高校生の

新　編　数　学　I

書込みノート

平成 20 年 8 月 1 日

Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

目 次

第 1 章　方程式と不等式

1.1　式の計算

1.1.1　多項式の加法と減法

数量を一般的に表すために，文字を数と同じように扱うと便利である．ここでは，文字を含む式の加法と減法について学ぶことにしよう．

A 》 単項式と多項式

3，x，$2a$，$(-5)x^2y$ などのように，数や文字およびそれらを掛けただけで作られる式を**単項式**という．単項式では，数の部分をその単項式の**係数**といい，掛けた文字の個数をその単項式の**次数**という．

数だけの単項式の次数は 0 である．ただし，数 0 の次数は考えない．

ふつう $1x$ は単に x と書き，$(-5)x^2y$ は $-5x^2y$ と書く．

例 1.1　(1) $2a$ の係数は 2，次数は 1 である．

(2) $-5x^2y$ の係数は -5，次数は 3 である．

練習 1.1 次の単項式の係数と次数をいえ．

(1) $6x^2$　　(2) x　　(3) $-a^2b^2$　　(4) $5abc$

単項式が2種類以上の文字を含むとき，特定の文字に着目して係数や次数を考えることがある．この場合，残りの文字は数と同じように扱う．

例 1.2　単項式 $5ab^2x^3$ の係数と次数

(1)　x に着目すると，係数は $5ab^2$，次数は3である．

(2)　a と b に着目すると，係数は $5x^3$，次数は3である．

練習 1.2 次の単項式で [　] 内の文字に着目したとき，その係数と次数をいえ．

(1) $2ax^3$　[x]　　(2) $3a^2x$　[a]　　(3) $-6ax^2y$　[x と y]

$5x^2+(-4x)+2$ のように，単項式の和として表される式を**多項式**といい，その1つ1つの単項式を，この多項式の**項**という．

$5x^2+(-4x)+2$ は，ふつう $5x^2-4x+2$ と書く．

なお，今後は多項式に単項式も含めて考える．このとき，多項式のことを**整式**ということもある．

B》多項式の整理

多項式の項の中で，文字の部分が同じである項を**同類項**という．多項式に含まれる同類項は，係数の和を計算して，1つの項にまとめることができる．

例 1.3

(1)
$$\begin{aligned}&3x^2+2x-5-7x+x^2-1\\&=(3+1)x^2+(2-7)x+(-5-1)\\&=4x^2-5x-6\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&2x^2-5xy+4-3x^2+7xy-4\\&=(2-3)x^2+(-5+7)xy+(4-4)\\&=-x^2+2xy\end{aligned}$$

同類項をまとめる仕組み

$$\boldsymbol{ma+na=(m+n)a}$$
$$\boldsymbol{ma-na=(m-n)a}$$

練習 1.3 次の多項式の同類項をまとめよ．

(1) $4x^2+3x-1-2x^2+5x+6$　　(2) $3a^2-2ab-4b^2-5a^2+2ab-8b^2$

同類項をまとめた多項式において，最も次数の高い[1]項の次数をその多項式の**次数**という．また，次数が n の多項式を **n 次式** という．

たとえば，$4x^2-5x-6$ は2次式である．

[1]次数の大小は,「高い」,「低い」で言い表すのがふつうである．

練習 1.4 次の多項式は何次式か.

(1) x^3+4x^2-5　　(2) $1+6a-8a^2-3a^4$

文字を 2 種類以上含む多項式では，特定の文字にだけ注目して係数や次数を考えることがある.

多項式の項の中で，着目した文字を含まない項を**定数項**という.

例 1.4 (1) **多項式 ax^2+bx+c**

x に着目すると 2 次式である.
2 次の係数は a，1 次の係数は b，定数項は c である.

(2) **多項式 $x^2y+2x+a$**

y に着目すると 1 次式で，定数項は $2x+a$ である.
x と y に着目すると 3 次式で，定数項は a である.

練習 1.5 多項式 $ax^3-x^2y+by^2+c$ は，次の文字に着目すると何次式か．また，そのときの定数項は何か.

(1) x　　(2) y　　(3) x と y

多項式は，ある文字に注目して，各項を次数が低くなる順に並べて整理することが多い．このことを，**降べきの順**に整理[2]するという.

例 1.5 多項式 $ax+2a+x^2-3+x$ の整理

x について降べきの順に整理すると

$$x^2+(a+1)x+(2a-3)$$

a について降べきの順に整理すると

$$(x+2)a+(x^2+x-3)$$

練習 1.6 次の多項式を，x について降べきの順に整理せよ.

(1) $4a^2+ax+2x-3a$　　(2) $x^2+2xy+3y^2-x+4y+1$

[2] 各項を次数が高くなる順に並べて整理することもある．このことを，**昇べきの順**に整理するという.

C》多項式の加法と減法

2つの多項式 A，B の和と差の計算は，次のように行う．

$A+B$	$\cdots\cdots$	A と B の項をすべて足して，同類項をまとめる．
$A-B$	$\cdots\cdots$	$A+(-B)$ と考え，B の各項の符号を変えたものを A に足して，同類項をまとめる．

例 1.6 (1)
$$\begin{aligned}&(3x^2-5x+2)+(4x^2+x-3)\\=&(3+4)x^2+(-5+1)x+(2-3)\\=&7x^2-4x-1\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(2x^3-4x^2+3x-1)-(3x^3-4x-1)\\=&2x^3-4x^2+3x-1\boldsymbol{-3x^3+4x+1}\\=&(2-3)x^3-4x^2+(3+4)x+(-1+1)\\=&-x^3-4x^2+7x\end{aligned}$$

符号を変える

2つの多項式の和と差の計算をするのに，それらを上下に並べて行う方法もある．このときは，同類項の位置を上下でそろえて計算する．

(1)
$$\begin{array}{rrrr} & 3x^2 & -5x & +2\\ +) & 4x^2 & +\ \ x & -3\\ \hline & 7x^2 & -4x & -1\end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rrrrr} & 2x^3 & -4x^2 & +3x & -1\\ -) & 3x^3 & & -4x & -1\\ \hline & -x^3 & -4x^2 & +7x & \end{array}$$

練習 1.7 次の多項式 A と B について，$A+B$ と $A-B$ を計算せよ．

(1) $A=2x^2+3x-1$，$B=4x^2-5x-6$

(2) $A=4x^3-3x^2-2x+5$，$B=2x^3-3x^2+7$

(3) $A=x^2-3xy+y^2$，$B=3x^2+xy-y^2$

練習 1.8 $A=x^2+4x-3$，$B=2x^2-x+4$ とする．$A+B+2(A-B)$ を計算せよ．

1.1.2　多項式の乗法

多項式の乗法は，単項式の積の計算が基本になる．
そこで，まず単項式の乗法について調べることにしよう．

A》単項式の乗法

a を n 個掛けたものを「**a の n 乗**」といい，$\boldsymbol{a^n}$ と書く．
a^n における n を，a^n の**指数**（しすう）という．
また，a，a^2，a^3，$\cdots$ をまとめて a の**累乗**（るいじょう）という．
累乗についての積は，次のように計算される．

$$a^3 \times a^2 = (a \times a \times a) \times (a \times a) = a^{3+2} = a^5$$
$$(a^3)^2 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a) = a^{3\times 2} = a^6$$
$$(ab)^2 = ab \times ab = (a \times a) \times (b \times b) = a^2b^2$$

一般に，次の**指数法則**が成り立つ．

指数法則

m，n を正の整数とする．

1　$\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$　　**2**　$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$　　**3**　$\boldsymbol{(ab)^n = a^nb^n}$

単項式の積は，指数法則を用いて計算する．

例 1.7　(1) $3a^2 \times a^4 = 3 \times a^{2+4} = 3a^6$

(2) $2x^3y \times (-5xy^2) = \{2 \times (-5)\} \times x^{3+1} \times y^{1+2} = -10x^4y^3$

(3) $(-2xy^2)^3 = (-2)^3 \times x^3 \times (y^2)^3 = -8x^3y^6$

練習 1.9 次の式を計算せよ．

(1) $2a^3 \times 4a^2$　　(2) $a^2 \times (-3a)$　　(3) $4ab^2 \times b^4$

(4) $3x^2y \times (-2x^3y^2)$　　(5) $(-2ab^3)^2$　　(6) $(-3x^2y)^3$

B》多項式の乗法

多項式の積は，次の分配法則を用いて計算する．

分配法則

$\boldsymbol{A}(B+C) = \boldsymbol{A}B + \boldsymbol{A}C$　　$(A+B)\boldsymbol{C} = A\boldsymbol{C} + B\boldsymbol{C}$

例 1.8 分配法則を使った積の計算

$$(1)\quad \boldsymbol{3x^2}(x^2+2x-4) = \boldsymbol{3x^2}\times x^2 + \boldsymbol{3x^2}\times 2x + \boldsymbol{3x^2}\times(-4)$$
$$= 3x^4+6x^3-12x^2$$

$$(2)\quad (2a^2-3a+1)\boldsymbol{a} = 2a^2\times \boldsymbol{a} + (-3a)\times \boldsymbol{a} + 1\times \boldsymbol{a}$$
$$= 2a^3-3a^2+a$$

多項式の積の形をした式について，その積を計算して1つの多項式に表すことを，その式を**展開**するという．

例 1.9 $(4x^2-3x+1)(x+2)$ を展開する．

$$\begin{aligned}
&(4x^2-3x+1)(x+2)\\
=&(4x^2-3x+1)x+(4x^2-3x+1)\cdot 2\\
=&4x^3-3x^2+x+8x^2-6x+2\\
=&4x^3+5x^2-5x+2
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr}
 & 4x^2-3x+1 \\
\times) & x+2 \\ \hline
 & 4x^3-3x^2+x \\
 & 8x^2-6x+2 \\ \hline
 & 4x^3+5x^2-5x+2
\end{array}$$

注意 上で用いた $(4x^2-3x+1)\cdot 2$ における $\cdot$ は，積を表す記号である．

練習 1.10 次の式を展開せよ．

(1) $4x^2(2x^2-3x+5)$　　(2) $(2x-1)(4x^2+3)$

(3) $(2x^2+x-3)(x-2)$　　(4) $(2x+1)(x^2-4x-1)$

(5) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$　　(6) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

練習 1.11 次の式を展開し，x について降べきの順に整理せよ．

(1) $(x^2-ax+1)(x+a)$　　(2) $(x-2a)(x^2+3ax+1)$

C》 展開の公式

代表的な式の展開の結果は，公式として利用すると便利である.

展開の公式

1 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2,\quad (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$

2 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$

3 $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{x}^2+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{ab}$

例 1.10 (1) $(3x+1)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 1+1^2=9x^2+6x+1$

(2) $(4x-5y)^2=(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 5y+(5y)^2=16x^2-40xy+25y^2$

(3) $(3x+2y)(3x-2y)=(3x)^2-(2y)^2=9x^2-4y^2$

(4) $(x+2)(x-5)=x^2+\{2+(-5)\}x+2\cdot(-5)=x^2-3x-10$

(5) $$\begin{aligned}(x-3y)(x-2y)&=x^2+(-3y-2y)x+(-3y)(-2y)\\&=x^2-5xy+6y^2\end{aligned}$$

練習 1.12 次の式を展開せよ.

