高校生の

新　編　数　学　II

書込みノート

平成 20 年 8 月 21 日

Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

目 次

第 1 章　式と証明

1.1　式と計算

1.1.1　多項式の割り算

158 を 12 で割った商と余りを求めるには，右のような計算をして，商は 13，余りは 2 となる．このことは，次の等式で表される．

$$
\begin{array}{rr@{\,}l}
 & 13 & \leftarrow(\text{商}) \\ \cline{2-2}
12\,) & 158 & \\
 & 12 & \\ \cline{2-2}
 & 38 & \\
 & 36 & \\ \cline{2-2}
 & 2 & \leftarrow(\text{余り})
\end{array}
$$

$$158 \quad = \quad 12 \ \times \ 13 \ + 2$$

すなわち，割り算では

$$(\text{割られる数}) = (\text{割る数}) \times (\text{商}) + (\text{余り})$$

という等式が成り立つ．
ここでは，多項式[1]についても，整数の場合と同じようにして，商と余りを求める割り算を考えよう．

A 》多項式の割り算

たとえば，多項式 $x^2 + 5x + 8$ について，次の等式が成り立つ．

$$x^2 + 5x + 8 = (x + 2)(x + 3) + 2$$

そこで，$x^2 + 5x + 8$ を $x + 2$ で割った商は $x + 3$ で，余りは 2 と考える．この割り算は，整数の割り算と似た方法で，次のように行う．

$$
\begin{array}{rrl}
 & x \ \ +3 & \\ \cline{2-2}
x+2\,) & x^2+5x+8 & \\
\xrightarrow{\times x} & x^2+2x & \leftarrow x^2 \text{ を消すために，} (x+2)\times x \text{ を引く．} \\ \cline{2-2}
 & 3x+8 & \\
\xrightarrow{\times 3} & 3x+6 & \leftarrow 3x \text{ を消すために，} (x+2)\times 3 \text{ を引く．} \\ \cline{2-2}
 & 2 &
\end{array}
$$

[1]多項式には単項式も含めて考える．また，多項式を整式ということがある．

A, B が同じ 1 つの文字についての多項式[2]で，B は 0 でないとする．このとき，A を B で割った商と余りを求めるとは，次の等式を満たす多項式 Q, R を求めることである．

$$\boldsymbol{A = BQ + R}$$

ただし，R は 0 か，B より次数の低い多項式

A, B に対して，Q, R は 1 通りに定まり，Q を**商**，R を**余り**という．

とくに，$R=0$ すなわち $A=BQ$ のとき，A は B で**割り切れる**という．

$$\underset{(\text{割られる式})}{\boldsymbol{A}} \;=\; \underset{(\text{割る式})}{\boldsymbol{B}}\;\underset{(\text{商})}{\boldsymbol{Q}} + \underset{(\text{余り})}{\boldsymbol{R}}$$

R は 0 か，B より次数の低い多項式

多項式 A を多項式 B で割った商と余りを求める計算では，A, B を降べきの順に整理してから行う．

例題 1.1 次の多項式 A を多項式 B で割った商と余りを求めよ．

$$A = 2x^3 - 7x^2 + 8, \qquad B = x^2 + 3 - 4x$$

解答

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x \quad +1 \\ \hline
x^2-4x+3 & 2x^3-7x^2 \qquad\quad +8 \\
 & 2x^3-8x^2+6x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad x^2-6x+8 \\
 & \qquad\quad x^2-4x+3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\; -2x+5
\end{array}
$$

← 割られる式で，ある次数の項がない場合は，その場所は空けておくと，計算しやすい．

(答) 商 $2x+1$，余り $-2x+5$

練習 1.1 次の多項式 A, B について，A を B で割った商と余りを求めよ．

(1) $A = 3x^2 + 5x + 4$,
$B = x + 2$

(2) $A = x^3 - 4x^2 - 5$,
$B = x - 3$

[2] 文字の種類が 2 つのときは，どちらかの文字についての多項式とみて割り算を行うこともある．

(3) $A=2x^3+5x^2-2x+4$,
$B=x^2-x+2$

(4) $A=x^3-7x+6$,
$B=x^2-3+2x$

B》等式 $A=BQ+R$ の利用

多項式の割り算で成り立つ等式

$$A=BQ+R$$

は，次のようにも利用される．

$$\boldsymbol{\underset{\text{(割られる式)}}{A} = \underset{\text{(割る式)}}{B}\ \underset{\text{(商)}}{Q} + \underset{\text{(余り)}}{R}}$$

例題 1.2 多項式 x^3+2x-1 を多項式 B で割ると，商が $x+2$，余りが $6x-1$ であるという．B を求めよ．

解答 この割り算について，次の等式が成り立つ．

$$x^3+2x-1=B\times(x+2)+6x-1$$

整理すると

$$x^3-4x=B\times(x+2)$$

よって，x^3-4x は $x+2$ で割り切れて，その商が B である．
右の計算により

$$B=x^2-2x$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x \\ \hline
x+2 & x^3\qquad\ \ -4x \\
 & x^3+2x^2 \\ \cline{2-2}
 & -2x^2-4x \\
 & -2x^2-4x \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

練習 1.2 次の条件を満たす多項式 B を求めよ．

(1) $3x^2-4x+5$ を B で割ると，商が $x-1$，余りが 4

(2) x^3+4x^2+4x-2 を B で割ると，商が $x+3$，余りが $2x+1$

1.1.2　分数式とその計算

たとえば，$\dfrac{2}{x}$，$\dfrac{2x+5}{x+1}$ などのように，2 つの多項式 A，B によって，$\dfrac{A}{B}$ の形で表され，Bに文字を含む式を，**分数式**という．
ここでは，分数式の計算について学ぶことにしよう．

A 》分数式の約分

分数式 $\dfrac{A}{B}$ において，B をその**分母**，A をその**分子**という[3].

分数式では，次のように，その分母と分子に 0 以外の同じ多項式を掛けても，分母と分子を共通な因数で割っても，もとの式と等しい．

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{BC}} \quad (\text{ただし}\quad C \neq 0), \qquad \frac{\boldsymbol{A}\cancel{\boldsymbol{D}}}{\boldsymbol{B}\cancel{\boldsymbol{D}}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$$

分数式の分母と分子をその共通な因数で割ることを**約分**するという．

例 1.1 分数式の約分

$$(1)\quad \frac{6ab^4}{4a^2b^3} = \frac{3b}{2a} \qquad \leftarrow \frac{6ab^4}{4a^2b^3} = \frac{3b\cdot\cancel{2ab^3}}{2a\cdot\cancel{2ab^3}} = \frac{3b}{2a}$$

$$(2)\quad \frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{x}{x+1}$$

例 1.1 で約分して得られた分数式のように，それ以上約分できない分数式を**既約分数式**（きやく）という．

練習 1.3 次の分数式を約分して，既約分数式で表せ．

(1) $\dfrac{15ab^4}{6a^3b^2}$　　(2) $\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}$　　(3) $\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-7x+3}$

B 》分数式の四則計算

分数式の四則計算は，分数の場合と同じように行う．

分数式の乗法・除法

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} \times \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{D}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{BD}}, \qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} \div \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{D}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} \times \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{AD}}{\boldsymbol{BC}}$$

[3] 分数式に含まれる文字も，一般的に数を表す．したがって，分数に関する性質は分数式についても成り立つ．また，与えられた分数式の分母は 0 でないと考えるものとする．

分数式の計算では，結果は既約分数式または多項式の形にしておく．

例 1.2　(1) $\dfrac{x^2-x}{x+1}\times\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{x\cancel{(x-1)}\times 2}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=\dfrac{2x}{x+1}$

(2) $\dfrac{x^2+x}{x+2}\div\dfrac{x+1}{x^2-4}=\dfrac{x(x+1)}{x+2}\times\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+1}$

$$=\frac{x\cancel{(x+1)}\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x+1)}}=x(x-2)$$

練習 1.4 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x}\times\dfrac{x}{x+2}$

(2) $\dfrac{2x}{2x+1}\times\dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}$

(3) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}\div\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$

(4) $\dfrac{x^2-x}{x-3}\div\dfrac{x^2+5x}{x^2+2x-15}$

分数式の加法・減法

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{C}}+\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}, \qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{C}}-\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}=\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}$$

例 1.3 (1) $\dfrac{3x}{x+2}+\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{3x+x}{x+2}=\dfrac{4x}{x+2}$

(2) $\dfrac{3x+2}{x+2}-\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{(3x+2)-(x-2)}{x+2}=\dfrac{2x+4}{x+2}=\dfrac{2\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}=2$

練習 1.5 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2}{x-1}$

(2) $\dfrac{2x}{x+3}+\dfrac{x+9}{x+3}$

(3) $\dfrac{3x-1}{x-2}-\dfrac{2x-3}{x-2}$

(4) $\dfrac{2x^2}{x-1}-\dfrac{x+1}{x-1}$

分母が異なる分数式の加法，減法では，まず，分数式の分母を同じにして計算する．2つ以上の分数式の分母を同じにすることを**通分**するという．

例題 1.3 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x-3}$　　(2) $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+x}$

解答 (1) $$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-3}=\frac{2(x-3)}{(x+1)(x-3)}+\frac{x+1}{(x+1)(x-3)}=\frac{(2x-6)+(x+1)}{(x+1)(x-3)}=\frac{3x-5}{(x+1)(x-3)}$$

(2) $$\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+x}=\frac{2}{(x+1)(x-1)}-\frac{1}{x(x+1)}=\frac{2x}{x(x+1)(x-1)}-\frac{x-1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{2x-(x-1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x+1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x(x-1)}$$

練習 1.6 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-2}$

(2) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-x}$

(3) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x^2-2x-3}$

(4) $\dfrac{3x+5}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+x}$

1.1.3 恒等式

文字を含む等式において，文字にどのような値を代入しても成り立つ等式を，その文字についての**恒等式**という．ここでは，恒等式について学ぼう．

A》 恒等式

例 1.4 (1) 式変形によって導かれる等式は，恒等式である．

たとえば，等式 $(x+2)(x-3)=x^2-x-6$ は，恒等式である．

(2) 等式 $x(x-2)=x$ は，恒等式ではない．

この等式は，$x=0$ または $x=3$ を代入したときに限り成り立つ．

補足 例 1.4(2) のような等式は，x についての方程式である．

練習 1.7 次の等式のうち，x についての恒等式はどれか.

(1) $(x+1)(x-1)=x^2-1$

(2) $x(x-1)+x=2x$

(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{2x+1}$

(4) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2}{x(x+2)}$

恒等式の両辺が x の多項式のとき，同類項を整理すると

両辺の同じ次数の項の係数は，それぞれ等しい.

たとえば，次のことが成り立つ.

恒等式の性質

1 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式である

$$\iff \quad a=a', \quad b=b', \quad c=c'$$

2 $ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式である

$$\iff \quad a=b=c=0$$

注意 「P ならば Q　かつ　Q ならば P」を「P $\iff$ Q」と書き表す.

例題 1.4 等式 $3x^2+8x+1=(x+2)(ax+b)+c$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

解答 等式の右辺を x について整理すると

$$3x^2+8x+1=ax^2+(2a+b)x+(2b+c)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$3=a,\quad 8=2a+b,\quad 1=2b+c$$

これを解いて　$a=3$，$b=2$，$c=-3$

練習 1.8 等式 $2x^2-7x+8=(x-3)(ax+b)+c$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

応用例題 1.1　等式 $\dfrac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

考え方》 分数式の恒等式では，分母をはらって得られる等式もまた恒等式である．このことを利用する．

解答　等式の両辺に $(x+1)(x+2)$ をかけると，次の等式が得られる．

$$x+3 = a(x+2) + b(x+1)$$

右辺を整理すると

$$x+3 = (a+b)x + (2a+b)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$1 = a+b, \qquad 3 = 2a+b$$

これを解いて　　$a=2$，$b=-1$

練習 1.9　等式 $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

1.1.4　補充問題

1 多項式 $A = 4x^2 - 5ax - 6a^2$，$B = x - 2a$ について，各式を x についての多項式とみて，A を B で割った商と余りを求めよ.

2 $A = 1 + \dfrac{1}{x}$，$B = x - \dfrac{1}{x}$ とするとき，$\dfrac{A}{B}$ を既約分数式で表せ.

3 次の計算をせよ.

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

4 次の等式が x についての恒等式であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

(1) $(a+b-4)x+(a-b+2)=0$

(2) $(x+1)a+(2x-1)b+2x+5=0$

1.2　等式・不等式の証明

1.2.1　等式の証明

ここでは，等式の証明について考えよう．等式の証明には，常に成り立つ恒等式の証明と，ある条件のもとで成り立つ等式の証明とがある．

A 》恒等式の証明

恒等式 $A = B$ を証明するには，たとえば次のような方法がある．

$A = B$ の証明

1　A か B の一方を変形して，他方を導く．

2　A と B の両方を変形して，同じ式を導く．

3　$A - B$ を変形して，0 になることを示す．

← $A-B=0$ を示す．

例題 1.5　次の等式を証明せよ．

(1)　$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

(2)　$(a^2+1)(b^2+1) = (ab+1)^2 + (a-b)^2$

証明　(1)　右辺 $= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) - 3a^2b - 3ab^2 = a^3 + b^3$

よって　$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

(2)　左辺 $= a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1$

右辺 $= (ab)^2 + 2ab + 1 + a^2 - 2ab + b^2 = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1$

左辺と右辺が同じ式になるから

$$(a^2+1)(b^2+1) = (ab+1)^2 + (a-b)^2$$

証終

補足　例題 1.5(1) は **1** の方法で，(2) は **2** の方法で証明している．

練習 1.10　次の等式を証明せよ．

(1)　$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

(2) $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

(3) $(1+x)^3=1+x+x(1+x)+x(1+x)^2$

B》条件つきの等式の証明

ある条件のもとで成り立つ等式を証明してみよう.

例題 1.6 $a+b=c$ のとき，次の等式を証明せよ.

$$b^2+c^2=a^2+2bc$$

考え方》 $c=a+b$ であるから c を $a+b$ に置き換えた等式を証明すればよい.

証明 $c=a+b$ であるから

$$\begin{aligned} b^2+c^2-(a^2+2bc) &= b^2+(a+b)^2-a^2-2b(a+b) \\ &= b^2+a^2+2ab+b^2-a^2-2ab-2b^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって　$b^2+c^2=a^2+2bc$　**証終**

補足 例題 1.6 は，前ページの **3** の方法で証明している．**1** または **2** の方法で証明することもできる.

練習 1.11 $a+b=c$ のとき，次の等式を証明せよ．

$$a^2+bc=b^2+ca$$

練習 1.12 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ．

(1) $a^2+ca=b^2+bc$

(2) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0$

次に，分数式を含む等式を証明してみよう．

応用例題 1.2 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ．

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

考え方》 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$\dfrac{a}{b}=k$，$\dfrac{c}{d}=k$ であるから，$a=bk$，$c=dk$ となる．これらを等式の各辺に代入してみる．

証明 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　　$a=bk$，$c=dk$

よって
$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$$
$$\frac{a-c}{b-d}=\frac{bk-dk}{b-d}=\frac{k(b-d)}{b-d}=k$$

したがって
$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

証終

補足 応用例題 1.2 で証明したことから，次のことがいえる．

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ のとき}\qquad \frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$$

練習 1.13 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ．

(1) $\dfrac{2a+3c}{2b+3d}=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}$

(2) $\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$

練習 1.14 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=2$ のとき，次の式の値を求めよ.

(1) $\dfrac{a+c}{b+d}$

(2) $\dfrac{a^2-c^2}{b^2-d^2}$

1.2.2　不等式の証明

等式の証明に引き続き，不等式の証明方法について調べてみよう．

A》実数の大小関係

不等式では，とくに断らない限り，文字は実数を表すものとする．

2つの実数 a，b については，　$a > b$，　$a = b$，　$a < b$　のうち，どれか1つの関係だけが成り立つ．

また，実数の大小関係について，次の基本性質が成り立つ．

1　$a > b$，$b > c$　ならば　$a > c$

2　$a > b$　ならば　$a + c > b + c$，$a - c > b - c$

3　$a > b$，$c > 0$　ならば　$ac > bc$，$\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

4　$a > b$，$c < 0$　ならば　$ac < bc$，$\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

例 1.5　$a > b$ かつ $c > d$ のとき，$a + c > b + d$ であることを証明する．

証明　$a > b$　であるから　$a + c > b + c$　$\cdots$①　　← 基本性質 **2**

$c > d$　であるから　$c + b > d + b$　$\cdots$②　　← 基本性質 **2**

①，② より　$a + c > b + d$　**証終**　　← 基本性質 **1**

2数 a，b の大小関係と差 $a - b$ の符号について，次のことがいえる．

2数の大小関係と差

5　$\boldsymbol{a > b \iff a - b > 0}$

6　$\boldsymbol{a < b \iff a - b < 0}$

上の「2数の大小関係と差」より，次のことがいえる．

不等式 $A > B$ を証明するには，$A - B > 0$ であることを示せばよい．

このことを使って，不等式を証明してみよう．

例 1.6　$x > y$ のとき，$2x + y > x + 2y$ であることを証明する．

証明　$(2x + y) - (x + 2y) = x - y$

$x > y$　であるから　$x - y > 0$

よって　$(2x + y) - (x + 2y) > 0$

したがって　$2x + y > x + 2y$　**証終**

練習 1.15 $x > y$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$3x - 4y > 2x - 3y$$

例題 1.7 $x > 1$，$y > 1$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$xy + 1 > x + y$$

証明 $$\begin{aligned}(xy+1)-(x+y) &= xy - x - y + 1\\ &= x(y-1)-(y-1)\\ &= (x-1)(y-1)\end{aligned}$$

$x > 1$，$y > 1$ であるから

$$x - 1 > 0,\quad y - 1 > 0$$

よって $(x-1)(y-1) > 0$

したがって $xy + 1 > x + y$ **証終**

補足 例題 1.7 では,「$a > 0$，$b > 0$ ならば $ab > 0$」であることを用いている．前ページの基本性質から，次のことが導かれる．

$$a > 0,\ b > 0 \text{ ならば } \quad a + b > 0,\ ab > 0$$

練習 1.16 $x > 2$，$y > 3$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$xy + 6 > 3x + 2y$$

B》実数の平方

実数の平方について，次の性質 **1**，**2** が成り立つ．

実数の平方の性質

1　実数 a について　　$\boldsymbol{a^2 \geqq 0}$

　等号が成り立つのは，$a=0$ のときである．

2　実数 a，b について　　$\boldsymbol{a^2+b^2 \geqq 0}$

　等号が成り立つのは，$a=b=0$ のときである．

例 1.7　不等式 $\boldsymbol{x^2+y^2 \geqq 2xy}$ を証明し，等号が成り立つときを調べる．

証明　$(x^2+y^2)-2xy = x^2-2xy+y^2$

$$= (x-y)^2 \geqq 0$$

したがって　　$x^2+y^2 \geqq 2xy$

この不等式で等号が成り立つのは，$x-y=0$ すなわち $x=y$ のときである．

証終

例題 1.8 次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．

$$a^2+2b^2 \geqq 2ab$$

証明　$(a^2+b^2)-2ab = a^2-2ab+b^2+b^2$

$$= (a-b)^2+b^2 \geqq 0 \qquad \longleftarrow (a-b)^2 \geqq 0,\ b^2 \geqq 0$$

したがって　　$a^2+2b^2 \geqq 2ab$

等号が成り立つのは，$a-b=0$ かつ $b=0$，すなわち

$a=b=0$ のときである．　**証終**

練習 1.17 次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．

(1) $x^2 + 4y^2 \geqq 4xy$

(2) $(x + y)^2 \geqq 4xy$

(3) $a^2 + 5b^2 \geqq 4ab$

(4) $a^2 - ab + b^2 \geqq 0$

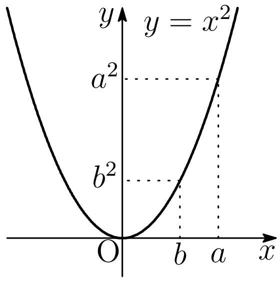
C》平方の大小関係

$a>0$, $b>0$ のとき

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

において，$a+b>0$ であるから，a^2-b^2 と $a-b$ の符号は同じである．

したがって，次のことが成り立つ．



平方の大小関係

$a>0$, $b>0$ のとき

$$\boldsymbol{a^2>b^2 \iff a>b}$$

$$\boldsymbol{a^2 \geqq b^2 \iff a \geqq b}$$

注意 このことは，$a \geqq 0$, $b \geqq 0$ のときにも成り立つ．

平方の大小関係を使って，不等式を証明してみよう．

例題 1.9 $a>0$, $b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

考え方》 不等式の両辺について，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a+b}>0$ であるから，まず両辺の平方の大小から示す．

証明 両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2&=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)\\&=2\sqrt{ab}>0\end{aligned}$$

よって $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a+b}>0$ であるから

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

証終

練習 1.18 $x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$1+x>\sqrt{1+2x}$$

D》絶対値を含む不等式の証明

絶対値を含む不等式を証明してみよう．
実数 a の絶対値 $|a|$ は，その定義より，次のようになる．

$$\boldsymbol{a \geqq 0} \textbf{ のとき } \boldsymbol{|a| = a}, \qquad \boldsymbol{a < 0} \textbf{ のとき } \boldsymbol{|a| = -a}$$

また，実数の絶対値について，次のことが成り立つ．

$$\boldsymbol{|a| \geqq 0,\quad |a| \geqq a,\quad |a| \geqq -a,\quad |a|^2 = a^2,\quad |ab| = |a||b|}$$

応用例題 1.3 次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．

$$|a| + |b| \geqq |a+b|$$

考え方》 $|a|+|b| \geqq 0$，$|a+b| \geqq 0$ であるから，両辺の平方の大小から示す．このとき，上で述べた絶対値についての性質を用いる．

証明
$$\begin{aligned}(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2\\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2+2ab+b^2)\\ &= 2(|ab|-ab) \geqq 0 \qquad \longleftarrow |ab| \geqq ab\end{aligned}$$

よって　$(|a|+|b|)^2 \geqq |a+b|^2$

$|a|+|b| \geqq 0$，$|a+b| \geqq 0$ であるから

$$|a|+|b| \geqq |a+b|$$

等号が成り立つのは，$|ab| = ab$ すなわち $ab \geqq 0$ のときである．　**証終**

練習 1.19 次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．

$$|a| + |b| \geqq |a-b|$$

E》相加平均と相乗平均

2数 a，b に対して，$\dfrac{a+b}{2}$ を a と b の**相加平均**という．
また，$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{ab}$ を a と b の**相乗平均**という．
$a>0$，$b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqq 0$$

であるから　　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

等号が成り立つのは，$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ すなわち $a=b$ のときである．

したがって，次のことがいえる．

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき　　$\boldsymbol{\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}}$

等号が成り立つのは，$a=b$ のときである．

← この不等式は
$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$
の形で使うことが多い．

注意　このことは，$a\geqq 0$，$b\geqq 0$ のときにもいえる．

例題 1.10　$a>0$ のとき，不等式 $a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$ を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．

証明　$a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$$

よって　　$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$

等号が成り立つのは，$a>0$ かつ $a=\dfrac{1}{a}$，すなわち $a=1$ のときである．**証終**

練習 1.20 $a > 0$，$b > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．

(1) $a + \dfrac{4}{a} \geqq 4$

(2) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqq 2$

1.2.3　補充問題

5 $a + b + c = 0$ のとき，次の等式を証明せよ．

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

6 $a < b$, $x < y$ のとき，$ax + by$ と $bx + ay$ の大小を不等号を用いて表せ.

7 $a > 0$, $b > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ.

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqq 4$$

1.3 章末問題

1.3.1 章末問題 A

1 次の多項式 A, B について，A を B で割った商と余りを求めよ.

(1) $A = x^4 - 1$,
$B = x - 1$

(2) $A = 4x^3 - 3x - 2$,
$B = 2x^2 + x - 3$

2 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 2x + 1} \times \dfrac{x - 1}{x + 3}$

(2) $\dfrac{a^2 + 4a + 4}{a^2 - 4a} \div \dfrac{a^2 + 2a}{a - 4}$

(3) $\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{2}{x^2-1}$

(4) $\dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{y-z}{yz}+\dfrac{z-x}{zx}$

3 次の等式が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

(1) $x^3=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$

(2) $\dfrac{3}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

4 次の等式を証明せよ．

(1) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$

(2) $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

5 次の等式，不等式を証明せよ．

(1) $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

(2) $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$

6 $a > 0$, $b > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

(1) $ab + \dfrac{9}{ab} \geqq 6$

(2) $\left(a + \dfrac{1}{b}\right)\left(b + \dfrac{4}{a}\right) \geqq 9$

1.3.2 章末問題 B

7 次の計算をせよ．

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}$$

8 x についての多項式 $A=x^3+ax^2+2x+1$ を x^2+x-2 で割ると，余りが $2x+5$ となるように，定数 a の値を定めよ．また，そのときの商を求めよ．

9 等式 $(k+2)x+(k+1)y-3k-4=0$ が，どんな k の値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ．

10 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき，次の等式を証明せよ．

$$\frac{x+2y+3z}{a+2b+3c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}$$

11 次の不等式を証明せよ．

$$5\sqrt{a^2+b^2} \geqq 3|a|+4|b|$$

12 $a>b>0$，$a+b=1$ のとき，次の数を大きい順に並べよ．

$$\frac{1}{2},\quad 2ab,\quad a^2+b^2$$

ヒント

9　k についての恒等式と考える．

10　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおく．

12　a，b に適する数を代入して，大小の見当をつけて証明する．

第 2 章　複素数と方程式

2.1　複素数と方程式の解

2.1.1　複素数とその計算

2 次方程式 $x^2 = 3$ は，実数の解 $x = \pm\sqrt{3}$ をもつ．
しかし，実数の2乗は負にならないから，2 次方程式 $x^2 = -3$ は，実数の範囲では解を持たない．
そこで，2 次方程式 $x^2 = k$ が k の正・負に関係なく解をもつように，実数を含む新しい「数」を考えることにしよう．

A》 複素数

2 乗して -1 になる新しい数を 1 つ考え，これを $\boldsymbol{i}$ で表す．

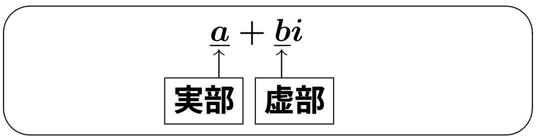
$$\boldsymbol{i^2 = -1}$$

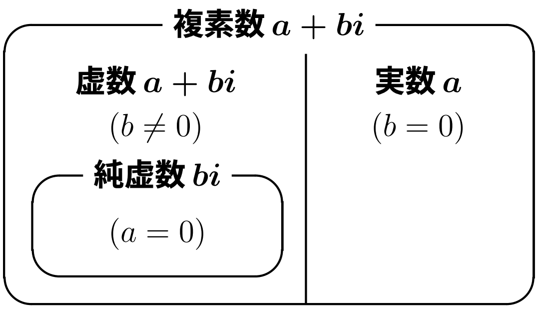
さらに，i と 2 つの実数 a，b を用いて $\boldsymbol{a + bi}$ の形で表される数を考える．この数を**複素数**という．

複素数 $a + bi$ では，a をその**実部**，b をその**虚部**，i を**虚数単位**という．

たとえば，$2 + 3i$ の実部は 2，虚部は 3 である．

実数全体が複素数全体に含まれるように，$b = 0$ のときの複素数 $a + 0i$ は実数 a を表すものとする．$b \neq 0$ である複素数 $a + bi$ を**虚数**といい，とくに $a = 0$ である虚数 bi を**純虚数**という．





複素数における i は文字のように扱い，たとえば次のように書く．

$$2 + 1i = 2 + i, \quad 3 + (-5)i = 3 - 5i, \quad 1 + (-1)i = 1 - i$$

例 2.1 $3-2i$ の　実部は 3，虚部は -2　$\longleftarrow$ $3-2i=3+(-2)i$

$\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ の　実部は $\dfrac{1}{2}$，虚部は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\longleftarrow$ $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2 の　実部は 2，虚部は 0　$\longleftarrow$ $2=2+0i$

i の　実部は 0，虚部は 1　$\longleftarrow$ $i=0+1i$

練習 2.1 次の複素数の実部と虚部をいえ．

(1) $-3+5i$

(2) $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

(3) 1

(4) $-i$

以下，複素数 $a+bi$ や $c+di$ などでは，文字 a，b，c，d は実数を表すものとする．

2 つの複素数が**等しい**のは，実部，虚部が，それぞれ一致する場合とする．すなわち，次のように定める．

複素数の相等

$$\boldsymbol{a+bi=c+di} \iff \boldsymbol{a=c} \text{ かつ } \boldsymbol{b=d}$$

とくに $$\boldsymbol{a+bi=0} \iff \boldsymbol{a=0} \text{ かつ } \boldsymbol{b=0}$$

例題 2.1 次のような実数 x，y を求めよ．

$$(x+y)+(x+2)i=0$$

解答 $x+y$，$x+2$ は実数であるから　$\longleftarrow$ 実数の和は実数

$$x+y=0,\ x+2=0$$

これを解いて　$x=-2,\ y=2$

練習 2.2 次のような実数 x，y を求めよ．

(1) $(x-3)+(x+y)i=0$　　(2) $(x-2y)+(2x-3y)i=4+7i$

B ≫ 複素数の計算

複素数の加法，減法は，実部と虚部のそれぞれの和と差を計算する．

例 2.2　(1)　$(4-3i)+(2+5i)=(4+2)+(-3+5)i=6+2i$

(2)　$(4-3i)-(2+5i)=(4-2)+(-3-5)i=2-8i$

練習 2.3 次の計算をせよ．

(1)　$(2+3i)+(4+i)$

(2)　$(-1+2i)+(3-4i)$

(3)　$(6+4i)-(3+2i)$

(4)　$(2-3i)-(4-2i)$

複素数の加法，減法は，文字 i の式の場合と同じような計算である．乗法についても，文字 i の式と考えて行い，i^2 が出てくればそれを -1 におき換える．

例 2.3　(1)　$$\begin{aligned}(1+2i)(4+i)&=4+i+8i+2i^2\\&=\{4+2\cdot(-1)\}+(1+8)i\\&=2+9i\end{aligned}$$

(2)　$$\begin{aligned}(1+2i)(1-2i)&=1^2-(2i)^2=1-4i^2\\&=1-4\cdot(-1)=5\end{aligned}$$

練習 2.4 次の計算をせよ．

(1)　$(1+2i)(4+3i)$

(2)　$(2-i)(3+4i)$

(3)　$(2+3i)^2$

(4)　$(3+4i)(3-4i)$

2つの複素数 $a+bi$，$a-bi$ を，互いに**共役**(きょうやく)**な複素数**という．

実数 a と共役な複素数は，a 自身である．

共役な複素数

$\boldsymbol{a+bi}$ **と** $\boldsymbol{a-bi}$

練習 2.5 次の複素数と共役な複素数をいえ．

(1) $2+3i$　　(2) $1-i$　　(3) $\sqrt{3}i$　　(4) $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$

互いに共役な複素数 $a+bi$，$a-bi$ の和と積は

$$(a+bi)+(a-bi)=2a$$

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

← $a^2-(bi)^2=a^2-b^2(-1)$

となり，ともに実数である．

次に，複素数の除法について考える．

例 2.4

$$\frac{2+9i}{1+2i}=\frac{(2+9i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{2-4i+9i-18i^2}{1^2+2^2}$$

$$=\frac{20+5i}{5}=4+i$$

← 分母と共役な複素数を，分母，分子に掛けて計算する．

練習 2.6 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{1+2i}{2+3i}$　　(2) $\dfrac{1}{1+i}$　　(3) $\dfrac{5i}{2-i}$

一般に，複素数の四則計算の結果は，次のようになる．

加法　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

減法　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

乗法　$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

除法　$\dfrac{c+di}{a+bi}=\dfrac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{ac+bd}{a^2+b^2}+\dfrac{ad-bc}{a^2+b^2}i$

また，複素数において，次のことがいえる[1]．

1　複素数の四則計算の結果は複素数である．

2　実数の場合と同様に，複素数でも次が成り立つ．

$$\alpha\beta=0 \quad \text{ならば} \qquad \alpha=0 \quad \text{または} \quad \beta=0$$

C》負の数の平方根

たとえば，$\sqrt{3}\,i$ と $-\sqrt{3}\,i$ を 2 乗すると，次のようになる．

$$(\sqrt{3}\,i)^2=(\sqrt{3})^2i^2=-3, \qquad (-\sqrt{3}\,i)^2=(-\sqrt{3})^2i^2=-3$$

したがって，$\sqrt{3}\,i$，$-\sqrt{3}\,i$ はともに -3 の平方根である．

逆に，-3 の平方根は $\sqrt{3}\,i$ と $-\sqrt{3}\,i$ である．そこで，$\sqrt{3}\,i$ を $\sqrt{-3}$ で表すことにすると，-3 の平方根は $\pm\sqrt{-3}$ であるといえる．

一般に，記号 $\boldsymbol{\sqrt{-a}}$ の意味を次のように定める．

$$a>0 \text{ のとき} \qquad \boldsymbol{\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i} \qquad \text{とくに} \quad \boldsymbol{\sqrt{-1}=i}$$

このように定めることにより，次のことがいえる．

負の数の平方根

$a>0$ とする．　　$-a$ の平方根は $\pm\sqrt{-a}=\boldsymbol{\pm\sqrt{a}i}$ である．

例 2.5　(1)　$\sqrt{-8}=\sqrt{8}\,i=2\sqrt{2}\,i$

(2)　-6 の平方根は　　$\pm\sqrt{-6}=\pm\sqrt{6}\,i$

練習 2.7 次の数を i を用いて表せ．

(1) $\sqrt{-5}$　　(2) $\sqrt{-9}$　　(3) -2 の平方根

[1]実数の場合と同様に，複素数の加法と乗法では，交換法則，結合法則，分配法則も成り立つ．なお，虚数については大小関係を考えない．

例 2.6　(1)　$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{3}\,i=\sqrt{6}\,i^2=-\sqrt{6}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{4}\,i}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

補足　$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}\neq\sqrt{(-2)(-3)}$

一般に，$a<0$，$b<0$ のとき $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ は成り立たない．

練習 2.8　次の計算をせよ．

(1) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-6}$　(2) $(1+\sqrt{-3})^2$　(3) $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}$

2.1.2　2次方程式の解

複素数の範囲では，負の数にも平方根が存在することがいえた．したがって，実数を係数とする2次方程式は，複素数の範囲で常に解をもつ．
ここでは，2次方程式について，解を複素数の範囲で考えよう．

A》2次方程式 $x^2=k$ の解

2次方程式 $x^2=k$ の解は k の平方根である．

例 2.7　2次方程式 $x^2=-12$ の解は

$$x=\pm\sqrt{-12}=\pm\sqrt{12}\,i=\pm2\sqrt{3}\,i$$

2次方程式 $x^2=k$ の解について，次のことがいえる．

複素数の範囲では，2次方程式 $x^2=k$ は k の正・負に関係なく常に解をもち，その解は　$x=\pm\sqrt{k}$　である．

練習 2.9　次の2次方程式を解け．

(1)　$x^2=-8$　(2)　$x^2+16=0$　(3)　$4x^2+1=0$

B 》 解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を複素数の範囲で考えると，数学 I で学んだ解の公式は，b^2-4ac の符号に関係なくいつでも成り立つ．

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $\boldsymbol{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

注意 「2次方程式$ax^2+bx+c=0$」というときは，$a\neq 0$ であるとする．また，とくに断らない限り，方程式の係数は実数とし，解は複素数の範囲で考える．

例 2.8 2 次方程式 $3x^2+8x+7=0$ を解くと

$$\begin{aligned} x &= \frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot3\cdot7}}{2\cdot3}=\frac{-8\pm\sqrt{-20}}{6} \qquad \leftarrow \sqrt{-20}=\sqrt{20}i=2\sqrt{5}i \\ &= \frac{-8\pm2\sqrt{5}\,i}{6}=\frac{-4\pm\sqrt{5}\,i}{3} \end{aligned}$$

練習 2.10 次の 2 次方程式を解け．

(1) $x^2+3x+4=0$　　(2) $x^2-2x+2=0$

(3) $2x^2+5x+5=0$　　(4) $3x^2-4x+2=0$

(5) $x^2+\sqrt{2}x+1=0$ (6) $x^2-2\sqrt{3}x+4=0$

C》判別式

方程式の解のうち，実数であるものを**実数解**といい，虚数であるものを**虚数解**という．2 次方程式の重解は実数解である．

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ がどんな種類の解であるかを判別するためには，解における根号の中の $\boldsymbol{b^2-4ac}$ の符号を調べればよい．この b^2-4ac を 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**判別式**といい，ふつう $\boldsymbol{D}$ で表す[2]．

2 次方程式	**判別式 D の値**	**解**	**解の種類**
$2x^2+5x+1=0$	$D=5^2-4\cdot2\cdot1$ $=17>0$	$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$	異なる 2 つの実数解
$9x^2+12x+4=0$	$D=12^2-4\cdot9\cdot4$ $=0$	$x=-\dfrac{2}{3}$	重　解 (実数解)
$3x^2-7x+5=0$	$D=(-7)^2-4\cdot3\cdot5$ $=-11<0$	$x=\dfrac{7\pm\sqrt{11}i}{6}$	異なる 2 つの虚数解

