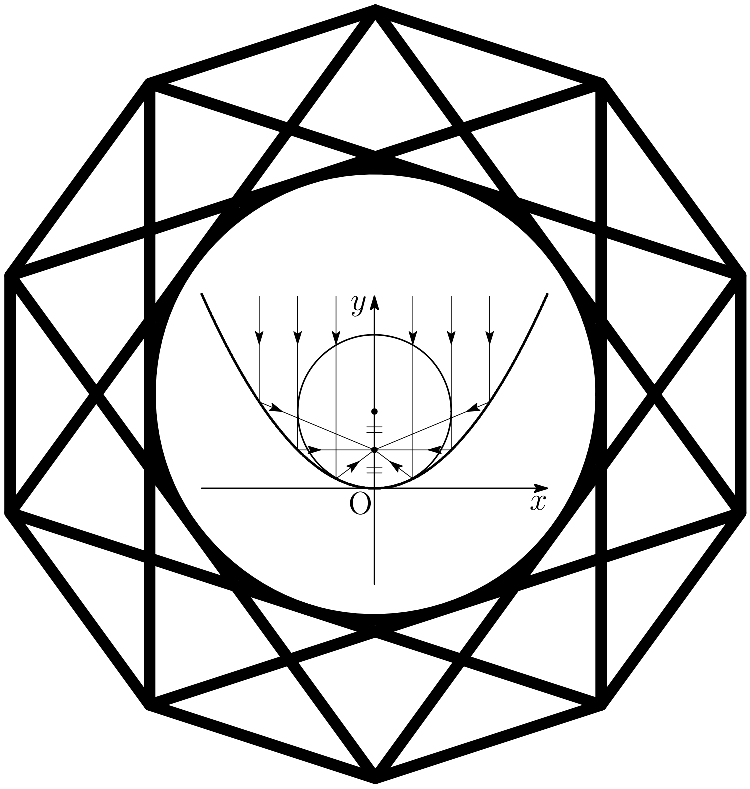
高校生の

# 就職への数学II

[解　答　編]




*Typed by* LaTeX 2ε

# 目 次

## 1.1

(1)

$$\begin{array}{rrr}
 & -3x & \\ \cline{2-3}
2x-1\,\big) & -6x^2 & +3x \\
 & -6x^2 & +3x \\ \cline{2-3}
 & & 0
\end{array}$$

(答) 商 $-3x$，余り 0

(2)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 2x^2 & -x & +3 & \\ \cline{2-5}
x+2\,\big) & 2x^3 & +3x^2 & +x & +4 \\
 & 2x^3 & +4x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -x^2 & +x & \\
 & & -x^2 & -2x & \\ \cline{3-5}
 & & & 3x & +4 \\
 & & & 3x & +6 \\ \cline{4-5}
 & & & & -2
\end{array}$$

(答) 商 $2x^2-x+3$，余り $-2$

(3)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & +6x & +16 & \\ \cline{2-5}
x-3\,\big) & x^3 & +3x^2 & -2x & -1 \\
 & x^3 & -3x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & 6x^2 & -2x & \\
 & & 6x^2 & -18x & \\ \cline{3-5}
 & & & 16x & -1 \\
 & & & 16x & -48 \\ \cline{4-5}
 & & & & 47
\end{array}$$

(答) 商 $x^2+6x+16$，余り 47

(4)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 3x^2 & -x & +1 & \\ \cline{2-5}
x-1\,\big) & 3x^3 & -4x^2 & +2x & -1 \\
 & 3x^3 & -3x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -x^2 & +2x & \\
 & & -x^2 & +x & \\ \cline{3-5}
 & & & x & -1 \\
 & & & x & -1 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

(答) 商 $3x^2-x+1$，余り 0

(5)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & p^2 & +3p & +2 & \\ \cline{2-5}
p-2\,\big) & p^3 & +p^2 & -4p & -4 \\
 & p^3 & -2p^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & 3p^2 & -4p & \\
 & & 3p^2 & -6p & \\ \cline{3-5}
 & & & 2p & -4 \\
 & & & 2p & -4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

(答) 商 $p^2+3p+2$，余り 0

(6)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x & -2 & & \\ \cline{2-5}
x^2+2x-1\,\big) & x^3 & & +x & +3 \\
 & x^3 & +2x^2 & -x & \\ \cline{2-5}
 & & -2x^2 & +2x & +3 \\
 & & -2x^2 & -4x & +2 \\ \cline{3-5}
 & & & 6x & +1
\end{array}$$

(答) 商 $x-2$，余り $6x+1$

(7)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 2x & -3 & & \\ \cline{2-5}
4x^2-3x+1\,\big) & 8x^3 & -18x^2 & +11x & -8 \\
 & 8x^3 & -6x^2 & +2x & \\ \cline{2-5}
 & & -12x^2 & +9x & -8 \\
 & & -12x^2 & +9x & -3 \\ \cline{3-5}
 & & & & -5
\end{array}$$

(答) 商 $2x-3$，余り $-5$

(8)

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & a^2 & -3a & +1 & & \\ \cline{2-6}
-a^2-2a+3\,\big) & -a^4 & +a^3 & +8a^2 & -11a & +3 \\
 & -a^4 & -2a^3 & +3a^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & 3a^3 & +5a^2 & -11a & \\
 & & 3a^3 & +6a^2 & -9a & \\ \cline{3-6}
 & & & -a^2 & -2a & +3 \\
 & & & -a^2 & -2a & +3 \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0
\end{array}$$

(答) 商 $a^2-3a+1$，余り 0

(9)
$$
\begin{array}{rlllll}
 & 2x^2 & +xy & +4y^2 & \\ \cline{2-5}
x-2y \,\big) & 2x^3 & -3x^2y & +2xy^2 & -8y^3 \\
 & 2x^3 & -4x^2y & & \\ \cline{2-3}
 & & x^2y & +2xy^2 & \\
 & & x^2y & -2xy^2 & \\ \cline{3-5}
 & & & 4xy^2 & -8y^3 \\
 & & & 4xy^2 & -8y^3 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

(答) 商 $2x^2+xy+4y^2$，余り $0$

## 1.2

(1) この割り算について，次の等式が成り立つ．

$$A=(x-3)(x^2+2x-1)+2$$

よって　$A=x^3+2x^2-x-3x^2-6x+3+2$

$\quad\quad\quad\;\; =x^3-x^2-7x+5$

(2) この割り算について，次の等式が成り立つ．

$$2x^3-7x^2+8x+1=B\times(2x-1)-3x+5$$

整理すると

$$2x^3-7x^2+11x-4=B\times(2x-1)$$

よって，$2x^3-7x^2+11x-4$ は $2x-1$ で割り切れて，その商が $B$ である．

右の計算により　$B=x^2-3x+4$

$$
\begin{array}{rllll}
 & x^2 & -3x & +4 & \\ \cline{2-5}
2x-1\,\big) & 2x^3 & -7x^2 & +11x & -4 \\
 & 2x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -6x^2 & +11x & \\
 & & -6x^2 & +3x & \\ \cline{3-5}
 & & & 8x & -4 \\
 & & & 8x & -4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

## 1.3

(1) $\dfrac{54a^{10}b^6c^8}{-162a^{14}b^2cd}=-\dfrac{b^4c^7\cdot 54a^{10}b^2c}{3a^4d\cdot 54a^{10}b^2c}=-\dfrac{b^4c^7}{3a^4d}$

(2) $\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{x-1}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{1}{x-2}$

(3) $\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+2}=x+1$

(4) $\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-6x+4}=\dfrac{(x+3)(x-2)}{2(x-1)(x-2)}=\dfrac{x+3}{2(x-1)}$

(5) $\dfrac{(x^2+3x+2)(x^2+x-2)}{(x^2-2x+1)(x+2)(x-3)}=\dfrac{(x+1)(x+2)\cdot(x+2)(x-1)}{(x-1)^2\cdot(x+2)(x-3)}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}$

(6) $\dfrac{ax^2+bx^2-a-b}{bx+ax-b-a}=\dfrac{x^2(a+b)-(a+b)}{x(a+b)-(a+b)}=\dfrac{(a+b)(x^2-1)}{(a+b)(x-1)}$

$$=\frac{(a+b)(x+1)(x-1)}{(a+b)(x-1)}=x+1$$

## 1.4

(1) $\dfrac{3x^2y}{4a^2b^3}\times\dfrac{8a^3b}{9x^3y^2}=\dfrac{2a}{3b^2xy}$

(2) $\dfrac{4xy^5}{3x^2y^3}\div\dfrac{2x^3y}{3xy^2}=\dfrac{4xy^5}{3x^2y^3}\times\dfrac{3xy^2}{2x^3y}=\dfrac{2y^3}{x^3}$

(3) $\dfrac{5a^2}{6xy}\div\left(\dfrac{2a^2}{9x^2y^2}\right)^2=\dfrac{5a^2}{6xy}\div\dfrac{4a^4}{81x^4y^4}=\dfrac{5a^2}{6xy}\times\dfrac{81x^4y^4}{4a^4}=\dfrac{135x^3y^3}{8a^2}$

(4) $\dfrac{(-2ab)^2}{(xy)^2}\times\dfrac{x^2y^2}{(-a^2b)^3}=\dfrac{4a^2b^2}{x^2y^2}\times\dfrac{x^2y^2}{-a^6b^3}=-\dfrac{4}{a^4b}$

(5) $\dfrac{2x-1}{x}\times\dfrac{3x}{4x-2}=\dfrac{2x-1}{x}\times\dfrac{3x}{2(2x-1)}=\dfrac{3}{2}$

(6) $\dfrac{x-1}{x}\times\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{x}\times\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=1$

(7) $\dfrac{x+1}{x^2-4}\div\dfrac{x^2-1}{x-2}=\dfrac{x+1}{(x+2)(x-2)}\times\dfrac{x-2}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

## 1.5

(1) $\dfrac{x^2-13x+36}{x^2-16}\div\dfrac{x-9}{x+4}=\dfrac{(x-4)(x-9)}{(x+4)(x-4)}\times\dfrac{x+4}{x-9}=1$

(2) $\dfrac{x^2-4}{x^2-16}\times\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+4x+4}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+4)(x-4)}\times\dfrac{(x+2)(x-4)}{(x+2)^2}=\dfrac{x-2}{x+4}$

(3) $\dfrac{a^2-11a+30}{a^2-6a+9}\times\dfrac{a^2-3a}{a^2-5a}=\dfrac{(a-5)(a-6)}{(a-3)^2}\times\dfrac{a(a-3)}{a(a-5)}=\dfrac{a-6}{a-3}$

(4) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4}\times\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4x+3}=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-2)}\times\dfrac{(x+2)^2}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

(5) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-9}\div\dfrac{x^2-6x+8}{2x^2-5x-3}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-3)}\times\dfrac{(x-3)(2x+1)}{(x-2)(x-4)}=\dfrac{(x-1)(2x+1)}{(x+3)(x-4)}$

(6) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}\times\dfrac{xy+y^2}{x^2-xy}=\dfrac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2}\times\dfrac{y(x+y)}{x(x-y)}=\dfrac{y}{x}$

(7) $$\frac{x^2-9y^2}{x^2+6xy+9y^2}\times\frac{x+3y}{x^2-xy-6y^2}$$
$$=\frac{(x+3y)(x-3y)}{(x+3y)^2}\times\frac{x+3y}{(x+2y)(x-3y)}=\frac{1}{x+2y}$$

(8) $$\frac{x-3}{x^2-3x}\div\frac{x^2-1}{x^3-8}\times\frac{x^2+x}{x^2+2x+4}$$
$$=\frac{x-3}{x(x-3)}\times\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+1)(x-1)}\times\frac{x(x+1)}{x^2+2x+4}=\frac{x-2}{x-1}$$

(9) $$\frac{x^2-x-2}{6x-15}\times\frac{6x^2-7x-20}{x^2-4}\div\frac{3x^2+7x+4}{x^2+2x}$$
$$=\frac{(x+1)(x-2)}{3(2x-5)}\times\frac{(2x-5)(3x+4)}{(x+2)(x-2)}\times\frac{x(x+2)}{(x+1)(3x+4)}=\frac{x}{3}$$

## 1.6

(1) $$\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}=\frac{a}{a-b}+\frac{b}{-(a-b)}=\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}=1$$

(2) $$\frac{2x-1}{x-3}+\frac{x+2}{3-x}=\frac{2x-1}{x-3}+\frac{x+2}{-(x-3)}=\frac{(2x-1)-(x+2)}{x-3}=\frac{x-3}{x-3}=1$$

(3) $$\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{1-x^2}=\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{-(x^2-1)}=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}$$

(4) $$\frac{x+1}{x^2-4}-\frac{3}{(x+2)(x-2)}=\frac{x+1}{(x+2)(x-2)}-\frac{3}{(x+2)(x-2)}=\frac{(x+1)-3}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x+2}$$

(5) $$\frac{a^2}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{a^2}{a+1}-\frac{1}{a-1}=\left(\frac{a^2}{a-1}-\frac{1}{a-1}\right)+\left(\frac{1}{a+1}-\frac{a^2}{a+1}\right)$$
$$=\frac{a^2-1}{a-1}+\frac{1-a^2}{a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a-1)}{a-1}+\frac{(1+a)(1-a)}{a+1}$$
$$=(a+1)+(1-a)=2$$

## 1.7

(1) $$\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x^2-4}=\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}-\frac{2}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{(x+2)-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{x}{(x+2)(x-2)}$$

(2) $$\frac{1}{x-4}-\frac{8}{x^2-16}=\frac{x+4}{(x+4)(x-4)}-\frac{8}{(x+4)(x-4)}$$
$$=\frac{(x+4)-8}{(x+4)(x-4)}=\frac{x-4}{(x+4)(x-4)}=\frac{1}{x+4}$$

(3) $$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}+\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{(x-1)+(x+1)-2x}{(x+1)(x-1)}=0$$

(4) $$\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}-\frac{8}{4-x^2}=\frac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}-\frac{8}{-(x^2-4)}$$
$$=\frac{x^2+2x}{(x+2)(x-2)}-\frac{x^2-4x+4}{(x+2)(x-2)}+\frac{8}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{(x^2+2x)-(x^2-4x+4)+8}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{6x+4}{(x+2)(x-2)}=\frac{2(3x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

(5) $$\frac{2}{x+y}-\frac{1}{x-y}+\frac{2x}{x^2-y^2}=\frac{2(x-y)}{(x+y)(x-y)}-\frac{x+y}{(x+y)(x-y)}+\frac{2x}{(x+y)(x-y)}$$
$$=\frac{(2x-2y)-(x+y)+2x}{(x+y)(x-y)}=\frac{3x-3y}{(x+y)(x-y)}$$
$$=\frac{3(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{3}{x+y}$$

(6) $$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}+\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{x(x-y)}{(x+y)(x-y)}+\frac{y(x+y)}{(x+y)(x-y)}+\frac{2xy}{(x+y)(x-y)}$$
$$=\frac{(x^2-xy)+(xy+y^2)+2xy}{(x+y)(x-y)}$$
$$=\frac{x^2+2xy+y^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{x+y}{x-y}$$

(7) $$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}-\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

(8) $$1+\frac{b}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}+\frac{b}{a-b}=\frac{(a-b)+b}{a-b}=\frac{a}{a-b}$$

(9) $$x-\frac{x^2}{x+1}=\frac{x(x+1)}{x+1}-\frac{x^2}{x+1}=\frac{(x^2+x)-x^2}{x+1}=\frac{x}{x+1}$$

## 1.8

(1) $$\frac{a+b}{ab}-\frac{b+c}{bc}-\frac{a+c}{ac}=\frac{c(a+b)}{abc}-\frac{a(b+c)}{abc}-\frac{b(a+c)}{abc}$$
$$=\frac{(ca+bc)-(ab+ca)-(ab+bc)}{abc}=\frac{-2ab}{abc}=-\frac{2}{c}$$

(2) $$\frac{3}{x^2+x-2}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{3}{(x-1)(x+2)}-\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{3(x+1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}-\frac{2(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$
$$=\frac{(3x+3)-(2x+4)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$
$$=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)(x+2)}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

(3) $$\frac{1}{x^2-4x+3}-\frac{4}{x^2+2x-15}+\frac{3}{x^2+4x-5}$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x-3)}-\frac{4}{(x-3)(x+5)}+\frac{3}{(x-1)(x+5)}$$
$$=\frac{x+5}{(x-1)(x-3)(x+5)}-\frac{4(x-1)}{(x-1)(x-3)(x+5)}+\frac{3(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+5)}$$
$$=\frac{(x+5)-(4x-4)+(3x-9)}{(x-1)(x-3)(x+5)}=0$$

(4) $$\frac{1}{a+1}-\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$
$$=\frac{(a+2)(a+3)}{(a+1)(a+2)(a+3)}-\frac{a+3}{(a+1)(a+2)(a+3)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$
$$=\frac{(a^2+5a+6)-(a+3)+1}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$
$$=\frac{a^2+4a+4}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{(a+2)^2}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$$

(5) $$\frac{1}{a+1}-\frac{1}{(a+1)(a+2)}-\frac{1}{(a+2)(a+3)}$$
$$=\frac{(a+2)(a+3)}{(a+1)(a+2)(a+3)}-\frac{a+3}{(a+1)(a+2)(a+3)}-\frac{a+1}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$
$$=\frac{(a^2+5a+6)-(a+3)-(a+1)}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$
$$=\frac{a^2+3a+2}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{1}{a+3}$$

(6) $\dfrac{x+2y}{xy-x^2}+\dfrac{2x-5y}{x^2-3xy+2y^2}-\dfrac{x-3y}{x^2-2xy}$

$=\dfrac{x+2y}{-x(x-y)}+\dfrac{2x-5y}{(x-y)(x-2y)}-\dfrac{x-3y}{x(x-2y)}$

$=\dfrac{-(x+2y)(x-2y)}{x(x-y)(x-2y)}+\dfrac{x(2x-5y)}{x(x-y)(x-2y)}-\dfrac{(x-3y)(x-y)}{x(x-y)(x-2y)}$

$=\dfrac{-(x^2-4y^2)+(2x^2-5xy)-(x^2-4xy+3y^2)}{x(x-y)(x-2y)}$

$=\dfrac{-xy+y^2}{x(x-y)(x-2y)}=\dfrac{-y(x-y)}{x(x-y)(x-2y)}=-\dfrac{y}{x(x-2y)}$

(7) $\dfrac{x-2}{2x^2-5x+3}+\dfrac{3x-1}{2x^2+x-6}-\dfrac{5-2x}{x^2+x-2}$

$=\dfrac{x-2}{(x-1)(2x-3)}+\dfrac{3x-1}{(x+2)(2x-3)}-\dfrac{-(2x-5)}{(x-1)(x+2)}$

$=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)(2x-3)}+\dfrac{(3x-1)(x-1)}{(x-1)(x+2)(2x-3)}+\dfrac{(2x-5)(2x-3)}{(x-1)(x+2)(2x-3)}$

$=\dfrac{(x^2-4)+(3x^2-4x+1)+(4x^2-16x+15)}{(x-1)(x+2)(2x-3)}$

$=\dfrac{8x^2-20x+12}{(x-1)(x+2)(2x-3)}=\dfrac{4(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+2)(2x-3)}=\dfrac{4}{x+2}$

(8) $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+x}\times\dfrac{x+1}{x^2+5x}+\dfrac{3x^2-x+3}{x^2+3x}\div\dfrac{x}{x+3}$

$=\dfrac{(x-3)(x+5)}{x(x+1)}\times\dfrac{x+1}{x(x+5)}+\dfrac{3x^2-x+3}{x(x+3)}\times\dfrac{x+3}{x}$

$=\dfrac{x-3}{x^2}+\dfrac{3x^2-x+3}{x^2}=\dfrac{3x^2}{x^2}=3$

## 1.9

(1) 等式の左辺を整理すると

$$Ax^2+(A+B)x-6A-B+C=2x^2-3x+5$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$A=2,\ \ A+B=-3,\ \ -6A-B+C=5$$

これらを解いて　　$A=2,\ \ B=-5,\ \ C=12$

(2) 等式の両辺に $(x+1)(x-1)$ をかけて　$1 = a(x+1) + b(x-1)$

よって　$1 = (a+b)x + a - b$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから　$a+b=0,\ a-b=1$

これを解いて　$a = \dfrac{1}{2},\ b = -\dfrac{1}{2}$

(3) 等式の両辺に $(x+1)(x-1)(x-2)$ をかけて

$$3x - 9 = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x+1)(x-1)$$

よって　$3x - 9 = (A+B+C)x^2 + (-A-3B)x - 2A + 2B - C$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$A+B+C=0,\ -A-3B=3,\ -2A+2B-C=-9$$

これを解いて　$A=3,\ B=-2,\ C=-1$

**1.10** $a+b+c=0$ から

$$a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b$$

よって　$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$$=(-c)(-a)(-b)+abc=0$$

**1.11** $a+b+c=0$ から

$$a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b$$

よって　$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+3$

$$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3$$

$$=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3$$

$$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+3$$

$$=-1-1-1+3=0$$

**1.12** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　　$a=bk,\ c=dk$

よって　$$\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{bk\cdot b+dk\cdot d}{bk\cdot b-dk\cdot d}=\frac{k(b^2+d^2)}{k(b^2-d^2)}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$$

$$\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\frac{(bk)^2+(dk)^2}{(bk)^2-(dk)^2}=\frac{k^2(b^2+d^2)}{k^2(b^2-d^2)}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$$

したがって　$$\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$$

**1.13** $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=k$ とおくと　　$x=ak,\ y=bk$

(1) よって　$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{(ak)^2}{a^2}=k^2$$

$$\frac{x^2-xy+y^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{(ak)^2-ak\cdot bk+(bk)^2}{a^2-ab+b^2}$$

$$=\frac{k^2(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}=k^2$$

したがって　$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{x^2-xy+y^2}{a^2-ab+b^2}$$

(2) よって　$$\frac{pa+rx}{qa+sx}=\frac{pa+r\cdot ak}{qa+s\cdot ak}=\frac{a(p+rk)}{a(q+sk)}=\frac{p+rk}{q+sk}$$

$$\frac{pb+ry}{qb+sy}=\frac{pb+r\cdot bk}{qb+s\cdot bk}=\frac{b(p+rk)}{b(q+sk)}=\frac{p+rk}{q+sk}$$

したがって　$$\frac{pa+rx}{qa+sx}=\frac{pb+ry}{qb+sy}$$

**1.14**

(1)　$$a^2+b^2-2(a+b-1)=a^2-2a+1+b^2-2b+1$$
$$=(a-1)^2+(b-1)^2\geqq 0$$

したがって　　$a^2+b^2\geqq 2(a+b-1)$

等号が成り立つのは，$a-1=0$ かつ $b-1=0$，

すなわち　$a=1,\ b=1$ のときである．

(2) $$\begin{aligned} a^2-ab+b^2 &= a^2-ab+\frac{b^2}{4}+\frac{3}{4}b^2 \\ &= \left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

したがって　　$a^2-ab+b^2 \geqq 0$

等号が成り立つのは，$a-\dfrac{b}{2}=0$ かつ $b=0$,

すなわち　$a=0$，$b=0$ のときである．

(3) $$\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx) \\ &= \frac{1}{2}\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\} \\ &= \frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geqq 0 \end{aligned}$$

したがって　　$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$

等号が成り立つのは，$x-y=0$ かつ $y-z=0$ かつ $z-x=0$,

すなわち　$x=y=z$ のときである．

## 1.15

(1) $a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$$

よって　　$a+\dfrac{1}{a} \geqq 2$

(2) $$\begin{aligned} (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) &= 1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1 \\ &= \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2 \end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{b}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2 \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2=4$$

よって　　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 4$

(3) $$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)=1+\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}+1$$
$$=\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}+2$$

ここで，$\dfrac{ad}{bc}>0$，$\dfrac{bc}{ad}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}+2 \geqq 2\sqrt{\frac{ad}{bc}\cdot\frac{bc}{ad}}+2=4$$

よって $$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right) \geqq 4$$

## 2.1

(1) 左辺を整理すると　　$(3x+2)-3yi=17-12i$

$3x+2$，$-3y$ は実数であるから　　$3x+2=17$，$-3y=-12$

これを解いて　　$x=5$，$y=4$

(2) 左辺を整理すると　　$(x+7)+(-2y+5)i=5-i$

$x+7$，$-2y+5$ は実数であるから　　$x+7=5$，$-2y+5=-1$

これを解いて　　$x=-2$，$y=3$

(3) 左辺を整理すると　　$(x+y)+(-x+y)i=-4$

$x+y$，$-x+y$ は実数であるから　　$x+y=-4$，$-x+y=0$

これを解いて　　$x=-2$，$y=-2$

## 2.2

(1) $$\begin{aligned}(4+3i)(1+i)&=4+4i+3i+3i^2\\&=\{4+3\cdot(-1)\}+(4+3)i=1+7i\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}(2+3i)(4-2i)&=8-4i+12i-6i^2\\&=\{8-6\cdot(-1)\}+(-4+12)i=14+8i\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}(4-3i)(3+5i)&=12+20i-9i-15i^2\\&=\{12-15\cdot(-1)\}+(20-9)i=27+11i\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}(5-3i)(4+i)&=20+5i-12i-3i^2\\&=\{20-3\cdot(-1)\}+(5-12)i=23-7i\end{aligned}$$

(5) $(4-i)(4+i)=4^2-i^2=16-(-1)=17$

(6) $$\begin{aligned}(3-2i)(6+4i)&=18+12i-12i-8i^2\\&=\{18-8\cdot(-1)\}+(12-12)i=26\end{aligned}$$