(1) $(2x+5)^2$ (2) $(2x-3y)^2$ (3) $(5x+4)(5x-4)$

(4) $(x+1)(x+5)$ (5) $(x-3)(x+8)$ (6) $(x-2)(x-4)$

(7) $(x+2y)(x+5y)$ (8) $(x+y)(x-4y)$ (9) $(x-2a)(x-7a)$

積 $(ax+b)(cx+d)$ を展開すると，次のようになる．

展開の公式

4　$\boldsymbol{(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd}$

例題 1.1 次の式を展開せよ．

(1) $(3x+2)(4x+1)$　　(2) $(2x-5y)(3x+4y)$

解答 (1)
$$(3x+2)(4x+1) = 3\cdot4x^2 + (3\cdot1 + 2\cdot4)x + 2\cdot1$$
$$= 12x^2 + 11x + 2$$

(2)
$$(2x-5y)(3x+4y) = 2\cdot3x^2 + \{2\cdot4 + (-5)\cdot3\}xy + (-5)\cdot4y^2$$
$$= 6x^2 - 7xy - 20y^2$$

練習 1.13 次の式を展開せよ．

(1) $(2x+1)(4x+5)$　　(2) $(x+4)(2x-3)$

(3) $(3x-7)(x+2)$　　(4) $(2x-5)(2x-1)$

(5) $(x+2y)(3x-y)$　　(6) $(3x-2a)(4x-3a)$

次の式の展開[3]の結果も，公式として利用すると便利である．

展開の公式

5 $\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}$
$\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$

例 1.11 (1) $(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x{\cdot}2+2^2)$
$=x^3+2^3=x^3+8$

(2) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=(x-2y)\{x^2+x{\cdot}2y+(2y)^2\}$
$=x^3-(2y)^3=x^3-8y^3$

練習 1.14 次の式を展開せよ．

(1) $(x+1)(x^2-x+1)$　　(2) $(x-2)(x^2+2x+4)$

(3) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$　　(4) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

$(a+b)^3$ を展開してみよう．

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)^2(a+b)\\&=(a^2+2ab+b^2)(a+b)\\&=(a^2+2ab+b^2)a+(a^2+2ab+b^2)b\\&=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrrr} & a^2 & +2ab & +b^2 & \\ \times) & a & +b & & \\ \hline & a^3 & +2a^2b & +ab^2 & \\ & & a^2b & +2ab^2 & +b^3 \\ \hline & a^3 & +3a^2b & +3ab^2 & +b^3 \end{array}$$

練習 1.15 $(a-b)^3$ を展開すると次のようになることを確かめよ．

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

[3] これらの積は，6 ページの練習 1.10(5),(6) で計算している．

$(a+b)^3$ と $(a-b)^3$ を展開した結果も，公式として利用すると便利である．

展開の公式

6　$\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$
$\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

補足 $(a+b)^3$ を展開した式において，b を $-b$ で置き換えると，$(a-b)^3$ を展開した式が得られる．

$$(a-b)^3 = \{a+(-b)\}^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

例 1.12　(1) $(x+1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3$
$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(2) $(2x-y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 - y^3$
$= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

練習 1.16 次の式を展開せよ．

(1) $(x+2)^3$

(2) $(x-1)^3$

(3) $(3a+b)^3$

(4) $(x-2y)^3$

D》式の展開の工夫

複雑な式を展開する場合，式の形に応じた工夫をすると，展開の公式を利用できることがある．

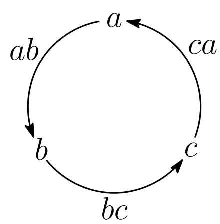
例題 1.2 次の式を展開せよ．

$$(a+b+c)^2$$

解答 $(a+b+c)^2 = \{(a+b)+c\}^2$　← $a+b=A$ とおくと $(A+c)^2$ の展開になる．

$$= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

補足 上のような式の展開では，ab，bc，ca の項の順で式を整理しておくことが多い．



練習 1.17 次の式を展開せよ．

(1) $(a+b-c)^2$

(2) $(x+2y+3z)^2$

例題 1.3 次の式を展開せよ．

$$(a+b)^2(a-b)^2$$

解答 $(a+b)^2(a-b)^2 = \{(a+b)(a-b)\}^2$　← 掛ける順序を変えれば，展開の公式 **2** が使える．

$$= (a^2-b^2)^2$$
$$= (a^2)^2 - 2a^2b^2 + (b^2)^2$$
$$= a^4 - 2a^2b^2 + b^4$$

練習 1.18 次の式を展開せよ.

(1) $(x+1)^2(x-1)^2$

(2) $(x^2+1)(x+1)(x-1)$

練習 1.19 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ を次の方法で展開せよ.

(1) そのまま展開する.

(2) $x^2+1=A$ とおいて展開する.

1.1.3　因数分解

式 $(x+2)(x+3)$ を展開してみると，次の等式が成り立つことがわかる．

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

このように，1 つの多項式を 1 次以上の多項式の積の形に表すことを，式を**因数分解**するといい，積を作っている各式をもとの式の**因数**という．

A ≫ 共通因数による因数分解

多項式の各項に共通な因数があれば，その共通因数をかっこの外にくくり出して，式を因数分解することができる．

$$\boldsymbol{A}B+\boldsymbol{A}C=\boldsymbol{A}(B+C)$$

$\boldsymbol{A}$ が共通因数

例 1.13　$\boldsymbol{2ax^2+6axy}$ の因数分解

$2ax$ が共通因数であるから

$$2ax^2+6axy=2ax(x+3y)$$

$$2ax^2=\boldsymbol{2ax}\cdot x$$
$$6axy=\boldsymbol{2ax}\cdot 3y$$

注意　共通因数はすべてかっこの外にくくり出す．

練習 1.20　次の式を因数分解せよ．

(1) $12x^3-8x^2y$　　(2) $3a^2x+6ax^2-2ax$

例題 1.4　次の式を因数分解せよ．

$$(a-b)x+(b-a)y$$

解答　$(a-b)x+(b-a)y=(a-b)x-(a-b)y$　　$\longleftarrow$ $(a-b)$ が共通因数

$=(a-b)(x-y)$

練習 1.21　次の式を因数分解せよ．

(1) $(a+b)c+d(a+b)$　　(2) $(a-2b)x+(2b-a)y$

B》2次式の因数分解

因数分解は，式の展開と違っていつも簡単にできるわけではない．
ここでは，展開の公式が逆に利用できる場合の因数分解を考えよう．

因数分解の公式

1　$\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\quad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}$

2　$\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$

3　$\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)}$

因数分解の公式 **1**，**2** が利用できる因数分解の例を示す．

例 1.14　(1) $x^2+8x+16=x^2+2{\cdot}x{\cdot}4+4^2=(x+4)^2$

(2) $9x^2-6xy+y^2=(3x)^2-2{\cdot}3x{\cdot}y+y^2=(3x-y)^2$

(3) $4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2=(2x+3y)(2x-3y)$

練習 1.22 次の式を因数分解せよ．

(1) $x^2+10x+25$　　(2) $x^2-12x+36$

(3) $x^2+6xy+9y^2$　　(4) $4x^2-4xy+y^2$

(5) x^2-9y^2　　(6) $16a^2-25b^2$

次に，因数分解の公式 **3** が利用できる因数分解の例を示す．

例 1.15　$\boldsymbol{x^2+6x+8}$ の因数分解

$$\begin{aligned} x^2+6x+8 &= x^2+(2+4)x+2{\cdot}4 \\ &= (x+2)(x+4) \end{aligned}$$

← 積が 8，和が 6 となる
2 数は 2 と 4

練習 1.23 次の式を因数分解せよ．

(1) $x^2+8x+12$ (2) $x^2-7x+12$

(3) x^2+2x-8 (4) x^2-5x-6

(5) a^2-7a+6 (6) y^2-y-20

例題 1.5 次の式を因数分解せよ．

$$x^2+2xy-8y^2$$

解答 $x^2+2xy-8y^2$

$=x^2+(4y-2y)x+4y\cdot(-2y)$

$=(x+4y)(x-2y)$

積が $-8y^2$，和が $2y$

⇩

$4y$ と $-2y$

練習 1.24 次の式を因数分解せよ．

(1) $x^2+5xy+6y^2$ (2) $x^2-6xy+8y^2$

(3) $x^2+7ax-18a^2$ (4) $x^2-ax-12a^2$

展開の公式 **4** を逆に利用する因数分解は，次のようになる．

因数分解の公式

4　$\boldsymbol{acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)}$

$\boldsymbol{3x^2+14x+8}$ の因数分解

公式 4 において

$$ac=3,\ ad+bc=14,\ bd=8$$

$$\begin{array}{ccc} a & b & \longrightarrow\ bc \\ c & d & \longrightarrow\ ad \\ \hline ac=3 & bd=8 & ad+bc=14 \end{array}$$

となる a，b，c，d をみつければよい．

① $ac=3$ の 3 を　1×3

$bd=8$ の 8 を　1×8，2×4，4×2，8×1

などと，積に分解する．

② $a=1$，$c=3$ として，b，d の候補から

$$ad+bc=14$$

となるものを，上の図のような形式で計算してみると，右の場合が適する．

$$\begin{array}{ccc} 1 & 4 & \longrightarrow\ 12 \\ 3 & 2 & \longrightarrow\ 2 \\ \hline 3 & 8 & 14 \end{array}$$

$$a=1,\ b=4,\ c=3,\ d=2$$

よって　　$3x^2+14x+8=(x+4)(3x+2)$

例題 1.6 次の式を因数分解せよ．

(1) $2x^2-5x+3$　　　(2) $4x^2-8ax-5a^2$

解答　(1) $2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$

(2) $4x^2-8ax-5a^2=(2x+a)(2x-5a)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & \longrightarrow\ -2 \\ 2 & -3 & \longrightarrow\ -3 \\ \hline 2 & 3 & -5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 2 & 1a & \longrightarrow\ 2a \\ 2 & -5a & \longrightarrow\ -10a \\ \hline 4 & -5a^2 & -8a \end{array}$$

練習 1.25 次の式を因数分解せよ.

(1) $3x^2 + 7x + 2$　　(2) $2x^2 + 9x + 10$

(3) $2x^2 - 7x + 6$　　(4) $4x^2 + 8x - 21$

(5) $3x^2 + 5ax - 2a^2$　　(6) $6x^2 - 7ax - 3a^2$

C 》 3 次式の因数分解

展開の公式 **5** を逆に利用する因数分解は，次のようになる.

因数分解の公式

6　$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$
　　$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$

例題 1.7 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^3 + 8$　　(2) $x^3 - 8a^3$

解答　(1) $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - x\cdot 2 + 2^2)$
$= (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

(2) $x^3 - 8a^3 = x^3 - (2a)^3 = (x-2a)\{x^2 + x\cdot 2a + (2a)^2\}$
$= (x-2a)(x^2 + 2ax + 4a^2)$

練習 1.26 次の式を因数分解せよ.

(1) x^3+1

(2) x^3+27a^3

(3) x^3-1

(4) $8x^3-y^3$

D》いろいろな因数分解

複雑な式を因数分解する場合，式の形の特徴に着目して式の変形や文字のおき換えを行うと，因数分解の公式を利用できることがある.

応用例題 1.1 次の式を因数分解せよ.

$$(x+1)^2+2(x+1)-15$$

考え方》 展開せずに $x+1=A$ とおいて，A の式を因数分解してから A を $x+1$ にもどす.

解答 $x+1=A$ とおく.

$$\begin{aligned}(x+1)^2+2(x+1)-15 &= A^2+2A-15\\ &= (A+5)(A-3)\\ &= \{(x+1)+5\}\{(x+1)-3\}\\ &= (x+6)(x-2)\end{aligned}$$

練習 1.27 次の式を因数分解せよ.

