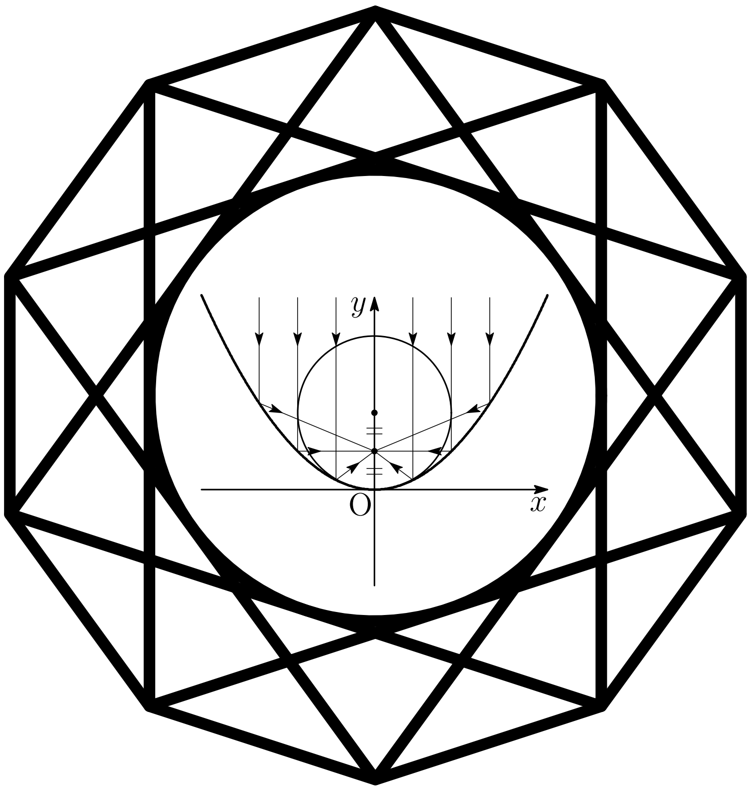
高校生の

就職への数学 II

書き込みノート



Typed by LaTeX 2ε

序

　激変する社会状況のもとで，企業は，時代にあった，あるいは，高度な専門的知識・技術に柔軟に対応しうる資質，能力のある人材を求めています．中でも，柔軟で精緻な思考力の母体となる数学的素養は，特に高く評価され，企業の採用試験においてその能力は重視されています．

　本書は，企業が要求する数学的知識とはどのようなものであるかを紹介するとともに，就職を希望する者にとって効果的な学習の手助けになるようにと考えて編集したものです．

　本書の編集にあたり，以下の点に留意しました．

1. 数学 II の教科書に準拠した就職試験対策用の問題集として，教科書と併用できるように配慮した．
2. **例**をかかげ，知識や公式の理解に効果があがるように工夫した．
3. **例題**をかかげ，考え方，基本事項の使い方，答案の書き方を例示した．
4. 問題は過去に出題された中から精選し，関連性を重視して配列した．
5. 本書の詳細な解答については，次のサイトから入手することができる．

http://kumamoto.s12.xrea.com/share/math2work_ans.pdf

平成 27 年 6 月　編者

目 次

1.1　式と計算

1.1.1　多項式の割り算

多項式 A を多項式 B で割る

① A，B を降べきの順に整理する．

② 整式の割り算と同様に，縦がき計算を行う．

例 1.1 x^3-5x+9 を x^2-3+2x で割った商と余りを求めよ．

【解】

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x & -2 & & \\
\cline{2-5}
x^2+2x-3 & x^3 & & -5x & +9 \\
 & x^3 & +2x^2 & -3x & \\
\cline{2-5}
 & & -2x^2 & -2x & +9 \\
 & & -2x^2 & -4x & +6 \\
\cline{3-5}
 & & & 2x & +3
\end{array}
$$

← 割られる式で，ある次数の項がない場合は，その場所を空けておくと，計算しやすい．

(答) 商 $x-2$，余り $2x+3$

1.1 次の計算をせよ．

(1) $(-6x^2+3x)\div(2x-1)$　(九州電力)

(2) $(2x^3+3x^2+x+4)\div(x+2)$　(きんでん)

(3) $(x^3+3x^2-2x-1)\div(x-3)$　(富士電機ホールディングス)

(4) $(3x^3-4x^2+2x-1)\div(x-1)$　(大阪ガス)

(5) $(p^3 + p^2 - 4p - 4) \div (p - 2)$ (新日本石油)

(6) $(x^3 + x + 3) \div (x^2 + 2x - 1)$ (テザック)

(7) $(8x^3 - 18x^2 + 11x - 8) \div (4x^2 - 3x + 1)$ (小田急電鉄)

(8) $(8a^2 + a^3 - a^4 - 11a + 3) \div (3 - 2a - a^2)$ (JFE ホールディングス)

(9) $(2x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 8y^3) \div (x - 2y)$ (JFE ホールディングス)

割り算の等式

多項式 A を多項式 B で割った商が Q，余りが R のとき

$$\boldsymbol{A = BQ + R}$$

$$\begin{array}{r@{\,}l} & \quad Q \\ \cline{2-2} B) & \quad A \\ & \cdots\cdots \\ \cline{2-2} & \qquad R \end{array}$$

ただし，R は 0 か B より次数の低い多項式

例題 1.1 多項式 $3x^3-4x^2+6x+8$ を多項式 B で割ると，商が $3x+2$，余りが $x+2$ であるという．B を求めよ．

【解】 この割り算について，次の等式が成り立つ．

$$3x^3-4x^2+6x+8 = B\times(3x+2)+x+2$$

整理すると

$$3x^3-4x^2+5x+6 = B\times(3x+2)$$

よって，$3x^3-4x^2+5x+6$ は $3x+2$ で割り切れて，その商が B である．

右の計算により　　$B = x^2-2x+3$

$$\begin{array}{r@{\,}rrrr} & x^2 & -2x & +3 & \\ \cline{2-5} 3x+2\,) & 3x^3 & -4x^2 & +5x & +6 \\ & 3x^3 & +2x^2 & & \\ \cline{2-5} & & -6x^2 & +5x & \\ & & -6x^2 & -4x & \\ \cline{3-5} & & & 9x & +6 \\ & & & 9x & +6 \\ \cline{4-5} & & & & 0 \end{array}$$

1.2 次の条件を満たす多項式 A，B を求めよ．

(1) A を $x-3$ で割ると，商が x^2+2x-1，余りが 2

(2) $2x^3-7x^2+8x+1$ を B で割ると，商が $2x-1$，余りが $-3x+5$

1.1.2 分数式とその計算

分数式の性質

$$C \neq 0 \text{ のとき} \qquad \frac{A}{B} = \frac{A \times C}{B \times C}, \qquad \frac{A \times \cancel{C}}{B \times \cancel{C}} = \frac{A}{B}$$

例 1.2 (1) $\dfrac{15a^2b^5}{10a^3b^3} = \dfrac{3b^2 \cdot \cancel{5a^2b^3}}{2a \cdot \cancel{5a^2b^3}} = \dfrac{3b^2}{2a}$

(2) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \dfrac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \dfrac{x+3}{x+1}$

分数式の分母と分子をその共通な因数で割ることを**約分**するという．例 1.2 で約分して得られた分数式のように，それ以上約分できない分数を**既約**(きやく)分数式という．

1.3 次の分数式を約分して，既約分数式で表せ．

(1) $\dfrac{54a^{10}b^6c^8}{-162a^{14}b^2cd}$ (東洋紡績)

(2) $\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$ (新菱エコビジネス)

(3) $\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$ (旭硝子)

(4) $\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-6x+4}$ (ブラザー工業)

(5) $\dfrac{(x^2+3x+2)(x^2+x-2)}{(x^2-2x+1)(x+2)(x-3)}$ (日立建機)

(6) $\dfrac{ax^2+bx^2-a-b}{bx+ax-b-a}$ (日本航空)

分数式の乗法・除法

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

例 1.3 (1) $\dfrac{x^2}{x-1}\times\dfrac{x^2-1}{2x}=\dfrac{x^2(x+1)(x-1)}{(x-1)\cdot 2x}=\dfrac{x(x+1)}{2}$

(2) $\dfrac{x^2-x}{x^2-7x+12}\div\dfrac{x^2+5x}{x^2+2x-15}=\dfrac{x(x-1)}{(x-3)(x-4)}\times\dfrac{(x-3)(x+5)}{x(x+5)}$

$$=\frac{x(x-1)(x-3)(x+5)}{(x-3)(x-4)\cdot x(x+5)}=\frac{x-1}{x-4}$$

1.4 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{3x^2y}{4a^2b^3}\times\dfrac{8a^3b}{9x^3y^2}$ (日本水産)

(2) $\dfrac{4xy^5}{3x^2y^3}\div\dfrac{2x^3y}{3xy^2}$ (武田薬品工業)

(3) $\dfrac{5a^2}{6xy}\div\left(\dfrac{2a^2}{9x^2y^2}\right)^2$ (NOK)

(4) $\dfrac{(-2ab)^2}{(xy)^2}\times\dfrac{x^2y^2}{(-a^2b)^3}$ (日本水産)

(5) $\dfrac{2x-1}{x}\times\dfrac{3x}{4x-2}$ (大阪製紙)

(6) $\dfrac{x-1}{x}\times\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ (愛知製鋼)

(7) $\dfrac{x+1}{x^2-4}\div\dfrac{x^2-1}{x-2}$ (富士電機ホールディングス)

1.5 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{x^2-13x+36}{x^2-16} \div \dfrac{x-9}{x+4}$ (日産自動車)

(2) $\dfrac{x^2-4}{x^2-16} \times \dfrac{x^2-2x-8}{x^2+4x+4}$ (マツダ)

(3) $\dfrac{a^2-11a+30}{a^2-6a+9} \times \dfrac{a^2-3a}{a^2-5a}$ (小田急電鉄)

(4) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4} \times \dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4x+3}$ (オリンパス)

(5) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-9} \div \dfrac{x^2-6x+8}{2x^2-5x-3}$ (三村化学工業)

(6) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} \times \dfrac{xy+y^2}{x^2-xy}$ (九州電力)

(7) $\dfrac{x^2-9y^2}{x^2+6xy+9y^2} \times \dfrac{x+3y}{x^2-xy-6y^2}$ (雪印乳業)

(8) $\dfrac{x-3}{x^2-3x} \div \dfrac{x^2-1}{x^3-8} \times \dfrac{x^2+x}{x^2+2x+4}$
(コロムビアミュージックエンタテインメント)

(9) $\dfrac{x^2-x-2}{6x-15} \times \dfrac{6x^2-7x-20}{x^2-4} \div \dfrac{3x^2+7x+4}{x^2+2x}$ (三菱マテリアル)

例題 1.2 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{3x-1}{x-1}+\dfrac{1+x}{1-x}$ (2) $\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}-\dfrac{3x-2}{x^2-4}$

【解】 (1)
$$\frac{3x-1}{x-1}+\frac{1+x}{1-x}=\frac{3x-1}{x-1}+\frac{1+x}{-(x-1)}=\frac{(3x-1)-(1+x)}{x-1}$$
$$=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

(2)
$$\frac{2x-3}{x^2-3x+2}-\frac{3x-2}{x^2-4}=\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}-\frac{3x-2}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{(2x-3)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-2)}-\frac{(3x-2)(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{(2x^2+x-6)-(3x^2-5x+2)}{(x-1)(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{-x^2+6x-8}{(x-1)(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{-(x-2)(x-4)}{(x-1)(x+2)(x-2)}=-\frac{x-4}{(x-1)(x+2)}$$

1.6 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{b-a}$ (アマダ)

(2) $\dfrac{2x-1}{x-3}+\dfrac{x+2}{3-x}$ (クボタ)

(3) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{1}{1-x^2}$ (ニコン)

(4) $\dfrac{x+1}{x^2-4}-\dfrac{3}{(x+2)(x-2)}$ (松田組)

(5) $\dfrac{a^2}{a-1}+\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{a^2}{a+1}-\dfrac{1}{a-1}$ (中越パルプ工業)

1.7 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x^2-4}$ (雪印乳業)

(2) $\dfrac{1}{x-4} - \dfrac{8}{x^2-16}$ (日産自動車)

(3) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2x}{x^2-1}$ (NEC エンジニアリング)

(4) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x-2}{x+2} - \dfrac{8}{4-x^2}$ (三井造船)

(5) $\dfrac{2}{x+y} - \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{2x}{x^2-y^2}$ (豊和産業)

(6) $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}+\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ (横浜ゴム)

(7) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$ (シチズン時計)

(8) $1+\dfrac{b}{a-b}$ (平田機工)

(9) $x-\dfrac{x^2}{x+1}$ (昭和シェル石油)

1.8 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{a+b}{ab}-\dfrac{b+c}{bc}-\dfrac{a+c}{ac}$ (きんでん)

(2) $\dfrac{3}{x^2+x-2}-\dfrac{2}{x^2-1}$ (日本スピンドル製造)

(3) $\dfrac{1}{x^2-4x+3}-\dfrac{4}{x^2+2x-15}+\dfrac{3}{x^2+4x-5}$ (トヨタ自動車)

(4) $\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}$ (日本輸送機)

(5) $\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}-\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}$ (コスモ石油)

(6) $\dfrac{x+2y}{xy-x^2}+\dfrac{2x-5y}{x^2-3xy+2y^2}-\dfrac{x-3y}{x^2-2xy}$ (ニコン)

(7) $\dfrac{x-2}{2x^2-5x+3}+\dfrac{3x-1}{2x^2+x-6}-\dfrac{5-2x}{x^2+x-2}$ (JR)

(8) $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+x}\times\dfrac{x+1}{x^2+5x}+\dfrac{3x^2-x+3}{x^2+3x}\div\dfrac{x}{x+3}$ (大日本製薬)

1.1.3　恒等式

文字を含む等式において，文字にどのような値を代入しても成り立つ等式を，その文字についての**恒等式**という．

恒等式の性質

1　$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式である

$$\iff \quad a=a', \quad b=b', \quad c=c'$$

2　$ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式である

$$\iff \quad a=b=c=0$$

例題 1.3　等式 $ax(x+1)+bx(x-1)+c(x+1)(x-1)=x^2+3$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

【解】 等式の左辺を整理すると

$$(a+b+c)x^2+(a-b)x-c=x^2+3$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$a+b+c=1,\ a-b=0,\ -c=3$$

これらを解いて　　$a=2$，$b=2$，$c=-3$

1.9 次の問いに答えよ．

(1) $A(x-2)(x+3)+B(x-1)+C=2x^2-3x+5$ が x についての恒等式となるように，定数 A, B, C の値を求めよ．　(シグマ・ゲイン)

(2) $\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$ がどのような x に対しても常に成り立つように，定数 a, b の値を求めよ． (エクセディ)

(3) 次式が x についての恒等式となるとき，A, B, C の値を求めよ． (きんでん)

$$\frac{3x-9}{(x^2-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

1.2　等式・不等式の証明

1.2.1　等式の証明

条件つきの等式の証明

条件式を等式に代入して証明する．

例題 1.4 $a+b+c=0$ のとき，等式 $a^2-b^2=2bc+c^2$ を証明せよ．

[証明] $c=-a-b$ であるから

$$\begin{aligned} a^2-b^2-(2bc+c^2) &= a^2-b^2-2b(-a-b)-(-a-b)^2 \\ &= a^2-b^2+2ab+2b^2-(a^2+2ab+b^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって　　$a^2-b^2=2bc+c^2$　　**[証終]**

1.10 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ．　(三菱電機)

$$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$$

1.11 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ．　(平田機工)

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$$

例題 1.5 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ．

$$\frac{a+3c}{b+3d} = \frac{2a-3c}{2b-3d}$$

[証明] $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$ とおくと　　$a = bk$，$c = dk$

よって　　$$\frac{a+3c}{b+3d} = \frac{bk+3dk}{b+3d} = \frac{k(b+3d)}{b+3d} = k$$

$$\frac{2a-3c}{2b-3d} = \frac{2bk-3dk}{2b-3d} = \frac{k(2b-3d)}{2b-3d} = k$$

したがって　　$$\frac{a+3c}{b+3d} = \frac{2a-3c}{2b-3d}$$ **[証終]**

1.12 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ．　(ニコン)

$$\frac{ab+cd}{ab-cd} = \frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$$

1.13 $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$ のとき，次の等式を証明せよ．　(JFE ホールディングス)

(1) $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{x^2-xy+y^2}{a^2-ab+b^2}$　　(2) $\dfrac{pa+rx}{qa+sx} = \dfrac{pb+ry}{qb+sy}$

1.2.2　不等式の証明

実数の平方

1　実数 a について　　$\boldsymbol{a^2 \geqq 0}$

等号が成り立つのは，$a=0$ のときである．

2　実数 a，b について　　$\boldsymbol{a^2+b^2 \geqq 0}$

等号が成り立つのは，$a=0$，$b=0$ のときである．

例題 1.6　次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．

$$a^2+b^2 \geqq 4(a-b-2)$$

[証明]

$$\begin{aligned} a^2+b^2-4(a-b-2) &= a^2-4a+4+b^2+4b+4 \\ &= (a-2)^2+(b+2)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

したがって　　$a^2+b^2 \geqq 4(a-b-2)$

等号が成り立つのは，$a-2=0$ かつ $b+2=0$，
すなわち $a=2$，$b=-2$ のときである．　**[証終]**

1.14　次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．

(1)　$a^2+b^2 \geqq 2(a+b-1)$　(アツギ)

(2)　$a^2-ab+b^2 \geqq 0$　(昭和電工)

(3)　$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$　(日新製鋼)

2数 a，b に対して，$\dfrac{a+b}{2}$ を a と b の**相加平均**という．
また，$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{ab}$ を a と b の**相乗平均**という．

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき　$\boldsymbol{\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}}$

等号が成り立つのは，$a=b$ のときである．

[注意] この不等式は $\boldsymbol{a+b \geqq 2\sqrt{ab}}$ の形で使うことが多い．

例 1.4 $a>0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a+\frac{9}{a} \geqq 6$$

[証明] $a>0$，$\dfrac{9}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{9}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{9}{a}} = 2\sqrt{9} = 6$$

よって　$a+\dfrac{9}{a} \geqq 6$　**[証終]**

1.15 次の不等式を証明せよ．

(1) $a>0$ のとき $a+\dfrac{1}{a} \geqq 2$　(ダイハツ工業)

(2) $a>0,\ b>0$ のとき $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 4$　(ダイハツ工業)

(3) $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$ のとき $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right) \geqq 4$　(横河電機)

2.1　複素数と方程式の解

2.1.1　複素数とその計算

複素数とその相等

1 2 乗して -1 になる新しい数を 1 つ考え，これを文字 $\boldsymbol{i}$ で表す.
i を**虚数単位**という.

2 実数 a，b を用いて $\boldsymbol{a+bi}$ の形で表される数を**複素数**という.

3 a，b，c，d が実数のとき

$$\boldsymbol{a+bi=c+di} \iff \boldsymbol{a=c}\text{ かつ }\boldsymbol{b=d}$$

とくに $$\boldsymbol{a+bi=0} \iff \boldsymbol{a=0}\text{ かつ }\boldsymbol{b=0}$$

例 2.1 次のような実数 a，b を求めよ.　(東芝)

$$(3+2i)a-(1-i)b=1+4i$$

【解】 左辺を整理すると　$(3a-b)+(2a+b)i=1+4i$

$3a-b$，$2a+b$ は実数であるから　$3a-b=1$，$2a+b=4$

これを解いて　$a=1$，$b=2$

2.1 次のような実数 x，y を求めよ.

(1) $3x+(2-3i)y=17-12i$　(新日本石油)

(2) $(x+5i)+(7-2y\,i)=5-i$　(トヨタ自動車)

(3) $(1-i)x+(1+i)y=-4$　(トヨタ自動車)

例 2.2 次の計算をせよ．

(1) $(3+2i)+(4-3i)$ (2) $(1+2i)(3-2i)$

(3) $(3+2i)^2$ (4) $(2+3i)(2-3i)$

【解】 (1) $(3+2i)+(4-3i) = (3+4)+(2-3)i = 7-i$

(2) $$\begin{aligned}(1+2i)(3-2i) &= 3-2i+6i-4i^2\\ &= \{3-4\cdot(-1)\}+(-2+6)i = 7+4i\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}(3+2i)^2 &= 9+12i+4i^2\\ &= \{9+4\cdot(-1)\}+12i = 5+12i\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}(2+3i)(2-3i) &= 2^2-(3i)^2 = 4-9i^2\\ &= 4-9\cdot(-1) = 13\end{aligned}$$

2.2 次の計算をせよ．

(1) $(4+3i)(1+i)$ (ニコン)

(2) $(2+3i)(4-2i)$ (北陸電力)

(3) $(4-3i)(3+5i)$ (NEC フィールディング)

(4) $(5-3i)(4+i)$ (東芝)

(5) $(4-i)(4+i)$ (ニチボー)

(6) $(3-2i)(6+4i)$ (北陸電力)

(7) $(-i)^3$ (アツギ)

(8) $5i^3 \times 5i^5$ (日本ペイント)

(9) $i - i^2 + i^3 - i^4 + i^5$ (オリンパス)

(10) $(1 + i - i^3)^2$ (昭和シェル石油)

(11) $(\sqrt{7} - \sqrt{3}\,i)(\sqrt{7} + \sqrt{3}\,i)$ (トヨタ自動車)

(12) $(2 + \sqrt{3}\,i)(3 - \sqrt{27}\,i)$ (トヨタ自動車)

(13) $(1 + i)^3$ (日立ソフトウェアエンジニアリング)

(14) $(-1 + \sqrt{3}\,i)^3$ (東洋高圧)

2 つの複素数 $a+bi$，$a-bi$ を，互いに**共役な複素数**という．
複素数の除法では，分母と共役な複素数を，分母，分子にかけて計算する．

例 2.3 $\dfrac{4+3i}{1-3i}$ を計算せよ．

【解】 $\dfrac{4+3i}{1-3i}=\dfrac{(4+3i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\dfrac{4+12i+3i+9i^2}{1^2+3^2}$

$$=\frac{-5+15i}{10}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$$

2.3 $\dfrac{2-i}{4-3i}$ を $a+bi$ の形で表せ． (九州電力)

2.4 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{2+3i}{4i}$ (日産ディーゼル工業)

(2) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (ダイハツ工業)

(3) $\dfrac{2+i}{1+i}$ (東芝)

(4) $\dfrac{1-i}{2+i}$ (日本ペイント)

(5) $\dfrac{i-1}{2-3i}$ (安川電機)

(6) $\dfrac{2-3i}{3+2i}$ (石川島播磨重工業)

(7) $\dfrac{1+i}{i-1}$ (東陶機器)

(8) $\dfrac{(1-i)(1+3i)}{2+i}$ (新日本石油)

(9) $\dfrac{(3-i)(4+3i)}{3+i}$ (キヤノン)

(10) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{i}{1+i}+\dfrac{1+i}{2+i}$ (NEC フィールディング)

負の平方根

$a > 0$ とする.

1 $\boldsymbol{\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i}$　とくに　$\boldsymbol{\sqrt{-1} = i}$

2 $\boldsymbol{-a}$ の平方根は　$\boldsymbol{\pm\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a}\,i}$

例 2.4　次の問いに答えよ.

(1) -24 の平方根　　(2) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9}$ を計算せよ

(3) 方程式 $x^2 = -5$ の解　　(4) 方程式 $(x-1)^2 = -4$ の解

【解】 (1) $\pm\sqrt{-24} = \pm\sqrt{24}\,i = \pm 2\sqrt{6}\,i$

(2) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} = 2i \times 3i = 6i^2 = -6$

(3) $x = \pm\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}\,i$

(4) $(x-1)^2 = -4$

$$x - 1 = \pm\sqrt{-4}$$

$$x = 1 \pm 2i$$

2.5 次の計算をせよ.

(1) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-25}$　(安川電機)

(2) $\sqrt{-2} \times \sqrt{-18}$　(京王電鉄)

(3) $(1 + \sqrt{-2}\,)(2 - \sqrt{-2}\,)$　(JFE ホールディングス)

(4) $(\sqrt{-8} + \sqrt{6}\,)^2$　(小田急電鉄)

2.6 2 次方程式 $(2t-3)^2 + 9 = 0$ を解け.　(マツダ)

2.1.2　2 次方程式の解

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を複素数の範囲で考えると，数学 I で学んだ解の公式は，b^2-4ac の符号に関係なく成り立つ.

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は　$\boldsymbol{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

例 2.5　次の 2 次方程式を解け.

(1) $3x^2+4x+2=0$　　(2) $2x^2-6x+5=0$

【解】 (1)
$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\frac{-4\pm\sqrt{-8}}{6}$$
$$=\frac{-4\pm2\sqrt{2}\,i}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{2}\,i}{3}$$

(2)
$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot2\cdot5}}{2\cdot2}=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{4}$$
$$=\frac{6\pm2i}{4}=\frac{3\pm i}{2}$$

2.7 次の 2 次方程式を解け.

(1) $5x^2+4x+17=0$　(神戸製鋼所)

(2) $3x^2+\sqrt{5}\,x+1=0$　(マツダ)

(3) $y-3=\dfrac{3}{4}y(y+2)$　(東洋高圧)

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ がどんな種類の解であるかを判別するには，解における根号の中の $\boldsymbol{b^2-4ac}$ の値を調べればよい．この b^2-4ac を 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**判別式**といい，ふつう $\boldsymbol{D}$ で表す．

2 次方程式の解の種類の判別

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，その解について次のことが成り立つ．

$\boldsymbol{D>0} \iff$ **異なる 2 つの実数解**

$\boldsymbol{D=0} \iff$ **重解　(実数解)**

$\boldsymbol{D<0} \iff$ **異なる 2 つの虚数解**

[注意] $D \geqq 0 \iff$ 実数解

例 2.6　2 次方程式の解の種類を判別する．

(1)　2 次方程式 $2x^2+x-3=0$ の判別式は

$$D=1^2-4{\cdot}2{\cdot}(-3)=25>0$$

よって，この 2 次方程式は異なる 2 つの実数解をもつ．

(2)　2 次方程式 $9x^2-12x+4=0$ の判別式は

$$D=(-12)^2-4{\cdot}9{\cdot}4=0$$

よって，この 2 次方程式は重解をもつ．

(3)　2 次方程式 $2x^2-3x+4=0$ の判別式は

$$D=(-3)^2-4{\cdot}2{\cdot}4=-23<0$$

よって，この 2 次方程式は異なる 2 つの虚数解をもつ．

2.8 次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ．

(1) $x^2-2x-1=0$ 　(東芝)

(2) $x^2 - 4x - 5 = 0$ (ソトー)

(3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ (新日本石油)

(4) $x^2 + x + 1 = 0$ (新日本石油)

(5) $2x^2 + 4x + 3 = 0$ (小松製作所)

(6) $4x^2 - 12mx + 9m^2 = 0$ (m は実数) (三井化学)

例題 2.1 次の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $x^2+ax-a+3=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．（きんでん）

(2) 2 次方程式 $x^2+2kx+8k+9=0$ が重解をもつとき，定数 k の値を求めよ．（ニコン）

(3) 2 次方程式 $x^2-(a+2)x+4=0$ が異なる 2 つの虚数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．（大同特殊鋼）

(4) 2 次方程式 $x^2+6x+2k+1=0$ が実数解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ．（トヨタ自動車）

【解】 (1) 2 次方程式 $x^2+ax-a+3=0$ の判別式は

$$D=a^2-4\cdot1\cdot(-a+3)=a^2+4a-12=(a+6)(a-2)$$

2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつのは $D>0$ のときである．

よって　$(a+6)(a-2)>0$

これを解いて　$a<-6$，$2<a$

(2) 2 次方程式 $x^2+2kx+8k+9=0$ の判別式は

$$D=(2k)^2-4\cdot1\cdot(8k+9)=4(k^2-8k-9)=4(k+1)(k-9)$$

2 次方程式が重解をもつのは $D=0$ のときである．

よって　$(k+1)(k-9)=0$

これを解いて　$k=-1,9$

(3) 2 次方程式 $x^2-(a+2)x+4=0$ の判別式は

$$D=\{-(a+2)\}^2-4\cdot1\cdot4=a^2+4a-12=(a+6)(a-2)$$

2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつのは $D<0$ のときである．

よって　$(a+6)(a-2)<0$

これを解いて　$-6<a<2$

(4) 2 次方程式 $x^2+6x+2k+1=0$ の判別式は

$$D=6^2-4\cdot1\cdot(2k+1)=-8k+32$$

2 次方程式が実数解をもつのは $D\geqq0$ のときである．

よって　$-8k+32\geqq0$

これを解いて　$k\leqq4$

2.9 次の問いに答えよ.