注意 2 次方程式の異なる 2 つの虚数解は，互いに共役な複素数である．

一般に，次のことがいえる．

2 次方程式の解の種類の判別

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，その解について次のことが成り立つ．

$\boldsymbol{D>0} \iff$ **異なる 2 つの実数解**
$\boldsymbol{D=0} \iff$ **重解**
$\boldsymbol{D<0} \iff$ **異なる 2 つの虚数解**

注意 重解も実数解であるから，次のことが成り立つ．

$$D \geqq 0 \iff \text{実数解}$$

[2] D は「判別式」を意味する英語 discriminant の頭文字である．

例 2.9　2 次方程式の解の種類を判別する．

(1) 2 次方程式 $3x^2 + 5x + 1 = 0$ の判別式は

$$D = 5^2 - 4{\cdot}3{\cdot}1 = 13 > 0$$

よって，この 2 次方程式は異なる 2 つの実数解をもつ．

(2) 2 次方程式 $9x^2 + 6x + 1 = 0$ の判別式は

$$D = 6^2 - 4{\cdot}9{\cdot}1 = 0$$

よって，この 2 次方程式は重解をもつ．

(3) 2 次方程式 $2x^2 - x + 3 = 0$ の判別式は

$$D = (-1)^2 - 4{\cdot}2{\cdot}3 = -23 < 0$$

よって，この 2 次方程式は異なる 2 つの虚数解をもつ．

練習 2.11 次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ．

(1) $x^2 + 5x + 5 = 0$　　(2) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

(3) $-4x^2 + x - 1 = 0$　　(4) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

例題 2.2 2 次方程式 $x^2 + 2mx + m + 6 = 0$ が実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

解答 この 2 次方程式の判別式は

$$\begin{aligned} D &= (2m)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}(m+6) = 4(m^2 - m - 6) \\ &= 4(m+2)(m-3) \end{aligned}$$

2 次方程式が実数解をもつのは $D \geqq 0$ のときである．

よって　　$(m+2)(m-3) \geqq 0$

これを解いて　　$m \leqq -2,\ \ 3 \leqq m$

練習 2.12 2次方程式 $x^2+2mx+m=0$ について，次の問いに答えよ．

(1) 実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(2) 異なる2つの虚数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

応用例題 2.1 m を定数とする．次の2次方程式の解の種類を判別せよ．

$$x^2+2x+m=0$$

考え方》 m の値によって判別式 D の符号が変わる．D の符号によって場合分けする．

解答 この2次方程式の判別式は

$$D=2^2-4\cdot1\cdot m=4-4m=4(1-m)$$

よって，2次方程式の解は次のようになる．

$D>0$ すなわち $m<1$ のとき　異なる2つの実数解

$D=0$ すなわち $m=1$ のとき　重解

$D<0$ すなわち $m>1$ のとき　異なる2つの虚数解

練習 2.13 m を定数とする．次の2次方程式の解の種類を判別せよ．

(1) $x^2+4x+m=0$

(2) $x^2 - mx + 4 = 0$

2.1.3 解と係数の関係

2 次方程式の解は，解の公式によって求めることができるが，解の和や積は解を求めずに知ることができる．
ここでは，2 次方程式の解と係数の関係について学ぶことにしよう．

A 》解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α，β とするとき，これらの和 $\alpha + \beta$ と積 $\alpha\beta$ を計算してみよう．

$D = b^2 - 4ac$ とすると

$$\text{和}\quad \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\text{積}\quad \alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - D}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

このように，2 次方程式の 2 つの解の和と積は，方程式の係数で表される．これを，2 次方程式の**解と係数の関係**という．

解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\boldsymbol{\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}}$$

例 2.10 2 次方程式 $2x^2 + x - 6 = 0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{2}, \qquad \alpha\beta = \frac{-6}{2} = -3$$

練習 2.14 次の2次方程式の2つの解の和と積を，それぞれ求めよ．

(1) $x^2+4x+2=0$　　(2) $3x^2-6x-4=0$

例題 2.3 2次方程式 $x^2-4x+5=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $\alpha^3+\beta^3$

解答 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=5$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\cdot5=6$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=4^3-3\cdot5\cdot4=4$

←p.15 例題 1.5(1) 参照

補足 例題 2.3(2) では，等式 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ を利用してもよい．

練習 2.15 2次方程式 $x^2+3x-1=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $\alpha^3+\beta^3$　　(3) $(\alpha-\beta)^2$

例題 2.4 2 次方程式 $x^2+3x+m=0$ の 1 つの解が他の解の 2 倍であるとき，定数 m の値と 2 つの解を求めよ．

解答 2 つの解は，α，2α と表すことができる．

解と係数の関係から	$\alpha+2\alpha=-3$，$\alpha\cdot 2\alpha=m$
すなわち	$3\alpha=-3$，　$2\alpha^2=m$
よって，1 つの解 α は	$\alpha=-1$
このとき	$m=2\alpha^2=2(-1)^2=2$
また，他の解 2α は	$2\alpha=2(-1)=-2$

(答) $m=2$，2 つの解は -1，-2

練習 2.16 2 次方程式 $x^2+5x+m=0$ の 2 つの解が次の条件を満たすとき，定数 m の値と 2 つの解を，それぞれ求めよ．

(1) 1 つの解が他の解の 4 倍である．

(2) 2 つの解の差が 1 である．

B 》 2次式の因数分解

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が2つの解 α，β をもつとき

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} \qquad \longleftarrow \text{解と係数の関係を用いた} \\ &= a(x-\alpha)(x-\beta) \end{aligned}$$

となるから，2次式の因数分解について，次のことがいえる．

> **2次方程式 $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ が2つの解 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ をもつとき**
>
> $$\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)}$$

このように，係数が実数である2次式は，複素数の範囲で常に1次式の積に因数分解できる．

例題 2.5　次の2次式を，複素数の範囲で因数分解せよ．

(1) $2x^2-2x-1$　　(2) x^2-2x+4

解答　(1) 2次方程式 $2x^2-2x-1=0$ の解は

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

よって　$$2x^2-2x-1=2\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

(2) 2次方程式 $x^2-2x+4=0$ の解は

$$x=1\pm\sqrt{3}\,i$$

よって　$$\begin{aligned} x^2-2x+4 &= \{x-(1+\sqrt{3}\,i)\}\{x-(1-\sqrt{3}\,i)\} \\ &= (x-1-\sqrt{3}\,i)(x-1+\sqrt{3}\,i) \end{aligned}$$

練習 2.17 次の 2 次式を，複素数の範囲で因数分解せよ．

(1) $2x^2 - 2x - 3$

(2) $x^2 - 2x - 4$

(3) $x^2 + 2x + 3$

C》2次方程式の決定

2数 α，β を解とする2次方程式は，次の形に表される．

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \qquad \text{ただし，} a \neq 0$$

とくに，$a=1$ として左辺を展開すると，次のことが成り立つ．

α，β を解とする2次方程式

2数 α，β を解とする2次方程式の1つは

$$\boldsymbol{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0}$$

← 和が p，積が q である2数は
$x^2-px+q=0$
の解であるといえる．

例 2.11　2数 $3+i$，$3-i$ を解とする2次方程式を作る．

解の和は　$(3+i)+(3-i)=6$

解の積は　$(3+i)(3-i)=3^2-i^2=10$

$$x^2-(\underset{\text{解の}}{\text{和}})x+(\underset{\text{解の}}{\text{積}})=0$$

よって，このような解をもつ2次方程式の1つは

$$x^2-6x+10=0$$

練習 2.18　次の2数を解とする2次方程式を1つ作れ．

(1)　2，-1

(2)　$2+\sqrt{3}$，$2-\sqrt{3}$

(3)　$1+2i$，$1-2i$

D》2次方程式の実数解の符号

2つの実数α，βについては，次のことが成り立つ．

1　$\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$　$\iff$　$\alpha + \beta > 0$ かつ $\alpha\beta > 0$

2　$\alpha < 0$ かつ $\beta < 0$　$\iff$　$\alpha + \beta < 0$ かつ $\alpha\beta > 0$

3　α と β の符号が異なる　$\iff$　$\alpha\beta < 0$

1 によると，2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解 α，β と判別式 D について，次のことが成り立つ．

α，β は異なる2つの正の解　$\iff$　$D > 0$ で $\alpha + \beta > 0$ かつ $\alpha\beta > 0$

応用例題 2.2　2次方程式 $x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ が異なる2つの正の解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

考え方》　方程式の2つの解を α，β とすると，方程式が条件を満たすのは $D > 0$ で $\alpha + \beta > 0$ かつ $\alpha\beta > 0$ が成り立つときである．

解答　この2次方程式の2つの解を α，β とし，判別式を D とする．方程式が条件を満たすのは，次の ①，② が成り立つときである．

$D > 0$　$\cdots$ ①

$\alpha + \beta > 0$ かつ $\alpha\beta > 0$　$\cdots$ ②

ここで

$$D = (2m)^2 - 4\cdot1\cdot(m+2) = 4(m^2 - m - 2) = 4(m+1)(m-2)$$

① より　$(m+1)(m-2) > 0$

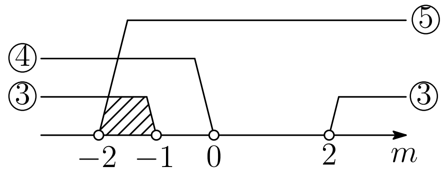
よって　$m < -1,\ 2 < m$　$\cdots$ ③

解と係数の関係より　$\alpha + \beta = -2m$，$\alpha\beta = m + 2$

② より　$-2m > 0$ かつ $m + 2 > 0$

よって　$m < 0$　$\cdots$ ④

$m > -2$　$\cdots$ ⑤



したがって，③，④，⑤ の共通範囲を求めて

$$-2 < m < -1$$

練習 2.19 2 次方程式 $x^2 + 2(m-3)x + 4m = 0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解 α，β と判別式 D について，次のことも成り立つ．

$$\alpha,\ \beta \text{ は異なる 2 つの負の解} \iff D > 0 \text{ で } \alpha + \beta < 0 \text{ かつ } \alpha\beta > 0$$

$$\alpha,\ \beta \text{ は符号の異なる解} \iff \alpha\beta < 0$$

2.1.4 補充問題

1 次の計算をせよ．

(1) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2$

(2) $i+\dfrac{1}{i}$

(3) $i+i^2+i^3+i^4$

2 2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，次のようになる．

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

このことを用いて，次の 2 次方程式を解け．

(1) $x^2-2x+5=0$

(2) $3x^2-2x+1=0$

3 和と積がともに 3 であるような 2 数を求めよ．

4 2 次方程式 $x^2+2x+4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，2 数 $\alpha-1$，$\beta-1$ を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ．

2.2 高次方程式

2.2.1 剰余の定理と因数定理

ここでは，x の 3 次式や 4 次式で表される方程式を解くための準備として，x の多項式を因数分解する方法について学ぼう．

A 》 剰余の定理

以下では，x の多項式を $\boldsymbol{P(x)}$，$Q(x)$ などと書き，x に数 k を代入して計算したときの $P(x)$ の値を $\boldsymbol{P(k)}$ と書く．

多項式 $P(x)$ を x の 1 次式 $x-k$ で割った商が $Q(x)$，余りが R であることは，次の等式で表される．

$$P(x) = (x-k)Q(x) + R$$

$\longleftarrow$ R は定数である．

ここで，両辺の x に k を代入すると，$P(k) = R$ が得られる．

したがって，次の **剰余(じょうよ)の定理**が成り立つ．

剰余の定理

多項式 $P(x)$ を $x-k$ で割った余りは，$P(k)$ に等しい．

例 2.12 (1) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ を $x-1$ で割った余りは $P(1)$ で

$$P(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 3 = 2$$

(2) $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 5$ を $x+2$ で割った余りは $P(-2)$ で

$$P(-2) = (-2)^3 + 2\cdot(-2)^2 + (-2) + 5 = 3$$

練習 2.20 $P(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$ を次の 1 次式で割った余りを求めよ．

(1) $x-1$　　(2) $x-2$

(3) $x+1$　　(4) $x+2$

例題 2.6　多項式 $P(x)=x^3+ax^2+3x-2a$ を $x-2$ で割った余りが 12 であるとき，定数 a の値を求めよ．

解答　剰余の定理により $P(2)=12$ であるから

$$2^3+a\cdot 2^2+3\cdot 2-2a=12$$

整理すると　$2a=-2$

よって　$a=-1$

練習 2.21　多項式 $P(x)=2x^3+5x^2+ax+1$ を $x+1$ で割った余りが 2 であるとき，定数 a の値を求めよ．

応用例題 2.3　多項式 $P(x)$ を $x-1$，$x+2$ で割った余りがそれぞれ 5，-1 であるとき，$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを求めよ．

考え方》　$P(x)$ を 2 次式 $(x-1)(x+2)$ で割った余りは，1 次式か定数であるから，$ax+b$ とおく．

解答　$P(x)$ を 2 次式 $(x-1)(x+2)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$$

この等式より　$P(1)=a+b$，$P(-2)=-2a+b$

また，$x-1$ で割った余りが　5 であるから　$P(1)=5$

$x+2$ で割った余りが -1 であるから　$P(-2)=-1$

よって　$a+b=5$，$-2a+b=-1$

これを解くと　$a=2$，$b=3$

したがって，求める余りは　$2x+3$

練習 2.22 多項式 $P(x)$ を $x-3$，$x+1$ で割った余りがそれぞれ 1，5 であるとき，$P(x)$ を $(x-3)(x+1)$ で割った余りを求めよ．

B 》因数定理

剰余の定理により，次が成り立つ．

$$\text{多項式 } P(x) \text{ が 1 次式 } x-k \text{ で割り切れる} \iff P(k)=0$$

よって，$P(k)=0$ のとき，$P(x)$ は $P(x)=(x-k)Q(x)$ の形である．
以上から，次の**因数定理**が成り立つ．

因数定理

多項式 $P(x)$ が 1 次式 $x-k$ を因数にもつ $\iff$ $P(k)=0$

例 2.13 $P(x)=2x^3-5x^2+x+2$ において，$P(2)$ を計算すると

$$P(2)=2\cdot 2^3-5\cdot 2^2+2+2=0$$

よって，多項式 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ．

練習 2.23 次のうち，多項式 x^3+2x^2-5x-6 の因数であるものはどれか．

① $x-1$　② $x-2$　③ $x+1$　④ $x+2$

例 2.14 $x^3 + 4x^2 + x - 6$ の因数分解

$P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ とすると

$$P(1) = 1^3 + 4{\cdot}1^2 + 1 - 6 = 0$$

よって，$P(x)$ は $x - 1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$
\begin{array}{r r}
 & x^2 + 5x + 6 \\ \cline{2-2}
x - 1 \big) & x^3 + 4x^2 + x - 6 \\
 & x^3 - x^2 \qquad\quad \\ \cline{2-2}
 & 5x^2 + x \qquad \\
 & 5x^2 - 5x \qquad \\ \cline{2-2}
 & 6x - 6 \\
 & 6x - 6 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$$

さらに因数分解して

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$$

練習 2.24 次の式を因数分解せよ．

(1) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

(2) $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$

研究

組立除法

たとえば，3 次式 ax^3+bx^2+cx+d を 1 次式 $x-k$ で割った商を lx^2+mx+n とし，余りを R とする．
この商の係数 l，m，n と余り R は，次のような方法でも求められる．この方法を**組立除法**という．

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
a & & b & & c & & d & k \\
 & \times k & lk & \times k & mk & \times k & nk & \\
\hline
l & & m & & n & & \multicolumn{1}{|c}{R} &
\end{array}
$$

$$l=a,\quad m=b+lk,\ n=c+mk,\ R=d+nk$$

証明 次の等式が成り立つ．

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x-k)(lx^2+mx+n)+R$$

この等式は，x についての恒等式である．
右辺を展開して左辺と係数を比較すると

$$a=l,\ \ b=m-lk,\ \ c=n-mk,\ \ d=R-nk$$

したがって

$$l=a,\ \ m=b+lk,\ \ n=c+mk,\ \ R=d+nk$$

証終

例 1 x^3-2x^2+3x-9 を $x-3$ で割った商 x^2+x+6 と余り 9 は，右のようにして求められる．

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
1 & & -2 & & 3 & & -9 & 3 \\
 & \times 3 & 3 & \times 3 & 3 & \times 3 & 18 & \\
\hline
1 & & 1 & & 6 & & \multicolumn{1}{|c}{9} &
\end{array}
$$

2.2.2 高次方程式

x の多項式 $P(x)$ が n 次式のとき，方程式 $P(x)=0$ を，x の $\boldsymbol{n}$ **次方程式**という．また，3次以上の方程式を**高次方程式**という．
ここでは，因数分解を利用して，高次方程式 $P(x)=0$ を解いてみよう．

A 》 高次方程式の解き方 (1)

まず，因数分解の公式を利用して高次方程式を解いてみよう．

例題 2.7 次の3次方程式を解け．

$$x^3-1=0$$

解答 左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x^2+x+1)=0 \qquad \longleftarrow a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

よって

$$x-1=0 \quad \text{または} \quad x^2+x+1=0$$

したがって　$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

練習 2.25 次の3次方程式を解け．

(1) $x^3-8=0$　　(2) $x^3+1=0$

例題 2.7 は，$x^3=1$ となる x を求めている．

ある数を 3 乗して a になるとき，その数を a の **3 乗根**という．すなわち，$x^3=a$ となる x が a の 3 乗根である．

例題 2.7 より，1 の 3 乗根は，$1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ である．

練習 2.26 次のものを求めよ．

(1) 27 の 3 乗根　　(2) -8 の 3 乗根

例題 2.8 次の 4 次方程式を解け．

$$x^4-x^2-2=0$$

解答 左辺を因数分解すると　$(x^2-2)(x^2+1)=0$　　$\longleftarrow$ $x^4=(x^2)^2$ より $(x^2)^2-x^2-2=0$

よって　$x^2-2=0$　または　$x^2+1=0$

したがって　$x=\pm\sqrt{2},\ \pm i$

練習 2.27 次の 4 次方程式を解け．

(1) $x^4+x^2-12=0$　　(2) $x^4-1=0$

B 》高次方程式の解き方 (2)

因数定理を用いて高次方程式を解いてみよう.

例題 2.9 次の 3 次方程式を解け.

$$x^3 - 4x^2 + 8 = 0$$

解答 $P(x) = x^3 - 4x^2 + 8$ とすると

$$P(2) = 2^3 - 4{\cdot}2^2 + 8 = 0$$

$\longleftarrow$ 定数項 8 の約数の 1 つである 2 を代入

よって，$P(x)$ は $x - 2$ を因数にもち

$$P(x) = (x-2)(x^2 - 2x - 4)$$

$\longleftarrow$ $x^3 - 4x^2 + 8$ を $x - 2$ で割ると商は x^2-2x-4

$P(x) = 0$ から

$$x - 2 = 0 \quad \text{または} \quad x^2 - 2x - 4 = 0$$

したがって　　$x = 2,\ 1 \pm \sqrt{5}$

補足 $P(k) = 0$ となる k をみつけるには，$P(x)$ の定数項 8 の約数 ±1，±2，±4，±8 のいずれかを k として調べればよい.

練習 2.28 次の 3 次方程式を解け.

(1) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

(2) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$

(3) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

(4) $2x^3 - 3x^2 - 4 = 0$

多項式 $P(x)$ が $(x-\alpha)^2$ を因数にもつとき，方程式 $P(x)=0$ の解 α を**2重解**という．また，$P(x)$ が $(x-\alpha)^3$ を因数にもつとき，方程式 $P(x)=0$ の解 α を**3重解**という．

高次方程式の解の個数を，2重解は2個，3重解は3個などと数えることにすると，n次方程式はn個の解をもつことが知られている．

C》高次方程式と虚数解

応用例題 2.4 3次方程式 $x^3-3x^2+ax+b=0$ が $1+i$ を解にもつとき，実数の係数 a，b の値を求めよ．また，他の解を求めよ．

考え方》 方程式 $P(x)=0$ が α を解にもつ $\iff$ $P(\alpha)=0$

解答 $1+i$ がこの方程式の解であるから

$$(1+i)^3-3(1+i)^2+a(1+i)+b=0$$

整理して　$(a+b-2)+(a-4)i=0$

a，b は実数であるから　$a+b-2=0$，$a-4=0$

これを解くと　$a=4$，$b=-2$

このとき，方程式は　$x^3-3x^2+4x-2=0$

左辺を因数分解すると　$(x-1)(x^2-2x+2)=0$

したがって　$x=1,\ 1\pm i$

(答) $a=4$，$b=-2$，　他の解は 1，$1-i$

応用例題2.4において，2つの解 $1+i$，$1-i$ は互いに共役な複素数である．一般に，実数を係数とする n 次方程式の解の1つが虚数 $a+bi$ ならば，それと共役な複素数 $a-bi$ も解であることが知られている．

練習 2.29 3 次方程式 $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ が $1 - i$ を解にもつとき，実数の係数 a, b の値を求めよ．また，他の解を求めよ．

2.2.3　補充問題

5 $P(x) = 3x^3 + x^2 + x + 1$ を $3x + 1$ で割った余りは，$P\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ に等しいことを示せ．また，この余りを求めよ．

▶ (x) を $3x + 1$ で割った商を $Q(x)$，余りを R とする．

6 $P(x) = x^3 + ax + b$ を $(x+1)(x-3)$ で割った余りが $3x - 2$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) $P(-1)$，$P(3)$ の値を，a，b で表せ．

(2) 定数 a，b の値を求めよ．

7 3次方程式 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 0$ が 1 と -1 を解にもつとき，次の問いに答えよ．

(1) 定数 a，b の値を求めよ．

(2) 他の解を求めよ．

2.3　章末問題

2.3.1　章末問題 A

1 次の計算をせよ.

(1) $(3-2i)(-2+i)$　　(2) $(1+\sqrt{-2})(3-\sqrt{-8})$

(3) $(1-i)^3$　　(4) $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-2i}$

2 次の2次方程式を解け.

(1) $x(x+1)+(x+2)(x+3)=0$

(2) $2(x+1)^2-4(x+1)+3=0$

3 3次方程式 $x^3-x^2-x-m=0$ の3つの解が2，α，β であるとき，次の値を求めよ.

(1) m (2) $\alpha+\beta+2$ (3) $2\alpha\beta$

4 2 次方程式 $x^2 + 4x + 2 = 0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ (3) $\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta}$

5 次の方程式を解け．

(1) $8x^3 - 1 = 0$

(2) $2x^4 + x^2 - 6 = 0$

(3) $x(x+1)(x+2)=2{\cdot}3{\cdot}4$

(4) $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$

6 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+2=0$ が $1-i$ を解にもつとき，実数の係数 a，b の値を求めよ．また，他の解を求めよ．

2.3.2 章末問題 B

7 2 乗して $5+12i$ となる複素数 $z=a+bi$ は 2 つあり，a，b はともに整数であるという．このような複素数 z を求めよ．

8 $2+3i$ を解にもつ 2 次方程式を 1 つ作れ．

9 2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の2つの解の和と積を2つの解にもつ2次方程式の1つが，$x^2+bx+2a=0$ であるという．0でない定数 a，b の値を求めよ．

10 2 次方程式 $x^2+mx+m+3=0$ が，次のような解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(1) 異なる 2 つの負の解

(2) 符号の異なる解

11 a，b は定数とする．3 次方程式 $x^3+(a-1)x^2+(1-a)x+b=0$ の実数解が $x=1$ だけであるとき，a の値の範囲と b の値を求めよ．

12 ある立方体から，底面の縦を 1cm，横を 2cm，それぞれ延ばし，高さを 1cm 縮めた直方体を作ったら，体積が $\dfrac{3}{2}$ 倍になった．もとの立方体の 1 辺の長さを求めよ．

ヒント

8　$2+3i$ と共役な複素数も同じ方程式の解である．

11　まず b の値を求める．方程式の左辺は $(x-1)(\qquad)$ の形に因数分解できる．

12　もとの立方体の 1 辺の長さを x cm として，方程式を作る．

第 3 章　図形と方程式

3.1　点と直線

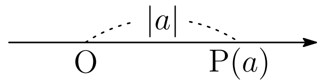
3.1.1　直線上の点

数直線上では，1 つの点に 1 つの実数が対応している．
ここでは，数直線上の点について調べよう．

A ≫ 数直線上の点

数直線上では，1 つの点に対応した実数がただ 1 つ定まる．点 P に実数 a が対応しているとき，a を点 P の座標といい，座標が a である点 P を P(a) で表す．

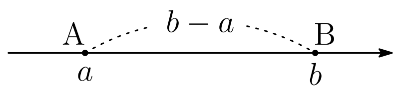
数直線上の原点 O と点 P(a) の距離は，a の絶対値 $|a|$ で表される．



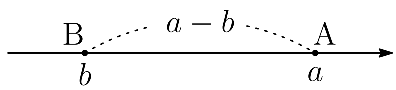
$$a \geqq 0 \text{ のとき} \quad |a| = a, \qquad a < 0 \text{ のとき} \quad |a| = -a$$

数直線上の 2 点間の距離を求めてみよう．

$\boxed{a < b\text{ のとき}}$



$\boxed{a > b\text{ のとき}}$



例 3.1　2 点 A(2)，B(5) 間の距離は　AB $= 5 - 2 = 3$
2 点 A(3)，B(1) 間の距離は　AB $= 3 - 1 = 2$

一般に，2 点 A(a)，B(b) 間の距離 AB は，次の式で表される．

$$\mathbf{AB} = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|$$

練習 3.1 次の 2 点間の距離を求めよ．

(1)　A(6)，B(1)　　　(2)　A(-2)，B(3)

B》内分と外分

m, n を正の数とする.
線分 AB 上の点 P が

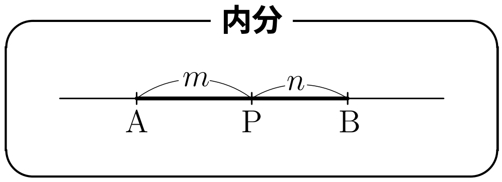
$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

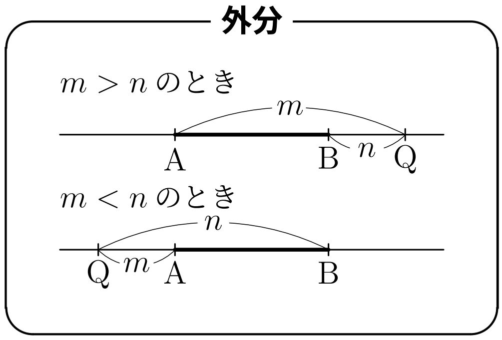
を満たすとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に**内分する**という.

また，線分 AB 上の延長上の点 Q が

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n \quad (m \neq n)$$

を満たすとき，点 Q は線分 AB を $m : n$ に**外分する**という.





点 P を線分 AB の**内分点**，点 Q を線分 AB の**外分点**という.

練習 3.2 数直線上の 3 点 A(1)，B(7)，C(3) について，次の$\boxed{}$に適する数または用語を入れよ.

(1) 点 C は線分 AB を$\boxed{}$:$\boxed{}$に$\boxed{}$する.

(2) 点 B は線分 AC を$\boxed{}$:$\boxed{}$に$\boxed{}$する.

(3) 点 A は線分 CB を$\boxed{}$:$\boxed{}$に$\boxed{}$する.

2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の座標 p を求めてみよう.

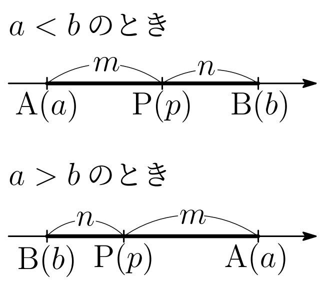
$a < b$ のとき，$\mathrm{AP} = p - a$，$\mathrm{PB} = b - p$ である.

$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$ より

$$(p - a) : (b - p) = m : n$$

よって　$$n(p - a) = m(b - p)$$

したがって　$$p = \frac{na + mb}{m + n} \quad \cdots ①$$



$a > b$ のときも，同様にして ① が得られる.

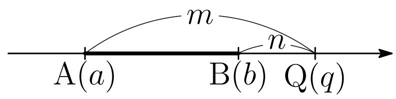
次に，線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q の座標 q を求めてみよう．

$m>n$，$a<b$ のとき，点 B は線分 AQ を $(m-n):n$ に内分するから

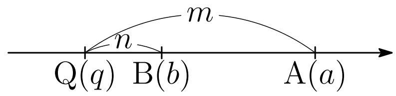
$$b=\frac{na+(m-n)q}{(m-n)+n}$$

したがって　$q=\dfrac{-na+mb}{m-n}$　$\cdots$②

$m>n$，$a<b$ のとき



$m>n$，$a>b$ のとき



$m>n$，$a>b$ のときも，同様にして ② が得られる．

また，点 Q の座標は m と n の大小にも関係なく ② で表され，一般に次のことが成り立つ．

線分の内分点・外分点

2 点 A(a)，B(b) を結ぶ線分 AB を，$m:n$ に内分する点を P，外分する点を Q とする．

点 P の座標は $\boldsymbol{\dfrac{na+mb}{m+n}}$，　点 Q の座標は $\boldsymbol{\dfrac{-na+mb}{m-n}}$

とくに，線分 AB の中点の座標は $\boldsymbol{\dfrac{a+b}{2}}$ である．

補足 内分点の座標で n を $-n$ におき換えたものが，外分点の座標である．

例 3.2 2 点 A(3)，B(6) に対して，線分 AB を $2:1$ に内分する点 P，$2:1$ に外分する点 Q の座標を求めると

$$\text{内分点 P の座標は}\quad \frac{1\times 3+2\times 6}{2+1}=\frac{15}{3}=5$$

$$\text{外分点 Q の座標は}\quad \frac{-1\times 3+2\times 6}{2-1}=9$$

練習 3.3 2 点 A(4)，B(8) を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ．

(1)　$3:2$ に内分する点 C　　(2)　$3:1$ に外分する点 D

(3)　$2:3$ に外分する点 E　　(4)　中点 M

3.1.2　平面上の点

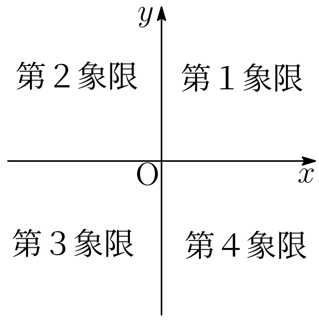
座標軸の定められた平面すなわち座標平面上の点について考えよう.

A》座標平面上の点

座標平面上の点 P の位置は, 2 つの実数の組, たとえば $(a,\ b)$ で表される. この組 $(a,\ b)$ を点 P の座標といい, このような点 P を $\mathrm{P}(a, b)$ で表す.

座標平面は座標軸によって 4 つの部分に分けられる. これらの各部分を**象限**(しょうげん)といい, 右の図のように, それぞれを**第 1 象限**, **第 2 象限**, **第 3 象限**, **第 4 象限**という.

座標軸はどの象限にも含めない.



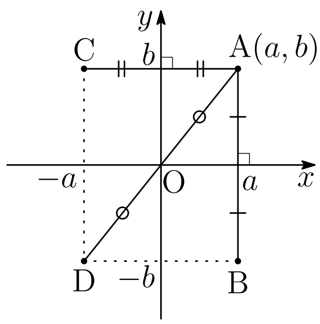
練習 3.4 次の点はどの象限にあるか.

(1) 点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$　　(2) 点 $\mathrm{B}(2, -1)$

(3) 点 $\mathrm{C}(-2,\ 1)$　　(4) 点 $\mathrm{D}(-2, -1)$

右の図のように, 第 1 象限の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ と
x 軸に関して対称な点 B の座標は $(a, -b)$
y 軸に関して対称な点 C の座標は $(-a,\ b)$
原点に関して対称な点 D の座標は $(-a, -b)$
である.

このことは, 点 A が他の象限にあるときも同じである.



練習 3.5 点 $\mathrm{P}(-2,\ 3)$ に対して, 次のような点の座標を求めよ.

(1) x 軸に関して対称な点 Q　　(2) 原点に関して対称な点 R

B》2点間の距離

2点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ 間の距離 AB を求めてみよう．

右の図の直角三角形 ABC では

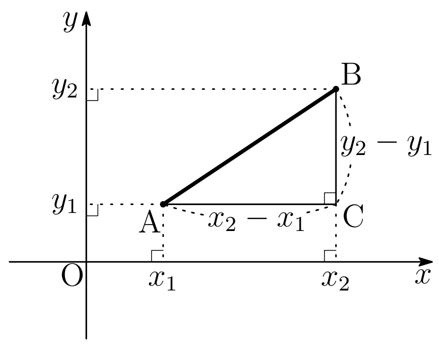
$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2$$

が成り立つから

$$\mathrm{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

となる．よって

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



一般に，次のことが成り立つ．

2点間の距離

2点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ 間の距離 AB は

$$\mathbf{AB} = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2}$$

とくに，原点 O と点 A$(x_1,\ y_1)$ との距離 OA は

$$\mathbf{OA} = \sqrt{\boldsymbol{x_1}^2 + \boldsymbol{y_1}^2}$$

例 3.3 2点 A$(2, -1)$，B$(4,\ 3)$ 間の距離 AB は

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + \{3-(-1)\}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

原点 O と点 A$(2, -1)$ との距離 OA は

$$\mathrm{OA} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

練習 3.6 次の2点間の距離を求めよ．

(1) A$(1,\ 2)$，B$(4,\ 6)$　　(2) C$(-3,\ 1)$，D$(2, -4)$

(3) E$(5, -2)$，F$(3, -2)$　　(4) 原点 O，A$(2, -3)$

例題 3.1　2点 $\mathrm{A}(3,-1)$，$\mathrm{P}(x,\ 2)$ 間の距離が5であるとき，x の値を求めよ．

解答　$\mathrm{AP}=5$ すなわち $\mathrm{AP}^2=5^5$ より

$$(x-3)^2+\{2-(-1)\}^2=5^2$$

$(x-3)^2=16$ であるから　　$x-3=\pm4$

よって　　$x=7,-1$

練習 3.7　2点 $\mathrm{B}(-5,\ 2)$，$\mathrm{Q}(7,\ y)$ 間の距離が13であるとき，y の値を求めよ．

応用例題 3.1　$\triangle\mathrm{ABC}$ の辺 BC の中点を M とするとき，等式

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

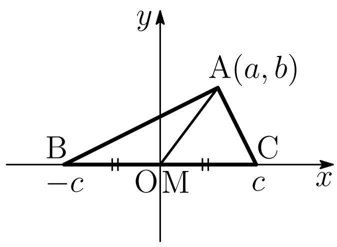
が成り立つ．このことを証明せよ．

考え方》　座標平面上に $\triangle\mathrm{ABC}$ をとって証明する．そのとき，辺の長さの計算がしやすいように座標軸を定めるとよい．

証明　M は辺 BC の中点であるから，M を原点にとり，右の図のように

$\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(-c,\ 0)$，$\mathrm{C}(c,\ 0)$

とする．
このとき



$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}=2(a^2+b^2+c^2)$$
$$\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2=(a^2+b^2)+c^2$$

よって　　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$　　**証終**

練習 3.8 $\triangle$ABC において，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を D とするとき，等式 $2\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 3(\mathrm{AD}^2 + 2\mathrm{BD}^2)$ が成り立つ．このことを証明せよ．

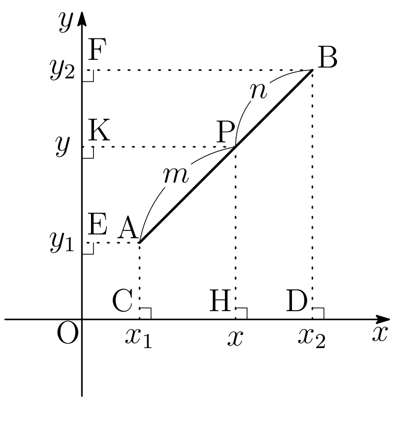
C 》内分点・外分点の座標

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB について，
$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$ となる点 P の座標を求めてみよう．

右の図のように，点 A，B，P から x 軸，y 軸にそれぞれ垂線を下ろすと，平行線と線分の比の関係により

$$\mathrm{CH} : \mathrm{HD} = \mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$
$$\mathrm{EK} : \mathrm{KF} = \mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

が成り立つ．P が内分点，外分点の場合について，点 H の x 座標，点 K の y 座標を求めると，次のことが得られる．



内分点・外分点の座標

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を，$m : n$ に内分する点を P，外分する点を Q とする．点 P，Q の座標は

$$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}},\ \boldsymbol{\frac{ny_1 + my_2}{m+n}}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n}},\ \boldsymbol{\frac{-ny_1 + my_2}{m-n}}\right)$$

とくに，線分 AB の中点の座標は　$\left(\boldsymbol{\frac{x_1 + x_2}{2}},\ \boldsymbol{\frac{y_1 + y_2}{2}}\right)$

補足 内分点の座標で n を $-n$ におき換えたものが，外分点の座標である．

例 3.4 2点 A$(-1,\ 6)$，B$(4,\ 1)$ を結ぶ線分 AB について
3 : 2 に内分する点 P の座標は

$$\left(\frac{2\times(-1)+3\times 4}{3+2},\ \frac{2\times 6+3\times 1}{3+2}\right) \text{より} \qquad (2,\ 3)$$

5 : 2 に外分する点 Q の座標は

$$\left(\frac{-2\times(-1)+5\times 4}{5-2},\ \frac{-2\times 6+5\times 1}{5-2}\right) \text{より} \qquad \left(\frac{22}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

練習 3.9 2点 A$(-3,\ 2)$，B$(4,\ 5)$ を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ.