(1) $(x-1)^2-5(x-1)+6$

(2) $2(x+3)^2-(x+3)-1$

応用例題 1.2 次の式を因数分解せよ．

$$x^2 + ax + x + 2a - 2$$

考え方 》 まず，次数の最も低い文字 a について式を整理する．

解答 a について整理すると

$$\begin{aligned} x^2 + ax + x + 2a - 2 &= (x+2)a + (x^2 + x - 2) \\ &= (x+2)a + (x+2)(x-1) \\ &= (x+2)(a+x-1) \\ &= (x+2)(x+a-1) \end{aligned}$$

練習 1.28 次の式を因数分解せよ．

(1) $x^2 + 3ax - 9a - 9$

(2) $a^2 + ab - 4a - b + 3$

応用例題 1.3 次の式を因数分解せよ.

(1) $4x^2-y^2+2y-1$　　(2) $x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$

考え方》うまく式を整理すると，因数分解の公式が利用できる.

(1) 因数分解の公式 **2** が利用できる.
(2) x について $x^2+(y\text{ の }1\text{ 次式})x+(y\text{ の }2\text{ 次式})$ の形に整理すると，因数分解の公式 **3** が利用できる.

解答 (1)

$$\begin{aligned}&4x^2-y^2+2y-1\\=&4x^2-(y^2-2y+1)\\=&(2x)^2-(y-1)^2\\=&\{2x+(y-1)\}\{2x-(y-1)\}\\=&(2x+y-1)(2x-y+1)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&x^2+3xy+2y^2-x-3y-2\\=&x^2+(3y-1)x+(2y^2-3y-2)\\=&x^2+(3y-1)x+(y-2)(2y+1)\\=&\{x+(y-2)\}\{x+(2y+1)\}\\=&(x+y-2)(x+2y+1)\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ $y-2=A$, $2y+1=B$ とおくと $x^2+(A+B)x+AB$ の形になっている.

練習 1.29 次の式を因数分解せよ.

(1) x^2-4y^2+4y-1　　(2) $x^2-6x+9-y^2$

(3) $x^2+3xy+2y^2-2x-3y+1$　　(4) $x^2-2ax+a^2-x+a-2$

1.1.4 補充問題

1 次の式を計算せよ.

(1) $(6x^3-3x-4)+(5+8x^2+2x-x^3)+2(x-4x^2-3)$

(2) $(7x^3-4x-5)+x(3x+6-2x^2)-3x(2x^2-x+4)$

2 次の式を展開せよ.

(1) $(2m+5)(m-2)$

(2) $(4x-5a)(4x+5a)$

(3) $(2x-3)^3$

(4) $(1+x+x^2)(1-x)$

(5) $(x-a+1)^2$

(6) $(x+y+z)(x+y-z)$

3 次の式を因数分解せよ.

(1) $2ax^2 - 8a$

(2) $ax^2 + by^2 - ay^2 - bx^2$

(3) $(x-4)(3x+1)+10$

(4) $2n^3 + 3n^2 + n$

(5) $x^3 + x^2y - x^2 - y$

(6) $2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 5y - 2$

4 $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ を因数分解せよ.

▶ a について降べきの順に整理する.

1.2 実数

1.2.1 実数

整数は，正の整数すなわち**自然数** $1, 2, 3, 4, \cdots$ と負の整数 $-1, -2, -3, -4, \cdots$ および 0 からなる数である．ほかに，分数で表される数や小数で表される数，$\sqrt{2}$ のような数もある．ここでは，数についてまとめよう．

A 》 有理数

整数 m と正の整数 n を用いて分数 $\dfrac{m}{n}$ の形で表される数を**有理数**という．整数 m は $\dfrac{m}{1}$ と表されるので，有理数である．

整数以外の有理数を小数で表すと，たとえば次のようになる．

① $\dfrac{1}{4} = 0.25$　　② $\dfrac{2}{3} = 0.666\cdots$　　③ $\dfrac{7}{22} = 0.3181818\cdots$

小数第何位かで終わる小数を**有限小数**といい，限りなく続く小数を**無限小数**という．無限小数のうち，②，③ のように，ある位以下では数字の同じ並びが繰り返される小数を**循環小数**という．

有理数について，次のことが知られている．

整数以外の有理数は，有限小数か循環小数のいずれかで表される．

逆に，有限小数と循環小数は必ず分数の形に表され，有理数である．

循環小数を次のように書き表すことがある．

$0.666\cdots = 0.\dot{6}$　　$0.3181818\cdots = 0.3\dot{1}\dot{8}$　　$1.234234234\cdots = 1.\dot{2}3\dot{4}$

練習 1.30 次の分数を小数に直し，循環小数の表し方で書け．

(1) $\dfrac{1}{3}$　　(2) $\dfrac{8}{9}$

(3) $\dfrac{3}{22}$　　(4) $\dfrac{15}{7}$

B》実数

有限小数や無限小数で表される数と整数とを合わせて**実数**という.
有理数でない実数もあり，そのような数を**無理数**という.
無理数は，循環しない無限小数で表される数であり，分数で表すことはできない.
たとえば，$\sqrt{2}$ や円周率 π は無理数であることが知られている.

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309\cdots\cdots, \qquad \pi = 3.14159265358979\cdots\cdots$$

実数
- **有理数**
  - **整数**　・・・　**自然数，0，負の数**
  - **有限小数**
  - **循環小数**
- **無理数**　・・・　**循環しない無限小数**

（**循環小数**，**循環しない無限小数** → **無限小数**）

有理数，実数は，それぞれの範囲で常に四則[4] 計算ができる.
すなわち，次のことがいえる.

> **2つの有理数の和，差，積，商はまた有理数である.**
> **2つの実数の和，差，積，商はまた実数である.**

練習 1.31　下の表は数の範囲と四則計算についてまとめたものである．表の空らんに○か×のうち適切なものを入れよ．また，×の場合は，結果がその範囲にない計算の例を1つあげよ．

数の範囲	**加法**	**減法**	**乗法**	**除法**
自然数	○	×		
整数	○	○		
有理数	○	○	○	○
実数	○	○	○	○

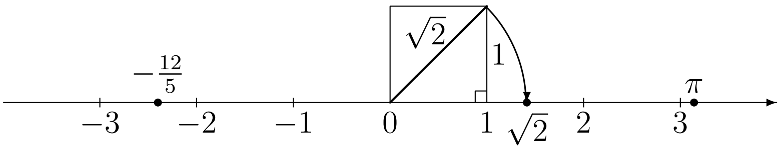
■表の説明■
○は計算がその範囲で常にできる場合
×は計算がその範囲で常にできるとは限らない場合

[4] 加法，減法，乗法，除法をまとめて**四則**という．ただし，除法において0で割ることは考えない．四則計算の結果を，それぞれ和，差，積，商という．

C 》 数直線と絶対値

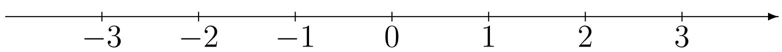
数直線上に基準となる点をとって数 0 を対応させ，その点の左右に目もりをつけた直線を，**数直線**という．点 O を**原点**という．

数直線上では，1 つの実数に 1 つの点が対応している．

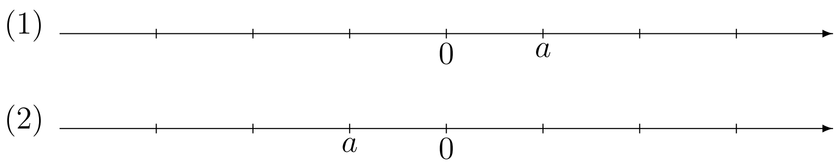


練習 1.32 次の実数に対応する点を数直線上にしるせ．

(1) 0.5 (2) $\dfrac{5}{2}$ (3) $-\dfrac{7}{4}$ (4) $-\sqrt{2}$

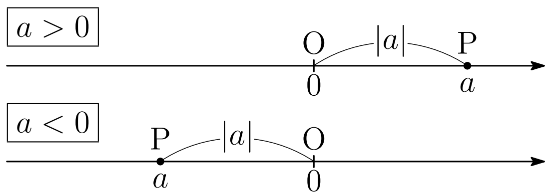


練習 1.33 実数 a に対応する点が次のように与えられているとき，$3a$，$-a$，$-2a$ に対応する点の位置を，それぞれ数直線上にしるせ．



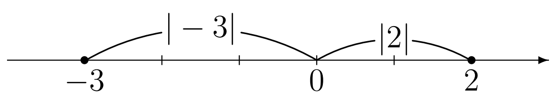
数直線上で，点 P に実数 a が対応しているとき，a を点 P の**座標**といい，座標が a である点 P を $\mathbf{P}(\boldsymbol{a})$ で表す．

数直線上の原点 O と点 P(a) の距離を実数 a の**絶対値**といい，記号 $|\boldsymbol{a}|$ で表す．0 の絶対値は $|0| = 0$ である．



例 1.16 2 の絶対値は $|2| = 2$

-3 の絶対値は $|-3| = 3$



練習 1.34 次の値を求めよ．

(1) $|3|$ (2) $|-4|$ (3) $\left|\dfrac{2}{3}\right|$ (4) $|2-8|$

1.2.2　根号を含む式の計算

ある数を2乗して a になるとき，その数を a の**平方根**という．すなわち，$x^2 = a$ となる x が a の平方根である．
2乗して負になる実数はないから，ここでは負でない数の平方根を考えよう[5]．

A》平方根

正の数 a の平方根は2つあり，それらは絶対値が等しく符号が異なる．その正の平方根を $\boldsymbol{\sqrt{a}}$ と書く．負の平方根は $-\sqrt{a}$ である．
0の平方根は0だけなので，$\sqrt{0} = 0$ である．$\sqrt{}$ を**根号**という．

例 1.17　(1) 3の平方根は $\sqrt{3}$ と $-\sqrt{3}$，すなわち $\pm\sqrt{3}$ である．

(2) $\sqrt{25}$ は25の正の平方根で，$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$ である．

補足　記号 $\pm$ を**複号**といい,「プラスマイナス」と読む.

練習 1.35　次の問いに答えよ．

(1) 6の平方根は何か.　　(2) $\sqrt{16}$, $\sqrt{\dfrac{9}{25}}$ の値を，それぞれ求めよ.

平方根の定義から，次のことがいえる．

平方根の性質

a が正の数のとき

1　$\boldsymbol{\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(-\sqrt{a}\right)^2 = a}$　　**2**　$\boldsymbol{\sqrt{a^2} = a}$

a が負の数のときは $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$ である．　$\leftarrow -a$ は正の数

練習 1.36　次の値を求めよ．

(1) $(\sqrt{3})^2$　　(2) $(-\sqrt{3})^2$　　(3) $\sqrt{(-5)^2}$

[5]負の数の平方根は，数学 II で扱っている．

B》根号を含む式の計算

平方根の積と商について，次のことが成り立つ．

> a, b が正の数のとき
>
> **1** $\boldsymbol{\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}}$　　　**2** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}}$

【1 の証明】 $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$

ここで，$\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$ であるから，$\sqrt{a}\sqrt{b}$ は ab の正の平方根である．

よって　$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ **［証終］**

2 についても，同様にして証明することができる．

例 1.18 (1) $\sqrt{3}\sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$

(2) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}} = \sqrt{5}$

(3) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2}\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{45}$

練習 1.37 次の計算をせよ．

(1) $\sqrt{2}\sqrt{3}$　(2) $\sqrt{2}\sqrt{5}$　(3) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$　(4) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

練習 1.38 次の数を $\sqrt{a}$ の形に表せ．

(1) $3\sqrt{2}$　(2) $4\sqrt{3}$　(3) $3\sqrt{3}$　(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

例 1.18(3) の計算を逆に行うと，次のようになる．

$$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{3^2}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

