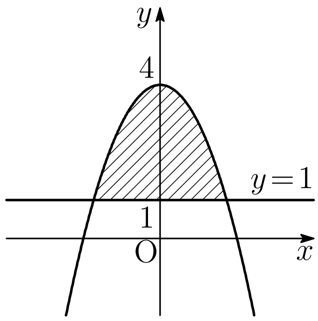
よって，求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^1 \{e^2-(e^x)^2\}\,dx \\ &= \pi\int_0^1 (e^2-e^{2x})\,dx \\ &= \pi\left[e^2x-\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2+1}{2}\pi \end{aligned}$$

練習 5.43 次の曲線と直線で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

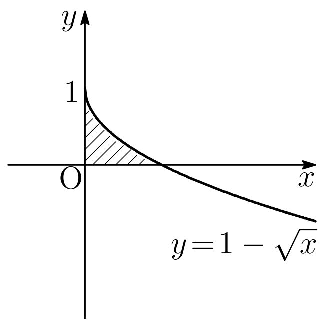
(1)　$y = 4 - x^2$，$y = 1$　　　(2)　$y = 1 - \sqrt{x}$，x 軸，y 軸

【解】 (1) 求める回転体の体積を V とすると



$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^4 x^2\,dy = \pi \int_1^4 (4-y)\,dy \\
&= \pi \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_1^4 = \frac{9}{2}\pi
\end{aligned}
$$

(2) 求める回転体の体積を V とすると

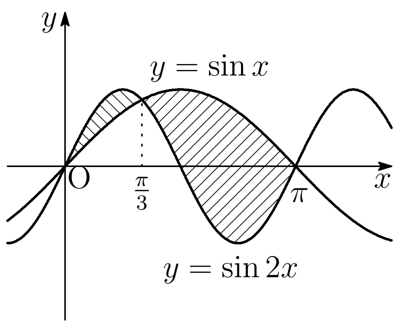


$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 x^2\,dy = \pi \int_0^1 (1-y)^4\,dy \\
&= \pi \left[-\frac{1}{5}(1-y)^5 \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}
\end{aligned}
$$

5.3.3　補充問題

9　$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，2 つの曲線 $y = \sin x$，$y = \sin 2x$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ．

【解】 $\sin x = \sin 2x$ より



$$\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

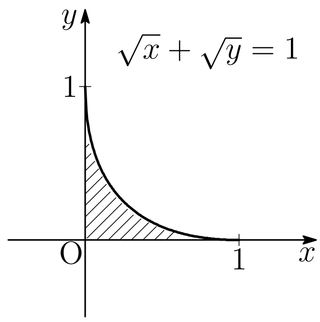
$0 \leqq x \leqq \pi$ では

$$x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi$$

よって，求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\,dx \\
&= \left[-\frac{\cos 2x}{2} + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\cos x + \frac{\cos 2x}{2} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

10 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．



【解】 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ から

$$y=(1-\sqrt{x})^2 \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^1 (1-\sqrt{x})^2\,dx=\int_0^1 (1-2\sqrt{x}+x)\,dx=\frac{1}{6}$$