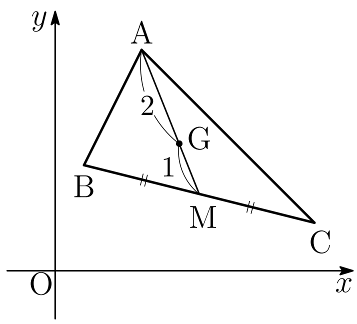
(1) 2 : 1 に内分する点 C

(2) 2 : 1 に外分する点 D

(3) 2 : 3 に外分する点 E

(4) 中点 M

例題 3.2 3 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC において，辺 BC の中点を M，線分 AM を 2 : 1 に内分する点を G とする．G の座標を求めよ．



解答　辺 BC の中点 M の座標は

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

G は線分 AM を 2 : 1 に内分するから，その座標は

$$\left(\frac{1\times x_1+2\times\dfrac{x_2+x_3}{2}}{2+1},\ \frac{1\times y_1+2\times\dfrac{y_2+y_3}{2}}{2+1}\right)$$

すなわち　$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

例題 3.2 における点 G を，△ABC の**重心**という．

3 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC の重心の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{x_1+x_2+x_3}{3}},\ \boldsymbol{\frac{y_1+y_2+y_3}{3}}\right)$$

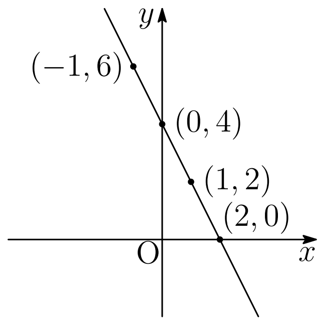
練習 3.10 次の 3 点 A，B，C を頂点とする △ABC の重心の座標を求めよ．

(1) A(1, 1)，B(5, 2)，C(3, 4)

(2) A(−2, 4)，B(0, −3)，C(2, 1)

3.1.3　直線の方程式

x，y の 1 次方程式 $2x+y-4=0$ を満たす点 $(x,\ y)$ の全体を座標平面上にとると，右の図のような直線になる．
一般に，x，y の方程式を満たす点 $(x,\ y)$ の全体が図形 $\boldsymbol{F}$ であるとき，その方程式を**図形 $\boldsymbol{F}$ の方程式**という．
ここでは，直線の方程式について考えることにしよう．



A》 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ の 1 次方程式の表す図形

例 3.5　(1) **方程式 $\boldsymbol{2x+y-4=0}$ の表す図形**

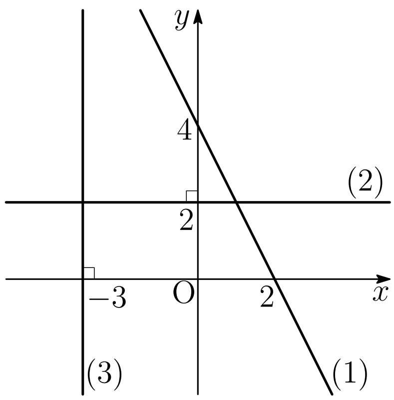
この方程式を変形すると

$$y=-2x+4$$

よって，この方程式の表す図形は，傾きが -2，切片が 4 の直線である．

(2) **方程式 $\boldsymbol{y-2=0}$ の図形**

$y=2$ であるから，この方程式の表す図形は，点 $(0,\ 2)$ を通り y 軸に垂直な直線である．



(3) **方程式 $\boldsymbol{x+3=0}$ の表す図形**

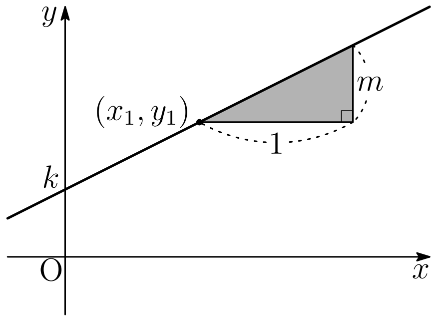
$x=-3$ であるから，この方程式の表す図形は，点 $(-3,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線である．

練習 3.11　次の方程式の表す直線を座標平面上にかけ．

(1) $3x-y+1=0$　　(2) $y+1=0$　　(3) $x-2=0$

一般に，x，y の 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ の表す図形は直線である．ここで，a，b，c は定数で，$a \neq 0$ または $b \neq 0$ である．

B ≫ 直線の方程式のいろいろな形



傾き m の直線

$$y = mx + k \qquad \cdots ①$$

が点 $(x_1,\ y_1)$ を通るとき，

$$y_1 = mx_1 + k \quad \cdots ②$$

である．① − ② により k を消去すると，次のことが得られる．

直線の方程式 (1)

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m の直線の方程式は

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

例 3.6 点 $(1,\ 3)$ を通り，傾きが 2 の直線の方程式は

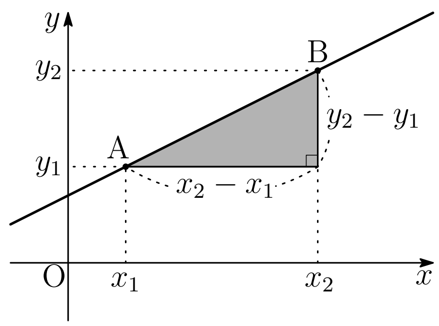
$$y - 3 = 2(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x + 1$$

練習 3.12 次のような直線の方程式を求めよ．

(1) 点 $(2, -4)$ を通り，傾きが 3 の直線

(2) 点 $(-3,\ 1)$ を通り，傾きが -2 の直線

異なる2点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式を求めよう．



$x_1 \neq x_2$ のとき，直線 AB は

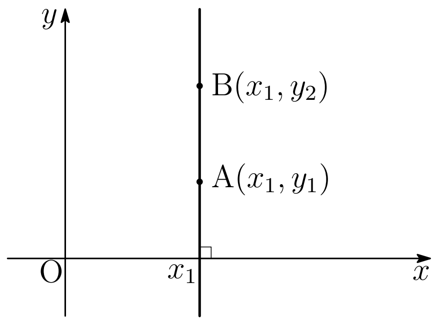
点 A$(x_1,\ y_1)$ を通り，

傾きが $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

であるから，その方程式は

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

である．



x 座標が等しく，y 座標の異なる2点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_1,\ y_2)$ を通る直線 AB は x 軸に垂直である．x 軸とは点 $(x_1, 0)$ で交わるから，その方程式は，次のようになる．

$$x = x_1$$

直線の方程式 (2)

異なる2点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

$x_1 \neq x_2$ のとき　　$\boldsymbol{y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$

$x_1 = x_2$ のとき　　$\boldsymbol{x = x_1}$

補足 座標平面上のどんな直線も，x，y の1次方程式で表される．

例 3.7 2点 $(1,\ 2)$，$(3, -4)$ を通る直線の方程式は

$$y - 2 = \frac{-4-2}{3-1}(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = -3x + 5$$

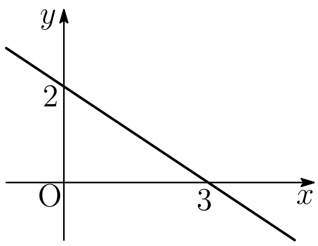
練習 3.13 次の2点を通る直線の方程式を求めよ．

(1)　$(3,\ 2)$，$(5,\ 6)$　　　　(2)　$(-1,\ 4)$，$(2,\ -2)$

(3)　$(2,-1)$，$(1,-1)$　　　(4)　$(3,-1)$，$(3,\ 4)$

直線が x 軸，y 軸とそれぞれ点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ で交わるとき，a をこの直線の $\boldsymbol{x}$ **切片**，b をこの直線の $\boldsymbol{y}$ **切片**という．

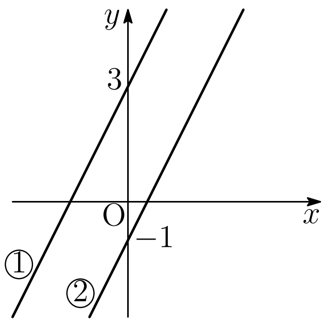
練習 3.14　x 切片が 3，y 切片が 2 である直線の方程式は，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$ の形で表されることを示せ．



3.1.4　2 直線の関係

2 直線の位置関係では，平行，垂直という 2 つの場合がとくに大切である．
ここでは，2 直線の関係について学ぼう．

A 》2 直線の平行と垂直



例 3.8　2 直線

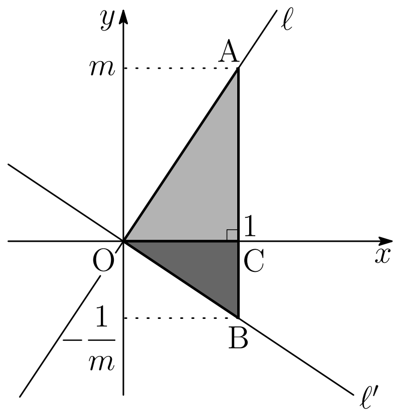
$$y=2x+3 \quad \cdots ①$$
$$y=2x-1 \quad \cdots ②$$

は，傾きがどちらも 2 で等しい．
よって，この 2 直線は平行である．

練習 3.15　次の中で，直線 $y=-2x$ と平行であるものはどれか．

①　$y=2x-3$　　②　$y=-2x+4$　　③　$2x+y+5=0$

次に，傾き m の直線 ℓ に垂直な直線 ℓ' の傾きを調べよう．



右の図のように，原点Oを通る2直線 ℓ，ℓ' および x 軸と直線 $x=1$ との交点を，それぞれA，B，Cとする．△OCA と △BCO は相似であるから

$$\mathrm{OC}:\mathrm{BC}=\mathrm{CA}:\mathrm{CO}$$

よって　　$$1:\mathrm{BC}=m:1$$

したがって　　$$\mathrm{BC}=\frac{1}{m}$$

このことから，直線 ℓ' の傾きは $-\dfrac{1}{m}$ になることがわかる．

一般に，傾き m の直線に垂直な直線の傾きは $-\dfrac{1}{m}$ である．

すなわち，2直線が垂直のとき，それぞれの傾きの積は -1 である．

2直線の平行，垂直

異なる2直線 $y=m_1x+k_1$，$y=m_2x+k_2$ について

$$\boldsymbol{m_1=m_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \textbf{2 直線が平行}$$

$$\boldsymbol{m_1m_2=-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \textbf{2 直線が垂直}$$

練習 3.16 次の2直線は，それぞれ平行と垂直のいずれであるか．

(1)　$y=4x+1$，$y=4x-3$　　　　(2)　$y=3x-1$，$x+3y+2=0$

(3)　$2x+3y=3$，$4x+6y=5$　　　　(4)　$3x+4y=2$，$4x-3y=1$

例題 3.3 点 $\mathrm{A}(2,1)$ を通り，直線 $2x+3y+4=0$ に垂直な直線 ℓ の方程式を求めよ．

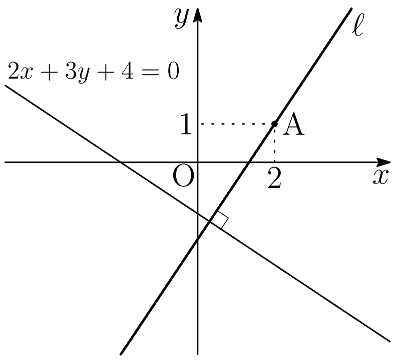
解答 直線 $2x+3y+4=0$ の傾きは

$$-\frac{2}{3}$$

直線 ℓ の傾きを m とすると

$$-\frac{2}{3}m=-1 \quad \text{から} \quad m=\frac{3}{2}$$

よって，直線 ℓ の方程式は



$$y-1=\frac{3}{2}(x-2) \quad \text{すなわち} \quad 3x-2y-4=0$$

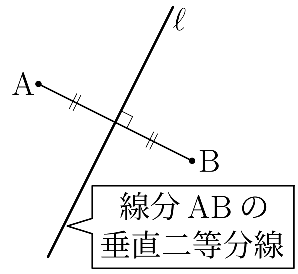
例題 3.3 の直線 ℓ の方程式は $3(x-2)-2(y-1)=0$ の形に表される[1]．

練習 3.17 点 $\mathrm{A}(3,-1)$ を通り，直線 $3x+2y+1=0$ に垂直な直線，平行な直線の方程式をそれぞれ求めよ．

[1] 一般に，点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に垂直な直線の方程式は $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$ の形に表される．また，点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に平行な直線の方程式は $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$ の形に表される．

B》直線に関して対称な点

2点A，Bが直線ℓに関して対称であるのは，次の［1］,［2］が成り立つときである．



［1］直線ABはℓに垂直である．

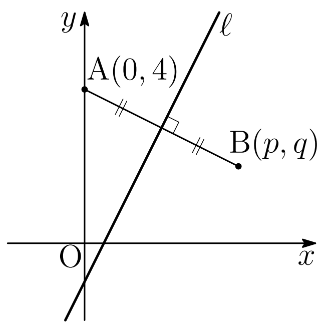
［2］線分ABの中点はℓ上にある．

補足 直線ℓは線分ABの垂直二等分線である．

応用例題 3.2 直線$2x-y-1=0$をℓとする．直線ℓに関して点A$(0, 4)$と対称な点Bの座標を求めよ．

考え方》 点Bの座標を$(p,\ q)$として，上の［1］,［2］が成り立つようにp，qについての方程式を作る．

解答 点Bの座標を$(p,\ q)$とする．



［1］直線ℓの傾きは2，直線ABの傾きは$\dfrac{q-4}{p-0}$である．

AB⊥ℓであるから

$$2\cdot\frac{q-4}{p-0}=-1$$

すなわち　$p+2q-8=0$　$\cdots$①

［2］線分ABの中点$\left(\dfrac{p+0}{2},\ \dfrac{q+4}{2}\right)$が直線$\ell$上にあるから

$$2\cdot\frac{p+0}{2}-\frac{q+4}{2}-1=0$$

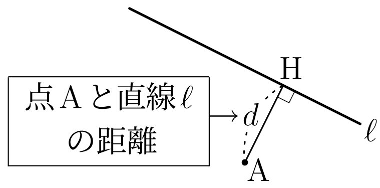
すなわち　$2p-q-6=0$　$\cdots$②

①，②を連立させた方程式を解くと　$p=4$，$q=2$

したがって，点Bの座標は　$(4,\ 2)$

練習 3.18 直線 $2x - y + 2 = 0$ を ℓ とする．直線 ℓ に関して点 A(2, 1) と対称な点 B の座標を求めよ．

C》点と直線の距離

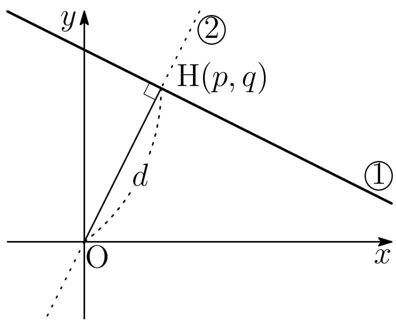


点Aから直線ℓに引いた垂線とℓとの交点をHとする．このとき，線分AHの長さdを，点Aと直線ℓの距離という．

まず，原点Oと直線

$$ax + by + c = 0 \qquad \cdots ①$$

の距離dを求めてみよう．



直線　$bx - ay = 0 \qquad \cdots ②$

は，原点Oを通り直線①に垂直である．
2直線①，②の交点をH(p, q)とすると

$$p = -\frac{ac}{a^2+b^2},\ q = -\frac{bc}{a^2+b^2}$$

←①，②を連立させた方程式を解いた．

$d = \mathrm{OH}$であるから

$$d = \sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{\sqrt{c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

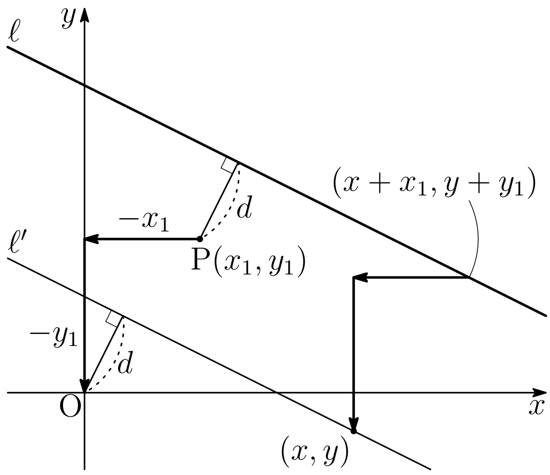
原点と直線 $\boldsymbol{ax+by+c=0}$ の距離 $\boldsymbol{d}$ は　　$\boldsymbol{d = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

練習 3.19 原点と次の直線の距離を求めよ．

(1) $2x - y + 5 = 0$

(2) $2x + 3y - 4 = 0$

次に，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d を求めてみよう．



直線 $ax+by+c=0$ を ℓ とする．

点 P と直線 ℓ の両方を，点 P が原点に重なるように平行移動し，移動後の直線を ℓ' とする．ℓ' 上のどんな点 $(x,\ y)$ に対しても，点 $(x+x_1, y+y_1)$ が ℓ 上にあることから，

$$a(x+x_1)+b(y+y_1)+c=0$$

が成り立つ．

すなわち　　$ax+by+(ax_1+by_1+c)=0$

これが ℓ' の方程式である．原点と直線 ℓ' の距離は $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ で，これが求める d に等しいので，次のことが成り立つ．

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$\boldsymbol{d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

例 3.9 点 $(1,-2)$ と直線 $3x+4y+4=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|3\cdot1+4\cdot(-2)+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{25}}=\frac{1}{5}$$

練習 3.20 次の点と直線の距離を求めよ．

(1) 点 $(1,\ 2)$，直線 $3x-4y-1=0$

(2) 点 $(2,-3)$，直線 $2x+y-3=0$

(3) 点 $(-1,\ 5)$，直線 $y=3x-2$

3.1.5 補充問題

1 点 P(2, 1) から $\sqrt{10}$ の距離にある x 軸上の点 Q の座標を求めよ.

2 原点 O と点 A(6, 2), B(2, 4) の 3 点を頂点とする △OAB は, 直角二等辺三角形であることを示せ.

3 点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$ に関して，点 $\mathrm{B}(-2,\ 3)$ と対称な点 C の座標を求めよ．

4 2 点 $\mathrm{A}(4,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ について，次の直線の方程式を求めよ．

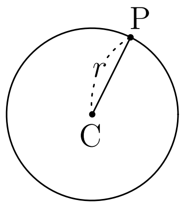
(1) 直線 AB

(2) 線分 AB の垂直二等分線

3.2　円

3.2.1　円の方程式

点Cから一定の距離 r にある点Pの全体は，Cを中心とする半径 r の円である．このことを座標で表すと，円の方程式を導くことができる．
ここでは，円の方程式について学ぼう．



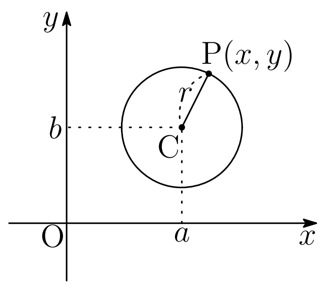
A 》円の方程式

点 $\mathrm{C}(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円を考える．円上の点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると，$\mathrm{CP} = r$ より

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$

すなわち　　$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$

したがって，次のことがいえる．



円の方程式

1　点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2}$$

2　原点を中心とする半径 r の円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2 = r^2}$$

練習 3.21　次のような円の方程式を求めよ．

(1)　中心が原点，半径が2

(2)　中心が点 $(2,\ 3)$，半径が4

(3)　中心が点 $(-2,\ 1)$，半径が $\sqrt{10}$

例題 3.4 2 点 A(3, 4), B(−1, 2) を直径の両端とする円について，中心の座標と半径を求めよ．また，その方程式を求めよ．

解答 求める円の中心を C，半径を r とする．

C は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{3+(-1)}{2},\ \frac{4+2}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (1,\ 3)$$

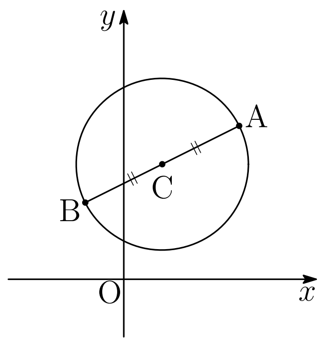
また

$$r = \mathrm{CA} = \sqrt{(3-1)^2+(4-3)^2} = \sqrt{5}$$

この円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-3)^2 = (\sqrt{5})^2$$

すなわち　$(x-1)^2+(y-3)^2 = 5$



練習 3.22 2 点 A(4, 0), B(0, 2) を直径の両端とする円について，中心の座標と半径を求めよ．また，その方程式を求めよ．

B》 $\boldsymbol{x^2+y^2+lx+my+n=0}$ の表す図形

円の方程式 $(x+2)^2+(y+3)^2=5$ を変形すると

$$x^2+y^2+4x+6y+8=0$$

となる．このように，円の方程式は，l，m，n を定数として

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

←x^2 と y^2 の係数が1で，xy の項がない．

の形にも表される．

例 3.10　方程式 $\boldsymbol{x^2+y^2-6x+2y-6=0}$ の表す図形

この方程式を変形すると

$$(x^2-6x+9)+(y^2+2y+1)=9+1+6$$

← 平方完成と同じ

すなわち　$(x-3)^2+(y+1)^2=4^2$

これは，中心が点 $(3,-1)$，半径が4の円である．

練習 3.23　次の方程式はどのような図形を表すか．

(1)　$x^2+y^2+4x-2y-4=0$

(2)　$x^2+y^2+6x+8y+9=0$

C》3 点を通る円の方程式

例題 3.5 次の 3 点を通る円の方程式を求めよ．

$$\mathrm{A}(2,\ 4),\ \mathrm{B}(2,\ 0),\ \mathrm{C}(-1,\ 3)$$

解答 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする．

点 A を通るから　$2^2+4^2+2l+4m+n=0$

点 B を通るから　$2^2+2l+n=0$

点 C を通るから　$(-1)^2+3^2+(-1)l+3m+n=0$

整理すると

$$\begin{aligned} &2l+4m+n+20=0\\ &2l+n+4=0\\ &-l+3m+n+10=0 \end{aligned}$$

これを解くと　$l=-2,\ m=-4,\ n=0$

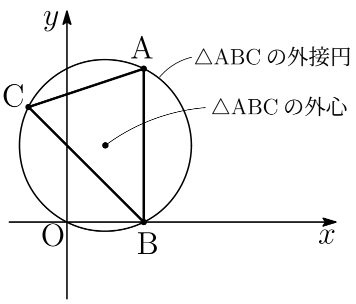
よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-2x-4y=0$

例題 3.5 で求めた円の方程式を変形すると

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5$$

よって，円の中心の座標は $(1,\ 2)$ である．

この円のように，△ABC の 3 つの頂点を通る円を △ABC の**外接円**といい，その円の中心を △ABC の**外心**という．



練習 3.24 次の3点A，B，Cを通る円の方程式を求めよ．

(1) A(1, 1)，B(2, 1)，C(−1, 0)

(2) A(2, 3)，B(−2, −1)，C(2, −3)

3.2.2 円と直線

2 直線の共有点の座標は，それらの方程式を連立させた連立方程式の解である．これと同様な考えで，円と直線の共有点について調べてみよう．

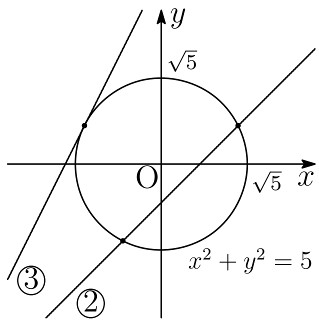
A 》円と直線の共有点の座標

例題 3.6 円 $x^2+y^2=5$ と次の直線の共有点の座標を求めよ．

(1) $y=x-1$ (2) $y=2x+5$

解答 (1) 次の連立方程式を解く．

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots ① \\ y=x-1 & \cdots ② \end{cases}$$



② を ① に代入して

$$x^2+(x-1)^2=5$$

整理すると　$x^2-x-2=0$
これを解くと　$x=-1,\ 2$
② に代入して

$$x=-1 \text{ のとき } \quad y=-2, \quad x=2 \text{ のとき } \quad y=1$$

よって，共有点の座標は　$(-1,-2)$，$(2,\ 1)$

(2) 次の連立方程式を解く．

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots ① \\ y=2x+5 & \cdots ③ \end{cases}$$

③ を ① に代入して　$x^2+(2x+5)^2=5$
整理すると　$x^2+4x+4=0$
これを解くと $x=-2$ で，③ に代入して　$y=1$
よって，共有点の座標は　$(-2,\ 1)$

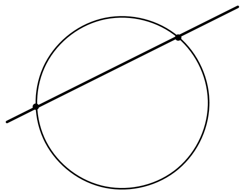
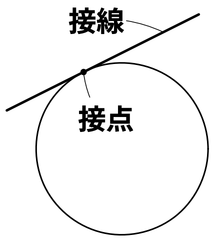
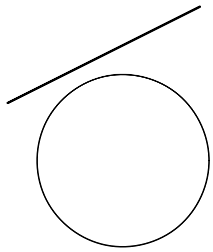
練習 3.25 次の円と直線は共有点をもつ．その座標を求めよ．

(1) $x^2 + y^2 = 25$，$y = x + 1$

(2) $x^2 + y^2 = 8$，$x + y = 4$

B 》円と直線の位置関係

円の方程式と直線の方程式から y を消去して得られる x の 2 次方程式を $ax^2+bx+c=0$ とする．その判別式 $D=b^2-4ac$ を用いると，円と直線の位置関係は次のようになる．

D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	異なる 2 つの実数解	重解 (ただ 1 つ)	なし
円と直線の位置関係	異なる 2 点で交わる 	接する 	共有点をもたない 
共有点の個数	2 個	1 個	0 個

例題 3.7 円 $x^2+y^2=8$ と直線 $y=x+m$ が共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

解答 $x^2+y^2=8$ と $y=x+m$ から y を消去して整理すると

$$2x^2+2mx+(m^2-8)=0$$

判別式は　$D=(2m)^2-4\cdot 2(m^2-8)=-4(m^2-16)$

円と直線が共有点をもつのは，$D \geqq 0$ のときである．

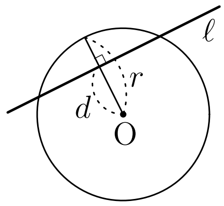
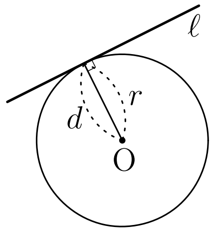
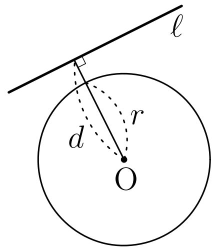
よって，$m^2-16 \leqq 0$ を解いて　$-4 \leqq m \leqq 4$　　$\leftarrow (m+4)(m-4) \leqq 0$

練習 3.26 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x+m$ について，次の問いに答えよ．

(1) 円と直線が共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(2) 円と直線が接するとき，定数 m の値と接点の座標を求めよ．

点 O を中心とする半径 r の円と直線 ℓ の位置関係は，円の中心 O と直線 ℓ の距離を d とするとき，次のようになる．

d と r の大小	$d < r$	$d = r$	$d > r$
円と直線の位置関係	異なる 2 点で交わる 	接する 	共有点を もたない 

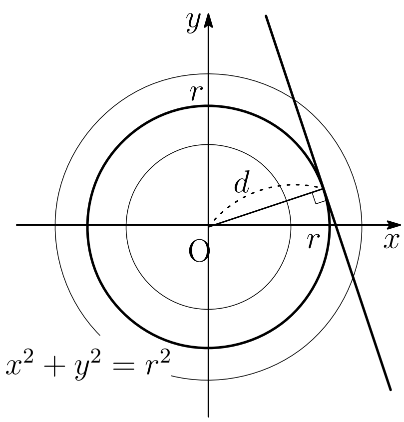
例題 3.8 半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $3x + y - 10 = 0$ が接するとき，r の値を求めよ．

解答 円の中心は原点であり，原点と直線 $3x + y - 10 = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|-10|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

円と直線が接するのは $d = r$ のときである．

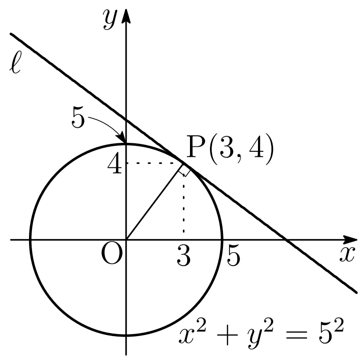
よって $\qquad r = \sqrt{10}$



例題 3.8 において，円と直線が共有点をもつのは $r \geqq \sqrt{10}$ のときである．また，共有点をもたないのは $0 < r < \sqrt{10}$ のときである．

練習 3.27 半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $x + 2y - 5 = 0$ が接するとき，r の値を求めよ．

C》円の接線の方程式



原点Oを中心とする円 $x^2+y^2=5^2$ 上の点 P(3, 4) における接線 ℓ の方程式を求めてみよう.

接線 ℓ は直線OPに垂直である.

直線OPの傾きは $\dfrac{4}{3}$ であるから, ℓ の傾きは $-\dfrac{3}{4}$ となる.

また, ℓ は点P(3, 4) を通るから,

その方程式は　　$y-4=-\dfrac{3}{4}(x-3)$

分母をはらって整理すると

$3x+4y=3^2+4^2$　すなわち　$3x+4y=5^2$　　← $3^2+4^2=5^2$

一般に, 次のことが成り立つ.

円上の点における接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 P$(p,\ q)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{px+qy=r^2}$$

注意　上のことは, 点Pが座標軸上にあっても成り立つ.

例 3.11　円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,-4)$ における接線の方程式は

$3x+(-4)y=25$　すなわち　$3x-4y=25$

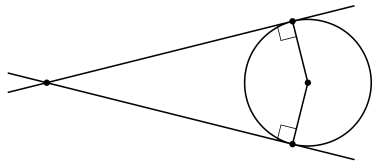
練習 3.28　次の円上の点Pにおける接線の方程式を求めよ.

(1) 円 $x^2+y^2=10$, 点 P(3, 1)

(2) 円 $x^2+y^2=13$, 点 P$(2,-3)$

(3) 円 $x^2+y^2=16$, 点 P(4, 0)

円外の点から円に引いた接線は 2 本ある．このような接線の方程式を求めてみよう．



応用例題 3.3 点 A(1, 3) から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ．

考え方》 接点を P$(p,\ q)$ とする．円 $x^2+y^2=5$ 上の点 P における接線が，点 A(1, 3) を通るように，p，q の値を定める．

解答 接点を P$(p,\ q)$ とすると，P は円上にあるから

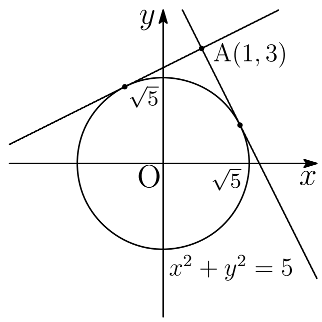
$$p^2+q^2=5 \qquad \cdots ①$$

また，P における円の接線の方程式は

$$px+qy=5 \qquad \cdots ②$$

で，この直線が点 A(1, 3) を通るから

$$p+3q=5 \qquad \cdots ③$$



①，③ から p を消去して整理すると

$$q^2-3q+2=0$$

これを解くと　$q=1,\ 2$

③ に代入して

$q=1$ のとき　$p=2$,　　$q=2$ のとき　$p=-1$

よって，接線の方程式 ② と接点 P の座標は，次のようになる．

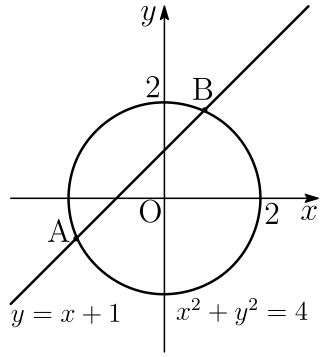
接線 $2x+y=5$，接点 $(2,\ 1)$
接線 $-x+2y=5$，接点 $(-1,\ 2)$

練習 3.29 点 A(2, 1) から円 $x^2 + y^2 = 1$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ.

研究

円と直線の交点を通る円

円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=x+1$ は，右の図のように異なる 2 点で交わる．
この交点 A，B と他の 1 点を通る円の方程式について考えてみよう．
円と直線の交点の座標 $(x,\ y)$ は，次の条件を満たす．



$$x^2+y^2-4=0 \text{ かつ } x-y+1=0$$

← 円上の点であり，かつ直線上の点である．

ここで，k を定数として，方程式

$$(x^2+y^2-4)+k(x-y+1)=0 \qquad \cdots ①$$

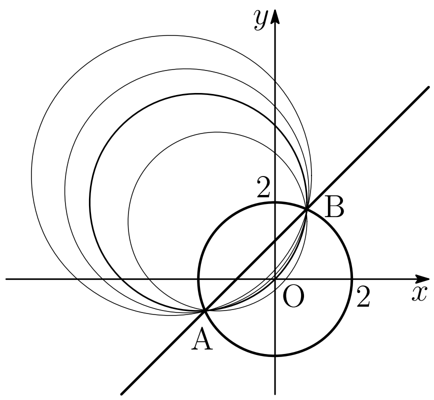
を考えると，① の表す図形は，2 点 A，B を通ることがわかる．

このことを利用して，円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=x+1$ の交点 A，B と原点 O の 3 点を通る円の方程式を求めてみよう．

① に $x=0$，$y=0$ を代入すると

$$(-4)+k=0$$

よって　　$k=4$



① に代入して整理すると

$$x^2+y^2+4x-4y=0$$

すなわち

$$(x+2)^2+(y-2)^2=8$$

これが，求める円の方程式である．

3.2.3 補充問題

5 3 点 A$(-2,\ 1)$，B$(1,\ 4)$，C$(0,\ 5)$ を頂点とする △ABC の外接円の半径と，外心の座標を求めよ．

6 次の円と直線の共有点の個数を求めよ．

(1) 円 $x^2+y^2=20$，直線 $3x-y-10=0$

(2) 円 $x^2+y^2=4$，直線 $2x-y+5=0$

(3) 円 $(x-1)^2+y^2=2$，直線 $x+y-3=0$

7 次の問いに答えよ．

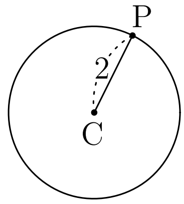
(1) 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $x+3y+c=0$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 c の値の範囲を求めよ．

(2) 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $x+3y-5=0$ の共有点を A，B とする．原点 O と A，B の 3 点を通る円の方程式を求めよ．

3.3　軌跡と領域

3.3.1　軌跡と方程式

平面上で，点Cに対して点Pが条件 $\mathrm{CP} = 2$ を満たしながら動くとき，Pの描く図形は，点Cを中心とする半径2の円である．
一般に，ある条件を満たしながら動く点が描く図形を，その条件を満たす点の**軌跡**という．ここでは，軌跡について学ぼう．



A》座標平面上の点の軌跡

座標平面上で，与えられた条件を満たす点の軌跡を求めてみよう．

例 3.12　2点 A(0, 2)，B(4, 0) に対して，AP = BP を満たす点Pの軌跡

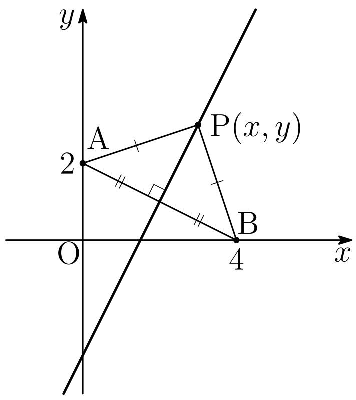
点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\mathrm{AP} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$
$$\mathrm{BP} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

$\mathrm{AP} = \mathrm{BP}$ であるから

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

すなわち　$x^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + y^2$
整理すると　　$2x - y - 3 = 0$



よって，点Pは直線 $2x - y - 3 = 0$ 上にある．
逆に，この直線上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$
すなわち $\mathrm{AP} = \mathrm{BP}$ が成り立つ．
したがって，点Pの軌跡は，直線 $2x - y - 3 = 0$ である．

補足　例3.12で求めた点Pの軌跡は，線分ABの垂直二等分線である．

座標を用いて点 P の軌跡を求める手順は，次のようになる．

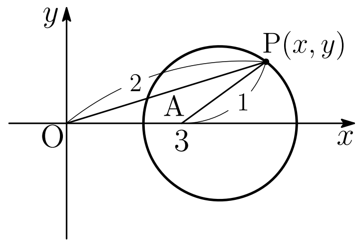
1 条件を満たす点 P の座標を $(x,\ y)$ として，P に関する条件を x，y の方程式で表し，この式が表す図形を調べる．

2 **1** で求めた図形上のすべての点 P が，与えられた条件を満たすことを確かめる．

練習 3.30 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ に対して，$\mathrm{AP}^2 - \mathrm{BP}^2 = 8$ を満たす点 P の軌跡を求めよ．

例題 3.9 原点Oからの距離と点A(3, 0)からの距離の比が2 : 1である点Pの軌跡を求めよ．

解答 点Pの座標を$(x,\ y)$とする．



Pに関する条件は

$$\mathrm{OP} : \mathrm{AP} = 2 : 1$$

これより　$2\mathrm{AP} = \mathrm{OP}$

すなわち　$4\mathrm{AP}^2 = \mathrm{OP}^2$

$$\mathrm{AP}^2 = (x-3)^2 + y^2, \quad \mathrm{OP}^2 = x^2 + y^2$$

を代入すると　$4\{(x-3)^2 + y^2\} = x^2 + y^2$

整理すると　$x^2 - 8x + y^2 + 12 = 0$

すなわち　$(x-4)^2 + y^2 = 2^2$

よって，点Pは円$(x-4)^2 + y^2 = 2^2$上にある．

逆に，この円上のすべての点$\mathrm{P}(x,\ y)$は，条件を満たす．

したがって，求める軌跡は，点(4, 0)を中心とする半径2の円である．

練習 3.31 2点A(−3, 0)，B(2, 0)からの距離の比が3 : 2である点Pの軌跡を求めよ．

B》線分の中点の軌跡

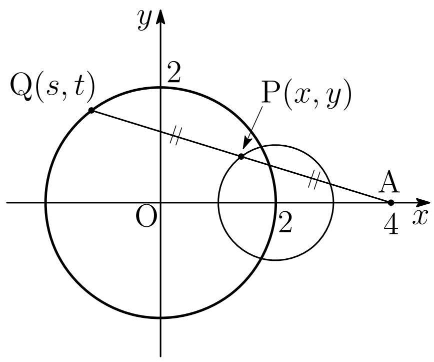
ここでは，点 Q がある条件を満たしながら動くとき，Q によって定まる点 P の軌跡について調べてみよう.