(7) $(-i)^3=-i^3=-i^2\cdot i=-(-1)i=i$

(8) $5i^3\times 5i^5=25i^8=25\cdot(i^2)^4=25\cdot(-1)^4=25$

(9) $$\begin{aligned}i-i^2+i^3-i^4+i^5&=i-i^2+i^2\cdot i-(i^2)^2+(i^2)^2i\\&=i-(-1)+(-1)\cdot i-(-1)^2+(-1)^2i\\&=i+1-i-1+i=i\end{aligned}$$

(10) $(1+i-i^3)^2 = (1+i-i^2 \cdot i)^2 = \{1+i-(-1)i\}^2 = (1+2i)^2$
$= 1+4i+4i^2 = 1+4i+4\cdot(-1) = -3+4i$

(11) $(\sqrt{7}-\sqrt{3}\,i)(\sqrt{7}+\sqrt{3}\,i) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3}\,i)^2 = 7-3i^2$
$= 7-3\cdot(-1) = 10$

(12) $(2+\sqrt{3}\,i)(3-\sqrt{27}\,i) = (2+\sqrt{3}\,i)(3-3\sqrt{3}\,i) = 6-6\sqrt{3}\,i+3\sqrt{3}\,i-9i^2$
$= \{6-9\cdot(-1)\} + (-6\sqrt{3}+3\sqrt{3})i = 15-3\sqrt{3}\,i$

(13) $(1+i)^3 = 1+3i+3i^2+i^3 = 1+3i+3i^2+i^2\cdot i$
$= 1+3i+3\cdot(-1)+(-1)\cdot i = 1+3i-3-i = -2+2i$

(14) $(-1+\sqrt{3}\,i)^3 = (-1)^3+3\cdot(-1)^2\cdot\sqrt{3}\,i+3\cdot(-1)\cdot(\sqrt{3}\,i)^2+(\sqrt{3}i)^3$
$= -1+3\sqrt{3}\,i-9i^2+3\sqrt{3}\,i^3$
$= -1+3\sqrt{3}\,i+9-3\sqrt{3}\,i = 8$

**2.3** $\dfrac{2-i}{4-3i} = \dfrac{(2-i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \dfrac{8+6i-4i-3i^2}{4^2+3^2} = \dfrac{11+2i}{25} = \dfrac{11}{25}+\dfrac{2}{25}i$

**2.4**

(1) $\dfrac{2+3i}{4i} = \dfrac{(2+3i)(-i)}{4i\cdot(-i)} = \dfrac{-2i-3i^2}{-4i^2} = \dfrac{3-2i}{4} = \dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}i$

(2) $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+2i+i^2}{1^2+1^2} = \dfrac{2i}{2} = i$

(3) $\dfrac{2+i}{1+i} = \dfrac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{2-2i+i-i^2}{1^2+1^2} = \dfrac{3-i}{2} = \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$

(4) $\dfrac{1-i}{2+i} = \dfrac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i-2i+i^2}{2^2+1^2} = \dfrac{1-3i}{5} = \dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i$

(5) $\dfrac{i-1}{2-3i} = \dfrac{(i-1)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{2i+3i^2-2-3i}{2^2+3^2} = \dfrac{-5-i}{13} = -\dfrac{5}{13}-\dfrac{1}{13}i$

(6) $\dfrac{2-3i}{3+2i} = \dfrac{(2-3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{6-4i-9i+6i^2}{3^2+2^2} = \dfrac{-13i}{13} = -i$

(7) $\dfrac{1+i}{i-1} = \dfrac{1+i}{-(1-i)} = -\dfrac{1+i}{1-i} = -\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = -\dfrac{1+2i+i^2}{1^2+1^2} = -\dfrac{2i}{2} = -i$

(8) $\dfrac{(1-i)(1+3i)}{2+i} = \dfrac{4+2i}{2+i} = \dfrac{2(2+i)}{2+i} = 2$

(9) $\dfrac{(3-i)(4+3i)}{3+i} = \dfrac{15+5i}{3+i} = \dfrac{5(3+i)}{3+i} = 5$

(10) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{i}{1+i}+\dfrac{1+i}{2+i}=\dfrac{-i}{i\cdot(-i)}+\dfrac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}+\dfrac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$$=\frac{-i}{1}+\frac{i-i^2}{1^2+1^2}+\frac{2-i+2i-i^2}{2^2+1^2}$$

$$=-i+\frac{1+i}{2}+\frac{3+i}{5}=\frac{-10i+5(1+i)+2(3+i)}{10}$$

$$=\frac{11-3i}{10}=\frac{11}{10}-\frac{3}{10}i$$

## 2.5

(1) $\sqrt{-4}\times\sqrt{-25}=2i\times 5i=10i^2=-10$

(2) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-18}=\sqrt{2}i\times 3\sqrt{2}i=6i^2=-6$

(3) $(1+\sqrt{-2}\,)(2-\sqrt{-2}\,)=(1+\sqrt{2}\,i)(2-\sqrt{2}\,i)$

$$=2-\sqrt{2}\,i+2\sqrt{2}\,i-2i^2=4+\sqrt{2}\,i$$

(4) $(\sqrt{-8}+\sqrt{6}\,)^2=(2\sqrt{2}\,i+\sqrt{6})^2$

$$=(2\sqrt{2}\,i)^2+2\cdot 2\sqrt{2}\,i\cdot\sqrt{6}+(\sqrt{6}\,)^2$$

$$=8i^2+8\sqrt{3}\,i+6=-2+8\sqrt{3}\,i$$

## 2.6

$$(2t-3)^2+9=0$$

$$(2t-3)^2=-9$$

$$2t-3=\pm\sqrt{-9}$$

$$2t=3\pm 3i$$

$$t=\frac{3\pm 3i}{2}$$

## 2.7

(1) $x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 5\cdot 17}}{2\cdot 5}=\dfrac{-4\pm\sqrt{-364}}{10}=\dfrac{-4\pm 18i}{10}=\dfrac{-2\pm 9i}{5}$

(2) $x=\dfrac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{(\sqrt{5}\,)^2-4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3}=\dfrac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{-7}}{6}=\dfrac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{7}\,i}{6}$

(3) 方程式を整理して　$3y^2+2y+12=0$

$$y=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 2\cdot 12}}{2\cdot 3}=\frac{-2\pm\sqrt{-140}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{35}\,i}{3}$$

## 2.8

(1) 2 次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の判別式は

$$D = (-2)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}(-1) = 8 > 0$$

よって，この 2 次方程式は異なる 2 つの実数解をもつ.

(2) 2 次方程式 $x^2 - 4x - 5 = 0$ の判別式は

$$D = (-4)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}(-5) = 36 > 0$$

よって，この 2 次方程式は異なる 2 つの実数解をもつ.

(3) 2 次方程式 $4x^2 - 12x + 9 = 0$ の判別式は

$$D = (-12)^2 - 4{\cdot}4{\cdot}9 = 0$$

よって，この 2 次方程式は重解をもつ.

(4) 2 次方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の判別式は

$$D = 1^2 - 4{\cdot}1{\cdot}1 = -3 < 0$$

よって，この 2 次方程式は異なる 2 つの虚数解をもつ.

(5) 2 次方程式 $2x^2 + 4x + 3 = 0$ の判別式は

$$D = 4^2 - 4{\cdot}2{\cdot}3 = -8 < 0$$

よって，この 2 次方程式は異なる 2 つの虚数解をもつ.

(6) 2 次方程式 $4x^2 - 12mx + 9m^2 = 0$ ($m$ は実数) の判別式は

$$D = (-12m)^2 - 4{\cdot}4{\cdot}9m^2 = 0$$

よって，この 2 次方程式は重解をもつ.

## 2.9

(1) 2 次方程式 $4x^2 + (k-1)x + 1 = 0$ の判別式は

$$D = (k-1)^2 - 4{\cdot}4{\cdot}1 = k^2 - 2k - 15 = (k+3)(k-5)$$

2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつのは $D > 0$ のときである.

よって　　　　$(k+3)(k-5) > 0$

これを解いて　　$k < -3$，$5 < k$

(2) 2 次方程式 $x^2-2(k-4)x+2k=0$ の判別式は

$$D=\{-2(k-4)\}^2-4\cdot1\cdot2k=4k^2-40k+64=4(k-2)(k-8)$$

2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつのは $D>0$ のときである.

よって　　　　　$(k-2)(k-8)>0$

これを解いて　　$k<2,\ 8<k$

(3) 2 次方程式 $x^2+ax+2a-3=0$ の判別式は

$$D=a^2-4\cdot1\cdot(2a-3)=a^2-8a+12=(a-2)(a-6)$$

2 次方程式が重解をもつのは $D=0$ のときである.

よって　　　　　$(a-2)(a-6)=0$

これを解いて　　$a=2,\ 6$

(4) 2 次方程式の $x^2$ の係数 $k$ は $k\neq0$ である.

2 次方程式 $kx^2-2kx-k+1=0$ の判別式は

$$D=(-2k)^2-4\cdot k\cdot(-k+1)=8k^2-4k=4k(2k-1)$$

2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつのは $D<0$ のときである.

よって　　　　　$k(2k-1)<0$

$k\neq0$ に注意して　　$0<k<\dfrac{1}{2}$

(5) 2 次方程式 $x^2+6x+2k-1=0$ の判別式は

$$D=6^2-4\cdot1\cdot(2k-1)=40-8k$$

2 次方程式が実数解をもつのは $D\geqq0$ のときである.

よって　　　　　$40-8k\geqq0$

これを解いて　　$k\leqq5$

(6) これらの 2 次方程式が，ともに異なる 2 つの実数解をもつとき，係数について

$$\begin{cases} 4^2 - 4{\cdot}1{\cdot}(-m^2 - 5m) > 0 \\ (-2m)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}(2m^2 - 16) > 0 \end{cases}$$

第 1 式から　$4m^2 + 20m + 16 > 0$

4 で割って　$m^2 + 5m + 4 > 0$

これを解いて　$m < -4,\ -1 < m \quad \cdots ①$

第 2 式から　$-4m^2 + 64 > 0$

$-4$ で割って　$m^2 - 16 < 0$

これを解いて　$-4 < m < 4 \quad \cdots ②$

① と ② の共通範囲を求めて　$-1 < m < 4$

## 2.10

(1) 2 次方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{-2}{1} = 2,\ \alpha\beta = \frac{3}{1} = 3$$

(2) 2 次方程式 $3x^2 + 2x - 5 = 0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{2}{3},\ \alpha\beta = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$$

(3) 2 次方程式 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4} = 0$ の両辺に 12 をかけて　$6x^2 - 8x + 3 = 0$

この 2 次方程式の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{-8}{6} = \frac{4}{3},\ \alpha\beta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

## 2.11

(1) (i) $\alpha + \beta = -\frac{4}{1} = -4$

(ii) $\alpha\beta = \frac{1}{1} = 1$

(iii) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-4)^2 - 2{\cdot}1 = 14$

(2) (i) $\alpha + \beta = -\frac{5}{3}$

(ii) $\alpha\beta = \frac{1}{3}$

(iii) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 2{\cdot}\frac{1}{3} = \frac{19}{9}$

(3) (i) $\alpha+\beta=-\dfrac{-2}{1}=2$

(ii) $\alpha\beta=\dfrac{2}{1}=2$

(iii) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot 2=0$

(iv) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\cdot 2=-4$

(4) 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\dfrac{-1}{1}=1$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{1}=1$

したがって　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta}{\alpha\beta}+\dfrac{\alpha}{\alpha\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{1}=1$

(5) 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\dfrac{-3}{2}=\dfrac{3}{2}$，$\alpha\beta=\dfrac{4}{2}=2$

(i) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=2\times\dfrac{3}{2}=3$

(ii) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta}{\alpha\beta}+\dfrac{\alpha}{\alpha\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{3}{2}\div 2=\dfrac{3}{4}$

(6) 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\dfrac{12}{4}=-3$，$\alpha\beta=\dfrac{5}{4}$

(i) $(\alpha+\beta)^4=(-3)^4=81$

(ii) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-3)^2-4\times\dfrac{5}{4}=4$ であるから

$(\alpha-\beta)^4=\{(\alpha-\beta)^2\}^2=4^2=16$

(7) 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\dfrac{6}{2}=-3$，$\alpha\beta=\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\beta}&=\frac{\beta^3}{\alpha\beta}+\frac{\alpha^3}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}\\&=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\\&=\frac{(\alpha+\beta)^3}{\alpha\beta}-3(\alpha+\beta)\\&=(-3)^3\div\left(-\frac{1}{2}\right)-3\times(-3)=63\end{aligned}$$

(8) 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\dfrac{-3}{2}=\dfrac{3}{2}$，$\alpha\beta=\dfrac{5}{2}$

したがって　$$\left(\frac{1}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1+\alpha}{\beta}\times\frac{\beta+1}{\alpha}$$
$$=\frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}{\alpha\beta}$$
$$=\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}+1\right)\div\frac{5}{2}=2$$

## 2.12

(1) 2 つの解は $\alpha$，$\alpha+2$ と表すことができる．

解と係数の関係から　$\alpha+(\alpha+2)=-3$，$\alpha(\alpha+2)=k$

すなわち　$2\alpha+2=-3$，$\alpha(\alpha+2)=k$

よって　$\alpha=-\dfrac{5}{2}$，$k=-\dfrac{5}{2}\left(-\dfrac{5}{2}+2\right)=\dfrac{5}{4}$

(2) 2 つの解は $\alpha$，$2\alpha$ と表すことができる．

解と係数の関係から　$\alpha+2\alpha=m$，$\alpha\cdot 2\alpha=m+2$

すなわち　$3\alpha=m$，$2\alpha^2=m+2$

上の 2 式から　$2\alpha^2-3\alpha-2=0$

これを解いて　$\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$2$

よって　$m=-\dfrac{3}{2}$，$6$

(3) 2 つの解は $2k$，$3k$ と表すことができる．

解と係数の関係から　$2k+3k=-a$，$2k\cdot 3k=14-a$

すなわち　$5k=-a$，$6k^2=14-a$

上の 2 式から　$6k^2-5k-14=0$

これを解いて　$k=2,-\dfrac{7}{6}$

よって　$k=2$ のとき $a=-10$，$2k=4$，$3k=6$

$k=-\dfrac{7}{6}$ のとき $a=\dfrac{35}{6}$，$2k=-\dfrac{7}{3}$，$3k=-\dfrac{7}{2}$

(答)　$a=-10$ のとき 2 つの解は $4$，$6$

$a=\dfrac{35}{6}$ のとき 2 つの解は $-\dfrac{7}{3}$，$-\dfrac{7}{2}$

## 2.13

(1) 解と係数の関係により

$$2+5=-\frac{p}{1}, \qquad 2\times 5=\frac{q}{1}$$

よって　$p=-7$, $q=10$

(2) 解と係数の関係により

$$(-3+\sqrt{5}\,)+(-3-\sqrt{5}\,)=-\frac{a}{2}, \qquad (-3+\sqrt{5}\,)(-3-\sqrt{5}\,)=\frac{-b}{2}$$

よって　$a=12$, $b=-8$

**2.14** 解の和は　$2+(-3)=-1$

解の積は　$2\times(-3)=-6$

よって，このような解をもつ 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-(-1)x-6=0$$

すなわち　$x^2+x-6=0$

## 2.15

(1) 2 次方程式 $5x^2-2x-4=0$ の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{-2}{5}=\frac{2}{5}, \qquad \alpha\beta=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$$

ここで　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta}{\alpha\beta}+\dfrac{\alpha}{\alpha\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{2}{5}\div\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=1\div\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{5}{4}$$

よって，$\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-\left(-\frac{1}{2}\right)x-\frac{5}{4}=0$$

すなわち　$4x^2+2x-5=0$

(2) 2 次方程式 $x^2-7x+5=0$ の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{-7}{1}=7, \qquad \alpha\beta=\frac{5}{1}=5$$

(i)
$$2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=2\cdot 7=14$$
$$2\alpha\times 2\beta=4\alpha\beta=4\cdot 5=20$$

よって，$2\alpha$，$2\beta$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-14x+20=0$$

(ii)
$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta}{\alpha\beta}+\frac{\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{7}{5}$$
$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{5}$$

よって，$\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-\frac{7}{5}x+\frac{1}{5}=0$$

すなわち　$5x^2-7x+1=0$

(3) 2 次方程式 $3x^2-4x+5=0$ の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{-4}{3}=\frac{4}{3}, \qquad \alpha\beta=\frac{5}{3}$$

ここで
$$\begin{aligned}(\alpha^2+\beta)+(\alpha+\beta^2)&=\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta\\&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)\\&=\left(\frac{4}{3}\right)^2-2\times\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=-\frac{2}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha^2+\beta)(\alpha+\beta^2)&=\alpha^3+\beta^3+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta\\&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha\beta)^2+\alpha\beta\\&=\left(\frac{4}{3}\right)^3-3\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{3}+\left(\frac{5}{3}\right)^2+\frac{5}{3}=\frac{4}{27}\end{aligned}$$

よって，$\alpha^2+\beta,\ \alpha+\beta^2$ を 2 つの解とする 2 次方程式は

$$x^2-\left(-\frac{2}{9}\right)x+\frac{4}{27}=0$$

すなわち　$27x^2+6x+4=0$

## 2.16

(1) $P(x)=x^3+5x^2-2x-24$ とすると

$P(x)$ を $x+3$ で割った余りは $P(-3)$ で

$$P(-3)=(-3)^3+5\cdot(-3)^2-2\cdot(-3)-24=0$$

(2) $P(x)=x^3-2x^2+2x-1$ とすると

$P(x)$ を $2x-3$ で割った余りは $P\left(\dfrac{3}{2}\right)$ で

$$P\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3-2\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\times\frac{3}{2}-1=\frac{7}{8}$$

(3) $P(x)=8x^4-6x^2-7$ とすると

$P(x)$ を $2x+3$ で割った余りは $P\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ で

$$P\left(-\frac{3}{2}\right)=8\left(-\frac{3}{2}\right)^4-6\left(-\frac{3}{2}\right)^2-7=20$$

## 2.17

(1) $P(x)=x^3-x^2-ax+2$ とすると，$P(-1)=1$ であるから

$(-1)^3-(-1)^2-a\cdot(-1)+2=1$　　これを解いて　　$a=1$

(2) $P(x)=x^3+px^2+11x+6$ とすると，$P(2)=P(3)$ であるから

$$2^3+p\cdot2^2+11\cdot2+6=3^3+p\cdot3^2+11\cdot3+6$$
$$8+4p+22+6=27+9p+33+6$$

これを解いて　　$p=-6$

したがって　　$P(x)=x^3-6x^2+11x+6$ より　$P(2)=12$

(答) $p=-6$，余り 12

(3) $P(x)=x^4-px^3+px^2-4$ とすると，$P(-2)=0$ であるから

$(-2)^4-p\cdot(-2)^3+p\cdot(-2)^2-4=0$　　これを解いて　　$p=-1$

(4) $P(x)=x^3-px^2+2x+4$ とすると，$P(p)=0$ であるから

$p^3-p\cdot p^2+2p+4=0$　　これを解いて　　$p=-2$

## 2.18

(1) $P(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$ とおく．

このとき　$P(2) = 0$　かつ　$P(-3) = 5$

$P(2) = 0$ から　$2^3 + 3{\cdot}2^2 + a{\cdot}2 + b = 0$

整理すると　$2a + b = -20$　$\cdots$①

$P(-3) = 5$ から　$(-3)^3 + 3{\cdot}(-3)^2 + a{\cdot}(-3) + b = 5$

整理すると　$-3a + b = 5$　$\cdots$②

①，② を解いて　$a = -5$，$b = -10$

(2) $P(x) = x^3 + px^2 + qx - 5$ とおく．$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ であるから，$P(x)$ が $(x+1)(x-1)$ で割り切れるための条件は

$$P(-1) = 0 \quad \text{かつ} \quad P(1) = 0$$

$P(-1) = 0$ から　$(-1)^3 + p{\cdot}(-1)^2 + q{\cdot}(-1) - 5 = 0$

整理すると　$p - q = 6$　$\cdots$①

$P(1) = 0$ から　$1^3 + p{\cdot}1^2 + q{\cdot}1 - 5 = 0$

整理すると　$p + q = 4$　$\cdots$②

①，② を解いて　$p = 5$，$q = -1$

(3) $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 18$ とおく．$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ であるから，$P(x)$ が $(x-2)(x+3)$ で割り切れるための条件は

$$P(2) = 0 \quad \text{かつ} \quad P(-3) = 0$$

$P(2) = 0$ から　$2{\cdot}2^3 + a{\cdot}2^2 + b{\cdot}2 - 18 = 0$

$4a + 2b = 2$

整理すると　$2a + b = 1$　$\cdots$①

$P(-3) = 0$ から　$2{\cdot}(-3)^3 + a{\cdot}(-3)^2 + b{\cdot}(-3) - 18 = 0$

$9a - 3b = 72$

整理すると　$3a - b = 24$　$\cdots$②

①，② を解いて　$a = 5$，$b = -9$

## 2.19

(1) 多項式を $P(x)$ とする．$P(x)$ を 2 次式 $(x-2)(x-5)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$P(x) = (x-2)(x-5)Q(x) + ax + b$$

この等式より　$P(2) = 2a + b$，$P(5) = 5a + b$

また，$x-2$ で割った余りが 3 であるから　$P(2) = 3$
　　$x-5$ で割った余りが 6 であるから　$P(5) = 6$

よって　$2a + b = 3$，$5a + b = 6$

これを解くと　$a = 1$，$b = 1$

したがって，求める余りは　$x + 1$

(2) $f(x)$ を 2 次式 $(x-1)(x+2)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q_1(x)$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$f(x) = (x-1)(x+2)Q_1(x) + ax + b$$

この等式より　$f(1) = a + b$，$f(-2) = -2a + b$

$f(x)$ を $x^2 + 2x - 3$ で割った余りが $2x + 1$ であるから，商を $Q_2(x)$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 2x - 3)Q_2(x) + 2x + 1 \\ &= (x+3)(x-1)Q_2(x) + 2x + 1 \end{aligned}$$

この等式より　$f(1) = 3$

また，$f(x)$ を $x+2$ で割った余りが 1 であるから　$f(-2) = 1$

よって　$a + b = 3$，$-2a + b = 1$

これを解くと　$a = \dfrac{2}{3}$，$b = \dfrac{7}{3}$

したがって，求める余りは　$\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3}$

## 2.20

(1) $P(x) = x^3 - 3x + 2$ とすると

$$P(1) = 1^3 - 3{\cdot}1 + 2 = 0$$

よって，$P(x)$ は $x - 1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$$

したがって

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= (x - 1)(x - 1)(x + 2) \\ &= (x - 1)^2(x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rllll}
 & x^2 & +x & -2 & \\ \cline{2-5}
x-1\,) & x^3 & & -3x & +2 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & x^2 & -3x & \\
 & & x^2 & -x & \\ \cline{3-5}
 & & & -2x & +2 \\
 & & & -2x & +2 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

(2) $P(x) = x^3 - 3x - 2$ とすると

$$P(-1) = (-1)^3 - 3{\cdot}(-1) - 2 = 0$$

よって，$P(x)$ は $x + 1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2)$$

したがって

$$\begin{aligned} x^3 - 3x - 2 &= (x + 1)(x + 1)(x - 2) \\ &= (x + 1)^2(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rllll}
 & x^2 & -x & -2 & \\ \cline{2-5}
x+1\,) & x^3 & & -3x & -2 \\
 & x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -x^2 & -3x & \\
 & & -x^2 & -x & \\ \cline{3-5}
 & & & -2x & -2 \\
 & & & -2x & -2 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

(3) $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ とすると

$$P(1) = 1^3 - 3{\cdot}1^2 + 1 + 1 = 0$$

よって，$P(x)$ は $x - 1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x - 1)(x^2 - 2x - 1)$$

$$\begin{array}{rllll}
 & x^2 & -2x & -1 & \\ \cline{2-5}
x-1\,) & x^3 & -3x^2 & +x & +1 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -2x^2 & +x & \\
 & & -2x^2 & +2x & \\ \cline{3-5}
 & & & -x & +1 \\
 & & & -x & +1 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

(4) $P(x)=x^3-4x^2+5x-2$ とすると

$$P(1)=1^3-4{\cdot}1^2+5{\cdot}1-2=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x^2-3x+2)$$

したがって

$$\begin{aligned} x^3-4x^2+5x-2 &= (x-1)(x-1)(x-2) \\ &= (x-1)^2(x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & -3x & +2 & \\ \cline{2-5}
x-1\,\big) & x^3 & -4x^2 & +5x & -2 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -3x^2 & +5x & \\
 & & -3x^2 & +3x & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x & -2 \\
 & & & 2x & -2 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

(5) $P(x)=x^3-2x^2-6x+7$ とすると

$$P(1)=1^3-2{\cdot}1^2-6{\cdot}1+7=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$x^3-2x^2-6x+7=(x-1)(x^2-x-7)$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & -x & -7 & \\ \cline{2-5}
x-1\,\big) & x^3 & -2x^2 & -6x & +7 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -x^2 & -6x & \\
 & & -x^2 & +x & \\ \cline{3-5}
 & & & -7x & +7 \\
 & & & -7x & +7 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

(6) $P(x)=x^3+x^2-5x-6$ とすると

$$P(-2)=(-2)^3+(-2)^2-5{\cdot}(-2)-6=0$$

よって，$P(x)$ は $x+2$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$x^3+x^2-5x-6=(x+2)(x^2-x-3)$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & -x & -3 & \\ \cline{2-5}
x+2\,\big) & x^3 & +x^2 & -5x & -6 \\
 & x^3 & +2x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -x^2 & -5x & \\
 & & -x^2 & -2x & \\ \cline{3-5}
 & & & -3x & -6 \\
 & & & -3x & -6 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