11 曲線 $y=x^3-4x$ と，その上の点 $(1,-3)$ における接線とで囲まれた部分の面積を求めよ．

【解】 $y'=3x^2-4$ であるから，$x=1$ のとき　$y'=-1$

ゆえに，点 $(1,-3)$ における接線の方程式は

$$y-(-3)=-(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y=-x-2$$

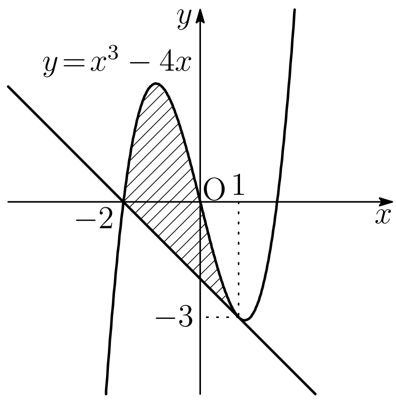
この接線と曲線の共有点の x 座標は

$$x^3-4x=-x-2$$

の解である．これを解くと

$$(x-1)^2(x+2)=0 \quad \text{より} \quad x=1,-2$$

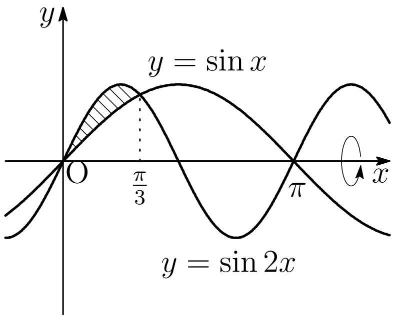
求める面積 S は，右の図の斜線部分であるから



$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^1 \{(x^3-4x)-(-x-2)\}\,dx\\&=\int_{-2}^1 (x^3-3x+2)\,dx\\&=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1=\frac{27}{4}\end{aligned}$$

12 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ の範囲において，2 つの曲線 $y = \sin x$，$y = \sin 2x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

【解】 $\sin x = \sin 2x$ より



$$\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ では

$$x = 0,\ \frac{\pi}{3}$$

求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 2x\,dx - \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\,dx \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx - \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x - \cos 4x)\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\,\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\,\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{16}\pi
\end{aligned}$$

5.4　章末問題

5.4.1　章末問題 A

1 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $e^x\sqrt{e^x+1}$　　(2) $\dfrac{x}{(x-1)^3}$　　(3) $\dfrac{x}{x^2-3x+2}$

(4) $\cos^5 x$　　(5) $\dfrac{1}{e^x-e^{-x}}$　　(6) $2x\log(x^2+1)$

【解】 C は積分定数とする.

(1) 与式 $= \displaystyle\int \sqrt{e^x+1}(e^x+1)'\,dx$

$$= \frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(e^x+1)\sqrt{e^x+1} + C$$

(2) $x-1=t$ とおくと　$x=t+1$, $\dfrac{dx}{dt}=1$

よって　与式 $= \displaystyle\int \frac{t+1}{t^3}\cdot 1\cdot dt = \int (t^{-2}+t^{-3})\,dt = -t^{-1} - \frac{1}{2}t^{-2} + C$

$$= -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C = -\frac{2x-1}{2(x-1)^2} + C$$

(3) $\dfrac{x}{x^2-3x+2} = \dfrac{x}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$ であるから

与式 $= \displaystyle\int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right) dx$

$$= 2\log|x-2| - \log|x-1| + C = \log\frac{(x-2)^2}{|x-1|} + C$$

(4) $\cos^5 x = (1-\sin^2 x)^2\cos x$ であるから

$\sin x = t$ とおくと　$\cos x\cdot\dfrac{dx}{dt} = 1$

よって　与式 $= \displaystyle\int (1-t^2)^2\,dt = \int (1-2t^2+t^4)\,dt$

$$= t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

(5) $e^x = t$ とおくと　$e^x \cdot \dfrac{dx}{dt} = 1$

ゆえに　与式$= \displaystyle\int \frac{1}{t - \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t^2 - 1}\, dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$

$$= \frac{1}{2}(\log|t-1| - \log|t+1|) + C$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \log \frac{|e^x - 1|}{e^x + 1} + C$$

(6) 与式$= \displaystyle\int \log(x^2+1) \cdot (x^2)' dx$

$$= x^2 \log(x^2+1) - \int \frac{2x}{x^2+1} \cdot x^2\, dx$$

ここで，$\dfrac{2x^3}{x^2+1} = 2x - \dfrac{2x}{x^2+1}$ であるから

与式$= \displaystyle x^2 \log(x^2+1) - \int \left(2x - \frac{2x}{x^2+1} \right) dx$

$$= x^2 \log(x^2+1) - \int 2x\, dx + \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\, dx$$

$$= x^2 \log(x^2+1) - x^2 + \log(x^2+1) + C$$

$$= (x^2+1) \log(x^2+1) - x^2 + C$$

【別解】(6)　与式$= \displaystyle\int \log(x^2+1) \cdot (x^2+1)' dx$

$$= (x^2+1) \log(x^2+1) - \int \frac{2x}{x^2+1} \cdot (x^2+1)\, dx$$

$$= (x^2+1) \log(x^2+1) - x^2 + C$$

2 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e x^2 \log x\, dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^4 |(x-4)(x-1)^3|\, dx$