応用例題 3.4 点 Q が円 $x^2 + y^2 = 2^2$ 上を動くとき，点 A(4, 0) と点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を求めよ.

考え方》 Q(s, t)，P(x, y) とする．Q の満たす条件を表す s，t の式と，Q と P の座標の関係式から，x，y だけの関係式を導く.

解答 点 Q の座標を (s, t) とすると，Q は円 $x^2 + y^2 = 2^2$ 上にあるから

$$s^2 + t^2 = 2^2 \quad \cdots ①$$



また，点 P の座標を (x, y) とすると，条件から

$$x = \frac{s+4}{2}, \quad y = \frac{t}{2}$$

すなわち　$s = 2x - 4$，$t = 2y$

これらを ① に代入して　$(2x-4)^2 + (2y)^2 = 2^2$

整理すると　$(x-2)^2 + y^2 = 1^2$

よって，点 P は円 $(x-2)^2 + y^2 = 1^2$ 上にある.

逆に，この円上のすべての点 P(x, y) は，条件を満たす.

したがって，求める軌跡は，点 (2, 0) を中心とする半径 1 の円である.

練習 3.32 点 Q が直線 $y = x + 2$ 上を動くとき，点 A(1, 5) と点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を求めよ.

3.4　不等式の表す領域

座標平面上で，x，y の1次方程式 $y=-x+2$ を満たす点 $(x,\ y)$ の全体は直線である．では，x，y の1次不等式 $y>-x+2$ を満たす点 $(x,\ y)$ の全体は，どのような図形を表すのだろうか．このことについて調べてみよう．

A》直線を境界線とする領域

一般に，x，y の不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の全体を，その不等式の表す**領域**という．

直線 $y=-x+2$ を ℓ とする．

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ が，不等式

$$y>-x+2 \qquad \cdots ①$$

の表す領域にあれば

$$y_1>-x_1+2 \qquad \cdots ②$$

が成り立つ．

また，直線 ℓ 上に点 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_2)$ をとると

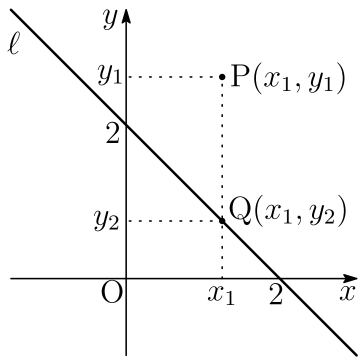
$$y_2=-x_1+2 \qquad \cdots ③$$

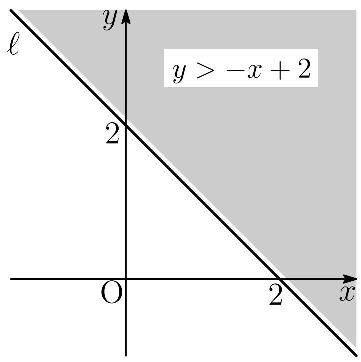
②，③ から　　$y_1>y_2$

よって，点 P は直線 ℓ より上側にある．

逆に，点 P が直線 ℓ より上側にあれば，不等式 ② が成り立つ．

したがって，不等式 ① の表す領域は，直線 ℓ の上側の部分である．この場合，境界線を含まない．





同様にして，x，y の1次不等式 $y<-x+2$ の表す領域は，直線 ℓ の下側の部分である．この場合，境界線を含まない．

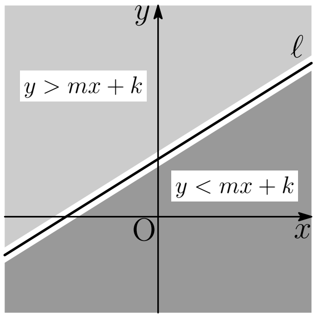
直線で分けられた領域について，一般に次のことがいえる．

直線と領域

直線 $y = mx + k$ を ℓ とする．

1　不等式 $y > mx + k$ の表す領域は，
直線 ℓ の上側の部分

2　不等式 $y < mx + k$ の表す領域は，
直線 ℓ の下側の部分

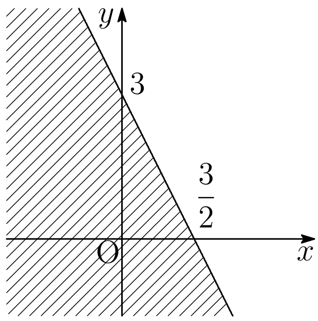


注意　$y \geqq mx + k$ や $y \leqq mx + k$ の表す領域は，直線 ℓ を含む．

例 3.13　不等式 $2x + y - 3 \leqq 0$ の表す領域
不等式を変形すると

$$y \leqq -2x + 3$$

したがって，この領域は，直線 $y = -2x + 3$ およびその下側の部分で，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



練習 3.33　次の不等式の表す領域を図示せよ．

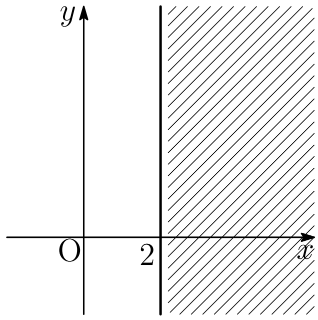
(1)　$y > x + 1$

(2)　$3x + y + 2 \leqq 0$

(3)　$2x - 3y + 6 \geqq 0$

例 3.14 不等式 $x > 2$ の表す領域

この領域は，x 座標が 2 より大きい点 $(x,\ y)$ の全体である．
したがって，この領域は，直線 $x = 2$ の右側の部分で，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．



練習 3.34 次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1) $x \leqq -1$　　(2) $y > 2$　　(3) $y + 3 \leqq 0$

B》円を境界線とする領域

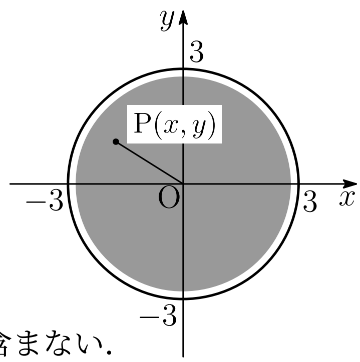
次の不等式の表す領域を調べてみよう．

$$x^2 + y^2 < 3^2 \quad \cdots ①$$

この不等式は，原点 O と点 P$(x,\ y)$ について

$$\mathrm{OP}^2 < 3^2 \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{OP} < 3$$

であることを示している．
したがって，不等式 ① の表す領域は，
円 $x^2 + y^2 = 3^2$ の内部である．この場合，境界線を含まない．

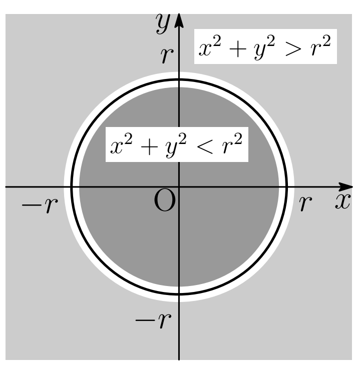


半径 r の円で分けられた領域について，一般に次のことがいえる．

円と領域

1　不等式 $x^2 + y^2 < r^2$ の表す領域は，
円 $x^2 + y^2 = r^2$ の**内部**.

2　不等式 $x^2 + y^2 > r^2$ の表す領域は，
円 $x^2 + y^2 = r^2$ の**外部**



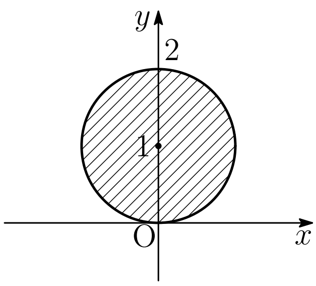
注意 $x^2 + y^2 \leqq r^2$ や $x^2 + y^2 \geqq r^2$ の表す領域は，
円 $x^2 + y^2 = r^2$ を含む．

練習 3.35 次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1) $x^2 + y^2 < 4$　　(2) $x^2 + y^2 \geqq 9$

例 3.15 不等式 $\boldsymbol{x^2 + (y-1)^2 \leqq 1}$ の表す領域

この領域は，円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ およびその内部である．すなわち，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



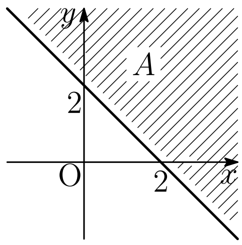
練習 3.36 次の不等式の表す領域を図示せよ．

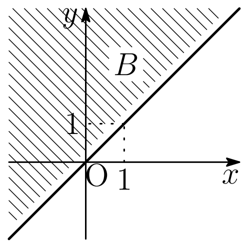
(1) $(x-2)^2 + y^2 \leqq 4$　　(2) $(x-1)^2 + (y-3)^2 > 9$

C》連立不等式の表す領域

連立不等式の表す領域を図示してみよう.

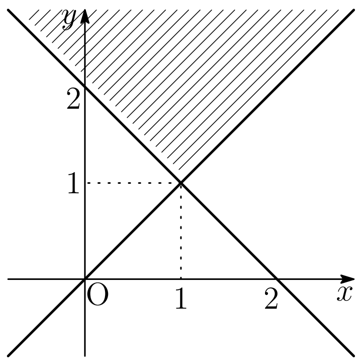
例 3.16 連立不等式 $\begin{cases} \boldsymbol{x+y-2>0} \\ \boldsymbol{x-y<0} \end{cases}$ **の表す領域**





　不等式　$x+y-2>0$
の表す領域を A,
　不等式　$x-y<0$
の表す領域を B とすると,
A, B は, それぞれ右の図の斜線部分である.

連立不等式の表す領域は, 領域 A と B に共通する部分である.
よって, この領域は, 右の図の斜線部分である. ただし, 境界線を含まない.



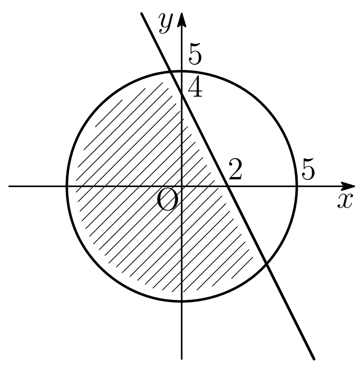
例題 3.10 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

$$\begin{cases} x^2+y^2<25 \\ 2x+y<4 \end{cases}$$

解答 この領域は

　円 $x^2+y^2=25$ の内部と
　直線 $2x+y=4$ の下側の部分

に共通する部分である. すなわち, 右の図の斜線部分である. ただし, 境界線を含まない.



練習 3.37 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

(1) $\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ 2x + y - 1 > 0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x + y - 3 \leqq 0 \\ 4x - y - 2 \geqq 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ 3x - y + 3 < 0 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqq 9 \\ x + 2y + 2 \geqq 0 \end{cases}$

応用例題 3.5 次の不等式の表す領域を図示せよ．

$$(x-y)(x+y-1)<0$$

考え方》 不等式の次の性質を利用する．

$$AB<0 \iff \begin{cases} A>0 \\ B<0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} A<0 \\ B>0 \end{cases}$$

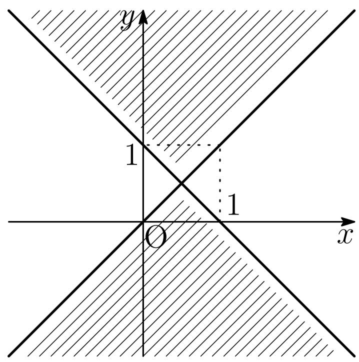
解答 不等式 $(x-y)(x+y-1)<0$ が成り立つことは

$$\begin{cases} x-y>0 \\ x+y-1<0 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} x-y<0 \\ x+y-1>0 \end{cases}$$

が成り立つことと同じである．
よって，求める領域は右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．



注意 $AB>0 \iff \begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$

練習 3.38 次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1) $(x+y)(x-y+1)>0$

(2) $x(x+2y-2) \leqq 0$

D》領域と最大・最小

不等式の表す領域を図示して解決できる問題を調べてみよう．

応用例題 3.6 x，y が 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad 2x+y \leqq 8,\quad 2x+3y \leqq 12$$

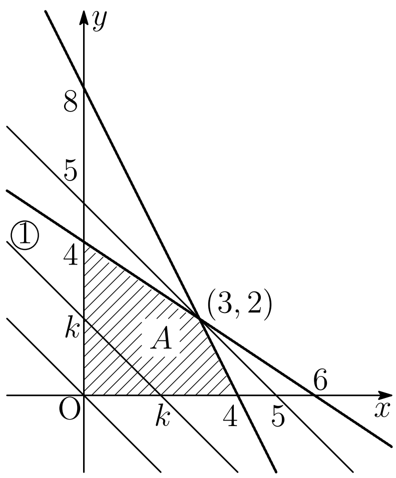
を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ．

考え方》 $x+y=k$ とおくと，これは傾きが -1，y 切片が k である直線を表す．この直線が連立不等式の表す領域と共有点をもつときの k の値の範囲を調べる．

解答 与えられた連立不等式の表す領域を A とする．領域 A は 4 点

$$(0,\ 0),\quad (4,\ 0),\quad (3,\ 2),\quad (0,\ 4)$$

を頂点とする四角形の周および内部である．



$$x+y=k \quad \cdots ①$$

とおくと，これは傾きが -1，y 切片が k である直線を表す．この直線 ① が領域 A と共有点をもつときの k の値の最大値，最小値を求めればよい．
図から，直線 ① が

$(3,\ 2)$ を通るとき k は最大で　　$k=5$
$(0,\ 0)$ を通るとき k は最小で　　$k=0$

である．したがって，$x+y$ は

$x=3$，$y=2$ のとき最大値 5 をとり，
$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0 をとる．

練習 3.39 x，y が 4 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x + 3y \leqq 5$，$3x + 2y \leqq 8$ を同時に満たすとき，$x + y$ の最大値，最小値を求めよ．

3.4.1　補充問題

8 直線 $3x-2y-4=0$ に対して，点 P$(1,-2)$ と同じ側にある点を，次の中から選べ．

原点 O，A$(-2,-6)$，B$(-1,\ 3)$，C$(3,\ 2)$

9 次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1)　$1 \leqq x+y \leqq 3$　　(2)　$4 \leqq x^2+y^2 \leqq 9$

10 実数 x，y について「$x^2+y^2 \leqq 1$ ならば $x+y \leqq \sqrt{2}$」が成り立つ．このことを，それぞれの不等式の表す領域を図示することによって証明せよ．

3.5 章末問題

3.5.1 章末問題 A

1 x 軸上の点 P が，2 点 A$(-1,\ 2)$，B$(4,\ 3)$ から等距離にあるとき，点 P の座標を求めよ．

2 3 点 A$(1,\ 5)$，B$(6, -3)$，C$(x,\ y)$ を頂点とする △ABC の重心の座標が $(1,\ 3)$ であるとき，x，y の値を求めよ．

3 2 直線 $3x - 4y + 5 = 0$，$2x + y - 4 = 0$ の交点を通り，次の条件を満たす直線の方程式を，それぞれ求めよ．

(1) 直線 $2x + 3y = 0$ に平行　　(2) 直線 $2x + 3y = 0$ に垂直

4 円 $x^2+(y-a)^2=25$ と x 軸が異なる 2 点で交わるとき，定数 a の値の範囲を求めよ．また，$a=1$ のとき，円が x 軸から切り取る線分の長さを求めよ．

5 点 C$(2,\ 1)$ を中心として，直線 $x+2y+1=0$ に接する円の方程式を求めよ．

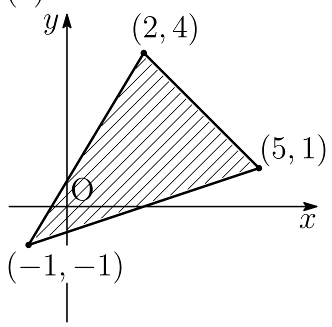
6 点 A$(2,\ 1)$ について点 Q$(a,\ b)$ と対称な点を P とする．

(1) P の座標を a，b を用いて表せ．

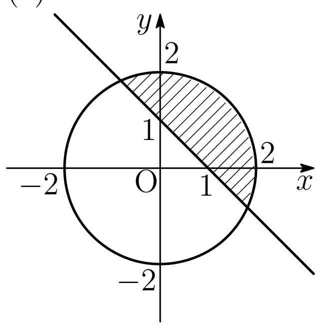
(2) Q が直線 $2x+y+1=0$ 上を動くとき，P の軌跡を求めよ．

7 図の斜線部分を表す不等式を求めよ．ただし，境界線を含むものとする．

(1)



(2)



3.5.2　章末問題 B

8 次の 3 点が一直線上にあるとき，a の値を求めよ．

$$\mathrm{A}(1, -2),\ \ \mathrm{B}(3,\ a),\ \ \mathrm{C}(a,\ 0)$$

9 3つの直線 $3x-y=0$，$2x+y=0$，$4x-3y+6=0$ で囲まれた三角形の面積を求めよ．

10 円 $x^2+y^2-4x+ay=0$ 上の点 A(4, 2) における接線を ℓ とする．

(1) a の値を求めよ．

(2) 円の中心 C の座標を求めよ．

(3) ℓ の傾きを求めよ．

(4) ℓ の方程式を求めよ．

11 放物線 $y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 3$ について，次の問いに答えよ．

(1) 頂点Pの座標を $(x,\ y)$ とするとき，x，y をそれぞれ a で表せ．

(2) a がすべての実数値をとって変化するとき，点Pの軌跡を求めよ．

12 ある工場の製品A，Bを1トン生産するのに必要な原料P，Qの量と製品A，Bの価格は，それぞれ右の表の通りとする．

	原料P	原料Q	価格
A	2トン	2トン	3万円
B	1トン	3トン	4万円

この工場へ1日に供給できる原料Pが8トン，原料Qが12トンであるとき，工場で1日に生産される製品A，Bの総価格を最大にするには，A，Bをそれぞれ，1日に何トンずつ生産すればよいか．

ヒント

8　2点A，Bを通る直線AB上に点Cがある．

9　三角形の高さは，点と直線の距離として求める．

11　(2)　(1)で求めた式から a を消去する．

第 4 章　三角関数

4.1　三角関数

4.1.1　角の拡張

時計の針を 5 分進めても 5 分もどしても，長針は 30° だけ回転するが，針が回転する向きは逆である．ここでは，図形的な角を拡張して回転量としての角を考えてみよう．

A》一般角

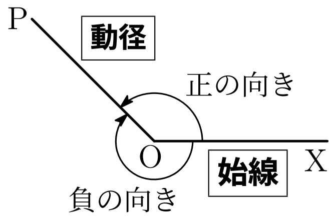
平面上で，点 O を中心に半直線 OP を回転させるとき，この半直線 OP を**動径**という．また，動径の最初の位置を示す半直線 OX を**始線**という．

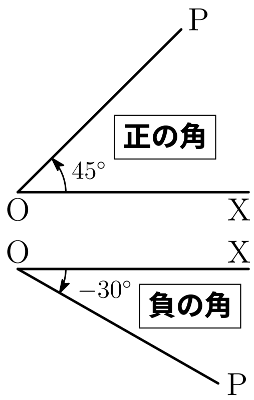
時計の針の回転と逆の向きを**正の向き**といい，始線 OX から正の向きに測った回転の角を**正の角**という．また，時計の針の回転と同じ向きを**負の向き**といい，始線 OX から負の向きに測った回転の角を**負の角**という．

正の角は，たとえば +45° または 45° と表す．負の角は，たとえば −30° と表す．

また，動径が正の向きに 1 回転すると 360°，2 回転すると 720°，負の向きに 1 回転すると −360° の角を表す．

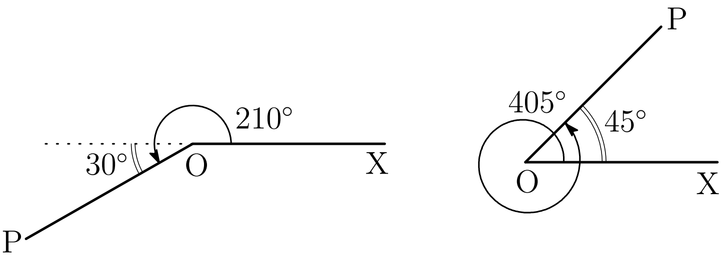
このように回転の向きと大きさを表した角を**一般角**という．





一般角 θ に対して，始線 OX から角 θ だけ回転した位置にある動径 OP を，**θ の動径**という．

例 4.1 210°，405° の動径



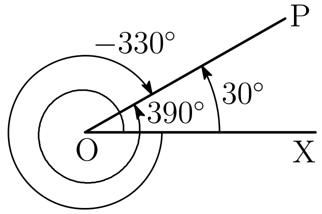
練習 4.1 次の角の動径を図示せよ．

(1) 260°　　(2) -45°　　(3) 420°

(4) 765°　　(5) -240°

B》動径の表す角

動径は1回転 360° でもとの位置にもどるから，たとえば 30° の動径と



$$30^\circ + 360^\circ = 390^\circ,$$
$$30^\circ + 360^\circ \times 2 = 750^\circ$$
$$30^\circ + 360^\circ \times (-1) = -330^\circ$$

のような角 390°，750°，-330° の動径は，すべて同じ位置にある．

一般に，次のことがいえる．

> 動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると，動径 OP の表す角は $\boldsymbol{\alpha + 360^\circ \times n}$ である．ただし，n は整数である．

練習 4.2 次の角のうち，その動径が 60° の動径と同じ位置にある角はどれか．

$$300^\circ,\ 420^\circ,\ 1040^\circ,\ -60^\circ,\ -300^\circ,\ -780^\circ$$

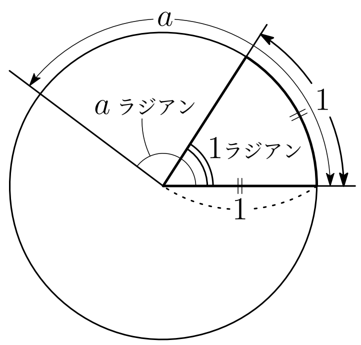
C》弧度法

30°，-120° などのように，これまで使ってきた度 (°) を単位とする角の表し方を，**60 分法**または**度数法**という．

これに対して，弧の長さに着目した角の測り方がある．

半径 1 の円において，半径と同じ長さ 1 の弧に対する中心角の大きさを**1 ラジアン**または**1 弧度**という．長さ a の弧に対する中心角の大きさは，a ラジアンである．

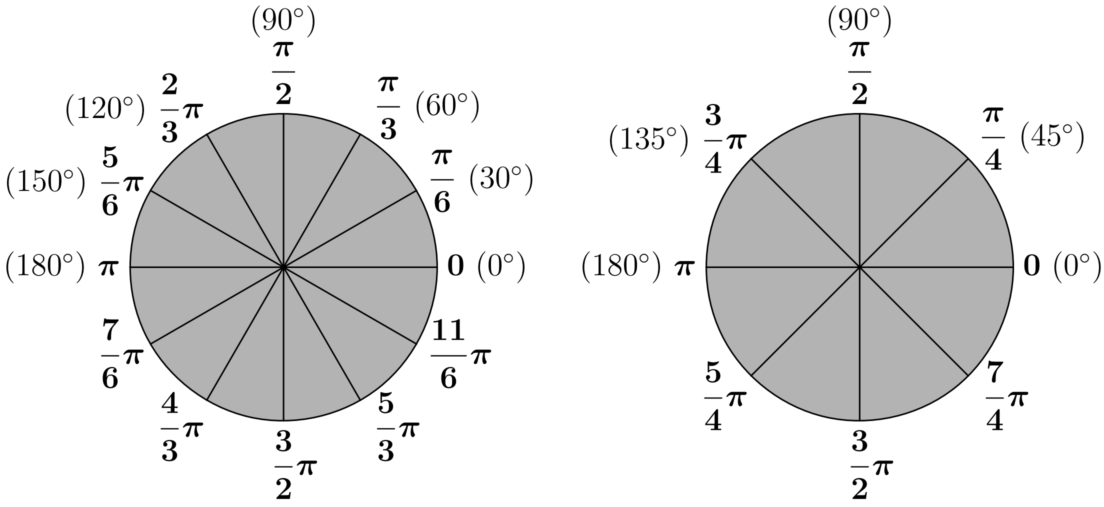
1 ラジアンを単位とする角の表し方を**弧度法**という．



練習 4.3 次のことを確かめよ．

(1) 1 ラジアンは $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$　　(2) 360° は 2π ラジアン

動径の回転角におけるラジアンと度の換算 (0°から 180°まで)



注意 弧度法では，ふつう，単位のラジアンを省略する．

練習 4.4 次の角を弧度法で表せ.

(1) 210° (2) 225° (3) 240°

(4) 270° (5) 330°

動径の表す角について，弧度法では次のことがいえる．

> 動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると，動径 OP の表す角は $\boldsymbol{\alpha + 2n\pi}$ である．ただし，n は整数である．

D》弧度法と扇形

弧度法を用いると，扇形について，次のことが成り立つ．

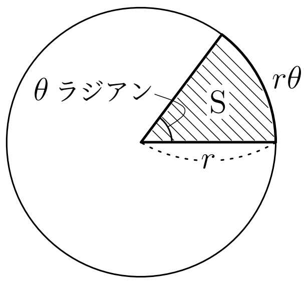
扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ(ラジアン) の扇形の弧の長さ l，面積 S は

$$\boldsymbol{l = r\theta},\qquad \boldsymbol{S = \frac{1}{2}r^2\theta}\quad \text{または}\quad \boldsymbol{S = \frac{1}{2}lr}$$

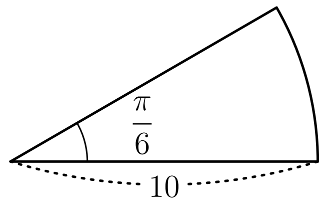
証明 半径 1 の円では，中心角が θ ラジアンの弧の長さは θ であるから，半径 r の円では，$l = r\theta$ となる．
扇形の面積は，中心角の大きさに比例するから

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr \qquad \textbf{証終}$$



例 4.2 半径 10，中心角 $\dfrac{\pi}{6}$ の扇形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{25}{3}\pi$$



練習 4.5 次のような扇形の弧の長さと面積を求めよ．

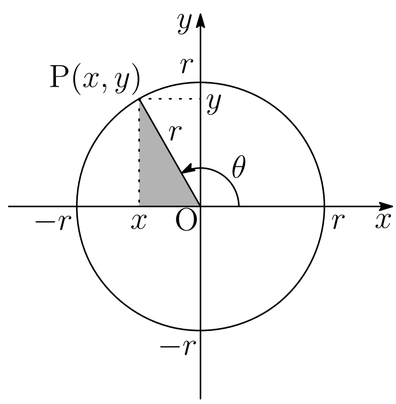
(1) 半径 4，中心角 $\dfrac{\pi}{3}$

(2) 半径 6，中心角 $\dfrac{7}{6}\pi$

4.1.2 三角関数

三角比 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ における θ を一般角 θ に拡張してみよう.

A 》三角関数



座標平面上で，右の図のように x 軸の正の部分に始線をとり，角 θ の動径と原点を中心とする半径 r の円との交点 P の座標を $(x,\ y)$ とする.

このとき，$\dfrac{y}{r}$，$\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{y}{x}$ の値はどれも円の半径 r には関係なく，θ だけで決まる．そこで，三角比と同様に，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を

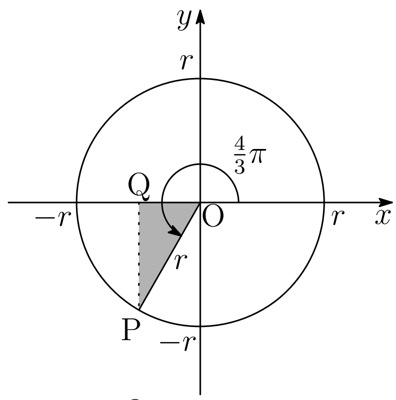
$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}}$$

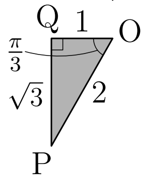
と定め，それぞれ一般角 θ の**正弦**，**余弦**，**正接**という.

これらはどれも θ の関数であり，まとめて θ の**三角関数**という.

注意 点 P が y 軸上にくるような角 θ に対しては，$\tan\theta$ は定義されない.

例 4.3 $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}\pi}$ の正弦，余弦，正接





右の図で，円の半径が $r = 2$ のとき，

点 P の座標は $(-1, -\sqrt{3})$ である.

そこで，$x = -1$，$y = -\sqrt{3}$ として

$$\sin\frac{4}{3}\pi = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4}{3}\pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

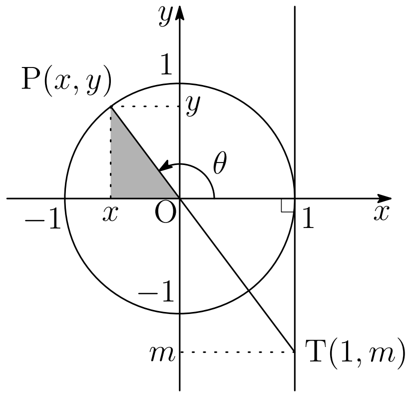
$$\tan\frac{4}{3}\pi = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

練習 4.6 次の θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ．

(1) $\theta = \dfrac{5}{4}\pi$

(2) $\theta = \dfrac{11}{6}\pi$

(3) $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$



原点を中心とする半径1の円を**単位円**という.

角θの動径と単位円の交点をP$(x,\ y)$とすると，$\sin\theta$，$\cos\theta$は次のようになる.

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y, \quad \cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

また，右の図のように，直線OPと直線$x = 1$の交点をT$(1,\ m)$とすると

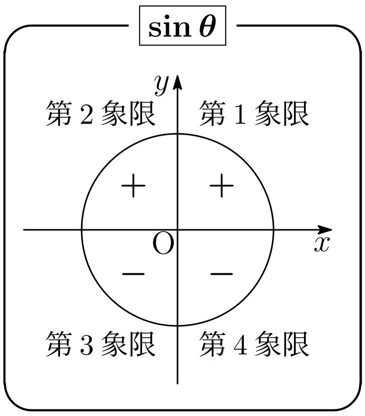
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{m}{1} = m$$

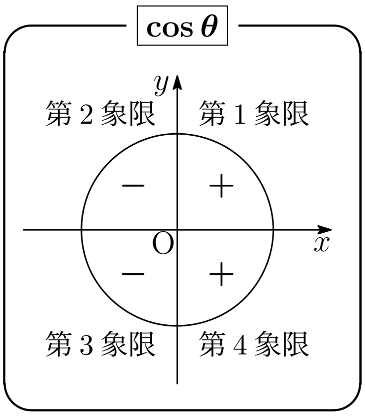
である．点Pは単位円の周上にあり，そのとき点Tは直線$x = 1$上のすべての点を動く.

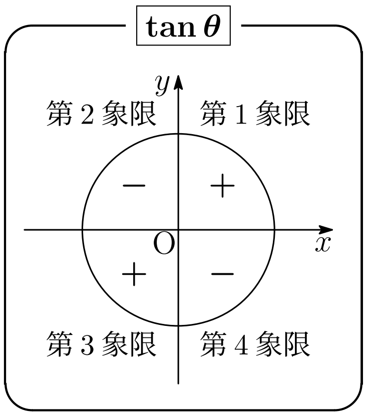
以上から，次のことが成り立つ.

$$\boldsymbol{-1 \leqq \sin\theta \leqq 1, \qquad -1 \leqq \cos\theta \leqq 1,} \qquad \boldsymbol{\tan\theta}\ \textbf{の値の範囲は実数全体}$$

三角関数$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$の値の符号は，θの動径がどの象限にあるかで決まる．これを図で示すと，次のようになる.







練習 4.7　次のようなθの動径は，第何象限にあるか.

(1)　$\sin\theta < 0$ かつ $\cos\theta > 0$　　　　(2)　$\cos\theta < 0$ かつ $\tan\theta > 0$

B》三角関数の相互関係

三角比と同様に，三角関数についても次の相互関係が成り立つ．

三角関数の相互関係

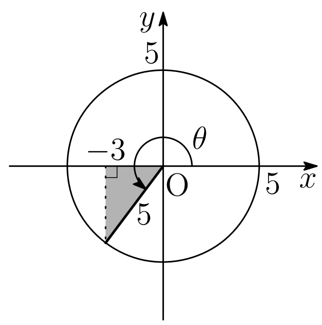
1　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　**3**　$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

2　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

三角関数 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のどれか 1 つの値が与えられたとき，これらの公式を用いて，他の三角関数の値を求めてみよう．

例題 4.1 θ の動径が第 3 象限にあり，$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．

解答　$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$



θ の動径が第 3 象限にあるとき，$\sin\theta < 0$ であるから

$$\sin\theta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\dfrac{4}{5}\right) \div \left(-\dfrac{3}{5}\right)$

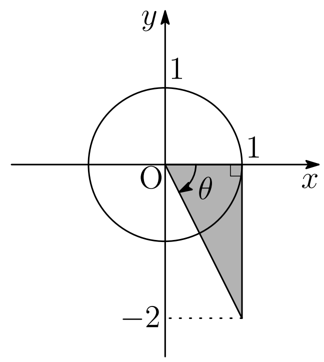
$$= \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

補足 θ の動径が第 3 象限にあるとき，θ を**第 3 象限の角**ということがある．

練習 4.8 θ の動径が第 4 象限にあり，$\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．

例題 4.2 θ の動径が第 4 象限にあり，$\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ．

解答　$\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1}{1+(-2)^2} = \dfrac{1}{5}$



θ の動径が第 4 象限にあるとき，

$\cos\theta > 0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

また　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = (-2) \times \dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

練習 4.9 θ の動径が第 3 象限にあり，$\tan\theta = 3$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ．

C 》三角関数を含む等式

例題 4.3 次の等式を証明せよ．

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

証明

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} && \leftarrow \tfrac{1}{\tan\theta} = \tfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} && \leftarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta=1
\end{aligned}$$

よって　$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$　**証終**

練習 4.10 次の等式を証明せよ.

(1) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2$

(2) $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$

応用例題 4.1 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ.

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$

考え方》 (1) $\sin\theta\cos\theta$ は $(\sin\theta + \cos\theta)^2$ の展開式に現れる.
(2) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ が利用できる.

解答 (1) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4} \qquad \longleftarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

よって　$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$$

したがって　$$\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$$

(2)
$$\begin{aligned}\sin^3\theta + \cos^3\theta &= (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\\ &= (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)\\ &= \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{11}{8} = \frac{11}{16}\end{aligned}$$

補足 応用例題 4.1(2) では，等式 $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ を利用する方法もある.