(7) $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ とすると

$$P(1)=1^3-2{\cdot}1^2-5{\cdot}1+6=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$$

したがって

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x+2)(x-3)$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & -x & -6 & \\ \cline{2-5}
x-1\,\big) & x^3 & -2x^2 & -5x & +6 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -x^2 & -5x & \\
 & & -x^2 & +x & \\ \cline{3-5}
 & & & -6x & +6 \\
 & & & -6x & +6 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

(8) $P(x)=x^3-4x^2-8x+8$ とすると

$$P(-2)=(-2)^3-4\cdot(-2)^2-8\cdot(-2)+8=0$$

よって，$P(x)$ は $x+2$ を因数にもつ.
右の割り算から

$$x^3-4x^2-8x+8=(x+2)(x^2-6x+4)$$

$$
\begin{array}{rllll}
 & x^2 & -6x & +4 & \\ \cline{2-5}
x+2\,) & x^3 & -4x^2 & -8x & +8 \\
 & x^3 & +2x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -6x^2 & -8x & \\
 & & -6x^2 & -12x & \\ \cline{3-5}
 & & & 4x & +8 \\
 & & & 4x & +8 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

(9) $P(x)=x^3+5x^2-2x-24$ とすると

$$P(2)=2^3+5\cdot2^2-2\cdot2-24=0$$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ.
右の割り算から

$$x^3+5x^2-2x-24=(x-2)(x^2+7x+12)$$

したがって

$$x^3+5x^2-2x-24=(x-2)(x+3)(x+4)$$

$$
\begin{array}{rllll}
 & x^2 & +7x & +12 & \\ \cline{2-5}
x-2\,) & x^3 & +5x^2 & -2x & -24 \\
 & x^3 & -2x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & 7x^2 & -2x & \\
 & & 7x^2 & -14x & \\ \cline{3-5}
 & & & 12x & -24 \\
 & & & 12x & -24 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

(10) $P(x)=2x^3-3x^2-11x+6$ とすると

$$P(-2)=2\cdot(-2)^3-3\cdot(-2)^2-11\cdot(-2)+6=0$$

よって，$P(x)$ は $x+2$ を因数にもつ.
右の割り算から

$$2x^3-3x^2-11x+6=(x+2)(2x^2-7x+3)$$

したがって

$$2x^3-3x^2-11x+6=(x+2)(x-3)(2x-1)$$

$$
\begin{array}{rllll}
 & 2x^2 & -7x & +3 & \\ \cline{2-5}
x+2\,) & 2x^3 & -3x^2 & -11x & +6 \\
 & 2x^3 & +4x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -7x^2 & -11x & \\
 & & -7x^2 & -14x & \\ \cline{3-5}
 & & & 3x & +6 \\
 & & & 3x & +6 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

(11) $P(x)=3x^3-5x^2-4x+4$ とすると

$$P(-1)=3\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)+4=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ.
右の割り算から

$$3x^3-5x^2-4x+4=(x+1)(3x^2-8x+4)$$

したがって

$$3x^3-5x^2-4x+4=(x+1)(x-2)(3x-2)$$

$$
\begin{array}{rllll}
 & 3x^2 & -8x & +4 & \\ \cline{2-5}
x+1\,) & 3x^3 & -5x^2 & -4x & +4 \\
 & 3x^3 & +3x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -8x^2 & -4x & \\
 & & -8x^2 & -8x & \\ \cline{3-5}
 & & & 4x & +4 \\
 & & & 4x & +4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

(12) $P(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$ とすると

$$P(-1)=(-1)^4-(-1)^3-7\cdot(-1)^2+(-1)+6=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ.
右の割り算から

$$x^4-x^3-7x^2+x+6=(x+1)(x^3-2x^2-5x+6)$$

$$
\begin{array}{rllllll}
 & x^3 & -2x^2 & -5x & +6 & \\ \cline{2-6}
x+1\,\big) & x^4 & -x^3 & -7x^2 & +x & +6 \\
 & x^4 & +x^3 & & & \\ \cline{2-4}
 & & -2x^3 & -7x^2 & & \\
 & & -2x^3 & -2x^2 & & \\ \cline{3-5}
 & & & -5x^2 & +x & \\
 & & & -5x^2 & -5x & \\ \cline{4-6}
 & & & & 6x & +6 \\
 & & & & 6x & +6 \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0
\end{array}
$$

さらに，(7) の結果から

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x+2)(x-3)$$

であるから

$$x^4-x^3-7x^2+x+6=(x+1)(x-1)(x+2)(x-3)$$

## 2.21

(1) $x^3-1=0$　から　　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

ゆえに　$x-1=0$　または　$x^2+x+1=0$

したがって　　$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

(2) $x^4-3x^2-4=0$　から　　$(x^2+1)(x^2-4)=0$

ゆえに　$x^2+1=0$　または　$x^2-4=0$

したがって　　$x=\pm i,\ \pm 2$

(3) $x^4+2x^2-8=0$　から　　$(x^2-2)(x^2+4)=0$

ゆえに　$x^2-2=0$　または　$x^2+4=0$

したがって　　$x=\pm\sqrt{2},\ \pm 2i$

(4) $x^4+9=10x^2$　から　　$x^4-10x^2+9=0$

$$(x^2-1)(x^2-9)=0$$

ゆえに　$x^2-1=0$　または　$x^2-9=0$

したがって　　$x=\pm 1,\ \pm 3$

(5) $x^2-3x=X$ とおくと　　$X^2-2X-8=0$

$$(X+2)(X-4)=0$$

ゆえに　　$(x^2-3x+2)(x^2-3x-4)=0$

$$(x-1)(x-2)(x+1)(x-4)=0$$

したがって　　$x=1,\ 2, -1,\ 4$

(6) $x^2-3x=X$ とおくと　$X^2-8X-20=0$

$(X+2)(X-10)=0$

ゆえに　$(x^2-3x+2)(x^2-3x-10)=0$

$(x-1)(x-2)(x+2)(x-5)=0$

したがって　$x=1,\ 2, -2,\ 5$

(7) $(x+1)(x+2)(x-5)(x-6)=44$

$(x+1)(x-5)\times(x+2)(x-6)=44$

$(x^2-4x-5)(x^2-4x-12)=44$

$x^2-4x=X$ とおくと　$(X-5)(X-12)=44$

$X^2-17X+16=0$

$(X-1)(X-16)=0$

$(x^2-4x-1)(x^2-4x-16)=0$

ゆえに　$x^2-4x-1=0$　または　$x^2-4x-16=0$

したがって　$x=2\pm\sqrt{5},\ 2\pm2\sqrt{5}$

## 2.22

(1) $P(x)=x^3-3x+2$ とすると

$P(1)=1^3-3{\cdot}1+2=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$P(x)=(x-1)(x^2+x-2)$

$=(x-1)^2(x+2)$

$P(x)=0$ から

$x=1(2\text{重解}),\ -2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & x^2 & +x & -2 & \\ \hline x-1 & x^3 & & -3x & +2 \\ & x^3 & -x^2 & & \\ \hline & & x^2 & -3x & \\ & & x^2 & -x & \\ \hline & & & -2x & +2 \\ & & & -2x & +2 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

(2) $P(x)=2x^3-6x^2+4$ とすると

$P(1)=2{\cdot}1^3-6{\cdot}1^2+4=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$P(x)=(x-1)(2x^2-4x-4)$

$=2(x-1)(x^2-2x-2)$

$P(x)=0$ から

$x=1,\ 1\pm\sqrt{3}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2x^2 & -4x & -4 & \\ \hline x-1 & 2x^3 & -6x^2 & & +4 \\ & 2x^3 & -2x^2 & & \\ \hline & & -4x^2 & & \\ & & -4x^2 & +4x & \\ \hline & & & -4x & +4 \\ & & & -4x & +4 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

(3) $P(x)=x^3-4x^2+5x-2$ とすると

$$P(1)=1^3-4{\cdot}1^2+5{\cdot}1-2=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)(x^2-3x+2)\\&=(x-1)^2(x-2)\end{aligned}$$

$P(x)=0$ から

$$x=1(2\,\text{重解}),\ 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -3x & +2 & \\ \hline
x-1\,) & x^3 & -4x^2 & +5x & -2 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -3x^2 & +5x & \\
 & & -3x^2 & +3x & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x & -2 \\
 & & & 2x & -2 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

(4) $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ とすると

$$P(1)=1^3-2{\cdot}1^2-5{\cdot}1+6=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)(x^2-x-6)\\&=(x-1)(x+2)(x-3)\end{aligned}$$

$P(x)=0$ から

$$x=1,-2,\ 3$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -x & -6 & \\ \hline
x-1\,) & x^3 & -2x^2 & -5x & +6 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -x^2 & -5x & \\
 & & -x^2 & +x & \\ \cline{3-5}
 & & & -6x & +6 \\
 & & & -6x & +6 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

(5) $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$ とすると

$$P(1)=1^3-6{\cdot}1^2+11{\cdot}1-6=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)(x^2-5x+6)\\&=(x-1)(x-2)(x-3)\end{aligned}$$

$P(x)=0$ から

$$x=1,\ 2,\ 3$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -5x & +6 & \\ \hline
x-1\,) & x^3 & -6x^2 & +11x & -6 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -5x^2 & +11x & \\
 & & -5x^2 & +5x & \\ \cline{3-5}
 & & & 6x & -6 \\
 & & & 6x & -6 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

(6) $P(x)=x^3-8x^2+17x-10$ とすると

$$P(1)=1^3-8{\cdot}1^2+17{\cdot}1-10=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)(x^2-7x+10)\\&=(x-1)(x-2)(x-5)\end{aligned}$$

$P(x)=0$ から

$$x=1,\ 2,\ 5$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -7x & +10 & \\ \hline
x-1\,) & x^3 & -8x^2 & +17x & -10 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -7x^2 & +17x & \\
 & & -7x^2 & +7x & \\ \cline{3-5}
 & & & 10x & -10 \\
 & & & 10x & -10 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

(7) $P(x)=x^3+x^2+x+6$ とすると

$$P(-2)=(-2)^3+(-2)^2+(-2)+6=0$$

よって，$P(x)$ は $x+2$ を因数にもち

$$P(x)=(x+2)(x^2-x+3)$$

$P(x)=0$ から

$$x=-2,\ \frac{1\pm\sqrt{11}\,i}{2}$$

$$\begin{array}{r|llll}
 & x^2 & -x & +3 & \\ \hline
x+2 & x^3 & +x^2 & +x & +6 \\
 & x^3 & +2x^2 & & \\ \hline
 & & -x^2 & +x & \\
 & & -x^2 & -2x & \\ \hline
 & & & 3x & +6 \\
 & & & 3x & +6 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

(8) $P(x)=3x^3-13x^2+13x-3$ とすると

$$P(1)=3{\cdot}1^3-13{\cdot}1^2+13{\cdot}1-3=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)(3x^2-10x+3)\\&=(x-1)(x-3)(3x-1)\end{aligned}$$

$P(x)=0$ から

$$x=1,\ 3,\ \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{r|llll}
 & 3x^2 & -10x & +3 & \\ \hline
x-1 & 3x^3 & -13x^2 & +13x & -3 \\
 & 3x^3 & -3x^2 & & \\ \hline
 & & -10x^2 & +13x & \\
 & & -10x^2 & +10x & \\ \hline
 & & & 3x & -3 \\
 & & & 3x & -3 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

## 2.23

(1) $-1$ がこの方程式の解であるから

$$\begin{aligned}(-1)^3-(-1)^2+a{\cdot}(-1)+5&=0\\-1-1-a+5&=0\end{aligned}$$

これを解いて　$a=3$

(2) (1) より，方程式は

$$x^3-x^2+3x+5=0$$

左辺を因数分解すると

$$(x+1)(x^2-2x+5)=0$$

したがって，求める残りの 2 つの解は $1\pm 2i$

**2.24** $-1$，$-2$ がこの方程式の解であるから

$$(-1)^4+(-1)^3+a\cdot(-1)+b=0$$
$$(-2)^4+(-2)^3+a\cdot(-2)+b=0$$

式を整理すると

$$-a+b=0,\quad -2a+b+8=0$$

これを解いて　　$a=8$，$b=8$

よって，方程式は

$$\begin{aligned} x^4+x^3+8x+8&=0 \\ x^3(x+1)+8(x+1)&=0 \\ (x+1)(x^3+8)&=0 \\ (x+1)(x+2)(x^2-2x+4)&=0 \end{aligned}$$

したがって，求める残りの解は $1\pm\sqrt{3}\,i$

## 3.1

(1) $\mathrm{OA} = |-3| = 3$

(2) $\mathrm{AB} = |7-2| = |5| = 5$

(3) $\mathrm{AB} = |-4-6| = |-10| = 10$

## 3.2

(1) 点 P の座標は $\dfrac{5 \times (-2) + 3 \times 6}{3+5} = \dfrac{8}{8} = 1$

(2) 点 Q の座標は $\dfrac{-1 \times (-2) + 2 \times 6}{2-1} = \dfrac{14}{1} = 14$

(3) 点 R の座標は $\dfrac{-7 \times (-2) + 3 \times 6}{3-7} = \dfrac{32}{-4} = -8$

(4) 点 M の座標は $\dfrac{-2+6}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

## 3.3

(1) $\mathrm{AB} = \sqrt{(4-7)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^4} = \sqrt{25} = 5$

(2) $\mathrm{AB} = \sqrt{\{3-(-3)\}^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$

(3) $\mathrm{AB} = \sqrt{\{0-(-12)\}^2 + (16-0)^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20$

(4) $\mathrm{AB} = \sqrt{(-4-8)^2 + \{-2-(-7)\}^2} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$

**3.4** $\mathrm{AB} = \sqrt{(-1-5)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 1^2} = \sqrt{37}$

$\mathrm{BC} = \sqrt{\{0-(-1)\}^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}$

$\mathrm{CA} = \sqrt{(5-0)^2 + \{2-(-3)\}^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

## 3.5

(1) △ABC の 3 辺の長さは

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(5-6)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$$
$$\mathrm{BC} = \sqrt{(-2-5)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(-7)^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$
$$\mathrm{CA} = \sqrt{\{6-(-2)\}^2 + (5-4)^2} = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$$

したがって　BC = CA の二等辺三角形

(2) $\triangle$ABC の 3 辺の長さは

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\{1-(-1)\}^2+(-1-1)^2} = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$\mathrm{BC} = \sqrt{(5-1)^2+\{3-(-1)\}^2} = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32}$$

$$\mathrm{CA} = \sqrt{(-1-5)^2+(1-3)^2} = \sqrt{(-6)^2+(-2)^2} = \sqrt{40}$$

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2$ であるから　CA を斜辺とする直角三角形

**3.6** C は，$x$ 軸上にあるから，C の座標を $(x,\ 0)$ とする．
このとき，$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$ すなわち $\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2$ であるから

$$(x-2)^2+\{0-(-1)\}^2=(x-6)^2+(0-3)^2$$

整理すると　　$8x=40$　　よって　$x=5$

したがって，点 C の座標は　$(5,\ 0)$

## 3.7

(1) 線分 AB を 3 : 2 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{2\cdot3+3\cdot8}{3+2},\ \frac{2\cdot2+3\cdot5}{3+2}\right)\quad \text{より}\quad \left(6,\ \frac{19}{5}\right)$$

線分 AB を 3 : 2 に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-2\cdot3+3\cdot8}{3-2},\ \frac{-2\cdot2+3\cdot5}{3-2}\right)\quad \text{より}\quad (18,\ 11)$$

(2) 点 C の座標を $(x,\ y)$ とすると

線分 AC の中点は　$\left(\dfrac{-4+x}{2},\ \dfrac{0+y}{2}\right)$

この点が B であるから　$\dfrac{-4+x}{2}=0,\ \dfrac{0+y}{2}=3$

これを解いて　$x=4,\ y=6$　　よって　C$(4,\ 6)$

(3) 線分 AB を 3 : 2 に内分する点 C の座標は

$$\left(\frac{2\cdot(-7)+3\cdot3}{3+2},\ \frac{2\cdot0+3\cdot(-5)}{3+2}\right)\quad \text{より}\quad (-1,-3)$$

AB 間の距離は

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\{3-(-7)\}^2+(-5-0)^2} = \sqrt{10^2+(-5)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

(4)　(i) AB 間の距離は

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\{5-(-1)\}^2+(0-3)^2} = \sqrt{6^2+(-3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

(ii) 線分 AB を $2:1$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{1\cdot(-1)+2\cdot5}{2+1},\ \frac{1\cdot3+2\cdot0}{2+1}\right) \quad \text{より} \quad (3,\ 1)$$

(iii) 線分 AB を $1:4$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-4\cdot(-1)+1\cdot5}{1-4},\ \frac{-4\cdot3+1\cdot0}{1-4}\right) \quad \text{より} \quad (-3,\ 4)$$

## 3.8

(1) $y-5=3(x-1)$　すなわち　$y=3x+2$

(2) $y-(-1)=2(x-0)$　すなわち　$y=2x-1$

(3) $y-3=\dfrac{1}{2}(x-0)$　すなわち　$y=\dfrac{1}{2}x+3$

(4) $y-2=-\dfrac{1}{2}(x-1)$　すなわち　$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

(5) $y-(-5)=-\dfrac{1}{3}(x-1)$　すなわち　$y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{14}{3}$

(6) 傾きは $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ であるから

$y-2=\sqrt{3}(x-5)$　すなわち　$y=\sqrt{3}\,x-5\sqrt{3}+2$

## 3.9

(1) $y-3=\dfrac{0-3}{5-2}(x-2)$　すなわち　$y=-x+5$

(2) $y-5=\dfrac{1-5}{4-(-2)}\{x-(-2)\}$　すなわち　$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{11}{3}$

(3) $y-3=\dfrac{7-3}{5-2}(x-2)$　すなわち　$y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$

(4) $y-5=\dfrac{7-5}{1-4}(x-4)$　すなわち　$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{23}{3}$

(5) $y-2=\dfrac{-2-2}{2-10}(x-10)$　すなわち　$y=\dfrac{1}{2}x-3$

## 3.10

(1) 2 点 $(-3,\ 5)$，$(-2,\ 0)$ を通る直線であるから

$$y-5=\frac{0-5}{-2-(-3)}\{x-(-3)\} \quad \text{すなわち} \quad y=-5x-10$$

(2) 2 点 $(2,\ 6)$，$(4,\ 0)$ を通る直線であるから

$$y-6=\frac{0-6}{4-2}(x-2) \quad すなわち \quad y=-3x+12$$

(3) 2 点 $(3,\ 4)$，$(5,\ 0)$ を通る直線であるから

$$y-4=\frac{0-4}{5-3}(x-3) \quad すなわち \quad y=-2x+10$$

**3.11** それぞれの直線の傾きは　(1) $\frac{2}{3}$　(2) $-\frac{3}{2}$　(3) $\frac{3}{5}$　(4) $\frac{1}{3}$　(5) $\frac{1}{3}$　(6) $\frac{2}{3}$

したがって　$(1)//(6)$，$(4)//(5)$，$(1)\perp(2)$，$(2)\perp(6)$

## 3.12

(1) 直線 $y=2x+3$ の傾きは　$2$

この直線に平行な直線の傾きは　$2$

よって，点 $(2,-3)$ を通り，傾き 2 の直線の方程式は

$$y-(-3)=2(x-2) \quad すなわち \quad y=2x-7$$

(2) 2 点 $\mathrm{A}(-4,\ 2)$，$\mathrm{B}(4,-5)$ を通る直線の傾きは　$\dfrac{-5-2}{4-(-4)}=-\dfrac{7}{8}$

この直線に平行な直線の傾きは　$-\dfrac{7}{8}$

よって，点 $\mathrm{P}(3,\ 4)$ を通り，傾き $-\dfrac{7}{8}$ の直線は

$$y-4=-\frac{7}{8}(x-3) \quad すなわち \quad y=-\frac{7}{8}x+\frac{53}{8}$$

(3) 直線 $y=4x-1$ の傾きは　$4$

この直線に垂直な直線の傾きを $m$ とすると

$$4m=-1 \text{ より} \qquad m=-\frac{1}{4}$$

よって，点 $(3,\ 2)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{4}$ の直線は

$$y-2=-\frac{1}{4}(x-3) \quad すなわち \quad y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}$$

(4) 直線 $x+4y+8=0$ の傾きは　$-\dfrac{1}{4}$

この直線に垂直な直線の傾きを $m$ とすると

$$-\frac{1}{4}m=-1 \text{ より} \qquad m=4$$

よって，点 $(2,\ 2)$ を通り，傾き 4 の直線は

$$y-2=4(x-2) \quad すなわち \quad y=4x-6$$

(5) 直線 $2x+3y-3=0$ の傾きは　$-\dfrac{2}{3}$

この直線に垂直な直線の傾きを $m$ とすると

$$-\frac{2}{3}m=-1 \text{ より} \qquad m=\frac{3}{2}$$

よって，点 $(4,\ 6)$ を通り，傾き $\dfrac{3}{2}$ の直線は

$$y-6=\frac{3}{2}(x-4) \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{3}{2}x$$

(6) 2 点 $(-3,-3),\ (1,\ 5)$ を通る直線の傾きは　$\dfrac{5-(-3)}{1-(-3)}=2$

この直線に垂直な直線の傾きを $m$ とすると

$$2m=-1 \text{ より} \qquad m=-\frac{1}{2}$$

よって，点 $(2,\ 5)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線は

$$y-5=-\frac{1}{2}(x-2) \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{1}{2}x+6$$

**3.13** 直線 $mx-y-7=0$ の傾きは　$m$

直線 $(2m-3)x-y+5=0$ の傾きは　$2m-3$

2 直線が平行であるとき

$$m=2m-3 \quad \text{これを解いて} \quad m=3$$

2 直線が垂直であるとき

$$m(2m-3)=-1 \quad \text{これを解いて} \quad m=1,\ \frac{1}{2}$$

**3.14**

(1) 線分 AB の中点 M の座標は

$$\left(\frac{0+4}{2},\ \frac{2+(-1)}{2}\right) \quad \text{より} \quad \left(2,\ \frac{1}{2}\right)$$

線分 AB の傾きは　$\dfrac{-1-2}{4-0}=-\dfrac{3}{4}$

線分 AB に垂直な直線の傾き $m$ は

$$-\frac{3}{4}m=-1 \quad \text{ゆえに} \quad m=\frac{4}{3}$$

よって，求める直線の方程式は

$$y-\frac{1}{2}=\frac{4}{3}(x-2) \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{4}{3}x-\frac{13}{6}$$

(2) 線分 AB の中点 M の座標は

$$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{0+3}{2}\right) \quad \text{より} \quad \left(3,\ \frac{3}{2}\right)$$

線分 AB の傾きは　$\dfrac{3-0}{4-2}=\dfrac{3}{2}$

線分 AB に垂直な直線の傾き $m$ は

$$\frac{3}{2}m=-1 \quad \text{ゆえに} \quad m=-\frac{2}{3}$$

よって，求める直線の方程式は

$$y-\frac{3}{2}=-\frac{2}{3}(x-3) \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{2}$$

**3.15** 点 B の座標を $(s,\ t)$ とする．

［1］直線 $\ell$ の傾きは 3，直線 AB の傾きは $\dfrac{t-5}{s+2}$ である．

AB$\perp\ell$ であるから　$3\cdot\dfrac{t-5}{s+2}=-1$

すなわち　$s+3t-13=0$　$\cdots$①

［2］線分 AB の中点 $\left(\dfrac{s-2}{2},\ \dfrac{t+5}{2}\right)$ が直線 $\ell$ 上にあるから

$$3\cdot\frac{s-2}{2}-\frac{t+5}{2}+1=0$$

すなわち　$3s-t-9=0$　$\cdots$②

①，② を連立させた方程式を解くと　$s=4,\ t=3$
したがって，点 B の座標は　$(4,\ 3)$

**3.16**

(1) 直線の方程式を $k$ について整理すると

$$(x-2)k+(-y+2)=0 \quad \cdots ①$$

① が実数 $k$ の値にかかわらず成り立つための条件は

$$x-2=0, \quad -y+2=0$$

これを解いて　$x=2,\ y=2$

したがって，求める定点の座標は　$(2,\ 2)$

(2) 直線の方程式を $m$ について整理すると

$$(x+3)m+(-y+1)=0 \quad \cdots ①$$

① が実数 $m$ の値にかかわらず成り立つための条件は

$$x+3=0, \quad -y+1=0$$

これを解いて　$x=-3$，$y=1$

したがって，求める定点の座標は　$(-3,\ 1)$

## 3.17

(1) 原点と直線 $x-4y-5=0$ の距離 $d$ は

$$d=\frac{|0-4\cdot0-5|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{17}}=\frac{5}{\sqrt{17}}=\frac{5}{17}\sqrt{17}$$

(2) 2 点 $(5,\ 3)$, $(2,-1)$ を通る直線の方程式は

$$y-3=\frac{-1-3}{2-5}(x-5) \quad \text{すなわち} \quad 4x-3y-11=0$$

原点とこの直線の距離 $d$ は

$$d=\frac{|4\cdot0-3\cdot0-11|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|-11|}{\sqrt{25}}=\frac{11}{5}$$

## 3.18

(1) $(x-1)^2+\{y-(-2)\}^2=3^2$　すなわち　$(x-1)^2+(y+2)^2=9$

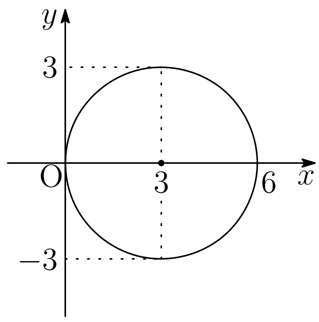
(2) $(x-1)^2+\{y-(-2)\}^2=4^2$　すなわち　$(x-1)^2+(y+2)^2=16$