(1) 2 次方程式 $4x^2+(k-1)x+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ. (トヨタ自動車)

(2) 2 次方程式 $x^2-2(k-4)x+2k=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ. (川崎重工業)

(3) 2 次方程式 $x^2+ax+2a-3=0$ が重解をもつとき，定数 a の値を求めよ. (トヨタ自動車)

(4) 2 次方程式 $kx^2 - 2kx - k + 1 = 0$ が異なる 2 つの虚数解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ． (いすゞ自動車)

(5) 2 次方程式 $x^2 + 6x + 2k - 1 = 0$ が実数解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ． (トヨタ自動車)

(6) 2 つの 2 次方程式 $x^2 + 4x - m^2 - 5m = 0$，$x^2 - 2mx + 2m^2 - 16 = 0$ がいずれも異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ． (東芝)

2.1.3　解と係数の関係

解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

例 2.7 2 次方程式 $3x^2+x-6=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{3},\qquad \alpha\beta=\frac{-6}{3}=-2$$

2.10 次の 2 次方程式の 2 つの解の和と積を，それぞれ求めよ．

(1) $x^2-2x+3=0$ (NTT)

(2) $3x^2+2x-5=0$ (小松製作所)

(3) $\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{4}=0$ (小松製作所)

例題 2.2 2次方程式 $x^2+3x+4=0$ の2つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2+\beta^2$　(2) $\alpha^3+\beta^3$　(3) $(\alpha-\beta)^2$　(4) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$

【解】 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=4$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=(-3)^2-2\cdot4=1$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-3)^3-3\cdot4\cdot(-3)=9$

(3) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=(-3)^2-4\cdot4=-7$

(4) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2}{\alpha\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{4}$

2.11 次の問いに答えよ．

(1) 2次方程式 $x^2+4x+1=0$ の2つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ．　(NTT)

(i) $\alpha+\beta$　(ii) $\alpha\beta$　(iii) $\alpha^2+\beta^2$

(2) 2次方程式 $3x^2+5x+1=0$ の2つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ．　(平田機工)

(i) $\alpha+\beta$　(ii) $\alpha\beta$　(iii) $\alpha^2+\beta^2$

(3) 2 次方程式 $x^2-2x+2=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の式の値を求めよ．
(トヨタ自動車)

(i) $\alpha+\beta$　(ii) $\alpha\beta$　(iii) $\alpha^2+\beta^2$　(iv) $(\alpha-\beta)^2$

(4) 2 次方程式 $x^2-x+1=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ の値を求めよ．
(三井造船)

(5) 2 次方程式 $2x^2-3x+4=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の式の値を求めよ．
(日本特殊機器)

(i) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　(ii) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

(6) 2 次方程式 $4x^2+12x+5=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の式の値を求めよ．(新日本製鐵)

(i) $(\alpha+\beta)^4$　　(ii) $(\alpha-\beta)^4$

(7) 2 次方程式 $2x^2+6x-1=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，$\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ の値を求めよ．(NTT)

(8) 2 次方程式 $2x^2-3x+5=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ としたとき，$\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\left(\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}\right)$ の値を求めよ．(電源開発)

例題 2.3　2次方程式 $x^2+7x+m=0$ の2つの解が次の条件を満たすとき，定数 m の値と2つの解を，それぞれ求めよ．

(1)　2つの解の比が $3:4$ である．

(2)　2つの解の差が3である．

【解】(1)　2つの解は 3α，4α と表すことができる．

解と係数の関係から　$3\alpha+4\alpha=-7$，$3\alpha\cdot 4\alpha=m$

すなわち　$7\alpha=-7$，$12\alpha^2=m$

よって　$\alpha=-1$，$m=12(-1)^2=12$

また，2つの解は　$3\alpha=3(-1)=-3$，$4\alpha=4(-1)=-4$

(答) $m=12$，2つの解は -3，-4

(2)　2つの解は α，$\alpha+3$ と表すことができる．

解と係数の関係から　$\alpha+(\alpha+3)=-7$，$\alpha(\alpha+3)=m$

すなわち　$2\alpha+3=-7$，$\alpha(\alpha+3)=m$

よって　$\alpha=-5$，$m=-5(-5+3)=10$

また，他の解 $\alpha+3$ は　$\alpha+3=-5+3=-2$

(答) $m=10$，2つの解は -5，-2

2.12 次の問いに答えよ．

(1)　2次方程式 $x^2+3x+k=0$ において，2つの解の差が2であるとき，k の値を求めよ．　(武田薬品工業)

(2) 2 次方程式 $x^2 - mx + m + 2 = 0$ の 1 つの解が他の解の 2 倍であるとき，m の値を求めよ． (JFE ホールディングス)

(3) 2 次方程式 $x^2 + ax + 14 - a = 0$ の解の比が $2 : 3$ であるとき，a の値および解を求めよ． (帝人)

例題 2.4 2 次方程式 $2x^2+px+q=0$ が $\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$ と $\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$ を解にもつとき，p，q の値を求めよ．

【解】 解と係数の関係により

$$\frac{3+\sqrt{7}}{2}+\frac{3-\sqrt{7}}{2}=-\frac{p}{2},\qquad \frac{3+\sqrt{7}}{2}\times\frac{3-\sqrt{7}}{2}=\frac{q}{2}$$

よって　$p=-6$，$q=1$

2.13 次の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が 2 と 5 を解にもつとき，p, q の値を求めよ．

(シチズン時計)

(2) 2 次方程式 $2x^2+ax-b=0$ の 2 つの解が $-3+\sqrt{5}$，$-3-\sqrt{5}$ であるとき，a, b の値を求めよ．

(横河電機)

$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ を解とする 2 次方程式

2 数 α，β を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0}$$

[注意] 2 数の和が p，積が q である 2 数は，方程式 $x^2-px+q=0$ の解である．

例 2.8 2 数 $3+2i$，$3-2i$ を解とする 2 次方程式を作る．

解の和は　$(3+2i)+(3-2i)=6$

解の積は　$(3+2i)(3-2i)=9-4i^2=13$

よって，このような解をもつ 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-6x+13=0$$

2.14 2 と -3 を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ．

(武田薬品工業)

例題 2.5 2次方程式 $x^2-3x+5=0$ の2つの解を α，β とするとき，2数 $\alpha+2$，$\beta+2$ を解とする2次方程式を1つ作れ．

【解】 2次方程式 $x^2-3x+5=0$ の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=3,\ \ \alpha\beta=5$$

ここで　$(\alpha+2)+(\beta+2)=(\alpha+\beta)+4=3+4=7$

$$(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=5+2\cdot3+4=15$$

よって，$\alpha+2$，$\beta+2$ を解とする2次方程式の1つは

$$x^2-7x+15=0$$

2.15 次の問いに答えよ．

(1) $5x^2-2x-4=0$ の2つの解を α，β とするとき，$\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$ を2解とする2次方程式を1つ作れ． (万有製薬)

(2) 2次方程式 $x^2-7x+5=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の2数を解とする2次方程式を1つ作れ． (三菱重工業)

(i) 2α，2β　　(ii) $\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$

(3) $3x^2-4x+5=0$ の2つの解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta$，$\alpha+\beta^2$ を2つの解とする2次方程式を1つ作れ． (積水化学工業)

2.2 高次方程式

2.2.1 剰余の定理と因数定理

剰余の定理

多項式 $P(x)$ を $x-k$ で割った余りは，$P(k)$ に等しい.

[注意] $P(x)$ を $ax+b$ で割った余りは，$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ に等しい.

例 2.9 (1) $P(x)=x^3-2x+3$ を $x-1$ で割った余りは $P(1)$ で

$$P(1)=1^3-2{\cdot}1+3=2$$

(2) $P(x)=2x^3+5x^2+x+4$ を $x+2$ で割った余りは $P(-2)$ で

$$P(-2)=2{\cdot}(-2)^3+5{\cdot}(-2)^2+(-2)+4=6$$

2.16 次の問いに答えよ.

(1) $x^3+5x^2-2x-24$ を $x+3$ で割った余りを求めよ. (ニコン)

(2) x^3-2x^2+2x-1 を $2x-3$ で割った余りを求めよ. (マツダ)

(3) $8x^4-6x^2-7$ を $2x+3$ で割った余りを求めよ. (トヨタ自動車)

例題 2.6 x^3-mx+4 が $x+2$ で割り切れるとき，定数 m の値を求めよ．(NTT)

【解】 $P(x)=x^3-mx+4$ とおくと，$P(-2)=0$ であるから

$(-2)^3-m\cdot(-2)+4=0$ 　　これを解いて　　$m=2$

2.17 次の問いに答えよ．

(1) x^3-x^2-ax+2 を $x+1$ で割ったときの余りが 1 であるとき，定数 a の値を求めよ． (NTT)

(2) $x^3+px^2+11x+6$ を $x-2$ および $x-3$ で割ったときの余りは等しいという．定数 p の値と，そのときの余りを求めよ． (大阪ガス)

(3) $x^4-px^3+px^2-4$ が $x+2$ で割り切れるように，定数 p の値を定めよ．

(住友ゴム工業)

(4) x^3-px^2+2x+4 が $x-p$ で割り切れるように，定数 p の値を定めよ．

(東洋高圧)

例題 2.7 x^3+ax^2+x+b が x^2+x-2 で割り切れるとき，定数 a，b の値を求めよ．

【解】 $P(x)=x^3+ax^2+x+b$ とおく．$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ であるから，$P(x)$ が $(x-1)(x+2)$ で割り切れるための条件は

$$P(1)=0 \quad \text{かつ} \quad P(-2)=0$$

$P(1)=0$ から　$1^3+a\cdot 1^2+1+b=0$

整理すると　$a+b=-2$　$\cdots$①

$P(-2)=0$ から　$(-2)^3+a\cdot(-2)^2+(-2)+b=0$

整理すると　$4a+b=10$　$\cdots$②

①，② を解いて　$a=4$，$b=-6$

2.18 次の問いに答えよ．

(1) x^3+3x^2+ax+b は $x-2$ で割り切れ，$x+3$ で割ると 5 余るという．定数 a，b の値を求めよ．(トヨタ自動車)

(2) x^3+px^2+qx-5 が x^2-1 で割り切れるとき，定数 p，q の値を求めよ．(NHK)

(3) $2x^3+ax^2+bx-18$ が x^2+x-6 で割り切れるとき，定数 a，b の値を求めよ．(武田薬品工業)

例題 2.8 多項式 $P(x)$ を $x-2$, $x+1$ で割った余りがそれぞれ -7, 5 である．$P(x)$ を $(x-2)(x+1)$ で割った余りを求めよ．

【解】 $P(x)$ を 2 次式 $(x-2)(x+1)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$P(x)=(x-2)(x+1)Q(x)+ax+b$$

この等式より　　$P(2)=2a+b$, $P(-1)=-a+b$

また, $x-2$ で割った余りが -7 であるから　$P(2)=-7$
　　$x+1$ で割った余りが 5 であるから　　$P(-1)=5$

よって　　$2a+b=-7$, $-a+b=5$
これを解くと　　$a=-4$, $b=1$
したがって，求める余りは　　$-4x+1$

2.19 次の問いに答えよ．

(1) $x-2$ で割ると 3 余り，$x-5$ で割ると 6 余る多項式がある．この多項式を $(x-2)(x-5)$ で割ると余りはいくらか．　(マツダ)

(2) 整式 $f(x)$ を x^2+2x-3 で割ったときの余りは $2x+1$ であり，$x+2$ で割ったときの余りは 1 であるという．$f(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ．　(トヨタ自動車)

因数定理

多項式 $P(x)$ が 1 次式 $x-k$ を因数にもつ $\iff$ $P(k)=0$

例 2.10 $2x^3+3x^2-5x-6$ の因数分解

$P(x)=2x^3+3x^2-5x-6$ とすると

$$P(-1)=2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-6=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$2x^3+3x^2-5x-6=(x+1)(2x^2+x-6)$$

したがって

$$2x^3+3x^2-5x-6=(x+1)(x+2)(2x-3)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+\ \ x-\ 6 \\ \hline
x+1 & 2x^3+3x^2-5x-6 \\
 & 2x^3+2x^2 \\ \hline
 & \qquad\ \ x^2-5x \\
 & \qquad\ \ x^2+\ x \\ \hline
 & \qquad\quad -6x-6 \\
 & \qquad\quad -6x-6 \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

2.20 次の式を因数分解せよ．

(1) x^3-3x+2 (JFE ホールディングス)

(2) x^3-3x-2 (三菱重工業)

(3) x^3-3x^2+x+1 (日産自動車)

(4) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ (トヨタ自動車)

(5) $x^3 - 2x^2 - 6x + 7$ (シチズン時計)

(6) $x^3 + x^2 - 5x - 6$ (川崎航空)

(7) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (日産自動車)

(8) $x^3 - 4x^2 - 8x + 8$ (九州電力)

(9) $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ (コマツ西日本)

(10) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ (神戸製鋼所)

(11) $3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$ (日立ソフトウェアエンジニアリング)

(12) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ (東陶機器)

2.2.2 高次方程式

例 2.11 次の方程式を解け.

(1) $x^3+8=0$　　(2) $x^4+3x^2-4=0$

(3) $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3=0$

【解】 (1) $x^3+8=0$　から　$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

ゆえに　$x+2=0$　または　$x^2-2x+4=0$

したがって　$x=-2,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$

(2) $x^4+3x^2-4=0$　から　$(x^2-1)(x^2+4)=0$

ゆえに　$x^2-1=0$　または　$x^2+4=0$

したがって　$x=\pm1,\ \pm2i$

(3) $x^2+2x=X$ とおくと　$X^2-2X-3=0$

$(X+1)(X-3)=0$

ゆえに　$(x^2+2x+1)(x^2+2x-3)=0$

$(x+1)^2(x-1)(x+3)=0$

したがって　$x=-1(2\text{ 重解}),\ 1,\ -3$

2.21 次の方程式を解け.

(1) $x^3-1=0$ (太陽日酸)

(2) $x^4-3x^2-4=0$ (名機製作所)

(3) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$ (石川島播磨重工業)

(4) $x^4 + 9 = 10x^2$ (日本毛織)

(5) $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$ (電源開発)

(6) $(x^2 - 3x)^2 - 8(x^2 - 3x) - 20 = 0$ (トヨタ自動車)

(7) $(x + 1)(x + 2)(x - 5)(x - 6) = 44$ (大阪ガス)

例題 2.9 方程式 $x^3+4x^2+3x-2=0$ を解け. (ニチボー)

【解】 $P(x)=x^3+4x^2+3x-2$ とすると

$$P(-2)=(-2)^3+4\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)-2=0$$

よって，$P(x)$ は $x+2$ を因数にもち

$$P(x)=(x+2)(x^2+2x-1)$$

$P(x)=0$ から

$$x+2=0 \quad \text{または} \quad x^2+2x-1=0$$

したがって　　$x=-2,\ -1\pm\sqrt{2}$

2.22 次の方程式を解け.

(1) $x^3-3x+2=0$ (昭和アルミ)

(2) $2x^3-6x^2+4=0$ (東芝)

(3) $x^3-4x^2+5x-2=0$ (小田急電鉄)

(4) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ (東京計器工業)

(5) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ (ニチボー)

(6) $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ (TDK)

(7) $x^3 + x^2 + x + 6 = 0$ (NEC フィールディング)

(8) $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$ (日本毛織)

例題 2.10 x の方程式 $x^3+4x^2+ax+b=0$ が 1 と -3 を解にもつという．
(1) 定数 a，b の値を求めよ．　　(2) 他の解を求めよ．

【解】 (1) 1，-3 がこの方程式の解であるから

$$1^3+4{\cdot}1^2+a{\cdot}1+b=0$$
$$(-3)^3+4{\cdot}(-3)^2+a{\cdot}(-3)+b=0$$

式を整理すると

$$a+b+5=0,\ -3a+b+9=0$$

これを解いて　$a=1$，$b=-6$

(2) (1) より，方程式は

$$x^3+4x^2+x-6=0$$

左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x+3)(x+2)=0$$

したがって，求める他の解は -2

2.23 $x^3-x^2+ax+5=0$ について，次の問いに答えよ．　(トヨタ自動車)

(1) 1つの解が -1 のとき，a の値を求めよ．

(2) (1) のとき，残りの２つの解を求めよ．

2.24 $x^4+x^3+ax+b=0$ の２つの解が $-1,-2$ である．a，b の値を求めよ．また，残りの解を求めよ．　(日立製作所)

3.1 点と直線

3.1.1 直線上の点

直線上の点

1 2 点 A(a)，B(b) 間の距離 AB

$$\mathbf{AB} = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|$$

2 内分点・外分点の座標

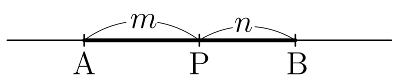
2 点 A(a)，B(b) を結ぶ線分 AB を，$m:n$ に内分する点を P，外分する点を Q とする．

点 P の座標は $\dfrac{\boldsymbol{na} + \boldsymbol{mb}}{\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}}$

点 Q の座標は $\dfrac{-\boldsymbol{na} + \boldsymbol{mb}}{\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}}$

とくに，中点の座標は $\dfrac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}$

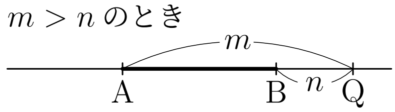
内分



外分

$m < n$ のとき

$m > n$ のとき



例 3.1 次の 2 点間の距離を求めよ．

(1) 原点 O，点 A(5)　　(2) A(4)，B(-3)

【解】 (1) $\mathrm{OA} = |5| = 5$　　(2) $\mathrm{AB} = |-3-4| = |-7| = 7$

3.1 次の 2 点間の距離を求めよ．

(1) 原点 O，A(-3)

(2) A(2)，B(7)

(3) A(6)，B(-4)

例 3.2　2 点 A(1)，B(6) を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ．

(1)　3 : 2 に内分する点 P　　　3 : 4 に外分する点 Q

(3)　中点 M

【解】(1)　点 P の座標は　$\dfrac{2 \times 1 + 3 \times 6}{3+2} = \dfrac{20}{5} = 4$

(2)　点 Q の座標は　$\dfrac{-4 \times 1 + 3 \times 6}{3-4} = \dfrac{14}{-1} = -14$

(3)　中点 M の座標は　$\dfrac{1+6}{2} = \dfrac{7}{2}$

3.2　2 点 A(−2)，B(6) を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ．

(1)　3 : 5 に内分する点 P

(2)　2 : 1 に外分する点 Q

(3)　3 : 7 に外分する点 R

(4)　中点 M

3.1.2 平面上の点

2点間の距離

2点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ 間の距離 AB は

$$\mathbf{AB} = \sqrt{\boldsymbol{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

とくに，原点 O と点 A$(x_1,\ y_1)$ との距離 OA は

$$\mathbf{OA} = \sqrt{\boldsymbol{{x_1}^2 + {y_1}^2}}$$

例 3.3 2点 A$(2, -3)$，B$(5, 1)$ の距離 AB は

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(5-2)^2 + \{1-(-3)\}^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

原点 O と点 A$(-4, -2)$ の距離 OA は

$$\mathrm{OA} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

3.3 次の2点間の距離を求めよ．

(1) A$(7,\ 5)$，B$(4,\ 1)$ (東洋倉庫)

(2) A$(-3,\ 2)$，B$(3, -6)$ (東洋倉庫)

(3) A$(-12,\ 0)$，B$(0,\ 16)$ (武田薬品工業)

(4) A$(8, -7)$，B$(-4, -2)$ (東洋倉庫)

3.4 平面上の3点の座標をそれぞれ A$(5,\ 2)$，B$(-1,\ 3)$，C$(0, -3)$ とするとき，△ABC の3辺の長さを求めよ． (東北電力)

3.5 次の各点を頂点とする $\triangle$ABC はどんな形の三角形か.

(1) A(6, 5), B(5, 0), C(−2, 4) (デンソー)

(2) A(−1, 1), B(1, −1), C(5, 3) (トヨタ自動車)

例題 3.1 2 点 A(3, 1), B(2, 6) から等距離にある y 軸上の点 P の座標を求めよ.

【解】 P は, y 軸上にあるから, P の座標を $(0,\ y)$ とする.
このとき, PA = PB すなわち $\mathrm{PA}^2 = \mathrm{PB}^2$ であるから

$$(3-0)^2 + (1-y)^2 = (2-0)^2 + (6-y)^2$$

整理すると　$10y = 30$　よって　$y = 3$

したがって, 点 P の座標は　$(0,\ 3)$

3.6 2 点 A(2, −1), B(6, 3) から等距離にある x 軸上の点 C の座標を求めよ.

(ダイハツ工業)

内分点・外分点の座標

2点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を，$m:n$ に内分する点を P，外分する点を Q とすると

$$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{nx_1+mx_2}{m+n}},\ \boldsymbol{\frac{ny_1+my_2}{m+n}}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\frac{-nx_1+mx_2}{m-n}},\ \boldsymbol{\frac{-ny_1+my_2}{m-n}}\right)$$

とくに，線分 AB の中点の座標は $\left(\boldsymbol{\frac{x_1+x_2}{2}},\ \boldsymbol{\frac{y_1+y_2}{2}}\right)$

例 3.4　2点 A(8, 7)，B(2, −8) を結ぶ線分 AB について

1 : 2 に内分する点 P の座標は

$$\left(\frac{2\cdot8+1\cdot2}{1+2},\ \frac{2\cdot7+1\cdot(-8)}{1+2}\right)\quad \text{より}\quad (6,2)$$

3 : 2 に外分する点 Q の座標は

$$\left(\frac{-2\cdot8+3\cdot2}{3-2},\ \frac{-2\cdot7+3\cdot(-8)}{3-2}\right)\quad \text{より}\quad (-10,-38)$$

3.7 次の問いに答えよ．

(1) 2点 A(3, 2)，B(8, 5) を結ぶ線分 AB を 3 : 2 に内分および外分する点の座標を求めよ．(京阪電気鉄道)

(2) 2点 A(−4, 0)，B(0, 3) がある．線分 AC の中点が B であるとき，点 C の座標を求めよ．(間組)

(3) 2 点 $\mathrm{A}(-7,\ 0)$，$\mathrm{B}(3, -5)$ を結ぶ線分 AB を $3:2$ に内分する点 C，及び AB 間の距離を求めよ． (日産自動車)

(4) 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$，$\mathrm{B}(5,\ 0)$ について次を求めよ． (日本電気)

(i) AB 間の距離

(ii) 線分 AB を $2:1$ に内分する点の座標

(iii) 線分 AB を $1:4$ に外分する点の座標

3.1.3 直線の方程式

直線の方程式 (1)

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り傾きが m の直線の方程式は

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

例 3.5 点 $(2, -5)$ を通り傾きが 3 の直線の方程式は

$$y - (-5) = 3(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = 3x - 11$$

3.8 次の直線の方程式を求めよ.

(1) 点 $(1, 5)$ を通り，傾きが 3 の直線　(日産ディーゼル)

(2) 点 $(0, -1)$ を通り，傾きが 2 の直線　(日立造船)

(3) 傾きが $\dfrac{1}{2}$ で，点 $(0, 3)$ を通る直線　(愛知製鋼)

(4) 傾きが $-\dfrac{1}{2}$ で，点 $(1, 2)$ を通る直線　(近畿コンクリート工業)

(5) 傾きが $-\dfrac{1}{3}$ で，点 $(1, -5)$ を通る直線　(日本飛行機)

(6) 点 $(5, 2)$ を通り，x 軸の正の向きとなす角が 60° である直線　(富士通)

直線の方程式 (2)

異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

$x_1 \neq x_2$ のとき　$\boldsymbol{y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$

$x_1 = x_2$ のとき　$\boldsymbol{x = x_1}$

例 3.6 2 点 (1, 4)，(2, 7) を通る直線の方程式を求めよ．　(新日本製鐵)

$$y - 4 = \frac{7-4}{2-1}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y = 3x + 1$$

3.9 次の直線の方程式を求めよ．

(1) 2 点 (2, 3)，(5, 0) を通る直線　(日本飛行機)

(2) 2 点 (−2, 5)，(4, 1) を通る直線　(NTT)

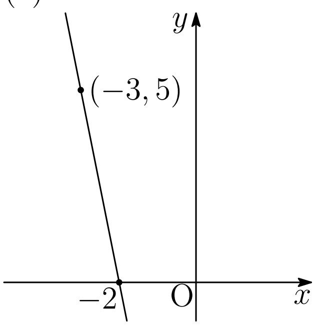
(3) 2 点 (2, 3)，(5, 7) を通る直線　(日本特殊機器)

(4) 2 点 (4, 5), (1, 7) を通る直線 (富士通ヴィエルエスアイ)

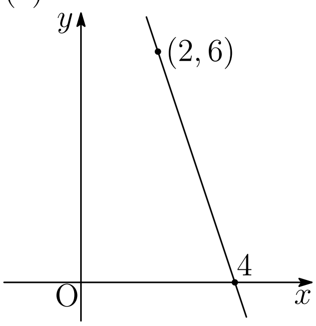
(5) 点 (10, 2) および点 (2, −2) を通る直線 (トプコン)

3.10 次の直線の方程式を求めよ. (愛知製鋼)

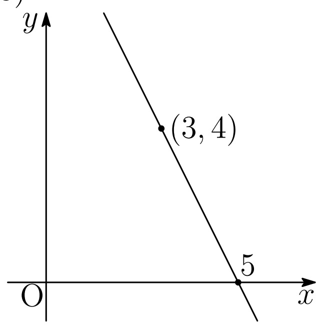
(1)



(2)



(3)



3.1.4　2 直線の関係

2 直線の平行，垂直

異なる 2 直線 $y = m_1x + k_1$，$y = m_2x + k_2$ について

$\boldsymbol{m_1 = m_2} \iff$ **2 直線が平行**

$\boldsymbol{m_1m_2 = -1} \iff$ **2 直線が垂直**

3.11 次の直線のうち平行となるものと，垂直になるものを 2 組ずつあげよ.
(西日本新聞)

(1) $2x = 3y - 5$　(2) $3x + 2y = 5$　(3) $3x - 5y = 8$

(4) $x - 3y = 5$　(5) $6y = 2x + 7$　(6) $y = \dfrac{2}{3}x$

3.12 次の直線の方程式を求めよ.