(5) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$　　(6) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, dt$

【解】 (1) $\sin x = t$ とおくと

$$\cos x \frac{dx}{dt} = 1$$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \longrightarrow 1$

よって　与式 $\displaystyle = \int_0^1 t^5\, dt = \left[\frac{t^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$

(2) 与式 $\displaystyle = \int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\, dx = \Big[\log(e^x+1) \Big]_0^1 = \log(e+1) - \log 2$

(3) 与式 $\displaystyle = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' \log x\, dx = \left[\frac{x^3}{3} \log x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx$

$$= \frac{e^3}{3} \log e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2\, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e = \frac{2e^3+1}{9}$$

(4) 与式 $\displaystyle = \int_0^1 (x-4)(x-1)^3\, dx + \int_1^4 \{-(x-4)(x-1)^3\}\, dx$

$x - 1 = t$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$-1 \longrightarrow 0$

x	$1 \longrightarrow 4$
t	$0 \longrightarrow 3$

よって　与式 $\displaystyle = \int_{-1}^0 (t-3)t^3\, dt - \int_0^3 (t-3)t^3\, dt$

$$= \left[\frac{t^5}{5} - \frac{3}{4}t^4 \right]_{-1}^0 - \left[\frac{t^5}{5} - \frac{3}{4}t^4 \right]_0^3 = \frac{131}{10}$$

(5) 与式 $= 2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$x = \sin\theta$ とおくと

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$$

よって　与式 $= 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \cdot \cos\theta\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\,d\theta$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

(6) $t = \tan\theta$ とおくと

t	0	$\longrightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

よって　与式 $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta\,d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

3 m，n を自然数とする．定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt\,dt$ を，$m \neq n$，$m = n$ の場合に分けて求めよ．

【解】 $\sin mt \sin nt = -\dfrac{1}{2}\{\cos(m+n)t - \cos(m-n)t\}$

ゆえに，$m \neq n$ のとき

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt\,dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)t - \frac{1}{m-n}\sin(m-n)t\right]_0^{2\pi} = 0$$

また，$m = n$ のとき

$$\sin mt \sin nt = -\frac{1}{2}\{\cos(m+n)t - \cos(m-m)t\} = -\frac{1}{2}\{\cos(m+n)t - 1\}$$

であるから

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt\,dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)t - t\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\{(0-2\pi) - 0\} = \pi$$

4 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

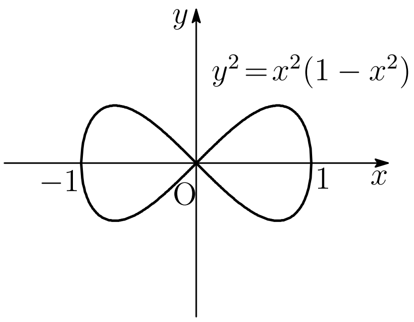
【解】 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+k}}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}}$ であるから

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\\&=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}}\end{aligned}$$

ここで，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ とすると，求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=\Big[\,2\sqrt{1+x}\,\Big]_0^1=2(\sqrt{2}-1)$$

5 曲線 $y^2 = x^2(1-x^2)$ で囲まれた部分の面積の和を求めよ．



【解】 曲線 $y^2 = x^2(1-x^2)$ 上に任意の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとると，$b^2 = a^2(1-a^2)$ である．したがって，

$$(-b)^2 = a^2(1-a^2), \quad b^2 = (-a)^2\{1-(-a)^2\}$$

も成り立ち，P と x 軸について対称な点 $\mathrm{Q}(a, -b)$ も，点 P と y 軸について対称な点 $\mathrm{R}(-a,\ b)$ も，この曲線上の点となる．よって，この曲線は，x 軸および y 軸について対称である．

曲線 $y^2 = x^2(1-x^2)$ は，x 軸，y 軸のそれぞれについて対称であるから，求める面積 S は，この曲線の第 1 象限にある部分と，x 軸，y 軸とで囲まれた部分の面積の 4 倍である．

この曲線の方程式を y について解くと

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0 \text{ のとき} \quad y = x\sqrt{1-x^2}$$