一般に，次のことが成り立つ．

a，k が正の数のとき　　$\boldsymbol{\sqrt{k^2a} = k\sqrt{a}}$

練習 1.39 次の数を $k\sqrt{a}$ の形に表せ．

(1) $\sqrt{8}$　　(2) $\sqrt{12}$　　(3) $\sqrt{50}$　　(4) $\sqrt{98}$

根号を含む式の加法，減法は，次のように行う．

例 1.19　(1) $6\sqrt{2} + \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (6 + 1 - 3)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

(2) $$\begin{aligned} 4\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{27} &= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\ &= (4 - 2 + 3)\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} (3\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (\sqrt{2} - 4\sqrt{3}) &= (3 - 1)\sqrt{2} + (1 + 4)\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{2} + 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

練習 1.40 次の計算をせよ．

(1) $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{3}$　　(2) $2\sqrt{2} - \sqrt{32} + \sqrt{72}$

(3) $(5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) - (2\sqrt{2} - \sqrt{3})$　　(4) $(2\sqrt{5} + 3\sqrt{6}) - (\sqrt{96} - \sqrt{45})$

乗法については，次のように行う．

例題 1.8 次の計算をせよ．

(1) $\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+4\sqrt{5}\right)$　　(2) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$

解答 (1)
$$\begin{aligned}&\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+4\sqrt{5}\right)\\=&2\sqrt{3}\sqrt{3}+2\sqrt{3}\times4\sqrt{5}-\sqrt{5}\sqrt{3}-\sqrt{5}\times4\sqrt{5}\\=&2\times3+8\sqrt{15}-\sqrt{15}-4\times5\\=&-14+7\sqrt{15}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)&=\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\\&=5-2=3\end{aligned}$$

練習 1.41 次の計算をせよ．

(1) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$　　(2) $\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

(3) $\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$　　(4) $\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}+3\sqrt{6}\right)$

(5) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$　　(6) $\left(2-\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$

C》分母の有理化

$\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ の分母と分子に $\sqrt{2}$ を掛けると，次のようになる．

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$\leftarrow \frac{b}{a}=\frac{bc}{ac}$

このように，分母に根号がある数を，分母に根号がない形にすることを，分母を**有理化**するという．

練習 1.42 次の数の分母を有理化せよ.

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　　(2) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$　　(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

分母が $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ または $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ の形の場合は，次のことを利用して，分母を有理化することができる.

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b$$

例題 1.9 次の数の分母を有理化せよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

解答 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$

$=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$

(2) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}$

$=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$　　$\leftarrow \frac{4+2\sqrt{3}}{2}=\frac{2(2+\sqrt{3})}{2}$

練習 1.43 次の数の分母を有理化せよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(3) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1}$

(4) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

1.2.3　補充問題

5 x の次の値に対して，$\sqrt{(x+1)^2}$ の値をそれぞれ求めよ．

(1) $x=3$　　(2) $x=-1$　　(3) $x=-3$

6 $x=\sqrt{3}+\sqrt{5}$，$y=\sqrt{3}-\sqrt{5}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x+y$　　(2) xy　　(3) x^2+y^2　　(4) x^3+y^3

► (3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$　　(4) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

7 $\sqrt{2}$ の値として 1.4142 を使うとき，$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ の値を求めよ．

8 次の計算をせよ．(3)〜(6) は分母を有理化せよ．

(1) $2\sqrt{27} - 3\sqrt{12} + \sqrt{54}$

(2) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)^2$

(3) $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

(4) $\dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

(5) $\dfrac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}}$

(6) $\dfrac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{6}\left(1 + \sqrt{3}\right)}$

1.3　方程式と不等式

1.3.1　1 次方程式と 1 次不等式

ある文字のとるべき値を決める条件を表した等式を，その文字についての**方程式**という．とくに，(x の 1 次式) $= 0$ の形に表される方程式を，x の **1 次方程式**という．ここでは，1 次方程式や，不等号を用いて数量の大小関係を表した式について学ぶことにしよう．

A 》 1 次方程式

x についての方程式を成り立たせる x の値を，その方程式の**解**という．また，方程式のすべての解を求めることを，方程式を**解く**という．

例 1.20　方程式 $3x - 5 = 10$ を解く．

移項すると　$3x = 10 + 5$

すなわち　$3x = 15$

両辺を 3 で割って　$x = 5$

$3x\mathbf{-5} = 10$

移項　　**符号が変わる**

$3x \quad = 10\mathbf{+5}$

x の 1 次方程式は，$ax = b$ の形に整理して解く．このとき，次に示す「等式の性質」を使う．移項は，性質 **1**，**2** を使った式の変形である．

等式の性質

1　$A = B$　ならば　$A + C = B + C$

2　$A = B$　ならば　$A - C = B - C$

3　$A = B$　ならば　$AC = BC$

4　$A = B$　ならば　$\dfrac{A}{C} = \dfrac{B}{C}$　(ただし　$C \neq 0$)

練習 1.44　次の 1 次方程式を解け．

(1)　$5x + 2 = 2x + 7$　　(2)　$4x + 5 = 6x - 1$

(3)　$0.5x - 2 = 0.2x + 4$　　(4)　$\dfrac{2}{3}x - 4 = \dfrac{1}{2}x - 3$

B》不等号と不等式

まず，不等号の種類と意味についてまとめておこう．

不等号	使い方の例	意　味
$<$	$x<2$	x は 2 より小さい
$>$	$x>0$	x は 0 より大きい
$\leqq$	$x \leqq 3$	x は 3 以下
$\geqq$	$x \geqq -1$	x は -1 以上

← $x>0$ は「x は正の数」，$x<0$ は「x は負の数」の意味でもある．

補足 $0<x<2$ の意味は「x は 0 より大きく，かつ 2 より小さい」である．

数量の間の大小関係を不等号を用いて表した式を**不等式**という．
不等式で使う文字が表す数は，断りがなければ実数の範囲で考えるものとする．

数量の大小関係を述べた事柄を不等式で表そう．

例 1.21 (1) ある数 x の 3 倍から 5 を引いた数は 10 より小さい．

このことを不等式で表すと　　$3x-5<10$

(2) 2 数 a，b の和は正で，かつ 5 以下である．

このことを不等式で表すと　　$0<a+b \leqq 5$

練習 1.45 次のことを不等式で表せ．

(1) ある数 x の 2 倍に 3 を足した数は 5 以上である．

(2) ある数 x を 3 で割って 1 を引くと 4 より小さい．

(3) 2 数 a，b の和は負で，かつ -2 より大きい．

C》不等式の性質

不等式でも等式の場合と同様に，左辺，右辺，両辺という用語を使う．

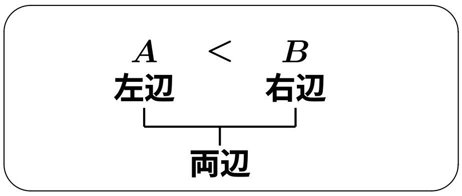
不等式の両辺に同じ数を足したり，掛けたりした場合，33ページで示した「等式の性質」と同じようなことが成り立つかどうかを調べてみよう．

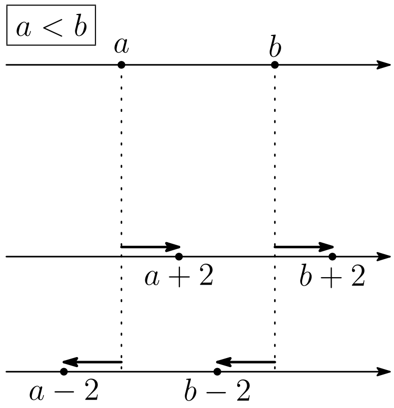
2つの実数 a，b の大小関係 $a<b$ は，数直線上の位置関係として，右の図のように表される．

実数を数直線上の点で表して考えると，次のことがいえる．

$a<b$ のとき

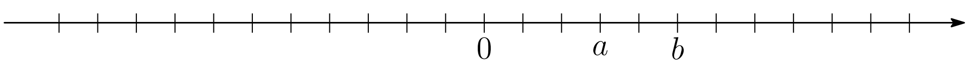
$$a+2<b+2$$
$$a-2<b-2$$



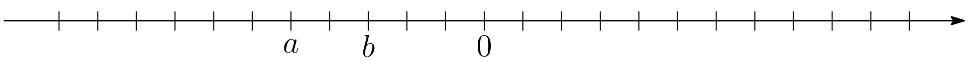


練習 1.46 $a<b$ のとき，$2a<2b$，$-2a>-2b$ が成り立つことを，下の数直線の図の各場合について確かめよ．

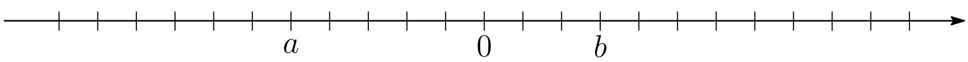
(1)



(2)



(3)



練習 1.47 $a<b$ のとき，次の $\boxed{}$ に適する不等号は何か．

(1) $3a\ \boxed{}\ 3b$　　(2) $-3a\ \boxed{}\ -3b$

(3) $\dfrac{a}{3}\ \boxed{}\ \dfrac{b}{3}$　　(4) $\dfrac{a}{-3}\ \boxed{}\ \dfrac{b}{-3}$

一般に，不等式には次の性質がある．

不等式の性質

1　$A < B$　ならば　$A + C < B + C$

2　$A < B$　ならば　$A - C < B - C$

3　$A < B$,　$C > 0$　ならば　$AC < BC$,　$\dfrac{A}{C} < \dfrac{B}{C}$

4　$A < B$,　$C < 0$　ならば　$AC > BC$,　$\dfrac{A}{C} > \dfrac{B}{C}$

「不等式の性質」の **1**〜**3** は,「等式の性質」の **1**〜**4** での等号 $=$ を不等号 $<$ にそのまま変えただけである．

しかし，**4** についてはそうではないので，注意しよう．

不等式では，
両辺に負の数を掛けたり，
両辺を負の数で割ったりすると，
両辺の大小関係が入れ替わる．

$A < B$　**−2** をかけると
$\downarrow$　不等号の向きが
$-\mathbf{2}A > -\mathbf{2}B$　変わる

例 1.22　(1)　$-1 < a$　ならば　$0 < a + 1$　←(1)　$-1 + 1 < a + 1$

(2)　$a \geqq 2$　ならば　$a - 2 \geqq 0$　←(2)　$a - 2 \geqq 2 - 2$

(3)　$\dfrac{1}{2}a \leqq 3$　ならば　$a \leqq 6$　←(3)　$2\cdot\dfrac{1}{2}a \leqq 2\cdot 3$

(4)　$-2a > 8$　ならば　$a < -4$　←(4)　$\dfrac{-2a}{-2} < \dfrac{8}{-2}$

練習 1.48　次の $\boxed{}$ に適する不等号 $<$ または $>$ を入れよ．

(1)　$2 < a$　ならば　$0\ \boxed{}\ a - 2$,　$2 - a\ \boxed{}\ 0$

(2)　$a > 0$　ならば　$-a\ \boxed{}\ 0$,　$2a\ \boxed{}\ 0$

(3)　$-2a \geqq 6$　ならば　$-a\ \boxed{}\ 3$,　$a\ \boxed{} -3$

D》不等式の解き方

x のとるべき値を決める条件を表した不等式を，x についての不等式といい，不等式を成り立たせる x の値を，その不等式の**解**という．

例 1.23　不等式 $3x-5<10$ の解

左辺の $3x-5$ の値を調べる．

$x=1$ のとき　　$3\cdot1-5=-2$

$x=6$ のとき　　$3\cdot6-5=13$

よって，$x=1$ は不等式 $3x-5<10$ の解である．
また，$x=6$ は解ではない．

x	$3x-5$	不等号	10
-1			10
1	-2	$<$	10
4			10
6	13	$>$	10
7			10

練習 1.49　次の値は，不等式 $3x-5<10$ の解であるかどうかを調べよ．

①　$x=-1$　　②　$x=4$　　③　$x=7$

不等式のすべての解を求めることを，その不等式を**解く**という．
例 1.23 の不等式 $3x-5<10$ を解くには,「不等式の性質」を使う．

例 1.24　不等式 $3x-5<10$ を解く．

$$3x-5+5<10+5 \qquad \longleftarrow \text{両辺に 5 をたす}$$

$$3x<15 \qquad \text{(左辺を } x \text{ だけの項にする)}$$

$$\frac{3x}{3}<\frac{15}{3} \qquad \longleftarrow \text{両辺を 3 で割る}$$

$$x<5 \qquad \text{(左辺の } x \text{ の係数を 1 にする)}$$

注意　上で求めた x の値の範囲 $x<5$ を，この不等式の**解**ということがある．

「不等式の性質」の **1** と **2** が成り立つから，不等式でも方程式の場合と同じように**移項**による式の変形ができる．

$3x\mathbf{-5}<10$
移項　**符号が変わる**
$3x\quad<10\mathbf{+5}$

不等式の項を移項して，(x の 1 次式) >0，(x の 1 次式) $\leqq 0$ などのような形に表される不等式を，x の **1 次不等式**という．

1 次不等式の解き方

不等式を $ax>b$，$ax\leqq b$ などの形に整理する．
整理された不等式の両辺を x の係数 a で割る．

例題 1.10 次の1次不等式を解け.

$$2x-7 \leqq 5x-1$$

解答 移項すると $2x-5x \leqq -1+7$

整理すると $-3x \leqq 6$

両辺を -3 で割って $x \geqq -2$

練習 1.50 次の1次不等式を解け.