(1) 点 $(2, -3)$ を通り，直線 $y = 2x + 3$ に平行な直線　(シチズン時計)

(2) 2 点 $\mathrm{A}(-4,\ 2)$，$\mathrm{B}(4, -5)$ を通る直線に平行で $\mathrm{P}(3, 4)$ を通る直線　(カネカ)

(3) 点 $(3,\ 2)$ を通り，直線 $y = 4x - 1$ に垂直な直線　(きんでん)

(4) 点 $(2,\ 2)$ を通り，直線 $x + 4y + 8 = 0$ と直交する直線 (日本道路公団)

(5) 直線 $2x + 3y - 3 = 0$ と垂直に交わり，点 $(4,\ 6)$ を通る直線 (トヨタ自動車)

(6) 点 $(2,\ 5)$ を通り，２点 $(-3, -3),\ (1,\ 5)$ を通る直線に垂直な直線

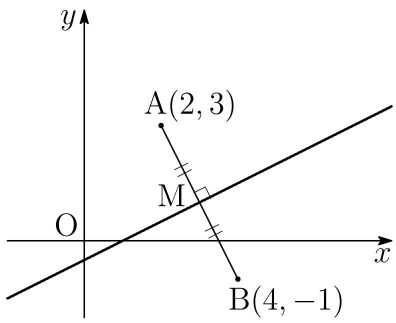
(ノリタケカンパニーリミテド)

3.13 ２直線 $mx - y - 7 = 0,\ (2m - 3)x - y + 5 = 0$ が平行となるような m の値を求めよ．また，垂直に交わるような m の値を求めよ． (トヨタ自動車)

例題 3.2 2点 A$(2,3)$，B$(4,-1)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ．

【解】 線分 AB の中点 M の座標は

$$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{3+(-1)}{2}\right)\quad \text{より}\quad (3,\ 1)$$



線分 AB の傾きは

$$\frac{-1-3}{4-2}=-2$$

線分 AB に垂直な直線の傾き m は

$$-2m=-1\quad \text{ゆえに}\quad m=\frac{1}{2}$$

よって，求める直線の方程式は

$$y-1=\frac{1}{2}(x-3)\quad \text{すなわち}\quad x-2y-1=0$$

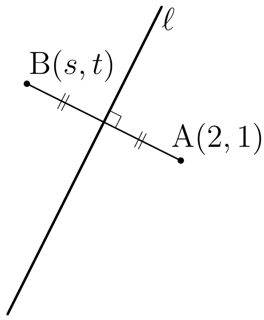
3.14 次の問いに答えよ．

(1) A，B の座標をそれぞれ $(0,\ 2)$，$(4,-1)$ とするとき，線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ．(シチズン時計)

(2) 2点 A$(2,\ 0)$，B$(4,\ 3)$ の垂直二等分線の方程式を求めよ．(NTT)

例題 3.3 直線 $2x-y+2=0$ を ℓ とする．直線 ℓ について点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$ と対称な点 B の座標を求めよ．

【解】 点 B の座標を $(s,\ t)$ とする．



［1］直線 ℓ の傾きは 2，直線 AB の傾きは $\dfrac{t-1}{s-2}$ である．

AB$\perp\ell$ であるから

$$2\cdot\frac{t-1}{s-2}=-1$$

すなわち　$s+2t-4=0$　$\cdots$①

［2］線分 AB の中点 $\left(\dfrac{s+2}{2},\ \dfrac{t+1}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$$2\cdot\frac{s+2}{2}-\frac{t+1}{2}+2=0$$

すなわち　$2s-t+7=0$　$\cdots$②

①，② を連立させた方程式を解くと　　$s=-2,\ t=3$

したがって，点 B の座標は　　$(-2,\ 3)$

3.15 直線 $3x-y+1=0$ を ℓ とする．直線 ℓ について点 $\mathrm{A}(-2,\ 5)$ と対称な点 B の座標を求めよ．

例題 3.4 直線 $(3k+2)x-(4k-1)y+5k-4=0$ は，実数 k の値にかかわらず，定点を通る．この定点の座標を求めよ．

[注意] k の値にかかわらず成り立つ式は，k についての恒等式である．

【解】 直線の方程式を k について整理すると

$$(3x-4y+5)k+(2x+y-4)=0 \quad \cdots ①$$

① が実数 k の値にかかわらず成り立つための条件は

$$3x-4y+5=0, \quad 2x+y-4=0$$

これを解いて　$x=1$，$y=2$
したがって，求める定点の座標は　$(1,\ 2)$

3.16 次の問いに答えよ．

(1) 直線 $kx-y+2(1-k)=0$ が k の値に関係なく定点を通る．この定点の座標を求めよ．　(関西電力)

(2) 直線 $y=mx+(3m+1)$ は，m の値にかかわらず定点を通る．この定点の座標を求めよ．　(トヨタ自動車)

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$\boldsymbol{d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

例 3.7 点 $(2,\ 1)$ と直線 $4x+3y-1=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|4\cdot2+3\cdot1-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|10|}{\sqrt{25}}=\frac{10}{5}=2$$

3.17 次の問いに答えよ.

(1) 原点から直線 $x-4y-5=0$ までの距離を求めよ. (NTT)

(2) 2 点 $(5,\ 3),\ (2,-1)$ を通る直線の原点との距離を求めよ. (NTT)

3.2　円

3.2.1　円の方程式

円の方程式

1　点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

2　原点を中心とする半径 r の円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2=r^2}$$

3.18 次の方程式を求めよ．

(1)　中心が $(1, -2)$ で，半径 3 の円　(富士電機ホールディングス)

(2)　中心 $(1, -2)$，半径 4 の円　(日本電気)

(3)　中心 $(1,\ 2)$ で，半径 $\sqrt{5}$ の円　(トヨタ自動車)

(4) 点 $(3,\ 0)$ を中心とし，原点を通る円 (NHK)

(5) 中心 $(3, -4)$ で，点 $(7, -7)$ を通る円 (トヨタ自動車)

(6) 中心が $(3,\ 4)$ で，y 軸に接する円 (エルモ社)

例題 3.5 2 点 A(3, 4)，B(5, −2) を直径の両端とする円の方程式を求めよ．

【解】 求める円の中心を C，半径を r とする．

C は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{3+5}{2},\ \frac{4+(-2)}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (4,\ 1)$$

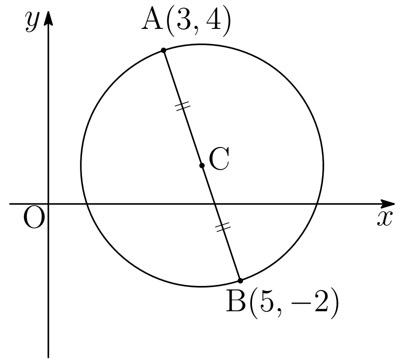
また

$$r = \mathrm{CA} = \sqrt{(3-4)^2+(4-1)^2} = \sqrt{10}$$

この円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-1)^2 = (\sqrt{10})^2$$

すなわち　$(x-4)^2+(y-1)^2 = 10$



3.19 次の円の方程式を求めよ．

(1) 2 点 A(−3, 4)，B(5, 2) を結ぶ線分 AB を直径とする円　(東邦ガス)

(2) 2 点 (3, 1)，(−1, −5) を直径の両端とする円　(マツダ)

(3) 2 点 (2, 3)，(4, −5) を直径の両端とする円　(合同製鐵)

例 3.8 方程式 $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ はどのような図形を表すか.

【解】 方程式を変形すると

$$(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=20+1+4 \qquad \longleftarrow \text{平方完成と同じ}$$

すなわち　$(x+1)^2+(y-2)^2=5^2$

これは，中心が点 $(-1,\ 2)$，半径が 5 の円である．

3.20 次の方程式はどのような図形を表すか.

(1) $x^2+y^2-8x-4y+11=0$ (JFE ホールディングス)

(2) $x^2+y^2+6x-2y-6=0$ (日産自動車)

(3) $x^2+y^2-6x-2y=0$ (東洋高圧)

(4) $x^2+y^2+2x-4y-31=0$ (福岡道路エンジニア)

(5) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$ (デンソー)

(6) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ (東芝)

(7) $x^2 + y^2 + 4x = 0$ (東京急行電鉄)

(8) $x^2 + y^2 = x + y$ (三菱ガス化学)

3.21 円 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ と中心が同じで，点 $(4, -1)$ を通る円の方程式を求めよ． (豊田中央研究所)

例題 3.6 次の 3 点を通る円の方程式を求めよ.

$$\mathrm{A}(-1,\ 7),\ \mathrm{B}(2, -2),\ \mathrm{C}(6,\ 0)$$

【解】 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする.

点 A を通るから　$(-1)^2+7^2-l+7m+n=0$

点 B を通るから　$2^2+(-2)^2+2l-2m+n=0$

点 C を通るから　$6^2+6l+n=0$

整理すると

$$-l+7m+n+50=0$$

$$2l-2m+n+8=0$$

$$6l+n+36=0$$

これを解くと　$l=-4,\ m=-6,\ n=-12$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-4x-6y-12=0$

3.22 次の 3 点を通る円の方程式を求めよ.

(1) $(0,\ 0),\ (3,\ 1),\ (-1,\ 2)$　(安川電機)

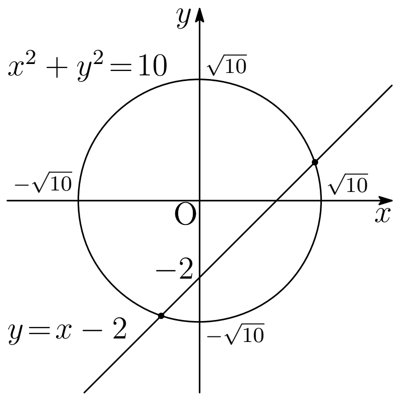
(2) $(3, -5),\ (3,\ 1),\ (4,\ 0)$　(東洋高圧)

3.2.2　円と直線

例題 3.7 円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=x-2$ の共有点の座標を求めよ.

【解】 次の連立方程式を解く.

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots ① \\ y=x-2 & \cdots ② \end{cases}$$



② を ① に代入して

$$x^2+(x-2)^2=10$$

整理すると　　$x^2-2x-3=0$

これを解くと　　$x=-1,\ 3$

② に代入して

$x=-1$ のとき　$y=-3$, $x=3$ のとき　$y=1$

よって, 共有点の座標は　　$(-1,-3)$, $(3,\ 1)$

3.23 次の問いに答えよ.

(1) 円 $x^2+y^2=25$ と直線 $2x+y=10$ の交点の座標を求めよ.　　(京阪電気鉄道)

(2) 次の 2 つの図形の交点を結ぶ線分の長さを求めよ.　　(沖電気工業)

$$x^2+y^2=25,\ 2x-y=5$$

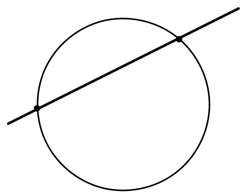
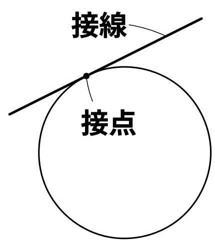
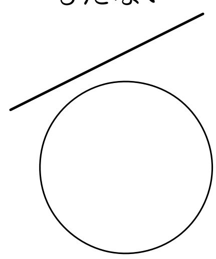
(3) 直線 $x+2y=1$ が，原点を中心とする半径 1 の円によって切りとられる線分の長さを求めよ． (石川島播磨重工業)

(4) 直線 $x+2y=2$ が円 $x^2+y^2=1$ によって切りとられる弦の中点の座標を求めよ． (トヨタ自動車)

(5) 円 $(x-1)^2+(y-2)^2=8$ と直線 $x+y=3$ が交わってできる弦の中点の座標を求めよ． (日立製作所)

円と直線の位置関係 (1)

円の方程式と直線の方程式から y を消去して，x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が得られるとき，その判別式を $D=b^2-4ac$ とする．このとき，円と直線の位置関係は，次のようになる．

D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	異なる 2 つの実数解	重解 (ただ 1 つ)	なし
円と直線の位置関係	異なる 2 点で交わる 	接する 	共有点をもたない 
共有点の個数	2 個	1 個	0 個

例題 3.8 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=mx+5$ が接するとき，定数 m の値を求めよ．

【解】 $x^2+y^2=5$ と $y=mx+5$ から y を消去して整理すると

$$(m^2+1)x^2+10mx+20=0$$

判別式は　　$D=(10m)^2-4\cdot(m^2+1)\cdot 20=20(m^2-4)$

この円と直線が接するのは，$D=0$ のときである．

よって，$m^2-4=0$ を解いて　$m=\pm 2$

3.24 次の問いに答えよ．

(1) 円 $x^2+y^2=4$ に接し，x 軸の正の向きと 60° の角をつくる直線の方程式を求めよ．　(NEC フィールディング)

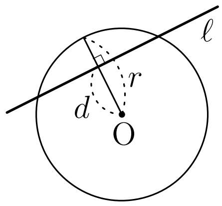
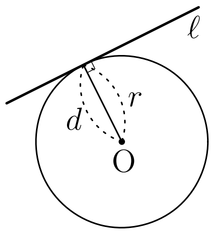
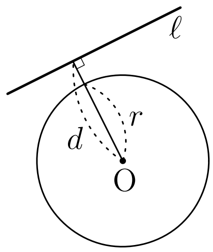
(2) 原点から円 $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ に引いた接線のうち，傾きが正である方程式を求めよ． (トヨタ自動車)

(3) 原点から円 $x^2+y^2-10x-2y+18=0$ に引いた接線の方程式を求めよ．

(トヨタ自動車)

円と直線の位置関係 (2)

点 O を中心とする半径 r の円と直線 ℓ の位置関係は，円の中心 O と直線 ℓ の距離を d とするとき，次のようになる．

d と r の大小	$d < r$	$d = r$	$d > r$
円と直線の位置関係	異なる 2 点で交わる 	接する 	共有点をもたない 

例題 3.9 円 $x^2 + y^2 = 9$ と直線 $4x + 3y + k = 0$ が接するとき，k の値を求めよ．

【解】 円の中心は原点であり，半径 r は 3

原点と直線 $4x + 3y + k = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|4\cdot 0 + 3\cdot 0 + k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|k|}{5}$$

円と直線が接するのは $d = r$ のときである．

よって，$\dfrac{|k|}{5} = 3$ を解いて　$k = \pm 15$

3.25 次の問いに答えよ．

(1) 直線 $3x + 4y = a$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ が接するような a の値を求めよ．

(帝国石油)

(2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $x - 2y = c$ が 2 点で交わるような c の値の範囲を求めよ．

(トヨタ自動車)

円上の点における接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{ax+by=r^2}$$

例題 3.10 点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ.

【解】 接点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，P は円上にあるから

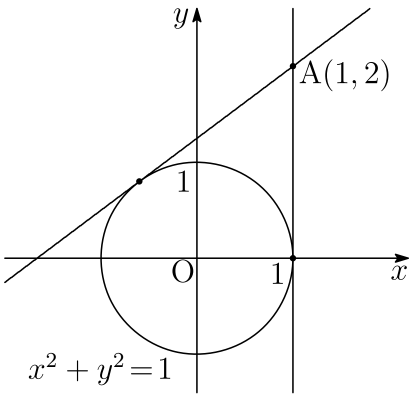
$$a^2+b^2=1\cdots①$$

また，P における円の接線の方程式は

$$ax+by=1$$

で，この直線が点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通るから

$$a+2b=1\cdots②$$



①，② から a を消去して整理すると

$$5b^2-4b=0$$

これを解くと　　$b=0,\ \dfrac{4}{5}$

② に代入して

$$b=0 \text{ のとき}\quad a=1,\qquad b=\frac{4}{5} \text{ のとき}\quad a=-\frac{3}{5}$$

よって，接点の座標と接線の方程式は，次のようになる.

点 $(1,\ 0)$　　における接線は　$1\cdot x+0\cdot y=1$　すなわち　$x=1$

点 $\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ における接線は　$-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y=1$　すなわち　$-3x+4y=5$

3.26 次の問いに答えよ．

(1) 点 $(3,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=5$ に接する直線の方程式を求めよ．

(新日本製鐵)

(2) 点 $(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ．

(ブラザー工業)

3.3　軌跡と領域

3.3.1　軌跡と方程式

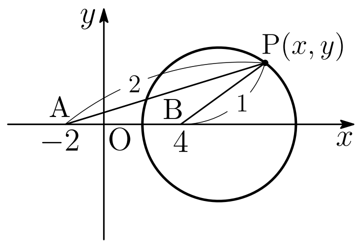
軌跡の求め方

1　条件を満たす点 P の座標を $(x,\ y)$ として，P に関する条件を x，y の方程式で表し，この式が表す図形を調べる．

2　**1** で求めた図形上のすべての点 P が，与えられた条件を満たすことを確かめる．

例題 3.11　2 点 A$(-2,\ 0)$，B$(4,\ 0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めよ．

【解】 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．



P に関する条件は

$$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = 2 : 1$$

これより　$2\mathrm{BP} = \mathrm{AP}$

すなわち　$4\mathrm{BP}^2 = \mathrm{AP}^2$

$$\mathrm{AP}^2 = (x+2)^2+y^2,\quad \mathrm{BP}^2 = (x-4)^2+y^2$$

を代入すると　$4\{(x-4)^2+y^2\} = (x+2)^2+y^2$

整理すると　$x^2-12x+y^2+20=0$

すなわち　$(x-6)^2+y^2=4^2$

よって，点 P は円 $(x-6)^2+y^2=4^2$ 上にある．

逆に，この円上のすべての点 P$(x,\ y)$ は，条件を満たす．

したがって，求める軌跡は，点 $(6,\ 0)$ を中心とする半径 4 の円である．

3.27 原点 O からの距離と点 A$(5,\ 0)$ からの距離の比が $3:2$ である点 P の軌跡を求めよ．

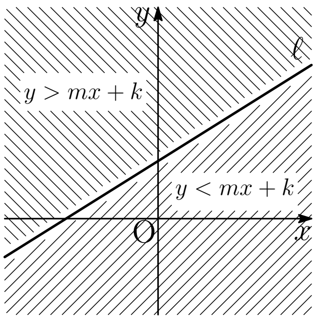
3.3.2　不等式の表す領域

直線と領域

直線 $y = mx + k$ を ℓ とする.

1　$y > mx + k$ の表す領域は，直線 ℓ の上側

2　$y < mx + k$ の表す領域は，直線 ℓ の下側

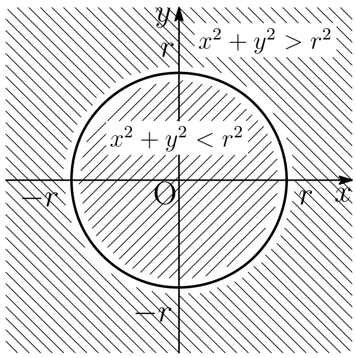


[注意] $y \geqq mx + k$ や $y \leqq mx + k$ の表す領域は，直線 ℓ を含む.

円と領域

1　$x^2 + y^2 < r^2$ の表す領域は，
円 $x^2 + y^2 = r^2$ の**内部**.

2　$x^2 + y^2 > r^2$ の表す領域は，
円 $x^2 + y^2 = r^2$ の**外部**



[注意] $x^2 + y^2 \leqq r^2$ や $x^2 + y^2 \geqq r^2$ の表す領域は，円 $x^2 + y^2 = r^2$ を含む.

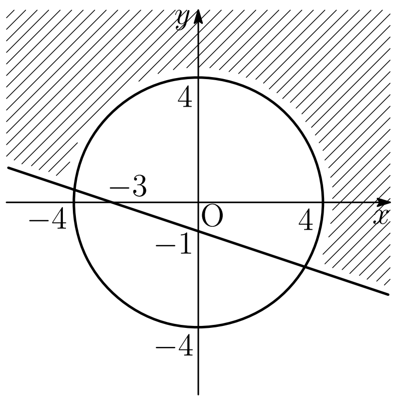
例題 3.12 次の連立不等式表す領域を図示せよ.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 16 \\ x + 3y + 3 > 0 \end{cases}$$

【解】 この領域は

円 $x^2 + y^2 = 16$ の外部と
直線 $y = -\dfrac{1}{3}x - 1$ の上側

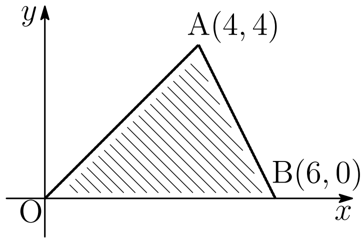
の共通する部分である．すなわち，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない.



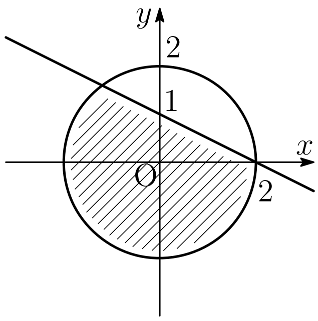
3.28 次の問いに答えよ．

(1) 次の斜線部を不等式で表せ．ただし，境界線は含まないものとする．

(東洋紡績)

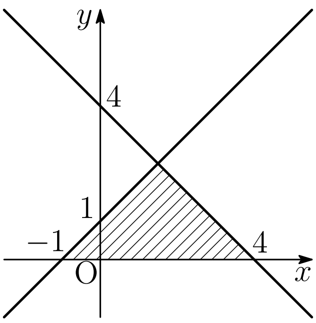


(2) 右の斜線部分を不等式を用いて表せ．ただし，境界線は含まない．　(マツダ)

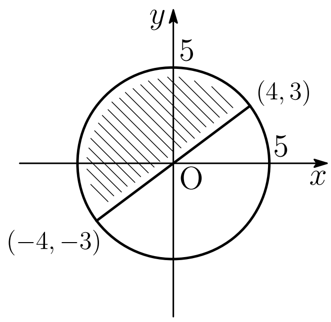


(3) 次の斜線をつけた部分を不等式で表せ．　(コスモ石油)

(i)　境界線を含む



(ii)　境界線を含まない

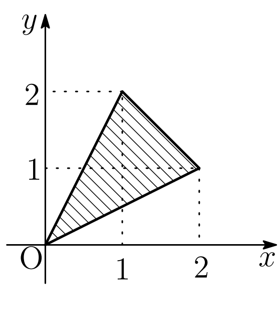


(4) 右図の斜線で示された領域について，次の問いに答えよ．ただし，境界を含む．

(トヨタ車体)

(i) 連立不等式で表せ．

(ii) 面積を求めよ．



3.29 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

(1) $\begin{cases} x < 4 \\ 2y - x < 2 \\ 4x + 3y > 12 \end{cases}$ (新日本石油)

(2) $\begin{cases} y \leqq x \\ x - 2y \leqq 2 \\ x + 2y \leqq 4 \end{cases}$ (JFE ホールディングス)

(3) $1 < x^2 + y^2 < 4$ (葵精機)

(4) $\begin{cases} y \geqq x^2 \\ y \leqq x+2 \end{cases}$ (九州電力)

(5) $\begin{cases} y \geqq x^2-2x-3 \\ y \leqq x-3 \end{cases}$ (いすゞ自動車)

(6) $\begin{cases} y \geqq x^2-2x \\ y \leqq -x^2+4x \end{cases}$ (いすゞ自動車)

例題 3.13 次の不等式の表す領域を図示せよ．

$$(x+y)(3x-y-1)>0$$

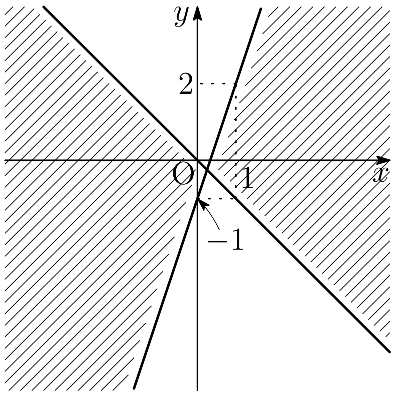
【解】 不等式 $(x+y)(3x-y-1)>0$ は

$$\begin{cases} x+y>0 \\ 3x-y-1>0 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} x+y<0 \\ 3x-y-1<0 \end{cases}$$

が成り立つことと同じである．
よって，求める領域は右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．



3.30 次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1) $(y-x^2)(y-x-2)<0$ (ダイハツ工業)

(2) $(x^2+y^2-4)(x+y)<0$ (トプコン)

(3) $(x^2+y^2-4)(x^2-y)>0$ (安川電機)

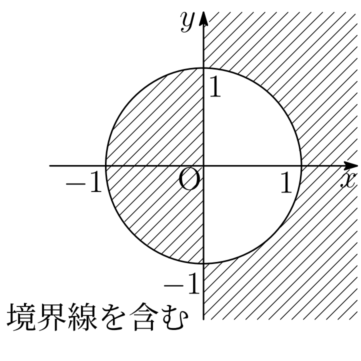
3.31 次の図の斜線部分に含まれる点 (x,y) は，次のうちどの条件を満足するものといえるか．次のア～エから１つ選び，記号で答えよ． (トヨタ自動車)

ア．$x \geqq 0$ かつ $x^2+y^2 \leqq 1$

イ．$x \geqq 0$ または $x^2+y^2 \leqq 1$

ウ．$(x \geqq 0$ または $x^2+y^2 \geqq 1)$ かつ
$(x \leqq 0$ または $x^2+y^2 \leqq 1)$

エ．$x(x^2+y^2-1) \geqq 0$



例題 3.14 x，y が 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad x + 3y \leqq 5,\quad 3x + 2y \leqq 8$$

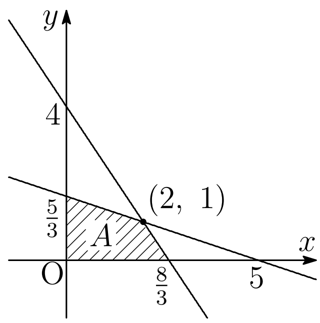
を同時に満たすとき，$x + y$ の最大値，最小値を求めよ．

【解】 与えられた連立不等式の表す領域を A とする．

領域 A は 4 点

$$(0,0),\quad \left(\frac{8}{3},\ 0\right),\quad (2,\ 1),\quad \left(0,\ \frac{5}{3}\right)$$

を頂点とする四角形の周および内部である．



$$x + y = k \quad \cdots ①$$

とおいて，直線 ① が領域 A の点を通るときの k の値を調べる．

$(0,0)$ を通るとき　$k = 0$，　$\left(\frac{8}{3},\ 0\right)$ を通るとき　$k = \frac{8}{3}$

$(2,1)$ を通るとき　$k = 3$，　$\left(0,\ \frac{5}{3}\right)$ を通るとき　$k = \frac{5}{3}$

これ以外で領域 A の点を通るとき　$0 < k < 3$

したがって，$x + y$ は

$x = 2$，$y = 1$ のとき最大値 3 をとり，

$x = 0$，$y = 0$ のとき最小値 0 をとる．

3.32 x，y が 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad 3x + y \leqq 9,\quad x + 2y \leqq 8$$

を同時に満たすとき，$x + y$ の最大値，最小値を求めよ．

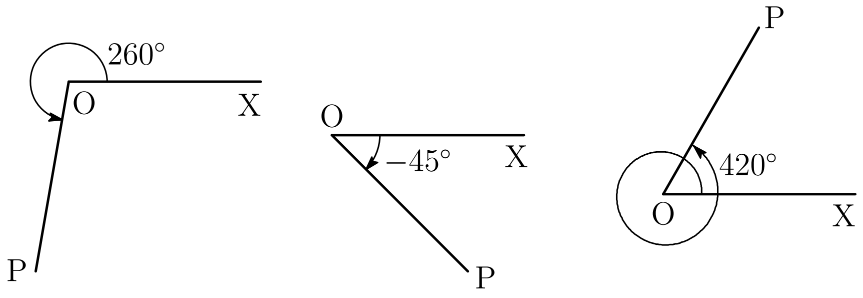
4.1 三角関数

4.1.1 角の拡張

θ の動径

一般角 θ に対して，始線 OX から角 θ だけ回転した位置にある動径 OP を，**θ 動径**という.

