

高校生の

# 新 編 数 学 II

解答編

平成 20 年 2 月 24 日

*Typed by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>*

# 目次

第1章	式と証明	1
1.1	式と計算	1
1.1.1	多項式の割り算	1
1.1.2	分数式とその計算	3
1.1.3	恒等式	6
1.1.4	補充問題	7
1.2	等式・不等式の証明	10
1.2.1	等式の証明	10
1.2.2	不等式の証明	12
1.2.3	補充問題	16
1.3	章末問題	17
1.3.1	章末問題 A	17
1.3.2	章末問題 B	21
第2章	複素数と方程式	25
2.1	複素数と方程式の解	25
2.1.1	複素数とその計算	25
2.1.2	2次方程式の解	28
2.1.3	解と係数の関係	30
2.1.4	補充問題	35
2.2	高次方程式	36
2.2.1	剰余の定理と因数定理	36
2.2.2	高次方程式	39
2.2.3	補充問題	42
2.3	章末問題	44
2.3.1	章末問題 A	44
2.3.2	章末問題 B	47
第3章	図形と方程式	53
3.1	点と直線	53
3.1.1	直線上の点	53
3.1.2	平面上の点	54
3.1.3	直線の方程式	57
3.1.4	2直線の関係	58
3.1.5	補充問題	61

3.2	円	63
3.2.1	円の方程式	63
3.2.2	円と直線	66
3.2.3	補充問題	69
3.3	軌跡と領域	72
3.3.1	軌跡と方程式	72
3.4	不等式の表す領域	74
3.4.1	補充問題	80
3.5	章末問題	81
3.5.1	章末問題 A	81
3.5.2	章末問題 B	86
<b>第 4 章</b>	<b>三角関数</b>	<b>89</b>
4.1	三角関数	89
4.1.1	角の拡張	89
4.1.2	三角関数	91
4.1.3	三角関数のグラフ	94
4.1.4	三角関数の性質	98
4.1.5	三角関数を含む方程式・不等式	99
4.1.6	補充問題	104
4.2	加法定理	107
4.2.1	三角関数の加法定理	107
4.2.2	加法定理の応用	110
4.2.3	補充問題	115
4.3	章末問題	118
4.3.1	章末問題 A	118
4.3.2	章末問題 B	124
<b>第 5 章</b>	<b>指数関数と対数関数</b>	<b>131</b>
5.1	指数関数	131
5.1.1	指数の拡張	131
5.1.2	指数関数	134
5.1.3	補充問題	136
5.2	対数関数	138
5.2.1	対数とその性質	138
5.2.2	対数関数	142
5.2.3	常用対数	146
5.2.4	補充問題	149
5.3	章末問題	150

5.3.1	章末問題 A	150
5.3.2	章末問題 B	154
5.4	常用対数表 (1)	159
5.5	常用対数表 (2)	160
<b>第 6 章</b>	<b>微分と積分</b>	<b>161</b>
6.1	微分係数と導関数	161
6.1.1	微分係数	161
6.1.2	導関数とその計算	163
6.1.3	接線の方程式	166
6.1.4	補充問題	167
6.2	関数の値の変化	169
6.2.1	関数の増減と極大・極小	169
6.2.2	関数の増減・グラフの応用	173
6.2.3	補充問題	177
6.3	積分法	180
6.3.1	不定積分	180
6.3.2	定積分	181
6.3.3	図形の面積と定積分	186
6.3.4	補充問題	190
6.4	章末問題	192
6.4.1	章末問題 A	192
6.4.2	章末問題 B	198

# 第 1 章 式と証明

## 1.1 式と計算

### 1.1.1 多項式の割り算

練習 1.1 次の多項式  $A, B$  について,  $A$  を  $B$  で割った商と余りを求めよ.

- (1)  $A = 3x^2 + 5x + 4, \quad B = x + 2$   
(2)  $A = x^3 - 4x^2 - 5, \quad B = x - 3$   
(3)  $A = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 4, \quad B = x^2 - x + 2$   
(4)  $A = x^3 - 7x + 6, \quad B = x^2 - 3 + 2x$

【解】(1) 
$$\begin{array}{r} 3x - 1 \\ x + 2 \overline{) 3x^2 + 5x + 4} \\ \underline{3x^2 + 6x} \phantom{+ 4} \\ -x + 4 \\ \underline{-x - 2} \\ 6 \end{array}$$

商  $3x - 1$ , 余り  $6$

(2) 
$$\begin{array}{r} x^2 - x - 3 \\ x - 3 \overline{) x^3 - 4x^2 - 5} \\ \underline{x^3 - 3x^2} \phantom{- 5} \\ -x^2 - 5 \\ \underline{-x^2 + 3x} \\ -3x - 5 \\ \underline{-3x + 9} \\ -14 \end{array}$$

商  $x^2 - x - 3$ , 余り  $-14$

(3) 
$$\begin{array}{r} 2x + 7 \\ x^2 - x + 2 \overline{) 2x^3 + 5x^2 - 2x + 4} \\ \underline{2x^3 - 2x^2 + 4x} \phantom{+ 4} \\ 7x^2 - 6x + 4 \\ \underline{7x^2 - 7x + 14} \\ x - 10 \end{array}$$

商  $2x + 7$ , 余り  $x - 10$

(4) 
$$\begin{array}{r} x - 2 \\ x^2 + 2x - 3 \overline{) x^3 - 7x + 6} \\ \underline{x^3 + 2x^2 - 3x} \phantom{+ 6} \\ -2x^2 - 4x + 6 \\ \underline{-2x^2 - 4x + 6} \\ 0 \end{array}$$

商  $x - 2$ , 余り  $0$

練習 1.2 次の条件を満たす多項式  $B$  を求めよ .

(1)  $3x^2 - 4x + 5$  を  $B$  で割ると , 商が  $x - 1$  , 余りが 4

(2)  $x^3 + 4x^2 + 4x - 2$  を  $B$  で割ると , 商が  $x + 3$  , 余りが  $2x + 1$

【解】 (1) この割り算について , 次の等式が成り立つ .

$$3x^2 - 4x + 5 = B \times (x - 1) + 4$$

整理すると

$$3x^2 - 4x + 1 = B \times (x - 1)$$

よって ,  $3x^2 - 4x + 1$  は  $x - 1$  で割り切れて , その商が  $B$  である .

右の計算により

$$B = 3x - 1$$

$$\begin{array}{r} 3x - 1 \\ x + 2 \overline{) 3x^2 - 4x + 1} \\ \underline{3x^2 - 3x} \phantom{+ 1} \\ -x + 1 \\ \underline{-x + 1} \\ 0 \end{array}$$

(2) この割り算について , 次の等式が成り立つ .

$$x^3 + 4x^2 + 4x - 2 = B \times (x + 3) + 2x + 1$$

整理すると

$$x^3 + 4x^2 + 2x - 3 = B \times (x + 3)$$

よって ,  $x^3 + 4x^2 + 2x - 3$  は  $x + 3$  で割り切れて , その商が  $B$  である .

右の計算により

$$B = x^2 + x - 1$$

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 1 \\ x + 3 \overline{) x^3 + 4x^2 + 2x - 3} \\ \underline{x^3 + 3x^2} \phantom{+ 2x - 3} \\ x^2 + 2x - 3 \\ \underline{x^2 + 3x} \phantom{- 3} \\ -x - 3 \\ \underline{-x - 3} \\ 0 \end{array}$$

## 1.1.2 分数式とその計算

練習 1.3 次の分数式を約分して，既約分数式で表せ．

$$(1) \frac{15ab^4}{6a^3b^2} \qquad (2) \frac{x^2 - 9}{x^2 + 7x + 12} \qquad (3) \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 7x + 3}$$

【解】 (1)  $\frac{15ab^4}{6a^3b^2} = \frac{5b^2 \cdot 3ab^2}{2a^2 \cdot 3ab^2} = \frac{5b^2}{2a^2}$

(2)  $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 7x + 12} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+4)(x+3)} = \frac{x-3}{x+4}$

(3)  $\frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 7x + 3} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(2x-1)} = \frac{x+1}{2x-1}$

練習 1.4 次の計算をせよ．

$$(1) \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x} \times \frac{x}{x+2} \qquad (2) \frac{2x}{2x+1} \times \frac{2x^2 - 3x - 2}{x-2}$$

$$(3) \frac{x-2}{x^2+3x} \div \frac{x^2-3x}{x^2-9} \qquad (4) \frac{x^2-x}{x-3} \div \frac{x^2+5x}{x^2+2x-15}$$

【解】 (1)  $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x} \times \frac{x}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-3)} \times \frac{x}{x+2} = \frac{x-2}{x-3}$

(2)  $\frac{2x}{2x+1} \times \frac{2x^2 - 3x - 2}{x-2} = \frac{2x}{2x+1} \times \frac{(x-2)(2x+1)}{x-2} = 2x$

(3)  $\frac{x-2}{x^2+3x} \div \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{x-2}{x(x+3)} \times \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x-2}{x^2}$

(4)  $\frac{x^2-x}{x-3} \div \frac{x^2+5x}{x^2+2x-15} = \frac{x(x-1)}{x-3} \times \frac{(x-3)(x+5)}{x(x+5)} = x-1$

練習 1.5 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x-1}$$

$$(2) \frac{2x}{x+3} + \frac{x+9}{x+3}$$

$$(3) \frac{3x-1}{x-2} - \frac{2x-3}{x-2}$$

$$(4) \frac{2x^2}{x-1} - \frac{x+1}{x-1}$$

【解】(1)  $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x-1} = \frac{x+2}{x-1}$

$$(2) \frac{2x}{x+3} + \frac{x+9}{x+3} = \frac{2x+(x+9)}{x+3} = \frac{3x+9}{x+3} = \frac{3(x+3)}{x+3} = 3$$

$$(3) \frac{3x-1}{x-2} - \frac{2x-3}{x-2} = \frac{(3x-1)-(2x-3)}{x-2} = \frac{x+2}{x-2}$$

$$(4) \frac{2x^2}{x-1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{2x^2-x-1}{x-1} = \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} = 2x+1$$

練習 1.6 次の計算をせよ .

$$(1) \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} \qquad (2) \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x}$$

$$(3) \frac{x}{x+1} + \frac{3x-1}{x^2-2x-3} \qquad (4) \frac{3x+5}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x}$$

【解】 (1)  $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)} + \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-2)}$   
 $= \frac{(2x-4) + (3x+3)}{(x+1)(x-2)} = \frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$

(2)  $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x} = \frac{x^2}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)}$   
 $= \frac{x^2-1}{x(x-1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x}$

(3)  $\frac{x}{x+1} + \frac{3x-1}{x^2-2x-3} = \frac{x(x-3)}{(x+1)(x-3)} + \frac{3x-1}{(x+1)(x-3)}$   
 $= \frac{(x^2-3x) + (3x-1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x^2-1}{(x+1)(x-3)}$   
 $= \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x-1}{x-3}$

(4)  $\frac{3x+5}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x} = \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x(x+1)}$   
 $= \frac{x(3x+5)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-1}{x(x+1)(x-1)}$   
 $= \frac{(3x^2+5x) - (x-1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-1)}$   
 $= \frac{(x+1)(3x+1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{3x+1}{x(x-1)}$

## 1.1.3 恒等式

練習 1.7 次の等式のうち,  $x$  についての恒等式はどれか.

$$(1) (x+1)(x-1) = x^2 - 1 \quad (2) x(x-1) + x = 2x$$

$$(3) \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{2x+1} \quad (4) \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x(x+2)}$$

【解】それぞれ左辺について

$$(1) \text{左辺} = x^2 - 1$$

$$(2) \text{左辺} = x^2 - x + x = x^2$$

$$(3) \text{左辺} = \frac{(x+1) + x}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

$$(4) \text{左辺} = \frac{(x+2) - x}{x(x+2)} = \frac{2}{x(x+2)}$$

よって,  $x$  についての恒等式は (1), (4)

練習 1.8 等式  $2x^2 - 7x + 8 = (x-3)(ax+b) + c$  が  $x$  についての恒等式であるとき, 定数  $a, b, c$  の値を求めよ.

【解】等式の右辺を整理すると

$$2x^2 - 7x + 8 = ax^2 + (-3a+b)x + (-3b+c)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$2 = a, -7 = -3a + b, 8 = -3b + c$$

これを解いて  $a = 2, b = -1, c = 5$

練習 1.9 等式  $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$  が  $x$  についての恒等式であるとき, 定数  $a, b$  の値を求めよ.

【解】等式の両辺に  $x(x+1)$  をかけると, 次の等式が得られる.

$$1 = a(x+1) + bx$$

右辺を整理すると

$$1 = (a+b)x + a$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$0 = a+b, 1 = a$$

これを解いて  $a = 1, b = -1$

#### 1.1.4 補充問題

1 多項式  $A = 4x^2 - 5ax - 6a^2, B = x - 2a$  について, 各式を  $x$  についての多項式とみて,  $A$  を  $B$  で割った商と余りを求めよ.

【解】

$$\begin{array}{r} 4x + 3a \\ x - 2a \overline{) 4x^2 - 5ax - 6a^2} \\ \underline{4x^2 - 8ax} \phantom{- 6a^2} \\ 3ax - 6a^2 \\ \underline{3ax - 6a^2} \\ 0 \end{array}$$

商  $4x + 3a$ , 余り  $0$

**2**  $A = 1 + \frac{1}{x}$ ,  $B = x - \frac{1}{x}$  とするとき,  $\frac{A}{B}$  を既約分数式で表せ.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } \frac{A}{B} &= \frac{1 + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x^2-1}{x}} = \frac{x+1}{x} \div \frac{x^2-1}{x} \\ &= \frac{x+1}{x} \times \frac{x}{x^2-1} = \frac{x+1}{x} \times \frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【別解】 } \frac{A}{B} &= \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \times x}{\left(x - \frac{1}{x}\right) \times x} = \frac{x+1}{x^2-1} \\ &= \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

**3** 次の計算をせよ.

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

$$\begin{aligned} \text{【解】 与式} &= \frac{(x+2)(x+3) + x(x+3) + x(x+1)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{3x^2 + 9x + 6}{x(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{3(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{3}{x(x+3)} \end{aligned}$$

4 次の等式が  $x$  についての恒等式であるとき，定数  $a, b$  の値を求めよ．

$$(1) (a + b - 4)x + (a - b + 2) = 0$$

$$(2) (x + 1)a + (2x - 1)b + 2x + 5 = 0$$

【解】 (1) 両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$a + b - 4 = 0, a - b + 2 = 0$$

これを解いて  $a = 1, b = 3$

(2) 左辺を  $x$  について整理すると

$$(a + 2b + 2)x + (a - b + 5) = 0$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$a + 2b + 2 = 0, a - b + 5 = 0$$

これを解いて  $a = -4, b = 1$

## 1.2 等式・不等式の証明

## 1.2.1 等式の証明

練習 1.10 次の等式を証明せよ .

$$(1) a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

$$(2) a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$$

$$(3) (1 + x)^3 = 1 + x + x(1 + x) + x(1 + x)^2$$

[証明] (1) 右辺 =  $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) + 3a^2b - 3ab^2 = a^3 - b^3$   
よって  $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

$$(2) \text{右辺} = \left\{a^2 + 2a \cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right\} + \frac{3}{4}b^2 = a^2 + ab + b^2$$

$$\text{よって } a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$$

$$(3) \text{左辺} = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

$$\text{右辺} = 1 + x + x + x^2 + x(1 + 2x + x^2) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

左辺と右辺が同じ式になるから

$$(1 + x)^3 = 1 + x + x(1 + x) + x(1 + x)^2$$

[証終]

練習 1.11  $a + b = c$  のとき , 次の等式を証明せよ .

$$a^2 + bc = b^2 + ca$$

[証明]  $c = a + b$  であるから

$$\begin{aligned} a^2 + bc - (b^2 + ca) &= a^2 + b(a + b) - b^2 - (a + b)a \\ &= a^2 + ab + b^2 - b^2 - a^2 - ab \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって } a^2 + bc = b^2 + ca$$

[証終]

練習 1.12  $a + b + c = 0$  のとき，次の等式を証明せよ．

$$(1) a^2 + ca = b^2 + bc$$

$$(2) ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 3abc = 0$$

[証明] (1)  $c = -(a + b)$  であるから

$$\begin{aligned} a^2 + ca - (b^2 + bc) &= a^2 - (a + b)a - b^2 + b(a + b) \\ &= a^2 - a^2 - ab - b^2 + ab + b^2 = 0 \end{aligned}$$

よって  $a^2 + ca = b^2 + bc$

(2)  $a + b = -c$  ,  $b + c = -a$  ,  $c + a = -b$  であるから

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= ab(-c) + bc(-a) + ca(-b) + 3abc \\ &= -abc - abc - abc + 3abc = 0 \end{aligned}$$

よって  $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 3abc = 0$

[証終]

練習 1.13  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  のとき，次の等式を証明せよ．

$$(1) \frac{2a + 3c}{2b + 3d} = \frac{2a - 3c}{2b - 3d} \quad (2) \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

[証明]  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$  とおくと  $a = bk$  ,  $c = dk$

$$(1) \frac{2a + 3c}{2b + 3d} = \frac{2bk + 3dk}{2b + 3d} = \frac{k(2b + 3d)}{2b + 3d} = k$$

$$\frac{2a - 3c}{2b - 3d} = \frac{2bk - 3dk}{2b - 3d} = \frac{k(2b - 3d)}{2b - 3d} = k$$

よって  $\frac{2a + 3c}{2b + 3d} = \frac{2a - 3c}{2b - 3d}$

$$(2) \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{b^2k^2 + d^2k^2}{b^2 + d^2} = \frac{k^2(b^2 + d^2)}{b^2 + d^2} = k^2$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2k^2}{b^2} = k^2$$

よって  $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{a^2}{b^2}$

練習 1.14  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 2$  のとき，次の式の値を求めよ．

$$(1) \frac{a+c}{b+d}$$

$$(2) \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2}$$

【解】  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 2$  であるから  $a = 2b, c = 2d$

$$(1) \frac{a+c}{b+d} = \frac{2b+2d}{b+d} = \frac{2(b+d)}{b+d} = 2$$

$$(2) \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{(2b)^2 - (2d)^2}{b^2 - d^2} = \frac{4(b^2 - d^2)}{b^2 - d^2} = 4$$

### 1.2.2 不等式の証明

練習 1.15  $x > y$  のとき，次の不等式を証明せよ．

$$3x - 4y > 2x - 3y$$

【証明】  $(3x - 4y) - (2x - 3y) = x - y$

$x > y$  であるから  $x - y > 0$

よって  $(3x - 4y) - (2x - 3y) > 0$

したがって  $3x - 4y > 2x - 3y$

[ 証終 ]

練習 1.16  $x > 2, y > 3$  のとき，次の不等式を証明せよ．

$$xy + 6 > 3x + 2y$$

【証明】  $(xy + 6) - (3x + 2y) = xy - 3x - 2y + 6$

$$= x(y - 3) - 2(y - 3)$$

$$= (x - 2)(y - 3)$$

$x > 2, y > 3$  であるから

$$x - 2 > 0, y - 3 > 0$$

よって  $(x - 2)(y - 3) > 0$

したがって  $xy + 6 > 3x + 2y$

[ 証終 ]

練習 1.17 次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．

$$(1) x^2 + 4y^2 \geq 4xy$$

$$(2) (x + y)^2 \geq 4xy$$

$$(3) a^2 + 5b^2 \geq 4ab$$

$$(4) a^2 - ab + b^2 \geq 0$$

[ 証明 ] (1)  $x^2 + 4y^2 - 4xy = (x - 2y)^2 \geq 0$

したがって  $x^2 + 4y^2 \geq 4xy$

等号が成り立つのは， $x - 2y = 0$ ，

すなわち  $x = 2y$  のときである．

$$(2) (x + y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \\ = (x - y)^2 \geq 0$$

したがって  $(x + y)^2 \geq 4xy$

等号が成り立つのは， $x - y = 0$ ，

すなわち  $x = y$  のときである．

$$(3) a^2 + 5b^2 - 4ab = a^2 - 4ab + 4b^2 + b^2 \\ = (a - 2b)^2 + b^2 \geq 0$$

したがって  $a^2 + 5b^2 \geq 4ab$

等号が成り立つのは， $a - 2b = 0$  かつ  $b = 0$ ，

すなわち  $a = b = 0$  のときである．

$$(4) a^2 - ab + b^2 = a^2 - ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3}{4}b^2 \\ = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$$

したがって  $a^2 - ab + b^2 \geq 0$

等号が成り立つのは， $a - \frac{b}{2} = 0$  かつ  $b = 0$ ，

すなわち  $a = b = 0$  のときである．

[ 証終 ]

練習 1.18  $x > 0$  のとき，次の不等式を証明せよ．

$$1 + x > \sqrt{1 + 2x}$$

[証明]  $(1 + x)^2 - (\sqrt{1 + 2x})^2 = 1 + 2x + x^2 - (1 + 2x)$   
 $= x^2 > 0$

よって  $(1 + x)^2 > (\sqrt{1 + 2x})^2$

$1 + x > 0$  ,  $\sqrt{1 + 2x} > 0$  であるから

$$1 + x > \sqrt{1 + 2x}$$

[証終]

練習 1.19 次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．

$$|a| + |b| \geq |a - b|$$

[証明]  $(|a| + |b|)^2 - |a - b|^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a - b)^2$   
 $= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$   
 $= 2(|ab| + ab) \geq 0$

よって  $(|a| + |b|)^2 \geq |a - b|^2$

$|a| + |b| \geq 0$  ,  $|a - b| \geq 0$  であるから

$$|a| + |b| \geq |a - b|$$

等号が成り立つのは， $|ab| = -ab$  すなわち  $ab \leq 0$  のときである． [証終]

練習 1.20  $a > 0, b > 0$  のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$(1) a + \frac{4}{a} \geq 4 \qquad (2) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

[証明] (1)  $a > 0, \frac{4}{a} > 0$  であるから, 相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 4$$

よって  $a + \frac{4}{a} \geq 4$

(2)  $\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$  であるから, 相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$$

よって  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

[証終]

## 1.2.3 補充問題

**5**  $a + b + c = 0$  のとき, 次の等式を証明せよ.

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

[証明]  $c = -(a + b)$  であるから

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= a^3 + b^3 - (a + b)^3 + 3ab(a + b) \\ &= a^3 + b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

**6**  $a < b, x < y$  のとき,  $ax + by$  と  $bx + ay$  の大小を不等号を用いて表せ.

[証明]  $(ax + by) - (bx + ay) = by - bx - ay + ax$   
 $= b(y - x) - a(y - x)$   
 $= (b - a)(y - x)$

$b > a, y > x$  であるから

$$b - a > 0, y - x > 0$$

$$(b - a)(y - x) > 0$$

よって  $(ax + by) - (bx + ay) > 0$

したがって  $ax + by > bx + ay$

[証終]

7  $a > 0, b > 0$  のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$(a+b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$$

[証明]  $(a+b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1$   
 $= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$

ここで,  $\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$  であるから, 相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} + 2 = 4$$

よって  $(a+b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$

[証終]

## 1.3 章末問題

### 1.3.1 章末問題 A

1 次の多項式  $A, B$  について,  $A$  を  $B$  で割った商と余りを求めよ.

(1)  $A = x^4 - 1, B = x - 1$

(2)  $A = 4x^3 - 3x - 2, B = 2x^2 + x - 3$

【解】(1)

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 + x + 1 \\ x-1 \overline{) x^4 \phantom{+ 0x^3} - 1} \\ \underline{x^4 - x^3} \phantom{- 1} \\ x^3 \phantom{- 1} \\ \underline{x^3 - x^2} \phantom{- 1} \\ x^2 \phantom{- 1} \\ \underline{x^2 - x} \phantom{- 1} \\ x - 1 \\ \underline{x - 1} \\ 0 \end{array}$$

商  $x^3 + x^2 + x + 1$ , 余り 0

(2)

$$\begin{array}{r} 2x - 1 \\ 2x^2 + x - 3 \overline{) 4x^3 \phantom{+ 0x^2} - 3x - 2} \\ \underline{4x^3 + 2x^2 - 6x} \phantom{- 2} \\ -2x^2 + 3x - 2 \\ \underline{-2x^2 - x + 3} \\ 4x - 5 \end{array}$$

商  $2x - 1$ , 余り  $4x - 5$

2 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 2x + 1} \times \frac{x - 1}{x + 3}$$

$$(2) \frac{a^2 + 4a + 4}{a^2 - 4a} \div \frac{a^2 + 2a}{a - 4}$$

$$(3) \frac{1}{x^2 - x} - \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$(4) \frac{x - y}{xy} + \frac{y - z}{yz} + \frac{z - x}{zx}$$

【解】 (1)  $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 2x + 1} \times \frac{x - 1}{x + 3} = \frac{x(x + 3)}{(x - 1)^2} \times \frac{x - 1}{x + 3} = \frac{x}{x - 1}$

(2)  $\frac{a^2 + 4a + 4}{a^2 - 4a} \div \frac{a^2 + 2a}{a - 4} = \frac{(a + 2)^2}{a(a - 4)} \times \frac{a - 4}{a(a + 2)} = \frac{a + 2}{a^2}$

(3)  $\frac{1}{x^2 - x} - \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x(x - 1)} - \frac{2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{(x + 1) - 2x}{x(x - 1)(x + 1)}$   
 $= \frac{-(x - 1)}{x(x - 1)(x + 1)} = -\frac{1}{x(x + 1)}$

(4)  $\frac{x - y}{xy} + \frac{y - z}{yz} + \frac{z - x}{zx} = \frac{z(x - y) + x(y - z) + y(z - x)}{xyz} = 0$

**3** 次の等式が  $x$  についての恒等式であるとき，定数  $a, b, c$  の値を求めよ．

$$(1) x^3 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$(2) \frac{3}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

**【解】** (1) 等式の右辺を整理すると

$$x^3 = x^3 + (a-3)x^2 + (-2a+b+3)x + (a-b+c-1)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$0 = a-3, 0 = -2a+b+3, 0 = a-b+c-1$$

これを解いて  $a=3, b=3, c=1$

(2) 等式の両辺に  $x^3+1$  をかけると，次の等式が得られる．

$$3 = a(x^2-x+1) + (bx+c)(x+1)$$

右辺を展開して整理すると

$$3 = (a+b)x^2 + (-a+b+c)x + (a+c)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$0 = a+b, 0 = -a+b+c, 3 = a+c$$

これを解いて  $a=1, b=-1, c=2$

4 次の等式を証明せよ .

$$(1) x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \quad (2) x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

[証明] (1) 右辺 =  $\left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - 2$   
 $= x^2 + \frac{1}{x^2}$

よって  $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$

(2) 右辺 =  $\left(x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) - 3x - \frac{3}{x}$   
 $= x^3 + \frac{1}{x^3}$

よって  $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

[証終]

5 次の等式と不等式を証明せよ .

(1)  $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

(2)  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

[証明] (1) 左辺 =  $(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)$   
 $= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$   
 $= 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

よって  $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

(2) (1) より

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$$

よって

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = \frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} \geq 0$$

したがって  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

[証終]

**6**  $a > 0, b > 0$  のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$(1) \quad ab + \frac{9}{ab} \geq 6 \qquad (2) \quad \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right) \geq 9$$

[証明] (1)  $ab > 0, \frac{9}{ab} > 0$  であるから, 相加平均と相乗平均の

大小関係により

$$ab + \frac{9}{ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{9}{ab}} = 6$$

よって  $ab + \frac{9}{ab} \geq 6$

$$(2) \quad \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab} \\ = ab + \frac{4}{ab} + 5$$

ここで,  $ab > 0, \frac{4}{ab} > 0$  であるから, 相加平均と相乗平均の  
大小関係により

$$ab + \frac{4}{ab} + 5 \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} + 5 = 9$$

よって  $\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right) \geq 9$

[証終]

### 1.3.2 章末問題 B

**7** 次の計算をせよ.

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2}$$

【解】  $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{(1+x) + (1-x)}{(1-x)(1+x)} + \frac{2}{1+x^2}$   
 $= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2}$   
 $= \frac{2(1+x^2) + 2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{4}{1-x^4}$

8  $x$  についての多項式  $A = x^3 + ax^2 + 2x + 1$  を  $x^2 + x - 2$  で割ると、余りが  $2x + 5$  となるように、定数  $a$  の値を定めよ。また、そのときの商を求めよ。

【解】多項式  $A$  を 2 次式  $x^2 + x - 2$  で割った商を  $bx + c$  とおくと

$$x^3 + ax^2 + 2x + 1 = (x^2 + x - 2)(bx + c) + 2x + 5$$

右辺を整理すると

$$x^3 + ax^2 + 2x + 1 = bx^3 + (b + c)x^2 + (-2b + c + 2)x + (-2c + 5)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$1 = b, a = b + c, 2 = -2b + c + 2, 1 = -2c + 5$$

これを解くと  $a = 3, b = 1, c = 2$

したがって  $a = 3$ 、商は  $x + 2$

9 等式  $(k + 2)x + (k + 1)y - 3k - 4 = 0$  が、どんな  $k$  の値に対しても成り立つように、 $x, y$  の値を定めよ。

【解】与えられた等式は  $k$  についての恒等式であり、これを  $k$  について整理すると

$$(x + y - 3)k + (2x + y - 4) = 0$$

よって  $x + y - 3 = 0, 2x + y - 4 = 0$

これを解いて  $x = 1, y = 2$

10  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$  のとき，次の等式を証明せよ．

$$\frac{x + 2y + 3z}{a + 2b + 3c} = \frac{x + y + z}{a + b + c}$$

【解】  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$  とおくと

$$x = ak, y = bk, z = ck$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{x + 2y + 3z}{a + 2b + 3c} &= \frac{ak + 2bk + 3ck}{a + 2b + 3c} \\ &= \frac{k(a + 2b + 3c)}{a + 2b + 3c} = k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x + y + z}{a + b + c} &= \frac{ak + bk + ck}{a + b + c} \\ &= \frac{k(a + b + c)}{a + b + c} = k \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{x + 2y + 3z}{a + 2b + 3c} = \frac{x + y + z}{a + b + c}$$

11 次の不等式を証明せよ．

$$5\sqrt{a^2 + b^2} \geq 3|a| + 4|b|$$

$$\begin{aligned} \text{[証明]} (5\sqrt{a^2 + b^2})^2 - (3|a| + 4|b|)^2 &= 25(a^2 + b^2) - (9a^2 + 24|a||b| + 16b^2) \\ &= 16a^2 - 24|a||b| + 9b^2 \\ &= (4|a| - 3|b|)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって } (5\sqrt{a^2 + b^2})^2 \geq (3|a| + 4|b|)^2$$

$5\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0, 3|a| + 4|b| \geq 0$  であるから

$$5\sqrt{a^2 + b^2} \geq 3|a| + 4|b|$$

[証終]

**12**  $a > b > 0$ ,  $a + b = 1$  のとき, 次の数を大きい順に並べよ.

$$\frac{1}{2}, \quad 2ab, \quad a^2 + b^2$$

【解】  $a + b = 1$  であるから  $b = 1 - a$

$a > b > 0$  より

$$a > 1 - a > 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2} < a < 1$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - \frac{1}{2} &= a^2 + (1 - a)^2 - \frac{1}{2} \\ &= 2a^2 - 2a + \frac{1}{2} = 2 \left( a - \frac{1}{2} \right)^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - 2ab &= \frac{1}{2} - 2a(1 - a) \\ &= 2a^2 - 2a + \frac{1}{2} = 2 \left( a - \frac{1}{2} \right)^2 > 0 \end{aligned}$$

以上より  $a^2 + b^2 > \frac{1}{2} > 2ab$

よって, 3つの数を大きい順に並べると  $a^2 + b^2, \frac{1}{2}, 2ab$

## 第 2 章 複素数と方程式

### 2.1 複素数と方程式の解

#### 2.1.1 複素数とその計算

練習 2.1 次の複素数の実部と虚部をいえ .

(1)  $-3 + 5i$       (2)  $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$       (3)  $1$       (4)  $-i$

【解】 (1)  $-3 + 5i$  の実部は  $-3$  , 虚部は  $5$

(2)  $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$  の実部は  $-\frac{1}{2}$  , 虚部  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3)  $1$  の実部は  $1$  , 虚部は  $0$

(4)  $-i$  の実部は  $0$  , 虚部は  $-1$

練習 2.2 次のような実数  $x, y$  を求めよ .

(1)  $(x - 3) + (x + y)i = 0$

(2)  $(x - 2y) + (2x - 3y)i = 4 + 7i$

【解】 (1)  $x - 3, x + y$  は実数であるから

$$x - 3 = 0, x + y = 0$$

これを解いて  $x = 3, y = -3$

(2)  $x - 2y, 2x - 3y$  は実数であるから

$$x - 2y = 4, 2x - 3y = 7$$

これを解いて  $x = 2, y = -1$

練習 2.3 次の計算をせよ .

$$(1) (2 + 3i) + (4 + i) \qquad (2) (-1 + 2i) + (3 - 4i)$$

$$(3) (6 + 4i) - (3 + 2i) \qquad (4) (2 - 3i) - (4 - 2i)$$

【解】 (1)  $(2 + 3i) + (4 + i) = (2 + 4) + (3 + 1)i$   
 $= 6 + 4i$

(2)  $(-1 + 2i) + (3 - 4i) = (-1 + 3) + (2 - 4)i$   
 $= 2 - 2i$

(3)  $(6 + 4i) - (3 + 2i) = (6 - 3) + (4 - 2)i$   
 $= 3 + 2i$

(4)  $(2 - 3i) - (4 - 2i) = (2 - 4) + \{-3 - (-2)\}i$   
 $= -2 - i$

練習 2.4 次の計算をせよ .

$$(1) (1 + 2i)(4 + 3i) \qquad (2) (2 - i)(3 + 4i)$$

$$(3) (2 + 3i)^2 \qquad (4) (3 + 4i)(3 - 4i)$$

【解】 (1)  $(1 + 2i)(4 + 3i) = 4 + 3i + 8i + 6i^2$   
 $= \{4 + 6 \cdot (-1)\} + (3 + 8)i$   
 $= -2 + 11i$

(2)  $(2 - i)(3 + 4i) = 6 + 8i - 3i - 4i^2$   
 $= \{6 - 4 \cdot (-1)\} + (8 - 3)i$   
 $= 10 + 5i$

(3)  $(2 + 3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = \{4 + 9 \cdot (-1)\} + 12i = -5 + 12i$

(4)  $(3 + 4i)(3 - 4i) = 9 - 16i^2 = 9 - 16 \cdot (-1) = 25$

練習 2.5 次の複素数と共役な複素数をいえ .

$$(1) 2 + 3i \qquad (2) 1 - i \qquad (3) \sqrt{3}i \qquad (4) \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

【答】 (1)  $2 - 3i$  (2)  $1 + i$  (3)  $-\sqrt{3}i$  (4)  $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

練習 2.6 次の計算をせよ .

$$(1) \frac{1+2i}{2+3i} \quad (2) \frac{1}{1+i} \quad (3) \frac{5i}{2-i}$$

【解】 (1)  $\frac{1+2i}{2+3i} = \frac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i+4i-6i^2}{2^2+3^2} = \frac{8+i}{13} = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$

(2)  $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

(3)  $\frac{5i}{2-i} = \frac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{10i+5i^2}{2^2+1^2} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$

練習 2.7 次の数を  $i$  を用いて表せ .

$$(1) \sqrt{-5} \quad (2) \sqrt{-9} \quad (3) -2 \text{ の平方根}$$

【解】 (1)  $\sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

(2)  $\sqrt{-9} = \sqrt{9}i = 3i$

(3)  $\pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$

練習 2.8 次の計算をせよ .

$$(1) \sqrt{-2} \times \sqrt{-6} \quad (2) (1+\sqrt{-3})^2 \quad (3) \frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}$$

【解】 (1)  $\sqrt{-2} \times \sqrt{-6} = \sqrt{2}i \times \sqrt{6}i = \sqrt{12}i^2 = -2\sqrt{3}$

(2)  $(1+\sqrt{-3})^2 = (1+\sqrt{3}i)^2 = 1+2\sqrt{3}i+3i^2 = 1+2\sqrt{3}i-3 = -2+2\sqrt{3}i$

(3)  $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}i}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}} = 2i$

練習 2.9 次の方程式の解を求めよ .

$$(1) x^2 = -8 \quad (2) x^2 + 16 = 0 \quad (3) 4x^2 + 1 = 0$$

【解】 (1)  $x = \pm\sqrt{-8} = \pm\sqrt{8}i = \pm 2\sqrt{2}i$

(2)  $x^2 = -16$  より  $x = \pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16}i = \pm 4i$

(3)  $x^2 = -\frac{1}{4}$  より  $x = \pm\sqrt{-\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}i = \pm\frac{1}{2}i$

## 2.1.2 2次方程式の解

練習 2.10 次の2次方程式を解け.