(1) $5x-2<2x+4$

(2) $6x-3 \geqq 8x+7$

(3) $2(4x-1)>5x-11$

(4) $3(3-2x) \leqq 4-3x$

例題 1.11 次の1次不等式を解け.

$$\frac{4}{3}x+1 \geqq \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$$

解答 両辺に6を掛けると $6\left(\frac{4}{3}x+1\right) \geqq 6\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)$ ← 分母をはらうために2と3の最小公倍数6を掛ける

すなわち $8x+6 \geqq 3x-2$

移項して整理すると $5x \geqq -8$

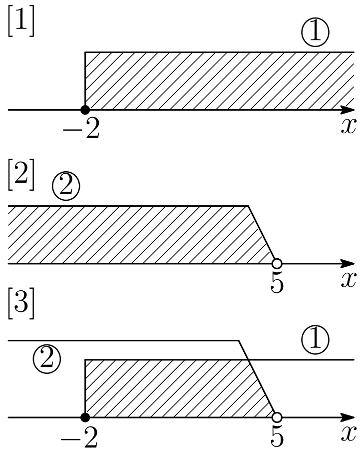
よって $x \geqq -\frac{8}{5}$

練習 1.51 次の1次不等式を解け.

(1) $\frac{1}{2}x-1 \leqq \frac{2}{7}x+\frac{1}{2}$

(2) $\frac{1}{3}x+2<\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

E》連立不等式



　　不等式　$x \geqq -2$　　　　　　$\cdots$ ①

で表される x の値の範囲を，数直線を使って図 [1] のように図示する．

　　不等式　$x < 5$　　　　　　$\cdots$ ②

で表される x の値の範囲は，図 [2] のように図示する．

　さらに ① と ② の共通範囲を，図 [3] のように図示し，$-2 \leqq x < 5$ と表す．

補足 図中の黒丸 ● はその数が範囲に含まれること，白丸 ∘ はその数が範囲に含まれないことを意味する．

　いくつかの不等式を組み合わせたものを**連立不等式**といい，それらの不等式の解に共通する範囲を，この連立不等式の**解**という．また，連立不等式の解を求めることを，連立不等式を**解く**という．

例題 1.12 次の連立不等式を解け．

$$\begin{cases} 5x+3 > 3x+1 \\ -x+4 \geqq 2(x-1) \end{cases}$$

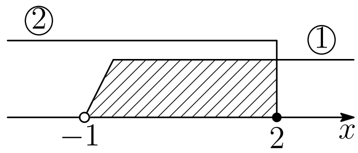
解答 $5x+3 > 3x+1$ から　$2x > -2$

　よって　$x > -1$　　　　　　$\cdots$ ①

　$-x+4 \geqq 2(x-1)$ から　$-3x \geqq -6$

　よって　$x \leqq 2$　　　　　　$\cdots$ ②

　① と ② の共通部分を求めて　$-1 < x \leqq 2$



練習 1.52 次の連立不等式を解け．

(1) $\begin{cases} 6x-9 < 2x-1 \\ 3x+7 \leqq 4(2x+3) \end{cases}$　　　(2) $\begin{cases} 3x+1 \geqq 7x-5 \\ -x+6 \geqq 3(1-2x) \end{cases}$

例題 1.13 次の不等式を解け.

(1) $-1 \leqq 2x-3 \leqq 8$　　　(2) $0 < x < 10-x$

解答 (1) 各辺に 3 を足して　$-1+3 \leqq 2x \leqq 8+3$

すなわち　$2 \leqq 2x \leqq 11$

各辺を 2 で割って　$1 \leqq x \leqq \dfrac{11}{2}$

(2) $\begin{cases} 0 < x & \cdots \text{①} \\ x < 10-x & \cdots \text{②} \end{cases}$

② から　$2x < 10$

よって　$x < 5$　$\cdots$ ③

① と ③ の共通範囲を求めて　$0 < x < 5$

補足 $A < B < C$ は, $A < B$ と $B < C$ が同時に成り立つことと同じである.

練習 1.53 次の不等式を解け.

(1) $-2 < 3x+1 < 5$

(2) $1 \leqq x \leqq 15-2x$

F 》1 次不等式の応用

応用例題 1.4 次の不等式を満たす最小の自然数 n を求めよ.

$$200 + 12(n - 10) \leqq 15n$$

考え方》 ふつうに不等式を解いて，n が自然数であることに注意して範囲を決める.

解答 不等式を変形すると $-3n \leqq -80$

よって $n \geqq \dfrac{80}{3}$

$\dfrac{80}{3} = 26.6\cdots$ で，n は自然数であるから $n \geqq 27$

したがって，最小の自然数 n は $n = 27$

練習 1.54 次の不等式を満たす最小の自然数 n を求めよ.

$$600 + 25(n - 20) \leqq 32n$$

練習 1.55 次の不等式を満たす最大の自然数 n を求めよ.

$$4 + \frac{1}{5}(n - 4) > \frac{1}{2}n$$

応用例題 1.5 1個60円の品物Aと1個100円の品物Bを合わせて50個買うことにした．また，品物を入れるための紙袋は，50枚100円である．紙袋代と合わせた予算が4000円以下で，品物Bをできるだけ多く買うとき，品物Bは最大何個買えるか．

考え方》 品物Bをx個買うとして，条件から不等式を作る．
xは自然数であることに注意する．

解答 品物Bをx個買うとすると，品物Aは$(50-x)$個買うことになる．
条件から

$$60(50-x)+100x+100 \leqq 4000$$

整理すると　$40x \leqq 900$

よって　$x \leqq \dfrac{900}{40} = 22.5$

xは自然数であるから　$x \leqq 22$　　(答)　22個

練習 1.56 1個120円の洋菓子と1個80円の和菓子を合わせて30個買い，100円の箱に詰めてもらう．箱代と合わせた予算が3000円以下で，洋菓子をできるだけ多く買うとき，洋菓子は最大何個買えるか．

1.3.2　絶対値と方程式・不等式

絶対値については 25 ページで学んだが，ここではさらに絶対値と平方根の関係や，絶対値を含む方程式，不等式について考えよう．

A 》絶対値と平方根

実数 a の絶対値 $|a|$ は，その定義より，次のようになる．

絶対値 $|\,\boldsymbol{a}\,|$ の意味

$a \geqq 0$ のとき $\boldsymbol{|\,a\,| = a}$,　　$a < 0$ のとき $\boldsymbol{|\,a\,| = -a}$

例 1.25　(1) $|\,2-\sqrt{2}\,| = 2-\sqrt{2}$　　$\longleftarrow$ $2-\sqrt{2}>0$

$|\,1-\sqrt{2}\,| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2}$　　$1-\sqrt{2}<0$

(2) $|x-2|$ の絶対値記号をはずす．

$$x-2 \geqq 0 \text{ のとき} \quad |\,x-2\,| = x-2$$
$$x-2 < 0 \text{ のとき} \quad |\,x-2\,| = -(x-2) = -x+2$$

よって　$x \geqq 2$ のとき　$|\,x-2\,| = x-2$

$x < 2$ のとき　$|\,x-2\,| = -x+2$

練習 1.57 例 1.25(2) にならって，次の式の絶対値記号をはずせ．

(1) $|\,x-3\,|$

(2) $|\,x+2\,|$

(3) $|\,2x-3\,|$

平方根の定義により

$$a \geqq 0 \text{ のとき } \sqrt{a^2} = a, \qquad a < 0 \text{ のとき } \sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$$

となるから，次のことがいえる．

平方根と絶対値

実数 a について　　$\boldsymbol{\sqrt{a^2} = |\,a\,|}$

例 1.26 平方根を絶対値記号を用いて表す．

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |\,x-2\,|$$

練習 1.58 次の式を絶対値記号を用いて表せ．

(1) $\sqrt{(x+3)^2}$

(2) $\sqrt{x^2 - 10x + 25}$

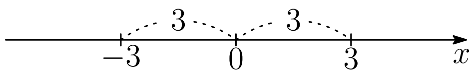
(3) $\sqrt{4x^2 + 4x + 1}$

B ≫ 絶対値を含む方程式，不等式

次に，絶対値を含む方程式，不等式を解くことを考えよう．

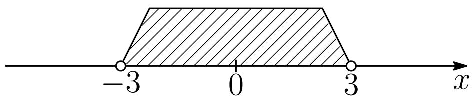
例 1.27 (1) 方程式 $|\,x\,| = 3$ の解は

$$x = \pm 3$$



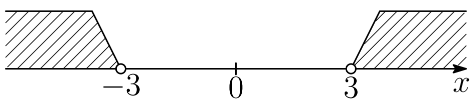
(2) 不等式 $|\,x\,| < 3$ の解は

右の図より　$-3 < x < 3$



(3) 不等式 $|\,x\,| > 3$ の解は

右の図より　$x < -3$ と $3 < x$



注意 (1) 解は $x = 3$ と $x = -3$ で，これを合わせて $x = \pm 3$ と書く．

(3) 解は $x < -3$ と $x > 3$ で，これを合わせて $x < 3$，$3 < x$ と書く．

$c > 0$ のとき，一般に次のことがいえる．

方程式 $|x| = c$ の解は　$x = \pm c$
不等式 $|x| < c$ の解は　$-c < x < c$
不等式 $|x| > c$ の解は　$x < -c$，$c < x$

練習 1.59 次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x| = 2$　　(2) $|x| < 2$

(3) $|x| > 4$　　(4) $|x| \leqq 4$

例題 1.14 次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x-2| = 3$　　(2) $|x-2| < 3$　　(3) $|x-2| > 3$

解答
(1) $x - 2 = \pm 3$ から　$x = 5$，-1
(2) $-3 < x - 2 < 3$ から　$-1 < x < 5$
(3) $x - 2 < -3$，$3 < x - 2$ から　$x < -1$，$5 < x$

注意 (1) 解は $x = 5$ と $x = -1$ で，これを合わせて，$x = 5$，-1 と書く．

練習 1.60 次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x-4| = 2$　　(2) $|x+1| = 3$

(3) $|x-4| < 2$　　(4) $|x+1| \leqq 3$

(5) $|x-3| > 5$　　(6) $|x+2| \geqq 1$

研究

やや複雑な方程式

次の方程式を解いてみよう.

$$|x|+|x-4|=6 \qquad \cdots ①$$

x の値の範囲で場合分けをして，絶対値記号をはずす.