例 4.1 260°，−45°，420° の動径



4.1 次の角の動径を図示せよ.

(1) 225°

(2) −270°

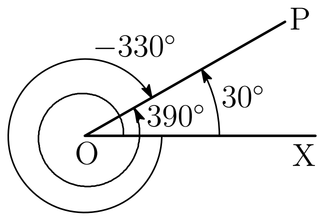
(3) 660°

動径の表す角

動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると，動径 OP の表す角は $\boldsymbol{\alpha + 360^\circ \times n}$ である.

例 4.2 330°，390°，690°，-30°，-330°，-690° のうち，その動径が 30° の動径と同じ位置にある角はどれか.

【解】
$$390^\circ = 30^\circ + 360^\circ,$$
$$-330^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times (-1)$$
$$-690^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times (-2)$$



したがって，求める角は　390°，-330°，-690°

4.2 480°，840°，-240°，-480°，-840° のうち，その動径が 120° と同じ位置にある角はどれか,

弧度法

$$\mathbf{1}\ \textbf{ラジアンは}\ \left(\frac{\mathbf{180}}{\boldsymbol{\pi}}\right)^{\circ}, \qquad \mathbf{180^\circ}\ \textbf{は}\ \boldsymbol{\pi}\ \textbf{ラジアン}$$

例 4.3　135° を弧度法で表せ.

【解】　$\dfrac{\pi}{180} \times 135 = \dfrac{3}{4}\pi$

4.3 次の角を，弧度は度数に，度数は弧度に書き直せ.

(1) 15°　　(2) -60°　　(3) $\dfrac{8}{5}\pi$　　(4) $\dfrac{5}{12}\pi$

弧度法を用いると，扇形について，次のことが成り立つ.

扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ(ラジアン) の扇形の弧の長さ l，面積 S は

$$\boldsymbol{l = r\theta}, \qquad \boldsymbol{S = \frac{1}{2}r^2\theta} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{S = \frac{1}{2}lr}$$

例 4.4 半径 8，中心角 $\dfrac{\pi}{4}$ の扇形の弧の長さと面積を求めよ.

【解】 弧の長さは　$8 \times \dfrac{\pi}{4} = 2\pi$　　面積は　$\dfrac{1}{2} \times 8^2 \times \dfrac{\pi}{4} = 8\pi$

4.4 次のような扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ.

(1) 半径 8，中心角 $\dfrac{\pi}{8}$　　(2) 半径 10，中心角 $\dfrac{2}{5}\pi$

4.1.2　三角関数とそのグラフ

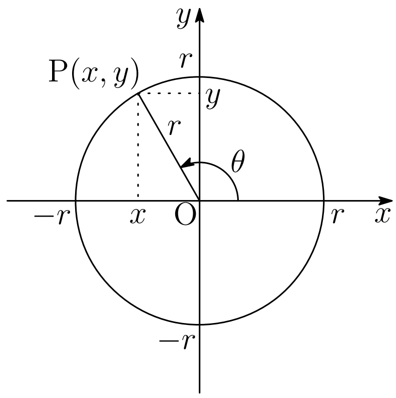
三角関数の定義

右の図のように，角 θ の動径と原点を中心とする半径 r の円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とするとき

$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{y}{r}} \quad \textbf{(正弦)}$$

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{x}{r}} \quad \textbf{(余弦)}$$

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{y}{x}} \quad \textbf{(正弦)}$$



例 4.5 $-\dfrac{\pi}{3}$ の正弦，余弦，正接の値を求めよ.

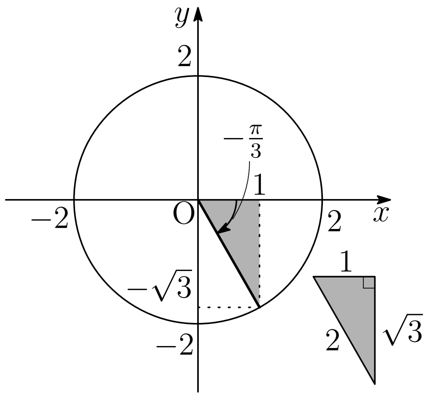
【解】 $r = 2$ のとき，

$x = 1$，$y = -\sqrt{3}$ であるから

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$



4.5 次の三角関数の値を求めよ.

(1)　$\tan 210^\circ$　(安川電機)

(2)　$\sin(-120^\circ)$　(安川電機)

(3) $\cos 960^\circ$ (NTT)

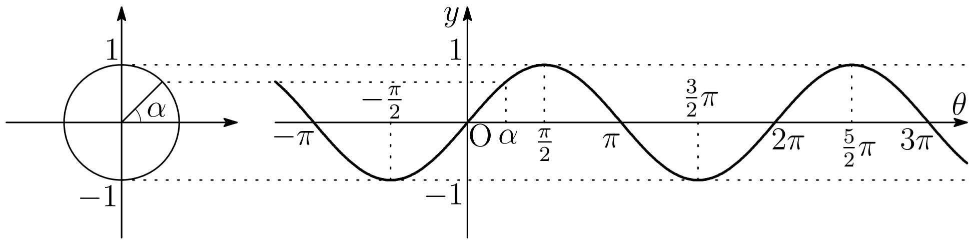
(4) $\cos(-270^\circ)$ (豊田工機)

(5) $\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{5}{6}\pi$ (大和ハウス工業)

(6) $-\sin 45^\circ\cos(-300^\circ)+\sin 510^\circ\cos 405^\circ$ (九州電力)

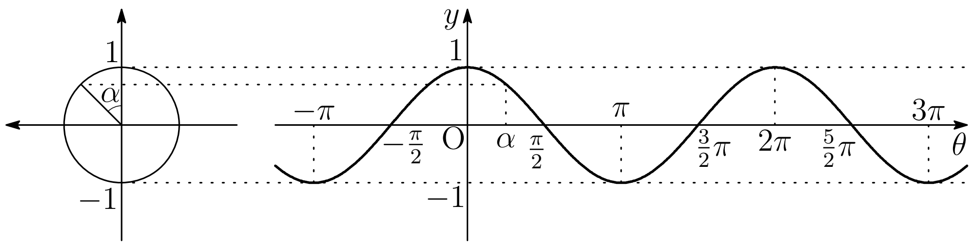
$y = \sin\theta$ のグラフ

2π を周期とする関数で，原点について対称．関数の値域は　$-1 \leqq y \leqq 1$



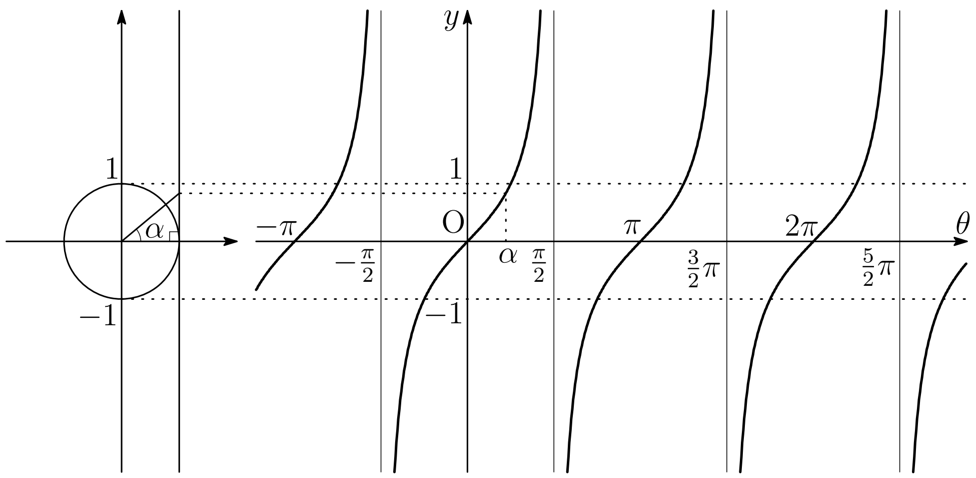
$y = \cos\theta$ のグラフ

2π を周期とする関数で，y 軸について対称．関数の値域は　$-1 \leqq y \leqq 1$

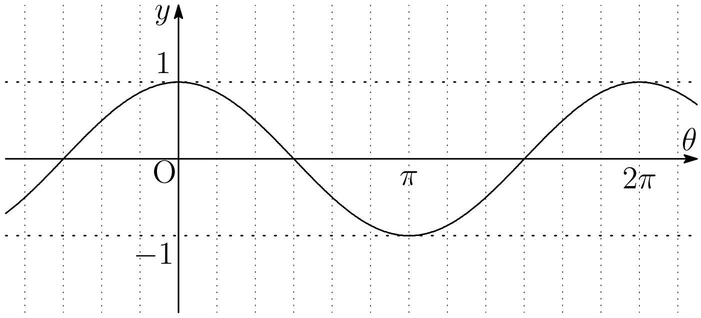


$y = \tan\theta$ のグラフ

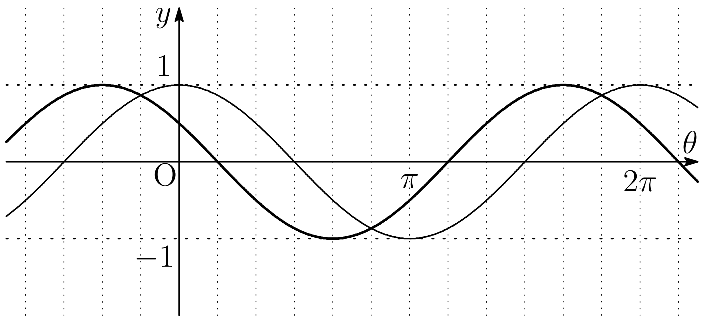
π を周期とする関数で，原点について対称．関数の値域は　実数全体．
また，直線 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$，$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ などを漸近線としてもつ．



例 4.6 $y = \cos\theta$ のグラフをもとに $y = \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ.



【解】 $y = \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは $y = \cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので，次のようになる.



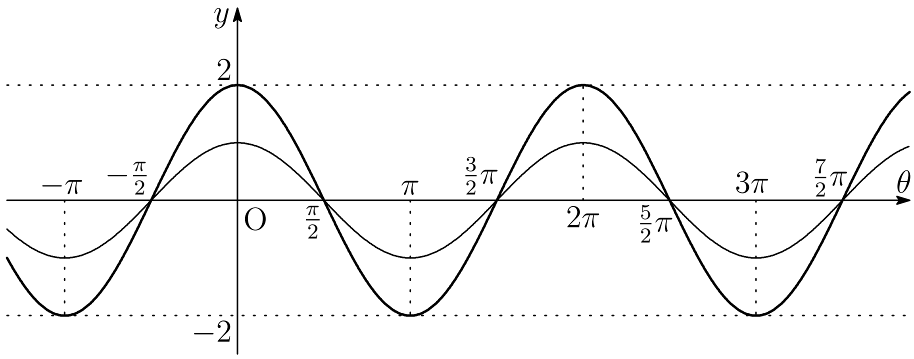
4.6 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフをかけ. (葵精機)

(2) 関数 $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフをかけ. (オークマ)

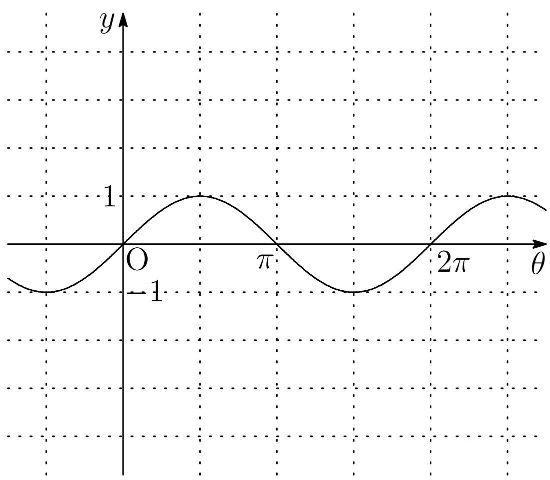
例 4.7 $y = 2\cos\theta$ のグラフをかけ.

【解】 $y = \cos\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向へ 2 倍に拡大したものである．周期は 2π である．

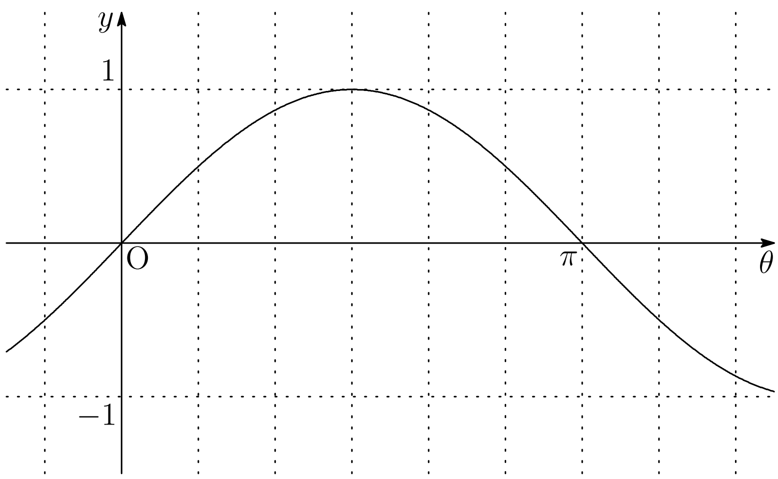


4.7 $y = \sin\theta$ のグラフをもとに次のグラフかけ．また，その周期を求めよ．

(1) $y = 3\sin\theta$



(2) $y = \sin 3\theta$



4.1.3 三角関数の性質

三角比と同様に，三角関数についても次の相互関係が成り立つ．

三角関数の相互関係

1 $\boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$ **3** $\boldsymbol{1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

2 $\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

例題 4.1 θ の動径が第 4 象限にあり，$\sin\theta = -\dfrac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．

【解】 $$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

θ の動径が第 4 象限にあるとき，$\cos\theta > 0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

また $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\dfrac{4}{5}\right) \div \dfrac{3}{5} = -\dfrac{4}{3}$

4.8 次の問いに答えよ．

(1) θ が第 4 象限の角で $\cos\theta = \dfrac{12}{13}$ のとき $\sin\theta$ の値を求めよ． (NTT)

(2) θ が第 3 象限の角で $\cos\theta = -\dfrac{3}{4}$ のとき $\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．(九州電力)

(3) θ が第 2 象限の角であって $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ であるとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(那須電機鉄工)

(4) θ が第 3 象限の角で $\sin\theta = -\dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(富士重工業)

4.1.4 三角関数についての方程式・不等式

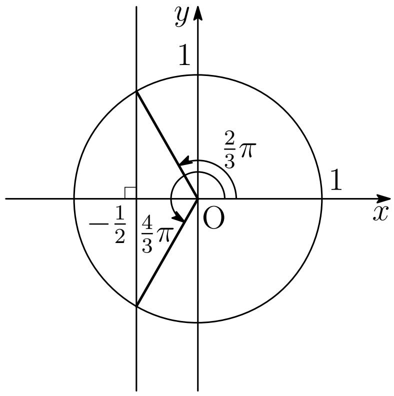
例題 4.2 次の方程式を解け.

(1) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$　　　(2) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

【解】 (1) 求める角 θ の動径と単位円の交点の x 座標は $-\dfrac{1}{2}$ である.

よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$



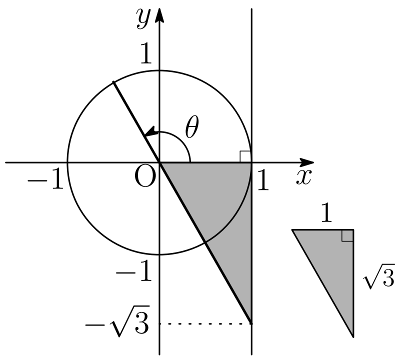
(2) 求める角 θ の動径の延長と直線 $x = 1$ の交点の y 座標は $-\sqrt{3}$ である.

よって，$0 \leqq \theta < \pi$ の範囲では

$$\theta = \frac{2}{3}\pi$$

したがって，方程式の解は

$$\theta = \frac{2}{3}\pi + n\pi \quad (n \text{ は整数})$$



[注意] 方程式 $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ の解は

$$\theta = \frac{2}{3}\pi + 2n\pi,\ \theta = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

4.9 次の方程式を解け.

(1) $\sin x = \dfrac{1}{2} \quad (0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ)$ (シチズン時計)

(2) $\sqrt{3} - 3\tan x = 0 \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ (日本電気)

(3) $\tan(x - 10^\circ) = \sqrt{3} \quad (0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ)$ (シチズン時計)

(4) $\cos 2x = \dfrac{1}{2} \quad (0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ)$ (トヨタ車体)

例題 4.3 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．

$$2\sin^2\theta + 5\cos\theta + 1 = 0$$

【解】 方程式を変形すると　$2(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta + 1 = 0$

整理して　$2\cos^2\theta - 5\cos\theta - 3 = 0$

因数分解すると　$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 3) = 0$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから　$2\cos\theta + 1 = 0$　$\longleftarrow \cos\theta - 3 < 0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ を解くと　$\longleftarrow$ 例題 4.2 参照

$$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

4.10 次の方程式を解け．

(1) $2\sin^2 x - \sin x = 0 \quad (0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ)$　(日本スピンドル製造)

(2) $2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$　(日本自動車機械工具協会)

(3) $\cos\theta + \sin^2\theta = -1 \quad (0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$　(九州電力)

(4) $\cos^2\theta + 2\sin\theta + 2 = 0 \quad (0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$ (日本設備工業)

(5) $2\cos^2 x + \sin x = 1 \quad (0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ)$ (九州電力)

(6) $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0 \quad (0^\circ \leqq x < 360^\circ)$ (東京ガス)

(7) $2\sin^2\theta + 5\cos\theta - 4 = 0 \quad (0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$ (九州電力)

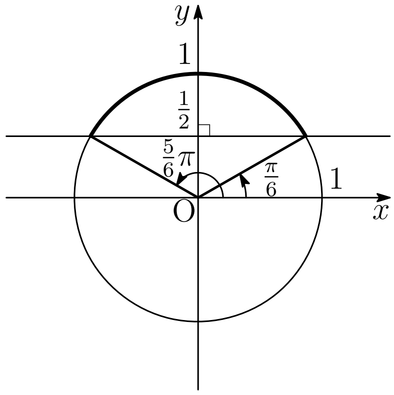
例題 4.4 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin\theta > \dfrac{1}{2}$ を解け.

【解】 $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ となる θ は

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

よって，不等式の解は，右の図から，

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$



4.11 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，不等式 $\cos x > -\dfrac{1}{2}$ を解け. (日本電気)

4.12 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，次の方程式と不等式を解け. (NEC フィールディング)

(1) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$　　(2) $2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0$

4.13 関数 $y = 4\cos^2\theta + 2\sin\theta - 3$ の最大値・最小値を求めよ. (九州電力)

4.2 加法定理

4.2.1 三角関数の加法定理

正弦・余弦の加法定理

1 $\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

2 $\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$

3 $\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

4 $\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$

例 4.8 加法定理を用いて，$\cos 15^\circ$ の値を求めよ．

【解】
$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ)\\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

4.14 次の値を求めよ．

(1) $\sin 75^\circ$ (栗本鐵工所)

(2) $\cos 75^\circ$ (トクヤマ)

(3) $\sin 15^\circ$ (三菱電機)

(4) $\sin 165^\circ$ (キヤノン)

(5) $\sin 15^\circ + \cos 45^\circ$ (日本特殊機器)

(6) $\cos 75^\circ \sin 15^\circ$ (日本電気)

正接の加法定理

5 $$\boldsymbol{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$$

6 $$\boldsymbol{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$

例 4.9 加法定理を用いて，$\tan 15^\circ$ の値を求めよ.

【解】 $$\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

4.15 $\tan 75^\circ$ の値を求めよ. (飯沼コンサルタント)

例題 4.5 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ で, $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ のとき, $\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ.

【解】 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ であるから, $\sin\alpha>0$, $\cos\beta<0$

ゆえに $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

したがって $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$$

4.16 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ のとき, $\cos(\alpha-\beta)$ を求めよ. ただし, $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $90^\circ<\beta<180^\circ$ とする. (安川電機)

4.17 次の問いに答えよ. (ヤンマー)

(1) $\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$ を証明せよ.

(2) (1) を利用して $\sin 75^\circ \times \cos 15^\circ$ を計算せよ.

4.18 次の等式を証明せよ.

(1) $\sin(45^\circ+\alpha)+\sin(45^\circ-\alpha)=\sqrt{2}\cos\alpha$ (マツダ)

(2) $\sin^2 A-\sin^2 B=\sin(A+B)\sin(A-B)$ (トヨタ自動車)

4.19 $\triangle$ABC がある．$\angle\mathrm{B} = 45^\circ$，$\angle\mathrm{C} = 60^\circ$，$\mathrm{BC} = 10\sqrt{2}$ であるとき，AB の長さを求めよ． (電源開発)

4.20 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解を $\tan\alpha$，$\tan\beta$ とするとき，$\tan(\alpha + \beta)$ の値を p，q を用いて表せ． (佐世保重工業)

4.2.2 加法定理の応用

正弦・余弦の 2 倍角の公式

1 $\quad \boldsymbol{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

2 $\quad \begin{cases} \boldsymbol{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \\ \boldsymbol{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha} \\ \boldsymbol{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1} \end{cases}$

$\longleftarrow$ $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$
$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$
を代入している.

例題 4.6 等式 $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin 2\alpha$ が成り立つことを証明せよ.

[証明] 左辺 $= \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha$

$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$

2 倍角の公式により

$$1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + \sin 2\alpha$$

よって $\quad (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$

[証終]

4.21 等式 $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tan\alpha$ が成り立つことを証明せよ. (マツダ)

4.22 次の問いに答えよ.

(1) $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき $\sin 2\theta$ の値を求めよ. ただし, θ は鋭角とする.

(日本道路公団)

(2) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき $\sin 2\theta$ の値を求めよ. (日産自動車)

正弦・余弦の半角の公式

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

例 4.10 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で，$\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ.

【解】

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \qquad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$ であるから

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

4.23 $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$ で，$\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ.

正接の 2 倍角，半角の公式

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}, \qquad \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

例 4.11 $\tan\alpha = 3$ のとき，$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2\cdot 3}{1-3^2} = -\dfrac{3}{4}$

4.24 次の値を求めよ.

(1) $\tan\alpha = 2$ のとき，$\tan 2\alpha$ の値

(2) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ のとき，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$ の値

例題 4.7 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\cos 2\theta + 2\sin\theta = 1$ を解け.

【解】 左辺を変形すると　$(1 - 2\sin^2\theta) + 2\sin\theta = 1$

整理すると　$\sin\theta(\sin\theta - 1) = 0$

よって　$\sin\theta = 0$　または　$\sin\theta - 1 = 0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$\sin\theta = 0$ から　$\theta = 0,\ \pi$

$\sin\theta = 1$ から　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

したがって　$\theta = 0,\ \pi,\ \dfrac{\pi}{2}$

4.25 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $3\sin x - \cos 2x = 1$ を解け.　(日本無線)

4.26 関数 $y = 2\sin x + \cos 2x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ の最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ.　(本州四国連絡橋公団)

$\boldsymbol{a\sin\theta + b\cos\theta}$ の変形

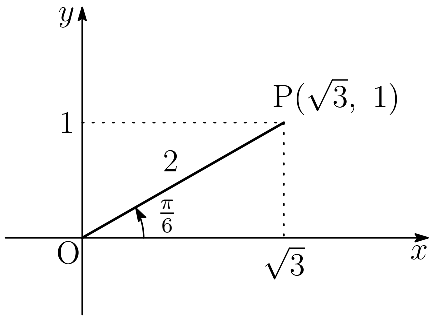
$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

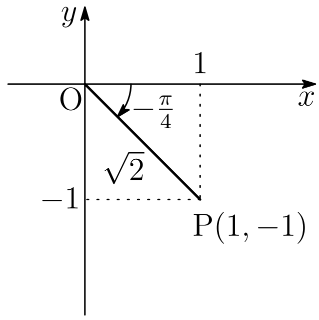
ただし　$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

例 4.12 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ．ただし，$-\pi < \alpha < \pi$ とする．

(1) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$　　　(2) $\sin\theta - \cos\theta$

【解】 (1) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2) $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$





例題 4.8 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$$

【解】 左辺を変形すると　$2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$

よって　$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\cdots$①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{3} \leqq x + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}\pi \quad \text{または} \quad x + \frac{\pi}{3} = \frac{9}{4}\pi$$

したがって　$x = \dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi$

4.27 次の方程式を解け.

(1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3} \quad (0^\circ \leqq x < 360^\circ)$ (東芝)

(2) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2 \quad (0^\circ < \theta < 180^\circ)$ (九州電力)

(3) $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = 1 \quad (0^\circ \leqq \theta < 2\pi)$ (小松製作所)

4.28 関数 $y = \cos 2x - \sin 2x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ の最大値・最小値を求めよ.

(日本無線)

5.1　指数関数

5.1.1　指数の拡張

a^0，a^{-n} の定義

$a \neq 0$ で，n を正の整数とするとき

$$\boldsymbol{a^0 = 1}, \qquad \boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \qquad \text{とくに} \quad \boldsymbol{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

例 5.1　$3^0 = 1$,　　$5^{-1} = \dfrac{1}{5}$,　　$10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100}$

5.1 次の値を求めよ.

(1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$　(三菱重工業)

(2) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$　(日本ガイシ)

指数法則 (指数が整数)

$a \neq 0$, $b \neq 0$, m, n を整数とする.

1　$\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$　　**2**　$\boldsymbol{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

3　$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$　　**4**　$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$

例 5.2　$3^6 \times 3^{-4} = 3^{6+(-4)} = 3^2 = 9$,　　$(2^{-1})^{-3} = 2^{(-1)\times(-3)} = 2^3 = 8$

5.2 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{(3^{-2})^3}{3^{-4}} \times 3^3$　(豊田中央研究所)

(2) $(x^{-1}y)^{-5} \div x^2y^{-3}$　(JFE ホールディングス)

累乗根の性質

$a > 0$, $b > 0$ で, m, n を整数とする.

1 $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}}$ **2** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$

3 $\boldsymbol{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$ **4** $\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$

例 5.3 $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5 \times 25} = \sqrt[3]{5^3} = 5$, $(\sqrt[12]{5})^3 = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{5^3}} = \sqrt[4]{5}$

5.3 次の計算をせよ.

(1) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^3$ (九州電力)

(2) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}\right)^{-1}$ (九州電力)

有理数の指数

$a > 0$ で, m, n を正の整数, r を正の有理数とするとき

$$\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}}$$

例 5.4 $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$, $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$, $8^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

5.4 $a^{1.5}$ を根号を用いて表せ. (九州電力)

5.5 次の計算をせよ.