(3) $(x-1)^2+(y-2)^2=(\sqrt{5})^2$　すなわち　$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

(4) 円の半径は 3 であるから

$$(x-3)^2+(y-0)^2=3^2$$

すなわち　$(x-3)^2+y^2=9$



(5) 円の半径 $r$ は

$$r=\sqrt{(7-3)^2+\{-7-(-4)\}^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$$

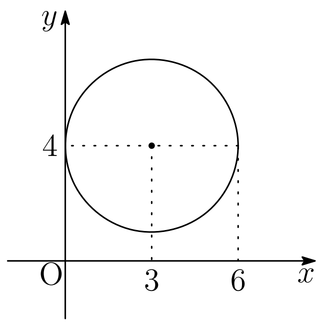
したがって　$(x-3)^2+\{y-(-4)\}^2=5^2$

すなわち　$(x-3)^2+(y+4)^2=25$

(6) 円の半径は 3 であるから

$$(x-3)^2+(y-4)^2=3^2$$

すなわち　$(x-3)^2+(y-4)^2=9$




## 3.19

(1) 求める円の中心を C，半径を $r$ とする．

C は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{-3+5}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad (1,\ 3)$$

また　$r=\mathrm{CA}=\sqrt{(-3-1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{17}$

この円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-3)^2=(\sqrt{17})^2$$

すなわち　$(x-1)^2+(y-3)^2=17$

(2) 2 点 $(3,\ 1)$，$(-1,-5)$ をそれぞれ A，B，求める円の中心を C，半径を $r$ とする．

C は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{3+(-1)}{2},\ \frac{1+(-5)}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad (1,-2)$$

また　$r=\mathrm{CA}=\sqrt{(3-1)^2+\{1-(-2)\}^2}=\sqrt{13}$

この円の方程式は

$$(x-1)^2+\{y-(-2)\}^2=(\sqrt{13})^2$$

すなわち　$(x-1)^2+(y+2)^2=13$

(3) 2 点 $(2,\ 3)$，$(4, -5)$ をそれぞれ A，B，求める円の中心を C，半径を $r$ とする．

C は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{3+(-5)}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (3, -1)$$

また　$r = \mathrm{CA} = \sqrt{(2-3)^2 + \{3-(-1)\}^2} = \sqrt{17}$

この円の方程式は

$$(x-3)^2 + \{y-(-1)\}^2 = (\sqrt{17})^2$$

すなわち　$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 17$

## 3.20

(1) 方程式を変形すると

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 4y + 4) = -11 + 16 + 4$$

すなわち　$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 3^2$

これは，中心が点 $(4,\ 2)$，半径が 3 の円である．

(2) 方程式を変形すると

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 6 + 9 + 1$$

すなわち　$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4^2$

これは，中心が点 $(-3,\ 1)$，半径が 4 の円である．

(3) 方程式を変形すると

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 9 + 1$$

すなわち　$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$

これは，中心が点 $(3,\ 1)$，半径が $\sqrt{10}$ の円である．

(4) 方程式を変形すると

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 31 + 1 + 4$$

すなわち　$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 6^2$

これは，中心が点 $(-1,\ 2)$，半径が 6 の円である．

(5) 方程式を変形すると

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = -12 + 4 + 9$$

すなわち　$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1^2$

これは，中心が点 $(-2,\ 3)$，半径が 1 の円である．

(6) 方程式を変形すると

$$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=-1+4+1$$

すなわち　$$(x-2)^2+(y+1)^2=2^2$$

これは，中心が点 $(2, -1)$，半径が 2 の円である．

(7) 方程式を変形すると

$$(x^2+4x+4)+y^2=4$$

すなわち　$$(x+2)^2+y^2=2^2$$

これは，中心が点 $(-2,\ 0)$，半径が 2 の円である．

(8) 方程式を変形すると

$$\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

すなわち　$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

これは，中心が点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，半径が $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円である．

**3.21** 円の方程式 $x^2+y^2-4x+2y-20=0$ を変形すると

$$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=20+4+1$$

すなわち　$$(x-2)^2+(y+1)^2=5^2$$

したがって，求める円の中心は $(2, -1)$ であり，この点から $(4, -1)$ までの距離 $r$ がその半径であるから

$$r=\sqrt{(4-2)^2+\{-1-(-1)\}^2}=\sqrt{4}=2$$

よって，求める円の方程式は

$$(x-2)^2+\{y-(-1)\}^2=2^2 \quad すなわち \quad (x-2)^2+(y+1)^2=4$$

## 3.22

(1) 求める円の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とする．

点 $(0,\ 0)$ を通るから　$n = 0$
点 $(3,\ 1)$ を通るから　$3^2 + 1^2 + 3l + m + n = 0$
点 $(-1,\ 2)$ を通るから　$(-1)^2 + 2^2 - l + 2m + n = 0$

整理すると

$$\begin{aligned} &n = 0 \\ &3l + m + n + 10 = 0 \\ &-l + 2m + n + 5 = 0 \end{aligned}$$

これを解くと　$l = -\dfrac{15}{7},\ m = -\dfrac{25}{7},\ n = 0$

よって，求める円の方程式は　$x^2 + y^2 - \dfrac{15}{7}x - \dfrac{25}{7}y = 0$

(2) 求める円の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とする．

点 $(3, -5)$ を通るから　$3^2 + (-5)^2 + 3l - 5m + n = 0$
点 $(3,\ 1)$ を通るから　$3^2 + 1^2 + 3l + m + n = 0$
点 $(4,\ 0)$ を通るから　$4^2 + 4l + n = 0$

整理すると

$$\begin{aligned} &3l - 5m + n + 34 = 0 \\ &3l + m + n + 10 = 0 \\ &4l + n + 16 = 0 \end{aligned}$$

これを解くと　$l = -2,\ m = 4,\ n = -8$

よって，求める円の方程式は　$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$

## 3.23

(1) 次の連立方程式を解く．

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 & \cdots ① \\ 2x+y=10 & \cdots ② \end{cases}$$

①，② より $y$ を消去して　　$x^2+(10-2x)^2=25$

整理すると　　$x^2-8x+15=0$

これを解くと　　$x=3,\ 5$

② に代入して

$$x=3 \text{ のとき } \ y=4, \qquad x=5 \text{ のとき } \ y=0$$

よって，交点の座標は　　$(3,\ 4)$，$(5,\ 0)$

(2) 次の連立方程式を解く．

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 & \cdots ① \\ 2x-y=5 & \cdots ② \end{cases}$$

①，② より $y$ を消去して　　$x^2+(2x-5)^2=25$

整理すると　　$x^2-4x=0$

これを解くと　　$x=0,\ 4$

② に代入して

$$x=0 \text{ のとき } \ y=-5, \qquad x=4 \text{ のとき } \ y=3$$

よって，交点の座標は　　$(0,-5)$，$(4,\ 3)$

したがって，交点を結ぶ線分の長さは

$$\sqrt{(4-0)^2+\{3-(-5)\}^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

(3) 原点を中心とする半径 1 の円の方程式は　　$x^2 + y^2 = 1$

次の連立方程式を解く．

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \cdots ① \\ x + 2y = 1 & \cdots ② \end{cases}$$

①，② より $x$ を消去して　　$(1 - 2y)^2 + y^2 = 1$

整理すると　　$5y^2 - 4y = 0$

これを解くと　　$y = 0,\ \dfrac{4}{5}$

② に代入して

$$y = 0 \text{ のとき}\quad x = 1, \qquad y = \frac{4}{5} \text{ のとき}\quad x = -\frac{3}{5}$$

よって，交点の座標は　　$(1,\ 0)$，$\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

したがって，交点を結ぶ線分の長さは

$$\sqrt{\left(-\frac{3}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{5} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

(4) 次の連立方程式を解く．

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \cdots ① \\ x + 2y = 2 & \cdots ② \end{cases}$$

①，② より $x$ を消去して　　$(2 - 2y)^2 + y^2 = 1$

整理すると　　$5y^2 - 8y + 3 = 0$

これを解くと　　$y = 1,\ \dfrac{3}{5}$

② に代入して

$$y = 1 \text{ のとき}\quad x = 0, \qquad y = \frac{3}{5} \text{ のとき}\quad x = \frac{4}{5}$$

よって，交点の座標は　　$(0,\ 1)$，$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$

したがって，求める中点の座標は

$$\left(\frac{0 + \frac{4}{5}}{2},\ \frac{1 + \frac{3}{5}}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

(5) 次の連立方程式を解く．

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=8 & \cdots ① \\ x+y=3 & \cdots ② \end{cases}$$

①，② より $y$ を消去して　　$(x-1)^2+(3-x-2)^2=8$

整理すると　　$x^2-2x-3=0$

これを解くと　　$x=-1,\ 3$

② に代入して

$$x=-1 \text{ のとき }\ y=4, \qquad x=3 \text{ のとき }\ y=0$$

よって，交点の座標は　　$(-1,\ 4)$，$(3,\ 0)$

したがって，求める中点の座標は

$$\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{4+0}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (1,\ 2)$$

## 3.24

(1) $x$ 軸の正の向きと $60^\circ$ の角をなす直線の傾きは　$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

求める直線の方程式を $y=\sqrt{3}x+k$ とおく．

この直線の方程式と $x^2+y^2=4$ から $y$ を消去すると

$$4x^2+2\sqrt{3}kx+k^2-4=0$$

判別式は　　$D=(2\sqrt{3}k)^2-4\cdot4\cdot(k^2-4)=-4(k^2-16)$

この円と直線が接するのは，$D=0$ のときである．

よって，$k^2-16=0$ を解いて　$k=\pm4$

したがって，求める直線の方程式は　$y=\sqrt{3}x+4$，$y=\sqrt{3}x-4$

(2) 原点を通る直線であるから，求める接線を $y=mx$ とおく．

この直線の方程式と $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ から $y$ を消去すると

$$(m^2+1)x^2-2(m+3)x+8=0$$

判別式は　　$D=\{-2(m+3)\}^2-4\cdot(m^2+1)\cdot8=-4(7m^2-6m-1)$

この円と直線が接するのは，$D=0$ のときである．

よって，$7m^2-6m-1=0$ を解いて　$m=1,\ -\dfrac{1}{7}$

直線の傾きは正であるから　$m=1$

したがって，求める接線の方程式は　$y=x$

(3) 原点を通る直線であるから，求める接線を $y = mx$ とおく．

この直線の方程式と $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 18 = 0$ から $y$ を消去すると

$$(m^2+1)x^2 - 2(m+5)x + 18 = 0$$

判別式は　$D = \{-2(m+5)\}^2 - 4\cdot(m^2+1)\cdot 18 = -4(17m^2 - 10m - 7)$

この円と直線が接するのは，$D = 0$ のときである．

よって，$17m^2 - 10m - 7 = 0$ を解いて　$m = 1,\ -\dfrac{7}{17}$

したがって，求める接線の方程式は　$y = x,\ y = -\dfrac{7}{17}x$

## 3.25

(1) 円の中心は原点であり，半径 $r$ は 1

原点と直線 $3x + 4y - a = 0$ の距離 $d$ は

$$d = \frac{|3\cdot 0 + 4\cdot 0 - a|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|\,a\,|}{5}$$

円と直線が接するのは $d = r$ のときである．

よって，$\dfrac{|\,a\,|}{5} = 1$ を解いて　$a = \pm 5$

(2) 円の中心は原点であり，半径 $r$ は 1

原点と直線 $x - 2y - c = 0$ の距離 $d$ は

$$d = \frac{|0 - 2\cdot 0 - c|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|\,c\,|}{\sqrt{5}}$$

円と直線が 2 点で交わるのは $d < r$ のときである．

よって，$\dfrac{|\,c\,|}{\sqrt{5}} < 1$ を解いて　$-\sqrt{5} < c < \sqrt{5}$

**【補足】** $|\,c\,| = \sqrt{5}$　の解は　$c = \pm\sqrt{5}$

$|\,c\,| < \sqrt{5}$　の解は　$-\sqrt{5} < c < \sqrt{5}$

$|\,c\,| > \sqrt{5}$　の解は　$c < -\sqrt{5},\ \sqrt{5} < c$

## 3.26

(1) 接点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，P は円上にあるから

$$a^2+b^2=5\cdots ①$$

また，P における円の接線の方程式は

$$ax+by=5$$

で，この直線が点 $(3,\ 1)$ を通るから

$$3a+b=5\cdots ②$$

①，② から $b$ を消去して整理すると

$$a^2-3a+2=0$$

これを解くと　$a=1,\ 2$

② に代入して

$a=1$ のとき　$b=2,$　　$a=2$ のとき　$b=-1$

よって，接点の座標と接線の方程式は，次のようになる．

点 $(1,\ 2)$ における接線は $1x+2y=5$ すなわち $x+2y=5$

点 $(2,-1)$ における接線は $2x+(-1)y=5$ すなわち $2x-y=5$

(2) 接点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，P は円上にあるから

$$a^2+b^2=1\cdots ①$$

また，P における円の接線の方程式は

$$ax+by=1$$

で，この直線が点 $(3,\ 1)$ を通るから

$$3a+b=1\cdots ②$$

①，② から $b$ を消去して整理すると

$$5a^2-3a=0$$

これを解くと　$a=0,\ \dfrac{3}{5}$

② に代入して

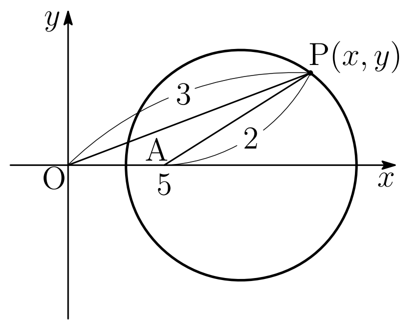
$a=0$ のとき　$b=1,$　　$a=\dfrac{3}{5}$ のとき　$b=-\dfrac{4}{5}$

よって，接点の座標と接線の方程式は，次のようになる．

点 $(0,\ 1)$ における接線は $0x+1y=1$ すなわち $y=1$

点 $\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$ における接線は $\dfrac{3}{5}x+\left(-\dfrac{4}{5}\right)y=1$ すなわち $3x-4y=5$

**3.27** 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．




P に関する条件は

$$\mathrm{OP} : \mathrm{AP} = 3 : 2$$

これより　　$3\mathrm{AP} = 2\mathrm{OP}$

すなわち　　$9\mathrm{AP}^2 = 4\mathrm{OP}^2$

$$\mathrm{OP}^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{AP}^2 = (x-5)^2 + y^2$$

を代入すると　　$9\{(x-5)^2+y^2\} = 4(x^2+y^2)$

整理すると　　$x^2 - 18x + y^2 + 45 = 0$

すなわち　　$(x-9)^2 + y^2 = 6^2$

よって，点 P は円 $(x-9)^2 + y^2 = 6^2$ 上にある．

逆に，この円上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす．

したがって，求める軌跡は，点 $(9,\ 0)$ を中心とする半径 6 の円である．

**3.28**

(1) 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(6,\ 0)$ を通る直線の方程式は

$$y = 0$$

2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 4)$ を通る直線の方程式は

$$y - 0 = \frac{4-0}{4-0}(x-0) \quad \text{すなわち} \quad y = x$$

2 点 $\mathrm{A}(4,\ 4)$，$\mathrm{B}(6,\ 0)$ を通る直線の方程式は

$$y - 4 = \frac{0-4}{6-4}(x-4) \quad \text{すなわち} \quad y = -2x + 12$$

よって，斜線部分の領域を表す不等式は

$$y > 0,\ y < x,\ y < -2x + 12$$

(2) 2 点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 0)$ を通る直線の方程式は

$$y - 1 = \frac{0-1}{2-0}(x-0) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{2}x + 1$$

原点を中心とする半径 2 の円の方程式は

$$x^2 + y^2 = 4$$

よって，斜線部分の領域を表す不等式は

$$y < -\frac{1}{2}x + 1,\ x^2 + y^2 < 4$$

(3)　(i) 2 点 $(-1,\ 0)$，$(4,\ 0)$ を通る直線の方程式は

$$y=0$$

2 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を通る直線の方程式は

$$y-0=\frac{1-0}{0-(-1)}\{x-(-1)\}\quad \text{すなわち}\quad y=x+1$$

2 点 $(0,\ 4)$，$(4,\ 0)$ を通る直線の方程式は

$$y-4=\frac{0-4}{4-0}(x-0)\quad \text{すなわち}\quad y=-x+4$$

よって，斜線部分の領域を表す不等式は

$$y \geqq 0,\ y \leqq x+1,\ y \leqq -x+4$$

(ii) 2 点 $(-4, -3)$，$(4,\ 3)$ を通る直線の方程式は

$$y-(-3)=\frac{3-(-3)}{4-(-4)}\{x-(-4)\}\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{3}{4}x$$

原点を中心とする半径 5 の円の方程式は

$$x^2+y^2=25$$

よって，斜線部分の領域を表す不等式は

$$y>\frac{3}{4}x,\ x^2+y^2<25$$

(4)　(i) 2 点 $(0,\ 0)$，$(2,\ 1)$ を通る直線の方程式は

$$y-0=\frac{1-0}{2-0}(x-0)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{1}{2}x$$

2 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 2)$ を通る直線の方程式は

$$y-0=\frac{2-0}{1-0}(x-0)\quad \text{すなわち}\quad y=2x$$

2 点 $(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ を通る直線の方程式は

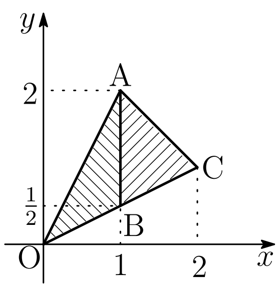
$$y-2=\frac{1-2}{2-1}(x-1)\quad \text{すなわち}\quad y=-x+3$$

よって，斜線部分の領域を表す不等式は

$$y \geqq \frac{1}{2}x,\ y \leqq 2x,\ y \leqq -x+3$$

(ii) 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C}(2,\ 1)$ をとる．

このとき，$\mathrm{AB}=\dfrac{3}{2}$ であるから




$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 1=\frac{3}{4}$$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 1=\frac{3}{4}$$

したがって，求める面積は　$\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$

## 3.29

(1) この領域は,

　　直線 $x=4$ の左側,

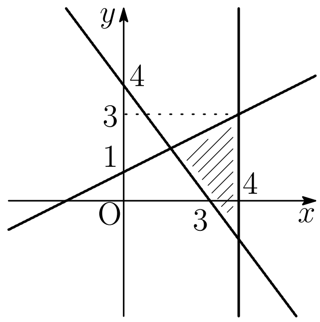
　　直線 $2y-x=2$ の下側,

　　直線 $4x+3y=12$ の上側

に共通する部分である.

すなわち，右の図の斜線部分である.

ただし，境界線を含まない.




(2) この領域は,

　　直線 $y=x$ およびその下側,

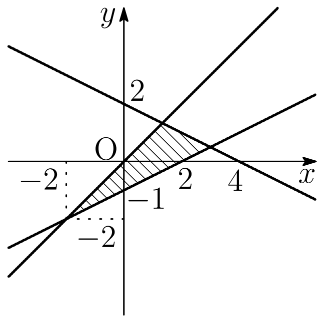
　　直線 $x-2y=2$ およびその上側,

　　直線 $x+2y=4$ およびその下側

に共通する部分である.

すなわち，右の図の斜線部分である.

ただし，境界線を含む.




(3) この領域は,

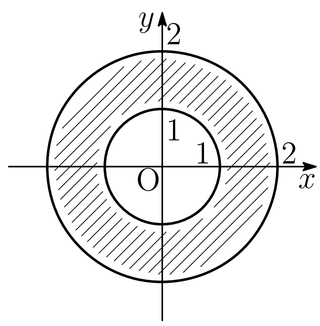
　　円 $x^2+y^2=1$ の外部,

　　円 $x^2+y^2=4$ の内部,

に共通する部分である.

すなわち，右の図の斜線部分である.

ただし，境界線を含まない.




(4) この領域は,

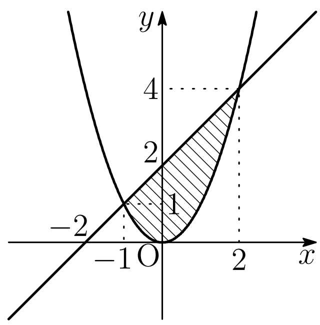
　　放物線 $y=x^2$ およびその上側,

　　直線 $y=x+2$ およびその下側,

に共通する部分である.

すなわち，右の図の斜線部分である.

ただし，境界線を含む.



(5) この領域は，

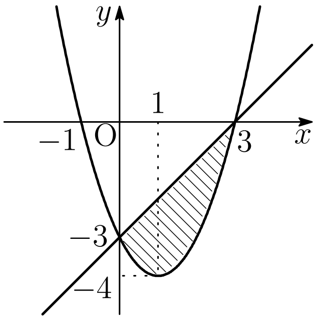
　　放物線 $y=x^2-2x-3$ およびその上側，

　　直線 $y=x-3$ およびその下側，

に共通する部分である．

すなわち，右の図の斜線部分である．

ただし，境界線を含む．




(6) この領域は，

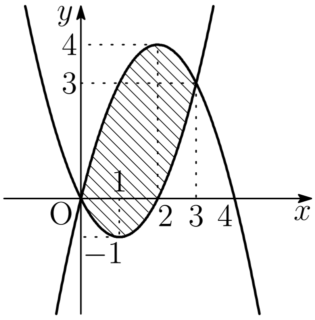
　　放物線 $y=x^2-2x$ およびその上側，

　　放物線 $y=-x^2+4x$ およびその下側，

に共通する部分である．

すなわち，右の図の斜線部分である．

ただし，境界線を含む．




## 3.30

(1) 不等式 $(y-x^2)(y-x-2)<0$ は

$$\begin{cases} y-x^2>0 \\ y-x-2<0 \end{cases}$$

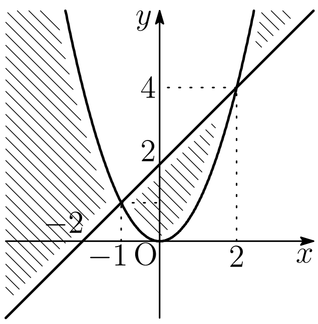
または

$$\begin{cases} y-x^2<0 \\ y-x-2>0 \end{cases}$$

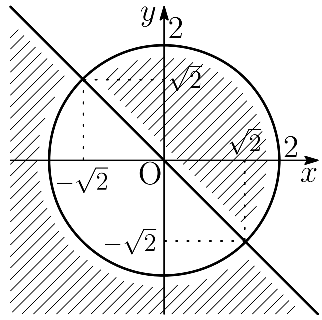
が成り立つことと同じである．

すなわち，右の図の斜線部分である．

ただし，境界線を含まない．



(2) 不等式 $(x^2+y^2-4)(x+y)<0$ は



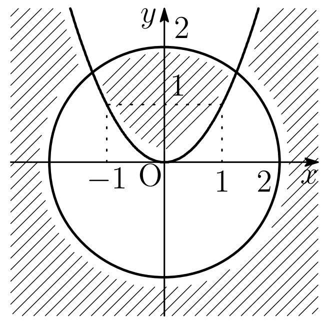

$$\begin{cases} x^2+y^2-4>0 \\ x+y<0 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} x^2+y^2-4<0 \\ x+y>0 \end{cases}$$

が成り立つことと同じである.
すなわち，右の図の斜線部分である.
ただし，境界線を含まない.

(3) 不等式 $(x^2+y^2-4)(x^2-y)>0$ は




$$\begin{cases} x^2+y^2-4>0 \\ x^2-y>0 \end{cases}$$

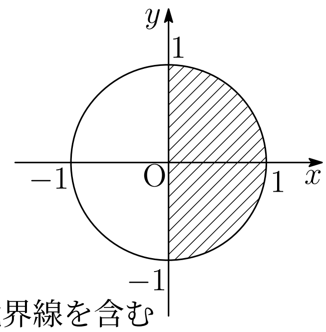
または

$$\begin{cases} x^2+y^2-4<0 \\ x^2-y<0 \end{cases}$$

が成り立つことと同じである.
すなわち，右の図の斜線部分である.
ただし，境界線を含まない.