また，$1-x^2 \geqq 0$ より　$0 \leqq x \leqq 1$

よって　$S = 4\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

ここで，$1-x^2 = t$ とおくと

$$-2x\frac{dx}{dt} = 1$$

x	0	$\longrightarrow$	1
t	1	$\longrightarrow$	0

ゆえに　$S = 4\displaystyle\int_1^0 \sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$

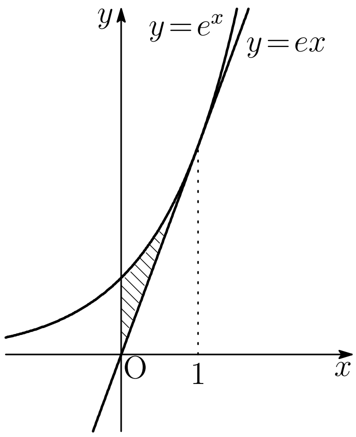
$$= 2\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = 2\left[\,\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\,\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

6 曲線 $y=e^x$ とこの曲線上の点 $(1,\ e)$ における接線および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．また，この部分が x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

【解】 $y'=e^x$ であるから，点 $(1,\ e)$ における接線の方程式は

$$y-e=e(x-1)$$

すなわち　$y=ex$



求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 e^x\,dx-\int_0^1 ex\,dx \\ &= \Big[\ e^x\ \Big]_0^1-\Big[\ \frac{e}{2}x^2\ \Big]_0^1 \\ &= (e-1)-\left(\frac{e}{2}-0\right) \\ &= \frac{e}{2}-1 \end{aligned}$$

求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^1 (e^x)^2\,dx-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot e^2\cdot 1=\frac{e^2-3}{6}\pi$$

5.4.2 章末問題 B

7 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+3)}$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

【解】 C は積分定数とする.

(1) $\displaystyle\frac{1}{x^2(x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+3}$ とおいて，分母を払うと

$$1 = ax(x+3) + b(x+3) + cx^2$$

よって $1 = (a+c)x^2 + (3a+b)x + 3b$

両辺の各項の係数を比較して

$$a + c = 0,\quad 3a + b = 0,\quad 3b = 1$$

これを解いて $a = -\dfrac{1}{9}$，$b = \dfrac{1}{3}$，$c = \dfrac{1}{9}$

よって

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x+3} \\
&= -\frac{1}{9}\log|x| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{9}\log|x+3| + C \\
&= \frac{1}{9}\log\left|\frac{x+3}{x}\right| - \frac{1}{3x} + C
\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}$

$t = \cos x$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = -\sin x$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx \\
&= \int \frac{1}{1-t^2}(-dt) = \int \frac{dt}{t^2-1} \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C
\end{aligned}$$

8 a を定数とする．定積分 $I=\displaystyle\int_0^1 (e^x-ax)^2\,dx$ を最小にする a の値と，I の最小値を求めよ．

【解】

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 (e^x-ax)^2\,dx \\
&= \int_0^1 (e^{2x}-2axe^x+a^2x^2)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - 2a\left(\left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx\right) + a^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(e^2-1) - 2a\{e-(e-1)\} + \frac{a^2}{3} \\
&= \frac{1}{3}a^2 - 2a + \frac{1}{2}(e^2-1)
\end{aligned}$$

ゆえに　$I=\dfrac{1}{3}(a-3)^2+\dfrac{1}{2}(e^2-7)$

よって，$a=3$ で最小値 $\dfrac{1}{2}(e^2-7)$ をとる

9 連続な関数 $f(x)$ について，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$ を証明せよ．

【解】 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx$

$\dfrac{\pi}{2}-x=t$ とおくと

$$-\frac{dx}{dt}=1$$

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\longrightarrow$	0

よって

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)(-1)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx
\end{aligned}$$