(1) $27^{-\frac{2}{3}}$ (NTT)

(2) $125^{-\frac{4}{3}}$ (東芝機械)

(3) $25^{-1.5}$ (日本テレビ)

(4) $\left(\dfrac{25}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ (ダイハツ工業)

5.6 $25^{-1.5}$, $81^{-\frac{5}{4}}$ の大小をいえ. (九州電力)

指数法則 (指数が有理数)

$a>0,\ b>0,\ r,\ s$ を有理数とする．

1 $\boldsymbol{a^r \times a^s = a^{r+s}}$　　**2** $\boldsymbol{\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}}$

3 $\boldsymbol{(a^r)^s = a^{rs}}$　　**4** $\boldsymbol{(ab)^r = a^r b^r}$

例題 5.1 次の計算をせよ．

(1) $9^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{1}{6}} \div 9$　　(2) $(8^{-\frac{1}{6}})^4$　　(3) $\sqrt[6]{2^5} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2^2}$

【解】 (1) $9^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{1}{6}} \div 9 = 9^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-1} = 9^{-\frac{1}{2}} = (3^2)^{-\frac{1}{2}} = 3^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

(2) $(8^{-\frac{1}{6}})^4 = 8^{-\frac{1}{6}\times 4} = 8^{-\frac{2}{3}} = (2^3)^{-\frac{2}{3}} = 2^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)} = 2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

(3) $\sqrt[6]{2^5} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{5}{6}} \div 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{6}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = 2^1 = 2$

5.7 次の計算をせよ．

(1) $27^{\frac{1}{3}} + (64^{\frac{1}{6}})^2$　　(ゼクセル ヴァレオ クライメート コントロール)

(2) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{-\frac{5}{3}} \times 8^{\frac{3}{2}}$　　(九州電力)

(3) $8^{\frac{1}{4}} \times 8^{-\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{3}{4}}$　　(アイシン精機)

(4) $\left\{\left(\dfrac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}$ (西日本新聞)

(5) $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\dfrac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$ (日本郵船)

(6) $(\sqrt[3]{2} \times 2 \div \sqrt{2^3})^{-12}$ (九州電力)

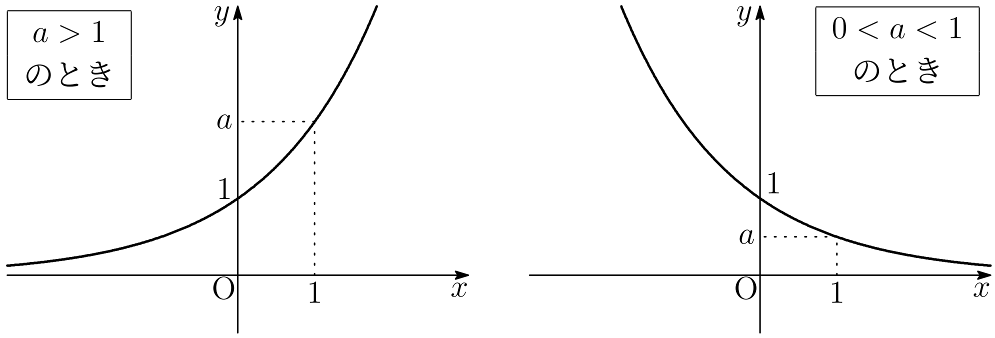
n が奇数のときに限り，負の数 a に対して，$x^n = a$ を満たす負の数 x がただ 1 つある (n が偶数のときは存在しない).

例 5.5 $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2, \qquad \sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$

5.8 $\sqrt[3]{-27}$ を計算せよ. (日本製紙)

5.1.2　指数関数

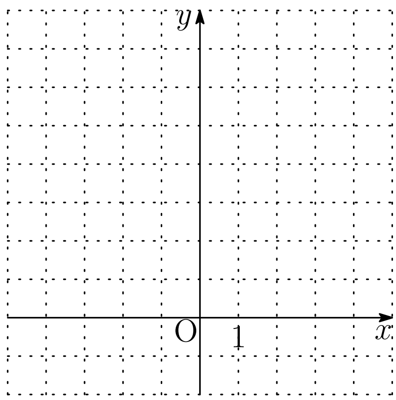
指数関数 $\boldsymbol{y = a^x}$ のグラフ



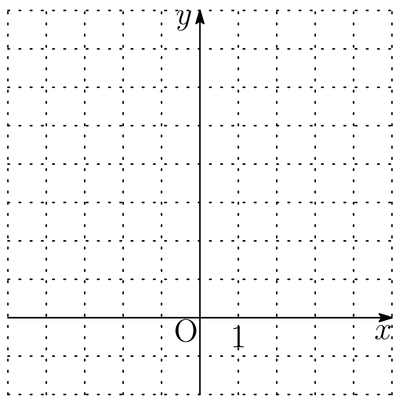
どちらの場合も，x 軸が漸近線で，点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る．
曲線は，$a > 1$ のとき右上がり，$0 < a < 1$ のとき右下がりである．

5.9 次の指数関数のグラフをかけ．

(1)　$y = 2^x$



(2)　$y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$



指数関数 $\boldsymbol{y = a^x}$ の特徴

1　定義域は実数全体，値域は正の数全体である．

2　**$\boldsymbol{a > 1}$ のとき**，x の値が増加すると y の値も増加する．

すなわち　　$\boldsymbol{r < s \iff a^r < a^s}$

3　**$\boldsymbol{0 < a < 1}$ のとき**，x の値が増加すると y の値は減少する．

すなわち　　$\boldsymbol{r < s \iff a^r > a^s}$

一般に，x の値が増加すると y の値も増加する関数を**増加関数**といい，x の値が増加すると y の値は減少する関数を**減少関数**という．

例 5.6 次の 3 つの数の大小を不等号で示せ．

(1) $\sqrt{3}$，1，$\sqrt[5]{9}$　　(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}$，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$

【解】 (1) $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$，$1=3^0$，$\sqrt[5]{9}=3^{\frac{2}{5}}$

$y=3^x$ は増加関数であるから　$3^0<3^{\frac{2}{5}}<3^{\frac{1}{2}}$

よって　$1<\sqrt[5]{9}<\sqrt{3}$

(2) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$ は減少関数であるから

よって　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}$

5.10 次の 3 つの数の大小を不等号で示せ．

(1) 2，$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{4}$　　(2) 1，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0.5}$

例題 5.2 次の不等式を解け．

(1) $2^x \geqq 32$　　(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}<\dfrac{1}{8}$

【解】 (1) 不等式を変形すると　$2^x \geqq 2^5$　　← 関数 $y=2^x$ は増加関数

よって　$x \geqq 5$

(2) 不等式を変形すると　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3}$　　← 関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は減少関数

よって　$x>3$

5.11 次の不等式を解け．

(1) $3^x<\sqrt{27}$　　(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}\geqq\dfrac{1}{81}$

例題 5.3　次の方程式を解け.

(1) $9^x = \dfrac{1}{27}$　　(2) $8^x = 2^{x+1}$

【解】 (1) 方程式を変形すると　$3^{2x} = 3^{-3}$

$2x = -3$ より　$x = -\dfrac{3}{2}$

(2) 方程式を変形すると　$2^{3x} = 2^{x+1}$

$3x = x + 1$ より　$x = \dfrac{1}{2}$

5.12 次の方程式を解け.

(1) $2^x = \dfrac{1}{16}$　(スズキ)

(2) $2^x = \dfrac{32}{\sqrt{2}}$　(KDDI)

(3) $3^{x+1} = \dfrac{1}{27}$　(スズキ)

(4) $5^{x-2} = \dfrac{1}{125}$　(キヤノン)

(5) $5^{x+3} = \dfrac{1}{625}$ (豊和工業)

(6) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x = 125$ (日本テレビ)

(7) $4^{3x+2} = 32$ (東洋高圧)

(8) $3^x = 9^{x-1}$ (NTT)

(9) $9^x = 27^{x-1}$ (中国電力)

(10) $36^x = 216 \times 6^{x+1}$ (日本電気)

例題 5.4 方程式 $4^x - 2^{x+2} - 32 = 0$ を解け.

【解】 $4^x = (2^x)^2$, $2^{x+2} = 4{\cdot}2^x$ であるから，方程式は

$$(2^x)^2 - 4{\cdot}2^x - 32 = 0$$

$\leftarrow$ $2^x = X$ とおくと
$X^2 - 4X - 32 = (X+4)(X-8)$

ゆえに　$(2^x + 4)(2^x - 8) = 0$

$2^x + 4 > 0$ であるから　　$2^x - 8 = 0$

よって　　$2^x = 8$ を解いて　$x = 3$

5.13 次の方程式を解け.

(1) $4^x + 2^x = 20$ (三菱重工業)

(2) $4^x + 8 = 9 \times 2^x$ (大阪ガス)

(3) $9^x - 2 \times 3^{x+1} = 3^3$ (東邦ガス)

(4) $4^{x+1} - 3 \times 2^{x+3} + 32 = 0$ (東芝)

(5) $2^{x+2} - 2^{-x} + 3 = 0$ (日立ソフトウェアエンジニアリング)

(6) $2^{2x+1} + 2^{3x} = 5 \times 2^{x+4}$ (マツダ)

例題 5.5 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 12 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$$

【解】 $3^x = X$, $3^y = Y$ とおくと

$$3^{x+y} = 3^x \cdot 3^y = XY$$

よって，連立方程式は

$$\begin{cases} X + Y = 12 & \cdots ① \\ XY = 27 & \cdots ② \end{cases}$$

① から　　$Y = 12 - X \quad \cdots ③$

$3^x > 0$, $3^y > 0$ であるから　$X > 0$　かつ　$12 - X > 0$

すなわち　　$0 < X < 12 \quad \cdots ④$

③ を ② に代入して　　$X(12 - X) = 27$

整理して　　$X^2 - 12X + 27 = 0$

ゆえに　　$(X - 3)(X - 9) = 0$

④ に注意して　$X = 3,\ 9$

これを ③ に代入して

$$\begin{cases} X = 3 \\ Y = 9 \end{cases},\ \begin{cases} X = 9 \\ Y = 3 \end{cases} \quad \text{したがって} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases},\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

5.14 次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 40 \\ 2^{x+y} = 256 \end{cases}$ (三菱電機)

(2) $\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$ (三菱電機)

5.2 対数関数

5.2.1 対数とその性質

指数と対数

$a>0$，$a\neq 1$ で $M>0$ とするとき，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{M=a^p \iff \log_a M = p}$$

$\log_a M$ を，a を**底**とする M の**対数**という．また，M をこの対数の**真数**という．

［注意］ とくに，$1=a^0$，$a=a^1$ であるから，$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$

例 5.7 次の等式が成り立つような x の値を求めよ．

(1) $\log_x 36=2$　　(2) $\log_2 x=5$

【解】 (1) $\log_x 36=2$ から　$36=x^2$

$x>0$ であるから　$x=6$

(2) $\log_2 x=5$ から　$x=2^5$

したがって　$x=32$

5.15 次の式を満たす x の値を求めよ．

(1) $\log_x 216=3$　(松下電器産業)

(2) $\log_{81} x=\dfrac{1}{4}$　(富士通)

例 5.8 次の値を簡単にせよ.

(1) $\log_5 125$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16}$

[注意] $\log_a M = p$ のとき，$M = a^p$ であるから $\log_a a^p = p$

【解】 (1) $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = 4$

5.16 次の値を簡単にせよ.

(1) $\log_2 8$ (NTT)

(2) $\log_2 \sqrt{8}$ (九州電力)

(3) $\log_{10} 1$ (三菱重工業)

例 5.9 次の値を簡単にせよ.

(1) $\log_2 \dfrac{1}{8}$　　(2) $\log_{10} 0.01$

【解】 (1) $\log_2 \dfrac{1}{8} = \log_2 \dfrac{1}{2^3} = \log_2 2^{-3} = -3$

(2) $\log_{10} 0.01 = \log_{10} \dfrac{1}{100} = \log_{10} \dfrac{1}{10^2} = \log_{10} 10^{-2} = -2$

5.17 次の値を簡単にせよ.

(1) $\log_{10} \dfrac{1}{1000}$ (トヨタ自動車)

(2) $\log_{10} 0.1$ (マツダ)

(3) $\log_{10} 0.001$ (九州電力)

(4) $\log_{2} \dfrac{1}{2}$ (ニッシン工業)

(5) $\log_{3} \dfrac{1}{81}$ (東芝)

(6) $\log_{0.5} 0.5$ (住友精密工業)

(7) $\log_{2} \cos 60^\circ$ (ダイヘン)

5.18 次の等式について正しいものには○，正しくないものには×をつけよ.
(トヨタ自動車)

① $\log_a 1 = a$ ② $\log_a a = 1$ ③ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

④ $\dfrac{D}{A} + \dfrac{C}{B} = \dfrac{AD}{AB} + \dfrac{AC}{AB}$ ⑤ $A^m \times A^n = A^{mn}$

対数の性質

$M > 0$, $N > 0$ で，k を実数とする．

1 $\boldsymbol{\log_a MN = \log_a M + \log_a N}$

2 $\boldsymbol{\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$

3 $\boldsymbol{\log_a M^k = k \log_a M}$

例 5.10 次の計算をせよ．

(1) $\log_6 9 + \log_6 4$　　(2) $\log_2 7 - \log_2 56$

(3) $2\log_{10} 5 - \log_{10} 15 + \log_{10} 6$

【解】 (1) $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6(9 \times 4) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

(2) $\log_2 7 - \log_2 56 = \log_2 \dfrac{7}{56} = \log_2 \dfrac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$

(3)
$$\begin{aligned} 2\log_{10} 5 - \log_{10} 15 + \log_{10} 6 &= \log_{10} 5^2 - \log_{10} 15 + \log_{10} 6 \\ &= \log_{10} \frac{25 \times 6}{15} = \log_{10} 10 = 1 \end{aligned}$$

5.19 次の式を簡単にせよ．

(1) $\log_2 8 + 3\log_3 81$ (九州電力)

(2) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$ (豊田工機)

(3) $\log_2 24 - \log_2 3$ (NTT)

(4) $\log_2 6 - \log_2 \dfrac{3}{4}$ (日立ソフトウェアエンジニアリング)

(5) $\log_2 8 - \log_2 \dfrac{3}{4} + \log_2 6$ (中部電力)

(6) $\log_3(4 - \sqrt{7}) + \log_3(4 + \sqrt{7})$ (東北電力)

(7) $\log_{10} 2 + \log_{10} \sqrt{15} - \log_{10} \sqrt{0.6}$ (NTT)

(8) $\log_{10} \dfrac{4}{25} + 2\log_{10} 5$ (清水建設)

(9) $\log_{10} 25 - 2\log_{10} \dfrac{1}{2}$ (東陶機器)

(10) $-\dfrac{1}{2}\log_{10} 3 + \dfrac{1}{2}\log_{10} 6 + \dfrac{1}{2}\log_{10} 5$ (九州電力)

底が 10 のとき，たとえば $\log_{10} 5$ の底を省略して $\log 5$ とかくことがある．

例 5.11　$\log 25 + \log 4 = \log(25 \times 4) = \log 10^2 = 2$

5.20 次の式を簡単にせよ．

(1) $\log \dfrac{5}{3} + 2\log \dfrac{2}{5} - \log \dfrac{8}{3}$ 　(マツダ)

(2) $\log 45 - 3\log 3 + \log \dfrac{3}{5}$ 　(安川電機)

(3) $2\log \dfrac{5}{3} - \log \dfrac{9}{4} + 2\log 3 + \dfrac{1}{2}\log 81$ 　(日本自動車機械工具協会)

底の変換公式

a，b，c は正の数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ とするとき

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

例 5.12　$\log_{32} 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 32} = \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^5} = \dfrac{3}{5}$

5.21 次の値を簡単にせよ.

(1) $\log_9 27$ (ダイフク)

(2) $\log_{25} 125$ (NTT)

(3) $\log_8 2$ (キヤノン)

(4) $\log_4 \sqrt[3]{2}$ (九州電力)

(5) $\log_{100} 10\sqrt{10}$ (ダイヘン)

(6) $\log_{\frac{1}{4}} 2$ (日本水産)

(7) $\log_{\sqrt{3}} 9$ (東邦ガス)

例 5.13 $$\log_3 2 \cdot \log_4 27 = \log_3 2 \times \frac{\log_3 27}{\log_3 4}$$
$$= \log_3 2 \times \frac{3}{2\log_3 2} = \frac{3}{2}$$

5.22 次の式を簡単にせよ.

(1) $\log_3 2 \times \log_8 9$ (九州電力)

(2) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8$ (清水建設)

(3) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$ (NTT)

5.23 $\log_2 3 = a,\ \log_3 11 = b$ として，$\log_{44} 66$ を $a,\ b$ を用いて表せ. (東芝)

5.24 $\log A = x$, $\log B = y$, $\log C = z$ のとき，次の値を x, y, z を用いて表せ.
(中川電気工業)

(1) $\log_A B$ (2) $\log_{AB} C$ (3) $\log_{\frac{C}{B}} A$

例 5.14 次の値を簡単にせよ.
(1) $3^{\log_3 5}$ (2) $5^{3\log_5 2}$

[注意] $\log_a M = p$ のとき，$M = a^p$ であるから $M = a^{\log_a M}$

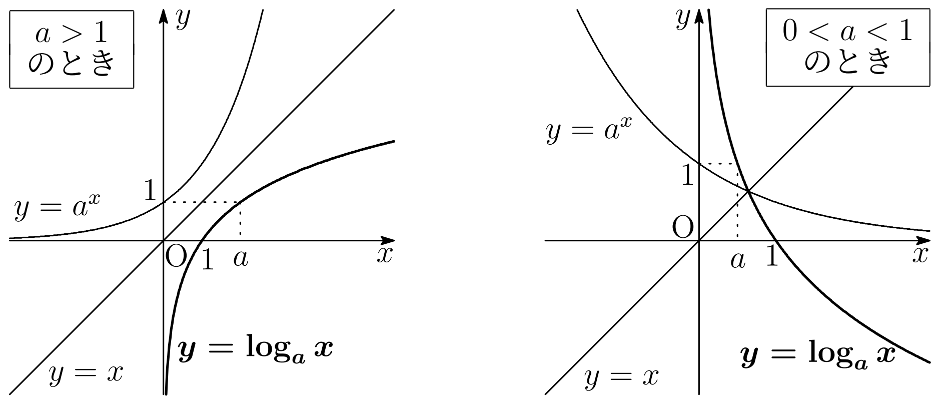
【解】(1) $3^{\log_3 5} = 5$ (2) $5^{3\log_5 2} = 5^{\log_5 8} = 8$

5.25 $10^{2\log 2}$ の値を簡単にせよ. (帝人)

5.2.2　対数関数

指数関数 $y = a^x$ のグラフと $y = x$ について対称であり，下の図のようなる．

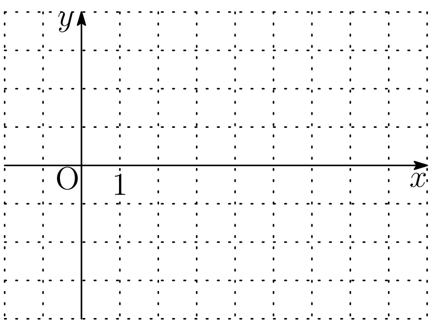
対数関数 $y = \log_a x$ のグラフ



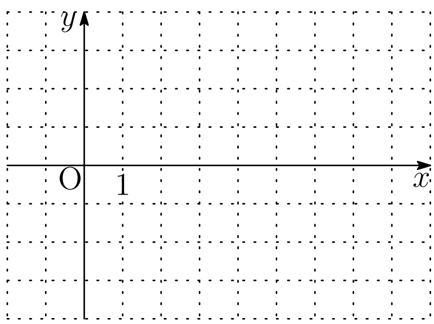
どちらの場合も，y 軸が漸近線で，点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る．
曲線は，$a > 1$ のとき右上がり，$0 < a < 1$ のとき右下がりである．

5.26 次の対数関数のグラフをかけ．

(1)　$y = \log_2 x$



(2)　$y = \log_{\frac{1}{3}} x$



対数関数 $y = \log_a x$ の特徴

1　定義域は正の数全体，値域は実数全体である．

2　**$a > 1$ のとき**，増加関数である．すなわち

$$0 < p < q \iff \log_a p < \log_a q$$

3　**$0 < a < 1$ のとき**，減少関数である．すなわち

$$0 < p < q \iff \log_a p > \log_a q$$

例題 5.6 次の不等式を解け.

(1) $\log_2 x \geqq 3$ (2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) > 1$

【解】 (1) 不等式を変形すると $\log_2 x \geqq \log_2 2^3$ ← 関数 $y=\log_2 x$ は増加関数

よって $x \geqq 8$

(2) 不等式を変形すると $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) > \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{2}$ ← 関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$ は減少関数

真数は正であるから $0 < x-3 < \dfrac{1}{2}$

よって $3 < x < \dfrac{7}{2}$

5.27 次の不等式を解け.

(1) $\log_3 x < 1$

(2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \leqq -2$

例題 5.7 方程式 $2^x - 6{\cdot}2^{-x} = 1$ を解け.

【解】 両辺に 2^x をかけて，整理すると

$$(2^x)^2 - 2^x - 6 = 0$$

ゆえに　$(2^x + 2)(2^x - 3) = 0$

$2^x + 2 > 0$ であるから　　$2^x - 3 = 0$

よって　　$2^x = 3$ を解いて　$x = \log_2 3$

5.28 次の方程式を解け.

(1) $2^x - 2^{-x} = \dfrac{8}{3}$ (九州電力)

(2) $4^{x+1} - 3 \times 2^{x+2} + 5 = 0$ (東芝)

例題 5.8 方程式 $\log_2 x + \log_2(x-6) = 4$ を解け.

【解】 真数は正であるから　$x > 0$　かつ　$x - 6 > 0$

すなわち　$x > 6$　$\cdots$ ①

方程式を変形すると　$\log_2 x(x-6) = 4$

よって　$x(x-6) = 2^4$

したがって　$(x+2)(x-8) = 0$

① より　$x + 2 > 0$ であるから　$x = 8$

5.29 次の方程式を解け.

(1) $\log_{10}(x-3) = 2$ (NTT)

(2) $\log(2x+1) + \log 5 = 2$ (日本金属)

(3) $\log_6 x + \log_6(x-5) = 2$ (小松製作所)

(4) $\log x + \log(x-3) = 1$ (京王電鉄)

(5) $\log x + \log(x-15) = 2$ (トヨタ自動車)

(6) $\log(x+1)+\log(x-2)=1$ (日産ディーゼル)

(7) $\log(x+2)+\log(x+5)=1$ (日立マクセル)

(8) $\log(x+1)+\log(x-1)=0$ (中川電気工業)

(9) $\log_{10}3x-\log_{10}4+\log_{10}4x-\log_{10}3=1$ (九州電力)

(10) $\log(2x-1)+\log(x-9)=2$ (阪神内燃機工業)

(11) $\log_{10}(4x-3)+\log_{10}(3x-4)=1$ (九州電力)

(12) $\log(x+6)=1-\log(x-4)$ (日本無線)

(13) $\log(x^2-5x)=\log(x+4)+\log(x-7)+\log 2$ (いすゞ自動車)

(14) $\log(4x+1)+\log(2x+1)=(2\log 3+\log 5)-\log 3$ (KDDI)

(15) $\log(x^3-6x^2+12x-7)-\log(x-1)=0$ (東邦ガス)

(16) $\log_2(x-4)-\log_4(x-1)=0$ (トクヤマ)

例題 5.9 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$$

【解】 第 1 式から　$y = 3x - 1$　$\cdots$①

真数は正であるから　$x > 0$　かつ　$3x - 1 > 0$

すなわち　$x > \dfrac{1}{3}$　$\cdots$②

第 2 式を変形すると　$\log xy = \log 10$

よって　$xy = 10$

① を代入して　$x(3x-1) = 10$

したがって　$(x-2)(3x+5) = 0$

② より　$3x + 5 > 0$ であるから　$x = 2$

これを ① に代入して　$y = 5$　　(答) $x = 2$,　$y = 5$

5.30 次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x - y = 3 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$　(住友重機械工業)

(2) $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$ (KDDI)

(3) $\begin{cases} \log(x - y) + \log(7x - 8y) = 2 \\ \log(x^3 + y^3) - \log(x^2 - xy + y^2) = 1 \end{cases}$ (ニコン)

5.2.3　常用対数

10 を底とする対数を**常用対数**という.

例 5.15 $\log_{10} 3.45 = 0.5378$ を用いて，次の値を求めよ.

(1) $\log_{10} 34500$　　(2) $\log_{10} 0.0345$

【解】 (1)
$$\begin{aligned}\log_{10} 34500 &= \log_{10}(3.45 \times 10^4)\\ &= \log_{10} 3.45 + \log_{10} 10^4\\ &= 0.5378 + 4 = 4.5378\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\log_{10} 0.0345 &= \log_{10}(3.45 \times 10^{-2})\\ &= \log_{10} 3.45 + \log_{10} 10^{-2}\\ &= 0.5378 - 2 = -1.4622\end{aligned}$$

5.31 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて，次の値を計算せよ.

(1) $\log_{10} 6$　(日立製作所)

(2) $\log_{10} 20$　(九州電力)

(3) $\log 60$　(九州電力)

(4) $\log 6000$　(九州電力)

(5) $\log_{10} 6 + \log_{10} 2$　(日本特殊機器)

(6) $\log_{10} 8^2$ (日本特殊機器)

(7) $\log \dfrac{1}{6}$ (日本郵船)

(8) $\log 1.5$ (トーソク)

(9) $\log 0.2$ (九州電力)

(10) $\log 0.125$ (安川電機)

(11) $\log 1.08$ (九州電力)

(12) $\log 864$ (NHK)

(13) $\log 5$ (富士重工業)

5.32 $\log 8.5 = 0.9294$ のとき，次の対数をいえ. (日産自動車)

(1) $\log 85$　(2) $\log 850$　(3) $\log \sqrt{85}$

5.33 $\log 2 = 0.3010$ を用いて，次の計算をせよ. (ダイフク)

(1) $\log_{0.5} 4$　(2) $\log_{0.4} 5$

例題 5.10 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて，6^{30} の桁数を調べよ.

【解】
$$\begin{aligned}\log_{10} 6^{30} &= 30 \log_{10} 6 = 30(\log_{10} 2 + \log_{10} 3)\\ &= 30(0.3010 + 0.4771) = 23.343\end{aligned}$$

$23 < \log_{10} 6^{30} < 24$ であるから
$$\log_{10} 10^{23} < \log_{10} 6^{30} < \log_{10} 10^{24}$$
よって　$10^{23} < 6^{30} < 10^{24}$

したがって，6^{30} は 24 桁の数である.

5.34 次の問いに答えよ.