練習 4.11 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$

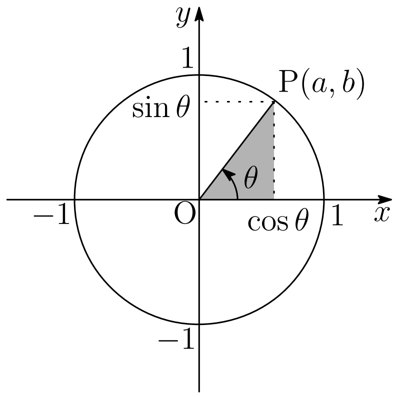
練習 4.12 $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

4.1.3　三角関数のグラフ

三角関数のグラフについて調べてみよう．

A 》三角関数のグラフ



角 θ の動径と単位円の交点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，

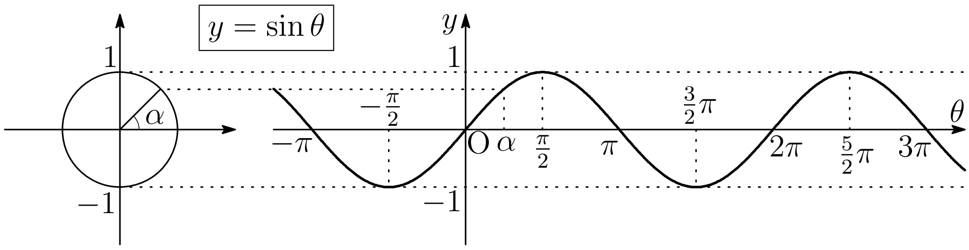
$$\sin\theta = b,\quad \cos\theta = a$$

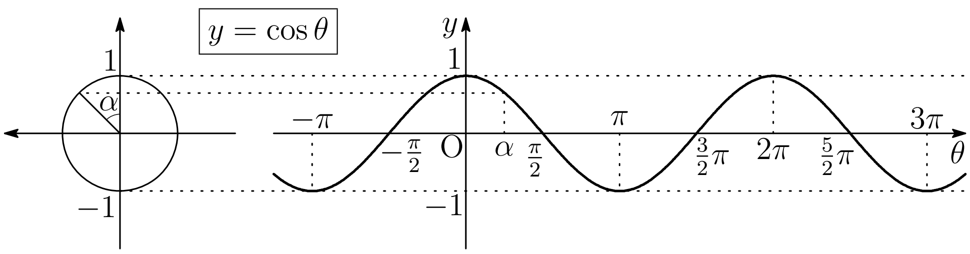
である．よって，右の図で次のことがいえる．

［1］$\sin\theta$ の値は，P の y 座標に等しい．

［2］$\cos\theta$ の値は，P の x 座標に等しい．

［1］,［2］を使って，関数 $y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフをかくと，次のようになる[1]．





動径は 1 回転してもとの位置にもどるから，次のことが成り立つ．

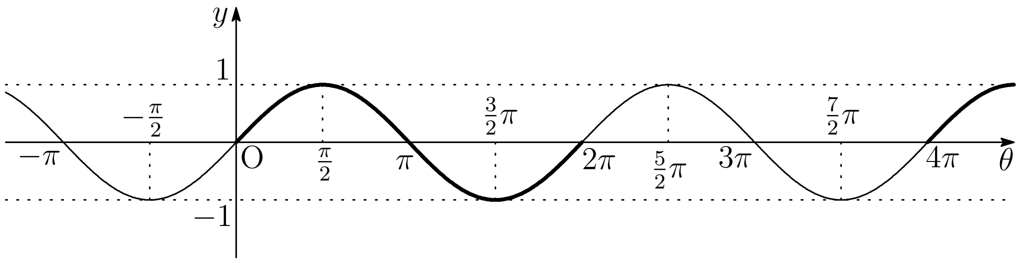
$$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta,\qquad \cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$$

この性質から，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は 2π の**周期**をもつ[2] という．

[1] θ の単位はラジアンであり，θ 軸上の目盛りはラジアンでとっている．
$y=\sin\theta$ のグラフの形の曲線を**正弦曲線**または**サインカーブ**という．グラフのかき方から，
$y=\cos\theta$ のグラフも正弦曲線であることがわかる．

[2] 一般に，関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して，常に $f(x+p)=f(x)$ を満たすとき，関数 $f(x)$ は p を周期とする**周期関数**であるという．
このとき，$2p$，$3p$ や $-p$ なども周期であるが，周期関数の周期といえば，ふつう正の周期のうち最小のものをさす．

グラフについていうと，$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフは，いずれも 2π ごとに同じ形を繰り返す.



さらに，次のことがいえる.

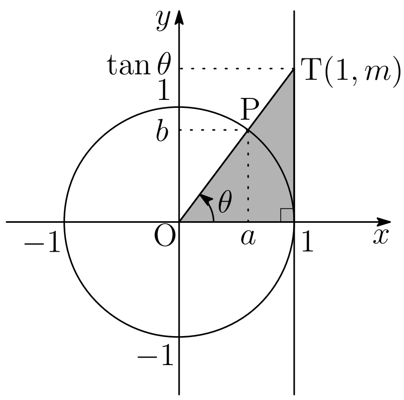
> **$y=\sin\theta$ のグラフは，原点に関して対称である.**
> **$y=\cos\theta$ のグラフは，y 軸に関して対称である.**

$y=\tan\theta$ のグラフについても調べよう.

右の図のように，角 θ の動径と単位円の交点を $\mathrm{P}(a,\ b)$，直線 OP と直線 $x=1$ の交点を $\mathrm{T}(1,\ m)$ とすると，

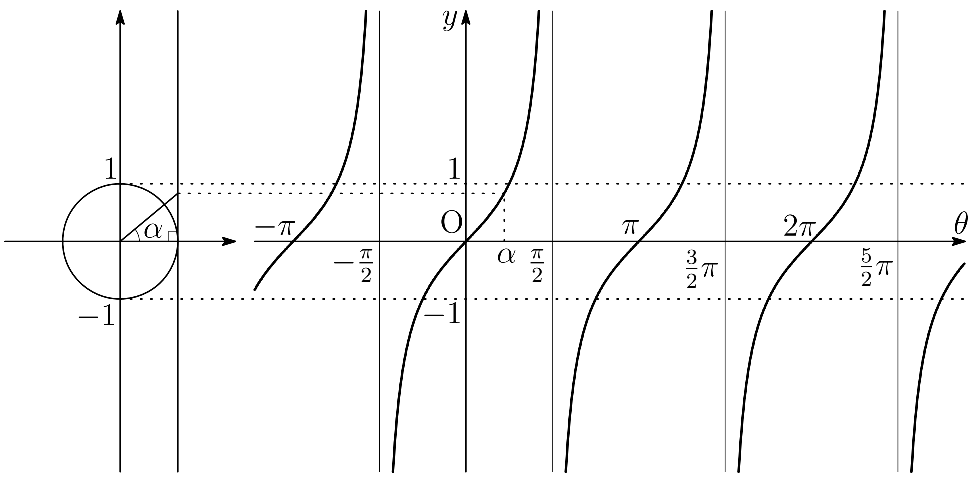
$$\tan\theta=m$$

である．よって，次のことがいえる.



> ［3］　$\tan\theta$ の値は，T の y 座標に等しい.

［3］を使って，関数 $y=\tan\theta$ のグラフをかくと，次のようになる.



$\tan\theta$ は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ では定義されないが，$y=\tan\theta$ のグラフは θ が $\dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づくと，直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づく.

グラフが限りなく近づく直線を，そのグラフの**漸近線**（ぜんきんせん）という.

関数 $y=\tan\theta$ には，次のような性質がある．

> **1　グラフは原点に関して対称で，π ごとに同じ形を繰り返す．**
> **また，直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ などを漸近線としてもつ．**
>
> **2　$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ が成り立つ．すなわち，$\tan\theta$ は π の周期をもつ．**

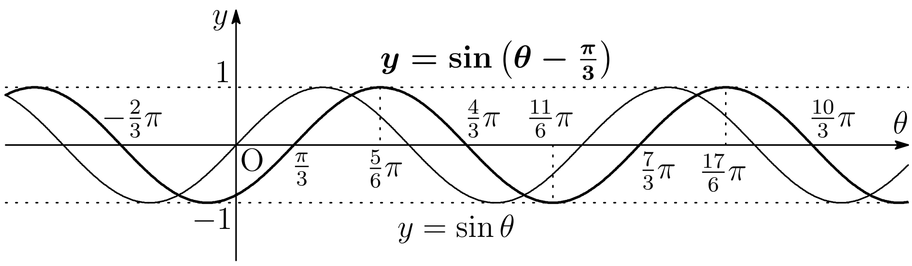
三角関数の周期，値域，グラフの対称性についてまとめると，次のようになる．

	$y=\sin\theta$	$y=\cos\theta$	$y=\tan\theta$
周期	2π	2π	π
値域	$-1\leqq y\leqq 1$	$-1\leqq y\leqq 1$	実数全体
グラフの対称性	原点に関して対称	y 軸に関して対称	原点に関して対称

B》いろいろな三角関数のグラフ

例 4.4　$y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフ

このグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので，次のようになる．周期は 2π である．



練習 4.13　次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

(1)　$y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

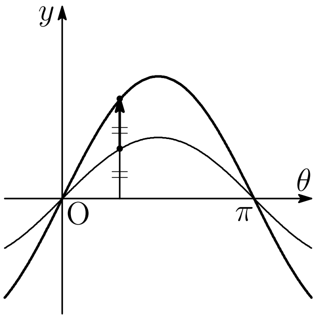
(2) $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

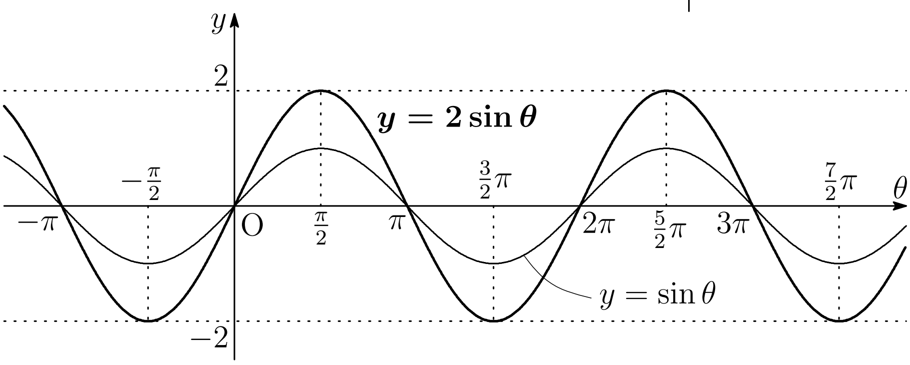
(3) $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

(4) $y = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

例 4.5 $y = 2\sin\theta$ のグラフ

このグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向へ 2 倍に拡大したもので，次のようになる．周期は 2π である．





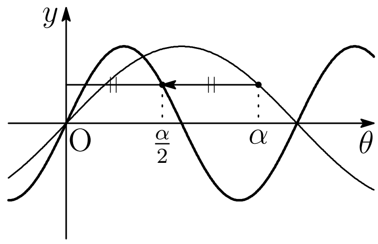
練習 4.14 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

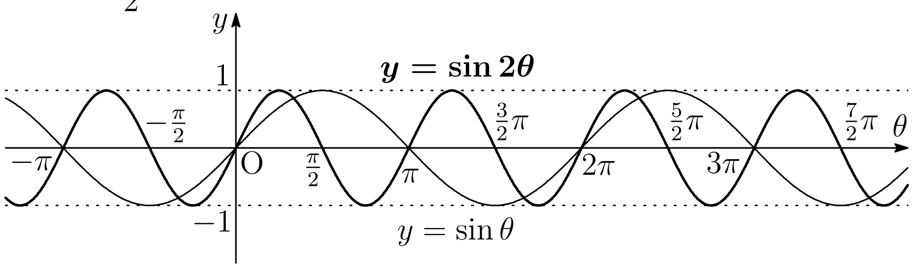
(1) $y = 2\cos\theta$

(2) $y = \dfrac{1}{2}\sin\theta$

例 4.6 $y = \sin 2\theta$ のグラフ

$\theta = \frac{\alpha}{2}$ における $\sin 2\theta$ の値と，$\theta = \alpha$ における $\sin\theta$ の値が等しい．したがって，このグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したもので，次のようになる．周期は $2\pi \times \dfrac{1}{2} = \pi$ である．





一般に，次のことがいえる．

> k を正の定数とするとき
> $\sin k\theta$，$\cos k\theta$ の周期はともに $\dfrac{2\pi}{k}$ である．
> $\tan k\theta$ の周期は $\dfrac{\pi}{k}$ である．

$\longleftarrow$ $\sin(k\theta+2\pi)=\sin k\theta$
から
$\sin k\left(\theta+\frac{2\pi}{k}\right)=\sin k\theta$

練習 4.15 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

(1) $y = \cos 2\theta$

(2) $y = \sin\dfrac{\theta}{2}$

(3) $y = \tan 2\theta$

4.1.4　三角関数の性質

三角関数で成り立ついろいろな等式について調べよう.

A 》三角関数で成り立つ等式

三角関数の周期性は，次の等式で表される.

$$\mathbf{1}\begin{cases}\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta\\ \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta \quad \text{ただし，}n\text{は整数}\\ \tan(\theta+n\pi)=\tan\theta\end{cases}$$

←$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$ も成り立つ.

例 4.7　(1)　$\sin\dfrac{13}{3}\pi=\sin\dfrac{7}{3}\pi=\sin\dfrac{\pi}{3}$　　← $\frac{13}{3}\pi=\frac{\pi}{3}+4\pi$

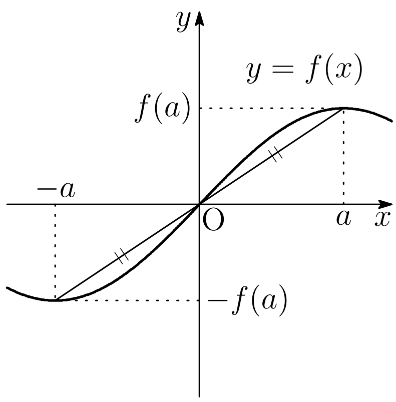
(2)　$\tan\dfrac{7}{3}\pi=\tan\dfrac{4}{3}\pi=\tan\dfrac{\pi}{3}$　　← $\frac{7}{3}\pi=\frac{\pi}{3}+2\pi$

一般に，関数 $y=f(x)$ について，次のことが成り立つ.

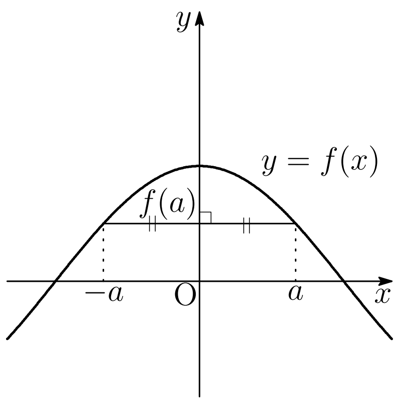
[1] 常に $f(-x)=-f(x)$ である　$\Longleftrightarrow$　グラフは原点に関して対称

[2] 常に $f(-x)=f(x)$ である　$\Longleftrightarrow$　グラフは y 軸に関して対称

[1]



[2]



三角関数のグラフの対称性は，次の等式で表される.

$$\mathbf{2}\begin{cases}\sin(-\theta)=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)=\cos\theta\\ \tan(-\theta)=-\tan\theta\end{cases}$$

← $y=\sin\theta$　のグラフは原点に関して対称
← $y=\cos\theta$　のグラフは y 軸に関して対称
← $y=\tan\theta$　のグラフは原点に関して対称

例 4.8　(1)　$\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\cos\left(-\dfrac{13}{3}\pi\right) = \cos\dfrac{13}{3}\pi = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}+4\pi\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

練習 4.16 次の値を求めよ.

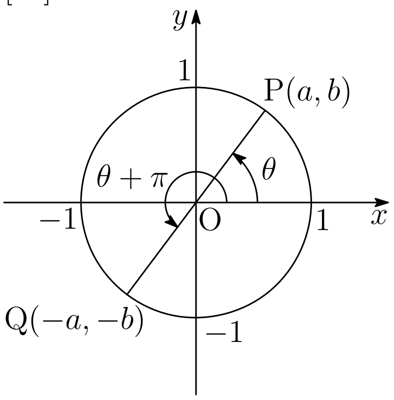
(1) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2) $\cos\left(-\dfrac{13}{6}\pi\right)$　　(3) $\tan\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)$

下の図［1］と［2］からは，次の等式が成り立つことがわかる.

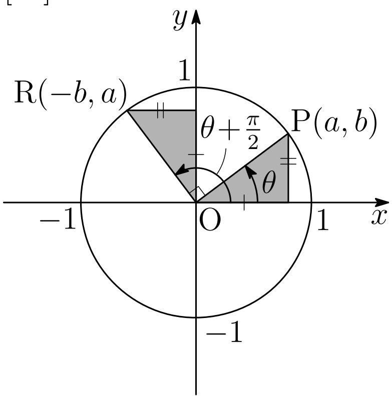
$$\mathbf{3}\begin{cases}\boldsymbol{\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta}\\ \boldsymbol{\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta}\\ \boldsymbol{\tan(\theta+\pi) = \tan\theta}\end{cases}$$

$$\mathbf{4}\begin{cases}\boldsymbol{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta}\\ \boldsymbol{\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta}\\ \boldsymbol{\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\tan\theta}}\end{cases}$$

[1]



[2]



$a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$ から

$\sin(\theta+\pi) = -b = -\sin\theta$

$\cos(\theta+\pi) = -a = -\cos\theta$

など

$a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$ から

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = a = \cos\theta$

$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -b = -\sin\theta$

など

4.1.5　三角関数を含む方程式・不等式

三角関数を含む方程式・不等式を，単位円や関数の周期性，グラフなどを利用して解いてみよう．

A 》三角関数を含む方程式

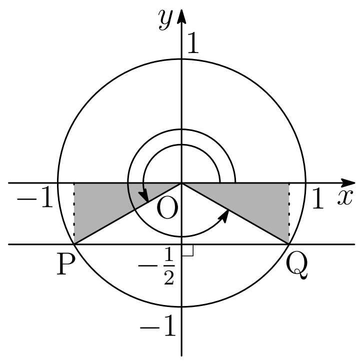
例 4.9　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $2\sin\theta + 1 = 0$ を解く．

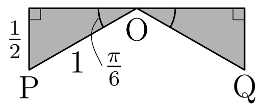
方程式を変形すると

$$\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

求める角 θ の動径と単位円の交点の y 座標は $-\frac{1}{2}$ である．
よって，右の図の動径 OP，OQ の表す角が求める θ である．
$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$





練習 4.17　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．

(1)　$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　　(2)　$2\cos\theta + 1 = 0$　　　(3)　$\sin\theta + 1 = 0$

例 4.9 で，θ の範囲を制限しなければ，150 ページの性質 **1** により，解は次のようになる．

$$\theta = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi,\ \theta = \frac{11}{6}\pi + 2n\pi \qquad (n\text{ は整数})$$

練習 4.18 次の方程式を解け．

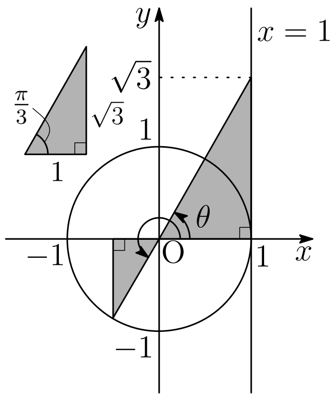
(1) $2\sin\theta = -\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{2}\cos\theta = -1$

例 4.10 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\tan\theta = \sqrt{3}$ を解く．

求める角 θ の動径またはその延長と直線 $x = 1$ との交点の y 座標は $\sqrt{3}$ である．

よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$$



例 4.10 で θ の範囲に制限がないとき，150 ページの性質 **1** により，解は次のようになる．

$$\theta = \frac{\pi}{3} + n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

練習 4.19 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．また，θ の範囲に制限がないときの解を求めよ．

(1) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

応用例題 4.2 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $5\sin\theta - 2\cos^2\theta + 4 = 0$ を解け．

考え方》 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を利用すると，$\sin\theta$ の 2 次方程式が得られる．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ に注意して解く．

解答 方程式を変形すると　$5\sin\theta - 2(1 - \sin^2\theta) + 4 = 0$

$2\sin^2\theta + 5\sin\theta + 2 = 0$

因数分解すると　$(2\sin\theta + 1)(\sin\theta + 2) = 0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であるから

$2\sin\theta + 1 = 0$　すなわち　$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$　　$\longleftarrow \sin\theta+2\neq 0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で解くと　$\theta = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$　　$\longleftarrow$ 例 4.9 参照

練習 4.20 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．

(1) $2\cos^2\theta + 5\sin\theta - 4 = 0$　　(2) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

B》三角関数を含む不等式

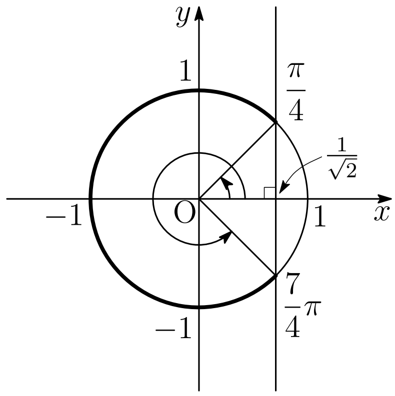
例題 4.4 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解け.

解答 $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ は

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$$

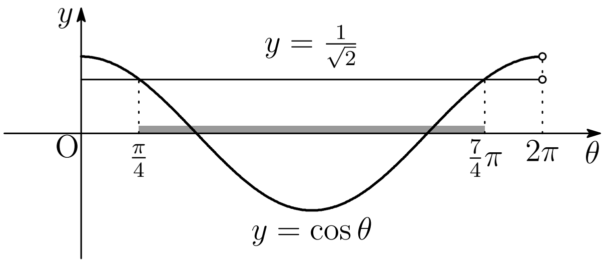
よって，不等式の解は，右の図から

$$\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{7}{4}\pi$$



補足 $\cos\theta$ の値は，θ の動径と単位円の交点の x 座標に等しいから，その x 座標が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 以下となる θ の範囲を求めればよい.

例題 4.4 の不等式を解くのに，右の図のように，$y = \cos\theta$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の位置関係を利用してもよい.



なお，$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の解は

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi$$

練習 4.21 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け.

(1) $\sin\theta > \dfrac{1}{2}$　　(2) $2\cos\theta \geqq -\sqrt{3}$

4.1.6 補充問題

1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け.

(1) $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ (2) $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

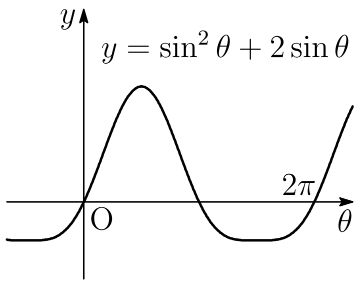
2 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け.

(1) $\tan\theta \geqq 1$ (2) $\tan\theta < \sqrt{3}$

3 関数 $y = \sin^2\theta + 2\sin\theta$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\sin\theta = x$ とおいて，y を
$y = a(x-p)^2 + q$ の形に表せ．

(2) y の最大値，最小値を求めよ．



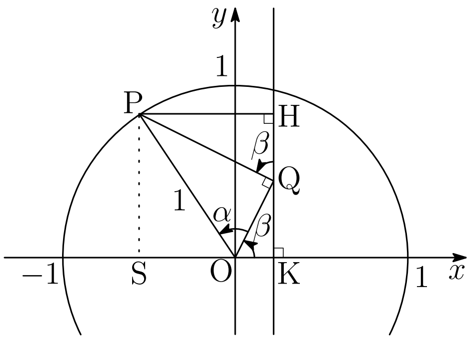
4.2　加法定理

4.2.1　三角関数の加法定理

2 つの角 α，β の正弦・余弦を用いて，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$ などを表してみよう．
また，α，β の正接を用いて，$\tan(\alpha+\beta)$ などを表してみよう．

A ≫ 正弦・余弦の加法定理

右の図において，点 P の y 座標は $\sin(\alpha+\beta)$ であるから



$$\sin(\alpha+\beta) = \mathrm{HK} = \mathrm{HQ} + \mathrm{QK}$$

となる．ここで

$$\mathrm{HQ} = \mathrm{PQ}\cos\beta = \sin\alpha\cos\beta$$
$$\mathrm{QK} = \mathrm{OQ}\sin\beta = \cos\alpha\sin\beta$$

よって，次の等式が得られる．

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots ①$$

同様に，点 P の x 座標 $\cos(\alpha+\beta)$ について考えると

$$\cos(\alpha+\beta) = -\mathrm{OS} = \mathrm{OK} - \mathrm{SK} = \mathrm{OK} - \mathrm{PH}$$
$$\mathrm{OK} = \mathrm{OQ}\cos\beta = \cos\alpha\cos\beta$$
$$\mathrm{PH} = \mathrm{PQ}\sin\beta = \sin\alpha\sin\beta$$

であるから，次の等式が得られる．

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \cdots ②$$

上で得られた等式 ①，② は，一般角 α，β に対しても成り立つ．

練習 4.22 上の ①，② で，β を $-\beta$ におき換えることにより，次の等式を導け．

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

一般に，正弦・余弦について，次の**加法定理**が成り立つ．

正弦・余弦の加法定理

1 $\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

2 $\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$

3 $\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

4 $\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$

上の加法定理を使って，$75°$，$15°$ の正弦・余弦を求めてみよう．

例 4.11 (1)
$$\begin{aligned}\sin 75° &= \sin(45°+30°)\\ &= \sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\sin 15° &= \sin(45°-30°)\\ &= \sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

練習 4.23 加法定理を用いて，$\cos 75°$ の値を求めよ．

練習 4.24 $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ であることを用いて，$\cos\frac{\pi}{12}$ の値を求めよ．

例題 4.5 α の動径が第3象限，β の動径が第4象限にあり，$\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta = \dfrac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $\sin(\alpha+\beta)$　　(2) $\cos(\alpha-\beta)$

解答 α の動径が第3象限にあるから　$\cos\alpha < 0$

β の動径が第4象限にあるから　$\sin\beta < 0$

よって

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

(1)
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ &= \left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{4}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right) = 0\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{7}{25}\end{aligned}$$

練習 4.25 α の動径が第2象限，β の動径が第1象限にあり，$\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$，$\cos\beta = \dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $\sin(\alpha+\beta)$　　(2) $\sin(\alpha-\beta)$

(3) $\cos(\alpha+\beta)$　　(4) $\cos(\alpha-\beta)$

B 》 正接の加法定理

正弦・余弦の加法定理から，正接の加法定理が得られる．

正接の加法定理

5 $$\boldsymbol{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$$

6 $$\boldsymbol{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$

証明 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ であるから

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

右辺の分母と分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割って変形すると

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

公式 **5** で β を $-\beta$ におきかえると，公式 **6** が得られる． **証終**

例 4.12 $$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

練習 4.26 加法定理を用いて，$\tan 105^\circ$ の値を求めよ．

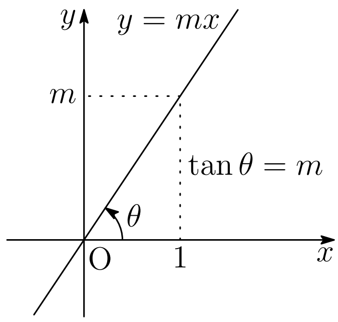
練習 4.27 $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}$ であることを用いて，$\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ．

C》2 直線のなす角

右の図のように，x 軸の正の部分から直線 $y = mx$ まで測った角を θ とすると，

$$\tan\theta = m$$

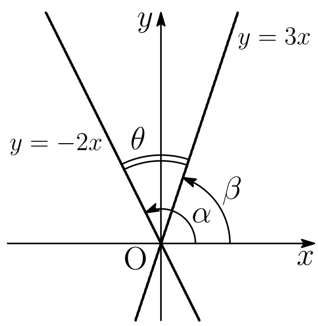
である．



このことと正接の加法定理を利用して，2 直線のなす角を求めてみよう．

例題 4.6 2 直線 $y = -2x$，$y = 3x$ の作る鋭角を求めよ．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

解答 x 軸の正の部分から 2 直線まで測った角を，それぞれ α，β とすると，右の図より $\theta = \alpha - \beta$ である．



$$\tan\alpha = -2,\ \tan\beta = 3$$

であるから

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \tan(\alpha - \beta)\\ &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}\\ &= \frac{-2-3}{1+(-2)\cdot 3} = 1\end{aligned}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\qquad \theta = \dfrac{\pi}{4}$

練習 4.28 2 直線 $y = 2x$，$y = \dfrac{1}{3}x$ のなす角 θ を求めよ．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

4.2.2 加法定理の応用

正弦・余弦の加法定理を使って，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ から $\sin 2\alpha$ や $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ などを求める公式を導こう.

A 》 2 倍角の公式，半角の公式

159 ページ正弦・余弦の加法定理の等式 **1**, **3** で $\beta=\alpha$ とすると，正弦・余弦について，次の **2 倍角の公式** が得られる.

正弦・余弦の 2 倍角の公式

1 $\quad \boldsymbol{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

2 $\quad \boldsymbol{\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}}$

←$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$
$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$
を代入している.

練習 4.29 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ で $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ.

(1) $\cos\alpha$ (2) $\sin 2\alpha$ (3) $\cos 2\alpha$

例題 4.7 等式 $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$ が成り立つことを証明せよ.

証明 2 倍角の公式により

$$\text{左辺} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+(2\cos^2\alpha-1)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

よって $\quad \dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$ **証終**

練習 4.30 次の等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$

(2) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$

2倍角の公式 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ において，α を $\dfrac{\alpha}{2}$ に置き換えると，次の等式が得られる．

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2},\qquad \cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$$

これより，正弦・余弦について，次の**半角の公式**が得られる．

正弦・余弦の半角の公式

$$\boldsymbol{\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

例 4.13 半角の公式を使って，$\boldsymbol{\cos\dfrac{\pi}{8}}$ の値を求める．

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{8}>0 \text{ より}\qquad \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

練習 4.31 半角の公式を使って，次の値を求めよ．

(1) $\sin\dfrac{\pi}{8}$　　(2) $\sin\dfrac{3}{8}\pi$　　(3) $\cos\dfrac{3}{8}\pi$

正接の 2 倍角，半角については，次の公式が成り立つ．

正接の 2 倍角，半角の公式

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}, \qquad \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

練習 4.32 上の公式が成り立つことを確かめよ．また，次の値を求めよ．

(1) $\tan\alpha = -3$ のとき，$\tan 2\alpha$ の値

(2) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で，$\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$ の値

応用例題 4.3 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け.

$$\cos 2\theta + \cos\theta + 1 = 0$$

考え方》 $\cos\theta$ があるから，2 倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を使って，$\cos\theta$ の 2 次方程式を導く.

解答 左辺を変形すると $(2\cos^2\theta - 1) + \cos\theta + 1 = 0$

整理すると $\cos\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

よって $\cos\theta = 0$ または $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき， $\cos\theta = 0$ から $\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ から $\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

(答) $\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

練習 4.33 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け.

(1) $\cos 2\theta + \sin\theta = 1$

(2) $\sin 2\theta + \cos\theta = 0$

B》$\boldsymbol{a\sin\theta+b\cos\theta}$ の変形

たとえば，次の等式が成り立つ．

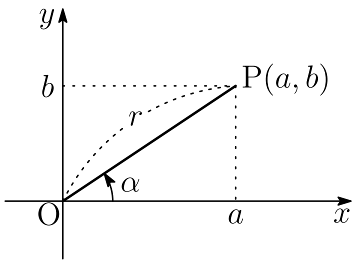
$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

証明　
$$\begin{aligned}右辺&=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)\\&=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=左辺\end{aligned}$$

証終

一般に，$a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形する方法を考えてみよう．

右の図のように，座標平面上に座標が $(a,\ b)$ である点Pをとる．x 軸の正の部分から線分OPまで測った角を α とし，$\mathrm{OP}=r$ とすると



$$a=r\cos\alpha,\quad b=r\sin\alpha$$

よって
$$\begin{aligned}a\sin\theta+b\cos\theta&=r\cos\alpha\sin\theta+r\sin\alpha\cos\theta\\&=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)\\&=r\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

ここで，$r=\sqrt{a^2+b^2}$ であるから，次のことが成り立つ．

$\boldsymbol{a\sin\theta+b\cos\theta}$ の変形

$$\boldsymbol{a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)}$$

ただし　$\boldsymbol{\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}$，$\boldsymbol{\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

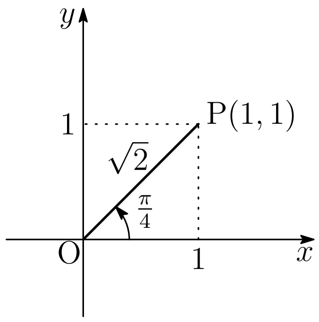
注意 $a\sin\theta+b\cos\theta$ をこのように変形することを，三角関数を**合成**するという．

$a\sin\theta+b\cos\theta$ を合成するには，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとって考えるとよい．

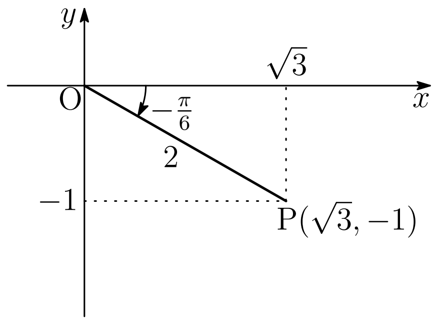
例 4.14　(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2)　$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(1)



(2)



練習 4.34 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ．ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする．

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

(2)　$\sin\theta-\cos\theta$

例題 4.8 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

$$y=\sin x+\cos x$$

解答 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから　←例 4.14(1) 参照

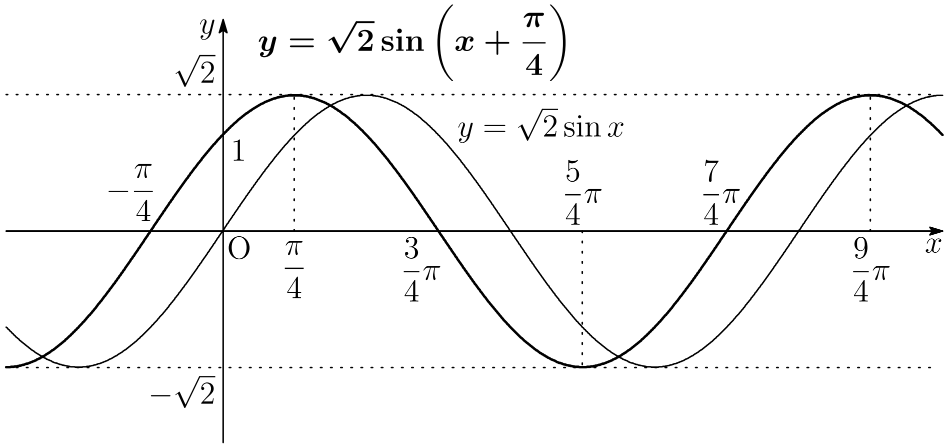
$$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ であるから

$$-\sqrt{2}\leqq y\leqq\sqrt{2}$$

したがって　　y の最大値は $\sqrt{2}$，最小値は $-\sqrt{2}$

関数 $y = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフは，次のようになる．



上のグラフは，$y = \sqrt{2}\sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ平行移動したものである．

練習 4.35 次の関数の最大値，最小値を求めよ．また，そのグラフをかけ．

$$y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$$

応用例題 4.4 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け.

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$$

考え方》 左辺の三角関数を合成して，$r\sin(x+\alpha)$ の形に変形する.
次に，$x+\alpha$ の範囲に注意して，$\sin(x+\alpha)$ の値から $x+\alpha$ を求める.

解答 左辺の三角関数を合成すると

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$ ← 例 4.14(2) 参照

よって $$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \cdots ①$$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき

$$-\frac{\pi}{6} \leqq x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$$

であるから，この範囲で ① を解くと

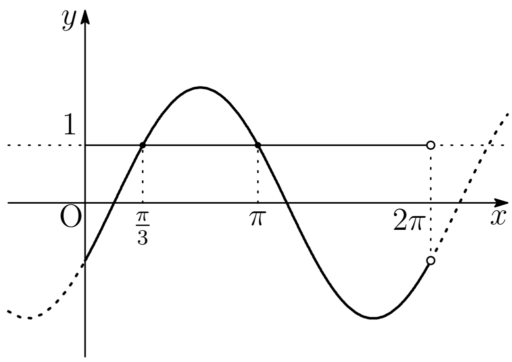
$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad \text{または} \quad x - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

したがって $$x = \frac{\pi}{3},\ \pi$$

応用例題 4.4 で求めた方程式の解は，$0 \leqq x < 2\pi$ における関数

$$y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$$
$$y = 1$$

のグラフの交点の x 座標である.



練習 4.36 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け.

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$$

4.2.3 補充問題

4 次の等式が成り立つことを証明せよ.

(1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(2) $\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$

5 2 直線 $y = 3x$，$y = \dfrac{1}{2}x + 1$ のなす角 θ を求めよ．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

▶ 原点を通る 2 直線 $y = 3x$，$y = \dfrac{1}{2}x$ のなす角として求める．

6 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け．

(1) $\sin 2\theta \geqq \sin\theta$

(2) $\cos 2\theta < \sin\theta + 1$

7 関数 $y = \sin x + 2\cos x$ について，最大値，最小値を求めよ．

4.3 章末問題

4.3.1 章末問題 A

1 次の値を求めよ．

(1) $\sin \dfrac{16}{3}\pi$ (2) $\cos \dfrac{7}{2}\pi$ (3) $\tan\left(-\dfrac{11}{6}\pi\right)$

2 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

(1) $y = \cos\dfrac{\theta}{2}$

(2) $y = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$

3 $\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{1}{4}$ のとき，次の式の値を求めよ．ただし，θ は第 4 象限の角であるとする．

(1) $\sin\theta - \cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

4 次の等式を証明せよ.