(1)  $x^2 + 3x + 4 = 0$

(2)  $x^2 - 2x + 2 = 0$

(3)  $2x^2 + 5x + 5 = 0$

(4)  $3x^2 - 4x + 2 = 0$

(5)  $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$

(6)  $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$

【解】(1)  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{2}$

(2)  $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$

(3)  $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-15}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{15}i}{4}$

(4)  $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}i}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{3}$

(5)  $x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}$

(6)  $x = \frac{-(-2\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = \sqrt{3} \pm i$

練習 2.11 次の2次方程式の解の種類を判別せよ.

- (1)  $x^2 + 5x + 5 = 0$                       (2)  $4x^2 - 20x + 25 = 0$   
 (3)  $-4x^2 + x - 1 = 0$                       (4)  $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

【解】(1) 2次方程式  $x^2 + 5x + 5 = 0$  の判別式は

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 5$$

よって、この2次方程式は異なる2つの実数解をもつ.

(2) 2次方程式  $4x^2 - 20x + 25 = 0$  の判別式は

$$D = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 0$$

よって、この2次方程式は重解をもつ.

(3) 2次方程式  $-4x^2 + x - 1 = 0$  の判別式は

$$D = 1^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1) = -15 < 0$$

よって、この2次方程式は異なる2つの虚数解をもつ.

(4) 2次方程式  $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$  の判別式は

$$D = (2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 0$$

よって、この2次方程式は重解をもつ.

練習 2.12 2次方程式  $x^2 + 2mx + m = 0$  について、次の問いに答えよ.

- (1) 実数解をもつとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ.  
 (2) 異なる2つの虚数解をもつとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ.

【解】この2次方程式の判別式は

$$D = (2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 4m^2 - 4m = 4m(m - 1)$$

(1) 2次方程式が異なる2つの虚数解をもつのは  $D < 0$  のときである.

よって  $m(m - 1) < 0$

これを解いて  $0 < m < 1$

(2) 2次方程式が実数解をもつのは  $D \geq 0$  のときである.

よって  $m(m - 1) \geq 0$

これを解いて  $m \leq 0, 1 \leq m$

練習 2.13  $m$  を定数とする．次の2次方程式の解の種類を判別せよ．

$$(1) x^2 + 4x + m = 0 \qquad (2) x^2 - mx + 4 = 0$$

【解】 (1) この2次方程式の判別式は

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 16 - 4m = 4(4 - m)$$

よって，2次方程式の解は次のようになる．

$D > 0$  すなわち  $m < 4$  のとき 異なる2つの実数解

$D = 0$  すなわち  $m = 4$  のとき 重解

$D < 0$  すなわち  $m > 4$  のとき 異なる2つの虚数解

(2) この2次方程式の判別式は

$$D = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = m^2 - 16 = (m + 4)(m - 4)$$

よって，2次方程式の解は次のようになる．

$D > 0$  すなわち  $m < -4$ ,  $4 < m$  のとき 異なる2つの実数解

$D = 0$  すなわち  $m = \pm 4$  のとき 重解

$D < 0$  すなわち  $-4 < m < 4$  のとき 異なる2つの虚数解

### 2.1.3 解と係数の関係

練習 2.14 次の2次方程式の2つの解の和と積を，それぞれ求めよ．

$$(1) x^2 + 4x + 2 = 0 \qquad (2) 3x^2 - 6x + 4 = 0$$

【解】 2次方程式の2つの解を  $\alpha, \beta$  とすると

$$(1) \alpha + \beta = -4, \alpha\beta = 2$$

$$(2) \alpha + \beta = -\frac{-6}{3} = 2, \alpha\beta = \frac{4}{3}$$

練習 2.15 2次方程式  $x^2 + 3x - 1 = 0$  の2つの解を  $\alpha, \beta$  とするとき, 次の式の値を求めよ.

(1)  $\alpha^2 + \beta^2$

(2)  $\alpha^3 + \beta^3$

(3)  $(\alpha - \beta)^2$

【解】 解と係数の関係から  $\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = -1$

$$\begin{aligned} (1) \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-3)^2 - 2 \cdot (-1) = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= (-3)^3 - 3 \cdot (-1) \cdot (-3) = -36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (-3)^2 - 4 \cdot (-1) = 13 \end{aligned}$$

練習 2.16 2次方程式  $x^2 + 5x + m = 0$  の2つの解が次の条件を満たすとき, 定数  $m$  の値と2つの解を, それぞれ求めよ.

- (1) 1つの解が他の解の4倍である.
- (2) 2つの解の差が1である.

【解】(1) 2つの解は  $\alpha, 4\alpha$  と表すことができる.

解と係数の関係から  $\alpha + 4\alpha = -5, \alpha \cdot 4\alpha = m$

すなわち  $5\alpha = -5, 4\alpha^2 = m$

よって, 1つの解  $\alpha$  は  $\alpha = -1$

このとき  $m = 4\alpha^2 = 4(-1)^2 = 4$

また, 他の解  $4\alpha$  は  $4\alpha = 4(-1) = -4$

(答)  $m = 4, 2$ つの解は  $-1, -4$

(2) 2つの解は  $\alpha, \alpha + 1$  と表すことができる.

解と係数の関係から  $\alpha + (\alpha + 1) = -5, \alpha(\alpha + 1) = m$

すなわち  $2\alpha + 1 = -5, \alpha(\alpha + 1) = m$

よって, 1つの解  $\alpha$  は  $\alpha = -3$

このとき  $m = \alpha(\alpha + 1) = -3(-3 + 1) = 6$

また, 他の解  $\alpha + 1$  は  $\alpha + 1 = -3 + 1 = -2$

(答)  $m = 6, 2$ つの解は  $-3, -2$

練習 2.17 次の2次式を，複素数の範囲で因数分解せよ．

(1)  $2x^2 - 2x - 3$       (2)  $x^2 - 2x - 4$       (3)  $x^2 + 2x + 3$

【解】 (1) 2次方程式  $2x^2 - 2x - 3 = 0$  の解は  $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$

$$\text{よって } 2x^2 - 2x - 3 = 2 \left( x - \frac{1 + \sqrt{7}}{2} \right) \left( x - \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \right)$$

(2) 2次方程式  $x^2 - 2x - 4 = 0$  の解は  $x = 1 \pm \sqrt{5}$

$$\begin{aligned} \text{よって } x^2 - 2x - 4 &= \{x - (1 + \sqrt{5})\} \{x - (1 - \sqrt{5})\} \\ &= (x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

(3) 2次方程式  $x^2 + 2x + 3 = 0$  の解は  $x = -1 \pm \sqrt{2}i$

$$\begin{aligned} \text{よって } x^2 + 2x + 3 &= \{x - (-1 + \sqrt{2}i)\} \{x - (-1 - \sqrt{2}i)\} \\ &= (x + 1 - \sqrt{2}i)(x + 1 + \sqrt{2}i) \end{aligned}$$

練習 2.18 次の2数を解とする2次方程式を1つ作れ．

(1)  $2, -1$       (2)  $2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$       (3)  $1 + 2i, 1 - 2i$

【解】 (1) 解の和は  $2 + (-1) = 1$

$$\text{解の積は } 2 \times (-1) = -2$$

よって，このような解をもつ2次方程式の1つは

$$x^2 - x - 2 = 0$$

(2) 解の和は  $(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$

$$\text{解の積は } (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1$$

よって，このような解をもつ2次方程式の1つは

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

(3) 解の和は  $(1 + 2i) + (1 - 2i) = 2$

$$\text{解の積は } (1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 + 2^2 = 5$$

よって，このような解をもつ2次方程式の1つは

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

練習 2.19 2次方程式  $x^2 + 2(m-3)x + 4m = 0$  が異なる2つの正の解をもつとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。

【解】この2次方程式の2つの解を  $\alpha, \beta$  とし、判別式を  $D$  とする。  
方程式が条件を満たすのは、次の①、②が成り立つときである。

$$D > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\alpha + \beta > 0 \text{ かつ } \alpha\beta > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで

$$\begin{aligned} D &= \{2(m-3)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4m \\ &= 4(m^2 - 6m + 9) - 16m \\ &= 4(m^2 - 10m + 9) = 4(m-1)(m-9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ より } & (m-1)(m-9) > 0 \\ \text{よって } & m < 1, 9 < m \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\text{解と係数の関係より } \quad \alpha + \beta = -2(m-3), \alpha\beta = 4m$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ より } & -2(m-3) > 0 \text{ かつ } 4m > 0 \\ \text{よって } & m < 3 \quad \dots \textcircled{4} \\ & m > 0 \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

③、④、⑤の共通範囲を求めて

$$0 < m < 1$$

## 2.1.4 補充問題

1 次の計算をせよ.

$$(1) \left( \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 \quad (2) i + \frac{1}{i} \quad (3) i + i^2 + i^3 + i^4$$

【解】 (1)  $\left( \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2}{4} = \frac{1 - 2\sqrt{3}i - 3}{4}$   
 $= \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

(2)  $i + \frac{1}{i} = i + \frac{i}{i^2} = i + \frac{i}{-1} = 0$

(3)  $i + i^2 + i^3 + i^4 = i + i^2 + i^2 \cdot i + (i^2)^2 = i + (-1) + (-1)i + (-1)^2 = 0$

2 2次方程式  $ax^2 + 2bx + c = 0$  の解は、次のようになる.

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

このことを用いて、次の2次方程式を解け.

(1)  $x^2 - 2x + 5 = 0$       (2)  $3x^2 - 2x + 1 = 0$

【解】 (1)  $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot 5}}{1} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$

(2)  $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot 1}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{-2}}{3} = \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}$

3 和と積が、ともに3であるような2数を求めよ.

【解】 求める2数は、次の2次方程式の解である.

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

これを解くと

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

よって、求める2数は  $\frac{3 + \sqrt{3}i}{2}$ ,  $\frac{3 - \sqrt{3}i}{2}$

4 2次方程式  $x^2 + 2x + 4 = 0$  の2つの解を  $\alpha, \beta$  とするとき, 2数  $\alpha - 1, \beta - 1$  を解とする2次方程式を1つ作れ.

【解】解と係数の関係から  $\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 4$

$$\begin{aligned} \text{ここで } (\alpha - 1) + (\beta - 1) &= (\alpha + \beta) - 2 \\ &= -2 - 2 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha - 1)(\beta - 1) &= \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 \\ &= 4 - (-2) + 1 = 7 \end{aligned}$$

よって,  $\alpha - 1, \beta - 1$  を解とする2次方程式の1つは

$$x^2 + 4x + 7 = 0$$

## 2.2 高次方程式

### 2.2.1 剰余の定理と因数定理

練習 2.20  $P(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$  を次の1次式で割った余りを求めよ.

- (1)  $x - 1$                       (2)  $x - 2$                       (3)  $x + 1$                       (4)  $x + 2$

【解】(1) 求める余りは  $P(1)$  で

$$P(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = -3$$

(2) 求める余りは  $P(2)$  で

$$P(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

(3) 求める余りは  $P(-1)$  で

$$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 2 = 1$$

(4) 求める余りは  $P(-2)$  で

$$P(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 2 = 0$$

練習 2.21  $x$  の多項式  $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + ax + 1$  を  $x + 1$  で割った余りが 2 であるとき、定数  $a$  の値を求めよ。

【解】  $P(-1) = 2$  であるから

$$2 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1) + 1 = 2$$

整理すると  $-a = -2$

よって  $a = 2$

練習 2.22 多項式  $P(x)$  を  $x - 3$ ,  $x + 1$  で割った余りがそれぞれ 1, 5 であるとき、 $P(x)$  を  $(x - 3)(x + 1)$  で割った余りを求めよ。

【解】  $P(x)$  を 2 次式  $(x - 3)(x + 1)$  で割った余りを  $ax + b$  とおいて、商を  $Q(x)$  とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x - 3)(x + 1)Q(x) + ax + b$$

この等式より  $P(3) = 3a + b$ ,  $P(-1) = -a + b$

また、 $x - 3$  で割った余りが 1 であるから  $P(3) = 1$

$x + 1$  で割った余りが 5 であるから  $P(-1) = 5$

よって  $3a + b = 1$ ,  $-a + b = 5$

これを解くと  $a = -1$ ,  $b = 4$

したがって、求める余りは  $-x + 4$

練習 2.23 次のうち、多項式  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$  の因数であるものはどれか。

①  $x - 1$

②  $x - 2$

③  $x + 1$

④  $x + 2$

【解】  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$  において

①  $P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 = -8$

②  $P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 6 = 0$

③  $P(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = 0$

④  $P(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) - 6 = 4$

よって、多項式  $P(x)$  の因数であるものは ②, ③

練習 2.24 次の式を因数分解せよ .

$$(1) x^3 - 4x^2 + x + 6$$

$$(2) 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$$

【解】 (1)  $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$  とすると

$$P(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = 0$$

よって,  $P(x)$  は  $x + 1$  を因数にもつ .

右の割り算から

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$$

したがって

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 5x + 6 \\ x + 1 \overline{) x^3 - 4x^2 + x + 6} \\ \underline{x^3 + x^2} \phantom{+ 6} \\ -5x^2 + x \phantom{+ 6} \\ \underline{-5x^2 - 5x} \phantom{+ 6} \\ 6x + 6 \\ \underline{6x + 6} \\ 0 \end{array}$$

(2)  $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$  とすると

$$\begin{aligned} P(-1) &= 2(-1)^3 + 7(-1)^2 + 2(-1) - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって,  $P(x)$  は  $x + 1$  を因数にもつ .

右の割り算から

$$2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = (x + 1)(2x^2 + 5x - 3)$$

したがって

$$2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = (x + 1)(x + 3)(2x - 1)$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 5x - 3 \\ x + 1 \overline{) 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3} \\ \underline{2x^3 + 2x^2} \phantom{- 3} \\ 5x^2 + 2x \phantom{- 3} \\ \underline{5x^2 + 5x} \phantom{- 3} \\ -3x - 3 \\ \underline{-3x - 3} \\ 0 \end{array}$$

## 2.2.2 高次方程式

練習 2.25 次の方程式を解け.

$$(1) x^3 - 8 = 0 \qquad (2) x^3 + 1 = 0$$

【解】 (1) 左辺を因数分解すると

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

よって  $x - 2 = 0$  または  $x^2 + 2x + 4 = 0$

したがって  $x = 2, -1 \pm \sqrt{3}i$

(2) 左辺を因数分解すると

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

よって  $x + 1 = 0$  または  $x^2 - x + 1 = 0$

したがって  $x = -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

練習 2.26 次のものを求めよ．

- (1) 27 の 3 乗根                      (2)  $-8$  の 3 乗根

【解】 (1) 27 の 3 乗根は，方程式  $x^3 = 27$  の解である．

$$x^3 - 27 = 0$$

左辺を因数分解すると

$$(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 0$$

よって  $x - 3 = 0$  または  $x^2 + 3x + 9 = 0$

これを解くと  $x = 3, \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

したがって，27 の 3 乗根は  $3, \frac{-3 + 3\sqrt{3}i}{2}, \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{2}$

(2)  $-8$  の 3 乗根は，方程式  $x^3 = -8$  の解である．

$$x^3 + 8 = 0$$

左辺を因数分解すると

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

よって  $x + 2 = 0$  または  $x^2 - 2x + 4 = 0$

これを解くと  $x = -2, 1 \pm \sqrt{3}i$

したがって， $-8$  の 3 乗根は  $-2, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$

練習 2.27 次の方程式を解け．

- (1)  $x^4 + x^2 - 12 = 0$                       (2)  $x^4 - 1 = 0$

【解】 (1) 左辺を因数分解すると

$$(x^2 - 3)(x^2 + 4) = 0$$

よって  $x^2 - 3 = 0$  または  $x^2 + 4 = 0$

したがって  $x = \pm\sqrt{3}, \pm 2i$

(2) 左辺を因数分解すると

$$(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$$

よって  $x^2 + 1 = 0$  または  $x^2 - 1 = 0$

したがって  $x = \pm i, \pm 1$

練習 2.28 次の方程式を解け.

- (1)  $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$                       (2)  $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$   
 (3)  $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$                               (4)  $2x^3 - 3x^2 - 4 = 0$

【解】 (1)  $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$  とすると

$$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 0$$

よって,  $P(x)$  は  $x - 1$  を因数にもち

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 8) = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$$

$$P(x) = 0 \text{ から } x = 1, -2, 4$$

(2)  $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$  とすると

$$P(-1) = (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 2 = 0$$

よって,  $P(x)$  は  $x + 1$  を因数にもち

$$P(x) = (x + 1)(x^2 + 3x + 2) = (x + 1)^2(x + 2)$$

$$P(x) = 0 \text{ から } x = -1, -2$$

(3)  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$  とすると

$$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 = 0$$

よって,  $P(x)$  は  $x - 1$  を因数にもち

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$$

$$P(x) = 0 \text{ から } x - 1 = 0 \text{ または } x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\text{したがって } x = 1, 1 \pm \sqrt{3}$$

(4)  $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$  とすると

$$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 = 0$$

よって,  $P(x)$  は  $x - 2$  を因数にもち

$$P(x) = (x - 2)(2x^2 + x + 2)$$

$$P(x) = 0 \text{ から } x - 2 = 0 \text{ または } 2x^2 + x + 2 = 0$$

$$\text{したがって } x = 2, \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}$$

練習 2.29 3次方程式  $x^3 + x^2 + ax + b = 0$  が  $1 - i$  を解にもつとき、実数の係数  $a, b$  の値を求めよ。また、他の解を求めよ。

【解】  $1 - i$  がこの方程式の解であるから

$$(1 - i)^3 + (1 - i)^2 + a(1 - i) + b = 0$$

整理して  $(a + b - 2) + (-a - 4)i = 0$

$a, b$  は実数であるから  $a + b - 2 = 0, -a - 4 = 0$

これを解くと  $a = -4, b = 6$

このとき、方程式は  $x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$

左辺を因数分解すると  $(x + 3)(x^2 - 2x + 2) = 0$

したがって  $x = -3, 1 \pm i$

(答)  $a = -4, b = 6$ 、他の解は  $-3, 1 + i$

### 2.2.3 補充問題

5  $P(x) = 3x^3 + x^2 + x + 1$  を  $3x + 1$  で割った余りは、 $P\left(-\frac{1}{3}\right)$  に等しいことを示せ。また、この余りを求めよ。

【解】  $P(x)$  を  $3x + 1$  で割った商を  $Q(x)$ 、余りを  $R$  とすると

$$P(x) = (3x + 1)Q(x) + R$$

両辺に  $x = -\frac{1}{3}$  を代入すると  $P\left(-\frac{1}{3}\right) = R$

よって、 $P(x)$  を  $3x + 1$  で割った余り  $R$  は  $P\left(-\frac{1}{3}\right)$  に等しい。

また、 $P(x) = 3x^3 + x^2 + x + 1$  であるから、求める余りは

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{1}{3}\right) &= 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \\ &= -\frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

**6**  $P(x) = x^3 + ax + b$  を  $(x+1)(x-3)$  で割った余りが  $3x-2$  であるとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $P(-1)$ ,  $P(3)$  の値を,  $a$ ,  $b$  で表せ。  
 (2) 定数  $a$ ,  $b$  の値を求めよ。

**【解】** (1)  $P(-1) = (-1)^3 + a \cdot (-1) + b = -a + b - 1$   
 $P(3) = 3^3 + a \cdot 3 + b = 3a + b + 27$

(2)  $P(x)$  を  $(x+1)(x-3)$  で割った余りが  $3x-2$  であるから, 商を  $Q(x)$  とすると, 次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x+1)(x-3)Q(x) + 3x - 2$$

この等式より

$$P(-1) = 3 \cdot (-1) - 2 = -5$$

$$P(3) = 3 \cdot 3 - 2 = 7$$

よって, (1) より

$$-a + b - 1 = -5, 3a + b + 27 = 7$$

これを解いて  $a = -4, b = -8$

**7**  $x$  の方程式  $x^3 - 2x^2 + ax + b = 0$  が  $1$  と  $-1$  を解にもつという。

- (1) 定数  $a$ ,  $b$  の値を求めよ。 (2) 他の解を求めよ。

**【解】** (1)  $1, -1$  がこの方程式の解であるから

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b = 0$$

$$(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1) + b = 0$$

式を整理すると

$$a + b - 1 = 0, -a + b - 3 = 0$$

これを解いて  $a = -1, b = 2$

(2) (1) より, 方程式は

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x+1)(x-2) = 0$$

したがって, 求める他の解は  $2$

## 2.3 章末問題

## 2.3.1 章末問題 A

1 次の計算をせよ.

(1)  $(3 - 2i)(-2 + i)$

(2)  $(1 + \sqrt{-2})(3 - \sqrt{-8})$

(3)  $(1 - i)^3$

(4)  $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-2i}$

【解】 (1)  $(3 - 2i)(-2 + i) = -6 + 3i + 4i - 2i^2$

$$= \{-6 - 2 \cdot (-1)\} + (3 + 4)i = -4 + 7i$$

(2)  $(1 + \sqrt{-2})(3 - \sqrt{-8}) = (1 + \sqrt{2}i)(3 - 2\sqrt{2}i)$

$$= 3 - 2\sqrt{2}i + 3\sqrt{2}i - 4i^2$$

$$= \{3 - 4 \cdot (-1)\} + (-2\sqrt{2} + 3\sqrt{2})i = 7 + \sqrt{2}i$$

(3)  $(1 - i)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 - i^3$

$$= \{1 + 3 \cdot (-1)\} + (-3 + 1)i$$

$$= -2 - 2i$$

(4)  $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-2i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} + \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)}$

$$= \frac{1-i}{1^2+1^2} + \frac{1+2i}{1^2+2^2} = \frac{1-i}{2} + \frac{1+2i}{5}$$

$$= \frac{5(1-i) + 2(1+2i)}{10} = \frac{7}{10} - \frac{1}{10}i$$

2 次の2次方程式を解け.

(1)  $x(x+1) + (x+2)(x+3) = 0$

(2)  $2(x+1)^2 - 4(x+1) + 3 = 0$

【解】 (1) 展開して整理すると  $x^2 + 3x + 3 = 0$

よって  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(2) 展開して整理すると  $2x^2 + 1 = 0$

すなわち  $x^2 = -\frac{1}{2}$

よって  $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}i} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$

**3** 3次方程式  $x^3 - x^2 - x - m = 0$  の3つの解が  $2, \alpha, \beta$  であるとき, 次の値を求めよ.

- (1)  $m$                                       (2)  $\alpha + \beta + 2$                                       (3)  $2\alpha\beta$

**【解】** (1)  $2$  がこの方程式の解であるから

$$2^3 - 2^2 - 2 - m = 0$$

よって  $m = 2$

- (2) (1) より, 方程式は  $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$   
左辺を因数分解すると

$$(x - 2)(x^2 + x + 1) = 0$$

よって,  $x^2 + x + 1 = 0$  の2つの解が  $\alpha, \beta$  である.

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$$

したがって  $\alpha + \beta + 2 = -1 + 2 = 1$

- (3) (2) より  $\alpha\beta = 1$   
よって  $2\alpha\beta = 2 \cdot 1 = 2$

**【別解】** (2), (3)

$$x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x - \alpha)(x - \beta) \text{ より}$$

$$x^3 - x^2 - x - 2 = x^3 - (\alpha + \beta + 2)x^2 + (\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta)x - 2\alpha\beta$$

両辺の係数を比較して  $\alpha + \beta + 2 = 1, 2\alpha\beta = 2$

**4** 2次方程式  $x^2 + 4x + 2 = 0$  の2つの解を  $\alpha, \beta$  とするとき, 次の式の値を求めよ.

- (1)  $\alpha^2 + \beta^2$                                       (2)  $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$                                       (3)  $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$

**【解】** 解と係数の関係より  $\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = 2$

- (1)  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-4)^2 - 2 \cdot 2 = 12$   
 (2)  $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = 2 \cdot (-4) = -8$   
 (3)  $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{12}{2} = 6$

5 次の方程式を解け.

(1)  $8x^3 - 1 = 0$

(2)  $2x^4 + x^2 - 6 = 0$

(3)  $x(x+1)(x+2) = 2 \cdot 3 \cdot 4$

(4)  $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$

【解】 (1) 左辺を因数分解すると

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = 0$$

よって  $2x - 1 = 0$  または  $4x^2 + 2x + 1 = 0$

したがって  $x = \frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{4}$

(2) 左辺を因数分解すると

$$(2x^2 - 3)(x^2 + 2) = 0$$

よって  $2x^2 - 3 = 0$  または  $x^2 + 2 = 0$

したがって  $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}, \pm \sqrt{2}i$

(3) 展開して整理すると

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 24 = 0$$

左辺を因数分解すると

$$(x - 2)(x^2 + 5x + 12) = 0$$

よって  $x - 2 = 0$  または  $x^2 + 5x + 12 = 0$

したがって  $x = 2, \frac{-5 \pm \sqrt{23}i}{2}$

(4)  $x^2 - x = X$  とおくと

$$X^2 - 8X + 12 = 0$$

左辺を因数分解すると

$$(X - 2)(X - 6) = 0$$

よって  $(x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6) = 0$

$$(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 3) = 0$$

したがって  $x = -2, -1, 2, 3$

**6**  $x$  の方程式  $x^3 + ax^2 + bx + 2 = 0$  が  $1 - i$  を解にもつとき，実数の係数  $a$ ， $b$  の値を求めよ．また，他の解を求めよ．

【解】  $1 - i$  がこの方程式の解であるから

$$(1 - i)^3 + a(1 - i)^2 + b(1 - i) + 2 = 0$$

整理して  $b + (-2a - b - 2)i = 0$

$a, b$  は実数であるから

$$b = 0, -2a - b - 2 = 0$$

これを解くと  $a = -1, b = 0$

このとき，方程式は  $x^3 - x^2 + 2 = 0$

左辺を因数分解すると  $(x + 1)(x^2 - 2x + 2) = 0$

したがって  $x = -1, 1 \pm i$

(答)  $a = -1, b = 0$ ，他の解は  $-1, 1 + i$

### 2.3.2 章末問題 B

**7** 2乗して  $5 + 12i$  となる複素数  $z = a + bi$  は2つあり， $a, b$  はともに整数であるという．このような複素数  $z$  を求めよ．

【解】  $(a + bi)^2 = 5 + 12i$  より

$$(a^2 - b^2) + 2abi = 5 + 12i$$

$a, b$  は実数であるから

$$a^2 - b^2 = 5, 2ab = 12$$

すなわち

$$a^2 - b^2 = 5, ab = 6$$

2つの等式を満たす整数  $a, b$  の組は

$$a = 3, b = 2 \quad \text{または} \quad a = -3, b = -2$$

よって  $z = 3 + 2i, -3 - 2i$

8  $2 + 3i$  を解にもつ 2 次方程式を 1 つ作れ .

【解】  $2 + 3i$  と共役な複素数  $2 - 3i$  も同じ方程式の解である .

2 つの解の和は

$$(2 + 3i) + (2 - 3i) = 4$$

2 つの解の積は

$$(2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2 = 13$$

よって, 求める 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

9 2 次方程式  $x^2 + ax + b = 0$  の 2 つの解の和と積を 2 つの解にもつ 2 次方程式の 1 つが,  $x^2 + bx + 2a = 0$  であるという . 0 でない定数  $a, b$  の値を求めよ .

【解】 2 次方程式  $x^2 + ax + b = 0$  について, 解と係数の関係より

2 つの解の 和は  $-a$ , 積は  $b$

また,  $-a, b$  を 2 つの解にもつ 2 次方程式の 1 つが  $x^2 + bx + 2a = 0$  であるから

$$-a + b = -b \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-ab = 2a \quad \cdots \textcircled{2}$$

② において,  $a \neq 0$  より

$$b = -2$$

① より  $a = 2b = 2 \cdot (-2) = -4$

よって  $a = -4, b = -2$

**10** 2次方程式  $x^2 + mx + m + 3 = 0$  が、次のような解をもつとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。

- (1) 異なる2つの負の解                      (2) 符号の異なる解

【解】この2次方程式の2つの解を  $\alpha, \beta$  とし、判別式を  $D$  とする。

- (1) 方程式が異なる2つの負の解をもつのは、次の①、②が成り立つときである。

$$D > 0 \quad \dots \text{①}$$

$$\alpha + \beta < 0 \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta > 0 \quad \dots \text{②}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad D &= m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 3) \\ &= m^2 - 4m - 12 \\ &= (m + 2)(m - 6) \end{aligned}$$

$$\text{①より} \quad (m + 2)(m - 6) > 0$$

$$\text{よって} \quad m < -2, 6 < m \quad \dots \text{③}$$

$$\text{解と係数の関係より} \quad \alpha + \beta = -m, \alpha\beta = m + 3$$

$$\text{②より} \quad -m < 0 \quad \text{かつ} \quad m + 3 > 0$$

$$\text{よって} \quad m > 0 \quad \dots \text{④}, \quad m > -3 \quad \dots \text{⑤}$$

$$\text{③, ④, ⑤の共通範囲を求めて} \quad m > 6$$

- (2) 方程式が符号の異なる解をもつのは、 $\alpha\beta < 0$  のときである。

$$\text{解と係数の関係より, } \alpha\beta = m + 3 \text{ であるから} \quad m + 3 < 0$$

$$\text{よって, 求める} m \text{ の値の範囲は} \quad m < -3$$

**11**  $a, b$  は定数とする.  $x$  の方程式  $x^3 + (a-1)x^2 + (1-a)x + b = 0$  の実数解が  $x = 1$  だけであるとき,  $a$  の値の範囲と  $b$  の値を求めよ.

【解】  $x = 1$  がこの方程式の解であるから

$$1^3 + (a-1) \cdot 1^2 + (1-a) \cdot 1 + b = 0$$

これを解いて  $b = -1$

$b = -1$  を方程式に代入すると

$$x^3 + (a-1)x^2 + (1-a)x - 1 = 0$$

左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x^2 + ax + 1) = 0$$

この方程式の実数解が  $x = 1$  だけであるのは, 次の [1], [2] の場合である.

[1] 2次方程式  $x^2 + ax + 1 = 0$  が実数解をもたない.

判別式を  $D$  とすると

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = (a+2)(a-2)$$

2次方程式が実数解をもたないのは  $D < 0$  のときである.

$$\text{よって } (a+2)(a-2) < 0$$

$$\text{これを解いて } -2 < a < 2$$

[2] 2次方程式  $x^2 + ax + 1 = 0$  が  $x = 1$  を重解にもつ.

$x = 1$  が方程式の解であるから

$$1^2 + a \cdot 1 + 1 = 0$$

$$\text{これを解くと } a = -2$$

このとき, 方程式は  $x^2 - 2x + 1 = 0$  となり, 重解  $x = 1$  をもつ.

[1], [2] より, 求める  $a$  の値の範囲は  $-2 \leq a < 2$

**12** ある立方体から、底面の縦を  $1\text{cm}$ 、横を  $2\text{cm}$ 、それぞれ延ばし、高さを  $1\text{cm}$  縮めた直方体を作ったら、体積が  $\frac{3}{2}$  倍になった。もとの立方体の  $1$  辺の長さを求めよ。

【解】もとの立方体の  $1$  辺の長さを  $x\text{ cm}$  とすると、直方体の辺の長さは、縦  $(x+1)\text{ cm}$ 、横  $(x+2)\text{ cm}$ 、高さ  $(x-1)\text{ cm}$  である。

$$(x+1)(x+2)(x-1) = \frac{3}{2}x^3 \quad (x > 1)$$

展開して整理すると

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$$

左辺を因数分解すると

$$(x-2)(x^2 - 2x - 2) = 0$$

よって  $x = 2, 1 \pm \sqrt{3}$

$x > 1$  であるから  $x = 2, 1 + \sqrt{3}$

したがって、立方体の  $1$  辺の長さは  $2\text{cm}$  または  $(1 + \sqrt{3})\text{cm}$



## 第 3 章 図形と方程式

### 3.1 点と直線

#### 3.1.1 直線上の点

練習 3.1 次の 2 点間の距離を求めよ .

- (1)  $A(6), B(1)$                       (2)  $A(-2), B(3)$

【解】 (1)  $AB = |1 - 6| = |-5| = 5$

(2)  $AB = |3 - (-2)| = |5| = 5$

練習 3.2 数直線上の 3 点  $A(1), B(7), C(3)$  について, 次の  に適する数または用語を入れよ .

- (1) 点  $C$  は線分  $AB$  を  :  に  する .  
(2) 点  $B$  は線分  $AC$  を  :  に  する .  
(3) 点  $A$  は線分  $CB$  を  :  に  する .

【解】 (1)  $AC = 3 - 1 = 2, CB = 7 - 3 = 4$  より

$$AC : CB = 2 : 4 = 1 : 2$$

よって, 点  $C$  は線分  $AB$  を  $1 : 2$  に内分する .

(2)  $AB = 7 - 1 = 6, BC = 7 - 3 = 4$  より

$$AB : BC = 6 : 4 = 3 : 2 \text{ より}$$

よって, 点  $B$  は線分  $AC$  を  $3 : 2$  に外分する .

(3)  $CA = 3 - 1 = 2, AB = 7 - 1 = 6$  より

$$BA : AC = 2 : 6 = 1 : 3$$

よって, 点  $A$  は線分  $CB$  を  $1 : 3$  に外分する .