(1) 3^{10} は何桁の数か．ただし，$\log 3 = 0.4771$ とする. (KDDI)

(2) 3^{18} は何桁の数か．ただし，$\log 3 = 0.4771$ とする. (関西電力)

(3) 12^{12} は何桁の数か．ただし，$\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$ とする. (三菱電機)

例題 5.11 ある国では，石油の消費量が毎年 20% ずつ増加している．このままの状態で増加すれば，消費量が初めて現在の 10 倍以上になるのは何年後か．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

【解】 n 年後に初めて現在の 10 倍以上になるのは，$1.2^n \geqq 10$ を満たす最小の自然数である．この不等式の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 1.2^n \geqq \log_{10} 10$$

$$n \log_{10} \frac{2^2 \times 3}{10} \geqq 1$$

よって　$n(2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1) \geqq 1$

ここで　$2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1 = 2 \times 0.3010 + 0.4771 - 1 = 0.0791$

ゆえに　$n \geqq \dfrac{1}{2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1} = \dfrac{1}{0.0791} = 12.6\cdots$

したがって，消費量が初めて現在の 10 倍以上になるのは，13 年後である．

5.35 次の問いに答えよ．

(1) ある電車会社の乗客数は毎年 1 割ずつ増加するものとすれば，乗客数が初めて今年の 2 倍以上になるのは何年後か．$\log 11 = 1.0453$，$\log 20 = 1.3010$ とする．

(小田急電鉄)

(2) 年利率 0.08 で元利合計が初めて元金の 2 倍以上になるのは何年後か．ただし $\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$ とする． (九州電力)

(3) $\dfrac{50}{49}$ を何乗したら，初めて 1000 より大きくなるか．ただし，$\log 7 = 0.8451$，$\log 2 = 0.3010$ とする． (ブラザー工業)

6.1　微分係数と導関数

6.1.1　微分係数

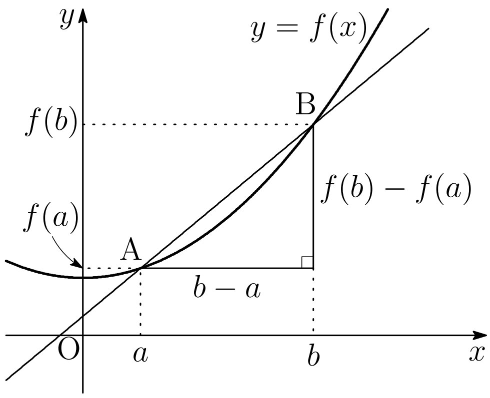
平均変化率

関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき，

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

である．この値を，$x=a$ から $x=b$ までの，$f(x)$ の**平均変化率**という．

この平均変化率は，右の図で直線 AB の傾きを表している．



例 6.1 関数 $f(x)=2x^2+x$ において，$x=-2$ から $x=3$ までの平均変化率は

$$\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{(2\cdot 3^2+3)-\{2\cdot(-2)^2+(-2)\}}{3-(-2)}=\frac{15}{5}=3$$

6.1 関数 $y=x^2+3x-4$ において $x=-1$ から $x=2$ までの平均変化率を求めよ．
(三菱電機)

例 6.2 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 1}(2x^2-x+3)$$

【解】 $\lim_{x\to 1}(2x^2-x+3)=2\cdot 1^2-1+3=4$

6.2 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3} 3(5-x)$ (トヨタ自動車)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1} (x^2-x)$ (ニコン)

例 6.3 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$$

【解】

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+3}$$

$$=\frac{2-1}{2+3}=\frac{1}{5}$$

6.3 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ (マツダ)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$ (NEC フィールディング)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$ (愛知製鋼)

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x+x^2}{x+x^2}$ (豊田自動織機)

(5) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$ (マツダ)

(6) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$ (日産自動車)

(7) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - x - 6}$ (シチズン時計)

(8) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - x - 6}{2x^2 - 7x + 6}$ (京阪電気鉄道)

6.4 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$ (ニチコン)

(2) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$ (青木あすなろ建設)

例題 6.1 次の等式が成り立つように定数 a，b の値を定めよ．

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-3x+2}=5$$

【解】 与えられた等式により

$$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{x^2+ax+b}{x^2-3x+2}\times(x^2-3x+2)\right\}$$

$$2^2+a\cdot 2+b=5\times 0$$

ゆえに　$b=-2a-4$　$\cdots$①

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{(x-2)(x-1)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+a+2}{x-1}=a+4$$

$a+4=5$ から　$a=1$　　① から　$b=-6$　　　(答) $a=1$，$b=-6$

6.5 次の等式が成り立つように定数 a, b の値を定めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+x+b}{x-1}=3$　(沖電気工業)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\frac{5}{3}$　(東北電力)

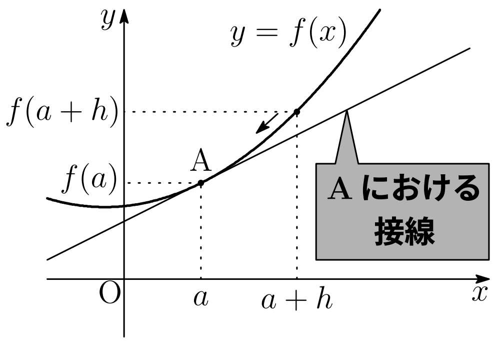
微分係数

1 $\boldsymbol{f(x)}$ の $\boldsymbol{x = a}$ における微分係数

$$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

2 接線の傾きと微分係数

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい．



例 6.4 $f(x) = x^2$ の $x = 3$ における微分係数は

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(6+h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0}(6+h) = 6 \end{aligned}$$

$y = x^2$ のグラフ上の点 $(3,\ 9)$ における接線の傾きは

$$f'(3) = 6$$

6.6 $f(x) = x^2$ のとき，$f'(a)$ を求めよ． (協和エクシオ)

6.1.2 導関数とその計算

導関数 $f'(x)$

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

例 6.5 関数 $f(x) = 5x^2$ について，次のものを求めよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ (2) 微分係数 $f'(2)$，$f'(-1)$

【解】 (1) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h)^2 - 5x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{10xh + 5h^2}{h}$

$= \lim_{h \to 0}(10x + 5h) = 10x$

(2) $f'(2) = 10 \cdot 2 = 20$，$f'(-1) = 10 \cdot (-1) = -10$

[注意] 関数 $y = f(x)$ の導関数を，$\boldsymbol{y'}$ や $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ で表すこともある．

たとえば，$5x^2$ の導関数を $(5x^2)'$ や $\frac{d}{dx}(5x^2)$ で表す．

$$(5x^2)' = 10x, \quad \frac{d}{dx}(5x^2) = 10x$$

例 6.6 $\frac{d}{dx}(2x^3)$ を求めよ．

【解】 $f(x) = 2x^3$ とおくと

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^3 - 2x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 2x^3}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{6x^2h + 6xh^2 + 2h^3}{h} = \lim_{h \to 0}(6x^2 + 6xh + 2h^2) = 6x^2$$

したがって $\frac{d}{dx}(2x^3) = 6x^2$

6.7 $\frac{d}{dx}(5x^3)$ を求めよ． (協和エクシオ)

関数 x^n と定数関数の導関数

関数 x^n の導関数は　　$\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$
定数関数 c の導関数は　　$\boldsymbol{(c)' = 0}$

[注意] $n = 1,\ 2,\ 3$ のとき

$$(x)' = 1, \qquad (x^2)' = 2x, \qquad (x^3)' = 3x^2$$

関数の定数倍および和，差の導関数

k を定数とする．

1　$y = kf(x)$ を微分すると　$\boldsymbol{y' = kf'(x)}$
2　$y = f(x) + g(x)$ を微分すると　$\boldsymbol{y' = f'(x) + g'(x)}$
3　$y = f(x) - g(x)$ を微分すると　$\boldsymbol{y' = f'(x) - g'(x)}$

例 6.7　関数 $y = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ を微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 2(x^3)' - 4(x^2)' + 5(x)' + (3)' \\ &= 2\cdot 3x^2 - 4\cdot 2x + 5\cdot 1 + 0 \\ &= 6x^2 - 8x + 5 \end{aligned}$$

6.8 次の関数を微分せよ．

(1) $y = 2x^2 - 3x + 16$ (住友精化)

(2) $y = x^3 + 3x^2 - 5x - 1$ (住友電気工業)

(3) $f(x) = 3x^4 + 4x^2 + 5$ (住友電気工業)

(4) $y = \dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 9$ (旭化成)

6.9 次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}(x^4+2x^3+3x^2+2x+4)$ を計算せよ. (東芝)

(2) $y=3x^2+x+4$ のとき, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ. (出光興産)

例 6.8 関数 $y=x(x+3)^2$ を微分せよ.

【解】 $x(x+3)^2=x(x^2+6x+9)=x^3+6x^2+9x$

よって　$y=x^3+6x^2+9x$

したがって　$y'=3x^2+12x+9$

6.10 次の関数を微分せよ.

(1) $y=(5x+4)(2x+1)$ (三菱重工業)

(2) $y=(2x-3)(3x-2)$ (佐世保重工業)

(3) $y=(2-3x)^2$ (清水建設)

(4) $y=(x^2+1)(2x-5)$ (NEC フィールディング)

(5) $f(x) = (x+1)(x^2 - 3x + 5)$ (神戸製鋼所)

(6) $y = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ (三洋電機)

(7) $y = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)$ (九州電力)

(8) $y = x(x^2 + 1)^2$ (三菱電線工業)

(9) $y = (2x+5)(3x+2)(2x+4)$ (東芝)

6.11 $y = (3x+2)^2$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ． (NEC エンジニアリング)

6.12 次の関数の $x = 2$ における微分係数を求めよ． (新日本石油)

$$f(x) = (x^2 - 3)^2$$

6.1.3 接線の方程式

グラフ上の点における接線の方程式

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

例題 6.2 関数 $y = x^2 - 3x - 1$ のグラフについて，$x = 2$ における接線 ℓ の方程式を求めよ．

【解】 $f(x) = x^2 - 3x - 1$ とすると　$f'(x) = 2x - 3$

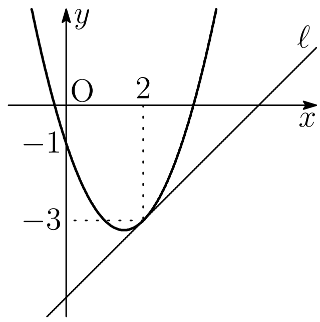
$$f(2) = 2^2 - 3\cdot 2 - 1 = -3$$

$$f'(2) = 2\cdot 2 - 3 = 1$$

ゆえに，求める接線 ℓ の方程式は

$$y - (-3) = 1(x - 2)$$

$$y = x - 5$$



6.13 次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = x^2 - 2x - 3$ 上の点 $(3,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ．(九州電力)

(2) 曲線 $y = x^3 - 3x + 2$ 上の点 $(2,\ 4)$ における接線の方程式を求めよ．(豊田工機)

(3) 曲線 $y = x^3 - x^2$ の $x = 1$ における接線の方程式を求めよ. (三洋電機)

6.14 $y = x^2 - 6x + 1$ について，次の問いに答えよ. (JFE ホールディングス)

(1) グラフ上の点 A$(5, -4)$ における接線の方程式を求めよ.

(2) 点 A において接線と直交する直線の方程式を求めよ.

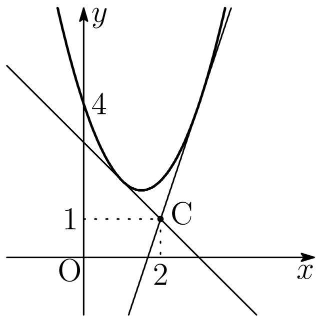
(3) 上記の 2 本の直線と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ.

例題 6.3 関数 $y = x^2 - 3x + 4$ のグラフに点 C(2, 1) から引いた接線は 2 本ある．この 2 本の接線の方程式を求めよ．

【解】 $y = x^2 - 3x + 4$ を微分すると　　$y' = 2x - 3$

接点の座標を $(a, a^2 - 3a + 4)$ とすると，接線の傾きは $2a - 3$ となるから，その方程式は

$$y - (a^2 - 3a + 4) = (2a - 3)(x - a) \qquad \cdots ①$$



この直線が点 C(2, 1) を通るから

$$1 - (a^2 - 3a + 4) = (2a - 3)(2 - a)$$

よって　　$a^2 - 4a + 3 = 0$

すなわち　　$(a - 1)(a - 3) = 0$

$a = 1,\ 3$

したがって，接線の方程式は，① より

$a = 1$ のとき　　$y - 2 = -1(x - 1)$

$a = 3$ のとき　　$y - 4 = 3(x - 3)$

(答)　$y = -x + 3$ と $y = 3x - 5$

6.15 点 $(1, -3)$ を通って $y = x^2$ に接する直線の方程式を求めよ．　(日立製作所)

6.16 放物線 $y = x^2 + 3x + 1$ に接し，点 $(0, -3)$ を通る直線の方程式を求めよ．

(大同特殊鋼)

6.17 放物線 $y = x^2 + 3$ へ点 $(1, 0)$ から引いた接線の方程式を求める問いに対して空欄 (1)〜(10) を解答せよ． (NEC フィールディング)

点 $(1, 0)$ から曲線 $y = x^2 + 3$ に引いた接線の接点を $\mathrm{A}(a, a^2 + 3)$ とし A における接点の方程式を求める．

傾き $f(x) = x^2 + 3 \quad f'(x) = 2x$

$f(a) = a^2 + 3 \quad f'(a) = \boxed{\quad (1) \quad}$

次に，点 A を通り傾き $\boxed{\quad (2) \quad}$ の直線の方程式は

$$y - (a^2 + 3) = \boxed{\quad (3) \quad}(x - a)$$

$$y = \boxed{\qquad\qquad (4) \qquad\qquad}$$

これが点 $(1, 0)$ を通るときの a の値は

$a = \boxed{\quad (5) \quad}$ と $a = \boxed{\quad (6) \quad}$ である．

したがって接線の方程式は

$y = \boxed{\qquad\qquad (7) \qquad\qquad}$, $y = \boxed{\qquad\qquad (8) \qquad\qquad}$

また，接点の座標は

$\boxed{\qquad (9) \qquad}$, $\boxed{\qquad (10) \qquad}$

6.2　関数の値の変化

6.2.1　関数の増減と極大・極小

$f'(x)$ の符号と $f(x)$ の増減

関数 $f(x)$ の増減は，次のようになる．

　　$f'(x) > 0$ となる x の値の範囲では増加し，

　　$f'(x) < 0$ となる x の値の範囲では減少する．

関数 $f(x)$ の極大・極小

　関数 $f(x)$ が $x = a$ を境目として増加から減少に移るとき，

　　$f(x)$ は $x = a$ で**極大**である

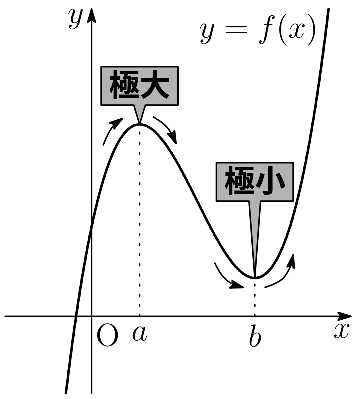
といい，$f(a)$ を**極大値**という．

また，$x = b$ を境目として減少から増加に移るとき，

　　$f(x)$ は $x = b$ で**極小**である

といい，$f(b)$ を**極小値**という．

　極大値と極小値をまとめて**極値**という．



例題 6.4 関数 $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ の増減を調べ，極値を求めよ．また，そのグラフをかけ．

【解】 $y' = 3x^2 - 12x + 9$

　$= 3(x-1)(x-3)$

$y' = 0$ とすると

　$x = 1,\ 3$

y の増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 -2	$\nearrow$

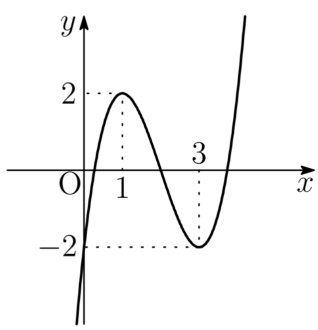
したがって，この関数は

　$x = 1$ で極大値 2，

　$x = 3$ で極小値 -2

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



6.18 次の関数の極値を求めよ.

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ (日本鋳造)

(2) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ (東京計器工業)

(3) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ (関東電気)

(4) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ (日本電池)

(5) $y = \dfrac{1}{5}(x^3 - 3x^2 - 9x)$ (東亜燃料工業)

6.19 関数 $y = x^3 - 3x - 1$ のグラフをかけ. (本田技研工業)

6.20 関数 $y = -x^3 - 6x^2 - 9x + 1$ について，次の問いに答えよ. (JFE ホールディングス)

(1) y 軸との交点の座標を求めよ.

(2) 極大値・極小値を求めよ.

(3) グラフをかけ.

6.21 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ のグラフは点 $(1,\ 4)$ を通り，この点における接線の傾きは -3 である. (三井化学)

(1) $a,\ b$ の値を求めよ.

(2) $f(x)$ の極大値，極小値を求めよ.

(3) $y = f(x)$ のグラフをかけ.

例題 6.5 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が，$x = -1$ で極大値をとり，$x = 3$ で極小値 -12 をとるとき，a，b，c の値と極大値を求めよ．

【解】 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(x) = 0$ の解が $x = -1,\ 3$ であるから，解と係数の関係により

$$(-1) + 3 = -\frac{2a}{3}, \quad (-1)\cdot 3 = \frac{b}{3}$$

ゆえに　　$a = -3$，$b = -9$

このとき　　$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + c$

条件より $f(3) = -12$ であるから

$$3^3 - 3\cdot 3^2 - 9\cdot 3 + c = -12 \quad \text{これを解いて} \quad c = 15$$

よって，極大値は　$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 15 = 20$

(答) $a = -3$，$b = -9$，$c = 15$，極大値 20

6.22 関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が，$x = 0$ で極大，$x = 2$ で極小となる．次の問いに答えよ．(電源開発)

(1) a, b の値を求めよ．

(2) 極小値が 2 であるとき，極大値を求めよ．

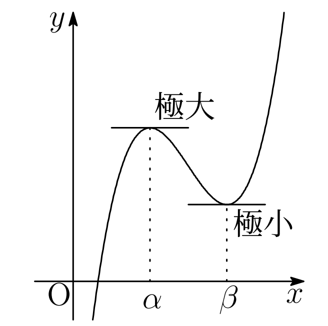
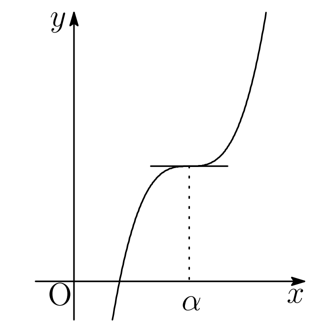
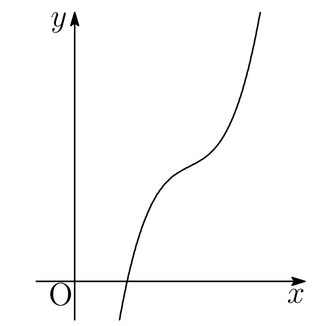
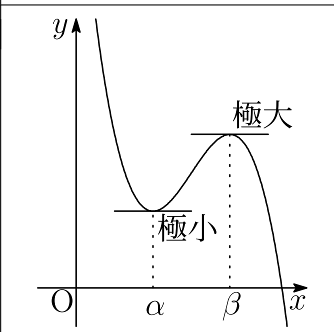
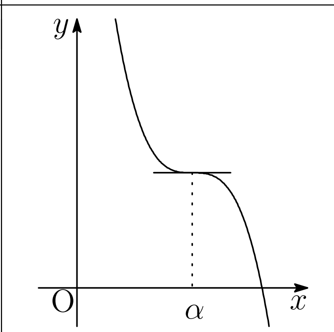
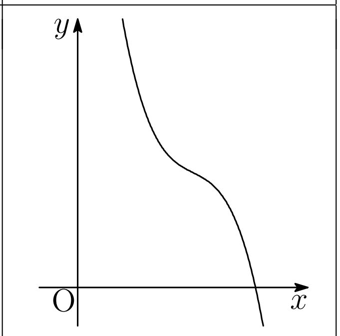
6.23 関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が，$x = 1$ で極大値 3，$x = 3$ で極小値をとる．この関数を求め，極小値を求めよ． (日本電気)

6.24 関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が，$x = -2$ で極大値 44，$x = 4$ で極小値 -64 をとるとき，a, b, c, d の値を求めよ． (九州電力)

3 次関数 $y = ax^3+bx^2+cx+d$ について，$y' = 0$ すなわち 2 次方程式 $3ax^2+2bx+c = 0$ の判別式を D とすると $D/4 = b^2 - 3ac$

$D/4 > 0$　ならば　y' は正にも，負にも，また 0 にもなりうる．
$D/4 = 0$　ならば　y' は 0 または a と同符号．
$D/4 < 0$　ならば　y' は常に a と同符号．

したがって，$D/4 = b^2 - 3ac > 0$ のとき極値をもち，$D/4 = b^2 - 3ac \leqq 0$ のとき極値がない．3 次関数についてまとめると，次のようになる．

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$　$y' = 3ax^2 + 2bx + c$　判別式 $D/4 = b^2 - 3ac$			
$D/4$	$D/4 = b^2 - 3ac > 0$	$D/4 = b^2 - 3ac = 0$	$D/4 = b^2 - 3ac < 0$
$y' = 0$	異なる 2 実数解 α，β	重解 α	実数解がない
極値	極値がある	極値がない	極値がない
$a > 0$			
$a < 0$			

例題 6.6 3 次関数 $y = x^3 + 6x^2 + ax - 5$ が極大値・極小値をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

【解】 $y' = 3x^2 + 12x + a$

$y' = 0$ の判別式を D とすると，$D/4 = 6^2 - 3a$

極値をもつとき　$D > 0$　これを解いて　$a < 12$

6.25 関数 $y = x^3 + ax^2 + 3x + 4$ が極大値・極小値をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

(三洋電機)

6.2.2 関数の増減・グラフの応用

例題 6.7 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

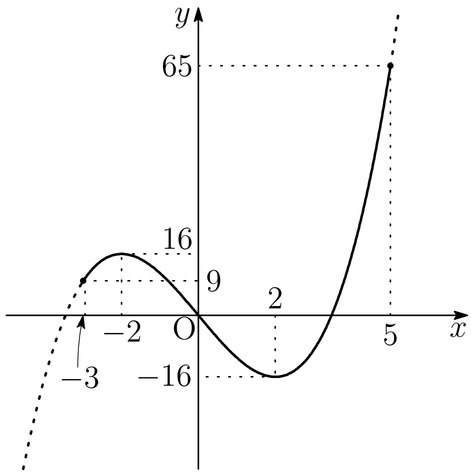
$$y = x^3 - 12x \quad (-3 \leqq x \leqq 5)$$

【解】 $y' = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$

$y' = 0$ とすると　$x = -2,\ 2$

y の増減表は，次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	5
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	9	$\nearrow$	極大 16	$\searrow$	極小 -16	$\nearrow$	65



よって，この関数は

$x = 5$ で最大値 65 をとり，

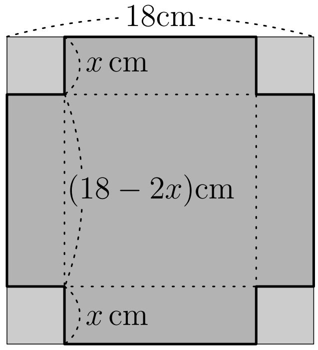
$x = 2$ で最小値 -16 をとる．

6.26 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 2 \quad (-2 \leqq x \leqq 3)$

(2) $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 1 \quad (-2 \leqq x \leqq 4)$

例題 6.8 1 辺が 18cm の正方形の厚紙の四隅から，同じ大きさの正方形を右の図のように切り取って，ふたのない箱を作る．箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすればよいか．



【解】 切り取る正方形の 1 辺の長さを x cm，箱の容積を y cm^3 とする．

$x>0$，$18-2x>0$ であるから

$$0<x<9 \qquad \cdots ①$$

このとき

$$y = x(18-2x)^2 = 4(x^3-18x^2+81x)$$
$$y' = 12(x^2-12x+27) = 12(x-3)(x-9)$$

① の範囲において，y の増減表は，右のようになる．

したがって，y は $x=3$ で最大になる．

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	9
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	極大	↘	

(答) 3 cm

6.27 次の問いに答えよ．

(1) 1 辺が 30cm の正方形のブリキの四すみから同じ大きさの正方形を切り取り，四方を折り曲げて作った箱の容積を最大にしたい．切り取る正方形の 1 辺の長さをどれだけにすればよいか．またそのときの容積はどれだけか．

(愛知機械工業)

(2) 横 15cm，縦 8cm の長方形の厚紙の四すみから同じ大きさの正方形を切り取って箱を作るとき，この箱の容積を最大にするには切り取る正方形の 1 辺の長さをいくらにすればよいか. (日本ピストンリング)

(3) 幅 25cm，長さ 40cm の厚紙の四隅から正方形を切り取り箱を作るとき，その容積をできるだけ大きくするには，1 辺が何 cm の正方形を切り取ればよいか. (いすゞ自動車)

例題 6.9 方程式 $x^3 - 6x^2 = a$ がただ 1 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

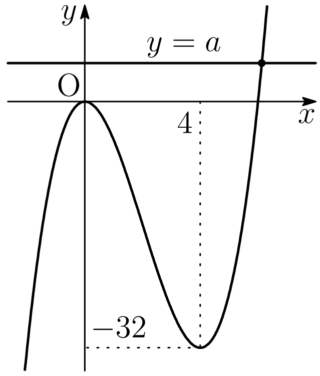
【解】 関数 $y = x^3 - 6x^2$ について

$$
\begin{aligned}
y' &= 3x^2 - 12x \\
&= 3x(x-4)
\end{aligned}
$$

y の増減表は，右のようになる．
よって，$y = x^3 - 6x^2$ のグラフは，右の図のようになる．
求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y = a$ が 1 個の共有点をもつ範囲であるから

$$a < -32,\ 0 < a$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 0	↘	極小 -32	↗



［注意］ $x^3 - 6x^2 = a$ の実数解の個数は，さらに次のようになる．

$a = 0,\ -32$ のとき 2 個，　　$-32 < a < 0$ のとき 3 個

6.28 次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $x^3 - 6x^2 + 9x = a$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(2) 方程式 $x^3 - 3x = a$ がただ 1 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

例題 6.10 $x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

$$x^3 + 3x \geqq 3x^2$$

[証明] $f(x) = (x^3 + 3x) - 3x^2$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x + 3 \\ &= 3(x-1)^2 \end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$

$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は，右のようになる．

よって，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ は $x = 0$ で最小値 0 をとる．

したがって，$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるから

$$(x^3 + 3x) - 3x^2 \geqq 0$$

すなわち　$x^3 + 3x \geqq 3x^2$

等号が成り立つのは，$x = 0$ のときである．**[証終]**

6.29 次の問いに答えよ．

(1) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $x^3 + 2 \geqq 3x$ が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

(2) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $x^3 + 12x \geqq 6x^2$ が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

6.3　積分法

6.3.1　不定積分

$f(x)$ の不定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx = F(x) + C} \qquad \text{ただし，} C \text{ は積分定数}$$

x^n の不定積分

$$\int \boldsymbol{x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$$

［注意］ $n = 0,\ 1,\ 2$ のとき

$$\int 1\,dx = x + C, \qquad \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C, \qquad \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

関数の定数倍および和，差の不定積分

$F'(x) = f(x),\ G'(x) = g(x)$ のとき

1 $\displaystyle\int \boldsymbol{kf(x)\,dx = kF(x) + C}$ 　　k は定数

2 $\displaystyle\int \boldsymbol{\{f(x) + g(x)\}\,dx = F(x) + G(x) + C}$

3 $\displaystyle\int \boldsymbol{\{f(x) - g(x)\}\,dx = F(x) - G(x) + C}$

例 6.9 (1) $\displaystyle\int 5x\,dx = 5\cdot\frac{1}{2}x^2 + C = \frac{5}{2}x^2 + C$

(2) $$\begin{aligned}\int (6x^2 - 2x + 3)\,dx &= 6\cdot\frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + 3x + C \\ &= 2x^3 - x^2 + 3x + C\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\int (x+2)(x-1)\,dx &= \int (x^2 + x - 2)\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C\end{aligned}$$

6.30 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{2}\,dx$ (阪急電鉄)

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{2}x\,dx$ (三菱重工業)

(3) $\displaystyle\int (x+2)\,dx$ (日立エレクトロニクス)

(4) $\displaystyle\int (3x^2-4x+3)\,dx$ (マツダ)

(5) $\displaystyle\int (x^3-x-1)\,dx$ (日本電気)

(6) $\displaystyle\int (2x^3-6x+3)\,dx$ (日本輸送機)

(7) $\displaystyle\int x(1+x^2)\,dx$ (九州電力)

(8) $\displaystyle\int (x-1)^2\,dx$ (トヨタ自動車)

6.31 次の関数を積分せよ．

(1) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ (殖産住宅)

(2) $f(x) = (x-2)(x+1)$ (豊和工業)

例題 6.11 $f'(x) = (x+1)(3x-1)$，$f(-1) = 3$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

【解】 関数 $f(x)$ は，$f'(x) = (x+1)(3x-1)$ の不定積分であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (x+1)(3x-1)\,dx \\ &= \int (3x^2+2x-1)\,dx \\ &= x^3 + x^2 - x + C \end{aligned}$$