(1) $\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin^2\theta}$

(2) $\dfrac{1}{\tan\theta}-\tan\theta=\dfrac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

5 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．

(1) $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$

(2) $\cos 2x = \cos x$

6 次の等式が成り立つことを示せ．ただし，加法定理を用いてよい．

(1) $\begin{cases} \sin(\pi - \theta) = \sin\theta \\ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases}$

7 関数 $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ について，次のものを求めよ．

(1) 最大値と最小値　　(2) $y = 0$ となる x の値

(3) $y \leqq 0$ となる x の値の範囲

4.3.2　章末問題 B

8 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \cos^2\theta + 2\sin\theta$ が最小となる θ と，y の最小値を求めよ．

9 次の値を求めよ．

(1) $\sin\alpha + \sin\beta = \dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha + \cos\beta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos(\alpha - \beta)$ の値

(2) $\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 4$，$\tan\gamma = 13$ のとき，$\tan(\alpha + \beta + \gamma)$ の値

10 次の等式を証明せよ．

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$$

11 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

(1) $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

(2) $y = \cos^2 x$

12 次の問いに答えよ．

(1) 等式 $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x \cos x$ が成り立つことを示せ．

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin 3x + \sin x = 0$ を解け．

13 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

$$y = \sin x \cos x - \sin^2 x + \frac{1}{2} \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

ヒント

9　(1) $\cos\alpha\cos\beta$，$\sin\alpha\sin\beta$ の値が必要．　$\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}$

11　(2) 半角の公式を利用する．

12　(1) $\sin 3x = \sin(2x+x)$

13　2 倍角の公式，半角の公式と三角関数の合成を用いる．

発展　和と積の公式

三角関数において，正弦・余弦の積を和や差に変形する次の公式が成り立つ．これらは，右辺を計算すれば左辺を導くことができる．

1　$\boldsymbol{\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}}$

2　$\boldsymbol{\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}}$

3　$\boldsymbol{\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}}$

4　$\boldsymbol{\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}}$

上の公式 **1**〜**4** において，

$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおくと　　$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$，$\beta=\dfrac{A-B}{2}$

となるから，正弦・余弦の和や差を積に変形する次の公式が得られる．

5　$\boldsymbol{\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$

6　$\boldsymbol{\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$

7　$\boldsymbol{\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$

8　$\boldsymbol{\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$

例 1　(1)　$\sin 3\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\{\sin(3\theta+\theta)+\sin(3\theta-\theta)\}$

$$=\frac{1}{2}(\sin 4\theta+\sin 2\theta)$$

(2)　$\sin 5\theta+\sin\theta=2\sin\dfrac{5\theta+\theta}{2}\cos\dfrac{5\theta-\theta}{2}$

$$=2\sin 3\theta\cos 2\theta$$

第 5 章　指数関数と対数関数

5.1　指数関数

5.1.1　指数の拡張

a の累乗 a^n については，指数 n が正の整数の場合を学んでいる．ここでは，指数の範囲を整数，有理数，実数と順に拡張しよう．

$$\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{a\text{ が } n \text{ 個}} = a^{n\leftarrow(\text{指数})}$$

A》整数の指数

次の指数法則が成り立つことは，すでに知っている．

> m，n を正の整数とする．
>
> **1**　$\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$　　**2**　$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$　　**3**　$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$

さらに，この法則を満たしながら，a^n の指数 n の範囲を，正の整数から整数全体に拡張してみよう．

指数が 0 や負の整数の場合にも **1** が成り立つとすると，たとえば

$$3^2 \times \boldsymbol{3^0} = 3^{2+0} = 3^2, \quad 3^2 \times \boldsymbol{3^{-2}} = 3^{2+(-2)} = 3^0$$

となる．これから，3^0，3^{-2} について，次のことがいえる．

$$\boldsymbol{3^0} = \frac{3^2}{3^2} = 1, \qquad \boldsymbol{3^{-2}} = \frac{3^0}{3^2} = \boldsymbol{\frac{1}{3^2}}$$

そこで，指数が 0 や負の整数の場合の累乗を，次のように定義する．

a^0，a^{-n} の定義

> $a \neq 0$ で，n を正の整数とするとき
>
> $$\boldsymbol{a^0 = 1}, \qquad \boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \qquad \text{とくに} \quad \boldsymbol{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

例 5.1 $2^0 = 1$, $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000}$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{2^4} = 2^{-4}$

$34.5 \times 10^{-3} = 34.5 \times 0.001 = 0.0345$

$0.0123 = 1.23 \times 0.01 = 1.23 \times 10^{-2}$

練習 5.1 次の$\square$に適する数を求めよ．ただし，(1)，(2)，(4) は整数，(3) は小数とする．

(1) $4^{-2} = \dfrac{1}{\square}$　　(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = 2^{\square}$

(3) $23.1 \times 10^{-4} = \square$　　(4) $0.00074 = 7.4 \times 10^{\square}$

前ページの定義によると，さらに次のことがいえる．

$$3^5 \times 3^{-2} = 3^5 \times \frac{1}{3^2} = 3^3 = 3^{5+(-2)},$$

$$\frac{3^5}{3^{-2}} = 3^5 \div \frac{1}{3^2} = 3^5 \times 3^2 = 3^{5+2} = 3^{5-(-2)}$$

$$(3^5)^{-2} = \frac{1}{(3^5)^2} = \frac{1}{3^{5\times2}} = 3^{-(5\times2)} = 3^{5\times(-2)}$$

$$(3 \times 5)^{-2} = \frac{1}{(3\times5)^2} = \frac{1}{3^2 \times 5^2} = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{5^2} = 3^{-2} \times 5^{-2}$$

一般に，指数が整数の場合に，次の指数法則が成り立つ．

指数法則 (指数が整数)

$a \neq 0$，$b \neq 0$，m，n を整数とする．

1 $\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$　　**2** $\boldsymbol{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

3 $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$　　**4** $\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$

練習 5.2 次の$\square$に適する数を求めよ．

(1) $3^4 \times 3^{-2} = 3^{\square}$　　(2) $10^{-3} \div 10^2 = 10^{\square}$

(3) $(3^{-2})^4 = 3^{\square}$　　(4) $(2 \times 3^4)^{-2} = 2^{\square} \times 3^{\square}$

B》累乗根

n を正の整数とするとき，n 乗して a になる数を a の **n 乗根**という．すなわち，方程式 $x^n = a$ の解が a の n 乗根である．また，a の 2 乗根，3 乗根，4 乗根，$\cdots$ を総称して a の**累乗根**という．

例 5.2 (1) $2^3 = 8$ であるから，2 は 8 の 3 乗根である．

(2) $3^4 = (-3)^4 = 81$ であるから，3 と -3 は 81 の 4 乗根である．

練習 5.3 次の $\square$ に適する数を求めよ．

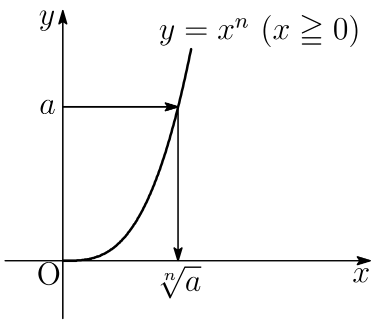
(1) $(-2)^3 = -8$ であるから，$\square$ は -8 の $\square$ 乗根である．

(2) $2^4 = (-2)^4 = 16$ であるから，2 と $\square$ は 16 の $\square$ 乗根である．

以下では，正の数 a の n 乗根のうち，正であるものについて考える．

関数 $y = x^n$ $(x \geqq 0)$ のグラフの概形は，右の図のようになる．グラフによると，正の数 a に対して，$x^n = a$ を満たす正の数 x がただ 1 つあることがわかる．

この正の数 x を $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ で表す．



注意 $\sqrt[2]{a}$ は，ふつう $\sqrt{a}$ と書く．

例 5.3 (1) $2^3 = 8$ であるから $\sqrt[3]{8} = 2$

(2) $3^4 = 81$ であるから $\sqrt[4]{81} = 3$

$a > 0$ のとき $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} > 0, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a \quad \sqrt[n]{a^n} = a}$

練習 5.4 次の $\square$ に適する数を求めよ．

(1) $\sqrt[3]{1} = \square$ (2) $\sqrt[3]{27} = \square$ (3) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}} = \square$

$\sqrt[n]{a}$ の定義から，累乗根について，次の性質が得られる．

累乗根の性質

$a>0$，$b>0$ で，m，n を整数とする．

1　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　　**2**　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

3　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　　　**4**　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

3の証明　$A=(\sqrt[n]{a})^m$ とおくと　$A^n=\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n=\{(\sqrt[n]{a})^n\}^m=a^m$

$A>0$ であるから，A は a^m の正の n 乗根である．

よって　$A=\sqrt[n]{a^m}$　すなわち　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　**証終**

1，**2**，**4** についても，同様にして証明することができる．

例 5.4　(1)　$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times 4}=\sqrt[3]{2^3}=2$

(2)　$\dfrac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{12}{3}}=\sqrt[3]{4}$

(3)　$(\sqrt[4]{5})^3=\sqrt[4]{5^3}=\sqrt[4]{125}$

(4)　$\sqrt[3]{\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\sqrt[2]{3}}=\sqrt[3\times 2]{3}=\sqrt[6]{3}$

練習 5.5　次の計算をせよ．

(1)　$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}$　　　(2)　$\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

(3)　$(\sqrt[3]{5})^2$　　　(4)　$\sqrt[4]{\sqrt[3]{12}}$

C》有理数の指数

$a>0$ のとき，たとえば $a^{\frac{1}{2}}$ の意味を定めてみよう．
仮に，$(a^{\frac{1}{2}})^2=a^{\frac{1}{2}\times 2}$ が成り立つと考えると，$(a^{\frac{1}{2}})^2=a$ となる．
これにより，$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$ と定めればよいことがわかる．
一般に，有理数の指数の意味を次のように定める．

有理数の指数

$a>0$ で，m，n を正の整数，r を正の有理数とするとき

$$\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a},\quad a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m},\quad a^{-r}=\frac{1}{a^r}}$$

例 5.5 $2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2},\quad 3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{9},\quad 5^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{5^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt[2]{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

練習 5.6 次の $\boxed{}$ に適する数を求めよ．

(1) $4^{\frac{1}{3}}=\sqrt[\square]{4}$　(2) $3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[\square]{3^{\square}}$　(3) $5^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[\square]{5}}$

(4) $\sqrt[5]{6}=6^{\square}$　(5) $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^{\square}}=2^{\square}$

指数が有理数の場合にも，次の指数法則が成り立つ．

指数法則 (指数が有理数)

$a>0$，$b>0$，r，s を有理数とする．

1 $\boldsymbol{a^r\times a^s=a^{r+s}}$　**2** $\boldsymbol{\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}}$

3 $\boldsymbol{(a^r)^s=a^{rs}}$　**4** $\boldsymbol{(ab)^r=a^rb^r}$

たとえば，**1**，**3** が成り立つことが，次のようにして確かめられる．

$$a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{4}{6}}\times a^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{a^4}\times\sqrt[6]{a^3}=\sqrt[6]{a^{4+3}}=a^{\frac{4+3}{6}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$$

$$(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[6]{a^2}=a^{\frac{2}{6}}=a^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}$$

例 5.6 (1) $5^{\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{4}{3}}=5^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}=5^2=25$

(2) $(4^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2^1=2$

例題 5.1 次の計算をせよ．

(1) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} \div 8^{\frac{1}{6}}$　　　　(2) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2}$

解答 (1) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} \div 8^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\times\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

(2) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 2^1 = 2$

練習 5.7 次の計算をせよ．

(1) $2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{5}{6}}$　　　　(2) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[12]{4}$

$a > 0$ のとき，a^r の指数 r は実数まで拡張することができる．たとえば，$\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ に対して，累乗の例

$$2^{1.4},\quad 2^{1.41},\quad 2^{1.414},\quad 2^{1.4142},\quad \cdots$$

は，次第に一定の値に近づく．その値を $2^{\sqrt{2}}$ と定めるのである．

前ページの指数法則は，r，s が実数のときにも成り立つ．

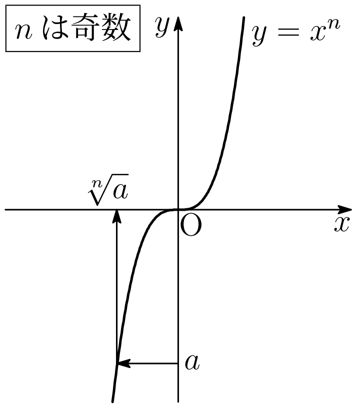
研究

負の数のn乗根

nが奇数のときに限り，負の数 a に対して，$x^n = a$ を満たす負の数 x がただ1つある．この数 x も $\sqrt[n]{a}$ で表す．たとえば

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$
$$\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$$

整数nが偶数のときは，常に $x^n \geqq 0$ であるから，負の数 a に対して，$x^n = a$ を満たす実数 x は存在しない．



5.1.2　指数関数

a を 1 と異なる正の定数とするとき，$y = a^x$ は x の関数である．この関数を，a を**底**とする x の**指数関数**という．指数関数の特徴を調べよう．

A》指数関数 $y = a^x$ のグラフ

指数関数 $y = 2^x$ のグラフを調べてみよう．
たとえば，x が -2，-0.5，1.5 のときの 2^x の値は，次のようになる．

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$2^{-0.5} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 0.71$$

$$2^{1.5} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \fallingdotseq 2.83$$

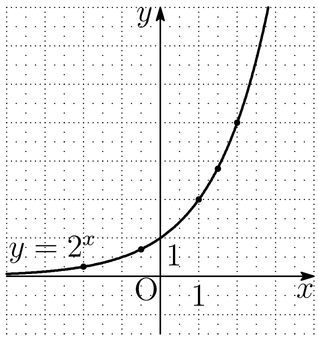
練習 5.8　上の計算にならって，下の表の空らんをうめよ．

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	0.25			0.71			2	2.83	4

座標平面上で，上の表の x，y を座標にもつ点 $(x,\ y)$ は，右の図のような曲線上にある．
この曲線が指数関数

$$y = 2^x$$

のグラフである．



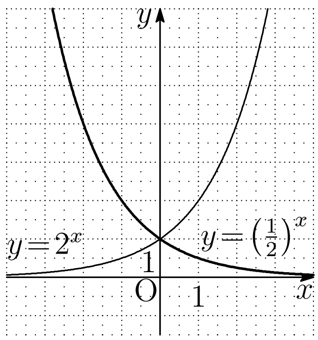
次に，指数関数 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフを調べてみよう．

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$$

であるから，指数関数

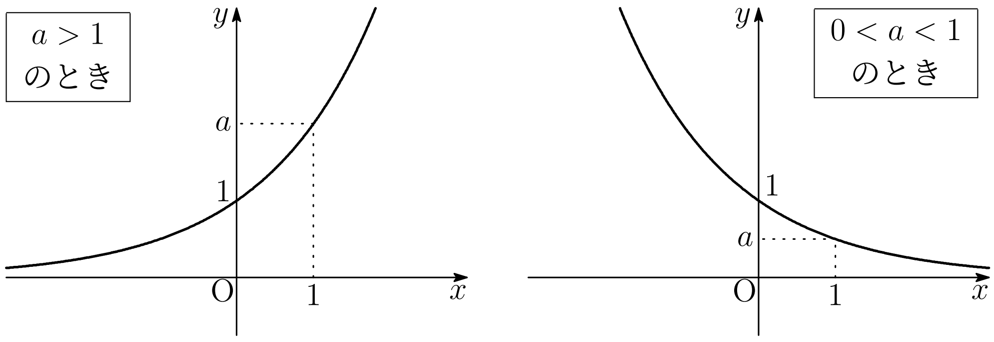
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

は，$y = 2^{-x}$ と同じである．
したがって，$y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $y = 2^x$ のグラフと y 軸に関して対称であり，右の図のようになる．



補足　一般に，$y = f(x)$ のグラフと $y = f(-x)$ のグラフは，y 軸に関して対称である．

一般に，指数関数 $y = a^x$ のグラフは，下のようになる．



どちらの場合も，x 軸が漸近線で，点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る．
曲線は，$a > 1$ のとき右上がり，$0 < a < 1$ のとき右下がりである．

練習 5.9 次の指数関数のグラフをかけ．

(1) $y = 3^x$　　　　(2) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

B》指数関数の特徴

指数関数 $y = a^x$ は，次のような特徴をもつ．

指数関数 $y = a^x$ の特徴

1 定義域は実数全体，値域は正の数全体である．

2 **$a > 1$ のとき**，x の値が増加すると y の値も増加する．
すなわち　　$\boldsymbol{r < s \iff a^r < a^s}$

3 **$0 < a < 1$ のとき**，x の値が増加すると y の値は減少する．
すなわち　　$\boldsymbol{r < s \iff a^r > a^s}$

注意 $a > 0$，$a \neq 1$ のとき，次が成り立つ．

$$r = s \iff a^r = a^s$$

一般に，x の値が増加すると y の値も増加する関数を**増加関数**といい，x の値が増加すると y の値は減少する関数を**減少関数**という．

例題 5.2 次の 3 つの数の大小を不等号を用いて表せ.

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[5]{8}$$

解答　$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$,　$\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}$,　$\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}}$

指数の大小を調べると　$\dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{5} < \dfrac{2}{3}$

底 2 が 1 より大きいから　$\longleftarrow$ 関数 $y = 2^x$ は増加関数

$$2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{3}{5}} < 2^{\frac{2}{3}}$$

すなわち　$\sqrt{2} < \sqrt[5]{8} < \sqrt[3]{4}$

練習 5.10 次の 3 つの数の大小を不等号を用いて表せ.

(1) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[5]{8}$

(2) 1, $(0.2)^3$, $(0.2)^{-1}$

C 》指数関数を含む方程式と不等式

指数関数を含む方程式，不等式を解いてみよう.

例題 5.3 次の方程式を解け.

(1) $8^x = 4$　　(2) $9^x = 3^{x+1}$

解答 (1) 方程式を変形すると　$2^{3x} = 2^2$　$\longleftarrow 8^x=(2^3)^x=2^{3x}$

$3x = 2$ より　$x = \dfrac{2}{3}$

(2) 方程式を変形すると　$3^{2x} = 3^{x+1}$　$\longleftarrow 9^x=(3^2)^x=3^{2x}$

$2x = x + 1$ より　$x = 1$

練習 5.11 次の方程式を解け.

(1) $4^x = 8$ (2) $8^x = \dfrac{1}{16}$ (3) $27^x = 3^{2-x}$

例題 5.4 次の不等式を解け.

(1) $2^x \geqq 8$ (2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1} < \left(\dfrac{1}{9}\right)^x$

解答 (1) 不等式を変形すると $2^x \geqq 2^3$

底 2 が 1 より大きいから $x \geqq 3$ ←関数 $y = 2^x$ は増加関数

(2) 不等式を変形すると $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}$

底 $\dfrac{1}{3}$ が 1 より小さいから $x + 1 > 2x$ ←関数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ は減少関数

これを解いて $x < 1$

練習 5.12 次の不等式を解け.

(1) $3^x < 81$ (2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geqq \dfrac{1}{32}$ (3) $2^{3x-4} > \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

5.1.3 補充問題

1 光の進む速さは，毎秒 3.0×10^8m である．すると，光は 1km を進むのに約 $3.3 \times 10^{\square}$ 秒かかる．□ に適する整数を求めよ．

2 次の計算をせよ．

(1) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{9}$

(2) $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$

(3) $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2})$

(4) $(8^{\frac{1}{3}} - 8^{-\frac{1}{3}})(8^{\frac{2}{3}} + 1 + 8^{-\frac{2}{3}})$

3 次の関数のグラフをかけ.

(1) $y = 2^{x-1}$

(2) $y = 2^x + 1$

4 x の方程式 $4^x - 3{\cdot}2^x - 4 = 0$ について，次の問いに答えよ.

(1) $2^x = t$ とおいて得られる t の方程式を作れ.

(2) 与えられた x の方程式を解け.

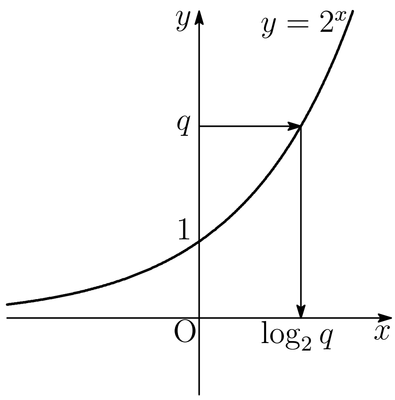
5.2 対数関数

5.2.1 対数とその性質

たとえば，指数関数 $y=2^x$ において y の値が与えられたときに，それに対応する x の値を求めることを考えてみよう．

A 》 対数

指数関数 $y=2^x$ は増加関数で，値域は正の数全体であるから，どんな正の数 q に対しても，$q=2^x$ となる実数 x がただ 1 つ定まる．この x を $\boldsymbol{\log_2 q}$ で表す．



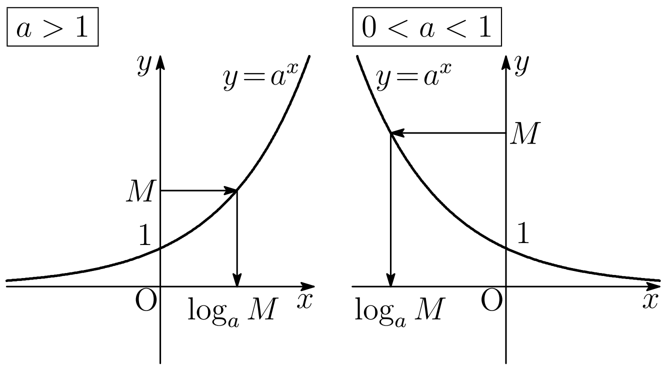
例 5.7 (1) $8=2^3$ から　$\log_2 8=3$

(2) $\dfrac{1}{2}=2^{-1}$ から　$\log_2 \dfrac{1}{2}=-1$

練習 5.13 次の $\boxed{}$ に適する数を求めよ．

(1) $\log_2 16=\boxed{}$　　(2) $\log_2 4=\boxed{}$　　(3) $\log_2 \dfrac{1}{8}=\boxed{}$

一般に，指数関数 $y=a^x$ を考えれば，どんな正の数 M に対しても，$M=a^p$ となる実数 p がただ 1 つ定まる．この p を $\boldsymbol{\log_a M}$ で表し，a を**底**とする M の**対数**という．また，$\log_a M$ における正の数 M を，この対数の**真数**という．



指数と対数[1]の関係は，次のようになる．

指数と対数

$a>0$，$a\neq 1$ で $M>0$ とするとき，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{M=a^p \iff \log_a M=p}$$

注意 以下 $\log_a M$ では，$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$ であるとする．

[1] log は「対数」を意味する英語 logarithm を略したものである．

例 5.8　(1)　$81 = 3^4$ から　　$\log_3 81 = 4$

(2)　$\log_4 16 = x$ とすると　　$16 = 4^x$　　$\longleftarrow$ $16=4^2$

$4^2 = 4^x$ を解くと $x = 2$ であるから

$$\log_4 16 = 2$$

練習 5.14 次の$\boxed{}$に適する数を求めよ.

(1)　$9 = 3^2$ から　$\log_3 9 = \boxed{}$　　(2)　$\dfrac{1}{25} = 5^{-2}$ から　$\log_5 \dfrac{1}{25} = \boxed{}$

(3)　$3 = 4^x$ のとき　$x = \log_{\square} 3$　　(4)　$\log_4 64 = x$ のとき　$x = \boxed{}$

$M = a^p$ のとき，$\log_a M = p$ であるから，次の等式が得られる.

$$\boldsymbol{\log_a a^p = p}$$

$\longleftarrow$ $\log_a M = p$ の M を a^p におきかえたもの

例 5.9 (1)　$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

(2)　$\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = -1$

(3)　$\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

練習 5.15 次の値を求めよ.

(1)　$\log_2 2^5$　　(2)　$\log_5 25$　　(3)　$\log_3 \dfrac{1}{27}$　　(4)　$\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16}$

(5)　$\log_{10} 0.1$　　(6)　$\log_{\frac{1}{3}} 3$　　(7)　$\log_2 \sqrt[3]{2}$　　(8)　$\log_{\sqrt{5}} 5$

B》対数の性質

a を底とする対数の性質を調べてみよう．
まず，$1=a^0$，$a=a^1$ であることから，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1}$$

また，指数法則から，次の性質が得られる．

対数の性質

$M>0$，$N>0$ で，k を実数とする．

1　$\boldsymbol{\log_a MN = \log_a M + \log_a N}$

2　$\boldsymbol{\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$

3　$\boldsymbol{\log_a M^k = k\log_a M}$

←これらの等式は，右辺を左辺の形に変形するときにも用いられる．

補足　また，**2** において，とくに $M=1$ のときは　$\log_a \dfrac{1}{N} = -\log_a N$

1 の証明　$\log_a M = p$，$\log_a N = q$ とすると

$$M=a^p, \quad N=a^q$$

よって　　$MN = a^p \times a^q = a^{p+q}$
したがって　$\log_a MN = p+q = \log_a M + \log_a N$　　**証終**

練習 5.16　上の証明にならって，性質 **2**，性質 **3** が成り立つことを示せ．

例 5.10 (1) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10}(2 \times 5) = \log_{10} 10 = 1$

(2) $\log_2 24 - \log_2 3 = \log_3 \dfrac{24}{3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

(3) $$\begin{aligned} 2\log_3 4 + \log_3 5 - \log_3 8 &= \log_3 4^2 + \log_3 5 - \log_3 8 \\ &= \log_3 \frac{16 \times 5}{8} = \log_3 10 \end{aligned}$$

練習 5.17 次の計算をせよ.

(1) $\log_4 2 + \log_4 8$　　(2) $\log_3 2 - \log_3 18$

(3) $2\log_5 5 - \log_5 15 + \log_5 9$　　(4) $\log_3 4 + \log_3 18 - 3\log_3 2$

C》 底の変換公式

a を底とする対数 $\log_a b$ を，c を底とする対数で表してみよう.

$\log_a b = p$ とすると，$b = a^p$ であるから

$$\log_c b = \log_c a^p$$

すなわち
$$\log_c b = p\log_c a$$

$a \neq 1$ より $\log_c a \neq 0$ であるから　$p = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

したがって，次の**底の変換公式**が得られる.

底の変換公式

a，b，c は正の数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ とするとき

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

例 5.11　(1)　$\log_8 16$ の値は　　　$\longleftarrow$ $8=2^3$，$16=2^4$ に注目

$$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3} = \frac{4}{3}$$

(2)　$\log_2 3 \cdot \log_3 8$ の値は　　　$\longleftarrow$ $\log_a \square \cdot \log_\square b$ の形

$$\begin{aligned}\log_2 3 \cdot \log_3 8 &= \log_2 3 \times \frac{\log_2 8}{\log_2 3} \\ &= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\end{aligned}$$

練習 5.18 次の値を簡単にせよ．

(1)　$\log_4 8$　　　(2)　$\log_9 3$　　　(3)　$\log_3 2 \cdot \log_2 27$

5.2.2　対数関数

a を 1 と異なる正の定数とするとき，$y=\log_a x$ は x の関数である．この関数を，a を**底**とする x の**対数関数**という．対数関数の特徴を調べよう．

A 》 対数関数とそのグラフ

対数関数 $y=\log_2 x$ のグラフを調べてみよう．

$y=\log_2 x$ は $x=2^y$ と同じである．そこで，189 ページで調べた $y=2^x$ の対応表で x と y を入れ替えると，次の対応表が得られる．

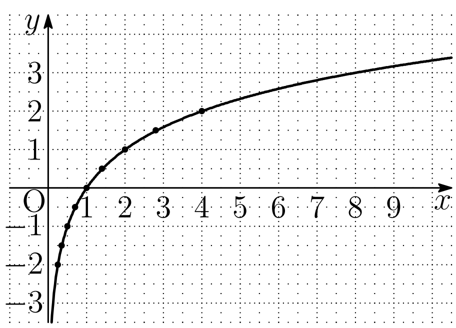
x	0.25	0.35	0.5	0.71	1	1.41	2	2.83	4
y	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2

この表の x，y を座標にもつ点 $(x,\ y)$ は，右の図のような曲線上にある．

この曲線が，対数関数

$$y=\log_2 x \quad \cdots ①$$

のグラフである．

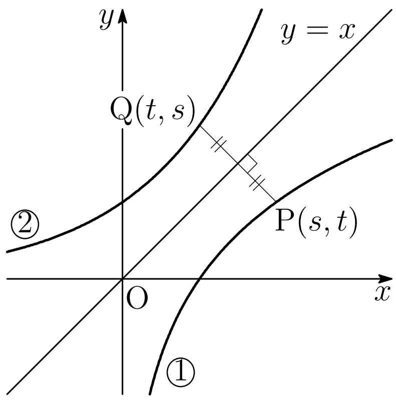


このグラフは，指数関数

$$y = 2^x \qquad \cdots ②$$

のグラフと，直線 $y = x$ に関して対称である．

このことは，次の **1**，**2** から説明できる．

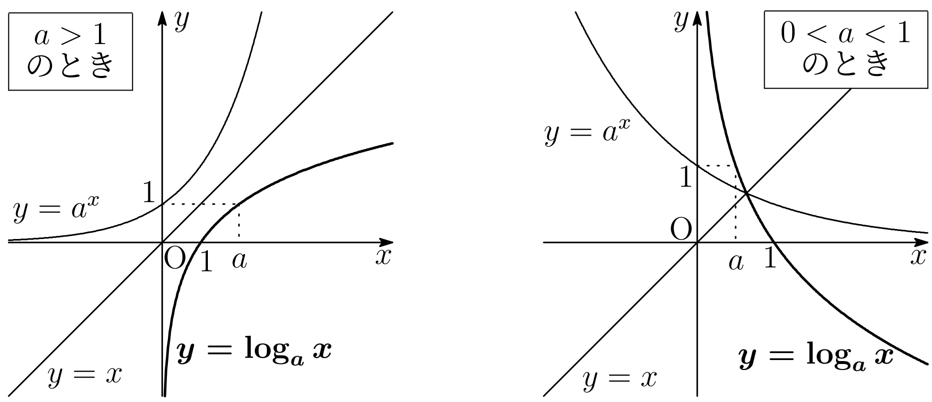


1. 「$t = \log_2 s \iff s = 2^t$」が成り立つから，① のグラフ上に点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ があれば，② のグラフ上に点 $\mathrm{Q}(t,\ s)$ がある．

この逆も成り立つ．

2. 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ と点 $\mathrm{Q}(t,\ s)$ は，直線 $y = x$ に関して対称である．

一般に，対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは，指数関数 $y = a^x$ のグラフと $y = x$ に関して対称であり，下の図のようなる．



どちらの場合も，y 軸が漸近線で，点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る．
曲線は，$a > 1$ のとき右上がり，$0 < a < 1$ のとき右下がりである．

練習 5.19 次の対数関数のグラフをかけ．

(1)　$y = \log_3 x$　　　　(2)　$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

B 》対数関数の特徴

対数関数 $y = \log_a x$ は，次のような特徴をもつ．

対数関数 $y = \log_a x$ の特徴

1 定義域は正の数全体，値域は実数全体である．

2 **$a > 1$ のとき**，増加関数である．すなわち

$$\boldsymbol{0 < p < q \iff \log_a p < \log_a q}$$

3 **$0 < a < 1$ のとき**，減少関数である．すなわち

$$\boldsymbol{0 < p < q \iff \log_a p > \log_a q}$$

注意 $p > 0$，$q > 0$ のとき，次も成り立つ．

$$p = q \iff \log_a p = \log_a q$$

例題 5.5 次の 2 つの数の大小を不等号を用いて表せ．

$$2\log_5 3,\ 3\log_5 2$$

解答 $2\log_5 3 = \log_5 3^2 = \log_5 9$

$3\log_5 2 = \log_5 2^3 = \log_5 8$

底 5 が 1 より大きいから ← 関数 $y = \log_5 x$ は増加関数

$$\log_5 8 < \log_5 9$$

すなわち $3\log_5 2 < 2\log_5 3$

練習 5.20 次の 2 つの数の大小を不等号を用いて表せ．

(1) $3\log_4 3$，$2\log_4 5$

(2) $\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8$，$\log_{\frac{1}{4}} 3$

C ≫ 対数関数を含む方程式，不等式

例題 5.6 次の方程式，不等式を解け.

(1) $\log_2 x = 3$　　(2) $\log_2 x \leqq 3$

解答 (1) 対数の定義から　$x = 2^3 = 8$

(2) 真数は正であるから　$x > 0$　$\cdots$①

不等式を変形すると　$\log_2 x \leqq \log_2 2^3$

すなわち　$\log_2 x \leqq \log_2 8$

底 2 が 1 より大きいから　$x \leqq 8$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて

$$0 < x \leqq 8$$

練習 5.21 次の方程式，不等式を解け.

(1) $\log_2 x = 4$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$

(3) $\log_2 x \leqq 4$　　(4) $\log_{\frac{1}{2}} x < 2$

応用例題 5.1 次の方程式と不等式を解け.

(1) $\log_3 x + \log_3(x-8) = 2$ (2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 2$

考え方》 (1) $M > 0$, $N > 0$ のとき $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

解答 (1) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x - 8 > 0$

すなわち $x > 8$ $\cdots$①

方程式を変形すると $\log_3 x(x-8) = 2$

よって $x(x-8) = 3^2$

式を整理すると $x^2 - 8x - 9 = 0$

$(x+1)(x-9) = 0$

① より $x = 9$ $\longleftarrow$ $x = -1$ は ① を満たさない.

(2) 真数は正であるから $x - 1 > 0$

すなわち $x > 1$ $\cdots$①

不等式を変形すると $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから $\longleftarrow$ $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ は減少関数

$x - 1 < \frac{1}{4}$ すなわち $x < \frac{5}{4}$ $\cdots$②

①, ② の共通範囲を求めて $1 < x < \frac{5}{4}$

練習 5.22 次の方程式を解け.

(1) $\log_4 x + \log_4(x-6) = 2$

(2) $\log_2(x+5)+\log_2(x-2)=3$

練習 5.23 次の不等式を解け.

(1) $\log_2(x-3)<4$

(2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \geqq 3$

5.2.3 常用対数

大きな数や小さな数は,

$$1620000 = 1.62 \times 10^6, \qquad 0.000618 = 6.18 \times 10^{-4}$$

のように，10^n を用いて表すと便利である．
そこで，10 を底とする対数を考えて，いろいろな問題に利用してみよう．

A 》 常用対数

正の数 M は，次の形に表すことができる．

$$M = a \times 10^n \qquad \text{ただし}, n \text{ は整数で } 1 \leqq a < 10$$

このとき，$\log_{10} M$ は整数 n と $\log_{10} a$ の和で表される．

$$\log_{10} M = \log_{10} a + \log_{10} 10^n = \log_{10} a + n$$

10 を底とする対数を**常用対数**という．
章末に**常用対数表**を載せた．この数表では，a が

$$1.00,\ 1.01,\ 1.02,\ \cdots,\ 9.99$$

のときの $\log_{10} a$ の近似値[2]を，小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで載せてある．

例 5.12 常用対数表によると

$$\begin{aligned}
\log_{10} 1.62 &= 0.2095 \\
\log_{10} 1620000 &= \log_{10}(1.62 \times 10^6) \\
&= \log_{10} 1.62 + \log_{10} 10^6 \\
&= 0.2095 + 6 = 6.2095 \\
\log_{10} 0.00162 &= \log_{10}(1.62 \times 10^{-3}) \\
&= \log_{10} 1.62 + \log_{10} 10^{-3} \\
&= 0.2095 - 3 = -2.7905
\end{aligned}$$

数	0	1	2	3
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239
1.4	.1461	.1492	.1523	.1533
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075

練習 5.24 常用対数表を用いて，次の値を小数第 4 位まで求めよ．

(1) $\log_{10} 3450$　　(2) $\log_{10} 92000$　　(3) $\log_{10} 0.000618$

[2] $1 \leqq a < 10$ であるから，$\log_{10} a$ の値の範囲は $0 \leqq \log_{10} a < 1$ である．

B》常用対数の応用

自然数 N の桁(けた)数と常用対数 $\log_{10} N$ の値の関係を調べてみよう．

たとえば，自然数 N が3桁の数であるとは，N が

$$100 \leqq N < 1000$$

すなわち　$$10^2 \leqq N < 10^3$$

を満たすということである．

常用対数をとると，次のようになる．

$$\log_{10} 10^2 \leqq \log_{10} N < \log_{10} 10^3$$

すなわち　$$2 \leqq \log_{10} N < 3$$

練習 5.25　自然数 N の桁数が次のとき，$\log_{10} N$ の値の範囲を求めよ．

(1)　2桁　　(2)　5桁　　(3)　10桁

例題 5.7　3^{20} の桁数を求めよ．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

解答　$$\log_{10} 3^{20} = 20 \log_{10} 3 = 20 \times 0.4771 = 9.542$$

$9 < \log_{10} 3^{20} < 10$ であるから

$$10^9 < 3^{20} < 10^{10}$$　$\longleftarrow \log_{10} 10^9 < \log_{10} 3^{20} < \log_{10} 10^{10}$

よって，3^{20} は10桁の数である．

練習 5.26　次の数の桁数を調べよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(1)　2^{20}　　(2)　2^{30}

一般に，自然数 N，k について，次のことがいえる．

$$\boldsymbol{N \text{ が } k \text{ 桁の数} \iff k - 1 \leqq \log_{10} N < k}$$

応用例題 5.2 2^n が 10 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

考え方》 2^n が 10 桁の数のとき，$10^9 \leqq 2^n < 10^{10}$ が成り立つ．
常用対数をとると n の 1 次不等式が得られる．

解答 2^n が 10 桁の数となるのは，$10^9 \leqq 2^n < 10^{10}$ のときである．

常用対数をとると　$9 \leqq n \log_{10} 2 < 10$

$\log_{10} 2 = 0.3010 > 0$ であるから

$$\frac{9}{\log_{10} 2} \leqq n < \frac{10}{\log_{10} 2} \qquad \cdots ①$$

$$\frac{9}{\log_{10} 2} = \frac{9}{0.3010} = 29.9\cdots, \quad \frac{10}{\log_{10} 2} = \frac{10}{0.3010} = 33.2\cdots$$

よって，① を満たす自然数 n は　$\longleftarrow 30 \leqq n < 34$

$$n = 30,\ 31,\ 32,\ 33$$

練習 5.27 3^n が 8 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

$0 < M < 1$ である小数 M と常用対数 $\log_{10} M$ の値の関係も調べよう．たとえば，M の小数第 3 位に初めて 0 でない数字が現れるとは，M が

$$0.001 \leqq M < 0.01 \qquad \text{すなわち} \qquad 10^{-3} \leqq M < 10^{-2}$$

を満たすということである．よって，$-3 \leqq \log_{10} M < -2$ となる．

練習 5.28 $0 < M < 1$ である小数 M が，小数第 5 位に初めて 0 でない数字が現れるとき，$\log_{10} M$ の値の範囲を求めよ．

一般に，$0 < M < 1$ である小数 M と自然数 k について，次のことがいえる．

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{\textit{M} の小数第 \textit{k} 位に初めて}\\ \textbf{0 でない数字が現れる}\end{array}\right] \iff \boldsymbol{-k \leqq \log_{10} M < -k+1}$$

5.2.4 補充問題

5 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{1}{2}\log_4 8 + \log_4 \sqrt{2}$ (2) $\log_2 \sqrt[3]{12} - \dfrac{1}{3}\log_2 3$

6 関数 $y = \log_2(x-1)$ のグラフをかけ.