練習 3.3 2点 A(4), B(8) を結ぶ線分 AB について, 次の点の座標を求めよ.

- (1) 3:2 に内分する点 C                      (2) 3:1 に外分する点 D  
 (3) 2:3 に外分する点 E                      (4) 中点 M

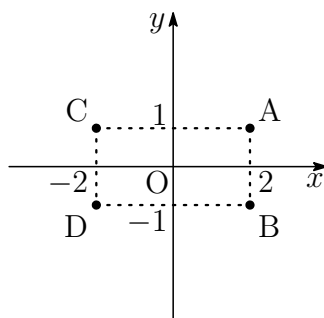
【解】 (1) 内分点 C の座標は  $\frac{2 \times 4 + 3 \times 8}{3 + 2} = \frac{32}{5}$   
 (2) 外分点 D の座標は  $\frac{-1 \times 4 + 3 \times 8}{3 - 1} = \frac{20}{2} = 10$   
 (3) 外分点 E の座標は  $\frac{-3 \times 4 + 2 \times 8}{2 - 3} = \frac{4}{-1} = -4$   
 (4) 中点 M の座標は  $\frac{4 + 8}{2} = 6$

### 3.1.2 平面上の点

練習 3.4 次の点はどの象限にあるか.

- (1) 点 A(2, 1)                                      (2) 点 B(2, -1)  
 (3) 点 C(-2, 1)                                      (4) 点 D(-2, -1)

- 【解】 (1) 第1象限  
 (2) 第4象限  
 (3) 第2象限  
 (4) 第3象限

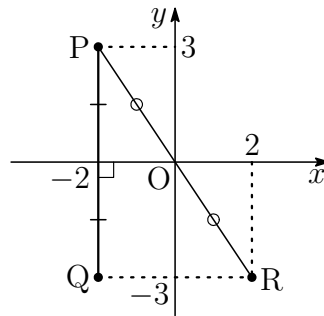


練習 3.5 点  $P(-2, 3)$  に対して、次のような点の座標を求めよ。

- (1)  $x$  軸について対称な点  $Q$       (2) 原点について対称な点  $R$

【解】 (1)  $Q(-2, -3)$

(2)  $R(2, -3)$



練習 3.6 次の 2 点間の距離を求めよ。

- (1)  $A(1, 2)$ ,  $B(4, 6)$       (2)  $C(-3, 1)$ ,  $D(2, -4)$   
 (3)  $E(5, -2)$ ,  $F(3, -2)$       (4) 原点  $O$ ,  $A(2, -3)$

【解】 (1)  $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

(2)  $CD = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

(3)  $EF = \sqrt{(3-5)^2 + \{-2 - (-2)\}^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$

(4)  $OA = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

練習 3.7 2 点  $B(-5, 2)$ ,  $Q(7, y)$  間の距離が 13 であるとき、 $y$  の値を求めよ。

【解】  $BQ = 13$  すなわち  $BQ^2 = 13^2$  より

$$\{7 - (-5)\}^2 + (y - 2)^2 = 13^2$$

$(y - 2)^2 = 25$  であるから  $y - 2 = \pm 5$

よって  $y = 7, -3$

練習 3.8  $\triangle ABC$  において、辺  $BC$  を  $1:2$  に内分する点を  $D$  とするとき、等式  $2AB^2 + AC^2 = 3(AD^2 + 2BD^2)$  が成り立つ。このことを証明せよ。

[証明]  $D$  は辺  $BC$  を  $1:2$  に内分するから、 $D$  を原点にとり、右の図のように

$$A(a, b), B(-c, 0), C(2c, 0)$$

とする。

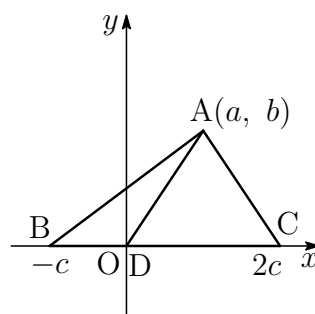
このとき

$$\begin{aligned} 2AB^2 + AC^2 &= 2\{(a+c)^2 + b^2\} \\ &\quad + (a-2c)^2 + b^2 \\ &= 3(a^2 + b^2 + 2c^2) \end{aligned}$$

$$AD^2 + 2BD^2 = (a^2 + b^2) + 2c^2$$

$$\text{よって} \quad AB^2 + AC^2 = 3(AM^2 + BM^2)$$

[証終]



練習 3.9 2点  $A(-3, 2)$ ,  $B(4, 5)$  を結ぶ線分  $AB$  について、次の点の座標を求めよ。

- (1)  $2:1$  に内分する点  $C$                       (2)  $2:1$  に外分する点  $D$   
 (3)  $2:3$  に外分する点  $E$                       (4) 中点  $M$

【解】(1) 内分点  $C$  の座標は

$$\left( \frac{1 \times (-3) + 2 \times 4}{2+1}, \frac{1 \times 2 + 2 \times 5}{2+1} \right) \text{ より } C\left(\frac{5}{3}, 4\right)$$

(2) 外分点  $D$  の座標は

$$\left( \frac{-1 \times (-3) + 2 \times 4}{2-1}, \frac{-1 \times 2 + 2 \times 5}{2-1} \right) \text{ より } D(11, 8)$$

(3) 外分点  $E$  の座標は

$$\left( \frac{-3 \times (-3) + 2 \times 4}{2-3}, \frac{-3 \times 2 + 2 \times 5}{2-3} \right) \text{ より } E(-17, -4)$$

(4) 中点  $M$  の座標は

$$\left( \frac{-3+4}{2}, \frac{2+5}{2} \right) \text{ より } M\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

練習 3.10 次の3点  $A, B, C$  を頂点とする  $\triangle ABC$  の重心の座標を求めよ.

(1)  $A(1, 1), B(5, 2), C(3, 4)$

(2)  $A(-2, 4), B(0, -3), C(2, 1)$

【解】(1)  $\left(\frac{1+5+3}{3}, \frac{1+2+4}{3}\right)$  より  $\left(3, \frac{7}{3}\right)$   
 (2)  $\left(\frac{-2+0+2}{3}, \frac{4+(-3)+1}{3}\right)$  より  $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

### 3.1.3 直線の方程式

練習 3.11 次の方程式の表す直線を座標平面上にかけ.

(1)  $3x - y + 1 = 0$

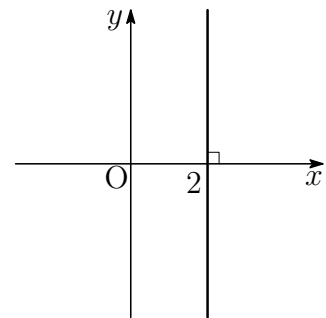
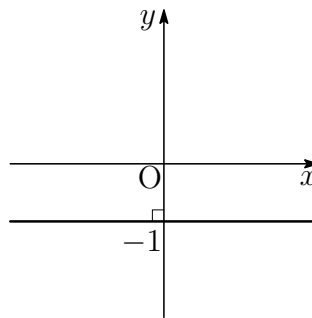
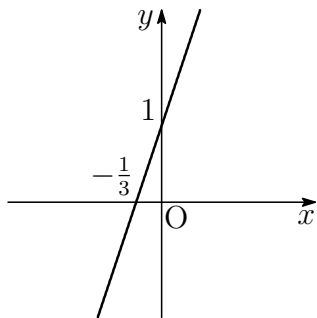
(2)  $y + 1 = 0$

(3)  $x - 2 = 0$

【答】(1)  $y = 3x + 1$

(2)  $y = -1$

(3)  $x = 2$



練習 3.12 次のような直線の方程式を求めよ.

(1) 点  $(2, -4)$  を通り, 傾きが3の直線

(2) 点  $(-3, 1)$  を通り, 傾きが-2の直線

【解】(1)  $y - (-4) = 3(x - 2)$  すなわち  $y = 3x - 10$

(2)  $y - 1 = -2\{x - (-3)\}$  すなわち  $y = -2x - 5$

練習 3.13 次の2点を通る直線の方程式を求めよ.

- (1)  $(3, 2), (5, 6)$                       (2)  $(-1, 4), (2, -2)$   
 (3)  $(2, -1), (1, -1)$                     (4)  $(3, -1), (3, 4)$

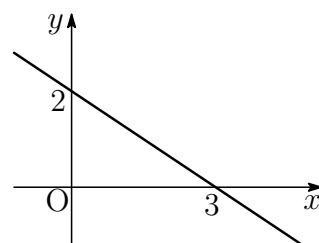
【解】(1)  $y - 2 = \frac{6-2}{5-3}(x-3)$  すなわち  $y = 2x - 4$

(2)  $y - 4 = \frac{-2-4}{2-(-1)}\{x - (-1)\}$  すなわち  $y = -2x + 2$

(3)  $y - (-1) = \frac{-1 - (-1)}{1-2}(x-2)$  すなわち  $y = -1$

(4) 2点の  $x$  座標が等しく3であるから  $x = 3$

練習 3.14  $x$  切片が3,  $y$  切片が2である直線の方程式は,  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$  の形で表されることを示せ.



【解】2点  $(3, 0), (0, 2)$  を通るので, この直線の方程式は

$$y - 0 = \frac{2-0}{0-3}(x-3)$$

これを整理して  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

### 3.1.4 2直線の関係

練習 3.15 次の中で, 直線  $y = -2x$  と平行であるものはどれか.

- ①  $y = 2x - 3$               ②  $y = -2x + 4$               ③  $2x + y + 5 = 0$

【解】直線の傾きは, それぞれ

① 2

② -2

③  $y = -2x - 5$  より -2

よって, 直線  $y = -2x$  と平行であるものは ②, ③

練習 3.16 次の2直線は、それぞれ平行、垂直のいずれであるか。

- (1)  $y = 4x + 1$ ,  $y = 4x - 3$       (2)  $y = 3x - 1$ ,  $x + 3y + 2 = 0$   
 (3)  $2x + 3y = 3$ ,  $4x + 6y = 5$       (4)  $3x + 4y = 2$ ,  $4x - 3y = 1$

- 【解】 (1) 直線の傾きはどちらも4で等しい。  
 よって、この2直線は平行である。
- (2) 直線の傾きは、それぞれ  $3$ ,  $-\frac{1}{3}$   
 $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$  より、2直線は垂直である。
- (3) 直線の傾きはどちらも  $-\frac{2}{3}$  で等しい。  
 よって、この2直線は平行である。
- (4) 直線の傾きは、それぞれ  $-\frac{3}{4}$ ,  $\frac{4}{3}$   
 $-\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = -1$  より、2直線は垂直である。

練習 3.17 点  $A(3, -1)$  を通り、直線  $3x + 2y + 1 = 0$  に垂直な直線、平行な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

- 【解】  $3x + 2y + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$   
 直線  $\textcircled{1}$  の傾きは  $-\frac{3}{2}$   
 直線  $\textcircled{1}$  に平行な直線の傾きは  $-\frac{3}{2}$   
 よって、点  $(3, -1)$  を通り、直線  $\textcircled{1}$  に平行な直線の方程式は
- $$y - (-1) = -\frac{3}{2}(x - 3) \quad \text{すなわち} \quad 3x + 2y - 7 = 0$$
- 直線  $\textcircled{1}$  に垂直な直線の傾きを  $m$  とすると
- $$-\frac{3}{2}m = -1 \quad \text{より} \quad m = \frac{2}{3}$$
- よって、点  $(3, -1)$  を通り、直線  $\textcircled{1}$  に垂直な直線の方程式は
- $$y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 3) \quad \text{すなわち} \quad 2x - 3y - 9 = 0$$

練習 3.18 直線  $2x - y + 2 = 0$  を  $l$  とする．直線  $l$  に関して点  $A(2, 1)$  と対称な点  $B$  の座標を求めよ．

【解】点  $B$  の座標を  $(s, t)$  とする．

[1] 直線  $l$  の傾きは  $2$ ，直線  $AB$  の傾きは  $\frac{t-1}{s-2}$  である．

$AB \perp l$  であるから

$$2 \cdot \frac{t-1}{s-2} = -1$$

すなわち  $s + 2t - 4 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

[2] 線分  $AB$  の中点  $\left(\frac{s+2}{2}, \frac{t+1}{2}\right)$  が直線  $l$  上にあるから

$$2 \cdot \frac{s+2}{2} - \frac{t+1}{2} + 2 = 0$$

すなわち  $2s - t + 7 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ ， $\textcircled{2}$  を連立させた方程式を解くと  $s = -2, t = 3$

したがって，点  $B$  の座標は  $(-2, 3)$

練習 3.19 原点と次の直線の距離を求めよ．

(1)  $2x - y + 5 = 0$

(2)  $2x + 3y - 4 = 0$

【解】原点と直線の距離を  $d$  とする．

$$(1) d = \frac{|5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$(2) d = \frac{|-4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

練習 3.20 次の点と直線の距離を求めよ.

(1) 点  $(1, 2)$ , 直線  $3x - 4y - 1 = 0$

(2) 点  $(2, -3)$ , 直線  $2x + y - 3 = 0$

(3) 点  $(-1, 5)$ , 直線  $y = 3x - 2$

【解】点と直線の距離を  $d$  とする.

$$(1) d = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$$

$$(2) d = \frac{|2 \cdot 2 + (-3) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(3)  $(-1, 5)$ , 直線  $3x - y - 2 = 0$  の距離であるから

$$d = \frac{|3 \cdot (-1) - 5 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

### 3.1.5 補充問題

1 点  $P(2, 1)$  から  $\sqrt{10}$  の距離にある  $x$  軸上の点  $Q$  の座標を求めよ.

【解】求める点  $Q$  は  $x$  軸上の点であるから,  $Q(x, 0)$  とする.

$$PQ = \sqrt{10} \quad \text{すなわち} \quad PQ^2 = 10 \quad \text{より}$$

$$(x - 2)^2 + (0 - 1)^2 = 10$$

$$(x - 2)^2 = 9 \quad \text{であるから} \quad x - 2 = \pm 3$$

$$\text{よって} \quad x = 5, -1$$

したがって, 点  $Q$  の座標は  $(5, 0)$  または  $(-1, 0)$

2 原点  $O$  と点  $A(6, 2)$ ,  $B(2, 4)$  の3点を頂点とする  $\triangle OAB$  はどんな形の三角形か.

【解】  $OA^2 = 6^2 + 2^2 = 40$

$$OB^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$AB^2 = (2 - 6)^2 + (4 - 2)^2 = 20$$

$$\text{よって} \quad OB = OA, \quad OA^2 = OB^2 + AB^2$$

したがって,  $\triangle OAB$  は  $OA$  を斜辺とする直角二等辺三角形である.

**3** 点A(2, 1)について, 点B(-2, 3)と対称な点Cの座標を求めよ.

【解】点Cの座標を $(x, y)$ とする. 線分BCの中点がAであるから

$$\frac{-2+x}{2} = 2, \quad \frac{3+y}{2} = 1$$

これを解くと  $x = 6, y = -1$

よって, 点Cの座標は  $(6, -1)$

**4** 2点A(4, 0), B(0, 2)について, 次の直線の方程式を求めよ.

(1) 直線 AB

(2) 線分 AB の垂直二等分線

【解】(1)  $y - 0 = \frac{2-0}{0-4}(x-4)$

すなわち  $x + 2y - 4 = 0$

(2) 線分 AB の中点の座標は

$$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (2, 1)$$

直線 AB の傾きは  $-\frac{1}{2}$  であるから, 線分 AB の垂直二等分線は, 点(2, 1)を通り, 傾きが2の直線である.

よって, 求める直線の方程式は

$$y - 1 = 2(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad 2x - y - 3 = 0$$

【別解】(1)  $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$  すなわち  $x + 2y - 4 = 0$

## 3.2 円

### 3.2.1 円の方程式

練習 3.21 次のような円の方程式を求めよ．

- (1) 中心が原点，半径が 2
- (2) 中心が点  $(2, 3)$ ，半径が 4
- (3) 中心が点  $(-2, 1)$ ，半径が  $\sqrt{10}$

【解】(1)  $x^2 + y^2 = 2^2$  すなわち  $x^2 + y^2 = 4$   
 (2)  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$  すなわち  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$   
 (3)  $\{x - (-2)\}^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{10})^2$  すなわち  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$

練習 3.22 2点  $A(4, 0)$ ， $B(0, 2)$  を直径の両端とする円について，中心の座標と半径を求めよ．また，その方程式を求めよ．

【解】求める円の中心を  $C$ ，半径を  $r$  とする．  
 $C$  は線分  $AB$  の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (2, 1)$$

また

$$r = CA = \sqrt{(4-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$$

この円の方程式は

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{5})^2 \quad \text{すなわち} \quad (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

練習 3.23 次の方程式はどのような図形を表すか．

$$(1) x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0 \quad (2) x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$$

【解】 (1) 方程式を変形すると

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 4 + 1 + 4$$

すなわち  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$

これは、中心が点  $(-2, 1)$ 、半径が3の円である．

(2) 方程式を変形すると

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = 9 + 16 - 9$$

すなわち  $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 4^2$

これは、中心が点  $(-3, -4)$ 、半径が4の円である．

練習 3.24 次の3点  $A, B, C$  を通る円の方程式を求めよ.

(1)  $A(1, 1), B(2, 1), C(-1, 0)$

(2)  $A(2, 3), B(-2, -1), C(2, -3)$

【解】求める円の方程式を  $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$  とする.

(1) 点  $A$  を通るから  $1^2 + 1^2 + l + m + n = 0$

点  $B$  を通るから  $2^2 + 1^2 + 2l + m + n = 0$

点  $C$  を通るから  $(-1)^2 - l + n = 0$

整理すると  $l + m + n + 2 = 0$

$$2l + m + n + 5 = 0$$

$$-l + n + 1 = 0$$

これを解くと  $l = -3, m = 5, n = -4$

よって, 求める円の方程式は  $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 4 = 0$

(2) 点  $A$  を通るから  $2^2 + 3^2 + 2l + 3m + n = 0$

点  $B$  を通るから  $(-2)^2 + (-1)^2 - 2l - m + n = 0$

点  $C$  を通るから  $2^2 + (-3)^2 + 2l - 3m + n = 0$

整理すると  $2l + 3m + n + 13 = 0$

$$-2l - m + n + 5 = 0$$

$$2l - 3m + n + 13 = 0$$

これを解くと  $l = -2, m = 0, n = -9$

よって, 求める円の方程式は  $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$

## 3.2.2 円と直線

練習 3.25 次の円と直線は共有点をもつ．その座標を求めよ．

$$(1) x^2 + y^2 = 25, y = x + 1 \quad (2) x^2 + y^2 = 8, x + y = 4$$

【解】 (1) 次の連立方程式を解く．

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & \cdots \textcircled{1} \\ y = x + 1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②を①に代入して  $x^2 + (x + 1)^2 = 25$

整理すると  $x^2 + x - 12 = 0$

これを解くと  $x = -4, 3$

②に代入して

$$x = -4 \text{ のとき } y = -3, \quad x = 3 \text{ のとき } y = 4$$

よって，共有点の座標は  $(-4, -3), (3, 4)$

(2) 次の連立方程式を解く．

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 & \cdots \textcircled{1} \\ x + y = 4 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①，②より  $y$  を消去して  $x^2 + (4 - x)^2 = 8$

整理すると  $x^2 - 4x + 4 = 0$

これを解くと  $x = 2$  (重解)

②に代入して  $y = 2$

よって，共有点の座標は  $(2, 2)$

練習 3.26 円  $x^2 + y^2 = 5$  と直線  $y = 2x + m$  について、次の問いに答えよ。

- (1) 円と直線が共有点をもつとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。
- (2) 円と直線が接するとき、定数  $m$  の値と接点の座標を求めよ。

【解】  $x^2 + y^2 = 5$  と  $y = 2x + m$  から  $y$  を消去して整理すると

$$5x^2 + 4mx + (m^2 - 5) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{判別式は } D = (4m)^2 - 4 \cdot 5(m^2 - 5) = -4(m^2 - 25)$$

- (1) この円と直線が共有点をもつのは、 $D \geq 0$  のときである。

$$\text{よって、} m^2 - 25 \leq 0 \text{ を解いて } -5 \leq m \leq 5$$

- (2) この円と直線が接するのは、 $D = 0$  のときである。

$$\text{よって、} m^2 - 25 = 0 \text{ を解いて } m = \pm 5$$

$m = 5$  のとき、 $\textcircled{1}$  は

$$5x^2 + 20x + 20 = 0 \quad \text{すなわち} \quad 5(x + 2)^2 = 0$$

これを解くと  $x = -2$

$$y = 2x + m \text{ に代入して } y = 1$$

$m = -5$  のとき、 $\textcircled{1}$  は

$$5x^2 - 20x + 20 = 0 \quad \text{すなわち} \quad 5(x - 2)^2 = 0$$

これを解くと  $x = 2$

$$y = 2x + m \text{ に代入して } y = -1$$

よって  $m = 5$  のとき 接点は  $(-2, 1)$

$m = -5$  のとき 接点は  $(2, -1)$

練習 3.27 半径  $r$  の円  $x^2 + y^2 = r^2$  と直線  $x + 2y - 5 = 0$  が接するとき、 $r$  の値を求めよ。

【解】 円の中心は原点であり、原点と直線  $x + 2y - 5 = 0$  の距離  $d$  は

$$d = \frac{|-5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

円と直線が接するのは  $r = d$  のときである。

$$\text{よって } r = \sqrt{5}$$

練習 3.28 次の円上の点 P における接線の方程式を求めよ .

(1) 円  $x^2 + y^2 = 10$  , 点 P(3, 1)

(2) 円  $x^2 + y^2 = 13$  , 点 P(2, -3)

(3) 円  $x^2 + y^2 = 16$  , 点 P(4, 0)

【解】 (1)  $3x + 1 \cdot y = 10$  すなわち  $3x + y = 10$

(2)  $2x + (-3)y = 13$  すなわち  $2x - 3y = 13$

(3)  $4x + 0 \cdot y = 16$  すなわち  $x = 4$

練習 3.29 点 A(2, 1) から円  $x^2 + y^2 = 1$  に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ .

【解】 接点を P(a, b) とすると, P は円上にあるから

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

また, P における円の接線の方程式は  $ax + by = 1$  で, この直線が点 A(2, 1) を通るから

$$2a + b = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② から b を消去して整理すると  $5a^2 - 4a = 0$

これを解くと  $a = 0, \frac{4}{5}$

② に代入して  $a = 0$  のとき  $b = 1$ ,  $a = \frac{4}{5}$  のとき  $b = -\frac{3}{5}$

よって, 接線は 2 本あり, その方程式と接点の座標は, 次のようになる .

$0 \cdot x + 1 \cdot y = 1$  から 接線  $y = 1$ , 接点 (0, 1)

$\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y = 1$  から 接線  $4x - 3y = 5$ , 接点  $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

## 3.2.3 補充問題

5 3点  $A(-2, 1)$ ,  $B(1, 4)$ ,  $C(0, 5)$  を頂点とする  $\triangle ABC$  の外接円の半径と, 外心の座標を求めよ.

【解】外接円の方程式を  $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$  とする.

点  $A, B, C$  を通るから

$$(-2)^2 + 1^2 - 2l + m + n = 0$$

$$1^2 + 4^2 + l + 4m + n = 0$$

$$5^2 + 5m + n = 0$$

整理すると  $-2l + m + n + 5 = 0$ ,

$$l + 4m + n + 17 = 0, 5m + n + 25 = 0$$

これを解くと  $l = 2, m = -6, n = 5$

よって, 外接円の方程式は

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$$

すなわち  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$

(答) 半径  $\sqrt{5}$ , 外心の座標  $(-1, 3)$

**6** 次の円と直線の共有点の個数を求めよ.

(1) 円  $x^2 + y^2 = 20$ , 直線  $3x - y - 10 = 0$

(2) 円  $x^2 + y^2 = 4$ , 直線  $2x - y + 5 = 0$

(3) 円  $(x - 1)^2 + y^2 = 2$ , 直線  $x + y - 3 = 0$

**【解】** (1) 円の半径は  $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ 円の中心は原点であり, 原点と直線  $3x - y - 10 = 0$  の距離  $d$  は

$$d = \frac{|-10|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

 $d < r$  であるから, 共有点の個数は2個(2) 円の半径は  $r = \sqrt{4} = 2$ 円の中心は原点であり, 原点と直線  $2x - y + 5 = 0$  の距離  $d$  は

$$d = \frac{|5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

 $d > r$  であるから, 共有点の個数は0個(3) 円の半径は  $r = \sqrt{2}$ 円の中心は点  $(1, 0)$  であり, 点  $(1, 0)$  と直線  $x + y - 3 = 0$  の距離  $d$  は

$$d = \frac{|1 + 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

 $d = r$  であるから, 共有点の個数は1個

7 次の問いに答えよ.

- (1) 円  $x^2 + y^2 = 5$  と直線  $x + 3y + c = 0$  が異なる 2 点で交わる時, 定数  $c$  の値の範囲を求めよ.
- (2) 円  $x^2 + y^2 = 5$  と直線  $x + 3y - 5 = 0$  の共有点を  $A, B$  とする. 原点  $O$  と  $A, B$  の 3 点を通る円の方程式を求めよ.

【解】 (1) 2 つの方程式から  $x$  を消去して

$$10y^2 + 6cy + c^2 - 5 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{判別式は } D &= (6c)^2 - 4 \cdot 10(c^2 - 5) \\ &= -4(c^2 - 50) \end{aligned}$$

$$D > 0 \text{ より } -5\sqrt{2} < c < 5\sqrt{2}$$

- (2)  $x^2 + y^2 = 5, x + 3y - 5 = 0$  より  
 $y^2 - 3y + 2 = 0$  よって  $y = 1, 2$   
 $y = 1$  のとき  $x = 2$   
 $y = 2$  のとき  $x = -1$

円  $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$  が原点, 点  $(2, 1), (-1, 2)$  を通ることから  
 $n = 0, 2l + m + n + 5 = 0, -l + 2m + n + 5 = 0$   
これを解くと  $l = -1, m = -3, n = 0$   
よって  $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$

【別解】 (1) 原点と直線  $x + 3y + c = 0$  の距離  $d$  は

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{10}}$$

$$d < \sqrt{5} \text{ より } |c| < 5\sqrt{2}$$

$$\text{よって } -5\sqrt{2} < c < 5\sqrt{2}$$

(2)  $k$  を定数とするとき, 方程式

$$(x^2 + y^2 - 5) + k(x + 3y - 5) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

の表す図形は 2 点  $A, B$  を通る. ① に  $x = 0, y = 0$  を代入すると

$$-5 - 5k = 0 \quad \text{すなわち } k = -1$$

① に代入して整理すると

$$x^2 + y^2 - x - 3y = 0$$

これが求める円の方程式である.

### 3.3 軌跡と領域

#### 3.3.1 軌跡と方程式

**練習 3.30** 2点  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$  に対して,  $AP^2 - BP^2 = 8$  を満たす点  $P$  の軌跡を求めよ.

**【解】** 点  $P$  の座標を  $(x, y)$  とすると

$$AP^2 = \{x - (-1)\}^2 + y^2 = (x + 1)^2 + y^2$$

$$BP^2 = (x - 1)^2 + y^2$$

$AP^2 - BP^2 = 8$  に代入して

$$(x + 1)^2 + y^2 - \{(x - 1)^2 + y^2\} = 0$$

整理すると  $x = 2$

よって, 点  $P$  は直線  $x = 2$  上にある.

逆に, この直線上のすべての点  $P(x, y)$  について,  $AP^2 - BP^2 = 8$  が成り立つ.

したがって, 点  $P$  の軌跡は 直線  $x = 2$  である.

**練習 3.31** 2点  $A(-3, 0)$ ,  $B(2, 0)$  からの距離の比が  $3 : 2$  である点  $P$  の軌跡を求めよ.

**【解】** 点  $P$  の座標を  $(x, y)$  とする.

$P$  に関する条件は  $AP : BP = 3 : 2$

これより  $2AP = 3BP$

すなわち  $4AP^2 = 9BP^2$

$AP^2 = \{x - (-3)\}^2 + y^2 = (x + 3)^2 + y^2$ ,  $BP^2 = (x - 2)^2 + y^2$  を代入すると

$$4\{(x + 3)^2 + y^2\} = 9\{(x - 2)^2 + y^2\}$$

整理すると  $x^2 + y^2 - 12x = 0$

すなわち  $(x - 6)^2 + y^2 = 6^2$

よって, 点  $P$  は円  $(x - 6)^2 + y^2 = 6^2$  上にある.

逆に, この円上のすべての点  $P(x, y)$  は, 条件を満たす.

したがって, 求める軌跡は, 点  $(6, 0)$  を中心とする半径  $6$  の円である.

練習 3.32 点 Q が直線  $y = x + 2$  上を動くとき，点 A(1, 5) と点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を求めよ．

【解】点 Q の座標を  $(s, t)$  とすると，Q は直線  $y = x + 2$  上にあるから

$$t = s + 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また，点 P の座標を  $(x, y)$  とすると，条件から

$$x = \frac{s+1}{2}, y = \frac{t+5}{2} \quad \text{すなわち} \quad s = 2x - 1, t = 2y - 5$$

これらを  $\textcircled{1}$  に代入して  $2y - 5 = (2x - 1) + 2$

整理すると  $y = x + 3$

よって，点 P は直線  $y = x + 3$  上にある．

逆に，この直線上のすべての点  $P(x, y)$  は，条件を満たす．

したがって，求める軌跡は，直線  $y = x + 3$  である．

## 3.4 不等式の表す領域

練習 3.33 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)  $y > x + 1$

(2)  $3x + y + 2 \leq 0$

(3)  $2x - 3y + 6 \geq 0$

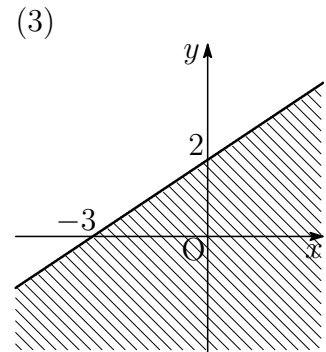
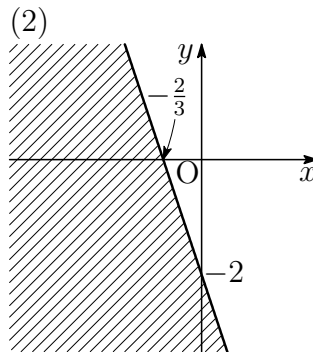
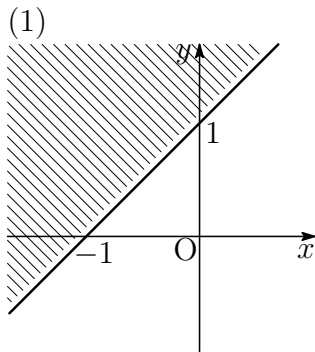
【解】 (1) この領域は、直線  $y = x + 1$  の上側で、下の図の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。

(2) 不等式を変形すると  $y \leq -3x - 2$

したがって、この領域は、直線  $y = -3x - 2$  およびその下側で、下の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。

(3) 不等式を変形すると  $y \leq \frac{2}{3}x + 2$

したがって、この領域は、直線  $y = \frac{2}{3}x + 2$  およびその下側で、下の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



練習 3.34 次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1)  $x \leq -1$

(2)  $y > 2$

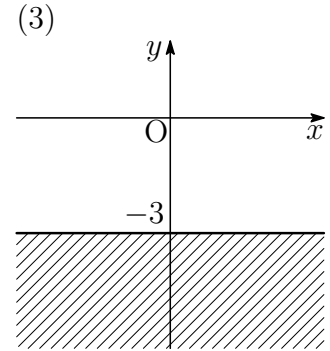
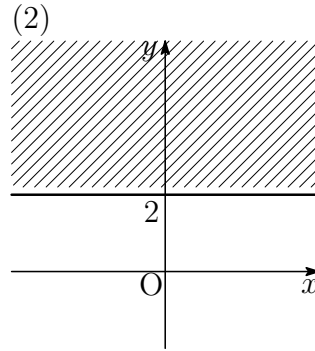
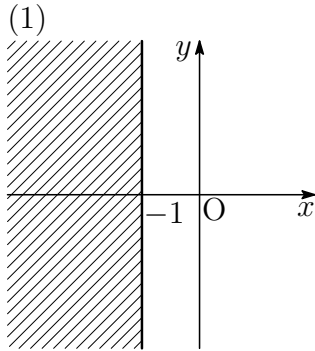
(3)  $y + 3 \leq 0$

【解】 (1) この領域は、直線  $x = -1$  およびその左側で、下の図の斜線部分である．ただし、境界線を含む．

(2) この領域は、直線  $y = 2$  の上側で、下の図の斜線部分である．ただし、境界線を含まない．

(3) 不等式を変形すると  $y \leq -3$

したがって、この領域は、直線  $y = -3$  およびその下側で、下の図の斜線部分である．ただし、境界線を含む．



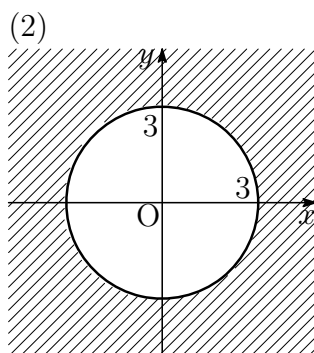
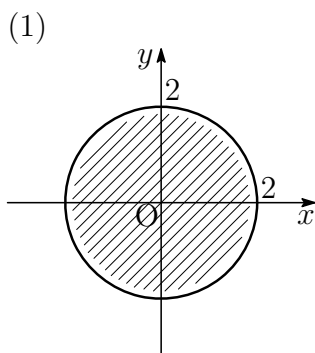
練習 3.35 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)  $x^2 + y^2 < 4$

(2)  $x^2 + y^2 \geq 9$

【解】 (1) この領域は、円  $x^2 + y^2 = 4$  の内部で、下の図の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。

(2) この領域は、円  $x^2 + y^2 = 9$  およびその外部で、下の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



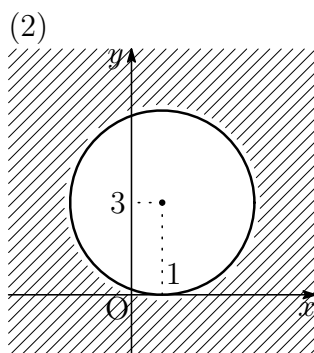
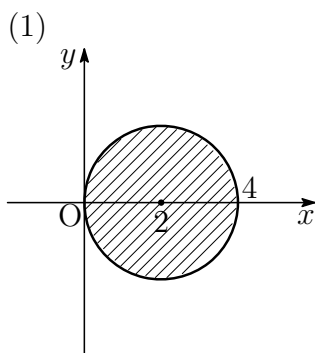
練習 3.36 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)  $(x - 2)^2 + y^2 \leq 4$

(2)  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 > 9$

【解】 (1) この領域は、円  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$  およびその内部で、下の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。

(2) この領域は、円  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 > 9$  の外部で、下の図の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。



練習 3.37 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

$$(1) \begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ 2x + y - 1 > 0 \end{cases}$$

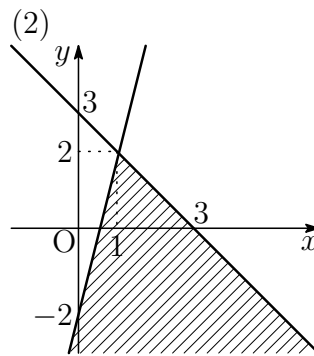
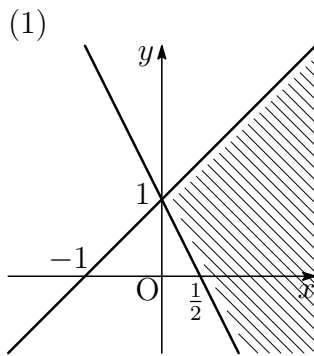
$$(2) \begin{cases} x + y - 3 \leq 0 \\ 4x - y - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ 3x - y + 3 < 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 9 \\ x + 2y + 2 \geq 0 \end{cases}$$

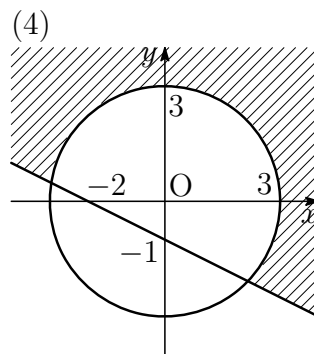
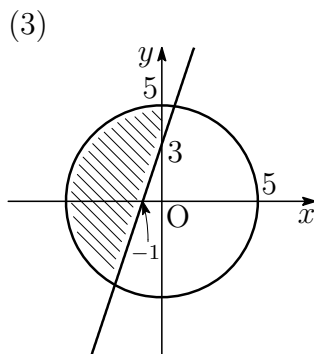
【解】 (1) この領域は、直線  $x - y + 1 = 0$  の下側と直線  $2x + y - 1 = 0$  の上側に共通する部分である。すなわち、下の図の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。

(2) この領域は、直線  $x + y - 3 = 0$  およびその下側と直線  $4x - y - 2 = 0$  およびその下側に共通する部分である。すなわち、下の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



(3) この領域は、円  $x^2 + y^2 = 25$  の内部と直線  $3x - y + 3 = 0$  の上側に共通する部分である。すなわち、下の図の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。

(4) この領域は、円  $x^2 + y^2 = 9$  およびその外部と直線  $x + 2y + 2 = 0$  およびその上側に共通する部分である。すなわち、下の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



練習 3.38 次の不等式の表す領域を図示せよ．

$$(1) (x+y)(x-y+1) > 0 \quad (2) x(x+2y-2) \leq 0$$

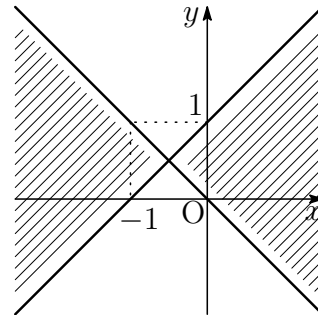
【解】 (1) 不等式  $(x+y)(x-y+1) > 0$  が成り立つことは

$$\begin{cases} x+y > 0 \\ x-y+1 > 0 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} x+y < 0 \\ x-y+1 < 0 \end{cases}$$

が成り立つことと同じである．よって，求める領域は右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．



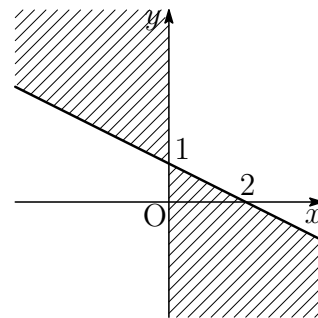
(2) 不等式  $x(x+2y-2) \leq 0$  が成り立つことは

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+2y-2 \leq 0 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x+2y-2 \geq 0 \end{cases}$$

が成り立つことと同じである．よって，求める領域は右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



練習 3.39  $x, y$  が 4 つの不等式

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + 3y \leq 5, \quad 3x + 2y \leq 8$$

を同時に満たすとき,  $x + y$  の最大値, 最小値を求めよ.