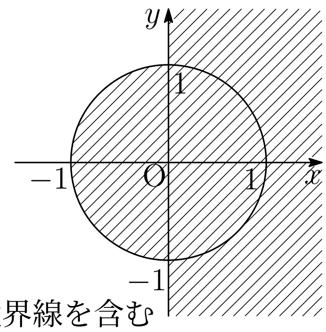
**3.31** ア〜エの表す領域は

ア



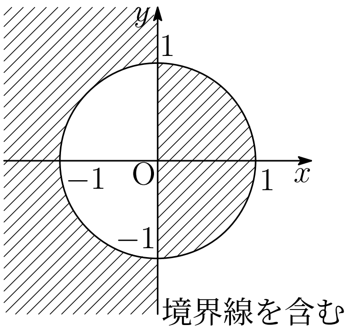

境界線を含む

イ



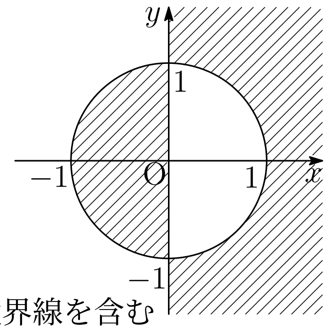

境界線を含む

ウ




境界線を含む

エ



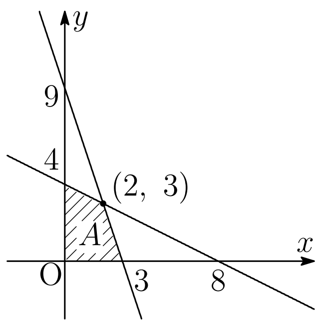

境界線を含む

したがって，(答) エ

**3.32** 与えられた連立不等式の表す領域を $A$ とする．
領域 $A$ は 4 点

$$(0,0),\ (3,\ 0),\ (2,\ 3),\ (0,\ 4)$$

を頂点とする四角形の周および内部である．




$$x+y=k \quad \cdots ①$$

とおいて，直線 ① が領域 $A$ の点を通るときの $k$ の値を調べる．

(0, 0) を通るとき　$k=0$，　　(3, 0) を通るとき　$k=3$

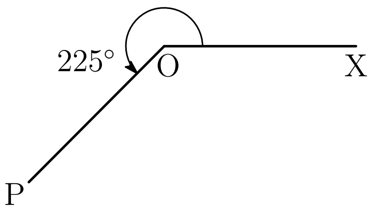
(2, 3) を通るとき　$k=5$，　　(0, 4) を通るとき　$k=4$

これ以外で領域 $A$ の点を通るとき　　$0<k<5$

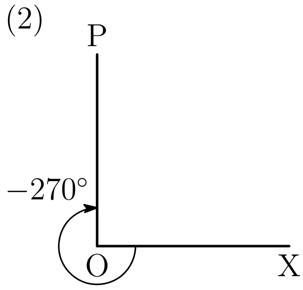
したがって，$x+y$ は

$x=2$，$y=3$ のとき最大値 5 をとり，
$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0 をとる．

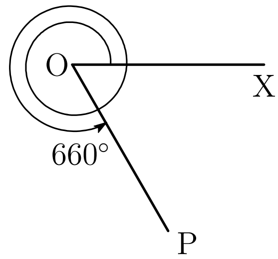
**4.1** (1)




(2)




(3)




**4.2**
$$480^\circ = 120^\circ + 360^\circ,$$
$$840^\circ = 120^\circ + 360^\circ \times 2$$
$$-240^\circ = 120^\circ + 360^\circ \times (-1)$$

したがって，求める角は　$480^\circ$，$840^\circ$，$-240^\circ$

**4.3** (1) $\dfrac{\pi}{180} \times 15 = \dfrac{\pi}{12}$　(2) $\dfrac{\pi}{180} \times (-60^\circ) = -\dfrac{\pi}{3}$

(3) $180^\circ \times \dfrac{8}{5} = 288^\circ$　(4) $180^\circ \times \dfrac{5}{12} = 75^\circ$

**4.4**

(1) $l = 8 \times \dfrac{\pi}{8} = \pi$，$S = \dfrac{1}{2} \times 8^2 \times \dfrac{\pi}{8} = 4\pi$

(2) $l = 10 \times \dfrac{2}{5}\pi = 4\pi$，$S = \dfrac{1}{2} \times 10^2 \times \dfrac{2}{5}\pi = 20\pi$

**4.5** 角 $\theta$ の動径と原点を中心とする半径 $r$ の円との交点を $(x,\ y)$ とする．

(1) $r = 2$ のとき，$x = -\sqrt{3}$，$y = -1$ であるから
$$\tan 210^\circ = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) $r = 2$ のとき，$x = -1$，$y = -\sqrt{3}$ であるから
$$\sin(-120^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) $960^\circ = 240^\circ + 360^\circ \times 2$

$r = 2$ のとき，$x = -1$，$y = -\sqrt{3}$ であるから
$$\cos 960^\circ = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

(4) $r = 1$ のとき，$x = 0$，$y = 1$ であるから
$$\cos(-270^\circ) = \frac{0}{1} = 0$$

(5) $\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{5}{6}\pi = \dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

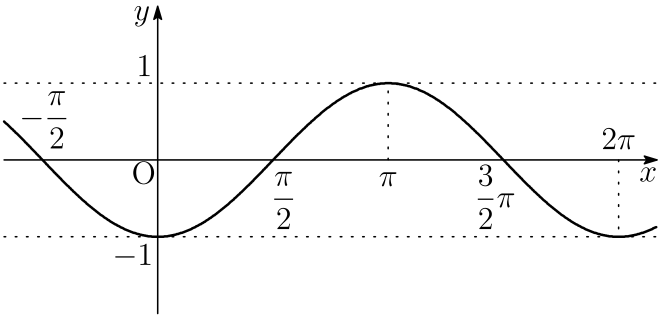
(6) $-300^\circ = 60^\circ + 360\times(-1)$，$510^\circ = 150^\circ + 360^\circ$，$405^\circ = 45^\circ + 360^\circ$ であるから

$$
\begin{aligned}
&-\sin 45^\circ \cos(-300^\circ) + \sin 510^\circ \cos 405^\circ \\
&= -\sin 45^\circ \cos 60^\circ + \sin 150^\circ \cos 45^\circ \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 0
\end{aligned}
$$

## 4.6

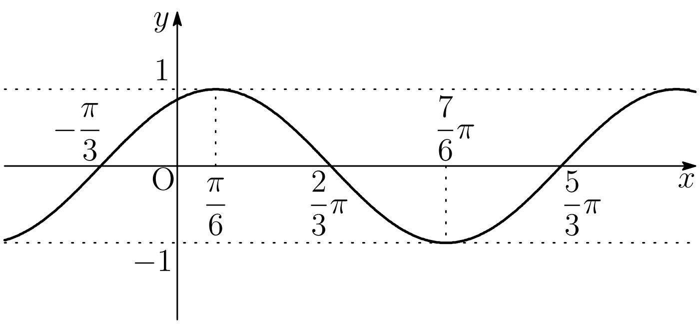
(1) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを

$x$ 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したもの．



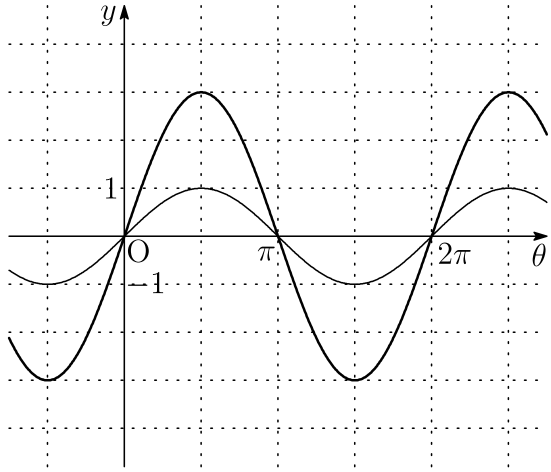

(2) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフは，$y = \cos x$ のグラフを

$x$ 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したもの．

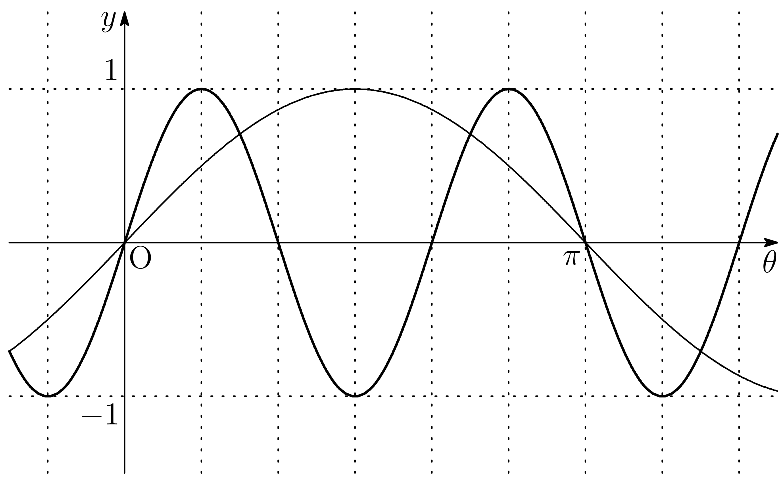


## 4.7

(1) $y = 3\sin\theta$ のグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを，$\theta$ 軸をもとにして $y$ 軸方向へ 3 倍に拡大したもの．周期は　$2\pi$




(2) $y = \sin 3\theta$ のグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを，$y$ 軸をもとにして $\theta$ 軸方向へ $\dfrac{1}{3}$ 倍に縮小したもの．周期は　$\dfrac{2}{3}\pi$




## 4.8

(1)
$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$$

$\theta$ の動径が第 4 象限にあるとき，$\sin\theta < 0$ であるから
$$\sin\theta = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$$

(2) $$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

$\theta$ の動径が第 3 象限にあるとき，$\sin\theta < 0$ であるから

$$\sin\theta = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right) \div \left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

(3) $$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$\theta$ の動径が第 2 象限にあるとき，$\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{3}{5} \div \left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{3}{4}$

(4) $$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$\theta$ の動径が第 3 象限にあるとき，$\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\dfrac{3}{5}\right) \div \left(-\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{3}{4}$

## 4.9

(1) $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ の範囲では　$x = 30^\circ$

(2) $\sqrt{3} - 3\tan x = 0$ から $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲では　$x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$

(3) $0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ$ のとき

$$-10^\circ \leqq x - 10^\circ \leqq 350^\circ$$

であるから，この範囲で方程式を解くと

$$x - 10^\circ = 60^\circ \quad \text{または} \quad x - 10^\circ = 240^\circ$$

したがって　　$x = 70^\circ,\ 250^\circ$

(4) $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ のとき

$$0^\circ \leqq 2x \leqq 180^\circ$$

であるから，この範囲で方程式を解くと

$2x = 60^\circ$　　したがって　　$x = 30^\circ$

## 4.10

(1) 因数分解すると　　$\sin x(2\sin x - 1) = 0$

よって　　$\sin x = 0$　または　$2\sin x - 1 = 0$

$0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ$ の範囲で　　$\sin x = 0$ を解くと　　$x = 0^\circ,\ 180^\circ,\ 360^\circ$

$\sin x = \dfrac{1}{2}$ を解くと　$x = 30^\circ,\ 150^\circ$

したがって，求める解は　　$x = 0^\circ,\ 30^\circ,\ 150^\circ,\ 180^\circ,\ 360^\circ$

(2) 因数分解すると　　$(\sin\theta + 2)(2\sin\theta - 1) = 0$

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であるから　　$2\sin\theta - 1 = 0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を解くと　　$\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

(3) 方程式を変形すると　　$\cos\theta + (1 - \cos^2\theta) = -1$

整理して　　$\cos^2\theta - \cos\theta - 2 = 0$

因数分解すると　　$(\cos\theta - 2)(\cos\theta + 1) = 0$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから　　$\cos\theta + 1 = 0$

$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲で $\cos\theta = -1$ を解くと　　$\theta = 180^\circ$

(4) 方程式を変形すると　　$(1 - \sin^2\theta) + 2\sin\theta + 2 = 0$

整理して　　$\sin^2\theta - 2\sin\theta - 3 = 0$

因数分解すると　　$(\sin\theta - 3)(\sin\theta + 1) = 0$

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であるから　　$\sin\theta + 1 = 0$

$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲で $\sin\theta = -1$ を解くと　　$\theta = 270^\circ$

(5) 方程式を変形すると　　$2(1 - \sin^2 x) + \sin x = 1$

整理して　　$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

因数分解すると　　$(\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 0$

$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ より　$0 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから　　$\sin x - 1 = 0$

この範囲で $\sin x = 1$ を解くと　　$x = 90^\circ$

(6) 方程式を変形すると　$2(1-\cos^2 x)+\cos x-1=0$

整理して　$2\cos^2 x-\cos x-1=0$

因数分解すると　$(\cos x-1)(2\cos x+1)=0$

よって　$\cos x-1=0$　または　$2\cos x+1=0$

$0^\circ \leqq x < 360^\circ$ の範囲で　$\cos x=1$ を解くと　$x=0^\circ$

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ を解くと　$x=120^\circ,\ 240^\circ$

したがって，求める解は　$x=0^\circ,\ 120^\circ,\ 240^\circ$

(7) 方程式を変形すると　$2(1-\cos^2\theta)+5\cos\theta-4=0$

整理して　$2\cos^2\theta-5\cos\theta+2=0$

因数分解すると　$(\cos\theta-2)(2\cos\theta-1)=0$

$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ であるから　$2\cos\theta-1=0$

$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲で $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ を解くと　$\theta=60^\circ,\ 300^\circ$

**4.11** $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で，$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ となる $x$ は　$x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

よって，この不等式の解は　$0\leqq x<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi<x\leqq 2\pi$

## 4.12

(1) 因数分解すると　$(\sin x-1)(2\sin x+1)=0$

よって　$\sin x-1=0$　または　$2\sin x+1=0$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で　$\sin x=1$ を解くと　$x=\dfrac{\pi}{2}$

$\sin x=-\dfrac{1}{2}$ を解くと　$x=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

したがって，求める解は　$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

(2) 因数分解すると　$(\sin x-1)(2\sin x+1)<0$

よって　$-\dfrac{1}{2}<\sin x<1$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲でこの不等式を解くと

$$0\leqq x<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi<x\leqq 2\pi$$

**4.13** 関数を変形すると
$$\begin{aligned} y &= 4(1-\sin^2\theta)+2\sin\theta-3 \\ &= -4\sin^2\theta+2\sin\theta+1 \end{aligned}$$

$\sin\theta = x$ とおくと

$$\begin{aligned} y &= -4x^2+2x+1 \\ &= -4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より　$-1 \leqq x \leqq 1$

このとき，$y = -4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{4}$ は

$x = \frac{1}{4}$ で最大値 $\frac{5}{4}$ をとり，$x=-1$ で最小値 $-5$ をとる．

したがって，求める関数の最大値 は$\frac{5}{4}$，最小値は $-5$ である．

**4.14**

(1) $$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ+30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos(45^\circ+30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ-30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} \sin 165^\circ &= \sin(180^\circ-15^\circ) \\ &= \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$\longleftarrow \sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$

(5) (3) の結果から

$$\sin 15^\circ + \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(6) (2)，(3) の結果から

$$\cos 75^\circ \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4^2}$$

$$= \frac{6-2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

**4.15** $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \dfrac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$

$$= \frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

**4.16** $0^\circ < \alpha < 90^\circ$，$90^\circ < \beta < 180^\circ$ であるから，$\cos\alpha > 0$，$\cos\beta < 0$

ゆえに　$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

したがって　$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1-2\sqrt{6}}{6}$$

## 4.17

(1) 加法定理

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

の辺々を加えると

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$$

(2) 上式に $x = 75^\circ$，$y = 15^\circ$ を代入して

$$\sin 90^\circ + \sin 60^\circ = 2\sin 75^\circ \cos 15^\circ$$

したがって

$$\sin 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2}(\sin 90^\circ + \sin 60^\circ) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

**4.18**

(1) 加法定理により

$$\sin(45^\circ+\alpha)=\sin 45^\circ\cos\alpha+\cos 45^\circ\sin\alpha$$
$$\sin(45^\circ-\alpha)=\sin 45^\circ\cos\alpha-\cos 45^\circ\sin\alpha$$

の辺々を加えると

$$\sin(45^\circ+\alpha)+\sin(45^\circ-\alpha)=2\sin 45^\circ\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$$

(2) 加法定理により

$$\begin{aligned}&\sin(A+B)\sin(A-B)\\=&(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)\\=&(\sin A\cos B)^2-(\cos A\sin B)^2\\=&\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B\\=&\sin^2 A-\sin^2 B\end{aligned}$$

**4.19** $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{10\sqrt{2}}{\sin 75^\circ}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin 60^\circ}$

よって　$\mathrm{AB}=\dfrac{10\sqrt{2}\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}$

$$=10\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\div\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

したがって　$\mathrm{AB}=30-10\sqrt{3}$

**4.20** 解と係数の関係から　$\tan\alpha+\tan\beta=-\dfrac{p}{1}=-p,\quad \tan\alpha\tan\beta=\dfrac{q}{1}=q$

したがって　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-p}{1-q}=\dfrac{p}{q-1}$

**4.21**

**[証明]** 2倍角の公式により

$$\text{左辺}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+(2\cos^2\alpha-1)}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

よって　$\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$

**[証終]**

## 4.22

(1) $\theta$ は鋭角であるから　$\sin\theta > 0$

ゆえに　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$

したがって　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5} = \dfrac{24}{25}$

(2) $\sin\theta+\cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{2}$$

2 倍角の公式により　$1+\sin 2\theta = \dfrac{3}{2}$

したがって　$\sin 2\theta = \dfrac{1}{2}$

## 4.23

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)\right\} = \frac{4}{5},\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{3}{5}\right)\right\} = \frac{1}{5}$$

$\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$ より $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{3}{4}\pi$ であるから　$\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2} < 0$

したがって　$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$,　$\cos\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

## 4.24

(1) $\tan\alpha = 2$ のとき，$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2\cdot 2}{1-2^2} = -\dfrac{4}{3}$

(2) $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ のとき，$\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)}{1+\left(-\dfrac{4}{5}\right)} = \dfrac{5+4}{5-4} = 9$

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\tan\dfrac{\alpha}{2} > 0$

したがって　$\tan\dfrac{\alpha}{2} = 3$

**4.25** 左辺を変形すると　$3\sin x-(1-2\sin^2 x)=1$

整理すると　$2\sin^2 x+3\sin x-2=0$

因数分解すると　$(\sin x+2)(2\sin x-1)=0$

$-1\leqq \sin x\leqq 1$ であるから　$2\sin x-1=0$

$0\leqq x<2\pi$ の範囲で $\sin x=\dfrac{1}{2}$ を解くと　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

**4.26** $2\sin x+\cos 2x=2\sin x+(1-2\sin^2 x)$

$$=-2\sin^2 x+2\sin x+1$$

$\sin x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ のとき　$-1\leqq t\leqq 1$ であり

$$y=-2t^2+2t+1$$

すなわち　$y=-2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$

このとき，$t=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{3}{2}$ をとり，$t=-1$ で最小値 $-3$ をとる．

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin x=\dfrac{1}{2}$ より　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$t=-1$ のとき，$\sin x=-1$ より　$x=\dfrac{3}{2}\pi$

よって，$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ で最大値 $\dfrac{3}{2}$ をとり，$x=\dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 $-3$ をとる．

**4.27**

(1) 左辺を変形すると　$2\sin(x+30^\circ)=\sqrt{3}$

よって　$\sin(x+30^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\cdots$①

$0^\circ\leqq x<360^\circ$ のとき

$$30^\circ\leqq x+30^\circ<390^\circ$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$x+30^\circ=60^\circ \quad \text{または} \quad x+30^\circ=120^\circ$$

したがって　$x=30^\circ,\ 90^\circ$

(2) 左辺を変形すると　$2\sin(\theta - 30^\circ) = 2$

よって　$\sin(\theta - 30^\circ) = 1 \quad \cdots①$

$0^\circ < \theta < 360^\circ$ のとき

$$-30^\circ < \theta - 30^\circ < 150^\circ$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$\theta - 30^\circ = 90^\circ$$

したがって　$\theta = 120^\circ$

(3)
$$-\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 1$$

左辺を変形すると　$2\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = 1$

よって　$\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} \quad \cdots①$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$$\frac{2}{3}\pi \leqq \theta + \frac{2}{3}\pi < \frac{8}{3}\pi$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$\theta + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi \quad \text{または} \quad \theta + \frac{2}{3}\pi = \frac{13}{6}\pi$$

したがって　$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi$

**4.28**
$$\begin{aligned} \cos 2x - \sin 2x &= -\sin 2x + \cos 2x \\ &= \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{3}{4}\pi\right) \end{aligned}$$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき　$-1 \leqq \sin\left(2x + \frac{3}{4}\pi\right) \leqq 1$

したがって　$-\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2}$

よって，最大値 $\sqrt{2}$，最小値 $-\sqrt{2}$ をとる．

## 5.1

(1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 = 1$

(2) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3} = 1 \div \left(-\dfrac{1}{27}\right) = -27$

## 5.2

(1) $\dfrac{(3^{-2})^3}{3^{-4}} \times 3^3 = \dfrac{3^{(-2)\times 3}}{3^{-4}} \times 3^3 = \dfrac{3^{-6}}{3^{-4}} \times 3^3 = 3^{-6-(-4)} \times 3^3$

$= 3^{-2} \times 3^3 = 3^{-2+3} = 3^1 = 3$

(2) $(x^{-1}y)^{-5} \div x^2y^{-3} = x^{(-1)\times(-5)}y^{-5} \div x^2y^{-3} = x^5y^{-5} \div x^2y^{-3}$

$= x^{5-2}y^{-5-(-3)} = x^3y^{-2} = \dfrac{x^3}{y^2}$

## 5.3

(1) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^3 = \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{(2^2)^3} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

(2) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}\right)^{-1} = \left(\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^3}\right)^{-1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} = (3^{-1})^{-1} = 3^{(-1)\times(-1)} = 3$

**5.4** $a^{1.5} = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{a^3}$

## 5.5

(1) $27^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{27})^2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

(2) $125^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{125^{\frac{4}{3}}} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{125})^4} = \dfrac{1}{5^4} = \dfrac{1}{625}$

(3) $25^{-1.5} = 25^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{25^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{(\sqrt{25})^3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$

(4) $\left(\dfrac{25}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{25}{4}}} = 1 \div \dfrac{5}{2} = \dfrac{2}{5}$

**5.6** $$25^{-1.5} = \frac{1}{25^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(\sqrt{25})^3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$
$$81^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{81})^5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

$\frac{1}{125} > \frac{1}{243}$ であるから　　$25^{-1.5} > 81^{-\frac{5}{4}}$

**5.7**

(1) $27^{\frac{1}{3}} + (64^{\frac{1}{6}})^2 = (3^3)^{\frac{1}{3}} + 64^{\frac{1}{6}\times 2} = 3^1 + 64^{\frac{1}{3}} = 3 + (2^6)^{\frac{1}{3}} = 3 + 2^2 = 7$

(2) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{-\frac{5}{3}} \times 8^{\frac{3}{2}} = 8^{\frac{1}{2}+(-\frac{5}{3})+\frac{3}{2}} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$

(3) $8^{\frac{1}{4}} \times 8^{-\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{3}{4}} = 8^{\frac{1}{4}+(-\frac{1}{3})+\frac{3}{4}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

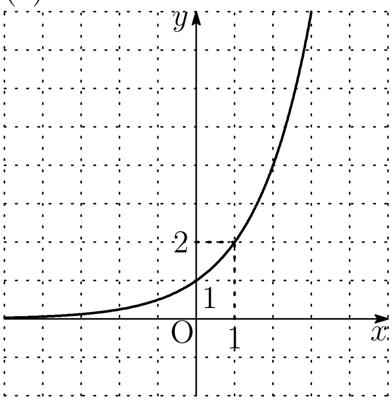
(4) $$\left\{\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{9}{16}\right)^{(-\frac{3}{4})\times\frac{2}{3}} = \left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left\{\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = 1 \div \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$$

(5) $$\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left\{\left(\frac{3}{5}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{\left(\frac{3}{5}\right)^3\right\}^{-\frac{2}{3}}$$
$$= \left(\frac{3}{5}\right)^{2\times\frac{1}{2}} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{3\times(-\frac{2}{3})}$$
$$= \left(\frac{3}{5}\right)^{1} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{1+(-2)}$$
$$= \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = 1 \div \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$$

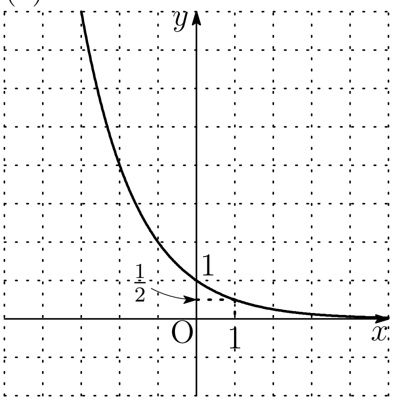
(6) $$(\sqrt[3]{2} \times 2 \div \sqrt{2^3})^{-12} = (2^{\frac{1}{3}} \times 2 \div 2^{\frac{3}{2}})^{-12} = (2^{\frac{1}{3}+1-\frac{3}{2}})^{-12}$$
$$= (2^{-\frac{1}{6}})^{-12} = 2^{(-\frac{1}{6})\times(-12)} = 2^2 = 4$$

**5.8** $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

**5.9** (1)




(2)




## 5.10

(1) $2 = 2^1$, $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}$

$y = 2^x$ は増加関数であるから　　$2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{2}{3}} < 2^1$

よって　$\sqrt{2} < \sqrt[3]{4} < 2$

(2) $1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$, $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ は減少関数であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^0 > \left(\frac{1}{2}\right)^{0.5}$$

よって　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} > 1 > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{0.5}$

## 5.11

(1) 不等式を変形すると　　$3^x < 3^{\frac{3}{2}}$

よって　　$x < \dfrac{3}{2}$

(2) 不等式を変形すると　　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \geqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^4$