7 次の方程式と不等式を解け.

(1) $\log_3(x+1)^2 = 2$　　(2) $\log_2(2-x) \geqq \log_2 x$

8 次の問いに答えよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(1) $\log_{10} 5$ の値を求めよ．

(2) 0.2^{10} は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか.

5.3 章末問題

5.3.1 章末問題 A

1 次の計算をせよ.

(1) $64^{\frac{2}{3}} \times 16^{-\frac{1}{4}}$ (2) $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[6]{9} \div \sqrt[4]{27}$

2 次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{2} \leqq 2^x \leqq 8$ (2) $1 \leqq 0.5^x \leqq 4$

3 次の方程式, 不等式を解け.

(1) $3^{x+1} = \sqrt[3]{9}$ (2) $8^x \leqq 4^{x+1}$ (3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \geqq (\sqrt{2})^x$

4 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{1}{2}\log_5 3 + 3\log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24}$

(2) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

5 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ とするとき，次の値を a, b を用いて表せ.

(1) $\log_{10} \dfrac{3}{8}$　　(2) $\log_{10} \sqrt[3]{6}$

(3) $\log_2 3$　　(4) $\log_{10} 15$

6 a，b，c を 1 と異なる正の数とするとき，次の等式を証明せよ．

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$$

7 次の方程式を解け．

(1) $\log_{0.5}(x+1)(x+2) = -1$

(2) $\log_3(x-2) + \log_3(2x-7) = 2$

8 ある菌は，30 分ごとにその個数が 2 倍に増えるという．菌の個数がある時点の 10 万倍を超えるのは，その時点から何時間後か．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とし，答えは整数で求めよ．

5.3.2 章末問題 B

9 次の関数の値域を求めよ.

(1) $y = 2^{x+1}$ $(-3 \leqq x \leqq 3)$　　(2) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + \sqrt{2})$ $(0 \leqq x \leqq \sqrt{2})$

10 次の方程式，不等式を求めよ.

(1) $9^x + 3^x - 12 = 0$　　(2) $9^x - 4{\cdot}3^x + 3 > 0$

11 次の関数の最小値を求めよ.

(1) $y = 4^x - 2^x$　　(2) $y = (\log_3 x)^2 - \log_3 x^2$

12 次の不等式を解け.

(1) $\log_{0.5}(3-x) \geqq \log_{0.5} 2x$　　(2) $\log_2(x+1) + \log_2(x-2) < 2$

13 $M = \sqrt[3]{5}$ とする．常用対数表を用いて，次の問いに答えよ.

(1) $\log_{10} M$ の値を求めよ.

(2) M の値を小数第 2 位まで求めよ.

14 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \dfrac{1}{10^4}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

15 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．$2^n < 3^{20} < 2^{n+1}$ を満たす自然数 n を求めよ．

ヒント

11 (1) $4^x = (2^x)^2$ (2) $x > 0$ のとき $\log_3 x^2 = 2\log_3 x$

13 (2) $\log_{10} M$ の値に近い数を常用対数表からみつける．

14 $\log_{10} \dfrac{1}{2} = -\log_{10} 2$ に注意．

15 $3^{20} = 2^x$ を満たす x の値を調べる．

5.4 常用対数表 (1)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3929	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6712	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

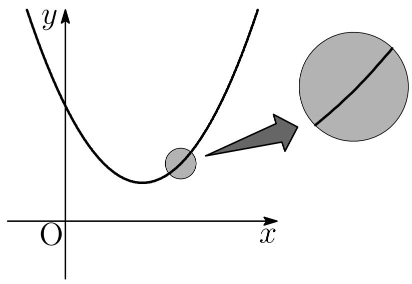
5.5 常用対数表 (2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.6523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

第 6 章　微分法と積分法

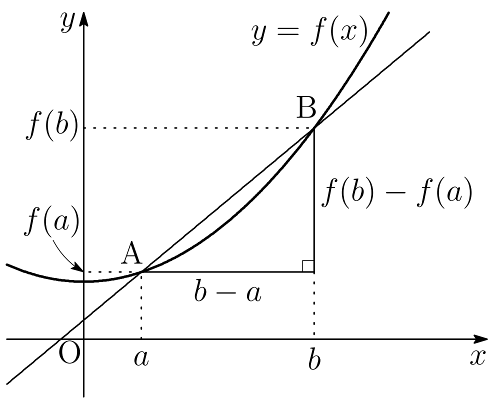
6.1　微分係数と導関数

6.1.1　微分係数



なめらかな曲線の非常にせまい部分を拡大してみると，ほとんど直線のようにみえる．
このことを，極限という概念から考えることにしよう．

A 》 平均変化率

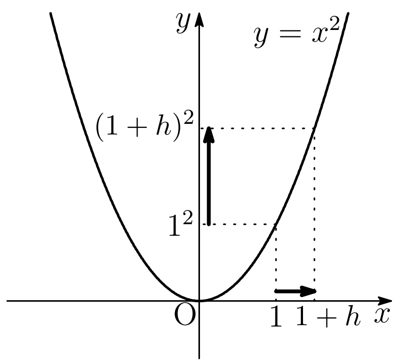


関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき，

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を，$x=a$ から $x=b$ までの，$f(x)$ の **平均変化率** という．

この平均変化率は，2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を通る直線 AB の傾きを表している．



例 6.1 2 次関数 $y=x^2$ において，$x=1$ から $x=1+h$ までの平均変化率は

$$\begin{aligned}\frac{(1+h)^2-1^2}{(1+h)-1}&=\frac{2h+h^2}{h}\\&=\frac{h(2+h)}{h}\\&=2+h\end{aligned}$$

練習 6.1 次の平均変化率を求めよ．

(1) 1次関数 $y=2x$ の，$x=a$ から $x=b$ までの平均変化率

(2) 2次関数 $y=-x^2$ の，$x=2$ から $x=2+h$ までの平均変化率

B》極限値

例 6.1 で求めた平均変化率 $2+h$ の値について，xの変化量hを

$$0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.0001,\ \cdots$$

または　$-0.1,\ -0.01,\ -0.001,\ -0.0001,\ \cdots$　　← $h<0$ でもよい．

のように，0 の両側から限りなく0に近づけてみよう．
すると，$2+h$ は2に限りなく近づくことがわかる．

h	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	$\cdots$	0	$\cdots$	0.0001	0.001	0.01	0.1
$2+h$	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\cdots$	2	$\cdots$	2.0001	2.001	2.01	2.1

このことを，

hが0に限りなく近づくとき，$2+h$ の**極限値**は2である

といい，記号 **lim** を用いて次のように書く[1]．

$$\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

注意 また，hが0に限りなく近づく場合，hは0と異なる値をとりながら0に近づくと約束する．

このような極限値の例を，ほかにも示そう．

例 6.2 (1) $\lim_{h\to 0}(4-h)=4$

(2) $\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2)=3$　　← $3h$ と h^2はどちらも 0 に限りなく近づく．

[1] lim は「極限」を意味する英語 limit の略である．

練習 6.2 次の極限値を求めよ．

(1) $\lim_{h\to 0}(6+h)$　　(2) $\lim_{h\to 0}(12-6h+h^2)$

C 》 微分係数

関数 $f(x)$ の，$x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

において，h が限りなく 0 に近づくとき，この平均変化率が限りなく一定の値に近づくならば，その極限値を

関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**または変化率

といい，$\boldsymbol{f'(a)}$ で表す．

$f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

例 6.3 $f(x)=x^2$ の $x=2$ における微分係数は

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(4+h) = 4 \end{aligned}$$

練習 6.3 次の微分係数を求めよ．

(1) 関数 $f(x)=x^2$ の $x=1$ における微分係数

(2) 関数 $f(x)=3x^2$ の $x=-2$ における微分係数

D 》微分係数と接線

関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分係数 $f'(a)$ をもつとき，その図形的な意味を調べてみよう．

関数 $f(x)$ が微分係数 $f'(a)$ をもつとする．

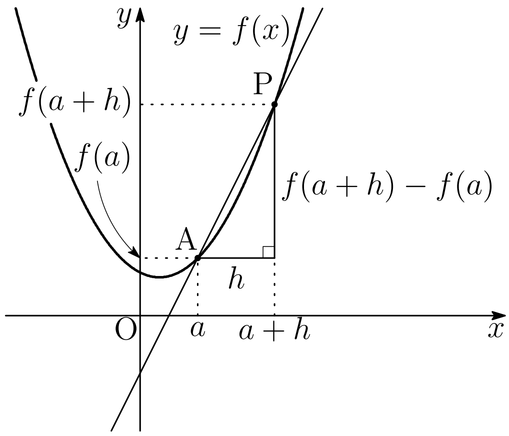
関数 $y=f(x)$ のグラフ上に 2 点

$$\mathrm{A}(a,\ f(a)),\ \mathrm{P}(a+h,\ f(a+h))$$

をとると，直線 AP の傾きは

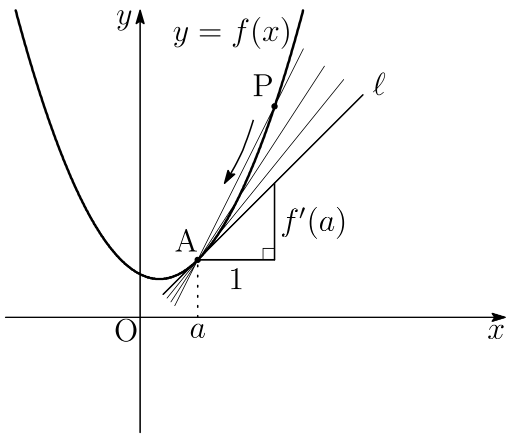
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

であり，関数 $f(x)$ の $x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率に等しい．



h が 0 に限りなく近づくとき，点 P は限りなく点 A に近づくから，直線 AP は点 A を通り傾きが $f'(a)$ の直線 ℓ に限りなく近づくといえる．

この直線 ℓ を，関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 A における**接線**といい，A を**接点**という．このとき，直線 ℓ はこの曲線に**接する**という．



以上をまとめると，次のことがいえる．

接線の傾きと微分係数

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい．

例 6.4 $\boldsymbol{y = x^2}$ **のグラフ上の点** $(2,\ 4)$ **における接線の傾き** $\boldsymbol{m}$

$f(x) = x^2$ とすると　　$m = f'(2)$

例 6.3 より，$f'(2) = 4$ であるから　　$m = 4$

練習 6.4 $y = x^2$ のグラフ上の次の点における接線の傾きを求めよ．

(1)　点 $(1,\ 1)$　　　(2)　点 $(-2,\ 4)$

6.1.2　導関数とその計算

関数 $f(x)$ が与えられたとき，$x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は a の式で表される．ここでは，微分係数をもっと一般的に考えてみよう．

A 》導関数

関数 $f(x) = x^2$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h) = 2a
\end{aligned}
$$

すなわち　　　$f'(a) = 2a$　　$\cdots$ ①

① を利用すると，x のいろいろな値における微分係数が求められる．

たとえば，微分係数 $f'(3)$ を求めるには，① に $a = 3$ を代入すればよい．

$f'(a) = 2a$ より　　$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$

練習 6.5 関数 $f(x) = x^2$ について，次の微分係数を求めよ．

(1)　$f'(3)$　　　(2)　$f'(0)$　　　(3)　$f'(-2)$

① において，a の値を決めるとそれに応じて，$f'(a)$ の値がただ 1 つ定まる．すなわち a を変数とみると，$f'(a)$ は a の関数といえる．

一般に，関数 $f(x)$ において，x のとる各値 a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させると，x の関数が得られる．このようにして得られる新しい関数を $f(x)$ の**導関数**といい，$\boldsymbol{f'(x)}$ で表す．

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式で求められる．

導関数 $\boldsymbol{f'(x)}$

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

例 6.5 (1) 関数 $f(x) = x$ の導関数は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

(2) 関数 $f(x) = x^3$ の導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} && \longleftarrow (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 && \longleftarrow 3xh \text{ と } h^2 \text{は限りなく } 0 \text{ に近づく．} \end{aligned}$$

(3) 関数 $f(x) = 2$ の導関数は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2-2}{h} = 0$$

例 6.5(3) のように，一定の値しかとらない関数を**定数関数**という．

練習 6.6 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $f(x) = 3x$

(2) $f(x) = -x^2$

(3) $f(x)=4$

関数 $y=f(x)$ の導関数を，$\boldsymbol{y'}$ や $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}$ で表すこともある．

また，関数 x^3 のように，単に x の式だけで関数を示すこともあるが，このときは，関数 x^3 の導関数を $(x^3)'$ のように表す．

これまでに調べたことから，次のことがいえる．

$$(x)'=1,\quad (x^2)'=2x\quad (x^3)'=3x^2$$

以上をまとめると，次のようになる．ただし，$n=1,\ 2,\ 3$ である．

関数 $\boldsymbol{x^n}$ と定数関数の導関数

関数 x^n の導関数は	$\boldsymbol{(x^n)'=nx^{n-1}}$
定数関数 c の導関数は	$\boldsymbol{(c)'=0}$

B 》 関数の微分

関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を $\boldsymbol{x}$ **で微分する**または単に**微分する**という．

今後，本書では関数 $f(x)$，$g(x)$ は x の多項式で表される関数とする．

2 つの関数 $f(x)=x^3$，$g(x)=x^2$ の導関数 $f'(x)$，$g'(x)$ をもとに，関数 $y=2f(x)$ や関数 $y=f(x)+g(x)$ などを微分してみよう．

たとえば，関数 $y=2x^3$ すなわち $y=2f(x)$ の導関数は

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^3-2x^3}{h} = \lim_{h\to 0} 2\left\{\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0} 2(3x^2+3xh+h^2) = \lim_{h\to 0}(2\cdot 3x^2+2\cdot 3xh+2h^2) \\ &= 2\cdot 3x^2 \end{aligned}$$

ここで，$f'(x)=3x^2$ であるから，次のことがいえる．

$y=2f(x)$ を微分すると　　$y'=2f'(x)$

次に，関数 $y=x^3+x^2$ すなわち $y=f(x)+g(x)$ の導関数は

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^3+(x+h)^2\}-(x^3+x^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{(x+h)^3-x^3}{h}+\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\{(3x^2+3xh+h^2)+(2x+h)\} \\
&= 3x^2+2x
\end{aligned}
$$

ここで，$f'(x)=3x^2$，$g'(x)=2x$ であるから，次のことがいえる．

$y=f(x)+g(x)$ を微分すると　　$y'=f'(x)+g'(x)$

同様にして，次のこともいえる．

$y=f(x)-g(x)$ を微分すると　　$y'=f'(x)-g'(x)$

一般に，次が成り立つことが知られている．

関数の定数倍および和，差の導関数

k を定数とする．

1　$y=kf(x)$ を微分すると　　$\boldsymbol{y'=kf'(x)}$

2　$y=f(x)+g(x)$ を微分すると　$\boldsymbol{y'=f'(x)+g'(x)}$

3　$y=f(x)-g(x)$ を微分すると　$\boldsymbol{y'=f'(x)-g'(x)}$

上のことを用いて，関数を微分してみよう．

例 6.6 関数 $y=3x^2-4x+2$ を微分すると

$$
\begin{aligned}
y' &= 3(x^2)'-4(x)'+(2)' & \leftarrow y'=(3x^2)'-(4x)'+(2)' \\
&= 3\cdot 2x-4\cdot 1+0 & =3(x^2)'-4(x)'+(2)' \\
&= 6x-4
\end{aligned}
$$

練習 6.7 次の関数を微分せよ．

(1)　$y=4x^2+3x-4$　　　(2)　$y=2x^2-5x+1$

(3)　$y=-3x^2+x-2$　　　(4)　$y=-x^2-x+3$

(5)　$y = 4x^3 - 2x^2 - 5x$　　(6)　$y = \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x$

例題 6.1　次の関数を微分せよ．

$$y = x(x+1)(x-2)$$

解答　$x(x+1)(x-2) = x(x^2 - x - 2) = x^3 - x^2 - 2x$

よって　$y = x^3 - x^2 - 2x$

したがって　$y' = 3x^2 - 2x - 2$

練習 6.8　次の関数を微分せよ．

(1)　$y = (x+2)(x+3)$　　(2)　$y = 3(x-2)^2$

(3)　$y = x(x+2)(x-2)$　　(4)　$y = 2x(x+1)(x-3)$

関数の導関数を利用すると，微分係数も計算しやすい．
導関数を利用して，微分係数を求めてみよう．

例題 6.2　関数 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ の導関数を利用して，$x = -1$ における微分係数を求めよ．

解答　$f(x)$ を微分すると　$f'(x) = -2x + 4$

$x = -1$ における微分係数は $f'(-1)$ であるから

$$f'(-1) = -2\cdot(-1) + 4 = 6$$

練習 6.9 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ について，次の x の値における微分係数を求めよ．

(1) $x = 2$　　(2) $x = 0$　　(3) $x = -2$

C 》いろいろな関数の導関数

変数が x，y 以外の関数についても，同様に導関数を考える．
たとえば，t の関数 $s = f(t)$ の導関数は，$\boldsymbol{s'}$，$\boldsymbol{f'(t)}$，$\boldsymbol{\dfrac{ds}{dt}}$ などで表す．

例 6.7 a を定数とする．t の関数 $s = -\dfrac{1}{2}at^2$ を t で微分すると

$$s' = -\frac{1}{2}a \cdot 2t = -at$$

補足 t で微分していることを明確にしたいときは，s' の代わりに $\dfrac{ds}{dt}$ を用いることがある．

練習 6.10 次の関数を t で微分せよ．ただし，a，b は定数とする．

(1) $s = 3t^2 - 4t + 2$　　(2) $f(t) = at^3 + bt^2$

練習 6.11 半径 r の球の体積を V，表面積を S とすると，$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$，$S = 4\pi r^2$ である．V と S を，それぞれ r で微分せよ．

6.1.3　接線の方程式

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点における接線の傾きは，導関数 $f'(x)$ から求めることができる．ここでは，関数のグラフと接線について考えよう．

A 》 接線の方程式

例題 6.3　関数 $y=-2x^2+4x+1$ のグラフ上に点 A(2, 1) をとる．

(1)　点 A における接線 ℓ の傾き m を求めよ．

(2)　点 A における接線 ℓ の方程式を求めよ．

解答　(1)　$f(x)=-2x^2+4x+1$ とすると，$m=f'(2)$ である．

$f(x)$ を微分すると　$f'(x)=-4x+4$

よって　　$m=f'(2)=-4\cdot2+4=-4$

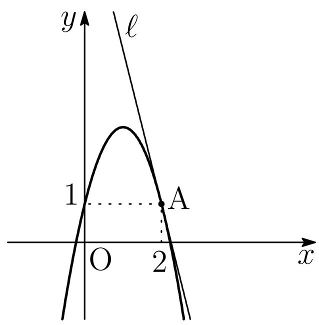
(2)　接線 ℓ は，点 A(2, 1) を通り

傾きが -4 の直線である．

よって，その方程式は

$$y-1=-4(x-2)$$

すなわち　　$y=-4x+9$



練習 6.12 関数 $y=2x^2-4x+3$ のグラフ上に点 A(2, 3) をとる．

(1) 点 A における接線の傾きを求めよ．

(2) 点 A における接線の方程式を求めよ．

一般に，次のことがいえる．

グラフ上の点における接線の方程式

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

B》グラフ上にない点から引いた接線

応用例題 6.1　関数 $y = x^2 + 3$ のグラフに点 $\mathrm{C}(1,\ 0)$ から引いた接線は 2 本ある．この 2 本の接線の方程式を求めよ．

考え方》　接点の x 座標を a とすると，y 座標は $a^2 + 3$ である．点 $(a,\ a^2 + 3)$ における接線の方程式を求め，接線が点 C を通ることを式で表すと，a の値が求められる．

解答　$y = x^2 + 3$ を微分すると　　$y' = 2x$

接点の座標を $(a, a^2 + 3)$ とすると，接線の傾きは $2a$ となるから，その方程式は

$$y - (a^2 + 3) = 2a(x - a)$$

すなわち　　$y = 2ax - a^2 + 3$　　$\cdots$ ①

この直線が点 $\mathrm{C}(1,\ 0)$ を通るから

$$0 = 2a - a^2 + 3$$

よって　　$a^2 - 2a - 3 = 0$

すなわち　　$(a + 1)(a - 3) = 0$

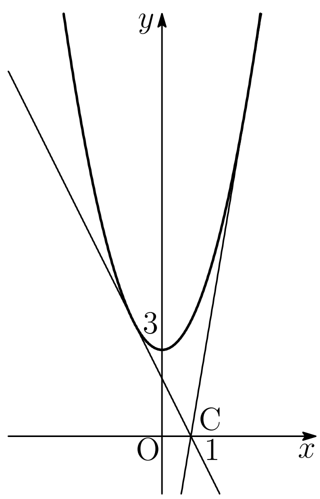
$$a = -1,\ 3$$

したがって，接線の方程式は，

① より

$a = -1$ のとき　　$y = -2x + 2$

$a = 3$ のとき　　$y = 6x - 6$



(答)　$y = -2x + 2$ と $y = 6x - 6$

補足　点 $\mathrm{C}(1,\ 0)$ を通る接線の方程式は，傾きを m とすると，$y = m(x - 1)$ の形に表される．$m = -2,\ 6$ である．

練習 6.13 関数 $y = x^2 - 2x + 4$ のグラフに原点 O から引いた接線は 2 本ある．この 2 本の接線の方程式を求めよ．

6.1.4　補充問題

1 次の極限値を求めよ．ただし，(2) における a は定数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2-(-1)^2}{h}$　　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{2(a+h)^2-2a^2}{h}$

2 次の条件をすべて満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ.

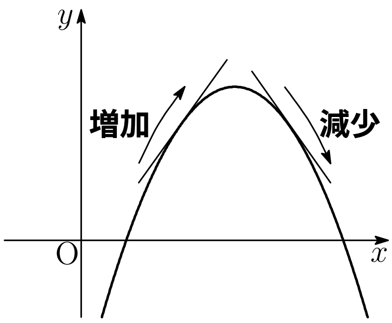
$$f(2) = -2, \qquad f'(0) = 3, \qquad f'(1) = -1$$

▶ $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく.

3 関数 $y = x^3 + 2$ のグラフに点 $\mathrm{C}(1,\ 2)$ から引いた接線の方程式を求めよ.

6.2　関数の値の変化

6.2.1　関数の増減と極大・極小



関数の増減とグラフの関係は，次のようになっている．

増加　$\cdots$　グラフは右上がり

減少　$\cdots$　グラフは右下がり

そこで，グラフの接線の傾きから，
関数の増減のようすを調べてみよう．

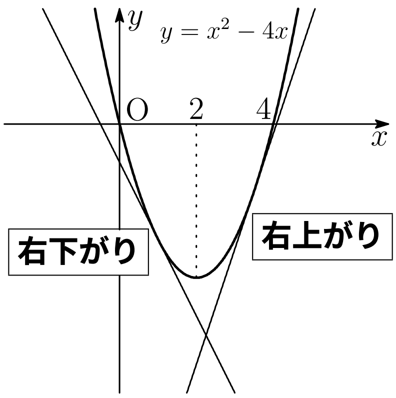
A 》関数の増減と導関数

関数 $f(x) = x^2 - 4x$ の導関数は

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

であるから，$y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは

$$f'(a) = 2(a - 2)$$



[1]　$a < 2$ では　$f'(a) < 0$

このとき，A における接線は右下がりである．グラフも右下がりで，関数は減少する．

[2]　$a > 2$ では　$f'(a) > 0$

このとき，A における接線は右上がりである．グラフも右上がりで，関数は増加する．

一般に，関数 $f(x)$ の増減と導関数 $f'(x)$ の符号については，次のようになる．

$f'(x)$ の符号と $f(x)$ の増減

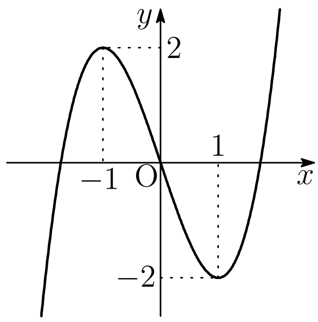
関数 $f(x)$ の増減は，次のようになる．

$f'(x) > 0$ となる x の値の範囲では増加し，

$f'(x) < 0$ となる x の値の範囲では減少する．

注意 常に $f'(x) = 0$ ならば $f(x)$ はその範囲で一定の値をとる．

例 6.8 関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の増減を調べる．



$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = -1,\ 1$

$f'(x) > 0$ を解くと　$x < -1,\ 1 < x$

$f'(x) < 0$ を解くと　$-1 < x < 1$

よって，$f(x)$ の増減は，次のような表で表される．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

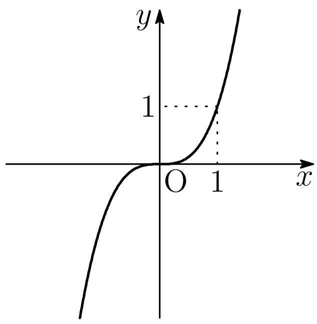
← $\nearrow$ は増加，$\searrow$ は減少を表す．

したがって，関数 $f(x)$ は

$x \leqq -1$，$1 \leqq x$ で増加し，$-1 \leqq x \leqq 1$ で減少する．

注意 関数が増加または減少する x の値の範囲には，$f'(x) = 0$ となる x の値も含まれる．なお，例 6.8 で示したような表を**増減表**という．

例 6.9 関数 $f(x) = x^3$ の増減を調べる．



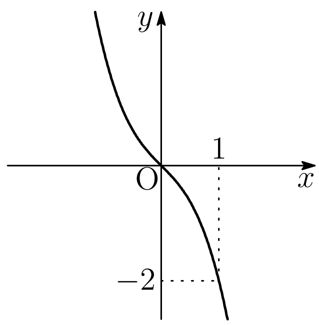
$$f'(x) = 3x^2 \geqq 0$$

増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は常に増加する．

例 6.10 関数 $f(x) = -x^3 - x$ の増減を調べる．



$$f'(x) = -3x^2 - 1$$

$-3x^2 \leqq 0$ であるから，常に

$$f'(x) < 0$$

よって，$f(x)$ は常に減少する．

練習 6.14 次の関数の増減を調べよ．

(1)　$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$　　(2)　$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1$

(3)　$f(x) = x^3 + 2x$　　(4)　$f(x) = -x^3$

B》関数の極大・極小

例 6.8 の関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の増減表をみると，$f(x)$ の増減が入れ替わるような x の値がある．

一般に，関数 $f(x)$ が $x = a$ を境目として増加から減少に移るとき，

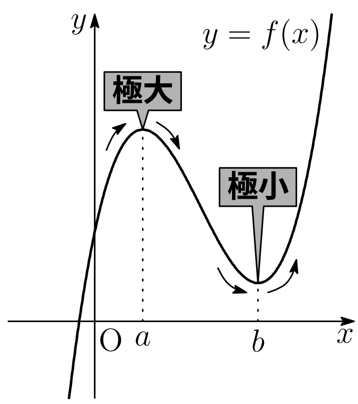
$f(x)$ は $x = a$ で**極大**である

といい，$f(a)$ を**極大値**という．

また，$x = b$ を境目として減少から増加に移るとき，

$f(x)$ は $x = b$ で**極小**である

といい，$f(b)$ を**極小値**という．



例 6.11 例 6.8 の関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の極大値，極小値

$x = -1$ で極大であり，
極大値は 2
$x = 1$ で極小であり，
極小値は -2

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 -2	$\nearrow$

極大値と極小値をまとめて**極値**という．

常に増加または常に減少する関数は，増減が入れ替わることはないから，極値をもたない．たとえば，1 次関数や例 6.9 の関数 $f(x) = x^3$，例 6.10 の関数 $f(x) = -x^3 - x$ などは極値をもたない．

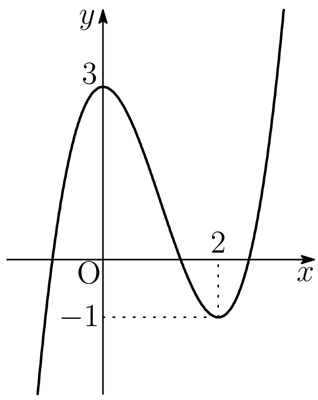
関数の極値を求めたりグラフをかくためには，増減表を作って関数の増減を調べればよい．

例題 6.4 関数 $y = x^3 - 3x^2 + 3$ の増減を調べ，極値を求めよ．また，そのグラフをかけ．

解答
$$y' = 3x^2 - 6x$$
$$= 3x(x-2)$$
$y' = 0$ とすると
$$x = 0,\ 2$$
y の増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 3	$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$

したがって，この関数は
$x = 0$ で極大値 3，
$x = 2$ で極小値 -1
をとる．
また，グラフは右の図のようになる．



練習 6.15 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ．また，そのグラフをかけ.

(1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

(2) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$

(3) $y = 2x^3 + 6x^2$

(4) $y = -x^3 + x^2$

関数 $f(x)$ について，次のことがいえる．

> **関数 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとれば，$f'(a) = 0$ である．**

注意 逆に，$f'(a) = 0$ であっても $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるとは限らない．たとえば，例 6.9 で調べたように，$f(x) = x^3$ については $f'(0) = 0$ であるが，$f(x)$ は $x = 0$ で極値をとらない．

応用例題 6.2 関数 $f(x)=x^3+ax+b$ が $x=2$ で極小値 -6 をとるとき，定数 a，b の値を求めよ．また，極大値を求めよ．

考え方》 $f(x)$ が $x=2$ で極小値 -6 をとるとき，$f'(2)=0$ かつ $f(2)=-6$ が成り立つ．

解答 $f(x)=x^3+ax+b$ を微分すると　$f'(x)=3x^2+a$

$f(x)$ が $x=2$ で極小値 -6 をとるとき

$$f'(2)=0, \qquad f(2)=-6$$

よって　$12+a=0,\qquad 8+2a+b=-6$

これを解くと　$a=-12$，$b=10$

このとき　$f(x)=x^3-12x+10$

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

したがって，右の増減表が得られる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 26	$\searrow$	極小 -6	$\nearrow$

(答)　$a=-12$，$b=10$

極大値 26

補足 $f'(2)=0$ であっても $f(x)$ が $x=2$ で極値をとるとは限らないため，増減表によって，$x=2$ で極小値をとることを確認している．

練習 6.16 関数 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$ が $x=-1$ で極大値 8 をとるとき，定数 a，b の値を求めよ．また，極小値を求めよ．

6.2.2 関数の増減・グラフの応用

関数の増減やグラフを利用して，関数の最大値，最小値を求めたり，方程式の実数解の個数を調べてみよう．

A 》 関数の最大・最小

例題 6.5 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

$$y = -x^3 + 3x^2 \quad (-1 \leqq x \leqq 4)$$

解答 $y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$

$y' = 0$ とすると $x = 0,\ 2$

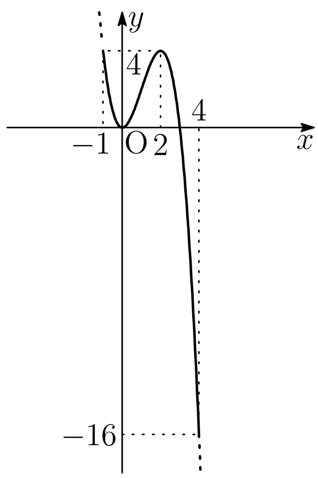
y の増減表は，次のようになる．

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	4	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$	-16

よって，この関数は

$x = -1,\ 2$ で最大値 4 をとり，

$x = 4$ で最小値 -16 をとる．



例題 6.5 の関数では，関数の最大値は極大値と一致する．しかし，最小値は極小値とは一致しない．

このことからもわかるように，関数の最大値，最小値を求めるには，極値と定義域の端における関数の値との大小も調べる必要がある．

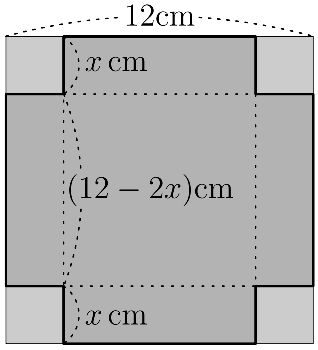
練習 6.17 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = x^3 + 3x^2 \quad (-3 \leqq x \leqq 2)$

(2) $y = -x^3 + 3x + 1 \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$

(3) $y = x^3 - 6x^2 - 15x \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$

応用例題 6.3 1 辺が 12cm の正方形の厚紙の四隅から，同じ大きさの正方形を右の図のように切り取って，ふたのない箱を作る．箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすればよいか．



考え方》 求める長さを x cm，箱の容積を y cm^3 として，x の関数 y の増減を調べる．x のとる値の範囲にも注意する．

解答 切り取る正方形の 1 辺の長さを x cm，箱の容積を y cm^3 とする．

$x > 0$，$12 - 2x > 0$ であるから

$$0 < x < 6 \qquad \cdots ①$$

このとき

$$y = x(12-2x)^2 = 4(x^3 - 12x^2 + 36x)$$
$$y' = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x-2)(x-6)$$

① の範囲において，y の増減表は，右のようになる．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって，y は $x = 2$ で最大になる．

(答) 2cm

練習 6.18 応用例題6.3において，正方形の厚紙の代わりに，縦 10cm，横 16cm の長方形の厚紙で箱を作る．箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすればよいか．

B 》方程式への応用

方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数に等しい．方程式の実数解の個数を調べるのに，次のように関数のグラフを利用する方法がある．

応用例題 6.4 方程式 $x^3+3x^2=a$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

考え方 》 方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数は，関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に等しい．

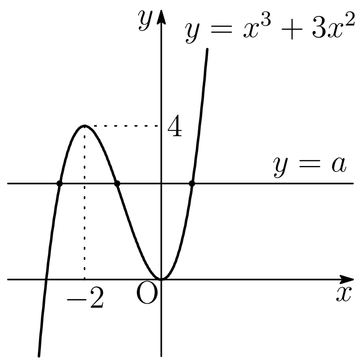
解答 関数 $y=x^3+3x^2$ について

$$y'=3x^2+6x$$
$$=3x(x+2)$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

y の増減表は，右のようになる．

よって，$y=x^3+3x^2$ のグラフは，右の図のようになる．



求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y=a$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから

$$0<a<4$$

補足 方程式 $x^3+3x^2=a$ の異なる実数解の個数について，さらに次のことがいえる．

$a=0,\ 4$ のとき 2 個 (1 個は 2 重解)

$a<0,\ 4<a$ のとき 1 個

練習 6.19 方程式 $x^3-6x^2=a$ がただ 1 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