【解】与えられた連立不等式の表す領域を  $A$  とする.

領域  $A$  は 4 点

$$(0, 0), \quad \left(\frac{8}{3}, 0\right), \quad (2, 1), \quad \left(0, \frac{5}{3}\right)$$

を頂点とする四角形の周および内部である.

$$x + y = k \quad \cdots \textcircled{1}$$

とにおいて, 直線  $\textcircled{1}$  が領域  $A$  の点を通るときの  $k$  の値を調べる.

$$(0, 0) \text{ を通るとき } k = 0, \quad \left(\frac{8}{3}, 0\right) \text{ を通るとき } k = \frac{8}{3}$$

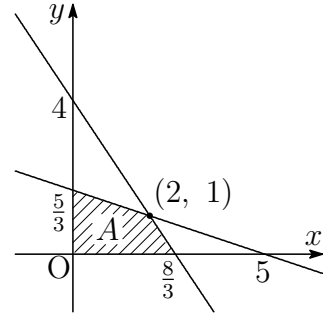
$$(2, 1) \text{ を通るとき } k = 3, \quad \left(0, \frac{5}{3}\right) \text{ を通るとき } k = \frac{5}{3}$$

これ以外で領域  $A$  の点を通るとき  $0 < k < 3$

したがって,  $x + y$  は

$x = 2, y = 1$  のとき最大値 3 をとり,

$x = 0, y = 0$  のとき最小値 0 をとる.



## 3.4.1 補充問題

8 直線  $3x - 2y - 4 = 0$  に対して，点  $P(1, -2)$  と同じ側にある点を，次の中から選べ．

原点  $O$ ， $A(-2, -6)$ ， $B(-1, 3)$ ， $C(3, 2)$

【解】  $3x - 2y - 4$  に， $x = 1$ ， $y = -2$  を代入すると

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) - 4 = 3 > 0$$

であるから，点  $P(1, -2)$  は不等式  $3x - 2y - 4 > 0$  の表す領域にある．

同様にして， $3x - 2y - 4$  の値の符号は

$$\text{原点 } O \quad 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$$

$$A \quad 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-6) - 4 = 2 > 0$$

$$B \quad 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 - 4 = -13 < 0$$

$$C \quad 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1 > 0$$

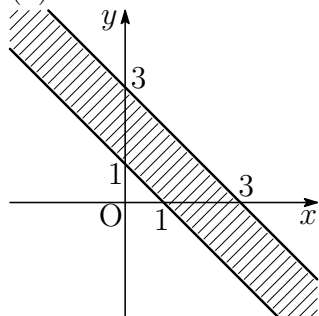
よって，直線  $3x - 2y - 4 = 0$  に対して，点  $P$  と同じ側にある点は  $A, C$

9 次の不等式の表す領域を図示せよ．

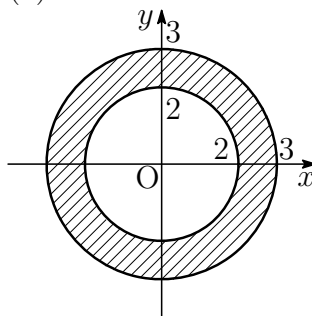
$$(1) 1 \leq x + y \leq 3$$

$$(2) 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$$

【解】 (1) 境界線を含む



(2) 境界線を含む

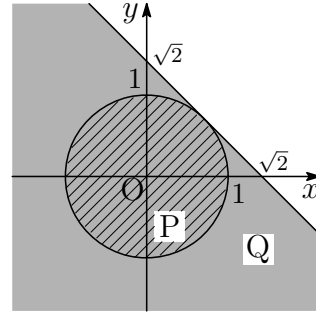


**10** 実数  $x, y$  について「 $x^2 + y^2 \leq 1$  ならば  $x + y \leq \sqrt{2}$ 」が成り立つ．このことを，それぞれの不等式の表す領域を図示することによって証明せよ．

【解】不等式  $x^2 + y^2 \leq 1$  の表す領域 P は，円  $x^2 + y^2 = 1$  およびその内部である．不等式  $x + y \leq \sqrt{2}$  の表す領域 Q は，直線  $x + y = \sqrt{2}$  およびその下側である．

また，原点と直線  $x + y = \sqrt{2}$  の距離は

$$\frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1$$



であるから，直線  $x + y = \sqrt{2}$  は円  $x^2 + y^2 = 1$  に接する．

したがって，それぞれの不等式の表す領域を図示すると，図のようになり，不等式  $x^2 + y^2 \leq 1$  の表す領域 P は，不等式  $x + y \leq \sqrt{2}$  の表す領域 Q に含まれる．よって，実数  $x, y$  について「 $x^2 + y^2 \leq 1$  ならば  $x + y \leq \sqrt{2}$ 」が成り立つ．

## 3.5 章末問題

### 3.5.1 章末問題 A

**1**  $x$  軸上の点 P が，2 点  $A(-1, 2)$ ， $B(4, 3)$  から等距離にあるとき，点 P の座標を求めよ．

【解】求める点 P は  $x$  軸上の点であるから， $P(x, 0)$  とする．

$AP = BP$  すなわち  $AP^2 = BP^2$  より

$$\{x - (-1)\}^2 + (0 - 2)^2 = (x - 4)^2 + (0 - 3)^2$$

展開して整理すると  $x = 2$

したがって，点 P の座標は  $(2, 0)$

**2** 3点A(1, 5), B(6, -3), C(x, y)を頂点とする△ABCの重心の座標が(1, 3)であるとき, x, yの値を求めよ.

【解】△ABCの重心の座標が(1, 3)であるから

$$\frac{1+6+x}{3} = 1, \quad \frac{5+(-3)+y}{3} = 3$$

これを解いて  $x = -4, y = 7$

**3** 2直線  $3x - 4y + 5 = 0, 2x + y - 4 = 0$  の交点を通り, 次の条件を満たす直線の方程式を, それぞれ求めよ.

(1) 直線  $2x + 3y = 0$  に平行 (2) 直線  $2x + 3y = 0$  に垂直

【解】連立方程式  $\begin{cases} 3x - 4y + 5 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$  を解くと  $x = 1, y = 2$

よって, 2直線  $3x - 4y + 5 = 0, 2x + y - 4 = 0$  の交点の座標は (1, 2)

(1) 直線  $2x + 3y = 0$  の傾きは  $-\frac{2}{3}$  であるから, 求める直線の方程式は

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$$

すなわち  $2x + 3y - 8 = 0$

(2) 直線  $2x + 3y = 0$  に垂直な直線の傾きを  $m$  とすると

$$-\frac{2}{3}m = -1 \text{ より } m = \frac{3}{2}$$

よって, 求める直線の方程式は

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$$

すなわち  $3x - 2y + 1 = 0$

【別解】(1)  $2(x - 1) + 3(y - 2) = 0$  より

$$2x + 3y - 8 = 0$$

(2)  $3(x - 1) - 2(y - 2) = 0$  より

$$3x - 2y + 1 = 0$$

4 円  $x^2 + (y - a)^2 = 25$  と  $x$  軸が異なる 2 点で交わるとき、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。また、 $a = 1$  のとき、円が  $x$  軸から切り取る線分の長さを求めよ。

【解】円  $x^2 + (y - a)^2 = 25$  の中心は点  $(0, a)$  で、半径は 5 である。

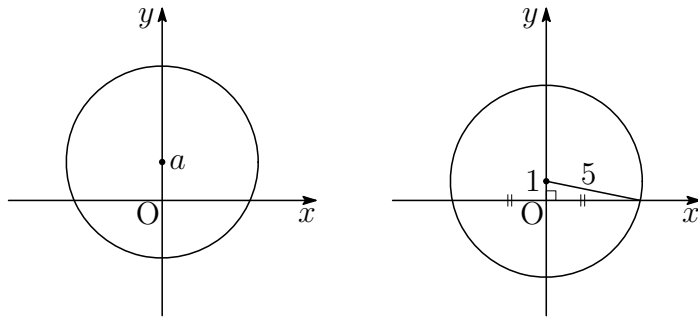
円の中心  $(0, a)$  と  $x$  軸との距離は  $|a|$  であり、これが円の半径 5 より小さければ、円は  $x$  軸と異なる 2 点で交わる。

よって、求める条件は  $|a| < 5$

これを解いて  $-5 < a < 5$

また、 $a = 1$  のとき下の図より、求める弦の長さは

$$2 \times \sqrt{5^2 - 1^2} = 4\sqrt{6}$$



5 点  $C(2, 1)$  を中心として、直線  $x + 2y + 1 = 0$  に接する円の方程式を求めよ。

【解】求める円の半径は、点  $C(2, 1)$  と直線  $x + 2y + 1 = 0$  の距離

$$\frac{|2 + 2 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

に等しい。よって、求める円の方程式は

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{5})^2$$

すなわち  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$

**6** 点  $A(2, 1)$  について点  $Q(a, b)$  と対称な点を  $P$  とする.

(1)  $P$  の座標を  $a, b$  を用いて表せ.

(2)  $Q$  が直線  $2x + y + 1 = 0$  上を動くとき,  $P$  の軌跡を求めよ.

**【解】** (1)  $P$  の座標を  $(x, y)$  とする. 線分  $PQ$  の中点が点  $A$  であるから

$$\frac{x+a}{2} = 2, \quad \frac{y+b}{2} = 1$$

よって  $x = 4 - a, y = 2 - b$

すなわち  $P(4 - a, 2 - b)$

(2)  $Q$  が直線  $2x + y + 1 = 0$  上を動くから

$$2a + b + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

(1) より  $a = 4 - x, b = 2 - y$

これを  $\textcircled{1}$  に代入して

$$2(4 - x) + (2 - y) + 1 = 0$$

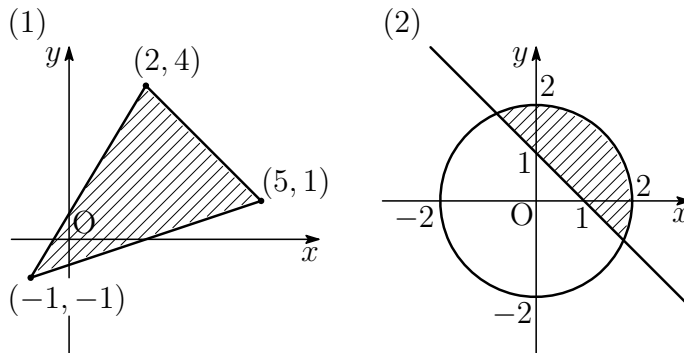
整理すると  $2x + y - 11 = 0$

よって, 点  $P$  は直線  $2x + y - 11 = 0$  上にある.

逆に, この直線上のすべての点  $P(x, y)$  は, 条件を満たす.

したがって, 求める軌跡は, 直線  $2x + y - 11 = 0$  である.

7 図の斜線部分を表す不等式を求めよ。ただし、境界線を含むものとする。



【解】 (1) 2点  $(-1, -1)$ ,  $(2, 4)$  を通る直線の方程式は

$$y - (-1) = \frac{4 - (-1)}{2 - (-1)} \{x - (-1)\}$$

すなわち  $y = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$

2点  $(2, 4)$ ,  $(5, 1)$  を通る直線の方程式は

$$y - 4 = \frac{1 - 4}{5 - 2} (x - 2)$$

すなわち  $y = -x + 6$

2点  $(-1, -1)$ ,  $(5, 1)$  を通る直線の方程式は

$$y - (-1) = \frac{1 - (-1)}{5 - (-1)} \{x - (-1)\}$$

すなわち  $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

よって、斜線部分の領域を表す不等式は

$$y \leq \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}, \quad y \leq -x + 6, \quad y \geq \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

(2) 原点を中心とする半径2の円の方程式は

$$x^2 + y^2 = 4$$

2点  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  を通る直線の方程式は

$$y = -x + 1$$

よって、斜線部分の領域を表す不等式は

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq -x + 1$$

## 3.5.2 章末問題 B

8 次の3点が一直線上にあるとき,  $a$  の値を求めよ.

$$A(1, -2), B(3, a), C(a, 0)$$

【解】直線 AB の方程式は

$$y - (-2) = \frac{a - (-2)}{3 - 1}(x - 1)$$

よって  $2y + 4 = (a + 2)(x - 1)$

点  $C(a, 0)$  がこの直線上にあるから

$$0 + 4 = (a + 2)(a - 1)$$

展開して整理すると  $a^2 + a - 6 = 0$

これを解いて  $a = -3, 2$

9 3つの直線  $3x - y = 0$ ,  $2x + y = 0$ ,  $4x - 3y + 6 = 0$  で囲まれた三角形の面積を求めよ.

【解】 $3x - y = 0$  と  $2x + y = 0$  の交点の座標は

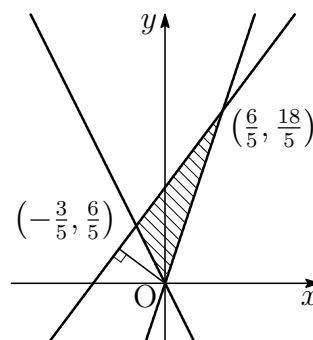
$$(0, 0)$$

$2x + y = 0$  と  $4x - 3y + 6 = 0$  の交点の座標は

$$\left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

$3x - y = 0$  と  $4x - 3y + 6 = 0$  の交点の座標は

$$\left(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}\right)$$



$A\left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$ ,  $B\left(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}\right)$  とする.  $\triangle OAB$  において, 辺 AB を底辺とすると高さは直線 AB と原点 O の距離に等しい.

$$AB = \sqrt{\left\{\frac{6}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right)\right\}^2 + \left(\frac{18}{5} - \frac{6}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{25} + \frac{144}{25}} = 3$$

直線  $4x - 3y + 6 = 0$  と原点の距離  $d$  は

$$d = \frac{|6|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{5}$$

よって, 求める面積は  $\frac{1}{2} \times AB \times d = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$

**10** 円  $x^2 + y^2 - 4x + ay = 0$  上の点  $A(4, 2)$  における接線を  $l$  とする .

- (1)  $a$  の値を求めよ .                      (2) 円の中心  $C$  の座標を求めよ .  
 (3)  $l$  の傾きを求めよ .                      (4)  $l$  の方程式を求めよ .

**【解】** (1)  $x^2 + y^2 - 4x + ay = 0$  に ,  $x = 4$  ,  $y = 2$  を代入して

$$4^2 + 2^2 - 4 \cdot 4 + 2a = 0$$

これを解いて  $a = -2$

(2) (1) より円の方程式は

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

変形すると

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

よって , 円の中心  $C$  の座標は  $(2, 1)$

(3)  $CA$  の傾きは  $\frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2}$

接線  $l$  は直線  $CA$  に垂直であるから , 求める傾きを  $m$  とすると

$$\frac{1}{2}m = -1 \text{ より } m = -2$$

(4)  $l$  は点  $A(4, 2)$  を通り , 傾きが  $-2$  の直線であるから , その方程式は

$$y - 2 = -2(x - 4)$$

すなわち  $y = -2x + 10$

**11** 放物線  $y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 3$  について , 次の問いに答えよ .

- (1) 頂点  $P$  の座標を  $(x, y)$  とするとき ,  $x, y$  をそれぞれ  $a$  で表せ .  
 (2)  $a$  がすべての実数値をとって変化するとき , 点  $P$  の軌跡を求めよ .

**【解】** (1)  $x^2 - 2ax + a^2 + a + 3 = (x - a)^2 + a + 3$

よって  $y = (x - a)^2 + a + 3$

したがって , 放物線の頂点の座標は  $(a, a + 3)$  であるから

$$x = a, \quad y = a + 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(2) ① より  $a$  を消去して  $y = x + 3$

よって , 点  $P$  は直線  $y = x + 3$  上にある .

逆に , この直線上のすべての点  $P(x, y)$  は , 条件を満たす .

したがって , 求める軌跡は直線  $y = x + 3$  である .

**12** ある工場の製品 A, B を 1 トン生産するのに必要な原料 P, Q の量と製品 A, B の価格は, それぞれ右の表の通りとする.

	原料 P	原料 Q	価格
A	2 トン	2 トン	3 万円
B	1 トン	3 トン	4 万円

この工場へ 1 日に供給できる原料 P が 8 トン, 原料 Q が 12 トンであるとき, 工場で 1 日に生産される製品 A, B の総価格を最大にするには, A, B をそれぞれ, 1 日に何トンずつ生産すればよいか.

**【解】** A, B の 1 日の生産量をそれぞれ  $x$  トン,  $y$  トンとすると, 原料 P, Q の 1 日の使用量はそれぞれ

$$2x + y, \quad 2x + 3y \text{ (トン)}$$

である.

与えられた条件より

$$x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

$$2x + y \leq 8,$$

$$2x + 3y \leq 12$$

が成り立つ.

この連立方程式が満たす領域 A は上の図のようになり, 4 点

$$(0, 0), (4, 0), (3, 2), (0, 4)$$

を頂点とする四角形の周および内部である.

総価格を  $k$  万円とすると

$$3x + 4y = k \quad \cdots \textcircled{1}$$

である. 直線  $\textcircled{1}$  が領域 A の点を通るとき  $k$  の値を調べる.

$$(0, 0) \text{ を通るとき } k = 0$$

$$(4, 0) \text{ を通るとき } k = 12$$

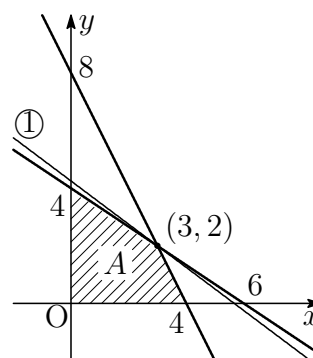
$$(3, 2) \text{ を通るとき } k = 17$$

$$(0, 4) \text{ を通るとき } k = 16$$

$$\text{これ以外で領域 A の点を通るとき } 0 < k < 17$$

よって,  $k$  の値は,  $x = 3, y = 2$  のとき最大となる.

すなわち, 総価格を最大にするには, 1 日あたり A を 3 トン, B を 2 トン生産すればよい.



# 第 4 章 三角関数

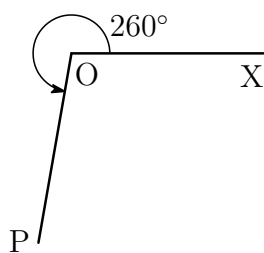
## 4.1 三角関数

### 4.1.1 角の拡張

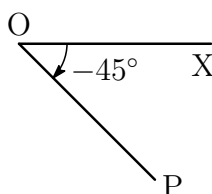
練習 4.1 次の角の動径を図示せよ .

- (1)  $260^\circ$       (2)  $-45^\circ$       (3)  $420^\circ$       (4)  $765^\circ$       (5)  $-240^\circ$

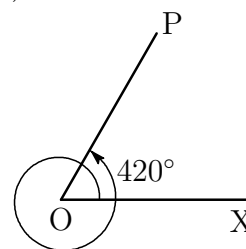
【答】 (1)



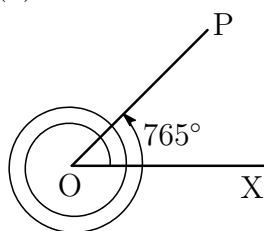
(2)



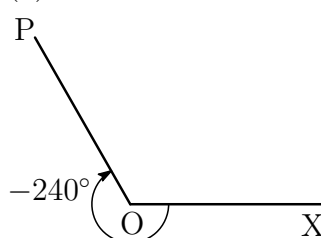
(3)



(4)



(5)



練習 4.2 次の角のうち、その動径が  $60^\circ$  の動径と同じ位置にある角はどれか .

$300^\circ, 420^\circ, 1040^\circ, -60^\circ, -300^\circ, -780^\circ$

【解】  $420^\circ = 60^\circ + 360^\circ \times 1, \quad -300^\circ = 60^\circ + 360^\circ \times (-1)$

その他の角については、整数  $n$  を用いて  $60^\circ + 360^\circ \times n$  の形に表すことができない .

よって、その動径が  $60^\circ$  の動径と同じ位置にある角は  $420^\circ, -300^\circ$

練習 4.3 次のことを確かめよ.

- (1) 1 ラジアンは  $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$       (2)  $360^\circ$  は  $2\pi$  ラジアン

【解】(1) 半径1の円において, 長さ1の弧に対する中心角が  $\frac{1}{2\pi} \times 360^\circ$  であるから

1 ラジアンは  $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$  である.

(2) (1) より,  $180^\circ$  は  $\pi$  ラジアンである.

よって,  $360^\circ$  は  $2\pi$  ラジアンである.

練習 4.4 次の角を弧度法で表せ.

- (1)  $210^\circ$       (2)  $225^\circ$       (3)  $240^\circ$       (4)  $270^\circ$       (5)  $330^\circ$

【解】 $1^\circ$  は  $\frac{\pi}{180}$  ラジアンであるから,  $x^\circ$  は  $\frac{\pi}{180}x$  ラジアンである.

$$(1) 210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{6}\pi \qquad (2) 225 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{4}\pi$$

$$(3) 240 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4}{3}\pi \qquad (4) 270 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{2}\pi$$

$$(5) 330 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{6}\pi$$

練習 4.5 次のような扇形の弧の長さや面積を求めよ.

- (1) 半径4, 中心角  $\frac{\pi}{3}$       (2) 半径6, 中心角  $\frac{7}{6}\pi$

【解】求める扇形の弧の長さを  $l$ , 面積を  $S$  とする.

$$(1) l = 4 \times \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi, \quad S = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{8}{3}\pi$$

$$(2) l = 6 \times \frac{7}{6}\pi = 7\pi, \quad S = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{7}{6}\pi = 21\pi$$

## 4.1.2 三角関数

練習 4.6 次の  $\theta$  について,  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  の値を, それぞれ求めよ.

(1)  $\theta = \frac{5}{4}\pi$

(2)  $\theta = \frac{11}{6}\pi$

(3)  $\theta = -\frac{\pi}{3}$

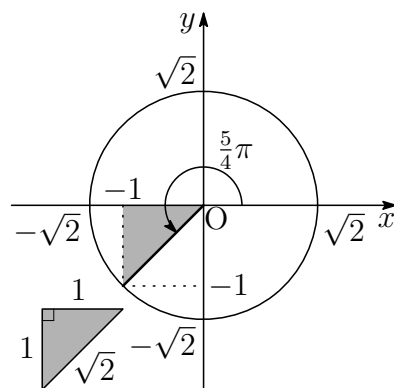
【解】 (1)  $r = \sqrt{2}$  のとき,

$x = -1$ ,  $y = -1$  であるから

$$\sin \frac{5}{4}\pi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos \frac{5}{4}\pi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan \frac{5}{4}\pi = \frac{-1}{-1} = 1$$



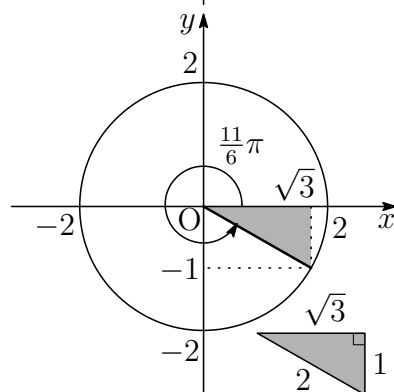
(2)  $r = 2$  のとき,

$x = \sqrt{3}$ ,  $y = -1$  であるから

$$\sin \frac{11}{6}\pi = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos \frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan \frac{11}{6}\pi = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



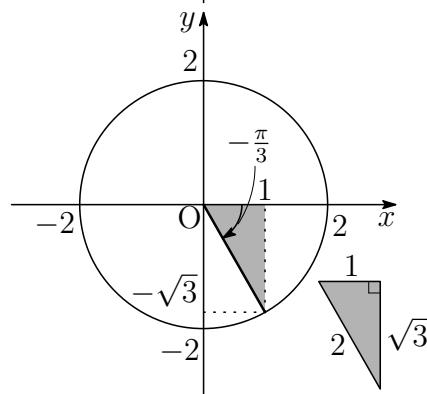
(3)  $r = 2$  のとき,

$x = 1$ ,  $y = -\sqrt{3}$  であるから

$$\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\tan \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$



練習 4.7 次のような  $\theta$  の動径は、第何象限にあるか。

- (1)  $\sin \theta < 0$  かつ  $\cos \theta > 0$       (2)  $\cos \theta < 0$  かつ  $\tan \theta > 0$

【答】(1) 第4象限 (2) 第3象限

練習 4.8  $\theta$  の動径が第 4 象限にあり,  $\sin \theta = -\frac{1}{3}$  のとき,  $\cos \theta$  と  $\tan \theta$  の値を求めよ.

【解】  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

$\theta$  の動径が第 4 象限にあるとき,  $\cos \theta > 0$  であるから

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

また  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \left(-\frac{1}{3}\right) \div \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

練習 4.9  $\theta$  の動径が第 3 象限にあり,  $\tan \theta = 3$  のとき,  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の値を求めよ.

【解】  $\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + 3^2} = \frac{1}{10}$

$\theta$  の動径が第 3 象限にあるとき,  $\cos \theta < 0$  であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

また  $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = 3 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

練習 4.10 次の等式を証明せよ.

(1)  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 2$

(2)  $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$

[証明] (1) 左辺  $= (\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) + (\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$   
 $= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 2 \times 1 = 2$

よって  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 2$

(2) 左辺  $= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \sin^2 \theta = \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1\right) \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$

よって  $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$

[証終]

練習 4.11  $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$  のとき，次の式の値を求めよ．

(1)  $\sin \theta \cos \theta$  (2)  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

【解】 (1)  $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$  の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 2$$

よって  $1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 2$

したがって  $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (2) \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta) \\ &= \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

練習 4.12  $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$  のとき，次の式の値を求めよ．

(1)  $\sin \theta \cos \theta$  (2)  $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

【解】 (1)  $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$  の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

よって  $1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$

したがって  $\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$

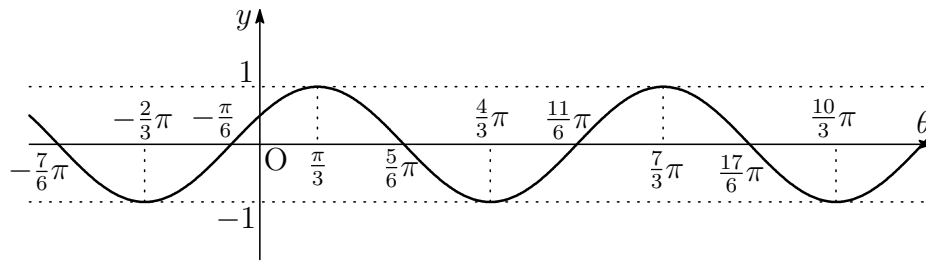
$$\begin{aligned} (2) \sin^3 \theta - \cos^3 \theta &= (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= (\sin \theta - \cos \theta)(1 + \sin \theta \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{8}\right) = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

### 4.1.3 三角関数のグラフ

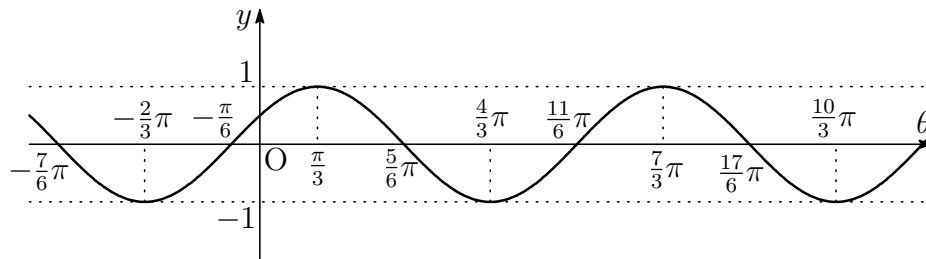
練習 4.13 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

(1)  $y = \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$  (2)  $y = \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$   
 (3)  $y = \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$  (4)  $y = \tan \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

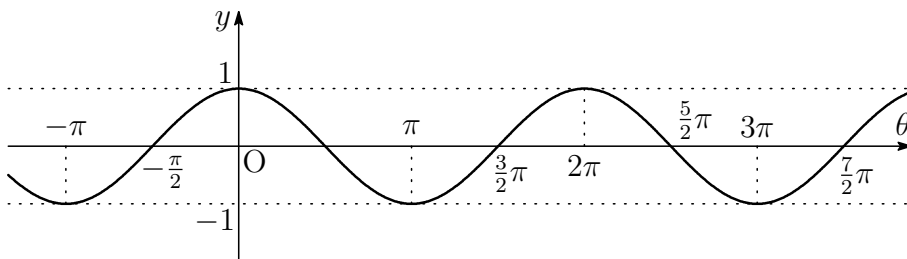
【解】(1)  $y = \cos \theta$  のグラフを  $\theta$  軸方向に  $\frac{\pi}{3}$  だけ平行移動したものである .



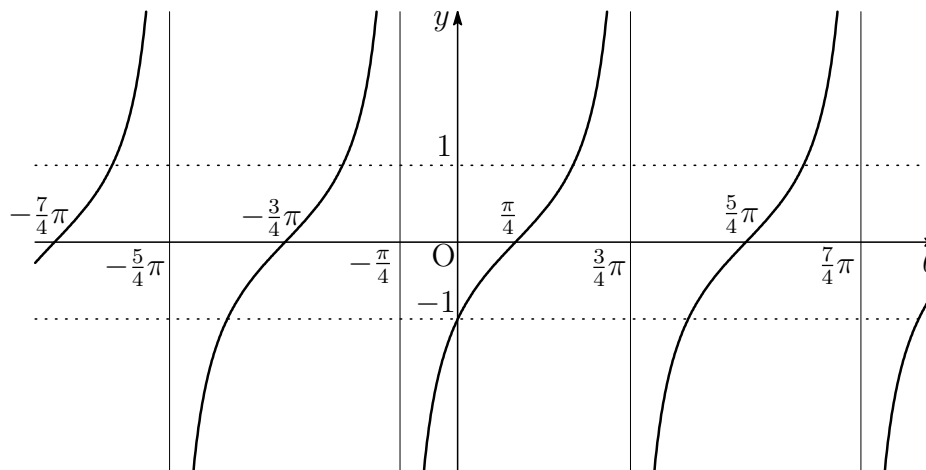
(2)  $y = \sin \theta$  のグラフを  $\theta$  軸方向に  $-\frac{\pi}{6}$  だけ平行移動したものである .



(3)  $y = \sin \theta$  のグラフを  $\theta$  軸方向に  $-\frac{\pi}{2}$  だけ平行移動したものである .



(4)  $y = \tan \theta$  のグラフを  $\theta$  軸方向に  $\frac{\pi}{4}$  だけ平行移動したものである .