[1] $x<0$ のとき，① は　　$-x-(x-4)=6$　　$\leftarrow x<0,\ x-4<0$

これを解くと　　$x=-1$

これは，$x<0$ を満たすから，解である.

[2] $0 \leqq x<4$ のとき，① は　　$x-(x-4)=6$　　$\leftarrow x \geqq 0,\ x-4<0$

この方程式の解はない.

[3] $4 \leqq x$ のとき，① は　　$x+(x-4)=6$　　$\leftarrow x>0,\ x-4 \geqq 0$

これを解くと　　$x=5$

これは，$4 \leqq x$ を満たすから，解である.

以上から，① の解は　　$x=-1,\ 5$

1.3.3　2 次方程式

たとえば，$2x^2+3x+1=0$ のように，$ax^2+bx+c=0$ の形に表される方程式を，x の **2 次方程式** という．ただし，$a \neq 0$ とする．
2 次方程式の解き方を調べよう．

A》因数分解を使う解き方

まず，因数分解を使って解く方法を調べる．

例 1.28　2 次方程式 $\boldsymbol{x^2-2x-3=0}$ を解く．

左辺を因数分解すると

$$(x+1)(x-3)=0$$

よって　　$x+1=0$　または　$x-3=0$
したがって，解は　$x=-1,\ 3$

この解き方では，次の「数の積の性質」を使っている．

数の積の性質

$\boldsymbol{AB=0}$　**ならば**　　$\boldsymbol{A=0}$　**または**　$\boldsymbol{B=0}$

例題 1.15　次の 2 次方程式を解け.

$$2x^2+x-6=0$$

解答　左辺を因数分解すると

$$(x+2)(2x-3)=0$$

よって　　$x+2=0$　または　$2x-3=0$
したがって，解は　$x=-2,\ \dfrac{3}{2}$

練習 1.61　次の 2 次方程式を解け.

(1)　$x(x+4)=0$　　(2)　$x^2-5x+6=0$

(3)　$2x^2+3x+1=0$　　(4)　$3x^2-4x-4=0$

(5) $2x^2+5x-3=0$　　(6) $4x^2-9x+2=0$

B 》平方根の考えを使う解き方

平方根の定義から，次のことがいえる．

$a>0$ のとき，$x^2=a$ の解は　$\boldsymbol{x=\pm\sqrt{a}}$

注意 $x^2=0$ の解は，$x=0$ である．

上のことを使って，2次方程式を解いてみよう．

例 1.29 (1) $x^2=3$ の解は　$x=\pm\sqrt{3}$

(2) $4x^2=3$ の解は，$x^2=\dfrac{3}{4}$ から

$$x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\leftarrow \sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $(x+2)^2=3$ の解は，$x+2=\pm\sqrt{3}$ から

$$x=-2\pm\sqrt{3}$$

(4) $(2x+1)^2=0$ の解は，$2x+1=0$ から

$$x=-\frac{1}{2}$$

練習 1.62 次の2次方程式を解け．

(1) $x^2=5$　　(2) $2x^2=5$

(3) $(x-1)^2=8$　　(4) $(2x+3)^2=0$

C 》 解の公式

2次方程式を $(x+m)^2=a$ の形に変形すると，平方根の考えを使って解くことができる．この変形には，次のことを用いる．

$$x^2+\blacksquare x+\left(\frac{\blacksquare}{2}\right)^2=\left(x+\frac{\blacksquare}{2}\right)^2$$

例 1.30 $\boldsymbol{x^2+6x+7=0}$ を解く．

$$x^2+6x=\underline{-7} \qquad \longleftarrow \text{定数項を右辺に移項する．}$$

$$x^2+6x+\underline{\left(\frac{6}{2}\right)^2}=\underline{\left(\frac{6}{2}\right)^2}-7 \qquad \longleftarrow x\text{ の係数 }6\text{ の半分 }\frac{6}{2}\text{ の }2\text{ 乗を両辺に足す．}$$

$$\underline{(x+3)^2}=2 \qquad \longleftarrow \text{左辺は }\left(x+\frac{6}{2}\right)^2\text{ すなわち }(x+3)^2\text{ になる．}$$

$$x+3=\pm\sqrt{2}$$

$$x=-3\pm\sqrt{2}$$

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を，係数 a，b，c で表してみよう．

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad \longleftarrow \text{両辺を }0\text{ でない }a\text{ で割る．}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \qquad \longleftarrow \text{定数項を右辺に移項する．}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a} \qquad \longleftarrow \frac{b}{2a}\text{ の }2\text{ 乗を両辺に足す．}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad \longleftarrow \left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4a\cdot c}{4a\cdot a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$b^2-4ac>0$ のとき

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

前ページで得られた結果から，$b^2-4ac=0$ のときも含めて考えると，次の**解の公式**が得られる．

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は，$b^2-4ac \geqq 0$ のとき解をもち，

その解は $$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

補足 負の数の平方根は実数の範囲には存在しないから，$b^2-4ac<0$ のとき，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は実数の解をもたない．

例題 1.16 次の 2 次方程式を解け．

(1) $x^2+5x+3=0$　　(2) $2x^2-6x-3=0$

解答 (1) $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}$　$\longleftarrow a=1,\ b=5,\ c=3$

$=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

(2) $x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}$　$\longleftarrow a=2,\ b=-6,\ c=-3$

$=\dfrac{6\pm\sqrt{60}}{4}=\dfrac{6\pm2\sqrt{15}}{4}$　$\longleftarrow \dfrac{6\pm2\sqrt{15}}{4}=\dfrac{2(3\pm\sqrt{15})}{4}$

$=\dfrac{3\pm\sqrt{15}}{2}$

練習 1.63 次の 2 次方程式を解け．

(1) $x^2+7x+4=0$　　(2) $x^2-5x+2=0$

(3) $3x^2 + 5x - 1 = 0$　　(4) $2x^2 - 3x - 3 = 0$

練習 1.64 次の 2 次方程式を解け.

(1) $x^2 + 6x + 3 = 0$　　(2) $x^2 + 2x - 2 = 0$

(3) $2x^2 - 4x + 1 = 0$　　(4) $3x^2 - 8x - 3 = 0$

応用例題 1.6 x の2次方程式 $2x^2+mx-m^2=0$ が1を解にもつとき，定数 m の値を求めよ．

考え方》 1が解のとき，$x=1$ を方程式の左辺に代入した等式
$2\cdot1^2+m\cdot1-m^2=0$ が成り立つ．

解答 この方程式が $x=1$ を解にもつから，次の等式が成り立つ．

$$2\cdot1^2+m\cdot1-m^2=0$$

すなわち $$m^2-m-2=0 \qquad \leftarrow (m-2)(m+1)=0$$

これを解いて $$m=2,\,-1$$

練習 1.65 x の2次方程式 $2x^2+mx-3m^2=0$ が -1 を解にもつとき，定数 m の値を求めよ．

D》2次方程式の係数と実数解

方程式における実数の解を，単に**実数解**という．

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解とその個数について，$D=b^2-4ac$ とすると，D の符号によって次のように分類される．

なお，$D=b^2-4ac=0$ のときは，2つの解が重なったものと考えて，この解を**重解**という．

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解と $D=b^2-4ac$ の符号

$D=b^2-4ac$ の符号	$D=b^2-4ac>0$	$D=b^2-4ac=0$	$D=b^2-4ac<0$
実数解	$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (異なる2つの解)	$-\dfrac{b}{2a}$ (重解)	ない
実数解の個数	2個	1個	0個

例 1.31　2 次方程式の実数解の個数

(1) 2 次方程式 $x^2+7x+9=0$ の実数解の個数は

$$D=7^2-4{\cdot}1{\cdot}9=13>0 \qquad \longleftarrow D=b^2-4ac>0$$

であるから　2 個

(2) 2 次方程式 $4x^2-12x+9=0$ の実数解の個数は

$$D=(-12)^2-4{\cdot}4{\cdot}9=0 \qquad \longleftarrow D=b^2-4ac=0$$

であるから　1 個

練習 1.66 次の 2 次方程式の実数解の個数を求めよ.

(1) $x^2+3x-5=0$　　(2) $3x^2-5x+4=0$　　(3) $x^2-x+\dfrac{1}{4}=0$

例題 1.17 x の 2 次方程式 $x^2-2x+m=0$ について，次の問いに答えよ.

(1) 重解をもつとき，定数 m の値を求めよ.

(2) 異なる 2 つの実数の解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ.

解答　2 次方程式 $x^2-2x+m=0$ の係数について

$$D=(-2)^2-4{\cdot}1{\cdot}m=4-4m$$

とする.

(1) 重解をもつための条件は，$D=0$ が成り立つことであるから

$$4-4m=0$$

これを解いて　$m=1$

(2) 異なる 2 つの実数解をもつための条件は，$D>0$ が成り立つことであるから

$$4-4m>0$$

これを解いて　$m<1$

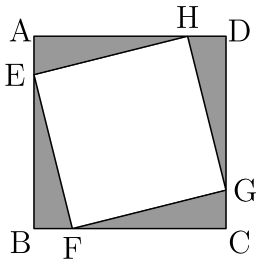
練習 1.67 x の2次方程式 $x^2-4x+m=0$ について，次の問いに答えよ．

(1) 重解をもつとき，定数 m の値を求めよ．

(2) 実数解をもたないとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

E》2次方程式の応用

応用例題 1.7 1辺が 10cm の正方形 ABCD に，面積が 64cm^2 の正方形EFGHを右の図のように内接させる．ただし，AE < AH とする．線分 AH の長さを求めよ．



考え方》 図で色のついた4つの直角三角形は合同である．
AH$= x$ (cm) とすると

$$\text{AE} = \text{HD} = 10 - x \text{ (cm)}$$

AE < AH によって決まる x の値の範囲に注意する．

解答 AH$= x$ (cm) とすると，AE=HD$= 10-x$ (cm) である．
AE < AH より $0 < 10-x < x$ であるから

$$5 < x < 10 \quad \cdots①$$

面積の関係を式に表すと

$$\frac{1}{2}x(10-x)\times 4 + 64 = 10^2$$

展開して整理すると　$2x^2-20x+36=0$

すなわち　$x^2-10x+18=0$

これを解くと　$x = 5\pm\sqrt{7}$

このうち，① を満たすものは $x=5+\sqrt{7}$ である．

したがって　$x=5+\sqrt{7}$　　(答) $(5+\sqrt{7})$ cm

補足 適さない解 $x=5-\sqrt{7}$ は線分 AE の長さである．

練習 1.68 長さ 8cm の線分を大小 2 つに分けて，それぞれの長さを 1 辺とする正方形を作る．2 つの正方形の面積の和が 46cm^2 であるとき，大きい正方形の 1 辺の長さは何 cm か．

1.3.4 補充問題

9 次の不等式を解け.

(1) $\begin{cases} 2x+6>5x-12 \\ 3x-7 \leqq 2(4-x) \end{cases}$ (2) $0.05 \leqq 0.2-\dfrac{x}{100} \leqq 0.1$

10 次の方程式，不等式を解け.

(1) $|\,2x-1\,|=3$ (2) $|\,2x-1\,|<3$

11 次の2次方程式を解け.