よって　　$x \leqq 4$

## 5.12

(1) 方程式を変形すると　　$2^x = 2^{-4}$

したがって　　$x = -4$

(2) 方程式を変形すると　　$2^x = 2^{\frac{9}{2}}$

したがって　　$x = \dfrac{9}{2}$

(3) 方程式を変形すると　$3^{x+1} = 3^{-3}$

$x + 1 = -3$ より　$x = -4$

(4) 方程式を変形すると　$5^{x-2} = 5^{-3}$

$x - 2 = -3$ より　$x = -1$

(5) 方程式を変形すると　$5^{x+3} = 5^{-4}$

$x + 3 = -4$ より　$x = -7$

(6) 方程式を変形すると　$(5^{-1})^x = 5^3$

したがって　$5^{-x} = 5^3$

$-x = 3$ より　$x = -3$

(7) 方程式を変形すると　$(2^2)^{3x+2} = 2^5$

したがって　$2^{2(3x+2)} = 2^5$

$2(3x+2) = 5$ より　$x = \dfrac{1}{6}$

(8) 方程式を変形すると　$3^x = (3^2)^{x-1}$

したがって　$3^x = 3^{2(x-1)}$

$x = 2(x-1)$ より　$x = 2$

(9) 方程式を変形すると　$(3^2)^x = (3^3)^{x-1}$

したがって　$3^{2x} = 3^{3(x-1)}$

$2x = 3(x-1)$ より　$x = 3$

(10) 方程式を変形すると　$(6^2)^x = 6^3 \times 6^{x+1}$

したがって　$6^{2x} = 6^{3+(x+1)}$

$2x = 3 + (x+1)$ より　$x = 4$

## 5.13

(1) $4^x = (2^x)^2$ であるから，方程式は

$$(2^x)^2 + 2^x = 20$$

$$(2^x)^2 + 2^x - 20 = 0$$

ゆえに　$(2^x + 5)(2^x - 4) = 0$

$2^x + 5 > 0$ であるから　$2^x - 4 = 0$

よって　$2^x = 4$ を解いて　$x = 2$

(2) $4^x = (2^x)^2$ であるから，方程式は

$$(2^x)^2 + 8 = 9{\cdot}2^x$$

$$(2^x)^2 - 9{\cdot}2^x + 8 = 0$$

ゆえに　$(2^x - 1)(2^x - 8) = 0$

よって　$2^x - 1 = 0$　または　$2^x - 8 = 0$

$2^x = 1$ を解いて　$x = 0$

$2^x = 8$ を解いて　$x = 3$

したがって，求める解は　　$x = 0,\ 3$

(3) $9^x = (3^x)^2$，$3^{x+1} = 3{\cdot}3^x$ であるから，方程式は

$$(3^x)^2 - 2 \times 3{\cdot}3^x = 27$$

$$(3^x)^2 - 6{\cdot}3^x - 27 = 0$$

ゆえに　$(3^x + 3)(3^x - 9) = 0$

$3^x + 3 > 0$ であるから　　$3^x - 9 = 0$

よって　　$3^x = 9$ を解いて　$x = 2$

(4) $4^{x+1} = 4(2^x)^2$，$2^{x+3} = 8{\cdot}2^x$ であるから，方程式は

$$4(2^x)^2 - 3 \times 8{\cdot}2^x + 32 = 0$$

4 で割って　$(2^x)^2 - 6{\cdot}3^x + 8 = 0$

ゆえに　　$(2^x - 2)(2^x - 4) = 0$

よって　$2^x - 2 = 0$　または　$2^x - 4 = 0$

$2^x = 2$ を解いて　$x = 1$

$2^x = 4$ を解いて　$x = 2$

したがって，求める解は　　$x = 1,\ 2$

(5) $2^{x+2} = 4{\cdot}2^x$，$2^{-x} = \dfrac{1}{2^x}$ であるから，方程式は

$$4{\cdot}2^x - \frac{1}{2^x} + 3 = 0$$

$2^x$ をかけて　$4(2^x)^2 + 3{\cdot}2^x - 1 = 0$

ゆえに　　$(2^x + 1)(4{\cdot}2^x - 1) = 0$

$2^x + 1 > 0$ であるから　　$4{\cdot}2^x - 1 = 0$

よって　　$2^x = \dfrac{1}{4}$ を解いて　$x = -2$

(6) $2^{2x+1}=2(2^x)^2$，$2^{3x}=(2^x)^3$，$2^{x+4}=16{\cdot}2^x$ であるから，方程式は

$$2(2^x)^2+(2^x)^3=5\times16{\cdot}2^x$$

$$(2^x)^3+2(2^x)^2-80{\cdot}2^x=0$$

ゆえに　$2^x(2^x+10)(2^x-8)=0$

$2^x>0$，$2^x+10>0$ であるから　　$2^x-8=0$

よって　　$2^x=8$ を解いて　$x=3$

## 5.14

(1) $2^x=X$，$2^y=Y$ とおくと

$$2^{x+y}=2^x{\cdot}2^y=XY$$

よって，連立方程式は

$$\begin{cases} X+Y=40 & \cdots① \\ XY=256 & \cdots② \end{cases}$$

① から　　$Y=40-X$　$\cdots③$

$3^x>0$，$3^y>0$ であるから　$X>0$　かつ　$40-X>0$

すなわち　　$0<X<40$　$\cdots④$

③ を ② に代入して　　$X(40-X)=256$

整理して　　$X^2-40X+256=0$

ゆえに　　$(X-8)(X-32)=0$

④ に注意して　$X=8,\ 32$

これを ③ に代入して

$$\begin{cases} X=8 \\ Y=32 \end{cases},\ \begin{cases} X=32 \\ Y=8 \end{cases}\quad \text{したがって}\quad \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases},\ \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$$

(2) $8^{y+1}=2^{3(y+1)}$，$9^y=3^{2y}$ であるから

$$\begin{cases} 2^x=2^{3(y+1)} \\ 3^{2y}=3^{x-9} \end{cases}$$

したがって　$\begin{cases} x=3(y+1) \\ 2y=x-9 \end{cases}$　を解いて　$x=21$，$y=6$

## 5.15

(1) $\log_x 216 = 3$ から　$216 = x^3$

したがって　$x = 6$

(2) $\log_{81} x = \dfrac{1}{4}$ から　$x = 81^{\frac{1}{4}}$

したがって　$x = 3$

## 5.16

(1) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

(2) $\log_2 \sqrt{8} = \log_2 \sqrt{2^3} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}$

(3) $\log_{10} 1 = 0$

## 5.17

(1) $\log_{10} \dfrac{1}{1000} = \log_{10} \dfrac{1}{10^3} = \log_{10} 10^{-3} = -3$

(2) $\log_{10} 0.1 = \log_{10} \dfrac{1}{10} = \log_{10} 10^{-1} = -1$

(3) $\log_{10} 0.001 = \log_{10} \dfrac{1}{1000} = \log_{10} 10^{-3} = -3$

(4) $\log_2 \dfrac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

(5) $\log_3 \dfrac{1}{81} = \log_3 \dfrac{1}{3^4} = \log_3 3^{-4} = -4$

(6) $\log_{0.5} 0.5 = 1$

(7) $\log_2 \cos 60^\circ = \log_2 \dfrac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

**5.18** ① ×　② ○　③ ○　④ ×　⑤ ×

なお，①，④，⑤を訂正すると，それぞれ

$$\log_a 1 = 0, \qquad \frac{D}{A} + \frac{C}{B} = \frac{BD}{AB} + \frac{AC}{AB}, \qquad A^m \times A^n = A^{m+n}$$

## 5.19

(1) $\log_2 8 + 3\log_3 81 = \log_2 2^3 + 3\log_3 3^4 = 3 + 3\cdot 4 = 15$

(2) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2 = \log_{10}(5 \times 2) = \log_{10} 10 = 1$

(3) $\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \dfrac{24}{3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

(4) $\log_2 6 - \log_2 \dfrac{3}{4} = \log_2 \left(6 \div \dfrac{3}{4}\right) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

(5) $\log_2 8 - \log_2 \dfrac{3}{4} + \log_2 6 = \log_2 \left(8 \div \dfrac{3}{4} \times 6\right) = \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$

(6) $\log_3(4-\sqrt{7}) + \log_3(4+\sqrt{7}) = \log_3(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7}) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

(7) $$\begin{aligned}\log_{10} 2 + \log_{10}\sqrt{15} - \log_{10}\sqrt{0.6} &= \log_{10}(2 \times \sqrt{15} \div \sqrt{0.6})\\ &= \log_{10} 2\sqrt{25} = \log_{10} 10 = 1\end{aligned}$$

(8) $\log_{10} \dfrac{4}{25} + 2\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{4}{25} + \log_{10} 5^2 = \log_{10} \left(\dfrac{4}{25} \times 25\right) = \log_{10} 4$

(9) $$\begin{aligned}\log_{10} 25 - 2\log_{10} \frac{1}{2} &= \log_{10} 25 - \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \log_{10} \left(25 \div \frac{1}{4}\right)\\ &= \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2\end{aligned}$$

(10) $$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\log_{10} 3 + \frac{1}{2}\log_{10} 6 + \frac{1}{2}\log_{10} 5 &= \frac{1}{2}\left(-\log_{10} 3 + \log_{10} 6 + \log_{10} 5\right)\\ &= \frac{1}{2}\log_{10} \frac{6 \times 5}{3} = \frac{1}{2}\log_{10} 10 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

## 5.20

(1) $$\begin{aligned}\log \frac{5}{3} + 2\log \frac{2}{5} - \log \frac{8}{3} &= \log \frac{5}{3} + \log \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \log \frac{8}{3}\\ &= \log \left(\frac{5}{3} \times \frac{4}{25} \div \frac{8}{3}\right)\\ &= \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\log 45 - 3\log 3 + \log \frac{3}{5} &= \log 45 - \log 3^3 + \log \frac{3}{5}\\ &= \log \left(45 \div 27 \times \frac{3}{5}\right)\\ &= \log 1 = 0\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}2\log \frac{5}{3} - \log \frac{9}{4} + 2\log 3 + \frac{1}{2}\log 81 &= \log \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \log \frac{9}{4} + \log 3^2 + \log 81^{\frac{1}{2}}\\ &= \log \left(\frac{25}{9} \div \frac{9}{4} \times 9 \times 9\right)\\ &= \log 100 = \log 10^2 = 2\end{aligned}$$

## 5.21

(1) $\log_9 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 9} = \dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \dfrac{3}{2}$

(2) $\log_{25} 125 = \dfrac{\log_5 125}{\log_5 25} = \dfrac{\log_5 5^3}{\log_5 5^2} = \dfrac{3}{2}$

(3) $\log_8 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 8} = \dfrac{1}{\log_2 2^3} = \dfrac{1}{3}$

(4) $\log_4 \sqrt[3]{2} = \dfrac{\log_2 \sqrt[3]{2}}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 2^{\frac{1}{3}}}{\log_2 2^2} = \dfrac{1}{3} \div 2 = \dfrac{1}{6}$

(5) $\log_{100} 10\sqrt{10} = \dfrac{\log_{10} 10\sqrt{10}}{\log_{10} 100} = \dfrac{\log_{10} 10^{\frac{3}{2}}}{\log_{10} 10^2} = \dfrac{3}{2} \div 2 = \dfrac{3}{4}$

(6) $\log_{\frac{1}{4}} 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 \frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\log_2 2^{-2}} = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$

(7) $\log_{\sqrt{3}} 9 = \dfrac{\log_3 9}{\log_3 \sqrt{3}} = \dfrac{\log_3 3^2}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}} = 2 \div \dfrac{1}{2} = 4$

## 5.22

(1) $\log_3 2 \times \log_8 9 = \log_3 2 \times \dfrac{\log_3 9}{\log_3 8} = \log_3 2 \times \dfrac{2}{3\log_3 2} = \dfrac{2}{3}$

(2) $$\begin{aligned}\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8 &= \log_2 3 \times \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 7}{\log_2 5} \times \frac{\log_2 8}{\log_2 7} \\ &= \log_2 8 = 3\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2) &= \left(\log_2 3 + \frac{\log_2 9}{\log_2 4}\right)\left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 9}\right) \\ &= \left(\log_2 3 + \frac{2\log_2 3}{2\log_2 2}\right)\left(\frac{2\log_2 2}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{2\log_2 3}\right) \\ &= (\log_2 3 + \log_2 3)\left(\frac{2}{\log_2 3} + \frac{1}{2\log_2 3}\right) \\ &= 2\log_2 3 \times \frac{5}{2\log_2 3} = 5\end{aligned}$$

**5.23** $b = \log_3 11 = \dfrac{\log_2 11}{\log_2 3} = \dfrac{\log_2 11}{a}$ であるから　$\log_2 11 = ab$

したがって

$$\begin{aligned}\log_{44} 66 &= \frac{\log_2 66}{\log_2 44} = \frac{\log_2(2 \times 3 \times 11)}{\log_2(2^2 \times 11)} \\ &= \frac{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 11}{2\log_2 2 + \log_2 11} = \frac{1 + a + ab}{2 + ab}\end{aligned}$$

## 5.24

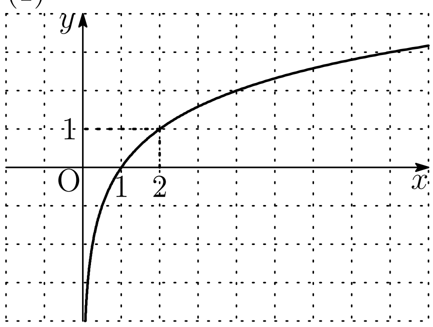
(1) $\log_A B = \dfrac{\log B}{\log A} = \dfrac{y}{x}$

(2) $\log_{AB} C = \dfrac{\log C}{\log AB} = \dfrac{\log C}{\log A + \log B} = \dfrac{z}{x+y}$

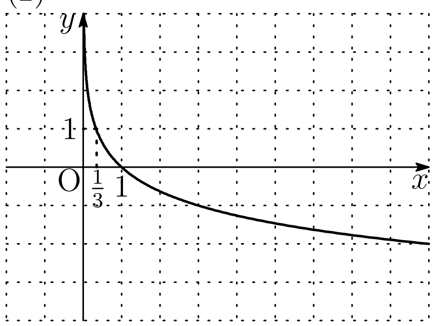
(3) $\log_{\frac{C}{B}} A = \dfrac{\log A}{\log \dfrac{C}{B}} = \dfrac{\log A}{\log C - \log B} = \dfrac{x}{z-y}$

**5.25** $10^{2\log 2} = 10^{\log 2^2} = 10^{\log_{10} 4} = 4$

**5.26** (1)




(2)




## 5.27

(1) 不等式を変形すると　　$\log_3 x < \log_3 3$

真数は正であるから　　$0 < x < 3$

(2) 不等式を変形すると　　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \leqq \log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \leqq \log_{\frac{1}{3}} 9$

よって　　$x+1 \geqq 9$ を解いて　$x \geqq 8$

## 5.28

(1) 両辺に $3{\cdot}2^x$ をかけて整理すると

$$3(2^x)^2 - 8{\cdot}2^x - 3 = 0$$

ゆえに　$(2^x - 3)(3{\cdot}2^x + 1) = 0$

$3{\cdot}2^x + 1 > 0$ であるから　　$2^x - 3 = 0$

よって　　$2^x = 3$ を解いて　$x = \log_2 3$

(2) $4^{x+1}=4(2^x)^2$，$x^{x+2}=4{\cdot}2^x$ であるから，方程式は

$$4(2^x)^2-12{\cdot}2^x+5=0$$

ゆえに　$(2{\cdot}2^x-1)(2{\cdot}2^x-5)=0$

よって　$2{\cdot}2^x-1=0$　または　$2{\cdot}2^x-5=0$

$2^x=\dfrac{1}{2}$ を解いて　$x=-1$

$2^x=\dfrac{5}{2}$ を解いて　$x=\log_2\dfrac{5}{2}$

したがって，求める解は　$x=-1,\ \log_2\dfrac{5}{2}$

## 5.29

(1) $x-3=10^2$ より　$x=103$

(2) 方程式を変形すると　$\log(2x+1)=2-\log 5$

$$\log(2x+1)=\log\frac{10^2}{5}$$

よって　$2x+1=20$

したがって　$x=\dfrac{19}{2}$

(3) 真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x-5>0$

すなわち　$x>5$　$\cdots$①

方程式を変形すると　$\log_6 x(x-5)=2$

よって　$x(x-5)=6^2$

したがって　$(x+4)(x-9)=0$

① より　$x+4>0$ であるから　$x=9$

(4) 真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x-3>0$

すなわち　$x>3$　$\cdots$①

方程式を変形すると　$\log x(x-3)=1$

よって　$x(x-3)=10^1$

したがって　$(x+2)(x-5)=0$

① より　$x+2>0$ であるから　$x=5$

(5) 真数は正であるから　$x > 0$　かつ　$x - 15 > 0$

すなわち　$x > 15$　$\cdots$ ①

方程式を変形すると　$\log x(x-15) = 2$

よって　$x(x-15) = 10^2$

したがって　$(x+5)(x-20) = 0$

① より　$x+5 > 0$ であるから　$x = 20$

(6) 真数は正であるから　$x + 1 > 0$　かつ　$x - 2 > 0$

すなわち　$x > 2$　$\cdots$ ①

方程式を変形すると　$\log(x+1)(x-2) = 1$

よって　$(x+1)(x-2) = 10^1$

したがって　$(x+3)(x-4) = 0$

① より　$x+3 > 0$ であるから　$x = 4$

(7) 真数は正であるから　$x + 2 > 0$　かつ　$x + 5 > 0$

すなわち　$x > -2$　$\cdots$ ①

方程式を変形すると　$\log(x+2)(x+5) = 1$

よって　$(x+2)(x+5) = 10^1$

したがって　$x(x+7) = 0$

① より　$x+7 > 0$ であるから　$x = 0$

(8) 真数は正であるから　$x + 1 > 0$　かつ　$x - 1 > 0$

すなわち　$x > 1$　$\cdots$ ①

方程式を変形すると　$\log(x+1)(x-1) = 0$

よって　$(x+1)(x-1) = 10^0$

したがって　$x^2 = 2$

① に注意して　$x = \sqrt{2}$

(9) 真数は正であるから　$3x > 0$　かつ　$4x > 0$

すなわち　$x > 0$　$\cdots$ ①

方程式を変形すると　$\log x^2 = 1$

よって　$x^2 = 10^1$

したがって　$x^2 = 10$

① に注意して　$x = \sqrt{10}$

(10) 真数は正であるから　$2x-1>0$　かつ　$x-9>0$

すなわち　$x>9$　$\cdots$①

方程式を変形すると　$\log(2x-1)(x-9)=2$

よって　$(2x-1)(x-9)=10^2$

したがって　$(x-13)(2x+7)=0$

① より　$2x+7>0$ であるから　$x=13$

(11) 真数は正であるから　$4x-3>0$　かつ　$3x-4>0$

すなわち　$x>\dfrac{4}{3}$　$\cdots$①

方程式を変形すると　$\log(4x-3)(3x-4)=1$

よって　$(4x-3)(3x-4)=10^1$

したがって　$(x-2)(12x-1)=0$

① より　$12x-1>0$ であるから　$x=2$

(12) 真数は正であるから　$x+6>0$　かつ　$x-4>0$

すなわち　$x>4$　$\cdots$①

方程式を変形すると　$\log(x+6)(x-4)=1$

よって　$(x+6)(x-4)=10^1$

したがって　$x^2+2x-34=0$

① に注意して　$x=\sqrt{35}-1$

(13) 真数は正であるから　$x^2-5x>0$　かつ　$x+4>0$　かつ　$x-7>0$

すなわち　$x>7$　$\cdots$①

方程式を変形すると　$\log(x^2-5x)=\log(x+4)(x-7)\cdot 2$

よって　$x^2-5x=(x+4)(x-7)\cdot 2$

整理して　$x^2-x-56=0$

したがって　$(x+7)(x-8)=0$

① より　$x+7>0$ であるから　$x=8$

(14) 真数は正であるから　$4x+1>0$　かつ　$2x+1>0$

すなわち　$x>-\dfrac{1}{4}$　$\cdots$①

方程式を変形すると　$\log(4x+1)(2x+1)=\log 15$

よって　$(4x+1)(2x+1)=15$

整理して　$4x^2+3x-7=0$

したがって　$(x-1)(4x+7)=0$

① より　$4x+7>0$ であるから　$x=1$

(15) 方程式を変形すると　$\log(x-1)(x^2-5x+7)=\log(x-1)$

真数は正であるから　$x-1>0$　かつ　$x^2-5x+7>0$

すなわち　$x>1$　$\cdots$①

よって　$(x-1)(x^2-5x+7)=x-1$

$x-1\neq 0$ であるから　$x^2-5x+7=1$

整理して　$x^2-5x+6=0$

したがって　$(x-2)(x-3)=0$

① に注意して　$x=2,\ 3$

(16) 真数は正であるから　$x-4>0$　かつ　$x-1>0$

すなわち　$x>4$　$\cdots$①

方程式を変形すると　$\log_2(x-4)=\dfrac{\log_2(x-1)}{\log_2 4}$

両辺に 2 をかけると　$2\log_2(x-4)=\log_2(x-1)$

よって　$(x-4)^2=x-1$

整理して　$x^2-9x+17=0$

① に注意して　$x=\dfrac{9+\sqrt{13}}{2}$

## 5.30

(1) 第 1 式から　$y = x - 3 \quad \cdots ①$

真数は正であるから　$x > 0$　かつ　$x - 3 > 0$

すなわち　$x > 3 \quad \cdots ②$

第 2 式を変形すると　$\log xy = \log 10$

よって　$xy = 10$

① を代入して　$x(x-3) = 10$

したがって　$(x+2)(x-5) = 0$

② より　$x + 2 > 0$ であるから　$x = 5$

これを ① に代入して　$y = 2$　　(答) $x = 5,\ y = 2$

(2) 第 1 式から　$x = 9 - 2y \quad \cdots ①$

真数は正であるから　$9 - 2y > 0$　かつ　$y > 0$

すなわち　$0 < y < \dfrac{9}{2} \quad \cdots ②$

第 2 式を変形すると　$\log xy = \log 10$

よって　$xy = 10$

① を代入して　$(9-2y)y = 10$

したがって　$(y-2)(2y-5) = 0$

② に注意して　$y = 2,\ \dfrac{5}{2}$

これを ① に代入して　$y = 2$ のとき　$x = 5$

$y = \dfrac{5}{2}$ のとき　$x = 4$

(答) $(x,\ y) = (5,\ 2),\ \left(4,\ \dfrac{5}{2}\right)$

(3) 第 2 式から　$\log(x+y)(x^2-xy+y^2)-\log(x^2-xy+y^2)=1$

$\log(x+y)=\log 10$

よって　$y=10-x$ $\quad\cdots①$

① を第 1 式に代入して　$\log(2x-10)+\log(15x-80)=2$ $\quad\cdots②$

真数は正であるから　$2x-10>0$　かつ　$15x-80>0$

すなわち　$x>\dfrac{16}{3}$ $\quad\cdots③$

② から　$\log(2x-10)(15x-80)=\log 100$

よって　$(2x-10)(15x-80)=100$

整理して　$3x^2-31x+70=0$

したがって　$(x-7)(3x-10)=0$

③ より　$3x-10>0$ であるから　$x=7$

これを ① に代入して　$y=3$　　　(答) $x=7$，$y=3$

## 5.31

(1) $\log_{10}6=\log_{10}(2\times 3)=\log_{10}2+\log_{10}3=0.3010+0.4771=0.7781$

(2) $\log_{10}20=\log_{10}(2\times 10)=\log_{10}2+\log_{10}10=0.3010+1=1.3010$

(3) $\log 60=\log(2\times 3\times 10)=\log 2+\log 3+\log 10$
$=0.3010+0.4771+1=1.7781$

(4) $\log 6000=\log(2\times 3\times 10^3)=\log 2+\log 3+\log 10^3$
$=0.3010+0.4771+3=3.7781$

(5) $\log_{10}6+\log_{10}2=\log_{10}(6\times 2)=\log_{10}(2^2\times 3)=2\log_{10}2+\log_{10}3$
$=2\times 0.3010+0.4771=1.0791$

(6) $\log_{10}8^2=\log_{10}(2^3)^2=\log_{10}2^6=6\log_{10}2=6\times 0.3010=1.8060$

(7) $\log\dfrac{1}{6}=\log 6^{-1}=-\log 6=-\log(2\times 3)=-(\log 2+\log 3)$
$=-(0.3010+0.4771)=-0.7781$

(8) $\log 1.5=\log\dfrac{3}{2}=\log 3-\log 2=0.4771-0.3010=0.1761$

(9) $\log 0.2=\log\dfrac{2}{10}=\log 2-\log 10=0.3010-1=-0.6990$

(10) $\log 0.125 = \log \dfrac{1}{8} = \log 2^{-3} = -3\log 2 = -3 \times 0.3010 = -0.9030$

(11) $\log 1.08 = \log \dfrac{108}{100} = \log \dfrac{2^2 \times 3^3}{10^2} = 2\log 2 + 3\log 3 - 2\log 10$

$= 2 \times 0.3010 + 3 \times 0.4771 - 2 = 0.0333$

(12) $\log 864 = \log(2^5 \times 3^3) = 5\log 2 + 3\log 3 = 5 \times 0.3010 + 3 \times 0.4771 = 2.9363$

(13) $\log 5 = \log \dfrac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$

## 5.32

(1) $\log 85 = \log(8.5 \times 10) = \log 8.5 + \log 10 = 0.9294 + 1 = 1.9294$

(2) $\log 850 = \log(8.5 \times 10^2) = \log 8.5 + \log 10^2 = 0.9294 + 2 = 2.9294$

(3) $\log \sqrt{85} = \log 85^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log 85 = \dfrac{1}{2}\log(8.5 \times 10) = \dfrac{1}{2}(\log 8.5 + \log 10)$

$= \dfrac{1}{2}(0.9294 + 1) = 0.9647$

## 5.33

(1) $\log_{0.5} 4 = \dfrac{\log 4}{\log 0.5} = \dfrac{\log 2^2}{\log 2^{-1}} = \dfrac{2\log 2}{-\log 2} = -2$

(2) $\log_{0.4} 5 = \dfrac{\log 5}{\log 0.4} = \dfrac{\log \frac{10}{2}}{\log \frac{2^2}{10}} = \dfrac{\log 10 - \log 2}{2\log 2 - \log 10}$