C》不等式への応用

関数 $f(x)$ の最小値が 0 であるとき，$f(x) \geqq 0$ が成り立つ．
このことを利用して，不等式を証明してみよう．

応用例題 6.5 $x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つときの x の値を求めよ．

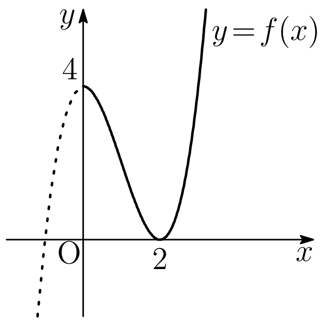
$$x^3 + 4 \geqq 3x^2$$

考え方》 $x \geqq 0$ のとき，関数 $f(x) = (x^3 + 4) - 3x^2$ の最小値が 0 であることを示せばよい．

証明 $f(x) = (x^3 + 4) - 3x^2$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	極小 0	↗



$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は，右のようになる．
よって，$x \geqq 0$ において，
$f(x)$ は $x = 2$ で最小値 0 をとる．
したがって，$x \geqq 0$ のとき，
$f(x) \geqq 0$ であるから

$$(x^3 + 4) - 3x^2 \geqq 0$$

すなわち $\qquad x^3 + 4 \geqq 3x^2$

等号が成り立つのは，$x = 2$ のときである． **証終**

練習 6.20 $x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのときの x の値を求めよ．

$$x^3 + 3x^2 + 5 \geqq 9x$$

6.2.3 補充問題

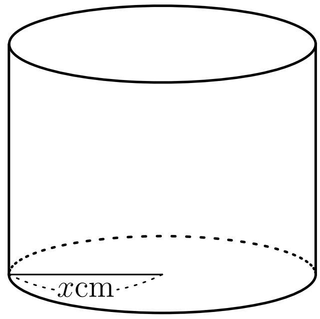
4 次の関数の増減を調べ，極値があればその極値を求めよ．

(1) $y = x^3 - 6x + 2$

(2) $y = (1 - x)^3$

5 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が，$x = -3$ で極大値をとり，$x = 1$ で極小値 -12 をとるとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

6 底面の直径と高さの和が 18cm である直円柱の体積を $V\text{cm}^3$ とする．



(1) 底面の半径を x cm とするとき，V を x の式で表せ．

(2) V が最大となるのは，円柱の高さが何 cm のときか．

7 関数 $y = x^3 - 6x^2 + a$ のグラフが x 軸と異なる 3 点を共有するとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

6.3　積分法

6.3.1　不定積分

これまでは関数の導関数を求めることを学んできたが，逆に導関数がわかっている場合に，もとの関数を求めることを考えてみよう．

A 》導関数と不定積分

微分すると $f(x)$ になる関数を，$f(x)$ の**原始関数**という．
すなわち，$F'(x) = f(x)$ のとき，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．

例 6.12　$(x^2)' = 2x$ であるから，x^2 は $2x$ の原始関数である．
さらに　$(x^2+3)' = 2x,\quad (x^2-5)' = 2x$
であるから，x^2+3，x^2-5 も，$2x$ の原始関数である．

練習 6.21　次の中から，$3x^2$ の原始関数であるものを選べ．

①　$6x$　　②　x^3　　③　x^3+2x　　④　x^3-4

例 6.12 からもわかるように，$2x$ の原始関数はいくつもあるが，それらの違いは，x を含まない定数部分だけである．

一般に，関数 $f(x)$ の 1 つの原始関数 $F(x)$ がわかっていれば，$f(x)$ の任意の原始関数は,「$F(x)+$ 定数」の形に表される．
この定数を**積分定数**といい，記号 $\boldsymbol{C}$ で表して，$f(x)$ の任意の原始関数を $F(x)+C$ と表示する．

この表示を $f(x)$ の**不定積分**といい，$\displaystyle\int \boldsymbol{f(x)\,dx}$ で表す[2]．

関数 $f(x)$ の不定積分については，次のようにまとめられる．

$f(x)$ の不定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx = F(x) + C} \qquad \text{ただし，} C \text{ は積分定数}$$

今後，本書では「C は積分定数」の断りを省略する．

[2] 不定積分を原始関数と同じ意味で用いることもある．
$\int$ は「積分」または「インテグラル」と読む．

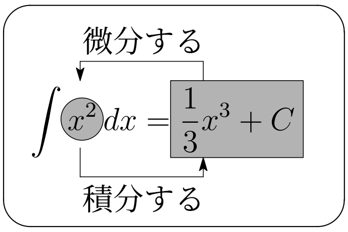
関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を**積分する**という．
積分することと微分することとは，互いに逆の計算であるといえる．

例 6.13 $(x)' = 1$，$\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)' = x$，$\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)' = x^2$
であるから

$$\int 1\,dx = x + C$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$



注意 $\displaystyle\int 1\,dx$ は 1 を省略して $\displaystyle\int dx$ と書くことが多い．

例 6.13 の結果より，$n = 0,\ 1,\ 2$ について，関数 x^n の不定積分は，次のようになる．

x^n の不定積分

$$\boldsymbol{\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$$

注意 $\displaystyle\int x^0\,dx$ は $\displaystyle\int 1\,dx$ のことである．

B》不定積分を求める

関数の定数倍および和，差の不定積分について調べよう．
$F'(x) = f(x)$ であるとする．このとき，定数 k に対して

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$$

となるから，$kF(x)$ は関数 $kf(x)$ の原始関数の 1 つである．

すなわち　$$\int kf(x)\,dx = kF(x) + C$$

同様にして，次のことがいえる．

関数の定数倍および和，差の不定積分

$F'(x)=f(x),\ G'(x)=g(x)$ のとき

1 $\displaystyle \int \boldsymbol{kf(x)\,dx = kF(x)+C}$ k は定数

2 $\displaystyle \int \boldsymbol{\{f(x)+g(x)\}\,dx = F(x)+G(x)+C}$

3 $\displaystyle \int \boldsymbol{\{f(x)-g(x)\}\,dx = F(x)-G(x)+C}$

上の性質と前ページに示した「x^n の不定積分」を使って，x の多項式で表される関数の不定積分を求めてみよう．

例題 6.6 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle \int 4x^2\,dx$ (2) $\displaystyle \int (3x^2-5x+2)\,dx$

解答 (1) $\displaystyle \int 4x^2\,dx = 4\cdot\frac{1}{3}x^3+C=\frac{4}{3}x^3+C$

(2) $$\int (3x^2-5x+2)\,dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3-5\cdot\frac{1}{2}x^2+2x+C$$
$$= x^3-\frac{5}{2}x^2+2x+C$$

練習 6.22 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle \int 6x^2\,dx$ (2) $\displaystyle \int (x^2+x-1)\,dx$

(3) $\displaystyle \int (3x^2-2x+5)\,dx$ (4) $\displaystyle \int (-2x^2+4x+7)\,dx$

C ≫ いろいろな関数の不定積分

変数が x 以外の関数についても，同様に不定積分を考える．
たとえば，t の関数については，次のようになる．

$$\int 1\,dt = t + C, \qquad \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C, \qquad \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C$$

練習 6.23 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (2t^2 - 3t - 4)\,dt$　　　(2) $\displaystyle\int (-6u^2 + 9u - 3)\,du$

応用例題 6.6　次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(t)$ を求めよ．

［1］$F'(t) = 3(t-1)^2$　　　［2］$F(1) = 0$

考え方 ≫　［1］から $3(t-1)^2$ の不定積分として $F(t)$ を求める．さらに，
［2］から積分定数 C の値を決める．

解答　［1］から

$$\begin{aligned} F(t) &= \int 3(t-1)^2\,dt \\ &= \int (3t^2 - 6t + 3)\,dt \\ &= t^3 - 3t^2 + 3t + C \end{aligned}$$

よって　$F(1) = 1^3 - 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + C = C + 1$

［2］から，$C + 1 = 0$ であり　$C = -1$

したがって　$F(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$

練習 6.24　次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(t)$ を求めよ．

［1］$F'(t) = 2(t-1)$　　　［2］$F(0) = 0$

6.3.2 定積分

関数 $f(x) = 2x$ の原始関数 $F(x)$ は 1 つに定まらないが，たとえば $F(3) - F(1)$，$F(2) - F(4)$ などの値は，1 つに定まる．このことについて学ぶことにしよう．

A 》定積分

関数 $f(x) = 2x$ の任意の原始関数 $F(x)$ は，

$$F(x) = x^2 + C \qquad C \text{ は定数}$$

の形で表される．ここで，たとえば，$F(3) - F(1)$ の値を計算してみると

$$F(3) - F(1) = (3^2 + C) - (1^2 + C) = 8$$

となり，定数 C とは無関係な値になる．

一般に，関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とし，a，b を $f(x)$ の定義域内の任意の値とするとき，$F(b) - F(a)$ の値は $F(x)$ の選び方とは無関係に，a，b の値だけで定まる．この $F(b) - F(a)$ を

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書き，これを関数 $f(x)$ の a から b までの**定積分**[3]という．このとき，a を**下端**（かたん），b を**上端**（じょうたん）という．a と b の大小関係は，$a < b$，$a = b$，$a > b$ のいずれでもよい．また，$F(b) - F(a)$ を $\Big[\boldsymbol{F(x)}\Big]_a^b$ とも書く．

以上をまとめると，次のようになる．

定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

例 6.14 定積分 $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx$ の計算

$\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$ であるから

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

[3] 定積分は図形の面積に関連する．このことは 258 ページ以降で扱っている．

練習 6.25 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^3 x\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^2\,dx$　(3) $\displaystyle\int_3^2 2\,dx$

例題 6.7 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (-x^2+3x)\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x+4)(x-2)\,dx$

解答 (1)
$$\int_0^1 (-x^2+3x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= \left(-\frac{1^3}{3}+\frac{3}{2}\cdot 1^2\right) - \left(-\frac{0^3}{3}+\frac{3}{2}\cdot 0^2\right)$$
$$= \frac{7}{6}$$

(2)
$$\int_{-1}^2 (x+4)(x-2)\,dx = \int_{-1}^2 (x^2+2x-8)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}+x^2-8x\right]_{-1}^2$$
$$= \left(\frac{2^3}{3}+2^2-8\cdot 2\right) - \left\{\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2-8(-1)\right\}$$
$$= -18$$

練習 6.26 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 (x^2+4x-5)\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 (-3x^2+x+1)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_2^3 (x-2)(x-3)\,dx$　　　　(4) $\displaystyle\int_{-1}^1 2(x+3)(x-2)\,dx$

B》定積分の性質

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ とすると

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx &= \Big[F(x)+G(x)\Big]_a^b \\ &= \{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\} \\ &= \{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\} \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

同様にして，次の公式が得られる．

関数の定数倍および和，差の定積分

1　$\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx}$　　k は定数

2　$\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{\{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}$

3　$\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{\{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx}$

例 6.15 k を定数とするとき

$$\int_1^2 (x^2+kx)dx = \int_1^2 x^2\,dx + k\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + k\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$
$$= \frac{2^3-1^3}{3} + k\cdot\frac{2^2-1^2}{2} = \frac{7}{3}+\frac{3}{2}k$$

例 6.16

$$\int_0^1 (-x^2+3x)\,dx - \int_0^1 (2x^2-x)\,dx \qquad \longleftarrow \text{公式 }\mathbf{3}\text{ の右辺から左辺を導く変形}$$
$$= \int_0^1 \{(-x^2+3x)-(2x^2-x)\}dx$$
$$= \int_0^1 (-3x^2+4x)dx$$
$$= \Big[-x^3+2x^2\Big]_0^1 = -1^3+2\cdot 1^2 = 1$$

練習 6.27 次の定積分を求めよ．ただし，k は定数とする．

(1) $\displaystyle\int_1^4 (kx^2+3x)dx$　　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+2)^2dx - \int_{-1}^1 (x-2)^2dx$

定積分の上端，下端に関する性質として，次のことが成り立つ．

定積分の性質

1　$\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$　　**2**　$\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

3　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

注意　性質 **3** は，a，b，c の大小に関係なく成り立つ．

3 の証明　$F'(x) = f(x)$ とすると

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^c + \Big[F(x)\Big]_c^b$$
$$= \{F(c) - F(a)\} + \{F(b) - F(c)\} = F(b) - F(a)$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

証終

練習 6.28　上の性質 **1** が成り立つことを示せ．また，性質 **1**，**3** を用いて，性質 **2** が成り立つことを示せ．

C》$f(t)$ の定積分

t を変数とする関数の定積分は，次のようになる．

$F'(t) = f(t)$ のとき　$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

すなわち，次の等式が成り立つ．

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

したがって，定積分の値は変数が違っても同じになる．

関数 $f(t)$ に対して $F'(t) = f(t)$ のとき，$f(t)$ の定積分

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$ ← 上端が x で，下端が定数 a

は，x の関数である．右辺の関数を x で微分すると

$$F'(x) - (F(a))' = f(x)$$ ← $F(a)$ は定数で $(F(a))' = 0$

となるから，次のことが成り立つ．

> **a を定数とするとき　x の関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ の導関数は $f(x)$ である．**
>
> **すなわち** $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

注意 x の関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ の導関数を $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt$ で表す．

練習 6.29 関数 $\displaystyle\int_0^x (3t^2 - 2t - 1)\,dt$ を x で微分せよ．

応用例題 6.7 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．

$$\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - 3x + 2$$

考え方》 等式の両辺を x で微分する．また，与えられた等式の両辺で $x = a$ とおくと，$\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$ が利用できる．

解答 等式の両辺を x で微分すると　　$f(x) = 2x - 3$

また，与えられた等式で $x = a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$$0 = a^2 - 3a + 2$$

これを解くと　　$a = 1,\ 2$　　　　(答) $f(x) = 2x - 3,\ a = 1,\ 2$

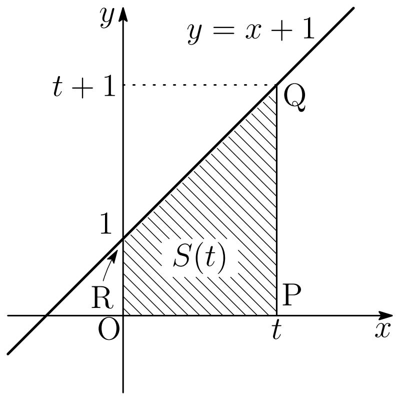
練習 6.30 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．

$$\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - x - 2$$

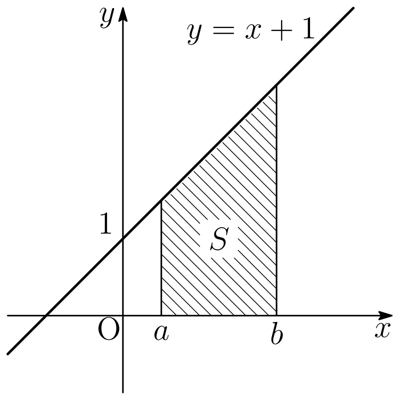
6.3.3　図形の面積と定積分

関数 $f(x)$ の定積分は，$y = f(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積に関係がある．1 次関数については，グラフが直線になるから，面積が調べやすい．
たとえば，関数 $f(x) = x + 1$ について，調べてみよう．

［1］



［2］



［1］ 図 [1] において，$y = x + 1$ のグラフと x 軸および y 軸，直線 $x = t$ で囲まれた斜線部分の面積[4]は，t の関数である．

これを $S(t)$ とすると

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \{1 + (t + 1)\} \times t = \frac{1}{2}t^2 + t$$

よって　　$S'(t) = t + 1$

すなわち，$S'(x) = x + 1$ であるから，$S'(x) = f(x)$ が成り立つ．

［2］ 図 [2] において，$y = x + 1$ のグラフと x 軸および直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた斜線部分の面積 S は，［1］ の関数 $S(t)$ を用いると

$$S = S(b) - S(a)$$

となるが，$S'(x) = f(x)$ であるから，S は次のようにも表される．

$$S = \Big[S(x)\Big]_a^b = \int_a^b f(x)\,dx$$

[4] 台形 OPQR の面積は，$\frac{1}{2} \times (\mathrm{OR} + \mathrm{PQ}) \times \mathrm{OP}$　で表される．

A 》 定積分の図形的な意味

定積分と面積の関係を2次関数 $y = x^2$ のグラフで考えてみよう．

下の図[1]において，$y = x^2$ のグラフと x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた斜線部分の面積は，t の関数である．この関数を $S(t)$ とする．
このとき，$S'(t) = t^2$ であることを示そう．そのために，

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} \qquad \cdots ①$$

を考え，h を限りなく0に近づけてみる．

まず，$h > 0$ の場合で考える．

図[2]において，斜線部分の面積は $S(t+h) - S(t)$ であり，これと横の長さが h である2つの長方形APQB，APRCの面積の大小関係を考えると，次の不等式が成り立つ．

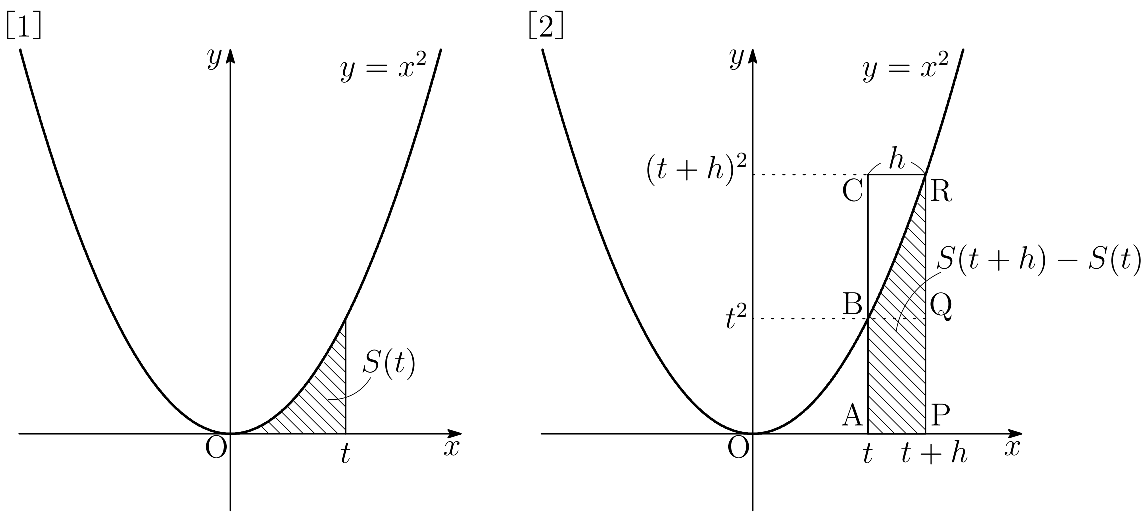
$$ht^2 < S(t+h) - S(t) < h(t+h)^2$$

$h > 0$ であるから $\quad t^2 < \dfrac{S(t+h) - S(t)}{h} < (t+h)^2$

ここで，h を限りなく0に近づけると $(t+h)^2$ は限りなく t^2 に近づく．

よって，このとき，① の値も限りなく t^2 に近づくといえる．

$h < 0$ の場合も，同様である．



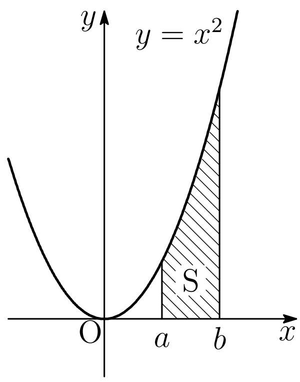
前ページで調べたことから，次のことがいえる．

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = t^2 \qquad \text{すなわち} \qquad S'(t) = t^2$$

ところで，$y = x^2$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分の面積を S とすると，S は $S(t)$ を使って

$$S = S(b) - S(a)$$

と表される．



よって，定積分の定義と性質により

$$S = \Big[S(t) \Big]_a^b = \int_a^b t^2\,dt = \int_a^b x^2\,dx$$

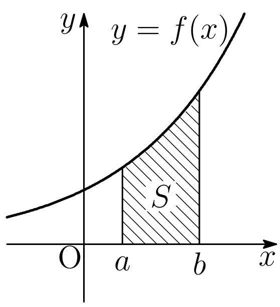
が成り立つ．

一般に，関数 $y = f(x)$ についても，次のことが成り立つ．

定積分と図形の面積 (1)

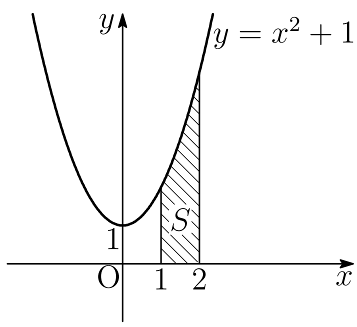
$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，
$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線
$x = a$，$x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$



例 6.17 放物線 $y = x^2 + 1$ と x 軸および 2 直線 $x = 1$，$x = 2$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_1^2 (x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_1^2$$
$$= \left(\frac{2^3}{3} + 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1 \right) = \frac{10}{3}$$



練習 6.31 次の放物線と 2 直線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) 放物線 $y = x^2$，2 直線 $x = 1$，$x = 3$

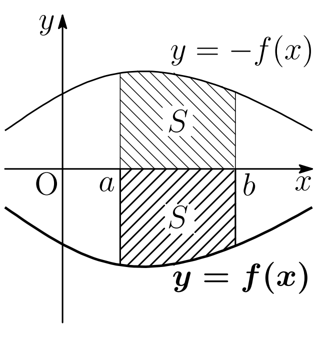
(2) 放物線 $y = x^2 + 2$，2 直線 $x = -1$，$x = 2$

次のことも成り立つ．

定積分と図形の面積 (2)

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \leqq 0$ のとき，
$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線
$x = a$，$x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\boldsymbol{S = \int_a^b \{-f(x)\}dx}$$



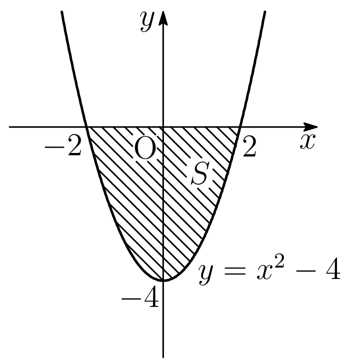
例題 6.8 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

$$y = x^2 - 4$$

解答 この放物線と x 軸の交点の x 座標は,
$x^2 - 4 = 0$ を解いて

$$x = -2,\ 2$$

$-2 \leqq x \leqq 2$ では $y \leqq 0$ であるから,
求める面積 S は



$$S = \int_{-2}^{2} \{-(x^2-4)\}dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2}$$
$$= \left(-\frac{2^3}{3} + 4\cdot 2\right) - \left\{-\frac{(-2)^3}{3} + 4(-2)\right\} = \frac{32}{3}$$

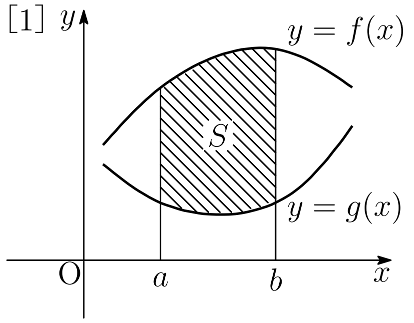
補足 斜線部分は y 軸について対称で, $S = 2\displaystyle\int_{0}^{2} \{-(x^2-4)\}dx$ が成り立つ.

練習 6.32 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) $y = x^2 - 1$

(2) $y = x^2 - 2x$

B 》2 つの曲線の間の面積



2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が，$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq g(x)$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの間の部分の面積を考えてみよう．

右の図 [1] の斜線部分の面積 S は，次の式で求められる．

$$
\begin{aligned}
S &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \\
&= \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx
\end{aligned}
$$

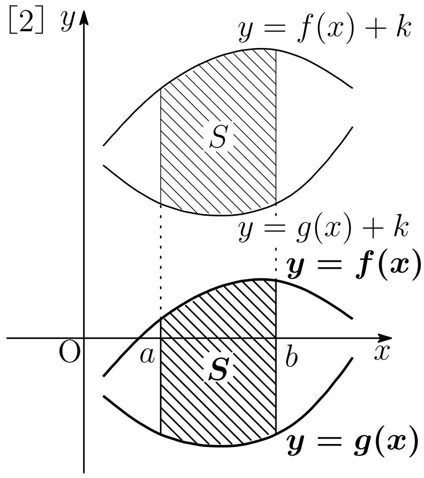


図 [2] のように，斜線部分全体が x 軸の上側にないときは，2 つのグラフを y 軸の正の向きに k だけ平行移動して，斜線部分全体が x 軸の上側になるように移す．すると，上で示したことから

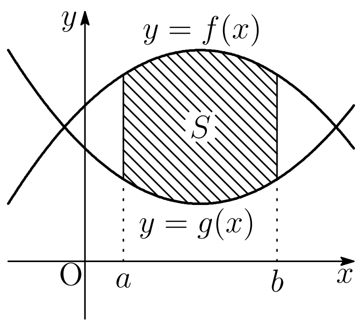
$$
\begin{aligned}
S &= \int_a^b \{(f(x)+k)-(g(x)+k)\}dx \\
&= \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx
\end{aligned}
$$

以上から，次のことが成り立つ．

定積分と図形の面積 (3)

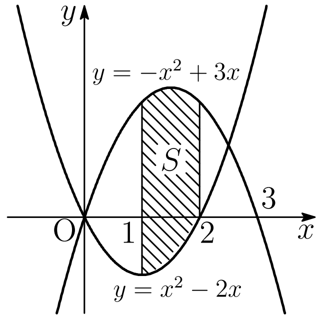
$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq g(x)$ のとき，
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフおよび 2 直線
$x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$
S = \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx
$$



例 6.18 2 つの放物線 $y = x^2 - 2x$，$y = -x^2 + 3x$ と 2 直線 $x = 1$，$x = 2$ で囲まれた部分の面積 S は，図から

$$S = \int_1^2 \{(-x^2 + 3x) - (x^2 - 2x)\}dx$$
$$= \int_1^2 (-2x^2 + 5x)dx$$
$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{17}{6}$$



練習 6.33 次の放物線と 2 直線 $x = 1$，$x = 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) $y = x^2 - 5x$，$y = -x^2 + 4x$

(2) $y = x^2 - 2x + 4$，$y = 2x^2 - 4x + 3$

応用例題 6.8 次の放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

$$放物線\ y=x^2-1,\ 直線\ y=x+1$$

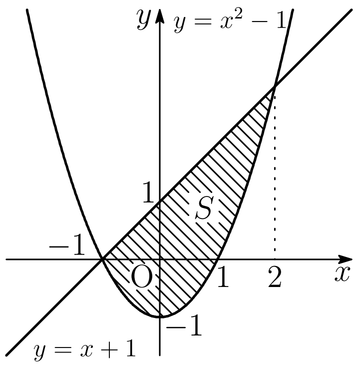
考え方》 放物線と直線の上下関係を調べる．なお，その交点の x 座標は，方程式 $x^2-1=x+1$ の解である．

解答 方程式 $x^2-1=x+1$ を解くと，

$x^2-x-2=0$ より $\quad x=-1,\ 2$

よって，求める面積 S は，図から

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2}\{(x+1)-(x^2-1)\}dx \\ &= \int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$



練習 6.34 次の放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) 放物線 $y=x^2$，直線 $y=-x+2$

(2) 放物線 $y=-x^2+3$，直線 $y=2x$

研究

放物線と x 軸で囲まれた部分の面積

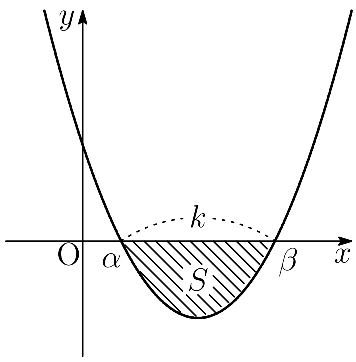
下の図 [1] のような放物線 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ が x 軸から切り取る線分の長さは，$\beta-\alpha$ である．ただし，$a>0$ とする．この放物線を x 軸方向に平行移動しても，放物線と x 軸で囲まれた部分の面積は変わらない．
$\beta-\alpha=k$ とおくと，面積 S は図 [2] により

$$\begin{aligned} S &= \int_0^k \{-ax(x-k)\}dx \\ &= a\int_0^k (-x^2+kx)dx \\ &= a\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{k}{2}x^2\right]_0^k \\ &= a\left(-\frac{k^3}{3}+\frac{k^3}{2}\right)=\frac{ak^3}{6} \end{aligned}$$

$k=\beta-\alpha$ であるから，$a>0$ のとき，次のことがいえる．

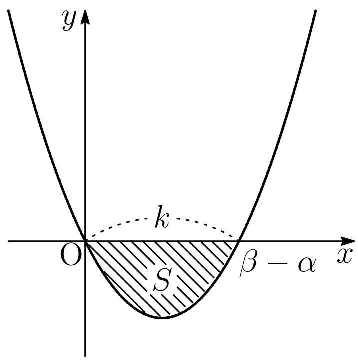
$$S=\int_\alpha^\beta \{-a(x-\alpha)(x-\beta)\}dx=\frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$$

[1]　$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$



x 軸方向に $-\alpha$
平行移動する．
2次の係数 a
は同じである．

[2]　$y=ax(x-k)$



6.3.4 補充問題

8 次の定積分を求めよ.

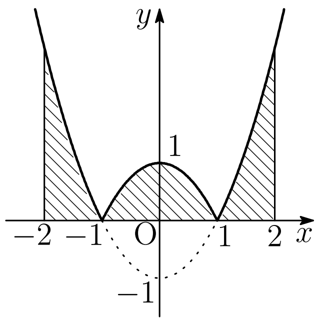
(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(3x-1)^2dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(t^2-5t+4)dt$

9 放物線 $y=x^2$ と次の放物線で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) $y=-x^2+2x+4$

(2) $y=\dfrac{1}{2}x^2+2$

10 関数 $y=|x^2-1|$ のグラフは，右の図のようになる．このグラフと x 軸および2直線 $x=-2$，$x=2$ で囲まれた部分の面積を求めよ．



6.4 章末問題

6.4.1 章末問題 A

1 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (2x+1)(1-x^2)$ (2) $y = (x-2)(x^2+2x+4)$

2 曲線 $y = x^3 - 4x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(3, -9)$ における接線を ℓ とする.

(1) ℓ の方程式を求めよ.

(2) この曲線の接線で, ℓ に平行なものの接点 B の x 座標を求めよ.

3 関数 $y = x^2(x-a)$ の増減を次の各場合について調べ，極大値がある場合はその極大値を求めよ．ただし，a は定数とする．

(1) $a > 0$　　(2) $a = 0$　　(3) $a < 0$

4 関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が，$x = 1$ で極大値 5 をとり，$x = 3$ で極小値 1 をとるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ．

5 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(2x-3)^2dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(t^2-2)dt$

6 関数 $f(x)=\displaystyle\int_{1}^{x}(t-1)(t-2)dt$ の極大値を求めよ.

7 放物線 $y = x^2 - 5$ と x 軸および 2 直線 $x = -3$, $x = 3$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和を求めよ.

8 放物線 $y = x^2 - 3x$ と次の 2 直線で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) $y = 0$, $y = 4$

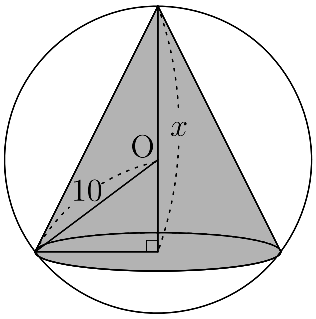
(2) $y = 2x$, $y = -x$

6.4.2 章末問題 B

9 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + kx$ が常に増加するように，定数 k の値の範囲を定めよ．

10 k は定数とする． $x \geqq 0$ のとき，不等式 $x^3 - 6x^2 + k \geqq 0$ が成り立つような k の値の最小値を求めよ．

11 右の図のように，半径 10 の球に内接する直円錐（すい）がある．このような直円錐の体積 V の最大値 V_1 と球の体積 V_2 の比を求めよ．



12 どんな 1 次関数 $f(x)$ に対しても，不等式 $\left\{\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2 < \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$ が成り立つことを証明せよ．

13 等式 $f(x) = x^2 + 2\int_0^1 f(t)\,dt$ が，任意の実数 x に対して成り立つとき，関数 $f(x)$ を求めよ．

14 放物線 $y = x^2 - ax$ と x 軸で囲まれた部分の面積が $\dfrac{4}{3}$ になるような定数 a の値を求めよ．

15 放物線 $y = x^2 - 2x + 4$ に原点 O から 2 本の接線を引くとき，放物線と 2 本の接線で囲まれた部分の面積を求めよ．

ヒント

9　常に $f'(x) \geqq 0$ が成り立つ．　**12**　$f(x) = ax + b$ とおく．ただし，$a \neq 0$

13　$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = a$ とすると，a は t に無関係な定数で　$f(x) = x^2 + 2a$

発展　**4 次関数のグラフ**

関数 x^n の導関数について，225 ページでは，$n=1,\ 2,\ 3$ の場合を学んだが，一般に次のことが成り立つ．

関数 x^n の導関数

関数 x^n の導関数は　$\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$　　n は正の整数

補足　このことについては，数学 III で詳しく扱っている．

例 1　関数 $y = x^4 + 2x^3 + 1$ の増減，極値とグラフ

$$y' = 4x^3 + 6x^2$$
$$= 2x^2(2x+3)$$

$y' = 0$ とすると

$$x = 0,\ -\frac{3}{2}$$

y の増減表は，右のようになる．

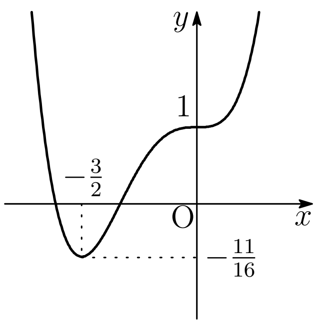
よって，この関数は

$$x = -\frac{3}{2} \text{ で極小値 } -\frac{11}{16}$$

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$\searrow$	極小 $-\frac{11}{16}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$



練習 1 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ．また，そのグラフをかけ．

(1)　$y = x^4 - 4x^3 + 1$　　(2)　$y = x^4 - 2x^2$

【解】 (1) $y' = 4x^3 - 12x^2$

$= 4x^2(x-3)$

$y' = 0$ とすると

$x = 0,\ 3$

y の増減表は，右のようになる．

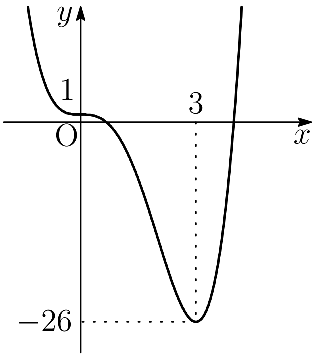
x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	1	$\searrow$	極小 -26	$\nearrow$

よって，この関数は

$x = 3$ で極小値 -26

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



(2) $y' = 4x^3 - 4x^2$

$= 4x(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると

$x = -1,\ 0,\ 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$

y の増減表は，右のようになる．

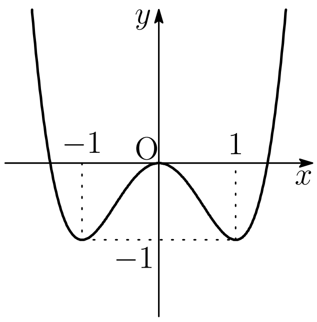
よって，この関数は

$x = \pm 1$ で極小値 -1

$x = 0$ で極大値 0

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



発展 **3 次関数のグラフと面積**

関数 x^n の不定積分について，249 ページでは $n=0,\ 1,\ 2$ の場合について学んだ．また，前ページから，n が 0 または正の整数のとき，

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}(x^{n+1})' = \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)x^n = x^n$$

である．よって，一般に次のことが成り立つ．

関数 x^n の不定積分

n が 0 または正の整数のとき $\displaystyle\int \boldsymbol{x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$

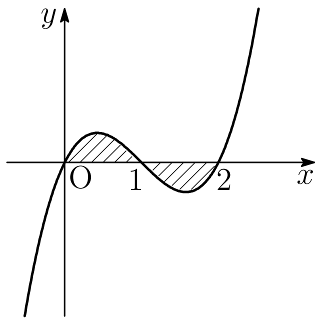
補足 このことについては，数学 III で詳しく扱っている．

例 1 曲線 $y = x(x-1)(x-2)$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和

方程式 $x(x-1)(x-2)=0$ を解くと

$$x = 0,\ 1,\ 2$$

グラフは右の図のようになり



$0 \leqq x \leqq 1$ で　$y \geqq 0$
$1 \leqq x \leqq 2$ で　$y \leqq 0$

よって，求める面積の和 S は

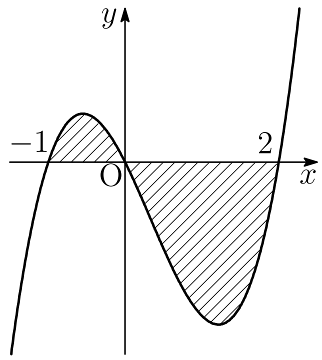
$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x^3-3x^2+2x)\,dx + \int_1^2 \{-(x^3-3x^2+2x)\}\,dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

練習 1 曲線 $y = x(x+1)(x-2)$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ．

【解】 方程式 $x(x+1)(x-2)=0$ を解くと

$$x=-1,\ 0,\ 2$$

グラフは右の図のようになり



$$-1 \leqq x \leqq 0 \text{ で } \quad y \geqq 0$$
$$0 \leqq x \leqq 2 \text{ で } \quad y \leqq 0$$

よって，求める面積の和 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx + \int_{0}^{2}\{-(x^3-x^2-2x)\}\,dx \\ &= \left[\ \frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\ \right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\ \right]_{0}^{2} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$