よって $\quad f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + C = C + 1$

条件から $C + 1 = 3$ であり $\quad C = 2$

したがって $\quad f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$

6.32 $f(1) = 2$, $f'(x) = (2x-3)(x+2)$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(NEC フィールディング)

6.3.2 定積分

定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

例 6.10 (1) $\displaystyle\int_1^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^3 (4x-3)\,dx = \Big[\,2x^2 - 3x\,\Big]_{-1}^3$

$= (2\cdot 3^2 - 3\cdot 3) - \{2(-1)^2 - 3(-1)\} = 4$

6.33 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^3 x^3\,dx$ (住友電気工業)

(2) $\displaystyle\int_1^2 (3x-2)\,dx$ (新日本石油)

(3) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\,dx$ (安川電機)

(4) $\displaystyle\int_1^3 (x+3)(x-1)\,dx$ (ダイフク)

(5) $\displaystyle\int_1^4 (x+1)^2\,dx$ (前田建設工業)

(6) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+4)(2x-1)\,dx$ (九州電力)

(7) $\displaystyle\int_1^3 x(x+1)(x+2)\,dx$ (新日本石油)

(8) $\displaystyle\int_{-1}^2 (5x^4-6x^2+1)\,dx$ (NEC エンジニアリング)

関数の定数倍および和，差の定積分

1 $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$　　k は定数

2 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

例 6.11 次の定積分を求めよ．ただし，p，q は定数とする．

(1) $\displaystyle\int_1^3 (px^2+qx)\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int_0^1 (x+3)^2\,dx - \int_0^1 (x-3)^2\,dx$

【解】 (1)

$$\int_1^3 (px^2+qx)\,dx = p\int_1^3 x^2\,dx + q\int_1^3 x\,dx = p\left[\,\frac{x^3}{3}\,\right]_1^3 + q\left[\,\frac{x^2}{2}\,\right]_1^3$$

$$= p\cdot\frac{3^3-1^3}{3} + q\cdot\frac{3^2-1^2}{2} = \frac{26}{3}p + 4q$$

(2)

$$\int_0^1 (x+3)^2\,dx - \int_0^1 (x-3)^2\,dx = \int_0^1 \{(x+3)^2-(x-3)^2\}\,dx$$

$$= \int_0^1 12x\,dx = \left[\,6x^2\,\right]_0^1$$

$$= 6\cdot1^2 - 6\cdot0^2 = 6$$

6.34 次の定積分を求めよ．ただし，k は定数とする．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^2 (kx^2+2x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_1^3 (x+1)(x+4)\,dx - \int_1^3 (x+2)^2\,dx$

定積分の上端，下端に関する性質として，次のことが成り立つ．

定積分の性質

1 $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$　　　**2** $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

3 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

[注意] 性質 **3** は，a，b，c の大小に関係なく成り立つ．

例 6.12 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^3 (3x^2+4x)\,dx - \int_1^3 (3x^2+4x)\,dx$$

【解】
$$\int_0^3 (3x^2+4x)\,dx - \int_1^3 (3x^2+4x)\,dx$$
$$= \int_0^3 (3x^2+4x)\,dx + \int_3^1 (3x^2+4x)\,dx$$
$$= \int_0^1 (3x^2+4x)\,dx = \Big[\ x^3+2x^2\ \Big]_0^1$$
$$= (1^3+2\cdot 1^2) - 0 = 3$$

6.35 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_3^3 (7x^2-9x+5)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^4 (x^2-2x+3)\,dx - \int_1^4 (x^2-2x+3)\,dx$

定積分と微分法

a を定数とするとき

x の関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ の導関数は $f(x)$ である．

［注意］ x の関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ の導関数を $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt$ で表すこともある．

例題 6.12 等式 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - x - 2$ が，任意の x に対して成り立つとき，関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．

【解】 等式の両辺を x で微分すると　　$f(x) = 2x - 1$

また，与えられた等式で $x = a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$$0 = a^2 - a - 2$$

これを解くと　　$a = -1,\ 2$

よって　　$f(x) = 2x - 1$，$a = -1,\ 2$

6.36 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x (3t^2 - t)\,dt$ を微分せよ．

(2) 次の等式を満たす関数 $g(x)$，および定数 a の値を求めよ．

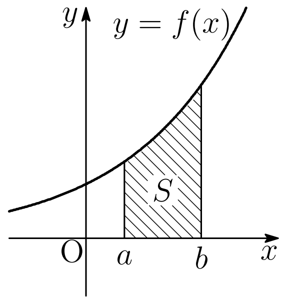
$$\int_a^x g(t)\,dt = x^2 - 2x + 1$$

6.3.3 図形の面積と定積分

定積分と図形の面積 (1)

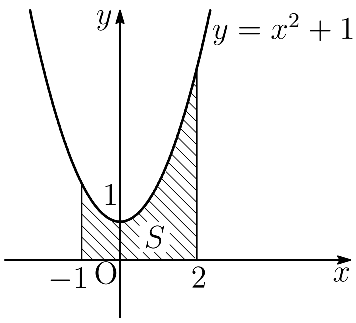
$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，
$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線
$x = a$，$x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$



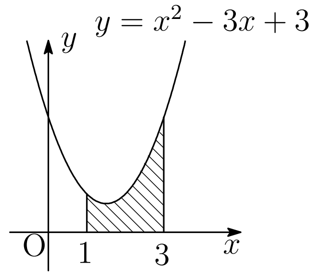
例 6.13 放物線 $y = x^2 + 1$ と x 軸および 2 直線 $x = -1$，$x = 2$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left(\frac{2^3}{3} + 2\right) - \left\{\frac{(-1)^3}{3} + (-1)\right\} = 6$$



6.37 次の問いに答えよ．

(1) 図の斜線部の面積を求めよ． (NEC フィールディング)



(2) 直線 $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$ と直線 $x = 4$，x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ． (きんでん)

(3) $y = x^2 - x + 3$ と x 軸，直線 $x = 1$，$x = 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ．
(ニッシン工業)

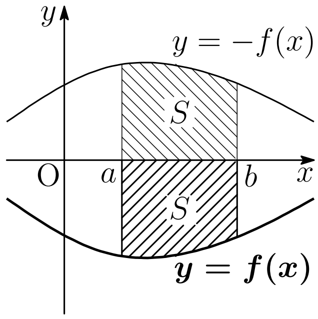
(4) 放物線 $y = 3 + 2x - x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．(日立研究所)

(5) 放物線 $y = 1 - 4x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．(トヨタ自動車)

定積分と図形の面積 (2)

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \leqq 0$ のとき,
$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線
$x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\boldsymbol{S = \int_a^b \{-f(x)\}dx}$$

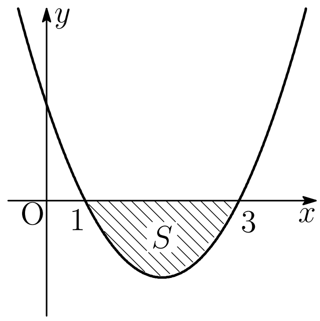


例題 6.13 放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

【解】 この放物線と x 軸の交点の x 座標は,
$x^2 - 4x + 3 = 0$ を解いて

$$x = 1,\ 3$$

$1 \leqq x \leqq 3$ では $y \leqq 0$ であるから,
求める面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{-(x^2 - 4x + 3)\}\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3 \\ &= \left(-\frac{3^3}{3} + 2\cdot3^2 - 3\cdot3\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 2\cdot1^2 - 3\cdot1\right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

6.38 次の問いに答えよ.

(1) 放物線 $y = x^2 - 1$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.　　(都市再生機構)

(2) 放物線 $y = x^2 - 9x + 18$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

(本州四国連絡橋公団)

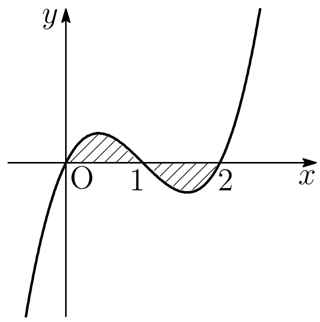
(3) 放物線 $y = x^2 - ax$ $(a > 0)$ と x 軸で囲まれた部分の面積が 36 になるとき a の値を求めよ.

(NEC フィールディング)

例題 6.14 関数 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

【解】 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ と x 軸の交点の x 座標は,
$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ を解いて

$$x = 0,\ 1,\ 2$$



$0 \leqq x \leqq 1$ において　$y \geqq 0$
$1 \leqq x \leqq 2$ において　$y \leqq 0$

ゆえに, 求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx + \int_1^2 \{-(x^3 - 3x^2 + 2x)\}\,dx \\
&= \left[\ \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\ \right]_0^1 + \left[\ -\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\ \right]_1^2 \\
&= \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2\right) - 0 + \left(-\frac{2^4}{4} + 2^3 - 2^2\right) - \left(-\frac{1^4}{4} + 1^3 - 1^2\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

6.39 次の問いに答えよ.

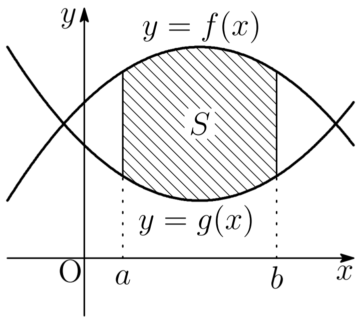
(1) 曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.　(日本電池)

(2) 曲線 $y = -(x-1)(x-2)(x-3)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.
(安川電機)

定積分と図形の面積 (3)

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq g(x)$ のとき，
$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフおよび 2 直線
$x = a$，$x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\boldsymbol{S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx}$$



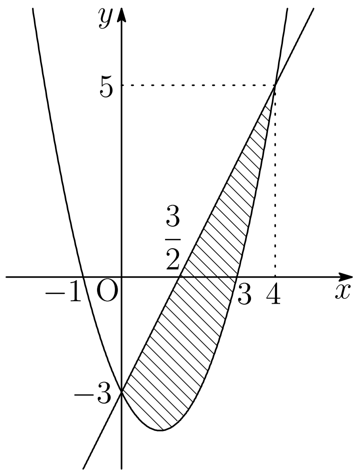
例題 6.15 放物線 $y = x^2 - 2x - 3$ と直線 $y = 2x - 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

【解】 放物線と直線の交点の x 座標は，方程式

$$x^2 - 2x - 3 = 2x - 3$$

を解いて　　$x = 0,\ 4$
右の図から，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \{(2x-3) - (x^2 - 2x - 3)\}\,dx \\ &= \int_0^4 (-x^2 + 4x)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$



6.40 次の問いに答えよ．

(1) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(日本道路公団)

(2) 直線 $y=-x+5$ と放物線 $y=x^2-1$ で囲まれた部分の面積を求めよ． (東レ)

(3) 放物線 $y=(x-1)^2$ と直線 $y=x+1$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(日本道路公団)

6.41 次の問いに答えよ．

(1) 放物線 $4y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分の面積を求めよ． (日本航空)

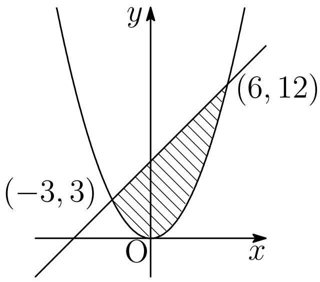
(2) 領域 $\begin{cases} x-y \leqq 0 \\ x^2-2x+y \leqq 0 \end{cases}$ の面積を求めよ． (日本電気)

(3) 直線と放物線の方程式が $y = lx + m$, $y = nx^2$ のとき次の問いに答えよ.

(日立ソフトウェアエンジニアリング)

(i) l, m, n を求めよ.

(ii) 斜線部の面積を求めよ.



(4) 2つの放物線 $y = x^2 - 4x + 3$, $y = 6 + x - x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

(三菱電機)

例題 6.16 曲線 $y = x^3 + x^2 - 3x + 6$ 上の点 $(1,\ 5)$ における接線と曲線によって囲まれた部分の面積を求めよ.

【解】 $y' = 3x^2 + 2x - 3$ であるから　$x = 1$ のとき $y' = 2$

接線の方程式は　$y - 5 = 2(x - 1)$

ゆえに　　　　　$y = 2x + 3$

曲線と接線の共有点の x 座標は

$$(x^3 + x^2 - 3x + 6) - (2x + 3) = (x - 1)^2(x + 3) \text{ により}\quad x = -3,\ 1$$

区間 $-3 \leqq x \leqq 1$ では，$(x - 1)^2(x + 3) \geqq 0$ であるから，この区間において，曲線は接線の上側にある．したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-3}^{1} \{(x^3 + x^2 - 3x + 6) - (2x + 3)\}\, dx \\
&= \int_{-3}^{1} (x^3 + x^2 - 5x + 3)\, dx \\
&= \left[\ \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 3x\ \right]_{-3}^{1} \\
&= \left(\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} - \frac{5}{2}\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right) - \left\{\frac{(-3)^4}{4} + \frac{(-3)^3}{3} - \frac{5}{2}(-3)^2 + 3(-3)\right\} \\
&= \frac{64}{3}
\end{aligned}$$

6.42 次の問いに答えよ.

(1) 曲線 $y = x^3 - 3x$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．ただし，その領域は $x \geqq 0$ とする.　　(関東自動車工業)

(2) 関数 $y = x^3 - 3x + 2$ の極値を求め，直線 $y = 2$ とグラフの囲む部分の面積を求めよ．　(NEC フィールディング)

(3) 曲線 $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ 上の点 $(1, -2)$ における接線と曲線によって囲まれた部分の面積を求めよ．　(日立製作所)

重要な定積分

α，β を実数とする．

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

とくに 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解を α，β とすると

$$\int_{\alpha}^{\beta}(ax^2+bx+c)\,dx=a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

[証明]

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx&=\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx\\&=\int_{\alpha}^{\beta}x^2\,dx-(\alpha+\beta)\int_{\alpha}^{\beta}x\,dx+\alpha\beta\int_{\alpha}^{\beta}dx\\&=\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\beta+\alpha)^2+6\alpha\beta\}\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2)=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

以上により，第 1 式は成り立つ．

α，β は 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解であるから，解と係数の関係により

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left\{x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}\right\}=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\\&=a(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

ゆえに，第 2 式が導かれる．　**[証終]**

たとえば，この公式を 182 ページの例題 6.13 に適用すると

$$\begin{aligned}S&=\int_1^3\{-(x^2-4x+3)\}\,dx=-\int_1^3(x-1)(x-3)\,dx\\&=-\left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

また，185 ページの例題 6.15 では

$$\begin{aligned}S&=\int_0^4\{(2x-3)-(x^2-2x-3)\}\,dx=-\int_0^4 x(x-4)\,dx\\&=-\left(-\frac{1}{6}\right)(4-0)^3=\frac{32}{3}\end{aligned}$$

答

答 (式と証明)

1.1 (1) 商 $-3x$，余り 0　(2) 商 $2x^2-x+3$，余り -2　(3) 商 $x^2+6x+16$，余り 47
(4) 商 $3x^2-x+1$，余り 0　(5) 商 p^2+3p+2，余り 0　(6) 商 $x-2$，余り $6x+1$
(7) 商 $2x-3$，余り -5　(8) 商 a^2-3a+1，余り 0
(9) 商 $2x^2+xy+4y^2$，余り 0

1.2 (1) $A=x^3-x^2-7x+5$　(2) $B=x^2-3x+4$

1.3 (1) $-\dfrac{b^4c^7}{3a^4d}$　(2) $\dfrac{1}{x-2}$　(3) $x+1$　(4) $\dfrac{x+3}{2(x-1)}$　(5) $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}$　(6) $x+1$

1.4 (1) $\dfrac{2a}{3b^2xy}$　(2) $\dfrac{2y^3}{x^3}$　(3) $\dfrac{135x^3y^3}{8a^2}$　(4) $-\dfrac{4}{a^4b}$　(5) $\dfrac{3}{2}$　(6) 1　(7) $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

1.5 (1) 1　(2) $\dfrac{x-2}{x+4}$　(3) $\dfrac{a-6}{a-3}$　(4) $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$　(5) $\dfrac{(x-1)(2x+1)}{(x+3)(x-4)}$　(6) $\dfrac{y}{x}$
(7) $\dfrac{1}{x+2y}$　(8) $\dfrac{x-2}{x-1}$　(9) $\dfrac{x}{3}$

1.6 (1) 1　(2) 1　(3) $\dfrac{1}{x+1}$　(4) $\dfrac{1}{x+2}$　(5) 2

1.7 (1) $\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}$　(2) $\dfrac{1}{x+4}$　(3) 0　(4) $\dfrac{2(3x+2)}{(x+2)(x-2)}$　(5) $\dfrac{3}{x+y}$　(6) $\dfrac{x+y}{x-y}$
(7) $\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$　(8) $\dfrac{a}{a-b}$　(9) $\dfrac{x}{x+1}$

1.8 (1) $-\dfrac{2}{c}$　(2) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$　(3) 0　(4) $\dfrac{a+2}{(a+1)(a+3)}$　(5) $\dfrac{1}{a+3}$
(6) $-\dfrac{y}{x(x-2y)}$　(7) $\dfrac{4}{x+2}$　(8) 3

1.9 (1) $A=2,\ B=-5,\ C=12$　(2) $a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{1}{2}$
(3) $A=3,\ B=-2,\ C=-1$

1.10 $a+b+c=0$ から

$$a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b$$

よって　$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$
$=(-c)(-a)(-b)+abc=0$

1.11 $a+b+c=0$ から

$$a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b$$

よって $$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3$$

$$=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3$$

$$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+3$$

$$=-1-1-1+3=0$$

1.12 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと $a=bk,\ c=dk$

よって $$\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{bk\cdot b+dk\cdot d}{bk\cdot b-dk\cdot d}=\frac{k(b^2+d^2)}{k(b^2-d^2)}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$$

$$\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\frac{(bk)^2+(dk)^2}{(bk)^2-(dk)^2}=\frac{k^2(b^2+d^2)}{k^2(b^2-d^2)}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$$

したがって $$\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$$

1.13 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=k$ とおくと $x=ak,\ y=bk$

(1) よって $$\frac{x^2}{a^2}=\frac{(ak)^2}{a^2}=k^2$$

$$\frac{x^2-xy+y^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{(ak)^2-ak\cdot bk+(bk)^2}{a^2-ab+b^2}$$

$$=\frac{k^2(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}=k^2$$

したがって $$\frac{x^2}{a^2}=\frac{x^2-xy+y^2}{a^2-ab+b^2}$$

(2) よって $$\frac{pa+rx}{qa+sx}=\frac{pa+r\cdot ak}{qa+s\cdot ak}=\frac{a(p+rk)}{a(q+sk)}=\frac{p+rk}{q+sk}$$

$$\frac{pb+ry}{qb+sy}=\frac{pb+r\cdot bk}{qb+s\cdot bk}=\frac{b(p+rk)}{b(q+sk)}=\frac{p+rk}{q+sk}$$

したがって $$\frac{pa+rx}{qa+sx}=\frac{pb+ry}{qb+sy}$$

1.14

(1) $$\begin{aligned} a^2+b^2-2(a+b-1) &= a^2-2a+1+b^2-2b+1 \\ &= (a-1)^2+(b-1)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

したがって　$a^2+b^2 \geqq 2(a+b-1)$

等号が成り立つのは，$a-1=0$ かつ $b-1=0$,

すなわち　$a=1$，$b=1$ のときである．

(2) $$\begin{aligned} a^2-ab+b^2 &= a^2-ab+\frac{b^2}{4}+\frac{3}{4}b^2 \\ &= \left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

したがって　$a^2-ab+b^2 \geqq 0$

等号が成り立つのは，$a-\dfrac{b}{2}=0$ かつ $b=0$,

すなわち　$a=0$，$b=0$ のときである．

(3) $$\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx) \\ &= \frac{1}{2}\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\} \\ &= \frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geqq 0 \end{aligned}$$

したがって　$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$

等号が成り立つのは，$x-y=0$ かつ $y-z=0$ かつ $z-x=0$,

すなわち　$x=y=z$ のときである．

1.15

(1) $a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$$

よって　$a+\dfrac{1}{a} \geqq 2$

(2) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1$

$$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$$

ここで，$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{b}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2 \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2=4$$

よって　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 4$

(3) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right)=1+\dfrac{ad}{bc}+\dfrac{bc}{ad}+1$

$$=\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}+2$$

ここで，$\dfrac{ad}{bc}>0$，$\dfrac{bc}{ad}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}+2 \geqq 2\sqrt{\frac{ad}{bc}\cdot\frac{bc}{ad}}+2=4$$

よって　$\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right) \geqq 4$

答 (複素数と方程式)

2.1 (1) $x=5$，$y=4$　(2) $x=-2$，$y=3$　(3) $x=-2$，$y=-2$

2.2 (1) $1+7i$　(2) $14+8i$　(3) $27+11i$　(4) $23-7i$　(5) 17　(6) 26　(7) i　(8) 25　(9) i　(10) $-3+4i$　(11) 10　(12) $15-3\sqrt{3}\,i$　(13) $-2+2i$　(14) 8

2.3 $\dfrac{11}{25}+\dfrac{2}{25}i$

2.4 (1) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}i$　(2) i　(3) $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$　(4) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i$　(5) $-\dfrac{5}{13}-\dfrac{1}{13}i$　(6) $-i$　(7) $-i$　(8) 2　(9) 5　(10) $\dfrac{11}{10}-\dfrac{3}{10}i$

2.5 (1) -10　(2) -6　(3) $4+\sqrt{2}\,i$　(4) $-2+8\sqrt{3}\,i$

2.6 $t=\dfrac{3\pm 3i}{2}$

2.7 (1) $x=\dfrac{-2\pm 9i}{5}$　(2) $x=\dfrac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{7}\,i}{6}$　(3) $y=\dfrac{-1\pm\sqrt{35}\,i}{3}$

2.8 (1) 異なる 2 つの実数解　(2) 異なる 2 つの実数解　(3) 重解
(4) 異なる 2 つの虚数解　(5) 異なる 2 つの虚数解　(6) 重解

2.9 (1) $k < -3, 5 < k$　(2) $k < 2,\ 8 < k$　(3) $a = 2, 6$　(4) $0 < k < \dfrac{1}{2}$　(5) $k \leqq 5$
(6) $-1 < m < 4$

2.10 2 次方程式の 2 つの解を α, β とすると
(1) $\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = 3$　(2) $\alpha + \beta = -\dfrac{2}{3},\ \alpha\beta = -\dfrac{5}{3}$　(3) $\alpha + \beta = \dfrac{4}{3},\ \alpha\beta = \dfrac{1}{2}$

2.11 (1) (i) -4　(ii) 1　(iii) 14　(2) (i) $-\dfrac{5}{3}$　(ii) $\dfrac{1}{3}$　(iii) $\dfrac{19}{9}$　(3) (i) 2　(ii) 2　(iii) 0
(iv) -4　(4) 1　(5) (i) 3　(ii) $\dfrac{3}{4}$　(6) (i) 81　(ii) 16　(7) 63　(8) 2

2.12 (1) $k = \dfrac{5}{4}$　(2) $m = -\dfrac{3}{2},\ 6$
(3) $a = -10$ のとき $x = 4,\ 6$　$a = \dfrac{35}{6}$ のとき $x = -\dfrac{7}{3},\ -\dfrac{7}{2}$

2.13 (1) $p = -7,\ q = 10$　(2) $a = 12,\ b = -8$

2.14 $x^2 + x - 6 = 0$

2.15 (1) $4x^2 + 2x - 5 = 0$　(2)(i) $x^2 - 14x + 20 = 0$　(ii) $5x^2 - 7x + 1 = 0$
(3) $27x^2 + 6x + 4 = 0$

2.16 (1) 0　(2) $\dfrac{7}{8}$　(3) 20

2.17 (1) $a = 1$　(2) $p = -6$, 余り 12　(3) $p = -1$　(4) $p = -2$

2.18 (1) $a = -5,\ b = -10$　(2) $p = 5,\ q = -1$　(3) $a = 5,\ b = -9$

2.19 (1) $x + 1$　(2) $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3}$

2.20 (1) $(x-1)^2(x+2)$　(2) $(x+1)^2(x-2)$　(3) $(x-1)(x^2-2x-1)$　(4) $(x-1)^2(x-2)$
(5) $(x-1)(x^2-x-7)$　(6) $(x+2)(x^2-x-3)$　(7) $(x-1)(x+2)(x-3)$
(8) $(x+2)(x^2-6x+4)$　(9) $(x-2)(x+3)(x+4)$　(10) $(x+2)(x-3)(2x-1)$
(11) $(x+1)(x-2)(3x-2)$　(12) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-3)$

2.21 (1) $x = 1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$　(2) $x = \pm 2,\ \pm i$　(3) $x = \pm\sqrt{2},\ \pm 2i$ (4) $x = \pm 1,\ \pm 3$
(5) $x = \pm 1,\ 2,\ 4$　(6) $x = 1,\ \pm 2,\ 5$ (7) $x = 2 \pm \sqrt{5},\ 2 \pm 2\sqrt{5}$

2.22 (1) $x = 1$(2 重解), -2　(2) $x = 1,\ 1 \pm \sqrt{3}$　(3) $x = 1$(2 重解), 2
(4) $x = 1,\ -2,\ 3$　(5) $x = 1,\ 2,\ 3$　(6) $x = 1,\ 2,\ 5$　(7) $x = -2,\ \dfrac{1 \pm \sqrt{11}\,i}{2}$
(8) $x = 1,\ 3,\ \dfrac{1}{3}$

2.23 (1) $a = 3$　(2) $x = 1 \pm 2i$

2.24 $a = 8,\ b = 8,\ x = 1 \pm \sqrt{3}\,i$

答 (図形と方程式)

3.1 (1) 3　(2) 5　(3) 10
3.2 (1) 1　(2) 14　(3) -8　(4) 2
3.3 (1) 5　(2) 10　(3) 20　(4) 13
3.4 $\mathrm{AB}=\sqrt{37}$, $\mathrm{BC}=\sqrt{37}$, $\mathrm{CA}=5\sqrt{2}$
3.5 (1) $\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ の二等辺三角形　(2) CA を斜辺とする直角三角形
3.6 $\mathrm{C}(5,\ 0)$
3.7 (1) 内分点 $\left(6,\ \dfrac{19}{5}\right)$, 外分点 $(18,\ 11)$　(2) $\mathrm{C}(4,\ 6)$　(3) $\mathrm{C}(-1, -3)$, $\mathrm{AB}=5\sqrt{5}$
(4)(i) $3\sqrt{5}$　(ii) $(3,\ 1)$　(iii) $(-3,\ 4)$
3.8 (1) $y=3x+2$　(2) $y=2x-1$　(3) $y=\dfrac{1}{2}x+3$　(4) $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$
(5) $y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{14}{3}$　(6) $y=\sqrt{3}\,x-5\sqrt{3}+2$
3.9 (1) $y=-x+5$　(2) $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{11}{3}$　(3) $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$　(4) $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{23}{3}$
(5) $y=\dfrac{1}{2}x-3$
3.10 (1) $y=-5x-10$　(2) $y=-3x+12$　(3) $y=-2x+10$
3.11 (1)//(6), (4)//(5), (1) $\perp$ (2), (2) $\perp$ (6)
3.12 (1) $y=2x-7$　(2) $y=-\dfrac{7}{8}x+\dfrac{53}{8}$　(3) $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{11}{4}$　(4) $y=4x-6$
(5) $y=\dfrac{3}{2}x$　(6) $y=-\dfrac{1}{2}x+6$
3.13 平行のとき $m=3$, 垂直のとき $m=1,\ \dfrac{1}{2}$
3.14 (1) $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{13}{6}$　(2) $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{7}{2}$
3.15 $\mathrm{B}(4,\ 3)$
3.16 (1) $(2,\ 2)$　(2) $(-3,\ 1)$
3.17 (1) $\dfrac{5}{17}\sqrt{17}$　(2) $\dfrac{11}{5}$
3.18 (1) $(x-1)^2+(y+2)^2=9$　(2) $(x-1)^2+(y+2)^2=16$　(3) $(x-1)^2+(y-2)^2=5$
(4) $(x-3)^2+y^2=9$　(5) $(x-3)^2+(y+4)^2=25$　(6) $(x-3)^2+(y-4)^2=9$
3.19 (1) $(x-1)^2+(y-3)^2=17$　(2) $(x-1)^2+(y+2)^2=13$　(3) $(x-3)^2+(y+1)^2=17$
3.20 (1) 中心 $(4,\ 2)$, 半径 3 の円　(2) 中心 $(-3,\ 1)$, 半径 4 の円
(3) 中心 $(3,\ 1)$, 半径 $\sqrt{10}$ の円　(4) 中心 $(-1,\ 2)$, 半径 6 の円
(5) 中心 $(-2,\ 3)$, 半径 1 の円　(6) 中心 $(2, -1)$, 半径 2 の円
(7) 中心 $(-2,\ 0)$, 半径 2 の円　(8) 中心 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, 半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の円
3.21 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$
3.22 (1) $x^2+y^2-\dfrac{15}{7}x-\dfrac{25}{7}y=0$　(2) $x^2+y^2-2x+4y-8=0$