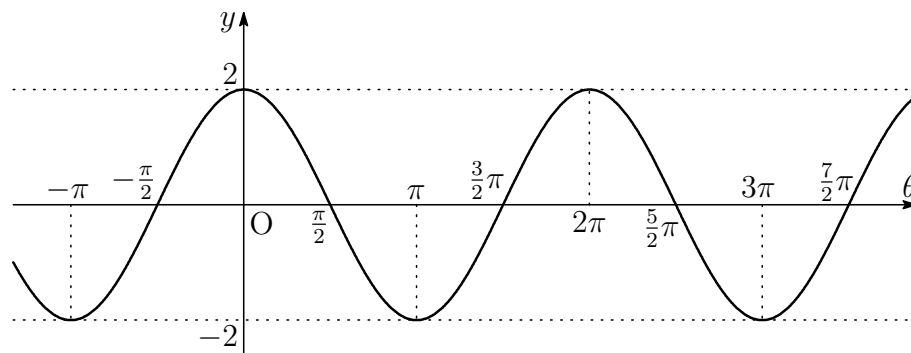


練習 4.14 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

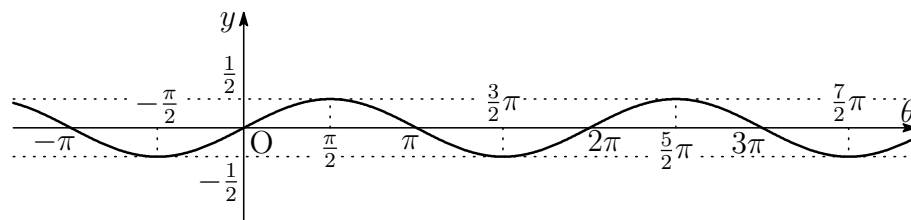
(1)  $y = 2 \cos \theta$

(2)  $y = \frac{1}{2} \sin \theta$

【解】 (1)  $y = \cos \theta$  のグラフを， $\theta$  軸をもとにして  $y$  軸方向へ 2 倍に拡大したものである．周期は  $2\pi$  である．



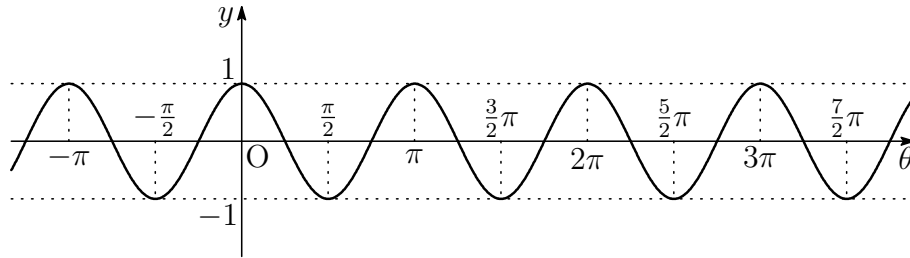
(2)  $y = \sin \theta$  のグラフを， $\theta$  軸をもとにして  $y$  軸方向へ  $\frac{1}{2}$  倍に縮小したものである．周期は  $2\pi$  である．



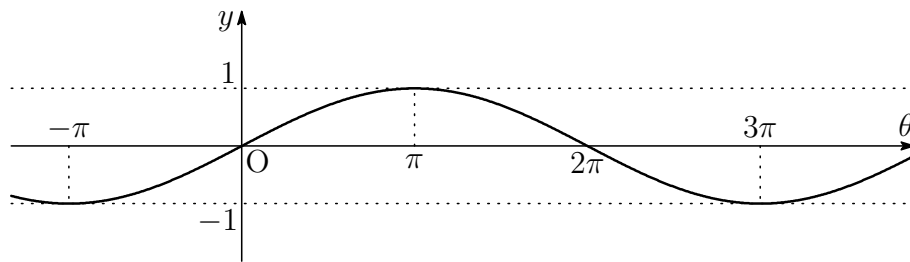
練習 4.15 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

(1)  $y = \cos 2\theta$                       (2)  $y = \sin \frac{\theta}{2}$                       (3)  $y = \tan 2\theta$

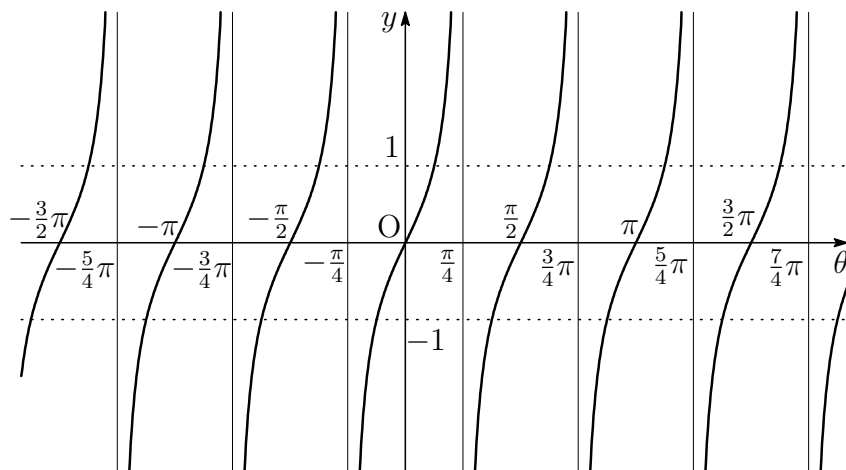
【解】 (1)  $y = \cos \theta$  のグラフを， $y$  軸をもとにして  $\theta$  軸方向へ  $\frac{1}{2}$  倍に縮小したものである．周期は  $2\pi \div 2 = \pi$  である．



(2)  $y = \sin \theta$  のグラフを， $y$  軸をもとにして  $\theta$  軸方向へ 2 倍に拡大したものである．周期は  $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$  である．



(3)  $y = \tan \theta$  のグラフを， $y$  軸をもとにして  $\theta$  軸方向へ  $\frac{1}{2}$  倍に縮小したものである．周期は  $\pi \div 2 = \frac{\pi}{2}$  である．



## 4.1.4 三角関数の性質

練習 4.16 次の値を求めよ .

$$(1) \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \qquad (2) \cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right) \qquad (3) \tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$$

【解】 (1)  $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$$(2) \cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right) = \cos\frac{13}{6}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) \tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = -\tan\frac{9}{4}\pi = -\tan\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

## 4.1.5 三角関数を含む方程式・不等式

練習 4.17  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、次の方程式を解け.

$$(1) \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

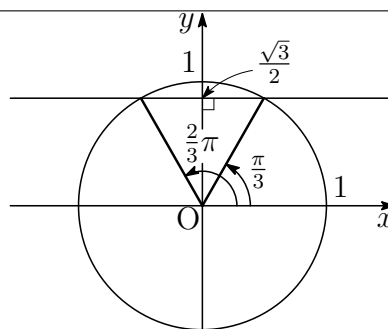
$$(2) 2 \cos \theta + 1 = 0$$

$$(3) \sin \theta + 1 = 0$$

【解】 (1) 求める角  $\theta$  の動径と単位円の交点の  $y$  座標は  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  である.

右の図より、 $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲では

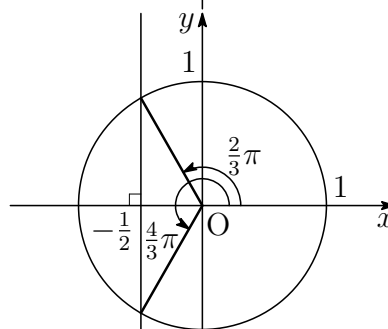
$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$$



(2)  $2 \cos \theta + 1 = 0$  より  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$   
 求める角  $\theta$  の動径と単位円の交点の  $x$  座標は  $-\frac{1}{2}$  である.

右の図より、 $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲では

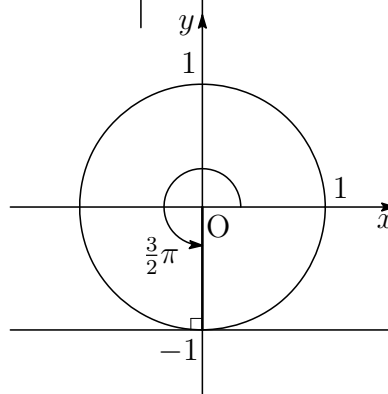
$$\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$



(3)  $\sin \theta + 1 = 0$  より  $\sin \theta = -1$   
 求める角  $\theta$  の動径と単位円の交点の  $y$  座標は  $-1$  である.

右の図より、 $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲では

$$\theta = \frac{3}{2}\pi$$



練習 4.18 次の方程式を解け.

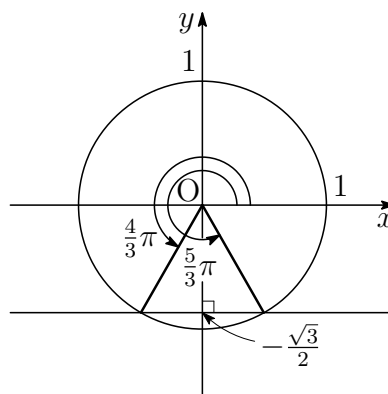
(1)  $2 \sin \theta = -\sqrt{3}$

(2)  $\sqrt{2} \cos \theta = -1$

【解】 (1)  $2 \sin \theta = -\sqrt{3}$  より  $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 求める角  $\theta$  の動径と単位円の交点の  
 $y$  座標は  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  である.

右の図より

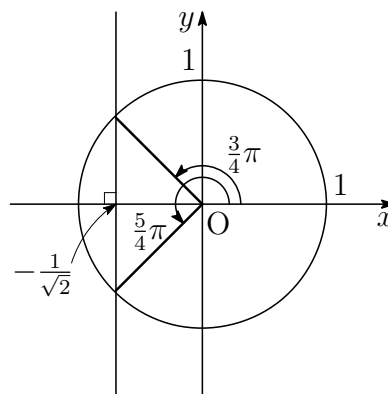
$$\theta = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi, \frac{5}{3}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$



(2)  $\sqrt{2} \cos \theta = -1$  より  $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$   
 求める角  $\theta$  の動径と単位円の交点の  
 $x$  座標は  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  である.

右の図より

$$\theta = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi, \frac{5}{4}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$



練習 4.19 次の方程式を解け．

$$(1) \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(2) \tan \theta = -\sqrt{3}$$

【解】 (1) 求める角  $\theta$  の動径と直線  $x = 1$  の交点の  $y$  座標は  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  である．

よって、 $0 \leq \theta < \pi$  の範囲では

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

したがって、方程式の解は

$$\theta = \frac{\pi}{6} + n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

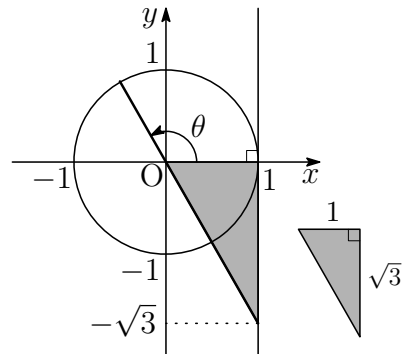
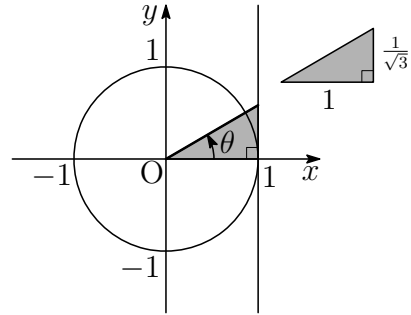
(2) 求める角  $\theta$  の動径の延長と直線  $x = 1$  の交点の  $y$  座標は  $-\sqrt{3}$  である．

よって、 $0 \leq \theta < \pi$  の範囲では

$$\theta = \frac{2}{3}\pi$$

したがって、方程式の解は

$$\theta = \frac{2}{3}\pi + n\pi \quad (n \text{ は整数})$$



練習 4.20  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき，次の方程式を解け．

$$(1) 2 \cos^2 \theta + 5 \sin \theta - 4 = 0$$

$$(2) 2 \sin^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$$

【解】 (1) 方程式を変形すると

$$2(1 - \sin^2 \theta) + 5 \sin \theta - 4 = 0$$

$$2 \sin^2 \theta - 5 \sin \theta + 2 = 0$$

因数分解すると  $(2 \sin \theta - 1)(\sin \theta - 2) = 0$

$-1 \leq \sin \theta \leq 1$  であるから  $2 \sin \theta - 1 = 0$

$0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲で  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  を解くと  $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

(2) 方程式を変形すると

$$2(1 - \cos^2 \theta) + \cos \theta - 1 = 0$$

$$2 \cos^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$$

因数分解すると  $(2 \cos \theta + 1)(\cos \theta - 1) = 0$

よって  $2 \cos \theta + 1 = 0$  または  $\cos \theta - 1 = 0$

$0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲で  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$  を解くと  $\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

$\cos \theta = 1$  を解くと  $\theta = 0$

したがって，求める解は  $\theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

練習 4.21  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、次の不等式を解け.

(1)  $\sin \theta > \frac{1}{2}$

(2)  $2 \cos \theta \geq -\sqrt{3}$

【解】 (1)  $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲で、 $\sin \theta = \frac{1}{2}$  となる  $\theta$  は

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

よって、不等式の解は、右の図から、

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

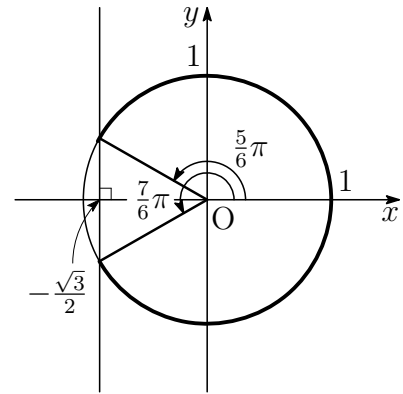
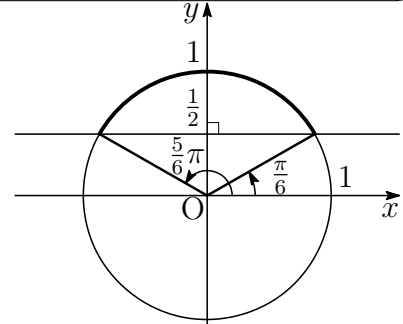
(2)  $2 \cos \theta \geq -\sqrt{3}$  より  $\cos \theta \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲で、 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  となる  $\theta$  は

$$\theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$$

よって、不等式の解は、右の図から、

$$0 \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi \leq \theta < 2\pi$$



## 4.1.6 補充問題

1  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき, 次の方程式を解け.

$$(1) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$(2) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

【解】 (1)  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき  $-\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$  であるから

この範囲で  $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$  を解くと

$$\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad \text{または} \quad \theta - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

したがって  $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi$

(2)  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき  $\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$  であるから

この範囲で  $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  を解くと

$$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi \quad \text{または} \quad \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{7}{6}\pi$$

したがって  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi$

**2**  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき, 次の不等式を解け.

(1)  $\tan \theta \geq 1$

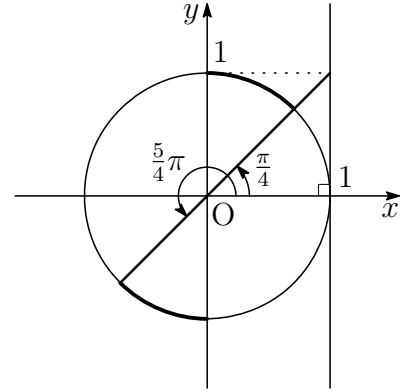
(2)  $\tan \theta < \sqrt{3}$

**【解】** (1)  $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲で,  $\tan \theta = 1$  となる  $\theta$  は

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$$

よって, 不等式の解は, 右の図から

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi \leq \theta < \frac{3}{2}\pi$$

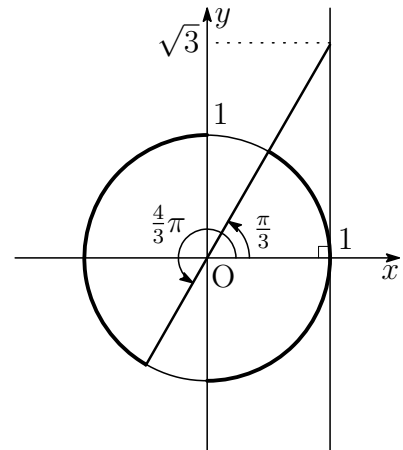


(2)  $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲で,  $\tan \theta = \sqrt{3}$  となる  $\theta$  は

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$$

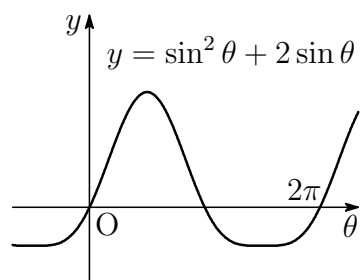
よって, 不等式の解は, 右の図から

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{4}{3}\pi, \\ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$



**3** 関数  $y = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta$  について、次の問いに答えよ。

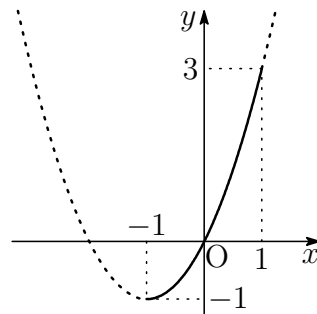
- (1)  $\sin \theta = x$  とおいて、 $y$  を  
 $y = a(x - p)^2 + q$  の形に表せ。  
 (2)  $y$  の最大値、最小値を求めよ。



**【解】** (1)  $\sin \theta = x$  とおくと  $y = x^2 + 2x$   
 よって  $y = (x + 1)^2 - 1$

(2)  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$  より  $-1 \leq x \leq 1$   
 このとき、 $y = (x + 1)^2 - 1$  は

$x = 1$  で最大値 3 をとり、  
 $x = -1$  で最小値  $-1$  をとる。



## 4.2 加法定理

### 4.2.1 三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \dots \textcircled{2}$$

練習 4.22 上の①, ②で,  $\beta$  を  $-\beta$  におきかえることにより, 次の等式を導け.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

[証明] ①において,  $\beta$  を  $-\beta$  におきかえると

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin\{\alpha + (-\beta)\} = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

②において,  $\beta$  を  $-\beta$  におきかえると

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos\{\alpha + (-\beta)\} = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

[証終]

練習 4.23 加法定理を用いて,  $\cos 75^\circ$  の値を求めよ.

【解】  $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

練習 4.24  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$  であることを用いて,  $\cos \frac{\pi}{12}$  の値を求めよ.

【解】  $\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

練習 4.25  $\alpha$  の動径が第2象限,  $\beta$  の動径が第1象限にあり,  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\cos \beta = \frac{3}{5}$  のとき, 次の値を求めよ.

- (1)  $\sin(\alpha + \beta)$  (2)  $\sin(\alpha - \beta)$   
 (3)  $\cos(\alpha + \beta)$  (4)  $\cos(\alpha - \beta)$

【解】  $\alpha$  の動径が第2象限にあるから  $\cos \alpha < 0$

$\beta$  の動径が第1象限にあるから  $\sin \beta > 0$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \cos \alpha &= -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ &= -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \sin \beta &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{6 - 4\sqrt{5}}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{6 + 4\sqrt{5}}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{5} - \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = -\frac{3\sqrt{5} + 8}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = -\frac{3\sqrt{5} - 8}{15} \end{aligned}$$

練習 4.26 加法定理を用いて,  $\tan 105^\circ$  の値を求めよ.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } \tan 105^\circ &= \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{1^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

練習 4.27  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$  であることを用いて,  $\tan \frac{\pi}{12}$  の値を求めよ.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } \tan \frac{\pi}{12} &= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

練習 4.28 2直線  $y = 2x$ ,  $y = \frac{1}{3}x$  のなす角  $\theta$  を求めよ. ただし,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする.

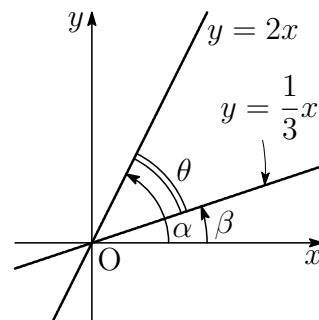
【解】  $x$  軸の正の部分から2直線まで測った角を, それぞれ  $\alpha, \beta$  とすると, 右の図より  $\theta = \alpha - \beta$  である.

$$\tan \alpha = 2, \tan \beta = \frac{1}{3}$$

であるから

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1 \end{aligned}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ であるから } \theta = \frac{\pi}{4}$$



## 4.2.2 加法定理の応用

練習 4.29  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  で  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  のとき, 次の値を求めよ.

(1)  $\cos \alpha$                       (2)  $\sin 2\alpha$                       (3)  $\cos 2\alpha$

【解】 (1)  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  であるから  $\cos \alpha > 0$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$(2) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$(3) \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

練習 4.30 次の等式が成り立つことを証明せよ.

(1)  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$       (2)  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$

[証明] (1) 左辺  $= \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$   
 $= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha$   
 $= 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$

2倍角の公式により

$$1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + \sin 2\alpha$$

よって  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$

(2) 左辺  $= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$   
 $= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

2倍角の公式により

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

よって  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$

[証終]

練習 4.31 半角の公式を使って、次の値を求めよ。

(1)  $\sin \frac{\pi}{8}$

(2)  $\sin \frac{3}{8}\pi$

(3)  $\cos \frac{3}{8}\pi$

【解】 (1) 半角の公式により

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{8} > 0 \text{ より } \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

(2) 半角の公式により

$$\sin^2 \frac{3}{8}\pi = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{3}{4}\pi \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{3}{8}\pi > 0 \text{ より } \sin \frac{3}{8}\pi = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

(3) 半角の公式により

$$\cos^2 \frac{3}{8}\pi = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{3}{4}\pi \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{3}{8}\pi > 0 \text{ より } \cos \frac{3}{8}\pi = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

正接の2倍角，半角の公式

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \quad \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

練習 4.32 上の公式が成り立つことを確かめよ．また，次の値を求めよ．

- (1)  $\tan \alpha = -3$  のとき， $\tan 2\alpha$  の値
- (2)  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  で， $\cos \alpha = \frac{2}{3}$  のとき， $\tan \frac{\alpha}{2}$  の値

【解】  $\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$(1) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times (-3)}{1 - (-3)^2} = \frac{3}{4}$$

$$(2) \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ より } 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{よって } \tan \frac{\alpha}{2} > 0$$

$$\text{したがって } \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

練習 4.33  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、次の方程式を解け.

$$(1) \cos 2\theta + \sin \theta = 1 \qquad (2) \sin 2\theta + \cos \theta = 0$$

【解】 (1) 左辺を変形すると  $(1 - 2\sin^2 \theta) + \sin \theta = 1$

整理すると  $\sin \theta(2\sin \theta - 1) = 0$

よって  $\sin \theta = 0$  または  $2\sin \theta - 1 = 0$

$0 \leq \theta < 2\pi$  のとき

$$\sin \theta = 0 \text{ から } \theta = 0, \pi$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \text{ から } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

したがって  $\theta = 0, \pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

(2) 左辺を変形すると  $2\sin \theta \cos \theta + \cos \theta = 0$

整理すると  $\cos \theta(2\sin \theta + 1) = 0$

よって  $\cos \theta = 0$  または  $2\sin \theta + 1 = 0$

$0 \leq \theta < 2\pi$  のとき

$$\cos \theta = 0 \text{ から } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2} \text{ から } \theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

したがって  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$

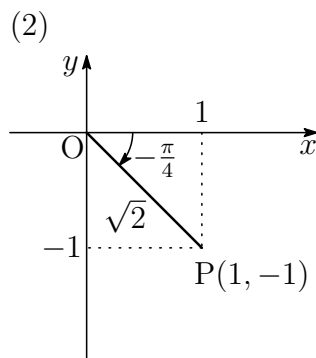
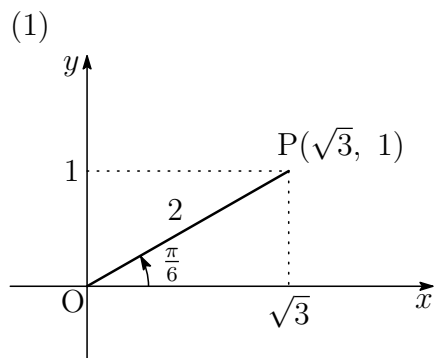
練習 4.34 次の式を  $r \sin(\theta + \alpha)$  の形に表せ. ただし,  $-\pi < \alpha < \pi$  とする.

(1)  $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$

(2)  $\sin \theta - \cos \theta$

【解】 (1)  $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2 \sin \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right)$

(2)  $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right)$



練習 4.35 次の関数の最大値, 最小値を求めよ. また, そのグラフをかけ.

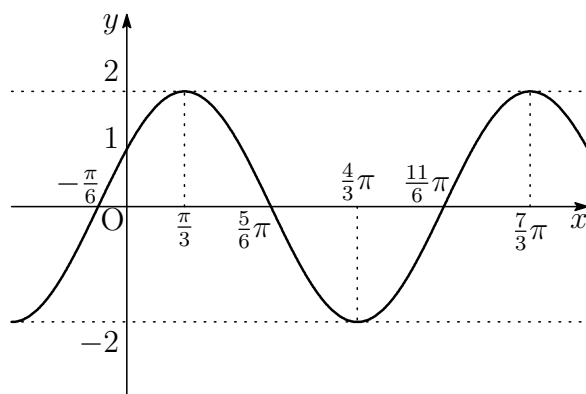
$$y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$$

【解】  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right)$  であるから  $y = 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right)$

$-1 \leq \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$  であるから  $-2 \leq y \leq 2$

したがって  $y$  の最大値は 2, 最小値は  $-2$

また, このグラフは,  $y = \sin x$  のグラフを,  $\theta$  軸をもとにして  $y$  軸方向へ 2 倍に拡大し, さらに  $x$  軸方向に  $-\frac{\pi}{6}$  だけ平行移動したもので, 下の図のようになる.



練習 4.36  $0 \leq x < 2\pi$  のとき、次の方程式を解け.

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$$

【解】左辺を変形すると  $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$$\text{よって} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$0 \leq x < 2\pi$  のとき

$$\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

であるから、この範囲で ① を解くと

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi \quad \text{または} \quad x + \frac{\pi}{3} = \frac{13}{6}\pi$$

$$\text{したがって} \quad x = \frac{\pi}{2}, \frac{11}{6}\pi$$

### 4.2.3 補充問題

4 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$(1) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (2) \cos 3\alpha = -3 \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha$$

【解】(1) 左辺  $= \sin(2\alpha + \alpha)$

$$\begin{aligned} &= \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = \text{右辺} \end{aligned}$$

(2) 左辺  $= \cos(2\alpha + \alpha)$

$$\begin{aligned} &= \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= -3 \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha = \text{右辺} \end{aligned}$$

5 2直線  $y = 3x$ ,  $y = \frac{1}{2}x + 1$  のなす角  $\theta$  を求めよ. ただし,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする.

▶ 原点を通る2直線  $y = 3x$ ,  $y = \frac{1}{2}x$  のなす角として求める.

【解】  $x$  軸の正の部分から2直線  $y = 3x$ ,  $y = \frac{1}{2}x + 1$  まで測った角を, それぞれ  $\alpha$ ,  $\beta$  とすると,  $\theta = \alpha - \beta$  である.

$$\tan \alpha = 3, \tan \beta = \frac{1}{2}$$

であるから

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = 1\end{aligned}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ であるから } \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

**6**  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき, 次の不等式を解け.

$$(1) \sin 2\theta \geq \sin \theta \qquad (2) \cos 2\theta < \sin \theta + 1$$

**【解】** (1) 式を変形すると  $2 \sin \theta \cos \theta \geq \sin \theta$

$$\text{整理すると} \quad \sin \theta(2 \cos \theta - 1) \geq 0$$

$$\text{よって} \quad \begin{cases} \sin \theta \geq 0 \\ 2 \cos \theta - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{または} \quad \begin{cases} \sin \theta \leq 0 \\ 2 \cos \theta - 1 \leq 0 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$  のとき

$$\textcircled{1} \text{ を解くと} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ を解くと} \quad \pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{したがって} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

(2) 式を変形すると  $1 - 2 \sin^2 \theta < \sin \theta + 1$

$$\text{整理すると} \quad \sin \theta(2 \sin \theta + 1) > 0$$

$$\text{よって} \quad \sin \theta < -\frac{1}{2}, 0 < \sin \theta$$

$$\text{したがって} \quad 0 < \theta < \pi, \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$$

**7** 関数  $y = \sin x + 2 \cos x$  について, 最大値, 最小値を求めよ.

**【解】** 式を変形すると  $y = \sqrt{5} \sin(x + \alpha)$

$$\text{ただし, } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1 \text{ より } -\sqrt{5} \leq y \leq \sqrt{5}$$

$$\text{よって 最大値は } \sqrt{5}, \text{ 最小値は } -\sqrt{5}$$

## 4.3 章末問題

## 4.3.1 章末問題 A

1 次の値を求めよ.

(1)  $\sin \frac{16}{3}\pi$

(2)  $\cos \frac{7}{2}\pi$

(3)  $\tan \left(-\frac{11}{6}\pi\right)$

【解】 (1)  $\sin \frac{16}{3}\pi = \sin \left(\frac{4}{3}\pi + 2 \times 2\pi\right) = \sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)  $\cos \frac{7}{2}\pi = \cos \left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi\right) = \cos \frac{3}{2}\pi = 0$

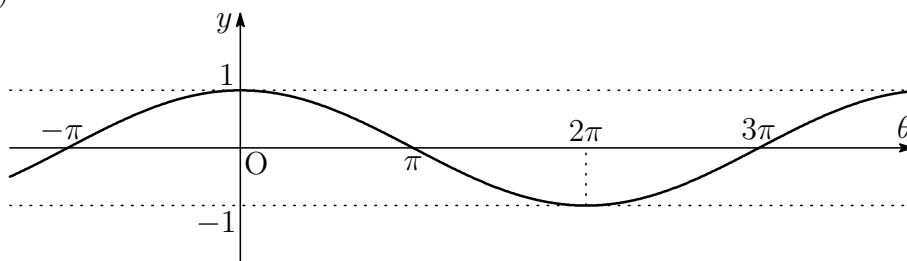
(3)  $\tan \left(-\frac{11}{6}\pi\right) = \tan \left\{\frac{\pi}{6} + (-1) \times 2\pi\right\} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2 次の関数のグラフをかけ.

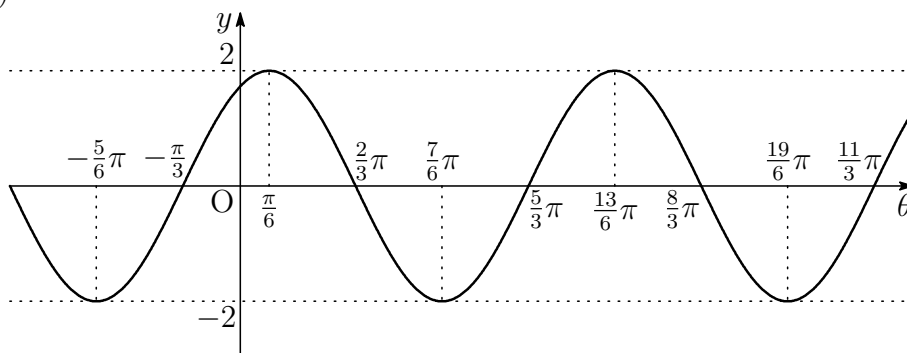
(1)  $y = \cos \frac{\theta}{2}$

(2)  $y = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

【答】 (1)



(2)



**3**  $\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4}$  のとき, 次の式の値を求めよ. ただし,  $\theta$  は第 4 象限の角であるとする.

(1)  $\sin \theta - \cos \theta$

(2)  $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

**【解】** (1)  $\theta$  は第 4 象限の角であるから  $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$

したがって  $\sin \theta - \cos \theta < 0 \dots \textcircled{1}$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \sin \theta - \cos \theta = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\begin{aligned} (2) \sin^3 \theta - \cos^3 \theta &= (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= (\sin \theta - \cos \theta)(1 + \sin \theta \cos \theta) \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) \right\} = -\frac{3\sqrt{6}}{8} \end{aligned}$$

4 次の等式を証明せよ.

$$(1) \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta} \quad (2) \frac{1}{\tan \theta} - \tan \theta = \frac{2 \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

【解】 (1) 左辺 =  $\frac{(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} = \frac{2}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta}$

よって  $\frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta}$

(2) 左辺 =  $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\cos 2\theta}{\frac{1}{2} \sin 2\theta} = \frac{2 \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

よって  $\frac{1}{\tan \theta} - \tan \theta = \frac{2 \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

5  $0 \leq x < 2\pi$  のとき, 次の方程式を解け.

$$(1) 2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0 \qquad (2) \cos 2x = \cos x$$

【解】(1) 左辺を変形すると  $2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$

整理すると  $(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

よって  $2\sin x - 1 = 0$  または  $\sin x + 1 = 0$

$0 \leq x < 2\pi$  のとき

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ から } x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$\sin x = -1 \text{ から } x = \frac{3}{2}\pi$$

したがって  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$

(2) 左辺を変形すると  $2\cos^2 x - 1 = \cos x$

整理すると  $(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$

よって  $2\cos x + 1 = 0$  または  $\cos x - 1 = 0$

$0 \leq x < 2\pi$  のとき

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ から } x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

$$\cos x = 1 \text{ から } x = 0$$

したがって  $x = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

6 加法定理を用いて、次の等式が成り立つことを示せ。

$$(1) \begin{cases} \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \\ \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \\ \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta} \end{cases}$$

【解】 (1)  $\sin(\pi - \theta) = \sin \pi \cos \theta - \cos \pi \sin \theta = 0 \cdot \cos \theta - (-1) \cdot \sin \theta = \sin \theta$   
 $\cos(\pi - \theta) = \cos \pi \cos \theta + \sin \pi \sin \theta = (-1) \cdot \cos \theta + 0 \cdot \sin \theta = -\cos \theta$

上の2式から

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{\sin \theta}{-\cos \theta} = -\tan \theta$$

$$(2) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \theta - \cos \frac{\pi}{2} \sin \theta = 1 \cdot \cos \theta - 0 \cdot \sin \theta = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{2} \sin \theta = 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta = \sin \theta$$

上の2式から

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$$

7 関数  $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$  ( $0 \leq x < 2\pi$ ) について, 次のものを求めよ.

- (1) 最大値と最小値                      (2)  $y = 0$  となる  $x$  の値  
 (3)  $y \leq 0$  となる  $x$  の値の範囲

【解】(1) 式を変形すると  $y = 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ のとき } -\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

$$-1 \leq \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \text{ であるから}$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

よって 最大値は 2, 最小値は -2

$$(2) y = 0 \text{ より } 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = 0$$

$$\text{すなわち } \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi \text{ の範囲で } \textcircled{1} \text{ を解くと}$$

$$x - \frac{\pi}{3} = 0 \quad \text{または} \quad x - \frac{\pi}{3} = \pi$$

$$\text{よって } x = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$$

$$(3) y \leq 0 \text{ より } 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 0$$

$$\text{すなわち } \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi \text{ の範囲で } \textcircled{2} \text{ を解くと}$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq 0 \quad \text{または} \quad \pi \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{よって } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi \leq x < 2\pi$$

## 4.3.2 章末問題 B

8  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき，関数  $y = \cos^2 \theta + 2 \sin \theta$  が最小となる  $\theta$  と， $y$  の最小値を求めよ．

【解】  $\cos^2 \theta + 2 \sin \theta = (1 - \sin^2 \theta) + 2 \sin \theta$

$$= -\sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 1$$

$\sin \theta = x$  とおくと， $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき

$-1 \leq x \leq 1$  であり

$$y = -x^2 + 2x + 1$$

すなわち

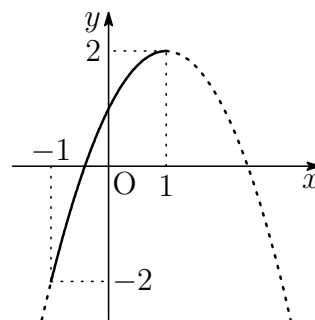
$$y = -(x - 1)^2 + 2$$

よって， $x = -1$  で最小値  $-2$  をとる．

$x = -1$  のとき，

$$\sin \theta = -1 \text{ より } \theta = \frac{3}{2}\pi$$

したがって  $\theta = \frac{3}{2}\pi$  で最小値  $-2$



9 次の値を求めよ.