10 a を正の定数とする．$x>0$ で定義された関数 $f(x)$ が等式

$\displaystyle\int_a^{x^2} f(t)\,dt = \log x$ を満たすように，$f(x)$ と a の値を定めよ．

【解】 $f(t)$ の原始関数の 1 つを $F(t)$ とすると，与えられた等式から

$$F(x^2) - F(a) = \log x$$

この両辺を x で微分して　　$2xf(x^2) = \dfrac{1}{x}$

よって　$f(x^2) = \dfrac{1}{2x^2}$

ゆえに　$f(x) = \dfrac{1}{2x}$　$(x>0)$

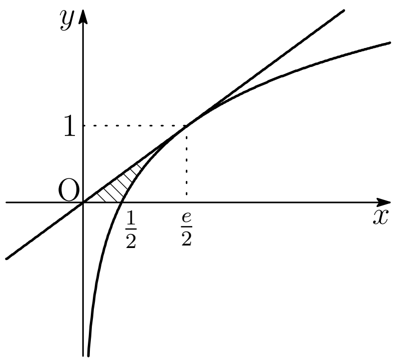
また，与えられた等式で $x^2 = a$ とおくと，$x = \sqrt{a}$ で　$0 = \log\sqrt{a}$

よって　$\sqrt{a} = 1$　　すなわち　$a = 1$

11 原点から曲線 $y=\log 2x$ に引いた接線とこの曲線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

【解】 接点の座標を $(a,\ \log 2a)$ とすると接線の方程式は

$$y-\log 2a=\frac{1}{a}(x-a)$$



この接線が原点を通るから

$$0-\log 2a=-1$$

すなわち　$a=\dfrac{e}{2}$

よって，接点の座標は　$\left(\dfrac{e}{2},\ 1\right)$

右の図より，求める面積 S は

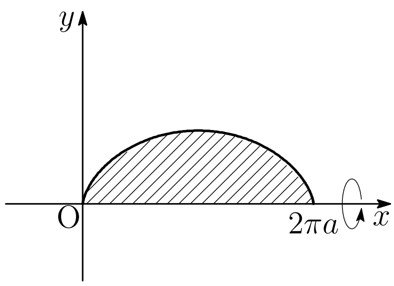
$$S=\frac{1}{2}\times\frac{e}{2}\times 1-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}\log 2x\,dx$$

$$\begin{aligned}\int\log 2x\,dx&=\int(\log 2x)\cdot(x)'dx\\&=(\log 2x)\cdot x-\int(\log 2x)'\cdot x\,dx\\&=x\log 2x-x+C\qquad(C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

よって　$\begin{aligned}S&=\frac{e}{4}-\Big[\,x\log 2x-x\,\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}\\&=\frac{e}{4}-\left\{\left(\frac{e}{2}-\frac{e}{2}\right)-\left(0-\frac{1}{2}\right)\right\}\\&=\frac{e}{4}-\frac{1}{2}\end{aligned}$

12 サイクロイド $x = a(\theta - \sin\theta)$，$y = a(1 - \cos\theta)$　$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

【解】 $V = \pi \displaystyle\int_0^{2\pi a} y^2\,dx$



$dx = a(1 - \cos\theta)d\theta$

x	$0 \longrightarrow 2\pi a$
θ	$0 \longrightarrow 2\pi$

であるから，置換積分法によって

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos\theta)^2 \cdot a(1 - \cos\theta)\,d\theta \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos\theta + 3\cos^2\theta - \cos^3\theta)\,d\theta \end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$

$$= \left[\ \sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\ \right]_0^{2\pi} = 0$$

ゆえに

$$\begin{aligned} V &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos\theta + 3\cdot\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \pi a^3 \left[\ \theta - 3\sin\theta + \frac{3}{2}\theta + \frac{3}{4}\sin 2\theta\ \right]_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3 \end{aligned}$$

第 6 章　学習指導要領の範囲外の内容

6.1.1　道のり

練習 6.1 数直線上を運動する点 P があり，時刻 t における P の速度は
$v=\sin t+\sin 2t$ であるという．ただし，$t=0$ のとき，P は原点にあるとする．

(1) 時刻 t における P の座標を求めよ．

(2) $t=0$ から $t=\pi$ までに P が通過する道のりを求めよ．

【解】 (1) 時刻 t における点 P の座標を x とすると

$$\begin{aligned} x &= 0+\int_0^t v\,dt=\int_0^t(\sin t+\sin 2t)\,dt=\left[-\cos t-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^t \\ &= -\cos t-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{3}{2} \end{aligned}$$

(2) $v=\sin t+\sin 2t=\sin t(1+2\cos t)$ であるから

$0<t<\pi$ のとき $v=0$ とおくと　$\cos t=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに　　$t=\dfrac{2}{3}\pi$