3.23 (1) $(3,\ 4),\ (5,\ 0)$ (2) $4\sqrt{5}$ (3) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ (4) $\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ (5) $(1,\ 2)$

3.24 (1) $y = \sqrt{3}x + 4,\ y = \sqrt{3}x - 4$ (2) $y = x$ (3) $y = x,\ y = -\dfrac{7}{17}x$

3.25 (1) $a = \pm 5$ (2) $-\sqrt{5} < c < \sqrt{5}$

3.26 (1) $x + 2y = 5,\ 2x - y = 5$ (2) $y = 1,\ (0,\ 1)$；$3x - 4y = 5,\ \left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$

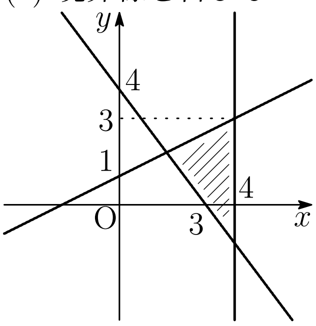
3.27 点 $(9,\ 0)$ を中心とする半径 6 の円

3.28 (1) $\begin{cases} y > 0 \\ y < x \\ y < -2x + 12 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y < -\dfrac{1}{2}x + 1 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$

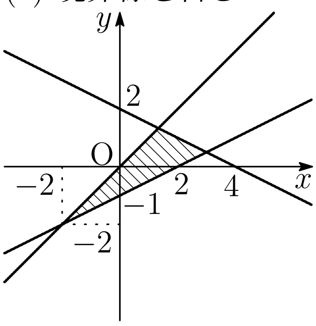
(3)(i) $\begin{cases} y \geqq 0 \\ y \leqq x + 1 \\ y \leqq -x + 4 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} y > \dfrac{3}{4}x \\ x^2 + y^2 < 25 \end{cases}$

(4)(i) $\begin{cases} y \geqq \dfrac{1}{2}x \\ y \leqq 2x \\ y \leqq -x + 3 \end{cases}$ (ii) $\dfrac{3}{2}$

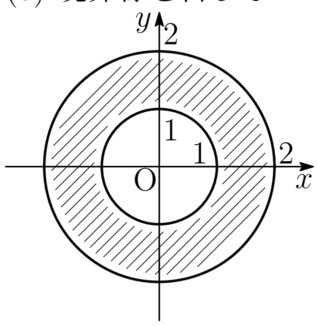
3.29 (1) 境界線を含まない



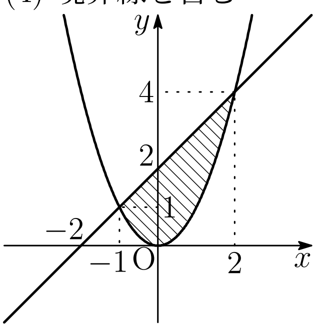
(2) 境界線を含む



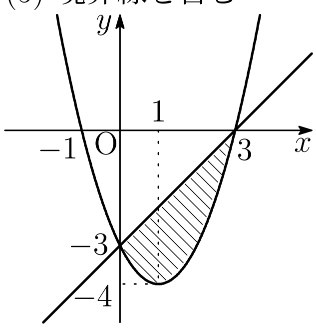
(3) 境界線を含まない



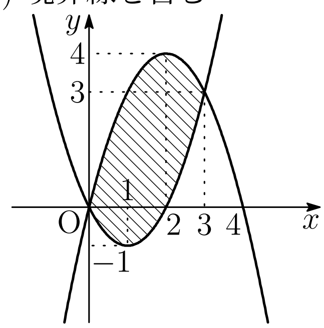
(4) 境界線を含む



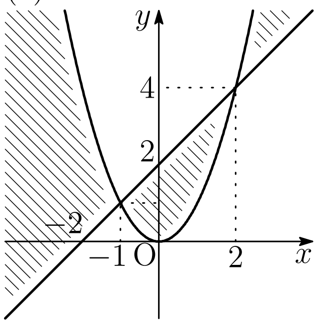
(5) 境界線を含む

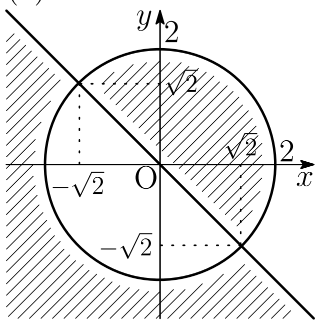


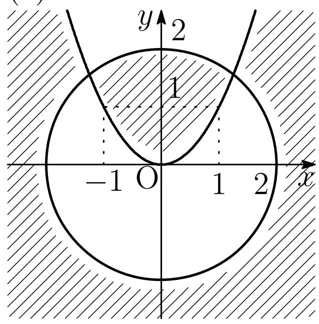
(6) 境界線を含む



3.30 (1) 境界線を含まない (2) 境界線を含まない (3) 境界線を含まない





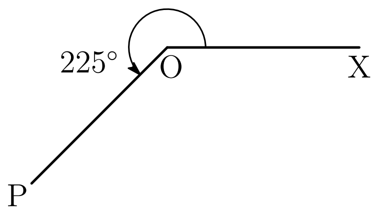


3.31 エ

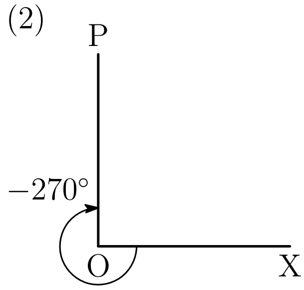
3.32 $x = 2$，$y = 3$ のとき最大値 5 をとり，$x = 0$，$y = 0$ のとき最小値 0 をとる．

答 (三角関数)

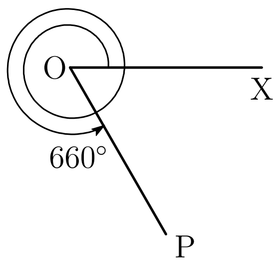
4.1 (1)



(2)



(3)



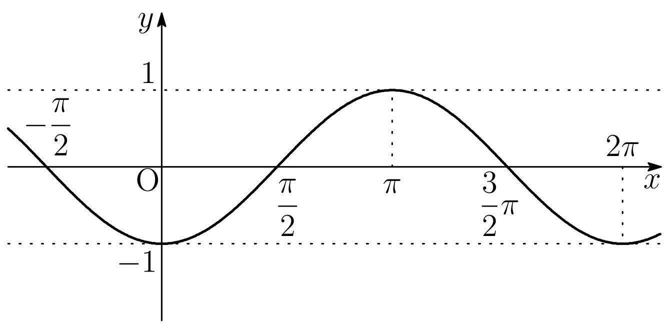
4.2 480°，840°，$-240°$

4.3 (1) $\dfrac{\pi}{12}$　(2) $-\dfrac{\pi}{3}$　(3) 288°　(4) 75°

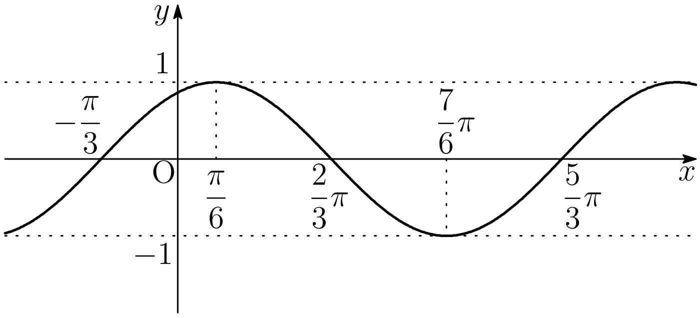
4.4 (1) $l = \pi$，$S = 4\pi$　(2) $l = 4\pi$，$S = 20\pi$

4.5 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(2)$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $-\dfrac{1}{2}$　(4) 0　(5) $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(6) 0

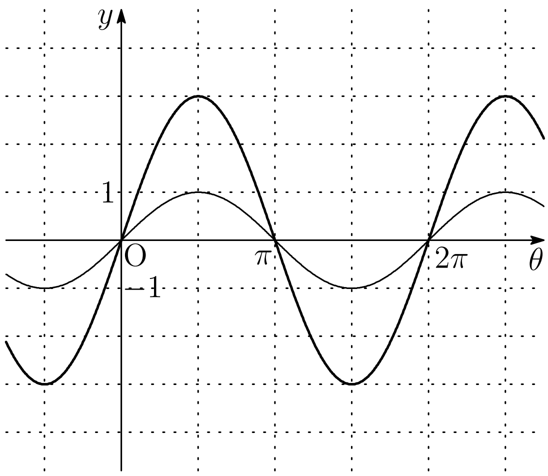
4.6 (1) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したもの．



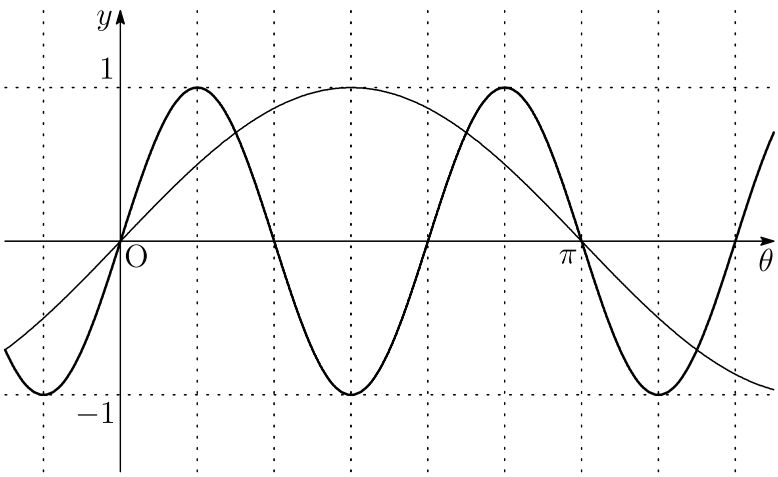
(2) $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフは，$y=\cos x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したもの．



4.7 (1) $y=3\sin\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向へ 3 倍に拡大したもの．周期は　2π



(2) $y=\sin 3\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\dfrac{1}{3}$ 倍に縮小したもの．周期は　$\dfrac{2}{3}\pi$



4.8 (1) $\sin\theta = -\dfrac{5}{13}$ (2) $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ (3) $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$, $\tan\theta = -\dfrac{3}{4}$

(4) $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$, $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$

4.9 (1) $x = 30°$ (2) $x = \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{7}{6}\pi$ (3) $x = 70°$, $250°$ (4) $x = 30°$

4.10 (1) $x = 0°$, $30°$, $150°$, $180°$, $360°$ (2) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5}{6}\pi$ (3) $\theta = 180°$ (4) $\theta = 270°$

(5) $x = 90°$ (6) $x = 0°$, $120°$, $240°$ (7) $\theta = 60°$, $300°$

4.11 $0 \leqq x < \dfrac{2}{3}\pi$, $\dfrac{4}{3}\pi < x \leqq 2\pi$

4.12 (1) $x = \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{7}{6}\pi$, $\dfrac{11}{6}\pi$ (2) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{7}{6}\pi$, $\dfrac{11}{6}\pi < x \leqq 2\pi$

4.13 最大値 $\dfrac{5}{4}$, 最小値 -5

4.14 (1) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (2) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (3) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(4) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (5) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (6) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

4.15 $2+\sqrt{3}$

4.16 $\dfrac{1-2\sqrt{6}}{6}$

4.17

(1) 加法定理

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

の辺々を加えると

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$$

(2) 上式に $x = 75°$, $y = 15°$ を代入して

$$\sin 90° + \sin 60° = 2\sin 75°\cos 15°$$

したがって

$$\sin 75°\cos 15° = \frac{1}{2}(\sin 90° + \sin 60°) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

4.18

(1) 加法定理により

$$\sin(45^\circ+\alpha)=\sin 45^\circ\cos\alpha+\cos 45^\circ\sin\alpha$$
$$\sin(45^\circ-\alpha)=\sin 45^\circ\cos\alpha-\cos 45^\circ\sin\alpha$$

の辺々を加えると

$$\sin(45^\circ+\alpha)+\sin(45^\circ-\alpha)=2\sin 45^\circ\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$$

(2) 加法定理により

$$\begin{aligned}
&\sin(A+B)\sin(A-B)\\
=&(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)\\
=&(\sin A\cos B)^2-(\cos A\sin B)^2\\
=&\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B\\
=&\sin^2 A-\sin^2 B
\end{aligned}$$

4.19 $30-10\sqrt{3}$

4.20 $\dfrac{p}{q-1}$

4.21 2 倍角の公式により

$$左辺=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+(2\cos^2\alpha-1)}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

よって $\qquad \dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$

4.22 (1) $\dfrac{24}{25}$ (2) $\dfrac{1}{2}$

4.23 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

4.24 (1) $\tan 2\alpha=-\dfrac{4}{3}$ (2) $\tan\dfrac{\alpha}{2}=3$

4.25 $x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

4.26 $x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ で最大値 $\dfrac{3}{2}$, $x=\dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -3

4.27 (1) $x=30^\circ,\ 90^\circ$ (2) $\theta=120^\circ$ (3) $\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{3}{2}\pi$

4.28 最大値 $\sqrt{2}$, 最小値 $-\sqrt{2}$

答 (指数関数と対数関数)

5.1 (1) 1 (7) -27

5.2 (1) 3 (2) $\dfrac{x^3}{y^2}$

5.3 (1) 2 (2) 3

5.4 $\sqrt{a^3}$

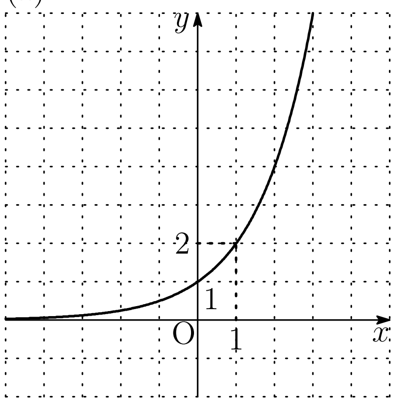
5.5 (2) $\dfrac{1}{9}$ (3) $\dfrac{1}{625}$ (4) $\dfrac{1}{125}$ (5) $\dfrac{2}{5}$

5.6 $25^{-1.5} > 81^{-\frac{5}{4}}$

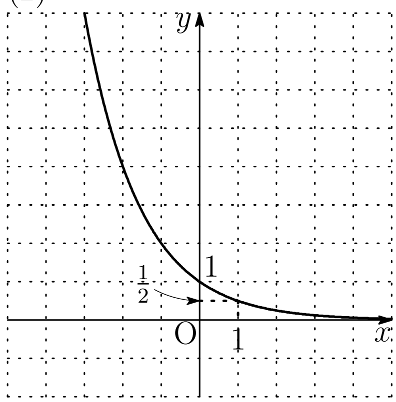
5.7 (1) 7 (2) 2 (3) 4 (4) $\dfrac{4}{3}$ (5) $\dfrac{5}{3}$ (6) 4

5.8 -3

5.9 (1)



(2)



5.10 (1) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{4} < 2$ (2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} > 1 > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{0.5}$

5.11 (1) $x < \dfrac{3}{2}$ (2) $x \leqq 4$

5.12 (1) $x = -4$ (2) $x = \dfrac{9}{2}$ (3) $x = -4$ (4) $x = -1$ (5) $x = -7$ (6) $x = -3$
(7) $x = \dfrac{1}{6}$ (8) $x = 2$ (9) $x = 3$ (10) $x = 4$

5.13 (1) $x = 2$ (2) $x = 0,\ 3$ (3) $x = 2$ (4) $x = 1,\ 2$ (5) $x = -2$ (6) $x = 3$

5.14 (1) $(x, y) = (3, 5),\ (5, 3)$ (2) $x = 21,\ y = 6$

5.15 (1) $x = 6$ (2) $x = 3$

5.16 (1) 3 (2) $\dfrac{3}{2}$ (3) 0

5.17 (1) -3 (2) -1 (3) -3 (4) -1 (5) -4 (6) 1 (7) -1

5.18 ① × ② ○ ③ ○ ④ × ⑤ ×

5.19 (1) 15 (2) 1 (3) 3 (4) 3 (5) 6 (6) 2 (7) 1 (8) $\log_{10} 4$ (9) 2 (10) $\dfrac{1}{2}$

5.20 (1) -1 (2) 0 (3) 2

5.21 (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{6}$ (5) $\frac{3}{4}$ (6) $-\frac{1}{2}$ (7) 4

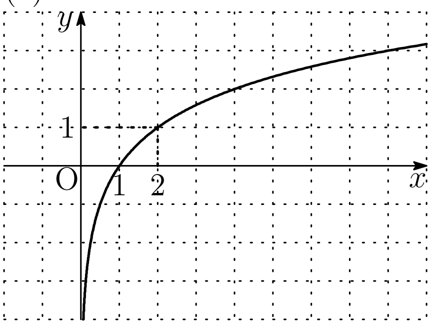
5.22 (1) $\frac{2}{3}$ (2) 3 (3) 5

5.23 $\dfrac{1+a+ab}{2+ab}$

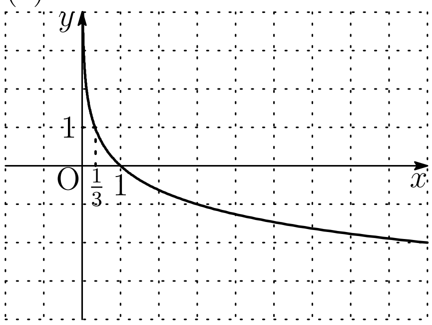
5.24 (1) $\frac{y}{x}$ (2) $\frac{z}{x+y}$ (3) $\frac{x}{z-y}$

5.25 4

5.26 (1)



(2)



5.27 (1) $0<x<3$ (2) $x \geqq 8$

5.28 (1) $x=\log_2 3$ (2) $x=-1,\ \log_2 \frac{5}{2}$

5.29 (1) $x=103$ (2) $x=\frac{19}{2}$ (3) $x=9$ (4) $x=5$ (5) $x=20$ (6) $x=4$
(7) $x=0$ (8) $x=\sqrt{2}$ (9) $x=\sqrt{10}$ (10) $x=13$ (11) $x=2$
(12) $x=\sqrt{35}-1$ (13) $x=8$ (14) $x=1$ (15) $x=2,\ 3$ (16) $x=\dfrac{9+\sqrt{13}}{2}$

5.30 (1) $(x,\ y)=(5,\ 2)$ (2) $(x,\ y)=(5,\ 2),\ \left(4,\ \frac{5}{2}\right)$ (3) $(x,\ y)=(7,\ 3)$

5.31 (1) 0.7781 (2) 1.3010 (3) 1.7781 (4) 3.7781 (5) 1.0791 (6) 1.8060
(7) -0.7781 (8) 0.1761 (9) -0.6990 (10) -0.9030 (11) 0.0333 (12) 2.9363
(13) 0.6990

5.32 (1) 1.9294 (2) 2.9294 (3) 0.9647

5.33 (1) -2 (2) -1.756

5.34 (1) 5 桁 (2) 9 桁 (3) 13 桁

5.35 (1) 7 年後 (2) 10 年後 (3) 341 乗

答 (微分と積分)

6.1 4

6.2 (1) 6 (2) 2

6.3 (1) 6　(2) 3　(3) 5　(4) 2　(5) $\dfrac{3}{2}$　(6) $\dfrac{5}{3}$　(7) $\dfrac{1}{7}$　(8) 7

6.4 (1) 108　(2) $3a^2$

6.5 (1) $a = 1,\ b = -2$　(2) $a = -3,\ b = -2$

6.6 $f'(a) = 2a$

6.7 $15x^2$

6.8 (1) $y' = 4x-3$　(2) $y' = 3x^2+6x-5$　(3) $f'(x) = 12x^3+8x$　(4) $y' = \dfrac{3}{4}x^2+x-2$

6.9 (1) $4x^3 + 6x^2 + 6x + 2$　(2) $6x + 1$

6.10 (1) $y' = 20x + 13$　(2) $y' = 12x - 13$　(3) $y' = 18x - 12$　(4) $y' = 6x^2 - 10x + 2$
(5) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$　(6) $y' = 3x^2$　(7) $y' = 4x^3 + 3x^2 - 1$
(8) $y' = 5x^4 + 6x^2 + 1$　(9) $y' = 36x^2 + 124x + 96$

6.11 $18x + 12$

6.12 $f'(2) = 8$

6.13 (1) $y = 4x - 12$　(2) $y = 9x - 14$　(3) $y = x - 1$

6.14 (1) $y = 4x - 24$　(2) $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{11}{4}$　(3) 34

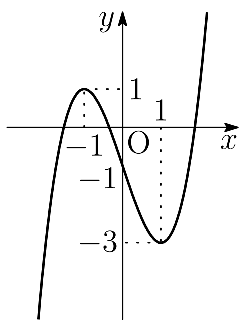
6.15 $y = 6x - 9,\ y = -2x - 1$

6.16 $y = 7x - 3,\ y = -x - 3$

6.17 (1) $2a$　(2) $2a$　(3) $2a$　(4) $2ax - a^2 + 3$　(5)(6) $3,\ -1$　(7)(8) $6x - 6,\ -2x + 2$
(9)(10) $(3, 12),\ (-1, 4)$

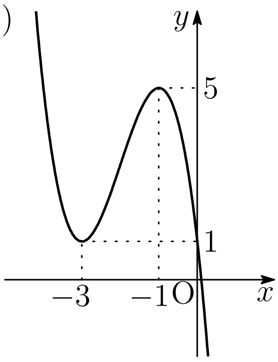
6.18 (1) $x = -3$ で極大値 29，$x = 1$ で極小値 -3
(2) $x = 1$ で極大値 0，$x = 2$ で極小値 -1
(3) $x = 3$ で極大値 1，$x = 1$ で極小値 -3
(4) $x = -2$ で極大値 21，$x = 1$ で極小値 -6
(5) $x = -1$ で極大値 1，$x = 3$ で極小値 $-\dfrac{27}{5}$

6.19



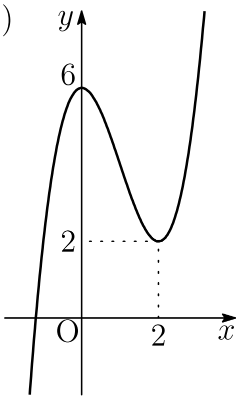
6.20 (1) $(0, 1)$　(2) $x = -1$ で極大値 5，$x = -3$ で極小値 1

(3)



6.21 (1) $a = -3,\ b = 6$　(2) $x = 0$ で極大値 6，$x = 2$ で極小値 2

(3)



6.22 (1) $a = -3,\ b = 0$　(2) 極大値 6

6.23 $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$，極小値 -1

6.24 $a = 1,\ b = -3,\ c = -24,\ d = 16$

6.25 $a < -3,\ 3 < a$

6.26 (1) $x = 0,\ 3$ で最大値 2，$x = -2$ で最小値 -18

(2) $x = 2$ で最大値 19，$x = 4$ で最小値 -33

6.27 (1) 5cm，2000cm^3　(2) $\dfrac{5}{3}$cm　(3) 5cm

6.28 (1) $0 < a < 4$　(2) $a < -2,\ 2 < a$

6.29 (1) $f(x)=(x^3+2)-3x$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-3 \\ &= 3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$

$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は，
右のようになる．
よって，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ は $x=1$ で最小値 0 をとる．
したがって，$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるから

$$(x^3+2)-3x \geqq 0$$

すなわち　$x^3+2 \geqq 3x$

等号が成り立つのは，$x=1$ のときである．

(2) $f(x)=(x^3+12x)-6x^2$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-12x+12 \\ &= 3(x-2)^2 \end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	8	$\nearrow$

$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は，
右のようになる．
よって，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ は $x=0$ で最小値 0 をとる．
したがって，$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるから

$$(x^3+12x)-3x^2 \geqq 0$$

すなわち　$x^3+12x \geqq 3x^2$

等号が成り立つのは，$x=0$ のときである．

6.30 (1) $\frac{1}{2}x+C$　(2) $\frac{1}{4}x^2+C$　(3) $\frac{1}{2}x^2+2x+C$　(4) x^3-2x^2+3x+C
(5) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2-x+C$　(6) $\frac{1}{2}x^4-3x^2+3x+C$ (7) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+C$
(8) $\frac{1}{3}x^3-x^2+x+C$

6.31 (1) x^3+x^2-x+C　(2) $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C$

6.32 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+\frac{41}{6}$

6.33 (1) 20　(2) $\frac{5}{2}$　(3) $\frac{4}{3}$　(4) $\frac{32}{3}$　(5) 39　(6) $-\frac{20}{3}$　(7) 54　(8) 18

6.34 (1) $3k+3$　(2) 4

6.35 (1) 0　(2) 15

6.36 (1) $f'(x) = 3x^2 - x$ (2) $g(x) = 2x - 2$, $a = 1$

6.37 (1) $\dfrac{8}{3}$ (2) 12 (3) $\dfrac{32}{3}$ (4) $\dfrac{32}{3}$ (5) $\dfrac{2}{3}$

6.38 (1) $\dfrac{4}{3}$ (2) $\dfrac{9}{2}$ (3) $a = 6$

6.39 (1) 8 (2) $\dfrac{1}{2}$

6.40 (1) $\dfrac{9}{2}$ (2) $\dfrac{125}{6}$ (3) $\dfrac{9}{2}$

6.41 (1) $\dfrac{8}{3}$ (2) $\dfrac{1}{6}$ (3) (i) $l = 1$, $m = 6$, $n = \dfrac{1}{3}$ (ii) $\dfrac{81}{2}$ (4) $\dfrac{343}{24}$

6.42 (1) 4 (2) $x = -1$ で極大値 4，$x = 1$ で極小値 0．面積 $\dfrac{9}{2}$ (3) $\dfrac{4}{3}$

常用対数表 (1)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3929	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6712	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

常用対数表 (2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.6523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

玉工生の　就職への数学 II

発行　平成 26 年 10 月 1 日
編者　西村　信一
印刷　　協和印刷
〒 868-0022　熊本県人吉市願成寺町 396-6
TEL (0966)25-1211　FAX (0966)24-7880