(1)  $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2}$ ,  $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{3}$  のとき,  $\cos(\alpha - \beta)$  の値

(2)  $\tan \alpha = 2$ ,  $\tan \beta = 4$ ,  $\tan \gamma = 13$  のとき,  $\tan(\alpha + \beta + \gamma)$  の値

【解】 (1)  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2}$  の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{3}$  の両辺を 2 乗すると

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{1}{9} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② の辺々を加えると

$$2 + 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \frac{13}{36}$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{59}{72}$$

したがって  $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{59}{72}$

(2)  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 + 4}{1 - 2 \cdot 4} = -\frac{6}{7}$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta + \gamma) &= \tan\{(\alpha + \beta) + \gamma\} = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \gamma}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan \gamma} \\ &= \frac{-\frac{6}{7} + 13}{1 - \left(-\frac{6}{7}\right) \cdot 13} = \frac{-6 + 91}{7 + 78} = \frac{85}{85} = 1 \end{aligned}$$

10 次の等式を証明せよ .

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

【解】 左辺 =  $\frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$

分母 , 分子を  $\cos \alpha \cos \beta$  で割って

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

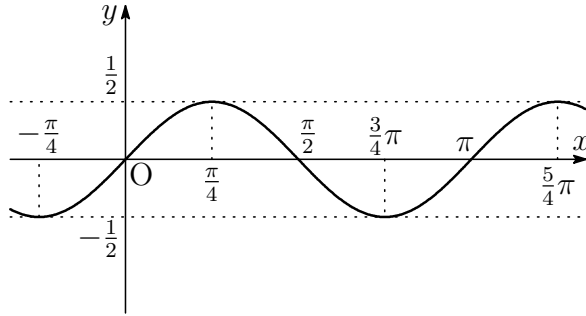
よって  $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$

11 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

$$(1) y = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$(2) y = \cos^2 x$$

【解】(1) グラフは下図．周期は  $2\pi \div 2 = \pi$

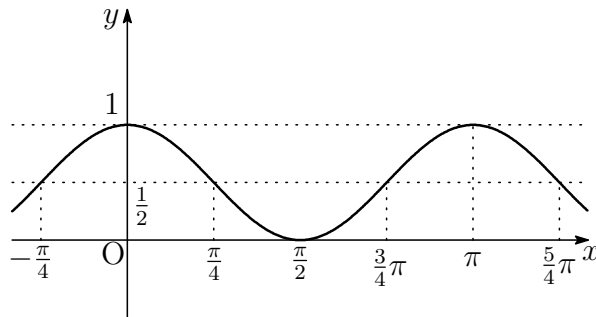


$$(2) \text{半角の公式より } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } y = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

したがって，グラフは下図．

周期は  $2\pi \div 2 = \pi$



12 次の問いに答えよ.

(1) 等式  $\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cos x$  が成り立つことを示せ.

(2)  $0 \leq x < 2\pi$  のとき, 方程式  $\sin 3x + \sin x = 0$  を解け.

【解】(1) 左辺  $= \sin(2x + x) + \sin x$

$$= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x + \sin x$$

$$= \sin 2x \cos x + (\cos 2x + 1) \sin x$$

$$= \sin 2x \cos x + 2 \cos^2 x \sin x$$

$$= \sin 2x \cos x + \sin 2x \cos x$$

$$= 2 \sin 2x \cos x$$

よって  $\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cos x$

(2) (1) より, 方程式は  $2 \sin 2x \cos x = 0$

よって  $\sin 2x = 0$  または  $\cos x = 0$  ……①

$0 \leq x < 2\pi$  のとき,  $0 \leq 2x < 4\pi$  であるから, この範囲で①を解くと

$$\sin 2x = 0 \text{ から } 2x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$$

$$\text{すなわち } x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$$

$$\cos x = 0 \text{ から } x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

したがって  $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

【別解】(1) 左辺  $= \sin(2x + x) + \sin(2x - x)$

$$= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x + \sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x$$

$$= 2 \sin 2x \cos x$$

よって  $\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cos x$

**13** 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

$$y = \sin x \cos x - \sin^2 x + \frac{1}{2} \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

**【解】**  $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$  ,  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  であるから

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \\ &= \frac{1}{2} (\sin 2x + \cos 2x) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ のとき } \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9}{4}\pi$$

$$\begin{aligned} \text{よって } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} & \quad \text{すなわち } x = \frac{\pi}{8} \text{ で最大値 } \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi & \quad \text{すなわち } x = \frac{5}{8}\pi \text{ で最小値 } -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$



## 第 5 章 指数関数と対数関数

### 5.1 指数関数

#### 5.1.1 指数の拡張

練習 5.1 次の  $\square$  に適する数を求めよ。ただし、(3) は小数とする。

$$(1) 4^{-2} = \frac{1}{\square}$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2^{\square}$$

$$(3) 23.1 \times 10^{-4} = \square$$

$$(4) 0.00074 = 7.4 \times 10^{\square}$$

【解】(1)  $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

よって、 $\square$  は 16

$$(2) \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$$

よって、 $\square$  は  $-5$

$$(3) 23.1 \times 10^{-4} = 23.1 \times 0.0001 = 0.00231$$

よって、 $\square$  は 0.00231

$$(4) 0.00074 = 7.4 \times 0.0001 = 7.4 \times 10^{-4}$$

よって、 $\square$  は  $-4$

練習 5.2 次の□に適する数を求めよ．

(1)  $3^4 \times 3^{-2} = 3^\square$

(2)  $10^{-3} \div 10^2 = 10^\square$

(3)  $(3^{-2})^4 = 3^\square$

(4)  $(2 \times 3^4)^{-2} = 2^\square \times 3^\square$

【解】(1)  $3^4 \times 3^{-2} = 3^{4+(-2)} = 3^2$

よって、□は 2

(2)  $10^{-3} \div 10^2 = 10^{-3-2} = 10^{-5}$

よって、□は -5

(3)  $(3^{-2})^4 = 3^{(-2) \times 4} = 3^{-8}$

よって、□は -8

(4)  $(2 \times 3^4)^{-2} = 2^{-2} \times (3^4)^{-2} = 2^{-2} \times 3^{4 \times (-2)} = 2^{-2} \times 3^{-8}$

よって、□は順に -2, -8

練習 5.3 次の□に適する数を求めよ．

(1)  $(-2)^3 = -8$  であるから、□は -8 の □乗根である．

(2)  $2^4 = (-2)^4 = 16$  であるから、2 と □は 16 の □乗根である．

【答】(1) 順に -2, 3

(2) 順に -2, 4

練習 5.4 次の□に適する数を求めよ．

(1)  $\sqrt[3]{1} = \square$

(2)  $\sqrt[3]{27} = \square$

(3)  $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \square$

【解】(1)  $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1^3} = 1$

よって、□は 1

(2)  $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

よって、□は 3

(3)  $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$

よって、□は  $\frac{1}{2}$

練習 5.5 次の計算をせよ .

$$(1) \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} \quad (2) \frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} \quad (3) (\sqrt[4]{5})^2 \quad (4) \sqrt[4]{\sqrt[3]{12}}$$

【解】 (1)  $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \times 9} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

(2)  $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

(3)  $(\sqrt[4]{5})^2 = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{5^2}} = \sqrt{5}$

(4)  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{12}} = \sqrt[4 \times 3]{12} = \sqrt[12]{12}$

練習 5.6 次の□に適する数を求めよ .

$$(1) 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \quad (2) 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^{\square}} \quad (3) 5^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$$

$$(4) \sqrt[5]{6} = 6^{\square} \quad (5) \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^{\square}} = 2^{\square}$$

【解】 (1)  $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$

(2)  $3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3}$

(3)  $5^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

(4)  $\sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}}$

(5)  $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$

練習 5.7 次の計算をせよ .

$$(1) 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{5}{6}} \quad (2) \sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[12]{4}$$

【解】 (1)  $2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{6}} = 2^2 = 4$

(2)  $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[12]{4} = 4^{\frac{1}{4}} \times 4^{\frac{1}{3}} \div 4^{\frac{1}{12}} = 4^{\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

## 5.1.2 指数関数

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$2^{-0.5} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$$

$$2^{1.5} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

練習 5.8 上の計算にならって、下の表の空らんをうめよ。

$x$	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$y$	0.25			0.71			2	2.83	4

【解】  $2^{-1.5} = 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.35$

$$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$2^0 = 1$$

$$2^{0.5} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.41$$

よって、表は次のようになる。

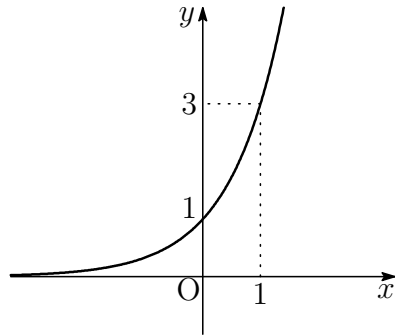
$x$	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$y$	0.25	0.35	0.5	0.71	1	1.41	2	2.83	4

練習 5.9 次の指数関数のグラフをかけ．

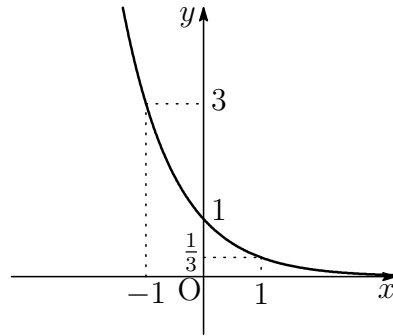
(1)  $y = 3^x$

(2)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

【答】(1)



(2)



練習 5.10 次の3つの数の大小を不等号で示せ．

(1)  $\sqrt[3]{4}$ ,  $\sqrt[4]{8}$ ,  $\sqrt[5]{8}$

(2)  $1$ ,  $(0.2)^3$ ,  $(0.2)^{-1}$

【解】(1)  $\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}$ ,  $\sqrt[4]{8} = 2^{\frac{3}{4}}$ ,  $\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}}$

指数の大小を調べると  $\frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

底2が1より大きいから

$$2^{\frac{3}{5}} < 2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{3}{4}}$$

すなわち  $\sqrt[5]{8} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{8}$

(2)  $1 = (0.2)^0$ ,  $(0.2)^3$ ,  $(0.2)^{-1}$

指数の大小を調べると  $-1 < 0 < 3$

底0.2が1より小さいから

$$(0.2)^{-1} > (0.2)^0 > (0.2)^3$$

すなわち  $(0.2)^{-1} > 1 > (0.2)^3$

練習 5.11 次の方程式を解け．

$$(1) 4^x = 8 \qquad (2) 8^x = \frac{1}{16} \qquad (3) 27^x = 3^{2-x}$$

【解】 (1) 方程式を変形すると  $2^{2x} = 2^3$   
 $2x = 3$  より  $x = \frac{3}{2}$

(2) 方程式を変形すると  $2^{3x} = 2^{-4}$   
よって  $x = -\frac{4}{3}$

(3) 方程式を変形すると  $3^{3x} = 3^{2-x}$   
 $3x = 2 - x$  より  $x = \frac{1}{2}$

練習 5.12 次の不等式を解け．

$$(1) 3^x < 81 \qquad (2) \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{1}{32} \qquad (3) 2^{3x-4} > \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

【解】 (1) 不等式を変形すると  $3^x < 3^4$   
底 3 が 1 より大きいから  $x < 4$

(2) 不等式を変形すると  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^4$   
底  $\frac{1}{2}$  が 1 より小さいから  $x \leq 4$

(3) 不等式を変形すると  $2^{3x-4} > 2^{-2x}$   
底 2 が 1 より大きいから  $3x - 4 > -2x$   
これを解いて  $x > \frac{4}{5}$

### 5.1.3 補充問題

1 光の進む速さは、毎秒  $3.0 \times 10^8 \text{m}$  である．すると、光は  $1\text{km}$  を進むのに約  $3.3 \times 10^\square$  秒かかる． $\square$  に適する整数を求めよ．

【解】  $10^3 \div (3.0 \times 10^8) = 10^{-5} \times \frac{1}{3.0}$   
 $= 0.33 \cdots \times 10^{-5} \doteq 3.3 \times 10^{-6}$  (秒)  
よって、 $\square$  は  $-6$

2 次の計算をせよ.

(1)  $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{9}$

(2)  $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$

(3)  $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2})$

(4)  $(8^{\frac{1}{3}} - 8^{-\frac{1}{3}})(8^{\frac{2}{3}} + 1 + 8^{-\frac{2}{3}})$

【解】 (1)  $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$

(2)  $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} - \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3}$

(3)  $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}) = (\sqrt[4]{3})^2 - (\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

(4)  $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2, 8^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1}, 8^{-\frac{2}{3}} = 2^{-2}$

$$\begin{aligned} \text{よって } (8^{\frac{1}{3}} - 8^{-\frac{1}{3}})(8^{\frac{2}{3}} + 1 + 8^{-\frac{2}{3}}) &= \left(2 - \frac{1}{2}\right) \left(4 + 1 + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{21}{4} = \frac{63}{8} \end{aligned}$$

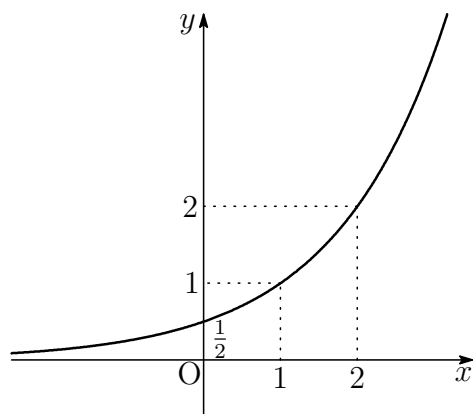
【別解】 (4)  $(8^{\frac{1}{3}} - 8^{-\frac{1}{3}})\{(8^{\frac{1}{3}})^2 + 8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} + (8^{-\frac{1}{3}})^2\} = 8 - 8^{-1} = 8 - \frac{1}{8} = \frac{63}{8}$

3 次の関数のグラフをかけ.

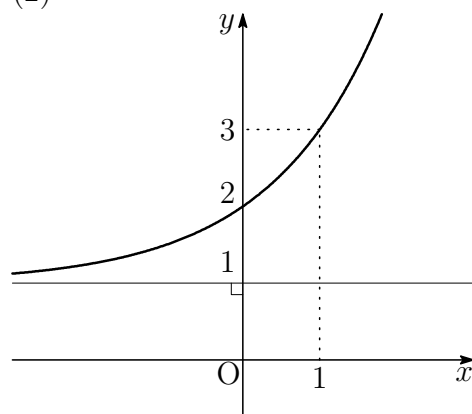
(1)  $y = 2^{x-1}$

(2)  $y = 2^x + 1$

【答】(1)



(2)



4  $x$  の方程式  $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $2^x = t$  とおいて得られる  $t$  の方程式を作れ。  
 (2) 与えられた  $x$  の方程式を解け。

【解】 (1)  $4^x = (2^x)^2 = t^2$  であるから  $t^2 - 3t - 4 = 0$   
 (2) (1) の方程式を因数分解すると  $(t + 1)(t - 4)$   
 $t = 2^x > 0$  であるから  $t = 4$   
 $2^x = 4$  を解いて  $x = 2$

## 5.2 対数関数

### 5.2.1 対数とその性質

練習 5.13 次の  $\square$  に適する数を求めよ。

(1)  $\log_2 16 = \square$

(2)  $\log_2 4 = \square$

(3)  $\log_2 \frac{1}{8} = \square$

【解】 (1)  $16 = 2^4$  から  $\log_2 16 = 4$   
 よって、 $\square$  は 4  
 (2)  $4 = 2^2$  から  $\log_2 4 = 2$   
 よって、 $\square$  は 2  
 (3)  $\frac{1}{8} = 2^{-3}$  から  $\log_2 \frac{1}{8} = -3$   
 よって、 $\square$  は -3

練習 5.14 次の  $\square$  に適する数を求めよ。

(1)  $9 = 3^2$  から  $\log_3 9 = \square$

(2)  $\frac{1}{25} = 5^{-2}$  から  $\log_5 \frac{1}{25} = \square$

(3)  $3 = 4^x$  のとき  $x = \log_{\square} 3$

(4)  $\log_4 64 = x$  のとき  $x = \square$

【解】 (1) 2  
 (2) -2  
 (3) 4  
 (4)  $64 = 4^x$  すなわち  $4^3 = 4^x$   
 よって  $x = 3$

練習 5.15 次の値を求めよ .

- (1)  $\log_2 2^5$       (2)  $\log_5 25$       (3)  $\log_3 \frac{1}{27}$       (4)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$   
(5)  $\log_{10} 0.1$       (6)  $\log_{\frac{1}{3}} 3$       (7)  $\log_2 \sqrt[3]{2}$       (8)  $\log_{\sqrt{5}} 5$

- 【解】 (1)  $\log_2 2^5 = 5$   
(2)  $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$   
(3)  $\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3$   
(4)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4$   
(5)  $\log_{10} 0.1 = \log_{10} \frac{1}{10} = \log_{10} 10^{-1} = -1$   
(6)  $\log_{\frac{1}{3}} 3 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = -1$   
(7)  $\log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$   
(8)  $\log_{\sqrt{5}} 5 = \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^2 = 2$

## 対数の性質

$M > 0, N > 0$  で,  $k$  を実数とする.

$$1 \quad \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$2 \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$3 \quad \log_a M^k = k \log_a M$$

←これらの等式は, 右辺を左辺の形に変形するときにも用いられる.  
また, 2 によると

$$\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$$

[1の証明]  $\log_a M = p, \log_a N = q$  とすると

$$M = a^p, \quad N = a^q$$

$$\text{よって} \quad MN = a^p \times a^q = a^{p+q}$$

$$\text{したがって} \quad \log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N \quad \text{[証終]}$$

練習 5.16 上の証明にならって, 性質 2, 性質 3 が成り立つことを示せ.

[2の証明]  $\log_a M = p, \log_a N = q$  とすると

$$M = a^p, \quad N = a^q$$

$$\text{よって} \quad \frac{M}{N} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$\text{したがって} \quad \log_a \frac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N \quad \text{[証終]}$$

[3の証明]  $\log_a M = p$  とすると  $M = a^p$

$$\text{よって} \quad M^k = (a^p)^k = a^{kp}$$

$$\text{したがって} \quad \log_a M^k = kp = k \log_a M \quad \text{[証終]}$$

練習 5.17 次の計算をせよ .

(1)  $\log_4 2 + \log_4 8$

(2)  $\log_3 2 - \log_3 18$

(3)  $2\log_5 5 - \log_5 15 + \log_5 9$

(4)  $\log_3 4 + \log_3 18 - 3\log_3 2$

【解】 (1)  $\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4(2 \times 8) = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$

(2)  $\log_3 2 - \log_3 18 = \log_3 \frac{2}{18} = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$

(3)  $2\log_5 5 - \log_5 15 + \log_5 9 = 2 \cdot 1 + \log_5 \frac{9}{15} = 2 + \log_5 \frac{3}{5}$

(4)  $\log_3 4 + \log_3 18 - 3\log_3 2 = \log_3 4 + \log_3 18 - \log_3 32^3$   
 $= \log_3 \frac{4 \times 18}{8} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

練習 5.18 次の値を簡単にせよ .

(1)  $\log_4 8$

(2)  $\log_9 3$

(3)  $\log_3 2 \cdot \log_2 27$

【解】 (1)  $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$

(2)  $\log_9 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 9} = \frac{1}{\log_3 3^2} = \frac{1}{2}$

(3)  $\log_3 2 \cdot \log_2 27 = \log_3 2 \times \frac{\log_3 27}{\log_3 2} = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

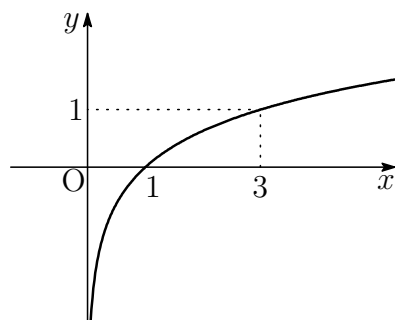
## 5.2.2 対数関数

練習 5.19 次の対数関数のグラフをかけ．

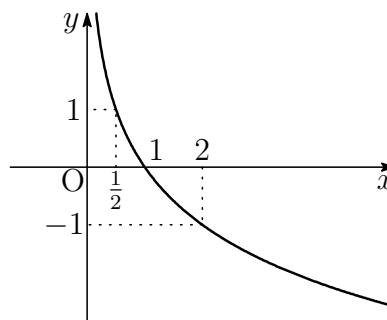
(1)  $y = \log_3 x$

(2)  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

【答】(1)



(2)



練習 5.20 次の2つの数の大小を不等号を用いて表せ．

(1)  $3 \log_4 3, 2 \log_4 5$

(2)  $\frac{1}{2} \log_4 8, \log_{\frac{1}{4}} 3$

【解】(1)  $3 \log_4 3 = \log_4 3^3 = \log_4 27$

$2 \log_4 5 = \log_4 5^2 = \log_4 25$

底4が1より大きいから

$$\log_4 27 > \log_4 25$$

すなわち  $3 \log_4 3 > 2 \log_4 5$ 

(2)  $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{\frac{1}{4}} 8^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}, \log_{\frac{1}{4}} 3$

底 $\frac{1}{4}$ が1より小さいから

$$\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8} > \log_{\frac{1}{4}} 3$$

すなわち  $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} 8 > \log_{\frac{1}{4}} 3$

練習 5.21 次の方程式，不等式を解け．

$$(1) \log_2 x = 4 \qquad (2) \log_{\frac{1}{2}} x = 2$$

$$(3) \log_2 x \leq 4 \qquad (4) \log_{\frac{1}{2}} x < 2$$

- 【解】 (1) 対数の定義から  $x = 2^4 = 16$
- (2) 対数の定義から  $x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
- (3) 真数は正であるから  $x > 0$  … ①  
 不等式を変形すると  $\log_2 x \leq \log_2 2^4$   
 すなわち  $\log_2 x \leq \log_2 16$   
 底 2 が 1 より大きいから  $x \leq 16$  … ②  
 ①，② の共通範囲を求めて  $0 < x \leq 16$
- (4) 真数は正であるから  $x > 0$  … ①  
 不等式を変形すると  $\log_2 x \leq \log_2 2^3$   
 すなわち  $\log_2 x \leq \log_2 8$   
 底  $\frac{1}{2}$  が 1 より小さいから  $x \geq 8$  … ②  
 ①，② の共通範囲を求めて  $x \geq 8$

練習 5.22 次の方程式を解け.

$$(1) \log_4 x + \log_4(x - 6) = 2$$

$$(2) \log_2(x + 5) + \log_2(x - 2) = 3$$

【解】 (1) 真数は正であるから  $x > 0$  かつ  $x - 6 > 0$

すなわち  $x > 6$  … ①

方程式を変形すると  $\log_4 x(x - 6) = 2$

よって  $x(x - 6) = 4^2$

式を整理すると  $x^2 - 6x - 16 = 0$

したがって  $(x + 2)(x - 8) = 0$

① より  $x + 2 \neq 0$  であるから  $x - 8 = 0$

したがって  $x = 8$

(2) 真数は正であるから  $x + 5 > 0$  かつ  $x - 2 > 0$

すなわち  $x > 2$  … ①

方程式を変形すると  $\log_2(x + 5)(x - 2) = 3$

よって  $(x + 5)(x - 2) = 2^3$

式を整理すると  $x^2 + 3x - 18 = 0$

したがって  $(x + 6)(x - 3) = 0$

① より  $x + 6 \neq 0$  であるから  $x - 3 = 0$

したがって  $x = 3$

練習 5.23 次の不等式を解け.

$$(1) \log_2(x-3) < 4$$

$$(2) \log_{\frac{1}{3}}(x+2) \geq 3$$

【解】 (1) 真数は正であるから  $x-3 > 0$

$$\text{すなわち} \quad x > 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{不等式を変形すると} \quad \log_2(x-3) < \log_2 2^4$$

底 2 は 1 より大きいから

$$x-3 < 16 \quad \text{すなわち} \quad x < 19 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の共通範囲を求めて} \quad 3 < x < 19$$

(2) 真数は正であるから  $x+2 > 0$

$$\text{すなわち} \quad x > -2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{不等式を変形すると} \quad \log_{\frac{1}{3}}(x+2) \geq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

底  $\frac{1}{3}$  は 1 より小さいから

$$x+2 \leq \frac{1}{27} \quad \text{すなわち} \quad x \leq -\frac{53}{27} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の共通範囲を求めて} \quad -2 < x \leq -\frac{53}{27}$$

## 5.2.3 常用対数

練習 5.24 常用対数表を用いて，次の値を小数第4位まで求めよ．

(1)  $\log_{10} 3450$                       (2)  $\log_{10} 92000$                       (3)  $\log_{10} 0.000618$

【解】 (1) 常用対数表より  $\log_{10} 3.45 = 0.5378$

$$\begin{aligned}\log_{10} 3450 &= \log_{10}(3.45 \times 10^3) \\ &= \log_{10} 3.45 + \log_{10} 10^3 \\ &= 0.5378 + 3 = 3.5378\end{aligned}$$

(2) 常用対数表より  $\log_{10} 9.20 = 0.9638$

$$\begin{aligned}\log_{10} 92000 &= \log_{10}(9.20 \times 10^4) \\ &= \log_{10} 9.20 + \log_{10} 10^4 \\ &= 0.9638 + 4 = 4.9638\end{aligned}$$

(3) 常用対数表より  $\log_{10} 6.18 = 0.7910$

$$\begin{aligned}\log_{10} 0.000618 &= \log_{10}(6.18 \times 10^{-4}) \\ &= \log_{10} 6.18 + \log_{10} 10^{-4} \\ &= 0.7910 - 4 = -3.2090\end{aligned}$$

練習 5.25 自然数  $N$  の桁数が次のとき,  $\log_{10} N$  の値の範囲を求めよ.

- (1) 2 桁                      (2) 5 桁                      (3) 10 桁

【解】 (1) 自然数  $N$  が 2 桁であるから

$$10 \leq N < 100 \quad \text{すなわち} \quad 10 \leq N < 10^2$$

$$\text{常用対数をとると} \quad \log_{10} 10 \leq \log_{10} N < \log_{10} 10^2$$

$$\text{よって} \quad 1 \leq \log_{10} N < 2$$

(2) 自然数  $N$  が 5 桁であるから

$$10000 \leq N < 100000 \quad \text{すなわち} \quad 10^4 \leq N < 10^5$$

$$\text{常用対数をとると} \quad \log_{10} 10^4 \leq \log_{10} N < \log_{10} 10^5$$

$$\text{よって} \quad 4 \leq \log_{10} N < 5$$

(3) 自然数  $N$  が 10 桁であるから  $10^9 \leq N < 10^{10}$

$$\text{常用対数をとると} \quad \log_{10} 10^9 \leq \log_{10} N < \log_{10} 10^{10}$$

$$\text{よって} \quad 9 \leq \log_{10} N < 10$$

練習 5.26 次の数の桁数を調べよ. ただし,  $\log_{10} 2 = 0.3010$  とする.

- (1)  $2^{20}$                       (2)  $2^{30}$

【解】 (1)  $\log_{10} 2^{20} = 20 \log_{10} 2 = 20 \times 0.3010 = 6.02$

$$6 < \log_{10} 2^{20} < 7 \quad \text{であるから}$$

$$\log_{10} 10^6 < \log_{10} 2^{20} < \log_{10} 10^7$$

$$\text{よって} \quad 10^6 < 2^{20} < 10^7$$

したがって,  $2^{20}$  は 7 桁の数である.

(2)  $\log_{10} 2^{30} = 30 \log_{10} 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03$

$$9 < \log_{10} 2^{30} < 10 \quad \text{であるから}$$

$$\log_{10} 10^9 < \log_{10} 2^{30} < \log_{10} 10^{10}$$

$$\text{よって} \quad 10^9 < 2^{30} < 10^{10}$$

したがって,  $2^{30}$  は 10 桁の数である.

練習 5.27  $3^n$  が 8 桁の数となるような自然数  $n$  をすべて求めよ。  
ただし,  $\log_{10} 3 = 0.4771$  とする。

【解】  $3^n$  が 8 桁の数となるのは,  $10^7 \leq 3^n < 10^8$  のときである。

常用対数をとると  $7 \leq n \log_{10} 3 < 8$

$$\text{よって } \frac{7}{\log_{10} 3} \leq n < \frac{8}{\log_{10} 3} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\log_{10} 3 = 0.4771$  であるから

$$\frac{7}{\log_{10} 3} = \frac{7}{0.4771} = 14.6\dots$$

$$\frac{8}{\log_{10} 3} = \frac{8}{0.4771} = 16.7\dots$$

したがって, ① を満たす自然数  $n$  は  $n = 15, 16$

練習 5.28  $0 < M < 1$  である小数  $M$  が, 小数第 5 位に初めて 0 でない数が現れるとき,  $\log_{10} M$  の値の範囲を求めよ。

【解】  $M$  の小数第 5 位に初めて 0 でない数が現れるとき,  $M$  は

$$0.00001 \leq M < 0.0001 \quad \text{すなわち} \quad 10^{-5} \leq M < 10^{-4}$$

常用対数をとると

$$-5 \leq \log_{10} M < -4$$

## 5.2.4 補充問題

5 次の計算をせよ.

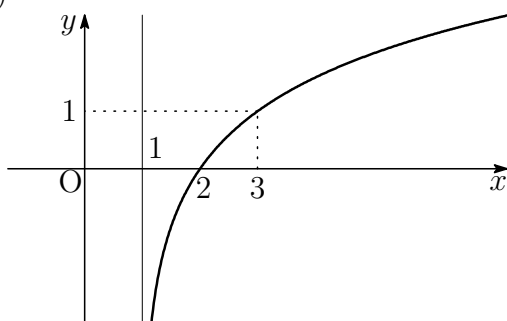
$$(1) \frac{1}{2} \log_4 8 + \log_4 \sqrt{2} \qquad (2) \log_2 \sqrt[3]{12} - \frac{1}{3} \log_2 3$$

【解】(1)  $\frac{1}{2} \log_4 8 + \log_4 \sqrt{2} = \log_4 \sqrt{8} + \log_4 \sqrt{2}$   
 $= \log_4(\sqrt{8} \times \sqrt{2}) = \log_4 \sqrt{16} = \log_4 4 = 1$

(2)  $\log_2 \sqrt[3]{12} - \frac{1}{3} \log_2 3 = \frac{1}{3} \log_2 12 - \frac{1}{3} \log_2 3$   
 $= \frac{1}{3} \log_2 \frac{12}{3} = \frac{1}{3} \log_2 4 = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$

6 関数  $y = \log_2(x-1)$  のグラフをかけ.

【解】(1)



7 次の方程式と不等式を解け.

$$(1) \log_3(x+1)^2 = 2 \qquad (2) \log_2(2-x) \geq \log_2 x$$

【解】(1)  $(x+1)^2 = 3^2$  より  $x+1 = \pm 3$   
 よって  $x = 2, -4$

(2) 真数は正であるから

$$2-x > 0 \quad \text{かつ} \quad x > 0$$

$$\text{すなわち} \quad 0 < x < 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2(2-x) \geq \log_2 x \quad \text{より} \quad 2-x \geq x$$

$$\text{よって} \quad x \leq 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \quad \text{より} \quad 0 < x \leq 1$$

8 次の問いに答えよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$  とする。

(1)  $\log_{10} 5$  の値を求めよ。

(2)  $0.2^{10}$  は小数第何位に初めて0でない数が現れるか。

【解】 (1)  $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$   
 $= 1 - 0.3010 = 0.6990$

(2)  $\log_{10} 0.2^{10} = 10 \log_{10} \frac{1}{5} = -10 \log_{10} 5$   
 $= -10 \times 0.6990 = -6.990$

$-7 < \log_{10} 0.2^{10} < -6$  であるから

$$\log_{10} 10^{-7} < \log_{10} 0.2^{10} < \log_{10} 10^{-6}$$

よって  $10^{-7} < 0.2^{10} < 10^{-6}$

したがって、小数第7位である。

## 5.3 章末問題

### 5.3.1 章末問題 A

1 次の計算をせよ。

(1)  $64^{\frac{2}{3}} \times 16^{-\frac{1}{4}}$

(2)  $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[6]{9} \div \sqrt[4]{27}$

【解】 (1)  $64^{\frac{2}{3}} \times 16^{-\frac{1}{4}} = (2^6)^{\frac{2}{3}} \times (2^4)^{-\frac{1}{4}} = 2^4 \times 2^{-1} = 2^3 = 8$

(2)  $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[6]{9} \div \sqrt[4]{27} = \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[6]{3^2} \div \sqrt[4]{3^3}$   
 $= 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{6}} \div 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

**2** 次の不等式を満たす  $x$  の値の範囲を求めよ.

$$(1) \frac{1}{2} \leq 2^x \leq 8 \qquad (2) 1 \leq 0.5^x \leq 4$$

【解】(1) 不等式を変形すると  $2^{-1} \leq 2^x \leq 2^3$   
よって  $-1 \leq x \leq 3$

(2) 不等式を変形すると  
$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$
よって  $-2 \leq x \leq 0$

**3** 次の方程式と不等式を解け.

$$(1) 3^{x+1} = \sqrt[3]{9} \qquad (2) 8^x \leq 4^{x+1} \qquad (3) \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq (\sqrt{2})^x$$

【解】(1)  $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$  より  $3^{x+1} = 3^{\frac{2}{3}}$   
 $x+1 = \frac{2}{3}$  より  $x = -\frac{1}{3}$

(2) 不等式を変形すると  $2^{3x} \leq 2^{2(x+1)}$   
 $3x \leq 2(x+1)$  より  $x \leq 2$

(3) 不等式を変形すると  $2^{-(x-1)} \geq 2^{\frac{1}{2}x}$   
 $-(x-1) \geq \frac{1}{2}x$  より  $x \leq \frac{2}{3}$

4 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{1}{2} \log_5 3 + 3 \log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24}$$

$$(2) (\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$$

【解】(1)  $\frac{1}{2} \log_5 3 + 3 \log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24}$

$$= \log_5 \sqrt{3} + \log_5 (\sqrt{2})^3 - \log_5 \sqrt{24}$$

$$= \log_5 \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{8}}{\sqrt{24}} = \log_5 1 = 0$$

(2)  $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

$$= \log_2 3 \cdot \log_3 4 + \log_2 3 \cdot \log_9 2 + \log_4 9 \cdot \log_3 4 + \log_4 9 \cdot \log_9 2$$

$$= \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 2^2}{\log_2 3} + \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3^2} + \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2} \cdot \frac{\log_2 2^2}{\log_2 3} + \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3^2}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 5$$

【別解】(2)  $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

$$= \left( \log_2 3 + \frac{\log_2 9}{\log_2 4} \right) \left( \frac{\log_2 4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 9} \right)$$

$$= \left( \log_2 3 + \frac{2 \log_2 3}{2} \right) \left( \frac{2}{\log_2 3} + \frac{1}{2 \log_2 3} \right)$$

$$= 2 \log_2 3 \times \frac{5}{2 \log_2 3} = 5$$

5  $\log_{10} 2 = a$ ,  $\log_{10} 3 = b$  とするとき, 次の値を  $a$ ,  $b$  を用いて表せ.

$$(1) \log_{10} \frac{3}{8}$$

$$(2) \log_{10} \sqrt[3]{6}$$

$$(3) \log_2 3$$

$$(4) \log_{10} 15$$

【解】(1)  $\log_{10} \frac{3}{8} = \log_{10} 3 - \log_{10} 8$

$$= \log_{10} 3 - 3 \log_{10} 2 = b - 3a$$

$$(2) \log_{10} \sqrt[3]{6} = \frac{1}{3} \log_{10} 6 = \frac{1}{3} (\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = \frac{1}{3} (a + b)$$

$$(3) \log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \frac{b}{a}$$

$$(4) \log_{10} 15 = \log_{10} 5 + \log_{10} 3 = \log_{10} \frac{10}{2} + \log_{10} 3$$

$$= \log_{10} 10 - \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 1 - a + b$$

**6**  $a, b, c$  を 1 と異なる正の数とするとき, 次の等式を証明せよ.

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$$

【解】底の変換公式より

$$\text{左辺} = \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a a}{\log_a c} = \log_a a = 1$$

$$\text{よって } \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$$

**7** 次の方程式を解け.

$$(1) \log_{0.5}(x+1)(x+2) = -1 \quad (2) \log_3(x-2) + \log_3(2x-7) = 2$$

【解】(1)  $(x+1)(x+2) = 0.5^{-1}$  より

$$x^2 + 3x + 2 = 2$$

$$\text{よって } x(x+3) = 0$$

$$\text{したがって } x = 0, -3$$

(2) 真数は正であるから

$$x - 2 > 0 \quad \text{かつ} \quad 2x - 7 > 0$$

$$\text{すなわち } x > \frac{7}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

方程式を変形すると

$$\log_3(x-2)(2x-7) = 2$$

$$\text{よって } (x-2)(2x-7) = 3^2$$

$$\text{したがって } (2x-1)(x-5) = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ より } 2x-1 > 0 \text{ であるから } x = 5$$

8 ある菌は, 30分ごとにその個数が2倍に増えるという. 菌の個数がある時点の10万倍を超えるのは, その時点からおよそ何時間後か. ただし,  $\log_{10} 2 = 0.3010$  とし, 答えは整数で求めよ.