(1) $3x^2-2x-8=0$ (2) $4x^2+5x-6=0$

(3) $4x^2+4x+1=0$

(4) $2a^2-6a+3=0$

(5) $2(x-1)^2=3+4x$

(6) $x^2+2\sqrt{2}\,x+2=0$

12 2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ は，$b'^2-ac \geqq 0$ のとき，次の解をもつことを示せ．また，このことを使って，2 次方程式 $2x^2+6x-1=0$ を解け．

$$x=\frac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

1.4　章末問題

1.4.1　章末問題 A

1 次の計算をせよ.

(1) $(x+y)^3-3xy(x+y)$　　(2) $n^3-(n-1)^3$

2 次の式を展開し，x について降べきの順に整理せよ.

(1) $(x^3+4-3x)(1-2x)$　　(2) $(x-a)(x-b)(x-c)$

(3) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$　　(4) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

3 次の式を因数分解せよ．

(1) $6x^2+(3a-2b)x-ab$ (2) $3x^2+ax-2a^2+4x-a+1$

4 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{8}}+\dfrac{1}{\sqrt{32}}$ (2) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

5 次の不等式を成り立たせる正の整数 n をすべて求めよ．

$$\frac{1}{2}(n+3)+\frac{1}{6}>\frac{1}{3}(4n-1)$$

6 4km の道のりを，歩くか走っていくことにした．ただし，歩くときの速さは分速 80m で，走るときは分速 200m である．目的地に着くまでにかかる時間を 32 分以上 35 分以下にしたいとき，歩く距離を何 m 以上何 m 以下にすればよいか．

7 次の方程式，不等式を解け．

(1) $|\,3x-2\,|=4$　　(2) $|\,2x+5\,|>2$

8 次の 2 次方程式を解け．

(1) $2(x+1)^2=4-5(x+1)$　　(2) $0.3x^2-1.2x+1=0$

1.4.2 章末問題 B

9 次の式を展開せよ.

(1) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

(2) $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

10 次の式を因数分解せよ.

(1) $2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1)$

(2) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

11 $\sqrt{5}$ の整数の部分を a，小数の部分を b とする．

(1) a と b を求めよ．

(2) $\dfrac{a}{b}$ の整数の部分を求めよ．

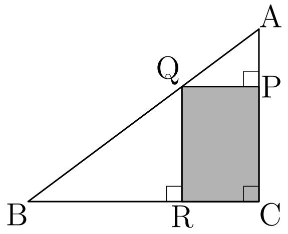
12 $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とするとき，$x^2 - x$ と $x^3 + x^2$ の値を，それぞれ求めよ．

13 定価が 1 個 100 円の商品がある．この商品を，A 店では定価の 12%引きで売っている．また，B 店では 10 個までは定価であるが，11 個以上は 1 個につき定価の 25%引きで売っている．この商品を A 店で買うより B 店で買った方が安くなるのは，何個以上買うときか．

14 次の式の根号をはずし，x の多項式で表せ．

$$\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-4x+4}$$

15 右の図のような AB$=5$，BC$=4$，CA$=3$ である直角三角形 ABC がある．この三角形に面積が $\dfrac{8}{3}$ である長方形 PQRC が内接しているとき，長方形の短い辺の長さを求めよ．



ヒント

11 $0<b<1$ で，a は整数である．
14 44 ページ例 1.26，43 ページ例 1.25(2) 参照．
15 PQ$=x$ とすると，AP$=\dfrac{3}{4}x$ と表される．

発展　4 次式の因数分解

これまでは 2 次式，3 次式を因数分解してきたが，ここでは 4 次式の因数分解を考えてみよう．4 次式でも，文字をおき換えると因数分解の公式を利用できるものがある．

例 1　$x^4 - 3x^2 - 4$ の因数分解

$x^4 = (x^2)^2$ であるから，$x^2 = A$ とおくと

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 - 4 &= A^2 - 3A - 4 \\ &= (A+1)(A-4) \end{aligned}$$

のように因数分解できる．

このことから，次のようになる．

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 - 4 &= (x^2+1)(x^2-4) \\ &= (x^2+1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

例 2　$(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$ の因数分解

$x^2 - x = A$ とおくと

$$\begin{aligned} (x^2-x)^2 - 8(x^2-x) + 12 &= A^2 - 8A + 12 \\ &= (A-2)(A-6) \end{aligned}$$

のように因数分解できる．

このことから，次のようになる．

$$\begin{aligned} (x^2-x)^2 - 8(x^2-x) + 12 &= \{(x^2-x)-2\}\{(x^2-x)-6\} \\ &= (x^2-x-2)(x^2-x-6) \\ &= (x+1)(x-2)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

練習　次の式を因数分解せよ．

(1)　$x^4 - 8x^2 - 9$　　　(2)　$(x^2+x)^2 - (x^2+x) - 2$

【解】　(1)　$$\begin{aligned} x^4 - 8x^2 - 9 &= (x^2+1)(x^2-9) \\ &= (x^2+1)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

(2)　$$\begin{aligned} (x^2+x)^2 - (x^2+x) - 2 &= \{(x^2+x)+1\}\{(x^2+x)-2\} \\ &= (x^2+x+1)(x^2+x-2) \\ &= (x^2+x+1)(x-1)(x+2) \end{aligned}$$

発展　2重根号

根号を2重に含む式について考えてみよう．

たとえば，$\sqrt{3}+\sqrt{2}>0$，$\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$ であるから

$$\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2},\quad \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

である．ここで

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2=(3+2)+2\sqrt{3\cdot 2}$$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{3}\sqrt{2}+2=(3+2)-2\sqrt{3\cdot 2}$$

であるから，次のことが成り立つ．

$$\sqrt{(3+2)+2\sqrt{3\cdot 2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{(3+2)-2\sqrt{3\cdot 2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

一般に，次のことが成り立つ．ただし，$a>0$，$b>0$ とする．

2重根号

$$\boldsymbol{\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$a>b$ のとき　$$\boldsymbol{\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

例1　(1) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\cdot 3}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7-2\sqrt{2^2\cdot 3}}=\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4\cdot 3}}$
$=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{4+\sqrt{15}}=\sqrt{\dfrac{8+2\sqrt{15}}{2}}=\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$

練習 次の2重根号をはずせ．

(1)　$\sqrt{7+2\sqrt{10}}$　　(2)　$\sqrt{12-6\sqrt{3}}$　　(3)　$\sqrt{2+\sqrt{3}}$

【解】 (1) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{(5+2)+2\sqrt{5\cdot 2}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{12-2\sqrt{3^2\cdot 3}}=\sqrt{12-2\sqrt{27}}=\sqrt{9}-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

第 2 章　2次関数

2.1　2次関数とグラフ

2.1.1　関数とグラフ

自然現象や社会現象の中には，2 つの量が互いに関連しながら変化するような現象が多くある．変化する量 x，y について，y が x の 1 次式や 2 次式で表される場合を調べてみよう．

A ≫ 関数

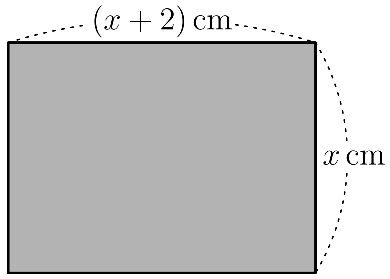
2 つの変数 x，y について，x の値を決めるとそれに応じて y の値がただ 1 つ定まるとき，y は x の**関数**であるという．また，その変数 x のとりうる値の範囲を，その関数の**定義域**という．

例 2.1 関数の式と定義域

横が縦より 2cm 長い長方形を作る．ただし，縦の長さは 5cm 以上 10cm 以下とする．このような長方形の縦の長さを x cm，面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とすると，$y = x(x+2)$ である．
すなわち

$$y = x^2 + 2x$$

であり，y は x の関数である．
定義域は，$5 \leqq x \leqq 10$ である．



関数の定義域を示すのに，関数の式の後にかっこをつけて示すことがある．たとえば，例 2.1 の関数は，次のように書く．

$$y = x^2 + 2x \quad (5 \leqq x \leqq 10)$$

⟵ 関数では定義域も示す．

練習 2.1 気温は地上から10kmまでは，1km高くなるごとに6℃ずつ下がるという．地上の気温が30℃のとき，地上から高さx kmの地点の気温をy℃とすると，yはxの関数である．yをxの式で表せ．

yがxの1次式で表されるとき，yはxの**1次関数**であるといい，yがxの2次式で表されるとき，yはxの**2次関数**であるという．

たとえば，$y = 2x + 1$ はxの1次関数であり，$y = 2x^2 + 4x + 5$ はxの2次関数である．

1次関数，2次関数の一般形

1次関数は	$y = ax + b$	ただし，$a \neq 0$
2次関数は	$y = ax^2 + bx + c$	ただし，$a \neq 0$

注意 定義域が実数全体であるとき，定義域を示すことを省略することがある．

yがxの関数であるとき，yを表すxの式を $\boldsymbol{f(x)}$ や $\boldsymbol{g(x)}$ のように書くことがある．$y = f(x)$ は，$f(x)$がxの1次式のときxの1次関数であり，$f(x)$がxの2次式のときxの2次関数である．

xの関数 $y = f(x)$ を単に，**関数 $\boldsymbol{f(x)}$** ともいう．$x = a$ のときの関数 $f(x)$ の値を $\boldsymbol{f(a)}$ で表す．

例 2.2 2次関数 $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x}$ において，$\boldsymbol{x = 5}$ のときの値を求める．

$f(x)$ の式のxに5を代入して

$$f(5) = 5^2 + 2{\cdot}5 = 25 + 10 = 35$$

練習 2.2 2次関数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ において，次の値を求めよ．

(1) $f(3)$　　(2) $f(0)$　　(3) $f(-1)$

(4) $f(-2)$　　(5) $f(a)$　　(6) $f(a+1)$

例題 2.1　1 次関数 $f(x) = ax + b$ について $f(1) = 3$，$f(4) = 9$ が成り立つとき，定数 a，b の値を求めよ．

解答　$f(1) = 3$ から　$a + b = 3$　$\cdots$①
$f(4) = 9$ から　$4a + b = 9$　$\cdots$②
①，② を解いて　$a = 2$，$b = 1$

練習 2.3　1 次関数 $f(x) = ax + b$ が次の条件を満たすとき，定数 a，b の値を求めよ．

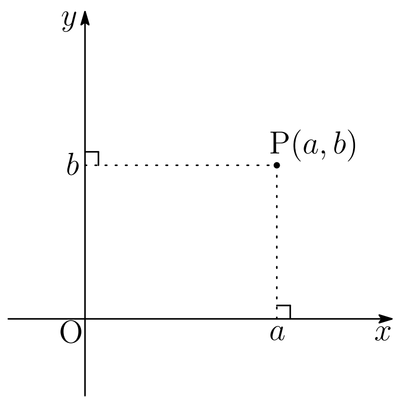
(1)　$f(2) = 8$，$f(-1) = -4$

(2)　$f(0) = 2$，$f(3) = -7$

B 》 関数のグラフ

平面上に，右の図のような点 O で垂直に交わる 2 本の数直線をとり，それらを x 軸と y 軸とする．点 O を**原点**といい，x 軸と y 軸を**座標軸**という．

この平面上の点 P の位置は，図のように 2 つの実数の組 (a, b) で表される．この組 (a, b) を点 P の**座標**といい，このような点 P を $\mathbf{P}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と書く．また，座標が (a, b) である点を，単に**点** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ということがある．

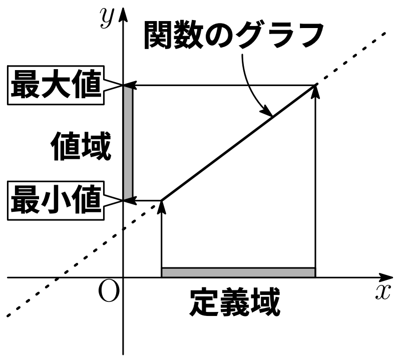


このようにして座標を定めた平面を**座標平面**という．

関数 $y = f(x)$ を座標平面上の図形として表したものがグラフである．
1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは，傾きが a，切片が b の直線である．
1 次関数 $y = ax + b$ のグラフを，**直線** $\boldsymbol{y = ax + b}$ ということもある．