$= \dfrac{1 - 0.3010}{2 \times 0.3010 - 1} = \dfrac{0.6990}{-0.3980} \fallingdotseq -1.756$

## 5.34

(1) $$\log_{10} 3^{10} = 10\log_{10} 3 = 10 \times 0.4771 = 4.771$$

$4 < \log_{10} 3^{10} < 5$ であるから

$$\log_{10} 10^4 < \log_{10} 3^{10} < \log_{10} 10^5$$

よって　$10^4 < 3^{10} < 10^5$

したがって，$3^{10}$ は 5 桁の数である．

(2) $$\log_{10} 3^{18} = 18\log_{10} 3 = 18 \times 0.4771 = 8.5878$$

$8 < \log_{10} 3^{18} < 9$ であるから

$$\log_{10} 10^8 < \log_{10} 3^{18} < \log_{10} 10^9$$

よって　$10^8 < 3^{18} < 10^9$

したがって，$3^{18}$ は 9 桁の数である．

(3)
$$\begin{aligned}\log_{10} 12^{12} &= 12\log_{10} 12 = 12(2\log_{10} 2 + \log_{10} 3)\\ &= 12(2\times 0.3010 + 0.4771) = 12.9492\end{aligned}$$

$12 < \log_{10} 12^{12} < 13$ であるから

$$\log_{10} 10^{12} < \log_{10} 12^{12} < \log_{10} 10^{13}$$

よって　$10^{12} < 12^{12} < 10^{13}$

したがって，$12^{12}$ は 13 桁の数である．

## 5.35

(1) $n$ 年後に初めて今年の 2 倍以上になるのは，$1.1^n \geqq 2$ を満たす最小の自然数である．この不等式の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 1.1^n \geqq \log_{10} 2$$

$$n\log_{10}\frac{11}{10} \geqq \log_{10} 2$$

よって　$n(\log_{10} 11 - 1) \geqq \log_{10} 2$

ここで　$\log_{10} 11 - 1 = 1.0453 - 1 = 0.0453$

$$\log_{10} 2 = \log\frac{20}{10} = \log_{10} 20 - \log_{10} 10 = 1.3010 - 1 = 0.3010$$

ゆえに　$n \geqq \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 11 - 1} = \dfrac{0.3010}{0.0453} = 6.6\cdots$

したがって，乗客数が初めて今年の 2 倍以上になるのは，7 年後である．

(2) $n$ 年後に初めて元金の 2 倍以上になるのは，$1.08^n \geqq 2$ を満たす最小の自然数である．この不等式の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 1.08^n \geqq \log_{10} 2$$

$$n\log_{10}\frac{2^2\times 3^3}{10^2} \geqq \log_{10} 2$$

よって　$n(2\log_{10} 2 + 3\log_{10} 3 - 2) \geqq \log_{10} 2$

ここで　$2\log_{10} 2 + 3\log_{10} 3 - 2 = 2\times 0.3010 + 3\times 0.4771 - 2 = 0.0333$

ゆえに　$n \geqq \dfrac{\log_{10} 2}{2\log_{10} 2 + 3\log_{10} 3 - 2} = \dfrac{0.3010}{0.0333} = 9.03\cdots$

したがって，元金が初めて現在の 2 倍以上になるのは，10 年後である．

(3) $n$ 乗して初めて 1000 より大きくなるのは，$\left(\dfrac{50}{49}\right)^n > 1000$ を満たす最小の自然数である．この不等式の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{50}{49}\right)^n > \log_{10} 1000$$

$$n\log_{10}\frac{10^2}{2\times 7^2} > \log_{10} 10^3$$

よって　$n(2-\log 2 - 2\log 7) > 3$

ここで　$2-\log 2 - 2\log 7 = 2 - 0.3010 - 2\times 0.8451 = 0.0088$

ゆえに　$n > \dfrac{3}{2-\log 2 - 2\log 7} = \dfrac{3}{0.0088} = 340.9\cdots$

したがって，初めて 1000 より大きくなるのは，341 乗したときである．

**6.1** $\dfrac{(2^2+3\cdot 2-4)-\{(-1)^2+3\cdot(-1)-4\}}{2-(-1)}=\dfrac{12}{3}=4$

**6.2**

(1) $\lim\limits_{x\to 3} 3(5-x)=3(5-3)=6$

(2) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x)=(-1)^2-(-1)=2$

**6.3**

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=2+1=3$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+3)=2+3=5$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+x^2}{x+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(2+x)}{x(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+x}{1+x}=\dfrac{2+0}{1+0}=2$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{1+2}{1+1}=\dfrac{3}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{2\cdot 2+1}{2+1}=\dfrac{5}{3}$

(7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(2x+3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{2x+3}=\dfrac{2-1}{2\cdot 2+3}=\dfrac{1}{7}$

(8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{2x^2-7x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x+3)(x-2)}{(2x-3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+3}{2x-3}=\dfrac{2\cdot 2+3}{2\cdot 2-3}=7$

**6.4**

(1)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}&=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+9)(x^2-9)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+9)(x+3)(x-3)}{x-3}\\&=\lim_{x\to 3}(x^2+9)(x+3)=(3^2+9)(3+3)=18\times 6=108\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{(a^3+3a^2h+3ah^2+h^3)-a^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{h(3a^2+3ah+h^2)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(3a^2+3ah+h^2)=3a^2\end{aligned}$$

## 6.5

(1) 与えられた等式により

$$\lim_{x\to1}(ax^2+x+b)=\lim_{x\to1}\left\{\frac{ax^2+x+b}{x-1}\times(x-1)\right\}$$
$$a\cdot1^2+1+b=3\times0$$

ゆえに　$b=-a-1$　$\cdots$①

このとき $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{ax^2+x+b}{x-1}=\lim_{x\to2}\frac{ax^2+x-a-1}{x-1}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(ax+a+1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}(ax+a+1)=2a+1$$

$2a+1=3$ から　$a=1$　① から　$b=-2$　(答) $a=1$, $b=-2$

(2) 与えられた等式により

$$\lim_{x\to2}(2x^2+ax+b)=\lim_{x\to2}\left\{\frac{2x^2+ax+b}{x^2-x-2}\times(x^2-x-2)\right\}$$
$$2\cdot2^2+a\cdot2+b=\frac{5}{3}\times0$$

ゆえに　$b=-2a-8$　$\cdots$①

このとき $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2x^2+ax-2a-8}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+a+4)}{(x-2)(x+1)}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2x+a+4}{x+1}=\frac{a+8}{3}$$

$\dfrac{a+8}{3}=\dfrac{5}{3}$ から　$a=-3$　① から　$b=-2$　(答) $a=-3$, $b=-2$

**6.6** $\displaystyle f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2ah+h^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h(2a+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(2a+h)=2a$$

**6.7** $f(x)=5x^3$ とおくと

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{5(x+h)^3-5x^3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{5(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-5x^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{15x^2h+15xh^2+5h^3}{h}=\lim_{h\to0}(15x^2+15xh+5h^2)=15x^2$$

したがって　$\dfrac{d}{dx}(5x^3)=15x^2$

## 6.8

(1) $y' = 2(x^2)' - 3(x)' + (16)'$

$= 2{\cdot}2x - 3{\cdot}1 + 0$

$= 4x - 3$

(2) $y' = (x^3)' + 3(x^2)' - 5(x)' - (1)'$

$= 3x^2 + 3{\cdot}2x - 5{\cdot}1 - 0$

$= 3x^2 + 6x - 5$

(3) $f'(x) = 3(x^4)' + 4(x^2)' + (5)'$

$= 3{\cdot}4x^3 + 4{\cdot}2x + 0$

$= 12x^3 + 8x$

(4) $y' = \frac{1}{4}(x^3)' + \frac{1}{2}(x^2)' - 2(x)' + (9)'$

$= \frac{1}{4}{\cdot}3x^2 + \frac{1}{2}{\cdot}2x - 2{\cdot}1 + 0$

$= \frac{3}{4}x^2 + x - 2$

## 6.9

(1) $\frac{d}{dx}(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 4)$

$= (x^4)' + 2(x^3)' + 3(x^2)' + 2(x)' + (4)'$

$= 4x^3 + 2{\cdot}3x^2 + 3{\cdot}2x + 2{\cdot}1 + 0$

$= 4x^3 + 6x^2 + 6x + 2$

(2) $\frac{dy}{dx} = 3(x^2)' + (x)' + (4)'$

$= 3{\cdot}2x + 1 + 0$

$= 6x + 1$

## 6.10

(1) $(5x + 4)(2x + 1) = 10x^2 + 13x + 4$

よって　　　$y = 10x^2 + 13x + 4$

したがって　$y' = 20x + 13$

(2) $(2x - 3)(3x - 2) = 6x^2 - 13x + 6$

よって　　　$y = 6x^2 - 13x + 6$

したがって　$y' = 12x - 13$

(3) $(2-3x)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

よって　$y = 9x^2 - 12x + 4$

したがって　$y' = 18x - 12$

(4) $(x^2+1)(2x-5) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 5$

よって　$y = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 5$

したがって　$y' = 6x^2 - 10x + 2$

(5) $(x+1)(x^2-3x+5) = x^3 - 2x^2 + 2x + 5$

よって　$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 5$

したがって　$f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$

(6) $(x-2)(x^2+2x+4) = x^3 - 8$

よって　$y = x^3 - 8$

したがって　$y' = 3x^2$

(7) $(x^2-1)(x^2+x+1) = x^4 + x^3 - x - 1$

よって　$y = x^4 + x^3 - x - 1$

したがって　$y' = 4x^3 + 3x^2 - 1$

(8) $x(x^2+1)^2 = x^5 + 2x^3 + x$

よって　$y = x^5 + 2x^3 + x$

したがって　$y' = 5x^4 + 6x^2 + 1$

(9) $(2x+5)(3x+2)(2x+4) = 12x^3 + 62x^2 + 96x + 40$

よって　$y = 12x^3 + 62x^2 + 96x + 40$

したがって　$y' = 36x^2 + 124x + 96$

**6.11** $(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

よって　$y = 9x^2 + 12x + 4$

したがって　$\dfrac{dy}{dx} = 18x + 12$

**6.12** $(x^2-3)^2 = x^4 - 6x^2 + 9$

よって　$f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$

微分して　$f'(x) = 4x^3 - 12x$

したがって　$f'(2) = 4{\cdot}2^3 - 12{\cdot}2 = 8$

## 6.13

(1) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ とすると　$f'(x) = 2x - 2$

$$f'(3) = 2{\cdot}3 - 2 = 4$$

ゆえに，求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - 0 &= 4(x - 3) \\ y &= 4x - 12 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ とすると　$f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f'(2) = 3{\cdot}2^2 - 3 = 9$$

ゆえに，求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - 4 &= 9(x - 2) \\ y &= 9x - 14 \end{aligned}$$

(3) $f(x) = x^3 - x^2$ とすると　$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$$f(1) = 1^3 - 1^2 = 0$$

$$f'(1) = 3{\cdot}1^2 - 2{\cdot}1 = 1$$

ゆえに，求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - 0 &= 1(x - 1) \\ y &= x - 1 \end{aligned}$$

## 6.14

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 1$ とすると　$f'(x) = 2x - 6$

$$f'(5) = 2{\cdot}5 - 6 = 4$$

ゆえに，求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - (-4) &= 4(x - 5) \\ y &= 4x - 24 \end{aligned}$$

(2) 接線と直交する直線の傾きを $m$ とすると

$$4m = -1 \text{ より}\quad m = -\frac{1}{4}$$

したがって，求める直線の方程式は

$$\begin{aligned} y - (-4) &= -\frac{1}{4}(x - 5) \\ y &= -\frac{1}{4}x - \frac{11}{4} \end{aligned}$$

(3) 直線 $y = 4x - 24$ と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は

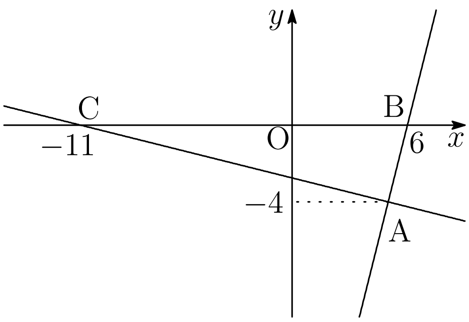
$$y = 0 \text{ より}\quad x = 6$$

直線 $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{11}{4}$ と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は

$$y = 0 \text{ より}\quad x = -11$$

求める面積は，下の図の $\triangle$ABC の面積であるから

$$\frac{1}{2} \times \{6 - (-11)\} \times 4 = 34$$




**6.15** $y = x^2$ を微分すると　　$y' = 2x$

接点の座標を $(a,\ a^2)$ とすると，接線の傾きは $2a$ となるから，その方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \qquad \cdots ①$$

この直線が点 $(1, -3)$ を通るから

$$-3 - a^2 = 2a(1 - a)$$

よって　　$a^2 - 2a - 3 = 0$

すなわち　　$(a + 1)(a - 3) = 0$

$$a = -1,\ 3$$

したがって，接線の方程式は，① より

$a = -1$ のとき　　$y - 1 = -2(x + 1)$

$a = 3$ のとき　　$y - 9 = 6(x - 3)$

(答)　$y = -2x - 1$ と $y = 6x - 9$

**6.16** $y = x^2 + 3x + 1$ を微分すると　　$y' = 2x + 3$

接点の座標を $(a,\ a^2 + 3a + 1)$ とすると，接線の傾きは $2a + 3$ となるから，その方程式は

$$y - (a^2 + 3a + 1) = (2a + 3)(x - a) \qquad \cdots ①$$

この直線が点 $(0, -3)$ を通るから

$$-3 - (a^2 + 3a + 1) = (2a + 3)(0 - a)$$

よって　　$a^2 - 4 = 0$

すなわち　　$(a + 2)(a - 2) = 0$

$a = -2,\ 2$

したがって，接線の方程式は，① より

$a = -2$ のとき　　$y + 1 = -1(x + 2)$

$a = 2$ のとき　　$y - 11 = 7(x - 2)$

(答)　$y = -x - 3$ と $y = 7x - 3$

**6.17** (1) $2a$　(2) $2a$　(3) $2a$　(4) $2ax - a^2 + 3$　(5)(6) $3$，$-1$　(7)(8) $6x - 6$，$-2x + 2$
(9)(10) $(3, 12)$，$(-1, 4)$

## 6.18

(1)　$y' = 3x^2 + 6x - 9$

$= 3(x + 3)(x - 1)$

$y' = 0$ とすると

$x = -3,\ 1$

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 極大<br>$29$ | $\searrow$ | 極小<br>$-3$ | $\nearrow$ |

$f(x)$ の増減表は，右のようになる．したがって，この関数は

$x = -3$ で極大値 $29$，　$x = 1$ で極小値 $-3$

をとる．

(2) $y' = 6x^2 - 18x + 12$
$\quad = 6(x-1)(x-2)$

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | 極大<br>$0$ | $\searrow$ | 極小<br>$-1$ | $\nearrow$ |

$y' = 0$ とすると

$$x = 1,\ 2$$

$y$ の増減表は，右のようになる．したがって，この関数は

$$x = 1 \text{ で極大値 } 0, \qquad x = 2 \text{ で極小値 } -1$$

をとる．

(3) $y' = -3x^2 + 12x - 9$
$\quad = -3(x-1)(x-3)$

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | $\searrow$ | 極小<br>$-3$ | $\nearrow$ | 極大<br>$1$ | $\searrow$ |

$y' = 0$ とすると

$$x = 1,\ 3$$

$y$ の増減表は，右のようになる．したがって，この関数は

$$x = 3 \text{ で極大値 } 1, \qquad x = 1 \text{ で極小値 } -3$$

をとる．

(4) $y' = 6x^2 + 6x - 12$
$\quad = 6(x+2)(x-1)$

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | 極大<br>$21$ | $\searrow$ | 極小<br>$-6$ | $\nearrow$ |

$y' = 0$ とすると

$$x = -2,\ 1$$

$y$ の増減表は，右のようになる．したがって，この関数は

$$x = -2 \text{ で極大値 } 21, \qquad x = 1 \text{ で極小値 } -6$$

をとる．

(5) $y' = \dfrac{1}{5}(3x^2 - 6x - 9)$
$= \dfrac{3}{5}(x+1)(x-3)$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | 極大 $1$ | $\searrow$ | 極小 $-\frac{27}{5}$ | $\nearrow$ |

$y' = 0$ とすると

$$x = -1,\ 3$$

$y$ の増減表は，右のようになる．したがって，この関数は

$$x = -1 \text{ で極大値 } 1, \qquad x = 3 \text{ で極小値 } -\frac{27}{5}$$

をとる．

**6.19** $y' = 3x^2 - 3$
$= 3(x+1)(x-1)$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | 極大 $1$ | $\searrow$ | 極小 $-3$ | $\nearrow$ |

$y' = 0$ とすると

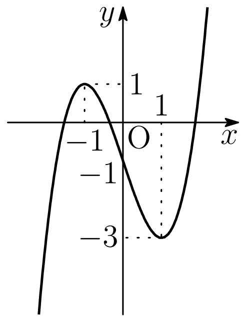
$$x = -1,\ 1$$

$y$ の増減表は，右のようになる．

したがって，この関数は

$x = -1$ で極大値 $1$,
$x = 1$ で極小値 $-3$

をとる．
ゆえに，グラフは右の図のようになる．




**6.20**

(1) $x = 0$ のとき $y = 1$ であるから，$y$ 軸との交点の座標は $(0,\ 1)$

(2) $y' = -3x^2 - 12x - 9$
$= -3(x+3)(x+1)$

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | $\searrow$ | 極小 $1$ | $\nearrow$ | 極大 $5$ | $\searrow$ |

$y' = 0$ とすると

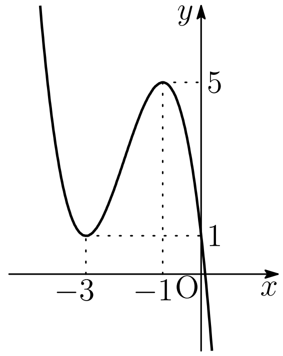
$$x = -3, -1$$

$y$ の増減表は，右のようになる．したがって，この関数は

$$x = -1 \text{ で極大値 } 5, \qquad x = -3 \text{ で極小値 } 1$$

をとる．

(3) (1),(2) から




## 6.21

(1) $f(x)=x^3+ax^2+b$ から　$f'(x)=3x^2+2ax$

$f(1)=4$ より　　$1^3+a\cdot1^2+b=4$　ゆえに　$a+b=3$

$f'(1)=-3$ より　$3\cdot1^2+2a\cdot1=-3$　ゆえに　$2a=-6$

これを解いて　$a=-3,\ b=6$

(2) $f(x)=x^3-3x^2+6$ であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-6x \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると

$x=0,\ 2$

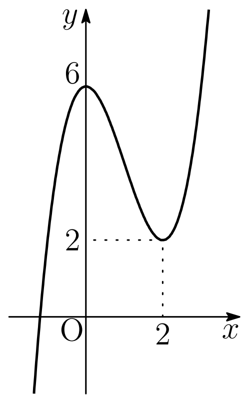
| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 極大<br>6 | ↘ | 極小<br>2 | ↗ |

$f(x)$ の増減表は，右のようになる．したがって，この関数は

$x=0$ で極大値 6，　$x=2$ で極小値 2

をとる．

(3) (2) の結果から



## 6.22

(1) $y' = 3x^2 + 2ax + b$

$y' = 0$ の解が $x = 0,\ 2$ であるから，解と係数の関係により

$$0 + 2 = -\frac{2a}{3}, \quad 0{\cdot}2 = \frac{b}{3}$$

ゆえに　　$a = -3,\ b = 0$

(2) (1) から　　$y = x^3 - 3x^2 + c$

条件より $x = 2$ で $y = 2$ であるから

$$2^3 - 3{\cdot}2^2 + c = 2 \quad \text{これを解いて} \quad c = 6$$

よって，極大値は　$x = 0$ で　$0^3 - 3{\cdot}0^2 + 6 = 6$

**6.23** $y' = 3x^2 + 2ax + b$

$y' = 0$ の解が $x = 1,\ 3$ であるから，解と係数の関係により

$$1 + 3 = -\frac{2a}{3}, \quad 1{\cdot}3 = \frac{b}{3}$$

ゆえに　　$a = -6,\ b = 9$

このとき　　$y = x^3 - 6x^2 + 9x + c$

条件より $x = 1$ で $y = 3$ であるから

$$1^3 - 6{\cdot}1^2 + 9{\cdot}1 + c = 3 \quad \text{これを解いて} \quad c = -1$$

よって，極小値は　$x = 3$ で　$3^3 - 6{\cdot}3^2 + 9{\cdot}3 - 1 = -1$

(答) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$，極小値 $-1$

**6.24** $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$y' = 0$ の解が $x = -2,\ 4$ であるから，解と係数の関係により

$$(-2) + 4 = -\frac{2b}{3a}, \quad (-2)\cdot 4 = \frac{c}{3a}$$

ゆえに　$b = -3a,\ c = -24a$

このとき　$y = ax^3 - 3ax^2 - 24ax + d$

条件より $x = -2$ で $y = 44$，$x = 4$ で $y = -64$ であるから

$$a(-2)^3 - 3a(-2)^2 - 24a(-2) + d = 44$$
$$a\cdot 4^3 - 3a\cdot 4^2 - 24a\cdot 4 + d = -64$$

これらを整理して

$$28a + d = 44$$
$$-80a + d = -64$$

これを解いて　$a = 1,\ d = 16$

また，$a = 1$ から　$b = -3\cdot 1 = -3,\ c = -24\cdot 1 = -24$

(答) $a = 1,\ b = -3,\ c = -24,\ d = 16$

**6.25** $y' = 3x^2 + 2ax + 3$

$y' = 0$ の判別式を $D$ とすると，$D/4 = a^2 - 3\cdot 3$

極値をもつとき　$D > 0$　これを解いて　$a < -3,\ 3 < a$

**6.26**

(1) $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$y' = 0$ とすると　$x = 0,\ 2$

$y$ の増減表は，右のようになる．

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-18$ | $\nearrow$ | 極大<br>$2$ | $\searrow$ | 極小<br>$-2$ | $\nearrow$ | $2$ |

よって，この関数は

$x = 0,\ 3$ で最大値 $2$ をとり，$x = -2$ で最小値 $-18$ をとる．

(2) $y' = -6x^2 + 6x + 12$
$= -6(x+1)(x-2)$

$y' = 0$ とすると　$x = -1,\ 2$

$y$ の増減表は，右のようになる．

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $3$ | $\searrow$ | 極小<br>$-8$ | $\nearrow$ | 極大<br>$19$ | $\searrow$ | $-33$ |

よって，この関数は

$x = 2$ で最大値 $19$ をとり，$x = 4$ で最小値 $-33$ をとる．

## 6.27

(1) 切り取る正方形の 1 辺の長さを $x$ cm，箱の容積を $y\,\mathrm{cm}^3$ とする．

$x>0$，$30-2x>0$ であるから

$$0<x<15 \qquad \cdots ①$$

このとき

$$y = x(30-2x)^2 = 4(x^3-30x^2+225x)$$
$$y' = 12(x^2-20x+75) = 12(x-5)(x-15)$$

① の範囲において，$y$ の増減表は，右のようになる．
したがって，$y$ は $x=5$ で最大値 2000 をとる．

(答) 5 cm，2000cm$^3$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 5 | $\cdots$ | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $y$ | | $\nearrow$ | 極大 2000 | $\searrow$ | |

(2) 切り取る正方形の 1 辺の長さを $x$ cm，箱の容積を $y\,\mathrm{cm}^3$ とする．

$x>0$，$15-2x>0$，$8-2x>0$ であるから

$$0<x<4 \qquad \cdots ①$$

このとき

$$y = x(15-2x)(8-2x) = 2(2x^3-23x^2+60x)$$
$$y' = 4(3x^2-23x+30) = 12(x-6)(3x-5)$$

① の範囲において，$y$ の増減表は，右のようになる．
したがって，$y$ は $x=\dfrac{5}{3}$ で最大になる．

(答) $\dfrac{5}{3}$ cm

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{5}{3}$ | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $y$ | | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | |

(3) 切り取る正方形の1辺の長さを $x$ cm，箱の容積を $y$ cm$^3$ とする．

$x>0$，$25-2x>0$，$40-2x>0$ であるから

$$0<x<\frac{25}{2} \qquad \cdots ①$$

このとき

$$y= x(25-2x)(40-2x)=2(2x^3-65x^2+500x)$$
$$y'= 4(3x^2-65x+250)=4(x-5)(3x-50)$$

① の範囲において，$y$ の増減表は，右のようになる．
したがって，$y$ は $x=5$ で最大になる．

(答) 5 cm

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 5 | $\cdots$ | $\frac{25}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $y$ | | ↗ | 極大 | ↘ | |

## 6.28

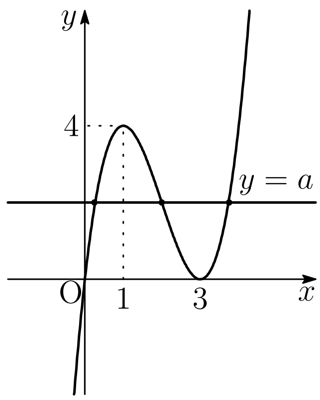
(1) 関数 $y=x^3-6x^2+9x$ について

$$y'=3x^2-12x+9$$
$$=3(x-1)(x-3)$$

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | ↗ | 極大<br>4 | ↘ | 極小<br>0 | ↗ |