【解】ある時点から  $x$  時間後に, 菌はもとの  $2^{2x}$  倍に増えている.  $x$  時間後に10万倍を超えるとすると

$$2^{2x} > 100000$$

両辺の常用対数をとると  $\log_{10} 2^{2x} > \log_{10} 10^5$

$$2x \log_{10} 2 > 5$$

$2 \log_{10} 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020 > 0$  であるから

$$\text{よって } x > \frac{5}{2 \log_{10} 2} = \frac{5}{0.6020} = 8.305 \dots$$

したがって, 10万倍を超えるのは 9時間後

### 5.3.2 章末問題 B

9 次の関数の値域を求めよ.

$$(1) y = 2^{x+1} \quad (-3 \leq x \leq 3) \quad (2) y = \log_{\frac{1}{2}}(x + \sqrt{2}) \quad (0 \leq x \leq \sqrt{2})$$

【解】(1) 関数  $y = 2^{x+1}$  は増加関数である.

よって,  $-3 \leq x \leq 3$  では

$$2^{-3+1} \leq y \leq 2^{3+1}$$

すなわち  $2^{-2} \leq y \leq 2^4$

したがって, 値域は  $\frac{1}{4} \leq y \leq 16$

(2) 関数  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + \sqrt{2})$  は減少関数である.

よって,  $0 \leq x \leq \sqrt{2}$  では

$$\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2} + \sqrt{2}) \leq y \leq \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$$

すなわち

$$\log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{3}{2}} \leq y \leq \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \leq y \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

したがって、値域は  $-\frac{3}{2} \leq y \leq -\frac{1}{2}$

10 次の方程式，不等式を解け．

$$(1) 9^x + 3^x - 12 = 0 \quad (2) 9^x - 4 \cdot 3^x + 3 > 0$$

【解】 (1) 方程式を変形すると  $(3^x)^2 + 3^x - 12 = 0$

$$3^x = t \text{ とおくと, 方程式は } t^2 + t - 12 = 0$$

$$(t+4)(t-3) = 0$$

$3^x > 0$  すなわち  $t > 0$  であるから

$$t = 3$$

$$\text{よって } 3^x = 3$$

$$\text{したがって } x = 1$$

(2) 不等式を変形すると  $(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 > 0$

$$3^x = t \text{ とおくと, 方程式は } t^2 - 4t + 3 > 0$$

$$(t-1)(t-3) > 0$$

$3^x > 0$  すなわち  $t > 0$  であるから

$$0 < t < 1, \quad 3 < t$$

$$\text{よって } 0 < 3^x < 1, \quad 3 < 3^x$$

$$\text{したがって } x < 0, \quad 1 < x$$

11 次の関数の最小値を求めよ．

$$(1) y = 4^x - 2^x \quad (2) y = (\log_3 x)^2 - \log_3 x^2$$

【解】 (1)  $2^x = t$  とおくと

$$4^x - 2^x = (2^x)^2 - 2^x = t^2 - t$$

$$2^x > 0 \text{ から } t > 0$$

関数を変形すると

$$y = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad (t > 0)$$

よって,  $y$  は  $t = \frac{1}{2}$  すなわち  $x = -1$  で最小値  $-\frac{1}{4}$  をとる．

(2)  $\log_3 x = t$  とおくと

$$(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 = (\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x = t^2 - 2t$$

関数を変形すると  $y = (t-1)^2 - 1$

よって,  $y$  は  $t = 1$  すなわち  $x = 3$  で最小値  $-1$  をとる．

**12** 次の不等式を解け．

$$(1) \log_{0.5}(3-x) \geq \log_{0.5} 2x \quad (2) \log_2(x+1) + \log_2(x-2) < 2$$

【解】 (1) 真数は正であるから

$$3-x > 0 \quad \text{かつ} \quad 2x > 0$$

$$\text{すなわち} \quad 0 < x < 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{不等式より} \quad 3-x \leq 2x$$

$$\text{これを解くと} \quad x \geq 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad 1 \leq x < 3$$

(2) 真数は正であるから

$$x+1 > 0 \quad \text{かつ} \quad x-2 > 0$$

$$\text{すなわち} \quad x > 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

不等式を変形すると

$$\log_2(x+1)(x-2) < 2$$

$$\text{よって} \quad (x+1)(x-2) < 2^2$$

$$\text{したがって} \quad (x+2)(x-3) < 0$$

$$\text{これを解くと} \quad -2 < x < 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad 2 < x < 3$$

**13**  $M = \sqrt[3]{5}$  とする．常用対数表を用いて，次の問いに答えよ．

(1)  $\log_{10} M$  の値を求めよ．

(2)  $M$  の値を小数第2位まで求めよ．

【解】 (1)  $\log_{10} M = \log_{10} \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3} \log_{10} 5$

常用対数表より， $\log_{10} 5 = 0.6990$  であるから

$$\log_{10} M = \frac{1}{3} \times 0.6990 = 0.2330$$

(2)  $\log_{10} M = 0.2330$  となる  $M$  の値は，常用対数表より 1.71

**14**  $\log_{10} 2 = 0.3010$  とする.  $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{10^4}$  を満たす最小の自然数  $n$  を求めよ.

【解】  $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{10^4}$  の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \log_{10} \frac{1}{10^4}$$

$$n \log_{10} \frac{1}{2} < -4 \quad \text{すなわち} \quad -n \log_{10} 2 < -4$$

$$\text{よって} \quad n > \frac{4}{\log_{10} 2} = \frac{4}{0.3010} = 13.2 \dots$$

これを満たす最小の自然数  $n$  は  $n = 14$

**15**  $\log_{10} 2 = 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 = 0.4771$  とする.  $2^n < 3^{20} < 2^{n+1}$  を満たす自然数  $n$  を求めよ.

【解】  $3^{20} = 2^x$  とすると  $2^n < 2^x < 2^{n+1} \dots \textcircled{1}$

$3^{20} = 2^x$  の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 3^{20} = \log_{10} 2^x$$

$$\text{すなわち} \quad 20 \log_{10} 3 = x \log_{10} 2$$

$$\text{よって} \quad x = 20 \times \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = 20 \times \frac{0.4771}{0.3010} \doteq 31.7$$

$$\text{したがって, } \textcircled{1} \text{ より} \quad n < 31.7 < n + 1$$

これを満たす自然数  $n$  は  $n = 31$

【別解】  $2^n < 3^{20} < 2^{n+1}$  の各辺の常用対数をとると

$$n \log_{10} 2 < 20 \log_{10} 3 < (n + 1) \log_{10} 2$$

$$n \log_{10} 2 < 20 \log_{10} 3 \text{ より}$$

$$n < \frac{20 \log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \frac{20 \times 0.4771}{0.3010} \doteq 31.7$$

$$20 \log_{10} 3 < (n + 1) \log_{10} 2 \text{ より}$$

$$n > \frac{20 \log_{10} 3}{\log_{10} 2} - 1 \doteq 30.7$$

したがって, 求める自然数  $n$  は  $n = 31$

## 5.4 常用对数表(1)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3929	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6712	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

## 5.5 常用对数表(2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

## 第 6 章 微分と積分

### 6.1 微分係数と導関数

#### 6.1.1 微分係数

練習 6.1 次の平均変化率を求めよ .

- (1) 1 次関数  $y = 2x$  の ,  $x = a$  から  $x = b$  までの平均変化率
- (2) 2 次関数  $y = -x^2$  の ,  $x = 2$  から  $x = 2 + h$  までの平均変化率

【解】 (1) 求める平均変化率は

$$\frac{2b - 2a}{b - a} = \frac{2(b - a)}{b - a} = 2$$

(2) 求める平均変化率は

$$\begin{aligned} \frac{-(2 + h)^2 - (-2^2)}{(2 + h) - 2} &= \frac{-4h - h^2}{h} = \frac{-h(4 + h)}{h} \\ &= -4 - h \end{aligned}$$

練習 6.2 次の極限值を求めよ .

- (1)  $\lim_{h \rightarrow 0} (6 + h)$
- (2)  $\lim_{h \rightarrow 0} (12 - 6h + h^2)$

【解】 (1)  $\lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6$

(2)  $\lim_{h \rightarrow 0} (12 - 6h + h^2) = 12$



## 6.1.2 導関数とその計算

練習 6.5 関数  $f(x) = x^2$  について、次の微分係数を求めよ。

(1)  $f'(4)$

(2)  $f'(0)$

(3)  $f'(-2)$

【解】関数  $f(x) = x^2$  の  $x = a$  における微分係数は

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a \end{aligned}$$

(1)  $f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$

(2)  $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$

(3)  $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$

練習 6.6 次の関数の導関数を求めよ。

(1)  $f(x) = 3x$

(2)  $f(x) = -x^2$

(3)  $f(x) = 4$

【解】(1)  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$

$$\begin{aligned} (2) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h)^2 - (-x^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-2x - h) = -2x \end{aligned}$$

$$(3) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4}{h} = 0$$

練習 6.7 次の関数を微分せよ.

(1)  $y = 4x^2 + 3x - 4$

(2)  $y = 2x^2 - 5x + 1$

(3)  $y = -3x^2 + x - 2$

(4)  $y = -x^2 - x + 3$

(5)  $y = 4x^3 - 2x^2 - 5x$

(6)  $y = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$

【解】 (1)  $y' = 4 \cdot 2x + 3 \cdot 1 - 0 = 8x + 3$

(2)  $y' = 2 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 4x - 5$

(3)  $y' = -3 \cdot 2x + 1 - 0 = -6x + 1$

(4)  $y' = -2x - 1 + 0 = -2x - 1$

(5)  $y' = 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x - 5 \cdot 1 = 12x^2 - 4x - 5$

(6)  $y' = \frac{4}{3} \cdot 3x^2 + \frac{3}{4} \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot 1 = 4x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

練習 6.8 次の関数を微分せよ.

(1)  $y = (x + 2)(x + 3)$

(2)  $y = 3(x - 2)^2$

(3)  $y = x(x + 2)(x - 2)$

(4)  $y = 2x(x + 1)(x - 3)$

【解】 (1)  $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$

よって  $y = x^2 + 5x + 6$

したがって  $y' = 2x + 5$

(2)  $3(x - 2)^2 = 3x^2 - 12x + 12$

よって  $y = 3x^2 - 12x + 12$

したがって  $y' = 6x - 12$

(3)  $x(x + 2)(x - 2) = x^3 - 4x$

よって  $y = x^3 - 4x$

したがって  $y' = 3x^2 - 4$

(4)  $2x(x + 1)(x - 3) = 2x^3 - 4x^2 - 6x$

よって  $y = 2x^3 - 4x^2 - 6x$

したがって  $y' = 6x^2 - 8x - 6$

練習 6.9 関数  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$  について、次の  $x$  の値における微分係数を求めよ。

(1)  $x = 2$

(2)  $x = 0$

(3)  $x = -2$

【解】  $f(x)$  を微分すると  $f'(x) = 3x^2 - 6x$

(1)  $x = 2$  における微分係数は  $f'(2)$  であるから

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 0$$

(2)  $x = 0$  における微分係数は  $f'(0)$  であるから

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 = 0$$

(3)  $x = -2$  における微分係数は  $f'(-2)$  であるから

$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) = 24$$

練習 6.10 次の関数を  $t$  で微分せよ。ただし、 $a, b$  は定数とする。

(1)  $s = 3t^2 - 4t + 2$

(2)  $f(t) = at^3 + bt^2$

【解】 (1)  $s' = 3 \cdot 2t - 4 \cdot 1 + 0 = 6t - 4$

(2)  $f'(t) = a \cdot 3t^2 + b \cdot 2t = 3at^2 + 2bt$

練習 6.11 半径  $r$  の球の体積を  $V$ 、表面積を  $S$  とすると、 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 、 $S = 4\pi r^2$  である。 $V$  と  $S$  を、それぞれ  $r$  で微分せよ。

【解】  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  より  $\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2$

$S = 4\pi r^2$  より  $\frac{dS}{dr} = 4\pi \cdot 2r = 8\pi r$

## 6.1.3 接線の方程式

練習 6.12 関数  $y = 2x^2 - 4x + 3$  のグラフ上に点  $A(2, 3)$  をとる .

- (1) 点  $A$  における接線の傾きを求めよ .
- (2) 点  $A$  における接線の方程式を求めよ .

【解】 (1)  $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$  とすると , 点  $A$  における接線の傾きは  $f'(2)$  である .

$f(x)$  を微分すると  $f'(x) = 4x - 4$

よって , 求める傾きは

$$f'(2) = 4 \cdot 2 - 4 = 4$$

(2) 求める接線は点  $A(2, 3)$  を通り傾きが  $4$  の直線である .

よって , その方程式は

$$y - 3 = 4(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = 4x - 5$$

練習 6.13 関数  $y = x^2 - 2x + 4$  のグラフに原点  $O$  から引いた接線は 2 本ある .  
この 2 本の接線の方程式を求めよ .

【解】  $y = x^2 - 2x + 4$  を微分すると  $y' = 2x - 2$

接点の座標を  $(a, a^2 - 2a + 4)$  とすると , 接線の傾きは  $2a - 2$  となるから , その方程式は

$$y - (a^2 - 2a + 4) = (2a - 2)(x - a)$$

すなわち  $y = (2a - 2)x - a^2 + 4 \quad \cdots \textcircled{1}$

この直線が原点  $O(0, 0)$  を通るから

$$0 = -a^2 + 4$$

よって  $a^2 - 4 = 0$

すなわち  $(a + 2)(a - 2) = 0$

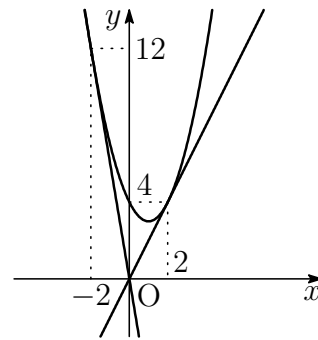
$$a = 2, -2$$

接線の方程式は ,  $\textcircled{1}$  より

$$a = 2 \text{ のとき } \quad y - 4 = 2(x - 2)$$

$$a = -2 \text{ のとき } \quad y - 12 = -6(x + 2)$$

したがって  $y = 2x, y = -6x$



#### 6.1.4 補充問題

1 次の極限值を求めよ . ただし ,  $a$  は定数とする .

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1 + h)^2 - (-1)^2}{h}$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(a + h)^2 - 2a^2}{h}$$

【解】 (1)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1 + h)^2 - (-1)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h + h^2}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (-2 + h) = -2$

(2)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(a + h)^2 - 2a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4ah + 2h^2}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (4a + 2h) = 4a$

2 次の条件をすべて満たす 2 次関数  $f(x)$  を求めよ .

$$f(2) = -2, f'(0) = 3, f'(1) = -1$$

【解】  $f(x) = ax^2 + bx + c$  とすると  $f'(x) = 2ax + b$

$$f(2) = -2 \text{ より } 4a + 2b + c = -2$$

$$f'(0) = 3 \text{ より } b = 3$$

$$f'(1) = -1 \text{ より } 2a + b = -1$$

$$\text{よって } a = -2, b = 3, c = 0$$

$$\text{したがって, } f(x) \text{ は } f(x) = -2x^2 + 3x$$

3 点  $C(1, 2)$  から関数  $y = x^3$  のグラフに引いた接線の方程式を求めよ .

【解】  $y = x^3$  を微分すると  $y' = 3x^2$

接点の座標を  $(a, a^3 + 2)$  とすると, 接線の傾きは  $3a^2$  となるから, その方程式は

$$y - (a^3 + 2) = 3a^2(x - a)$$

$$\text{すなわち } y = 3a^2x - 2a^3 + 2 \cdots \textcircled{1}$$

この接線が点  $C(1, 2)$  を通るから

$$2 = 3a^2 - 2a^3 + 2$$

$$\text{よって } 2a^3 - 3a^2 = 0$$

$$\text{すなわち } a^2(2a - 3) = 0$$

$$a = 0, \frac{3}{2}$$

接線の方程式は, ① より

$$a = 0 \text{ のとき } y = 2$$

$$a = \frac{3}{2} \text{ のとき } y = \frac{27}{4}x - \frac{19}{4}$$

$$\text{したがって } y = 2, y = \frac{27}{4}x - \frac{19}{4}$$

## 6.2 関数の値の変化

### 6.2.1 関数の増減と極大・極小

練習 6.14 次の関数の増減を調べよ.

- (1)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$                       (2)  $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1$   
 (3)  $f(x) = x^3 + 2x$                               (4)  $f(x) = -x^3$

【解】 (1)  $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$

$f'(x) = 0$  とすると  $x = 0, 4$

$f(x)$  の増減は、次の増減表で表される.

$x$	...	0	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

(2)  $f'(x) = -6x^2 - 6x = -6x(x + 1)$

$f'(x) = 0$  とすると  $x = -1, 0$

$f(x)$  の増減は、次の増減表で表される.

$x$	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘

(3)  $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$

よって、 $f(x)$  は常に増加する.

(4)  $f'(x) = -3x^2 \leq 0$

$f(x)$  の増減表は、次のようになる.

$x$	...	0	...
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	↘	0	↘

よって、 $f(x)$  は常に減少する.

練習 6.15 次の関数の増減を調べ、極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

(1)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

(2)  $y = -x^3 + 3x^2 + 1$

(3)  $y = 2x^3 + 6x^2$

(4)  $y = -x^3 + x^2$

【解】 (1)  $y' = 3x^2 - 12x + 9$

$$= 3(x-1)(x-3)$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 1, 3$$

$y$  の増減表は、右のようになる。

したがって、この関数は

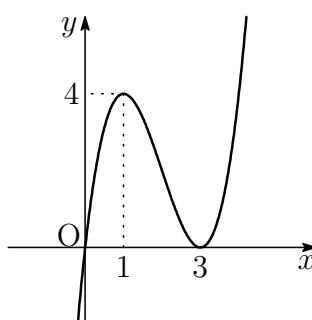
$$x = 1 \text{ で極大値 } 4$$

$$x = 3 \text{ で極小値 } 0$$

をとる。

また、グラフは右の図のようになる。

$x$	...	1	...	3	...
$y'$	+	0	-	0	+
$y$	↗	極大 4	↘	極小 0	↗



(2)  $y' = -3x^2 + 6x$

$$= -3x(x-2)$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0, 2$$

$y$  の増減表は、右のようになる。

したがって、この関数は

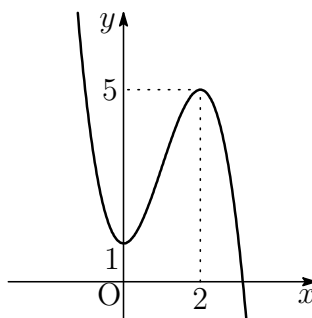
$$x = 0 \text{ で極小値 } 1$$

$$x = 2 \text{ で極大値 } 5$$

をとる。

また、グラフは右の図のようになる。

$x$	...	0	...	2	...
$y'$	-	0	+	0	-
$y$	↘	極小 1	↗	極大 5	↘

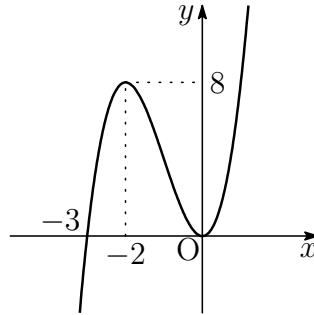


(3)  $y' = 6x^2 + 12x$   
 $= 6x(x + 2)$   
 $y' = 0$  とすると  $x = -2, 0$   
 $y$  の増減表は、右のようになる。  
 したがって、この関数は

$x = -2$  で極大値 8  
 $x = 0$  で極小値 0

をとる。  
 また、グラフは右の図のようになる。

$x$	...	-2	...	0	...
$y'$	+	0	-	0	+
$y$	↗	極大 8	↘	極小 0	↗

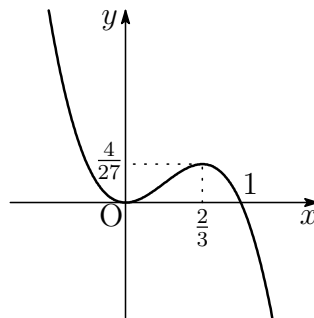


(4)  $y' = -3x^2 + 2x$   
 $= -x(3x - 2)$   
 $y' = 0$  とすると  $x = 0, \frac{2}{3}$   
 $y$  の増減表は、右のようになる。  
 したがって、この関数は

$x = 0$  で極小値 0  
 $x = \frac{2}{3}$  で極大値  $\frac{4}{27}$

をとる。  
 また、グラフは右の図のようになる。

$x$	...	0	...	$\frac{2}{3}$	...
$y'$	-	0	+	0	-
$y$	↘	極小 0	↗	極大 $\frac{4}{27}$	↘



練習 6.16 関数  $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b$  が  $x = -1$  で極大値 8 をとるとき、定数  $a, b$  の値を求めよ。また、極小値を求めよ。

【解】  $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b$  を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$$

$f(x)$  が  $x = -1$  で極大値 8 をとるとき

$$f'(-1) = 0, \quad f(-1) = 8$$

よって  $3 - 2a - 9 = 0, -1 + a + 9 + b = 8$

これを解くと  $a = -3, b = 3$

このとき  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

次の増減表が得られる。

$x$	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 8	↘	極小 -24	↗

したがって  $a = -3, b = 3, \text{極小値 } -24$

6.2.2 関数の増減・グラフの応用

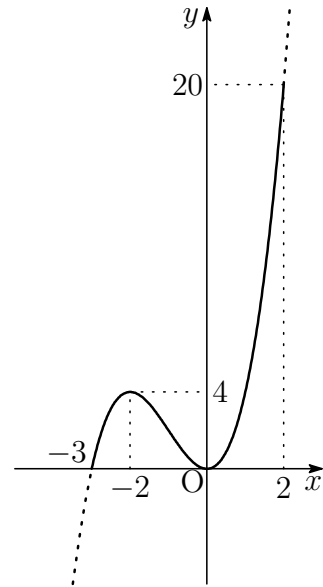
練習 6.17 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

- (1)  $y = x^3 + 3x^2 \quad (-3 \leq x \leq 2)$
- (2)  $y = -x^3 + 3x + 1 \quad (-2 \leq x \leq 2)$
- (3)  $y = x^3 - 6x^2 - 15x \quad (-2 \leq x \leq 2)$

【解】 (1)  $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$   
 $y' = 0$  とすると  $x = -2, 0$   
 $y$  の増減表は，次のようになる．

$x$	-3	...	-2	...	0	...	2
$y'$		+	0	-	0	+	
$y$	0	↗	極大 4	↘	極小 0	↗	20

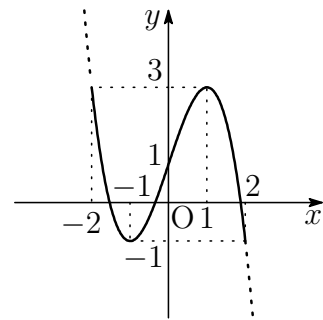
よって，この関数は  
 $x = 2$  で最大値 20 をとり，  
 $x = -3, 0$  で最小値 0 をとる．



(2)  $y' = -3x^2 + 3 = -3(x + 1)(x - 1)$   
 $y' = 0$  とすると  $x = -1, 1$   
 $y$  の増減表は，次のようになる．

$x$	-2	...	-1	...	1	...	2
$y'$		-	0	+	0	-	
$y$	3	↘	極小 -1	↗	極大 3	↘	-1

よって，この関数は  
 $x = -2, 1$  で最大値 3 をとり，  
 $x = -1, 2$  で最小値 -1 をとる．



(3)  $y' = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x + 1)(x - 5)$

$y' = 0$  とすると  $x = -1, 5$

$y$  の増減表は、次のようになる。

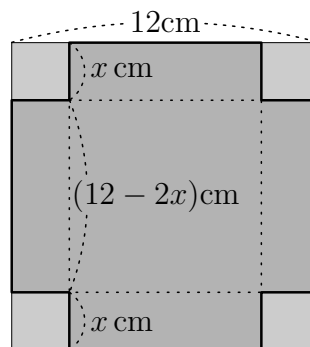
$x$	-2	...	-1	...	2
$y'$		+	0	-	
$y$	-2	↗	極大 8	↘	-46

よって、この関数は

$x = -1$  で最大値 8 をとり、

$x = 2$  で最小値 -46 をとる。

応用例題 6.3 1 辺が 12cm の正方形の厚紙の四隅から、同じ大きさの正方形を右の図のように切り取って、ふたのない箱を作る。箱の容積を最大にするには、切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすればよいか。



考え方 求める長さを  $x$  cm, 箱の容積を  $y$  cm<sup>3</sup> として,  $x$  の関数  $y$  の増減を調べる.  $x$  のとる値の範囲にも注意する.

【解】切り取る正方形の 1 辺の長さを  $x$  cm, 箱の容積を  $y$  cm<sup>3</sup> とする.

$x > 0, 12 - 2x > 0$  であるから

$$0 < x < 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

このとき

$$y = x(12 - 2x)^2 = 4(x^3 - 12x^2 + 36x)$$

$$y' = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x - 2)(x - 6)$$

①の範囲において,  $y$  の増減表は, 右のようになる.

したがって,  $y$  は  $x = 2$  で最大になる.

$x$	0	...	2	...	6
$y'$		+	0	-	
$y$		↗	極大	↘	

(答) 2cm

練習 6.18 応用例題 6.3 において，正方形の厚紙の代わりに，縦 10cm，横 16cm の長方形の厚紙で箱を作る．箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすればよいか．



【解】 切り取る正方形の 1 辺の長さを  $x$  cm，箱の容積を  $y$  cm<sup>3</sup> とする．

$x > 0, 10 - 2x > 0, 16 - 2x > 0$  であるから

$$0 < x < 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

このとき

$$y = x(10 - 2x)(16 - 2x) = 4(x^3 - 13x^2 + 40x)$$

$$y' = 4(3x^2 - 26x + 40) = 4(x - 2)(3x - 20)$$

① の範囲において， $y$  の増減表は，次のようになる．

$x$	0	...	2	...	5
$y'$		+	0	-	
$y$		↗	極大	↘	

したがって， $y$  は  $x = 2$  で最大になる． (答) 2cm

練習 6.19 方程式  $x^3 - 6x^2 = a$  がただ 1 つの実数解をもつとき，定数  $a$  の値の範囲を求めよ．

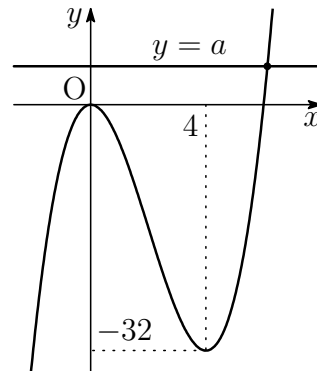
【解】 関数  $y = x^3 - 6x^2$  について

$$y' = 3x^2 - 12x$$

$$= 3x(x - 4)$$

$x$	...	0	...	4	...
$y'$	+	0	-	0	+
$y$	↗	極大 0	↘	極小 -32	↗

$y$  の増減表は，右のようになる．  
よって， $y = x^3 - 6x^2$  のグラフは，  
右の図のようになる．  
求める  $a$  の値の範囲は，このグラフと直線  $y = a$  が 1 個の共有点をもつ範囲であるから



$$a < -32, 0 < a$$

練習 6.20  $x \geq 0$  のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つときの  $x$  の値を求めよ．

$$x^3 + 3x^2 + 5 \geq 9x$$

証明  $f(x) = (x^3 + 3x^2 + 5) - 9x$  とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 9 \\ &= 3(x+3)(x-1) \end{aligned}$$

$x$	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	5	↘	0	↗

$x \geq 0$  において， $f(x)$  の増減表は，右のようになる．

よって， $x \geq 0$  において， $f(x)$  は  $x = 1$  で最小値 0 をとる．

したがって， $x \geq 0$  のとき， $f(x) \geq 0$  であるから

$$(x^3 + 3x^2 + 5) - 9x \geq 0$$

すなわち  $x^3 + 3x^2 + 5 \geq 9x$

等号が成り立つのは， $x = 1$  のときである．

証終

## 6.2.3 補充問題

4 次関数の増減を調べ、極値があればその極値を求めよ。

(1)  $y = x^3 - 6x + 2$

(2)  $y = (1 - x)^3$

【解】 (1)  $y' = 3x^2 - 6 = 3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

$x$	...	$-\sqrt{2}$	...	$\sqrt{2}$	...
$y'$	+	0	-	0	+
$y$	↗	極大	↘	極小	↗

$x = -\sqrt{2}$  で極大値

$$y = (-\sqrt{2})^3 - 6 \cdot (-\sqrt{2}) + 2 = 2 + 4\sqrt{2}$$

$x = \sqrt{2}$  で極小値

$$y = (\sqrt{2})^3 - 6\sqrt{2} + 2 = 2 - 4\sqrt{2}$$

(2)  $y = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$

$$y' = -3 + 6x - 3x^2 = -3(x - 1)^2 \leq 0$$

$x$	...	1	...
$y'$	-	0	-
$y$	↘	0	↘

よって、この関数は常に減少するから、極値をもたない。

5 関数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  が、 $x = -3$  で極大値をとり、 $x = 1$  で極小値  $-12$  をとるとき、定数  $a, b, c$  の値を求めよ。

【解】  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f(x)$  が  $x = -3$  で極大値をとるとき

$$f'(-3) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

また、 $x = 1$  で極小値  $-12$  をとるとき

$$f'(1) = 0, f(1) = -12 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } 27 - 6a + b = 0, 3 + 2a + b = 0, 1 + a + b + c = -12$$

これを解くと  $a = 3, b = -9, c = -7$

このとき  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$

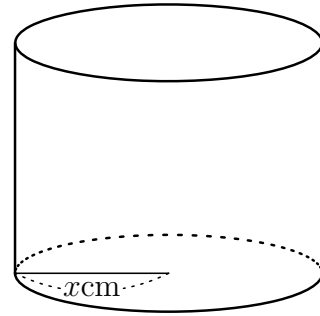
$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$$

$x$	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって  $a = 3, b = -9, c = -7$

**6** 底面の直径と高さの和が18cmである直円柱の体積を  $V\text{cm}^3$  とする.

- (1) 底面の半径を  $x\text{cm}$  とするとき,  $V$  を  $x$  の式で表せ.
- (2)  $V$  が最大となるのは, 円柱の高さが何  $\text{cm}$  のときか.