よって，$0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$v\geqq 0$

$\dfrac{2}{3}\pi\leqq t\leqq\pi$ のとき　$v\leqq 0$

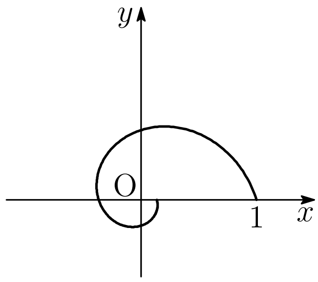
したがって，求める道のりを s とすると

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\pi |v|\,dt=\int_0^{\frac{2}{3}\pi} v\,dt+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(-v)\,dt \\ &= \left[-\cos t-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\left[\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\left(-1-\frac{1}{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{2} \end{aligned}$$

練習 6.2 座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標が

$$x = e^{-t}\cos \pi t, \quad y = e^{-t}\sin \pi t$$

で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までにPが通過する道のりを求めよ．



【解】 $\dfrac{dx}{dt} = -e^{-t}(\cos \pi t + \pi \sin \pi t)$

$\dfrac{dy}{dt} = -e^{-t}(\sin \pi t - \pi \cos \pi t)$

であるから，道のり s は

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 \sqrt{e^{-2t}\{\cos^2 \pi t + \sin^2 \pi t + \pi^2(\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t)\}}\,dt \\ &= \sqrt{1+\pi^2}\int_0^2 e^{-t}\,dt = \sqrt{1+\pi^2}\Big[\,-e^{-t}\,\Big]_0^2 \\ &= \sqrt{1+\pi^2}(1-e^{-2}) \end{aligned}$$

6.1.2　曲線の長さ

練習 6.3　a を正の定数とする．次のサイクロイドの長さを求めよ．

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

【解】 $\dfrac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$， $\dfrac{dy}{dt} = a\sin t$ より

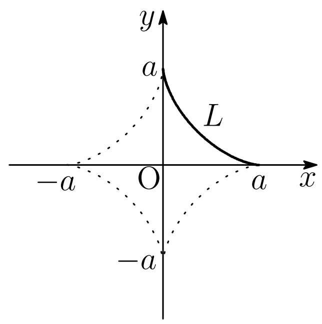
$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\{a(1-\cos t)\}^2 + (a\sin t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt \\ &= 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a \end{aligned}$$

練習 6.4　a を正の定数とする．次の曲線の長さを求めよ．

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

【解】 $\dfrac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t$， $\dfrac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t$ であるから

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt \\ &= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\,dt = \frac{3}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt \\ &= \frac{3}{2}a\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a \end{aligned}$$



6.1.3　微分方程式

練習 6.5　微分方程式 $y' = 2xy$ を解け.

【解】［1］定数関数 $y = 0$ は解である.

［2］$y \neq 0$ のとき　$\dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 2x$

よって

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\log|y| = x^2 + C,\ C\text{ は任意の定数}$$

$$y = \pm e^C e^{x^2}$$

ここで，$\pm e^C = A$ とおくと，A は 0 以外の任意の値をとる.

［1］における $y = 0$ は，$y = Ae^{x^2}$ において，$A = 0$ とおくと得られる.

したがって，求める解は　$y = Ae^{x^2}$，A は任意の定数

練習 6.6　A を 0 でない任意の定数として，方程式 $xy = A$ の直角双曲線全体を考える．これらの直角双曲線のどれとも直交するような曲線の方程式を求めよ．ただし，2 つの曲線が直交するとは，2 つの曲線の交点におけるそれぞれの接線が垂直に交わることである.

【解】 $xy = A$ から　$y + xy' = 0$

$A \neq 0$ より $x \neq 0$ であるから，直角双曲線 $xy = A$ 上の点 $(x,\ y)$ における接線の傾きは，$-\dfrac{y}{x}$ である.

したがって，$\dfrac{dy}{dx}\left(-\dfrac{y}{x}\right) = -1$　すなわち　$\dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 1$ を解けばよい.

$\displaystyle\int y\,dy = \int x\,dx$ より　$\dfrac{1}{2}y^2 = \dfrac{1}{2}x^2 + C_1$，　C_1 は任意の定数

よって　$x^2 - y^2 = C$，　C は任意の定数