$y$ の増減表は，右のようになる．
よって，$y=x^3-6x^2+9x$ のグラフは，右の図のようになる．
求める $a$ の値の範囲は，このグラフと直線 $y=a$ が3個の共有点をもつ範囲であるから

$$0<a<4$$

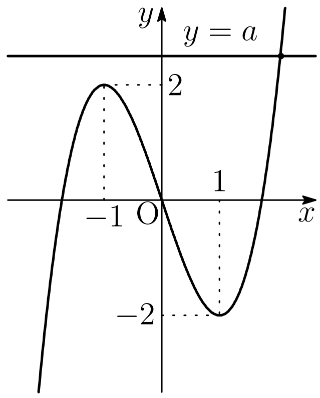


(2) 関数 $y = x^3 - 3x$ について

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | 極大 $2$ | $\searrow$ | 極小 $-2$ | $\nearrow$ |

$y$ の増減表は，右のようになる．
よって，$y = x^3 - 3x$ のグラフは，右の図のようになる．




求める $a$ の値の範囲は，このグラフと直線 $y = a$ が 1 個の共有点をもつ範囲であるから

$$a < -2,\ 2 < a$$

## 6.29

(1) $f(x) = (x^3 + 2) - 3x$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は，右のようになる．

よって，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ は $x = 1$ で最小値 $0$ をとる．

したがって，$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるから

$$(x^3 + 2) - 3x \geqq 0$$

すなわち　　$x^3 + 2 \geqq 3x$

等号が成り立つのは，$x = 1$ のときである．

(2) $f(x) = (x^3 + 12x) - 6x^2$ とすると

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 12x + 12 \\
&= 3(x-2)^2
\end{aligned}
$$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $8$ | $\nearrow$ |

$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は，
右のようになる．

よって，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ は $x = 0$ で最小値 $0$ をとる．

したがって，$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるから

$$(x^3 + 12x) - 3x^2 \geqq 0$$

すなわち　$$x^3 + 12x \geqq 3x^2$$

等号が成り立つのは，$x = 0$ のときである．

## 6.30

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 + C = \frac{1}{4}x^2 + C$

(3) $\displaystyle\int (x+2)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

(4)
$$
\begin{aligned}
\int (3x^2 - 4x + 3)\,dx &= 3\cdot\frac{1}{3}x^2 - 4\cdot\frac{1}{2}x^2 + 3x + C \\
&= x^3 - 2x^2 + 3x + C
\end{aligned}
$$

(5) $\displaystyle\int (x^3 - x - 1)\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$

(6)
$$
\begin{aligned}
\int (2x^3 - 6x + 3)\,dx &= 2\cdot\frac{1}{4}x^4 - 6\cdot\frac{1}{2}x^2 + 3x + C \\
&= \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3x + C
\end{aligned}
$$

(7)
$$
\begin{aligned}
\int x(1+x^2)\,dx &= \int (x + x^3)\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C
\end{aligned}
$$

(8) $\displaystyle\int (x-1)^2\,dx = \int (x^2-2x+1)\,dx$

$$= \frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$$

## 6.31

(1) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int (3x^2+2x-1)\,dx$

$$= 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 2\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$

$$= x^3 + x^2 - x + C$$

(2) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int (x-2)(x+1)\,dx$

$$= \int (x^2-x-2)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$$

**6.32** 関数 $f(x)$ は，$f'(x)=(2x-3)(x+2)$ の不定積分であるから

$$f(x) = \int (2x-3)(x+2)\,dx$$

$$= \int (2x^2+x-6)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + C$$

よって　　$f(1) = \dfrac{2}{3}\cdot 1^3 + \dfrac{1}{2}\cdot 1^2 - 6\cdot 1 + C = C - \dfrac{29}{6}$

条件から $C - \dfrac{29}{6} = 2$ であり　　$C = \dfrac{41}{6}$

したがって　　$f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + \dfrac{41}{6}$

## 6.33

(1) $\displaystyle\int_1^3 x^3\,dx = \left[\,\frac{x^4}{4}\,\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20$

(2) $\displaystyle\int_1^2 (3x-2)\,dx = \left[\,\frac{3}{2}x^2 - 2x\,\right]_1^2$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot 2^2 - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot 1^2 - 2\cdot 1\right) = \frac{5}{2}$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\,dx = \left[\ \frac{x^3}{3}+x\ \right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3}+1\right)-0=\frac{4}{3}$

(4) $$\begin{aligned}\int_1^3 (x+3)(x-1)\,dx &= \int_1^3 (x^2+2x-3)\,dx \\ &= \left[\ \frac{x^3}{3}+x^2-3x\ \right]_1^3 \\ &= \left(\frac{3^3}{3}+3^2-3\cdot 3\right)-\left(\frac{1^3}{3}+1^2-3\cdot 1\right)=\frac{32}{3}\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}\int_1^4 (x+1)^2\,dx &= \int_1^4 (x^2+2x+1)\,dx \\ &= \left[\ \frac{x^3}{3}+x^2+x\ \right]_1^4 \\ &= \left(\frac{4^3}{3}+4^2+4\right)-\left(\frac{1^3}{3}+1^2+1\right)=39\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (x+4)(2x-1)\,dx &= \int_{-1}^1 (2x^2+7x-4)\,dx \\ &= \left[\ \frac{2}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-4x\ \right]_{-1}^1 \\ &= \left(\frac{2}{3}\cdot 1^3+\frac{7}{2}\cdot 1^2-4\cdot 1\right)-\left\{\frac{2}{3}(-1)^3+\frac{7}{2}\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)\right\} \\ &= -\frac{20}{3}\end{aligned}$$

(7) $$\begin{aligned}\int_1^3 x(x+1)(x+2)\,dx &= \int_1^3 (x^3+3x^2+2x)\,dx \\ &= \left[\ \frac{x^4}{4}+x^3+x^2\ \right]_1^3 \\ &= \left(\frac{3^4}{4}+3^3+3^2\right)-\left(\frac{1^3}{4}+1^3+1^2\right)=54\end{aligned}$$

(8) $$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (5x^4-6x^2+1)\,dx &= \left[\ x^5-2x^3+x\ \right]_{-1}^2 \\ &= (2^5-2\cdot 2^3+2)-\{(-1)^5-2(-1)^3+(-1)\} \\ &= 18\end{aligned}$$

## 6.34

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(kx^2+2x)\,dx = k\int x^2\,dx + 2\int x\,dx = k\left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_{-1}^{2} + 2\left[\ \frac{x^2}{2}\ \right]_{-1}^{2}$

$$= k\cdot\frac{2^3-(-1)^3}{3} + 2\cdot\frac{2^2-(-1)^2}{2} = 3k+3$$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{3}(x+1)(x+4)\,dx - \int_{1}^{3}(x+2)^2\,dx = \int_{1}^{3}\{(x+1)(x+4)-(x+2)^2\}\,dx$

$$= \int_{1}^{3} x\,dx = \left[\ \frac{x^2}{2}\ \right]_{1}^{3}$$

$$= \frac{3^2-1^3}{2} = 4$$

## 6.35

(1) $\displaystyle\int_{3}^{3}(7x^2-9x+5)\,dx = 0$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{4}(x^2-2x+3)\,dx - \int_{1}^{4}(x^2-2x+3)\,dx$

$$= \int_{-2}^{4}(x^2-2x+3)\,dx + \int_{4}^{1}(x^2-2x+3)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{1}(x^2-2x+3)\,dx = \left[\ \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\ \right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3\cdot 1\right) - \left\{\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 + 3\cdot(-2)\right\} = 15$$

## 6.36

(1) $\displaystyle f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{0}^{x}(3t^2-t)\,dt$

$$= 3x^2 - x$$

(2) 等式の両辺を $x$ で微分すると　　$g(x) = 2x-2$

また，与えられた等式で $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから

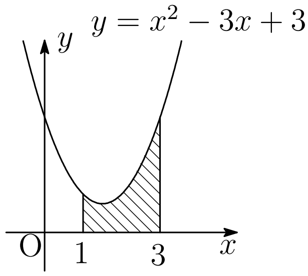
$$0 = a^2 - 2a + 1$$

これを解くと　　$a = 1$

よって　　$g(x) = 2x-2$，$a = 1$

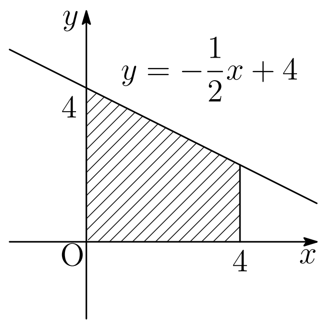
## 6.37

(1) 図の斜線部分の面積 $S$ は



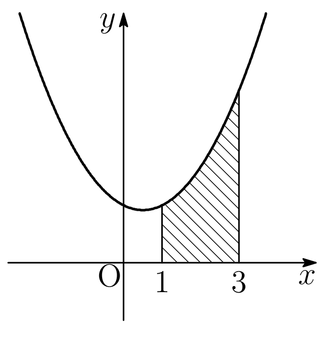

$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^3 (x^2 - 3x + 3)\,dx \\
&= \left[\ \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 3x\ \right]_1^3 \\
&= \left(\frac{3^3}{3} - \frac{3}{2}\cdot 3^2 + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{3}{2}\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right) \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

(2) 求める面積 $S$ は




$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x + 4\right)\,dx \\
&= \left[-\frac{x^2}{4} + 4x\ \right]_0^4 \\
&= \left(-\frac{4^2}{4} + 4\cdot 4\right) - 0 = 12
\end{aligned}
$$

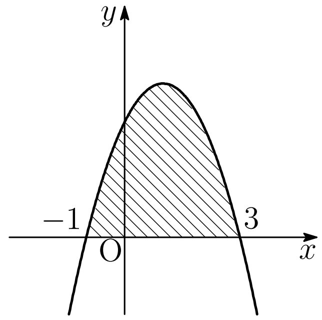
(3) 求める面積 $S$ は




$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^3 (x^2 - x + 3)\,dx \\
&= \left[\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\ \right]_1^3 \\
&= \left(\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 3\cdot 1\right) \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}
$$

(4) この放物線と $x$ 軸の共有点の $x$ 座標は，
$3+2x-x^2=0$ を解いて

$$x=-1,\ 3$$

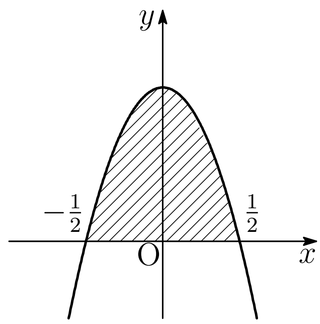



求める面積 $S$ は

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{3}(3+2x-x^2)\,dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{3} \\
&= \left(-\frac{3^3}{3}+3^2+3\cdot 3\right)-\left\{-\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+3\cdot(-1)\right\} \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

(5) この放物線と $x$ 軸の共有点の $x$ 座標は，
$1-4x^2=0$ を解いて

$$x=\pm\frac{1}{2}$$




求める面積 $S$ は

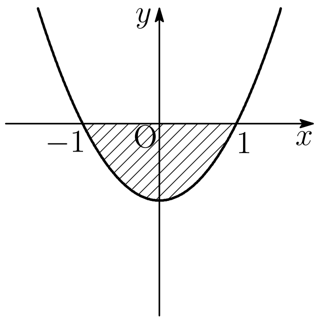
$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1-4x^2)\,dx \\
&= \left[-\frac{4}{3}x^3+x\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\right\}-\left\{-\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

## 6.38

(1) この放物線と $x$ 軸の共有点の $x$ 座標は，
$x^2-1=0$ を解いて

$$x=\pm 1$$

$-1 \leqq x \leqq 1$ では $y \leqq 0$ であるから，
求める面積 $S$ は

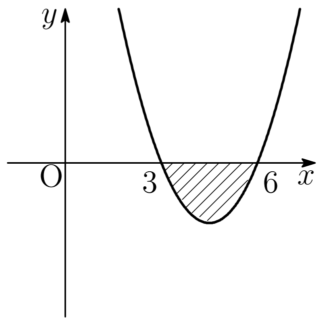



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} \{-(x^2-1)\}\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1} \\ &= \left(-\frac{1^3}{3}+1\right)-\left\{-\frac{(-1)^3}{3}+(-1)\right\} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(2) この放物線と $x$ 軸の共有点の $x$ 座標は，
$x^2-9x+18=0$ を解いて

$$x=3,\ 6$$

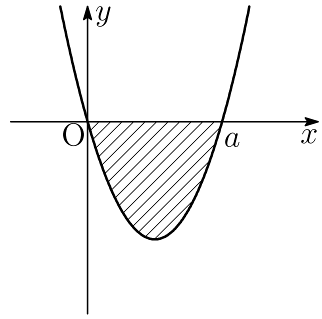
$3 \leqq x \leqq 6$ では $y \leqq 0$ であるから，
求める面積 $S$ は




$$\begin{aligned} S &= \int_{3}^{6} \{-(x^2-9x+18)\}\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{9}{2}x^2-18x\right]_{3}^{6} \\ &= \left(-\frac{6^3}{3}+\frac{9}{2}\cdot 6^2-18\cdot 6\right)-\left\{-\frac{3^3}{3}+\frac{9}{2}\cdot 3^2-18\cdot 3\right\} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(3) この放物線と $x$ 軸の共有点の $x$ 座標は，
$x^2 - ax = 0$ を解いて

$$x = 0,\ a$$




$0 \leqq x \leqq a$ では $y \leqq 0$ であるから，
求める面積 $S$ は

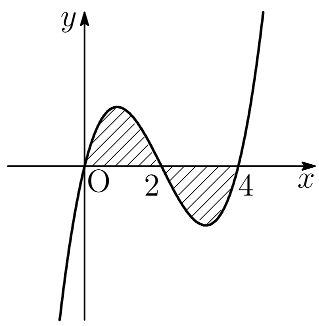
$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \{-(x^2 - ax)\}\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{a}{2}x^2\right]_0^a \\ &= \left(-\frac{a^3}{3} + \frac{a}{2}\cdot a^2\right) - 0 = \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

条件より　$\dfrac{a^3}{6} = 36$　であるから　$a = 6$

## 6.39

(1) $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ と $x$ 軸の共有点の $x$ 座標は，
$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$ を解いて

$$x = 0,\ 2,\ 4$$



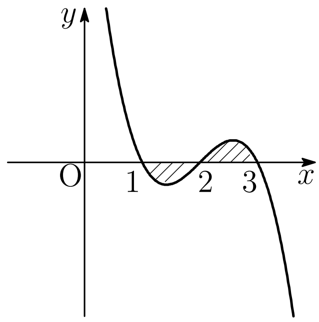

$0 \leqq x \leqq 2$ において　$y \geqq 0$
$2 \leqq x \leqq 4$ において　$y \leqq 0$

ゆえに，求める面積 $S$ は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx + \int_2^4 \{-(x^3 - 6x^2 + 8x)\}\,dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2\right]_2^4 \\ &= \left(\frac{2^4}{4} - 2\cdot 2^3 + 4\cdot 2^2\right) - 0 + \left(-\frac{4^4}{4} + 2\cdot 4^3 - 4\cdot 4^2\right) - \left(-\frac{2^4}{4} + 2\cdot 2^3 - 4\cdot 2^2\right) \\ &= 8 \end{aligned}$$

(2) $y=-(x-1)(x-2)(x-3)$ と $x$ 軸の共有点の $x$ 座標は,
$-(x-1)(x-2)(x-3)=0$ を解いて

$$x=1,\ 2,\ 3$$




$1 \leqq x \leqq 2$ において　$y \leqq 0$
$2 \leqq x \leqq 3$ において　$y \geqq 0$

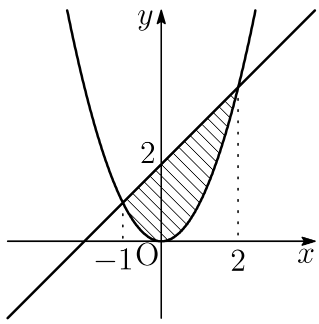
$y=-x^3+6x^2-11x+6$ であるから，求める面積 $S$ は

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^2 \{-(-x^3+6x^2-11x+6)\}\,dx + \int_2^3 (-x^3+6x^2-11x+6)\,dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x\right]_1^2 + \left[-\frac{x^4}{4}+2x^3-\frac{11}{2}x^2+6x\right]_2^3 \\
&= \left(\frac{2^4}{4}-2\cdot2^3+\frac{11}{2}\cdot2^2-6\cdot2\right)-\left(\frac{1^4}{4}-2\cdot1^3+\frac{11}{2}\cdot1^2-6\cdot1\right) \\
&\qquad + \left(-\frac{3^4}{4}+2\cdot3^3-\frac{11}{2}\cdot3^2+6\cdot3\right)-\left(-\frac{2^4}{4}+2\cdot2^3-\frac{11}{2}\cdot2^2+6\cdot2\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

## 6.40

(1) 放物線と直線の共有点の $x$ 座標は，方程式

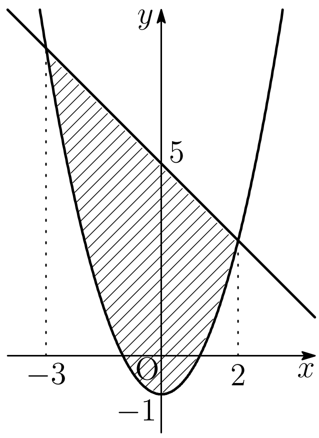
$$x^2=x+2$$




を解いて　　$x=-1,\ 2$
右の図から，求める面積 $S$ は

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^2 \{(x+2)-x^2\}\,dx \\
&= \int_{-1}^2 (-x^2+x+2)\,dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

(2) 放物線と直線の共有点の $x$ 座標は，方程式



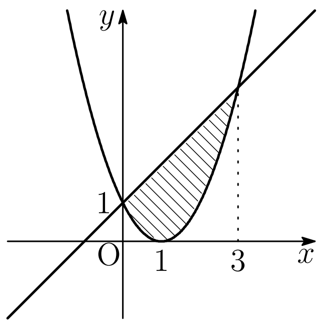

$$x^2-1=-x+5$$

を解いて　　$x=-3,\ 2$

右の図から，求める面積 $S$ は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{2}\{(-x+5)-(x^2-1)\}\,dx \\ &= \int_{-3}^{2}(-x^2-x+6)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-3}^{2}=\frac{125}{6} \end{aligned}$$

(3) 放物線と直線の共有点の $x$ 座標は，方程式




$$(x-1)^2=x+1$$

を解いて　　$x=0,\ 3$

右の図から，求める面積 $S$ は

$$\begin{aligned} S &= \int_{0}^{3}\{(x+1)-(x-1)^2\}\,dx \\ &= \int_{0}^{3}(-x^2+3x)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}=\frac{9}{2} \end{aligned}$$

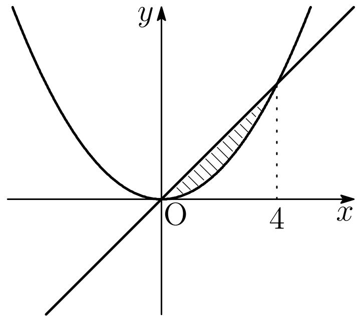
## 6.41

(1) 放物線 $y = \dfrac{x^2}{4}$ と直線 $y = x$ の共有点の $x$ 座標は，方程式

$$\frac{x^2}{4} = x$$

を解いて　　$x = 0,\ 4$

右の図から，求める面積 $S$ は




$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

(2) この領域は，

直線 $y = x$ およびその上側，

放物線 $y = -x^2 + 2x$ およびその下側

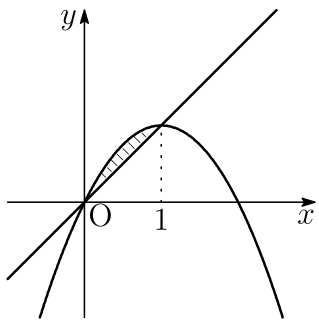
に共通する部分である．

直線と放物線の共有点の $x$ 座標は，方程式

$$x = -x^2 + 2x$$

を解いて　$x = 0,\ 1$

右の図から，求める面積 $S$ は




$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(-x^2 + 2x) - x\}\, dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(3)　(i) 直線 $y = lx + m$ は，2 点 $(-3,\ 3)$，$(6,\ 12)$ を通るから

$$3 = l\cdot(-3) + m,\ \ 12 = l\cdot 6 + m$$

整理して

$$-3l + m = 3,\ \ 6l + m = 12$$

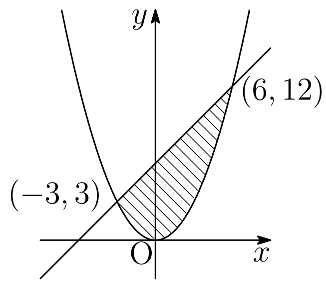
これを解いて　$l = 1,\ m = 6$

放物線 $y = nx^2$ は，点 $(-3,\ 3)$ を通るから

$$3 = n\cdot(-3)^2 \quad すなわち \quad 9n = 3$$

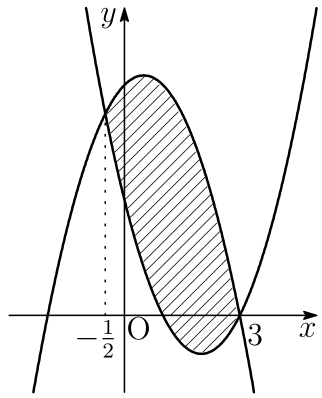
これを解いて　$n = \dfrac{1}{3}$

(ii) 右の図から求める面積 $S$ は




$$S = \int_{-3}^{6} \left\{(x+6) - \frac{1}{3}x^2\right\} dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-3}^{6} = \frac{81}{2}$$

(4) 2 つの放物線の共有点の $x$ 座標は，方程式




$$x^2 - 4x + 3 = 6 + x - x^2$$

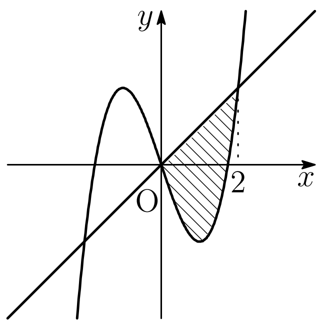
を解いて　　$x = -\dfrac{1}{2},\ 3$

右の図から，求める面積 $S$ は

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{3} \{(6+x-x^2) - (x^2-4x+3)\}\, dx$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{3} (-2x^2 + 5x + 3)\, dx$$
$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x\right]_{-\frac{1}{2}}^{3} = \frac{343}{24}$$

## 6.42

(1) 曲線と直線の共有点の $x$ 座標は




$$x^3 - 3x = x$$

を解いて　　$x = -2,\ 0,\ 2$

$x \geqq 0$ から，求める面積 $S$ は

$$S = \int_{0}^{2} \{x - (x^3 - 3x)\}$$
$$= \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_{0}^{2} = 4$$

(2) $y' = 3x^2 - 3$

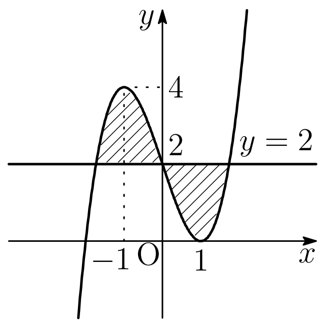
$= 3(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると

$x = -1,\ 1$

$y$ の増減表は，右のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | 極大<br>$4$ | $\searrow$ | 極小<br>$0$ | $\nearrow$ |




したがって，この関数は

$x = -1$ で極大値 $4$,

$x = 1$ で極小値 $0$

をとる．

曲線 $y = x^3 - 3x + 2$ と直線 $y = 2$ の共有点の $x$ 座標は，方程式

$$x^3 - 3x + 2 = 2$$

を解いて　　$x = -\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}$

したがって，求める面積 $S$ は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{3}}^{0} \{(x^3 - 3x + 2) - 2\}\,dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} \{2 - (x^3 - 3x + 2)\}\,dx \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{0} (x^3 - 3x)\,dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} (-x^3 + 3x)\,dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2\right]_{-\sqrt{3}}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(3) $y' = 3x^2 - 10x + 3$ であるから

$x = 1$ のとき $y' = -4$

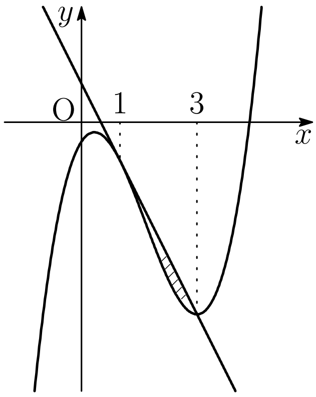
接線の方程式は　$y - (-2) = -4(x - 1)$

ゆえに　$y = -4x + 2$

曲線と接線の共有点の $x$ 座標は

$$\begin{aligned}&(x^3 - 5x^2 + 3x - 1) - (-4x + 2)\\ &= (x - 1)^2(x - 3)\end{aligned}$$

これより　$x = 1,\ 3$




区間 $1 \leqq x \leqq 3$ では，$(x - 1)^2(x - 3) \leqq 0$ であるから，この区間において，曲線は接線の下側にある．したがって，求める面積 $S$ は

$$\begin{aligned}S &= \int_1^3 \{(-4x + 2) - (x^3 - 5x^2 + 3x - 1)\}\,dx\\ &= \int_1^3 (-x^3 + 5x^2 - 7x + 3)\,dx\\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x\,\right]_1^3 = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

**高校生の　就職への数学 II ［解答編］**

発行　平成 18 年 3 月 1 日
編者　西村　信一
印刷　(株) 協和印刷
〒 868-0022　熊本県人吉市願成寺町 396-6
TEL (0966)25-1211　FAX (0966)24-7880