**【解】** (1) 直円柱の高さは  $(18 - 2x)\text{cm}$  である.  
 $x > 0, 18 - 2x > 0$  から  $0 < x < 9 \dots \textcircled{1}$   
 このとき  $V = \pi x^2 \times (18 - 2x)$   
 $= x^2(18 - 2x)\pi$

(2)  $V = -2\pi x^3 + 18\pi x^2$  より  
 $V' = -6\pi x^2 + 36\pi x = -6\pi x(x - 6)$   
 $\textcircled{1}$  の範囲において,  $V$  の増減表は

$x$	0	...	6	...	9
$V'$		+	0	-	
$V$		↗	極大	↘	

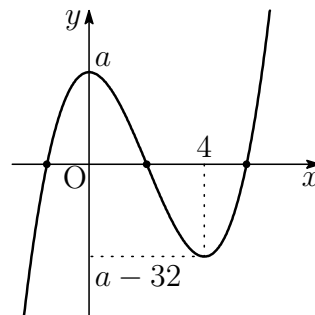
したがって,  $V$  は  $x = 6$  で最大となる.  
 このとき, 円柱の高さは  $18 - 2 \cdot 6 = 6 (\text{cm})$

**7** 関数  $y = x^3 - 6x^2 + a$  のグラフが  $x$  軸と異なる3点を共有するとき, 定数  $a$  の値の範囲を求めよ.

**【解】**  $y' = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$

$x$	...	0	...	4	...
$y'$	+	0	-	0	+
$y$	↗	極大	↘	極小	↗

$x = 0$  のとき  $y = a$   
 $x = 4$  のとき  $y = a - 32$   
 グラフは, 右の図.  
 よって, このグラフが  $x$  軸と異なる3点を共有するとき  
 $a > 0$  かつ  $a - 32 < 0$   
 したがって  $0 < a < 32$



## 6.3 積分法

## 6.3.1 不定積分

練習 6.21  $3x^2$  の原始関数であるものを，次の中から選べ．

- ①  $6x$                       ②  $x^3$                       ③  $x^3 + 2x$                       ④  $x^3 - 4$

【解】  $(6x)' = 6$  ,  $(x^3)' = 3x^2$  ,  $(x^3 + 2x)' = 3x^2 + 2$  ,  $(x^3 - 4)' = 3x^2$

よって， $3x^2$  の原始関数であるものは ② , ④

練習 6.22 次の不定積分を求めよ．

- (1)  $\int 6x^2 dx$                       (2)  $\int (x^2 + x - 1) dx$   
 (3)  $\int (3x^2 - 2x + 5) dx$                       (4)  $\int (-2x^2 + 4x + 7) dx$

【解】  $C$  は積分定数とする．

$$(1) \int 6x^2 dx = 6 \cdot \frac{1}{3} x^3 + C = 2x^3 + C$$

$$(2) \int (x^2 + x - 1) dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - x + C$$

$$(3) \int (3x^2 - 2x + 5) dx = 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 5x + C \\ = x^3 - x^2 + 5x + C$$

$$(4) \int (-2x^2 + 4x + 7) dx = -2 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 7x + C \\ = -\frac{2}{3} x^3 + 2x^2 + 7x + C$$

練習 6.23 次の不定積分を求めよ .

$$(1) \int (2t^2 - 3t - 4) dt \qquad (2) \int (-6u^2 + 9u - 3) dx$$

【解】  $C$  は積分定数とする .

$$\begin{aligned} (1) \int (2t^2 - 3t - 4) dt &= 2 \cdot \frac{1}{3} t^3 - 3 \cdot \frac{t^2}{2} - 4t + C \\ &= \frac{2}{3} t^3 - \frac{3}{2} t^2 - 4t + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int (-6u^2 + 9u - 3) du &= -6 \cdot \frac{u^3}{3} + 9 \cdot \frac{u^2}{2} - 3u + C \\ &= -2u^3 + \frac{9}{2} u^2 - 3u + C \end{aligned}$$

練習 6.24 次の 2 つの条件をともに満たす関数  $F(t)$  を求めよ .

$$[1] F'(t) = 2(t-1) \qquad [2] F(0) = 0$$

【解】 [1] から  $F(t) = \int 2(t-1) dt = \int (2t-2) dt$   
 $= t^2 - 2t + C$  ( $C$  は積分定数)

よって  $F(0) = C$

[2] から  $C = 0$

したがって  $F(t) = t^2 - 2t$

### 6.3.2 定積分

練習 6.25 次の定積分を求めよ .

$$(1) \int_1^3 x dx \qquad (2) \int_{-1}^2 x^2 dx \qquad (3) \int_3^2 2 dx$$

【解】 (1)  $\int_1^3 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 4$

(2)  $\int_{-1}^2 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3$

(3)  $\int_3^2 2 dx = \left[ 2x \right]_3^2 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -2$

練習 6.26 次の定積分を求めよ.

$$(1) \int_0^2 (x^2 + 4x - 5) dx \qquad (2) \int_{-1}^2 (-3x^2 + x + 1) dx$$

$$(3) \int_2^3 (x-2)(x-3) dx \qquad (4) \int_{-1}^1 2(x+3)(x-2) dx$$

【解】 (1) 
$$\int_0^2 (x^2 + 4x - 5) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x \right]_0^2$$

$$= \left( \frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 \right) - \left( \frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 \right)$$

$$= \frac{2}{3}$$

(2) 
$$\int_{-1}^2 (-3x^2 + x + 1) dx = \left[ -x^3 + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^2$$

$$= \left( -2^3 + \frac{2^2}{2} + 2 \right) - \left\{ -(-1)^3 + \frac{(-1)^2}{2} + (-1) \right\}$$

$$= -\frac{9}{2}$$

(3) 
$$\int_2^3 (x-2)(x-3) dx = \int_2^3 (x^2 - 5x + 6) dx$$

$$= \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_2^3$$

$$= \left( \frac{3^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 \right) - \left( \frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 \right)$$

$$= -\frac{1}{6}$$

(4) 
$$\int_{-1}^1 2(x+3)(x-2) dx = \int_{-1}^1 (2x^2 + 2x - 12) dx$$

$$= \left[ \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 12x \right]_{-1}^1$$

$$= \left( \frac{2}{3} \cdot 1^3 + 1^2 - 12 \cdot 1 \right) - \left\{ \frac{2}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 12 \cdot (-1) \right\}$$

$$= -\frac{68}{3}$$

練習 6.27 次の定積分を求めよ．ただし， $k$  は定数とする．

$$(1) \int_1^4 (kx^2 + 3x) dx \quad (2) \int_{-1}^1 (x+2)^2 dx - \int_{-1}^1 (x-2)^2 dx$$

【解】 (1)  $\int_1^4 (kx^2 + 3x) dx = k \int_1^4 x^2 dx + 3 \int_1^4 x dx$

$$= k \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^4 + 3 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^4$$

$$= k \cdot \frac{4^3 - 1^3}{3} + 3 \cdot \frac{4^2 - 1^2}{2}$$

$$= 21k + \frac{45}{2}$$

(2)  $\int_{-1}^1 (x+2)^2 dx - \int_{-1}^1 (x-2)^2 dx = \int_{-1}^1 \{(x+2)^2 - (x-2)^2\} dx$

$$= \int_{-1}^1 8x dx$$

$$= \left[ 4x^2 \right]_{-1}^1$$

$$= 4 \cdot 1^2 - \{4 \cdot (-1)^2\} = 0$$

定積分の性質

$$1 \quad \int_a^a f(x) dx = 0 \qquad 2 \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$3 \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

[注意] 性質3は,  $a, b, c$ の大小に関係なく成り立つ.[3の証明]  $F'(x) = f(x)$  とすると

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= \left[ F(x) \right]_a^c + \left[ F(x) \right]_c^b \\ &= \{F(c) - F(a)\} + \{F(b) - F(c)\} = F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

[証終]

練習 6.28 上の性質1が成り立つことを示せ. また, 性質1, 3を用いて, 性質2が成り立つことを示せ.

[1の証明]  $F'(x) = f(x)$  とすると

$$\int_a^a f(x) dx = \left[ F(x) \right]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

[証終]

[2の証明] 性質3より  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx$ 性質1より,  $\int_a^a f(x) dx = 0$  であるから

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0$$

よって  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ 

[証終]

練習 6.29 関数  $\int_0^x (3t^2 - 2t - 1) dt$  を  $x$  で微分せよ .

【解】  $\frac{d}{dx} \int_0^x (3t^2 - 2t - 1) dt = 3x^2 - 2x - 1$

練習 6.30 等式  $\int_a^x f(t) dt = x^2 - x - 2$  が , 任意の  $x$  に対して成り立つとき , 関数  $f(x)$  と定数  $a$  の値を求めよ .

【解】 等式の両辺を  $x$  で微分すると  $f(x) = 2x - 1$

また , 与えられた等式で  $x = a$  とおくと , 左辺は 0 になるから

$$0 = a^2 - a - 2$$

これを解くと  $a = -1, 2$

よって  $f(x) = 2x - 1, a = -1, 2$

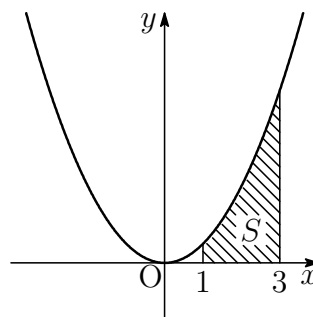
## 6.3.3 図形の面積と定積分

練習 6.31 次の放物線と2直線および  $x$  軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

- (1) 放物線  $y = x^2$ , 2直線  $x = 1, x = 3$   
 (2) 放物線  $y = x^2 + 2$ , 2直線  $x = -1, x = 2$

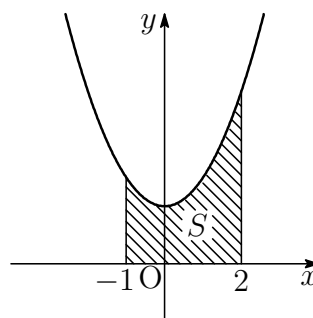
【解】 (1) 放物線  $y = x^2$  と  $x$  軸および2直線  $x = 1, x = 3$  で囲まれた部分の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^3 \\ &= \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3} \end{aligned}$$



(2) 放物線  $y = x^2 + 2$  と  $x$  軸および2直線  $x = -1, x = 2$  で囲まれた部分の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x^2 + 2) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \left( \frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2 \right) - \left\{ \frac{(-1)^3}{3} + 2 \cdot (-1) \right\} \\ &= 9 \end{aligned}$$



練習 6.32 次の放物線と  $x$  軸で囲まれた部分の面積を求めよ .

(1)  $y = x^2 - 1$

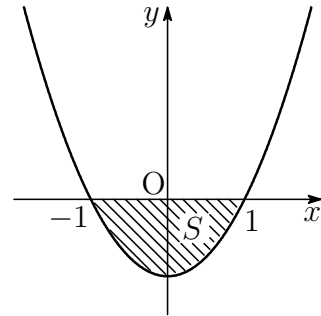
(2)  $y = x^2 - 2x$

【解】 (1) この放物線と  $x$  軸の交点の  $x$  座標は ,  
 $x^2 - 1 = 0$  を解いて

$$x = -1, 1$$

$-1 \leq x \leq 1$  では  $y \leq 0$  であるから ,  
 求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \{-(x^2 - 1)\} dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 \\ &= \left( -\frac{1^3}{3} + 1 \right) - \left\{ -\frac{(-1)^3}{3} + (-1) \right\} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

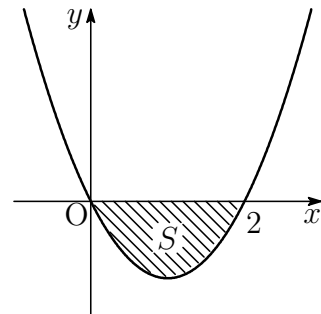


(2) この放物線と  $x$  軸の交点の  $x$  座標は ,  
 $x^2 - 2x = 0$  を解いて

$$x = 0, 2$$

$0 \leq x \leq 2$  では  $y \leq 0$  であるから ,  
 求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{-(x^2 - 2x)\} dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 \\ &= \left( -\frac{2^3}{3} + 2^2 \right) - 0 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



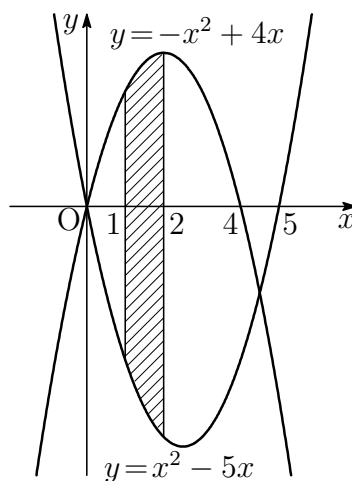
練習 6.33 次の放物線と2直線  $x = 1$ ,  $x = 2$  で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1)  $y = x^2 - 5x$ ,  $y = -x^2 + 4x$

(2)  $y = x^2 - 2x + 4$ ,  $y = 2x^2 - 4x + 3$

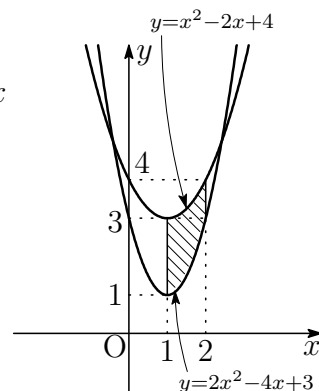
【解】 (1) 右の図から, 求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{(-x^2 + 4x) - (x^2 - 5x)\} dx \\ &= \int_1^2 (-2x^2 + 9x) dx \\ &= \left[ -\frac{2}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 \right]_1^2 \\ &= \left( -\frac{2}{3} \cdot 2^3 + \frac{9}{2} \cdot 2^2 \right) - \left( -\frac{2}{3} \cdot 1^3 + \frac{9}{2} \cdot 1^2 \right) \\ &= \frac{53}{6} \end{aligned}$$



(2) 右の図から, 求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{(x^2 - 2x + 4) - (2x^2 - 4x + 3)\} dx \\ &= \int_1^2 (-x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_1^2 \\ &= \left( -\frac{2^3}{3} + 2^2 + 2 \right) - \left( -\frac{1^3}{3} + 1^2 + 1 \right) \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$



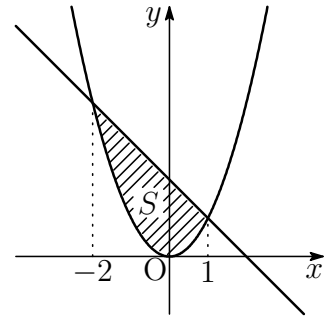
練習 6.34 次の放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) 放物線  $y = x^2$  , 直線  $y = -x + 2$

(2) 放物線  $y = -x^2 + 3$  , 直線  $y = 2x$

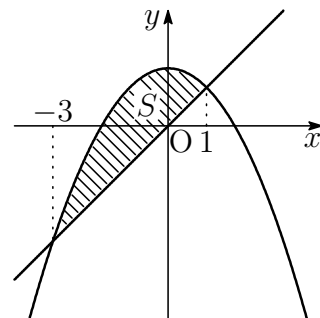
【解】 (1) 方程式  $x^2 = -x + 2$  を解くと  
 $x^2 + x - 2 = 0$  より  $x = -2, 1$   
 よって、求める面積  $S$  は、図から

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{(-x + 2) - x^2\} dx \\ &= \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 \\ &= \left( -\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 \right) \\ &\quad - \left\{ -\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2) \right\} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$



(2) 方程式  $-x^2 + 3 = 2x$  を解くと  
 $x^2 + 2x - 3 = 0$  より  $x = -3, 1$   
 よって、求める面積  $S$  は、図から

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^1 \{(-x^2 + 3) - 2x\} dx \\ &= \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^1 \\ &= \left( -\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \cdot 1 \right) \\ &\quad - \left\{ -\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3 \cdot (-3) \right\} \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$



## 6.3.4 補充問題

8 次の定積分を求めよ.

$$(1) \int_{-1}^1 (3x-1)^2 dx \qquad (2) \int_{-1}^2 (t^2 - 5t + 4) dt$$

【解】 (1)  $\int_{-1}^1 (3x-1)^2 dx = \int_{-1}^1 (9x^2 - 6x + 1) dx$

$$= \left[ 3x^3 - 3x^2 + x \right]_{-1}^1 = 8$$

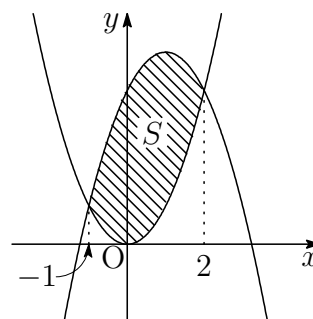
$$(2) \int_{-1}^2 (t^2 - 5t + 4) dt = \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{5}{2}t^2 + 4t \right]_{-1}^2 = \frac{15}{2}$$

9 放物線  $y = x^2$  と次の放物線で囲まれた部分の面積を求めよ.

$$(1) y = -x^2 + 2x + 4 \qquad (2) y = \frac{1}{2}x^2 + 2$$

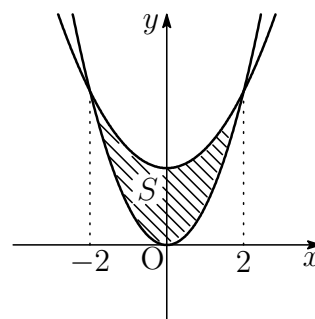
【解】 (1)  $x^2 = -x^2 + 2x + 4$  を解いて  $x = -1, 2$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{(-x^2 + 2x + 4) - x^2\} dx \\ &= \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx \\ &= \left[ -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right]_{-1}^2 = 9 \end{aligned}$$

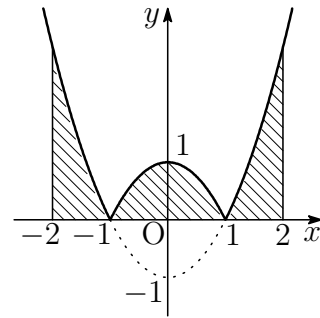


(2)  $x^2 = \frac{1}{2}x^2 + 2$  を解いて  $x = -2, 2$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \left\{ \left( \frac{1}{2}x^2 + 2 \right) - x^2 \right\} dx \\ &= \int_{-2}^2 \left( -\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{6} + 2x \right]_{-2}^2 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$



**10** 関数  $y = |x^2 - 1|$  のグラフは、右の図のようになる。このグラフと  $x$  軸および2直線  $x = -2$ ,  $x = 2$  で囲まれた部分の面積を求めよ。



**【解】**  $-2 \leq x \leq -1$ ,  $1 \leq x \leq 2$  のとき  $y = x^2 - 1$

$-1 \leq x \leq 1$  のとき  $y = -x^2 + 1$

よって、求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)dx + \int_{-1}^1 (-x^2 + 1)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} - x \right]_{-2}^{-1} + \left[ -\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 + \left[ \frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4 \end{aligned}$$

**【別解】**  $S = 2 \left\{ \int_0^1 (-x^2 + 1)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx \right\}$

$$= 2 \left\{ \left[ -\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 + \left[ \frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 \right\}$$

$$= 2 \left( \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) = 4$$

## 6.4 章末問題

## 6.4.1 章末問題 A

1 次の関数を微分せよ.

$$(1) y = (2x + 1)(1 - x^2)$$

$$(2) y = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

【解】 (1)  $y = -2x^3 - x^2 + 2x + 1$

$$\text{よって } y' = -6x^2 - 2x + 2$$

$$(2) y = x^3 - 8$$

$$\text{よって } y' = 3x^2$$

2 曲線  $y = x^3 - 4x^2$  上の点  $A(3, -9)$  における接線を  $\ell$  とする.

(1)  $\ell$  の方程式を求めよ.

(2) この曲線の接線で,  $\ell$  に平行なものの接点  $B$  の  $x$  座標を求めよ.

【解】 (1)  $f(x) = x^3 - 4x^2$  とすると, 接線  $\ell$  の傾きは  $f'(3)$  である.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x \text{ より}$$

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 = 3$$

$\ell$  は傾きが 3 で点  $(3, -9)$  を通る直線であるから, その方程式は

$$y - (-9) = 3(x - 3)$$

$$\text{すなわち } y = 3x - 18$$

(2) この曲線の接線で  $\ell$  に平行なものの傾きは 3 であるから

$$f'(3) = 3 \text{ すなわち } 3x^2 - 8x = 3$$

$$\text{これを解くと } x = 3, -\frac{1}{3}$$

接点  $A$  の  $x$  座標が 3 であるから, 接点  $B$  の  $x$  座標は  $-\frac{1}{3}$

**3** 関数  $y = x^2(x - a)$  の増減を次の各場合について調べ、極大値がある場合はその極大値を求めよ。ただし、 $a$  は定数とする。

(1)  $a > 0$

(2)  $a = 0$

(3)  $a < 0$

【解】  $y' = 3x^2 - 2ax = 3x \left( x - \frac{2}{3}a \right)$

(1)  $a > 0$  のとき、 $y$  の増減表は

$x$	...	0	...	$\frac{2}{3}a$	...
$y'$	+	0	-	0	+
$y$	↗	極大	↘	極小	↗

よって、 $x = 0$  で極大値  $0$  をとる。

(2)  $a = 0$  のとき  $y' = 3x^2 \geq 0$

$y$  の増減表は

$x$	...	0	...
$y'$	+	0	+
$y$	↗	0	↗

よって、 $y$  は常に増加し、極大値はない。

(3)  $a < 0$  のとき、 $y$  の増減表は

$x$	...	$\frac{2}{3}a$	...	0	...
$y'$	+	0	-	0	+
$y$	↗	極大	↘	極小	↗

$x = \frac{2}{3}a$  のとき

$$y = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \left(\frac{2}{3}a - a\right) = -\frac{4}{27}a^3$$

よって、 $x = \frac{2}{3}a$  で極大値  $-\frac{4}{27}a^3$  をとる。

4 関数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  が、 $x = 1$  で極大値 5 をとり、 $x = 3$  で極小値 1 をとるように、定数  $a, b, c, d$  の値を定めよ。

【解】  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(x)$  が  $x = 1$  で極大値 5 をとるとき

$$f'(1) = 0, \quad f(1) = 5$$

よって  $3a + 2b + c = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

$$a + b + c + d = 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

$f(x)$  が  $x = 3$  で極小値 1 をとるとき

$$f'(3) = 0, \quad f(3) = 1$$

よって  $27a + 6b + c = 0 \quad \dots \textcircled{3}$

$$27a + 9b + 3c + d = 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4} - \textcircled{2}$  から  $26a + 8b + 2c = -4$

すなわち  $13a + 4b + c = -2 \quad \dots \textcircled{5}$

$\textcircled{3} - \textcircled{1}$  から  $24a + 4b = 0$

すなわち  $6a + b = 0 \quad \dots \textcircled{6}$

$\textcircled{5} - \textcircled{1}$  から  $10a + 2b = -2$

すなわち  $5a + b = -1 \quad \dots \textcircled{7}$

$\textcircled{6}, \textcircled{7}$  を解くと  $a = 1, b = -6$

これを  $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  に代入して  $c = 9, d = 1$

このとき  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

よって、次の増減表が得られる。

$x$	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 5	↘	極小 1	↗

したがって  $a = 1, b = -6, c = 9, d = 1$

5 次の定積分を求めよ .

$$(1) \int_{-2}^2 (2x - 3)^2 dx$$

$$(2) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (t^2 - 2) dt$$

【解】 (1)  $\int_{-2}^2 (2x - 3)^2 dx = \int_{-2}^2 (4x^2 - 12x + 9) dx$

$$= \left[ \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x \right]_{-2}^2$$

$$= \left( \frac{4}{3} \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 \right) - \left\{ \frac{4}{3} \cdot (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 9 \cdot (-2) \right\}$$

$$= \frac{172}{3}$$

(2)  $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (t^2 - 2) dt = \left[ \frac{t^3}{3} - 2t \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$

$$= \left\{ \frac{(\sqrt{2})^3}{3} - 2\sqrt{2} \right\} - \left\{ \frac{(-\sqrt{2})^3}{3} - 2 \cdot (-\sqrt{2}) \right\}$$

$$= -\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

6 関数  $f(x) = \int_1^x (t - 1)(t - 2) dt$  の極大値を求めよ .

【解】  $f(x)$  を微分すると  $f'(x) = (x - 1)(x - 2)$   
 よって,  $f(x)$  の増減表は, 次のようになる .

$x$	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$f(1) = \int_1^1 (t - 1)(t - 2) dt = 0$$

したがって,  $f(x)$  は  $x = 1$  で極大値 0 をとる .

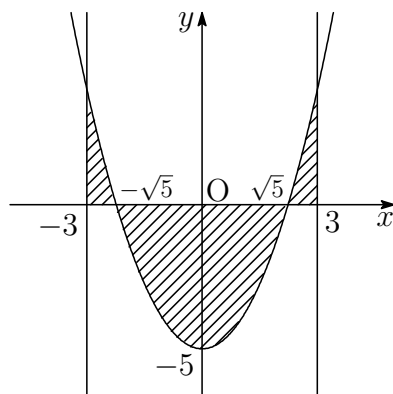
7 放物線  $y = x^2 - 5$  と  $x$  軸および2直線  $x = -3, x = 3$  で囲まれた3つの部分の面積の和を求めよ.

【解】この放物線と  $x$  軸の交点の  $x$  座標は,  $x^2 - 5 = 0$  を解いて

$$x = -\sqrt{5}, \sqrt{5}$$

求める面積  $S$  は右の図の斜線部分で,  $y$  軸について対称であるから

$$\begin{aligned} S &= 2 \left\{ \int_0^{\sqrt{5}} (-x^2 + 5) dx + \int_{\sqrt{5}}^3 (x^2 - 5) dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \left[ -\frac{x^3}{3} + 5x \right]_0^{\sqrt{5}} + \left[ \frac{x^3}{3} - 5x \right]_{\sqrt{5}}^3 \right\} \\ &= \frac{40\sqrt{5}}{3} - 12 \end{aligned}$$



8 放物線  $y = x^2 - 3x$  と次の 2 直線で囲まれた部分の面積を求めよ .

(1)  $y = 0, y = 4$

(2)  $y = 2x, y = -x$

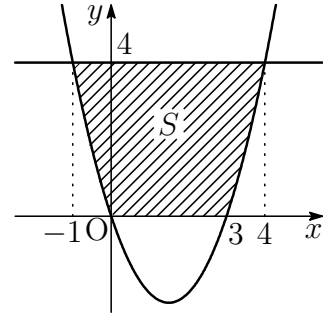
【解】 (1) 放物線と直線  $y = 0$  の交点の  $x$  座標は ,  
 $x^2 - 3x = 0$  を解いて

$$x = 0, 3$$

放物線と直線  $y = 4$  の交点の  $x$  座標は ,  
 $x^2 - 3x = 4$  を解いて

$$x = -1, 4$$

よって , 求める面積  $S$  は右の図の斜線部分で



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^4 \{4 - (x^2 - 3x)\} dx - \int_0^3 \{-(x^2 - 3x)\} dx \\ &= \left[ 4x - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^4 + \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 \\ &= \frac{125}{6} - \frac{9}{2} = \frac{49}{3} \end{aligned}$$

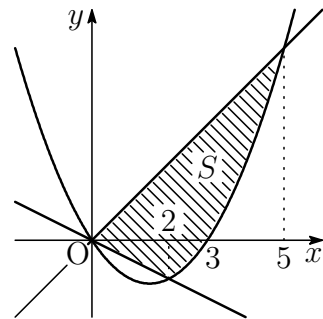
(2) 放物線と直線  $y = 2x$  の交点の  $x$  座標は ,  
 $x^2 - 3x = 2x$  を解いて

$$x = 0, 5$$

放物線と直線  $y = -x$  の交点の  $x$  座標  
 は ,  $x^2 - 3x = -x$  を解いて

$$x = 0, 2$$

よって , 求める面積  $S$  は右の図の斜線部分で



$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{2x - (-x)\} dx + \int_2^5 \{2x - (x^2 - 3x)\} dx \\ &= \left[ \frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 + \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 \right]_2^5 \\ &= 6 + \frac{27}{2} = \frac{39}{2} \end{aligned}$$

【別解】 (2)  $S = \int_0^5 \{2x - (x^2 - 3x)\} dx - \int_0^2 \{-x - (x^2 - 3x)\} dx = \frac{39}{2}$

## 6.4.2 章末問題 B

**9** 関数  $f(x) = x^3 + 3x^2 + kx$  が常に増加するように、定数  $k$  の値の範囲を定めよ。

【解】関数  $f(x)$  について、常に  $f'(x) \geq 0$  であれば、 $f(x)$  は常に増加する。

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + k = 3(x+1)^2 + k - 3$$

よって、 $3x^2 + 6x + k \geq 0$  が常に成り立つには

$$k - 3 \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad k \geq 3$$

【別解】関数  $f(x)$  について、常に  $f'(x) \geq 0$  であれば、 $f(x)$  は常に増加する。

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + k$$

$3x^2 + 6x + k \geq 0$  が常に成り立つのは、2次方程式  $3x^2 + 6x + k = 0$  の判別式について  $D \leq 0$  のときである。

$$D = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot k \text{ より } 36 - 12k \leq 0$$

これを解いて  $k \geq 3$

**10**  $k$  は定数とする。 $x \geq 0$  のとき、不等式  $x^3 - 6x^2 + k \geq 0$  が成り立つような  $k$  の値の最小値を求めよ。

【解】 $f(x) = x^3 - 6x^2 + k$  とすると

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$$

$x \geq 0$  において、 $f(x)$  の増減表は

$x$	0	...	4	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$k$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

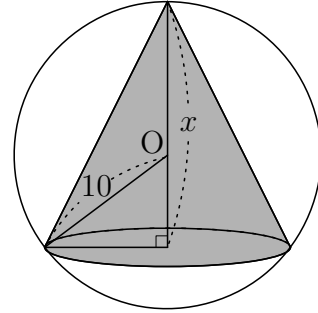
$x \geq 0$  において、 $f(x) \geq 0$  が成り立つには  $f(4) \geq 0$  であればよい。

$$f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + k = k - 32$$

よって  $k - 32 \geq 0$  すなわち  $k \geq 32$

したがって、 $k$  の最小値は  $k = 32$

11 右の図のように、半径10の球に内接する直円錐がある．このような直円錐の体積 $V$ の最大値 $V_1$ と球の体積 $V_2$ の比を求めよ．



【解】直円錐の底面の半径を $r$ とすると、右の図の直角三角形OBHにおいて、三平方の定理より

$$\begin{aligned} r^2 &= BH^2 \\ &= OB^2 - OH^2 \\ &= 10^2 - (x - 10)^2 = 20x - x^2 \end{aligned}$$

よって、直円錐の体積 $V$ は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times x \\ &= \frac{1}{3} \pi x^2 (20 - x) \quad (0 < x < 20) \end{aligned}$$

$$V' = -\pi x^2 + \frac{40}{3} \pi x = -\pi x \left( x - \frac{40}{3} \right)$$

$V$ の増減表は

$x$	0	...	$\frac{40}{3}$	...	20
$V'$		+	0	-	
$V$		↗	極大	↘	

$V$ は $x = \frac{40}{3}$ で最大となり、最大値 $V_1$ は

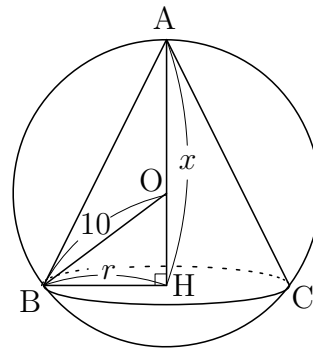
$$V_1 = \frac{\pi}{3} \cdot \left( \frac{40}{3} \right)^2 \left( 20 - \frac{40}{3} \right) = \frac{32000}{81} \pi$$

また、球の体積 $V_2$ は

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi \cdot 10^3 = \frac{4000}{3} \pi$$

したがって

$$V_1 : V_2 = \frac{32000}{81} \pi : \frac{4000}{3} \pi = 8 : 27$$



**12** どんな1次関数  $f(x)$  に対しても, 不等式  $\left\{ \int_0^1 f(x) dx \right\}^2 < \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$  が成り立つことを証明せよ.

【解】1次関数を  $f(x) = ax + b$  とおく. ただし,  $a \neq 0$  とする.

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^1 f(x) dx \right\}^2 &= \left\{ \int_0^1 (ax + b) dx \right\}^2 \\ &= \left\{ \left[ \frac{a}{2}x^2 + bx \right]_0^1 \right\}^2 \\ &= \left( \frac{a}{2} + b \right)^2 = \frac{a^2}{4} + ab + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx &= \int_0^1 (ax + b)^2 dx \\ &= \int_0^1 (a^2x^2 + 2abx + b^2) dx \\ &= \left[ \frac{a^2}{3}x^3 + abx^2 + b^2x \right]_0^1 \\ &= \frac{a^2}{3} + ab + b^2 \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx - \left\{ \int_0^1 f(x) dx \right\}^2 &= \left( \frac{a^2}{3} + ab + b^2 \right) - \left( \frac{a^2}{4} + ab + b^2 \right) \\ &= \frac{a^2}{12} > 0 \end{aligned}$$

したがって  $\left\{ \int_0^1 f(x) dx \right\}^2 < \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$

**13** 等式  $f(x) = x^2 + 2 \int_0^1 f(t) dt$  が、任意の実数  $x$  に対して成り立つとき、関数  $f(x)$  を求めよ。

【解】  $\int_0^1 f(t) dt$  は定数であるから、これを  $a$  とおくと

$$f(x) = x^2 + 2a \quad \cdots \textcircled{1}$$

①を  $\int_0^1 f(t) dt = a$  に代入すると

$$\int_0^1 (t^2 + 2a) dt = a$$

$$\text{ここで } \int_0^1 (t^2 + 2a) dt = \left[ \frac{t^3}{3} + 2at \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 2a$$

$$\text{よって } \frac{1}{3} + 2a = a$$

$$\text{これを解いて } a = -\frac{1}{3}$$

$$\text{したがって } f(x) = x^2 - \frac{2}{3}$$

14 放物線  $y = x^2 - ax$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積が  $\frac{4}{3}$  になるような定数  $a$  の値を求めよ.

【解】放物線と  $x$  軸の交点の  $x$  座標は,  $x^2 - ax = 0$  を解いて

$$x = 0, a$$

[1]  $a > 0$  のとき

$$\int_0^a \{-(x^2 - ax)\} dx = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^a \\ &= -\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \frac{a^3}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{すなわち} \quad a^3 = 8$$

$$a > 0 \text{ であるから} \quad a = 2$$

[2]  $a < 0$  のとき

$$\int_a^0 \{-(x^2 - ax)\} dx = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= -\int_0^a \{-(x^2 - ax)\} dx \\ &= -\frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad -\frac{a^3}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{すなわち} \quad a^3 = -8$$

$$a < 0 \text{ であるから} \quad a = -2$$

[1], [2] より  $a = 2, -2$

**15** 放物線  $y = x^2 - 2x + 4$  に原点  $O$  から 2 本の接線を引くとき、放物線と 2 本の接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

【解】  $y = x^2 - 2x + 4$  を微分すると  $y' = 2x - 2$

接点の  $x$  座標を  $a$  とすると、接線の傾きは  $2a - 2$  となるから、その方程式は

$$y - (a^2 - 2a + 4) = (2a - 2)(x - a) \quad \cdots \textcircled{1}$$

この直線が原点  $O(0, 0)$  を通るから

$$0 - (a^2 - 2a + 4) = (2a - 2)(0 - a)$$

整理すると  $a^2 = 4$

よって  $a = -2, 2$

接線の方程式は、 $\textcircled{1}$  より

$a = -2$  のとき

$$y - 12 = -6(x + 2)$$

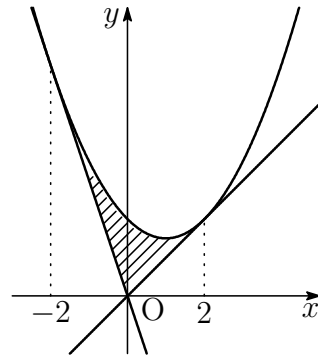
すなわち  $y = -6x$

$a = 2$  のとき

$$y - 4 = 2(x - 2)$$

すなわち  $y = 2x$

したがって、求める面積は右の図から



$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 \{(x^2 - 2x + 4) - (-6x)\} dx + \int_0^2 \{(x^2 - 2x + 4) - 2x\} dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x \right]_{-2}^0 + \left[ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$