　一般に，関数 $y = f(x)$ の**グラフ**とは，変数 x が定義域にあるような点 $(x, f(x))$ 全体のことである．また，関数の定義域の x の値に対応して y がとる値の範囲を，この関数の**値域**という．

　関数の値域に最大の値があるとき，その値を関数の**最大値**という．また，最小の値があるとき，その値を関数の**最小値**という．



例題 2.2 関数 $y = 2x + 1$ $(1 \leqq x \leqq 3)$ について，次の問いに答えよ．

(1) グラフをかけ．　　(2) 値域を求めよ．

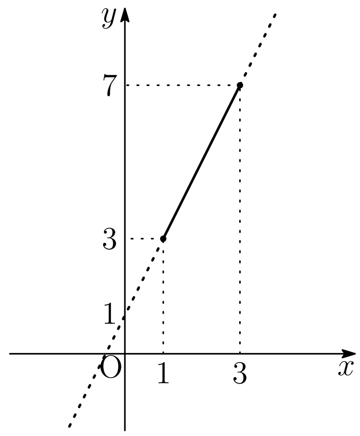
(3) 関数の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ．

解答 (1) この関数のグラフは，$y = 2x + 1$ のグラフのうち，$1 \leqq x \leqq 3$ に対応する部分である．

$x = 1$ のとき　　$y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$x = 3$ のとき　　$y = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

よって，グラフは右の図の実線部分である．



(2) 値域は　　$3 \leqq y \leqq 7$

(3) $x = 3$ で最大値 7 をとり，

$x = 1$ で最小値 3 をとる．

補足 関数のグラフをかく場合，定義域内は実線でかくが，定義域外は破線でかくことが多い．

練習 2.4 次の関数のグラフをかけ．また，関数の値域を求めよ．

(1) $y = 3x - 2$　$(0 \leqq x \leqq 3)$

(2) $y = -2x + 4 \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$

練習 2.5 次の関数の値域を求めよ．また，関数の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ．

(1) $y = 2x - 1 \quad (-1 \leqq x \leqq 2)$

(2) $y = -3x + 5 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$

C》いろいろな関数

次のような関数もある．

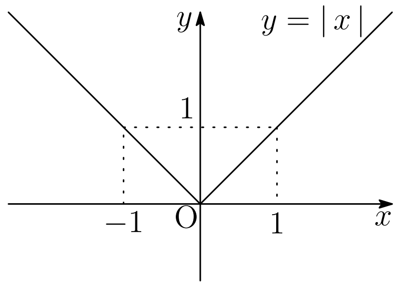
例 2.3 関数 $y = |x|$

絶対値記号をはずすと

$x \geqq 0$ のとき　$y = x$

$x < 0$ のとき　$y = -x$

そのグラフは，右の図のような折れ線になる．



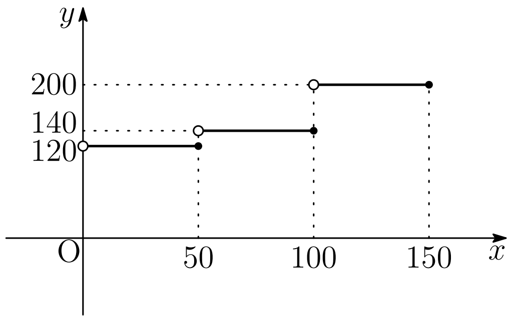
練習 2.6 次の関数のグラフをかけ.

(1) $x \geqq 1$ のとき $y = x - 1$, $x < 1$ のとき $y = -x + 1$

(2) $y = |\,x - 2\,|$

例 2.4 重さが150gまでの定形外の普通郵便料金は, 下の表のようになっている. 郵便物の重さを xg, 料金を y 円とすると, y は x の関数である. また, 関数の定義域は $0 < x \leqq 150$ であり, グラフは, 下の図で表される.

重さ	料金
50g まで	120 円
100g まで	140 円
150g まで	200 円



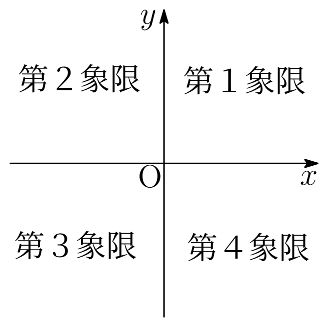
練習 2.7 重さが150gまでの定形外の速達郵便料金は, 右の表のようになっている. 郵便物の重さを xg, 料金を y 円とするとき, この関数のグラフをかけ.

重さ	料金
50g まで	390 円
100g まで	410 円
150g まで	470 円

研究

座標平面上の点と象限

座標平面は座標軸によって 4 つの部分に分けられる．これらの各部分を **象限**（しょうげん）といい，右の図のように，それぞれを**第 1 象限**，**第 2 象限**，**第 3 象限**，**第 4 象限**という．
座標軸はどの象限にも含めない．



練習 次の点はどの象限にあるか．

(1) 点 A(2, 3)　　(2) 点 B(2, −3)

(3) 点 C(−2, 3)　　(4) 点 D(−2, −3)

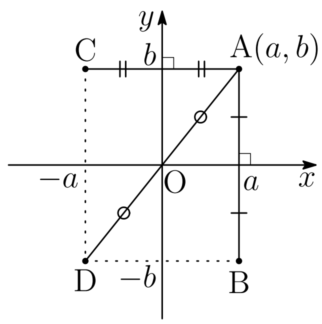
点 A(a, b) が第 1 象限にあるとき，A と

x 軸について対称な点 B

y 軸について対称な点 C

原点について対称な点 D

の座標は，それぞれ次のようになる．

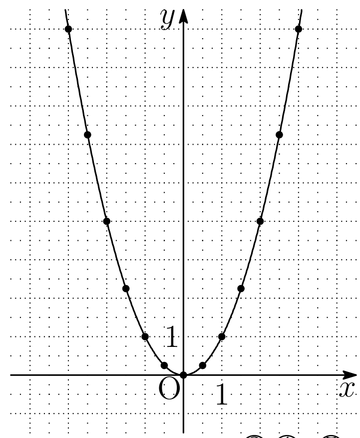


点 B	**点 C**	**点 D**
$\boldsymbol{(a, -b)}$	$\boldsymbol{(-a,\ b)}$	$\boldsymbol{(-a, -b)}$

このことは，点 A が他の象限にあるときも同じである．

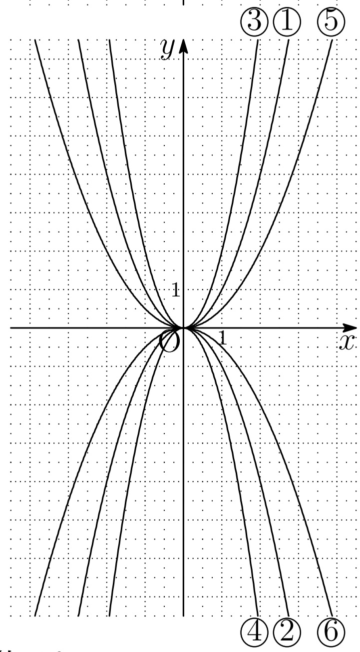
【解】 (1) 第 1 象限　(2) 第 4 象限　(3) 第 2 象限　(4) 第 3 象限

2.1.2　2次関数のグラフ



2次関数 $y = x^2$ のグラフは，右の図のような曲線になる．
このグラフは，点 (x, x^2) を多くとっていくと得られる．
ここでは，まず基本的な2次関数 $y = ax^2$ のグラフを調べ，それをもとにほかの2次関数のグラフも調べていこう．

A 》2次関数 $y = ax^2$ のグラフ



2次関数

①　$y = x^2$　　　　②　$y = -x^2$

③　$y = 2x^2$　　　④　$y = -2x^2$

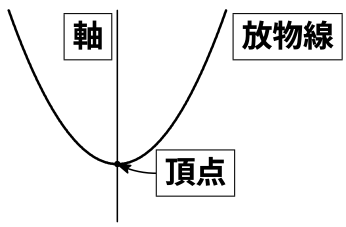
⑤　$y = \dfrac{1}{2}x^2$　　⑥　$y = -\dfrac{1}{2}x^2$

のグラフは，それぞれ右の図のような曲線になる．

> ① と ② は x 軸に関して対称．
> ③ と ④，⑤ と ⑥ も，それぞれ x 軸に関して対称．

2次関数 $y = ax^2$ のグラフには，次のような特徴がある．

> **1**　原点を通り，y 軸に関して対称である．
>
> **2**　$a > 0$ のとき，上に開いた形をしている．
> 　　$a < 0$ のとき，下に開いた形をしている．



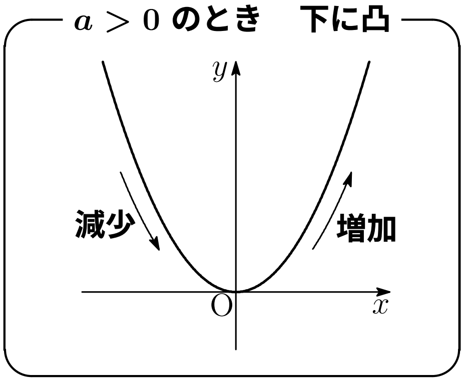
2次関数 $y = ax^2$ のグラフの形の曲線を**放物線**という．この放物線は左右に限りなくのびており，また対称の軸をもつ．この軸を放物線の**軸**といい，放物線とその軸の交点を放物線の**頂点**という．

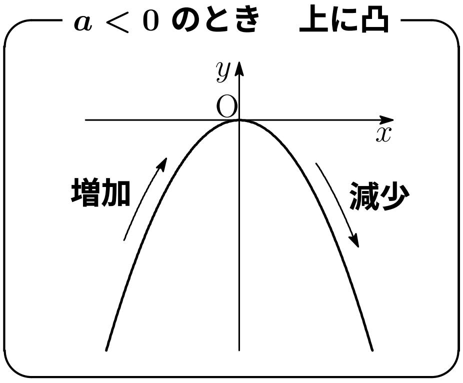
上に開いた形の放物線は**下に凸**であるといい，下に開いた形の放物線は**上に凸**であるという．

2 次関数 $y = ax^2$ の y の値の変化については，次のことがいえる．

$a > 0$ のとき，$x = 0$ の前後で減少から増加に変わる．

$a < 0$ のとき，$x = 0$ の前後で増加から減少に変わる．





練習 2.8 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その放物線は上に凸，下に凸のどちらであるか．

(1) $y = 3x^2$　　(2) $y = -3x^2$

(3) $y = \dfrac{1}{3}x^2$　　(4) $y = -\dfrac{1}{3}x^2$

2次関数 $y=ax^2$ のグラフについてまとめると，次のようになる．

2次関数 $y=ax^2$ のグラフ

グラフは放物線で，軸は y 軸，頂点は原点である．
$a>0$ のとき　下に凸　　　$a<0$ のとき　上に凸

B》2次関数 $y=ax^2+q$ のグラフ

次の2つの2次関数のグラフの関係を調べてみよう．

$y=2x^2$,　$y=2x^2+3$

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	8	2	0	2	8	$\cdots$
$2x^2$**+3**	$\cdots$	11	5	3	5	11	$\cdots$

+3

2つの関数の値を比べると，右の表のように，x のどの値についても，それに対応する $2x^2+3$ の値は $2x^2$ の値より3だけ大きい．

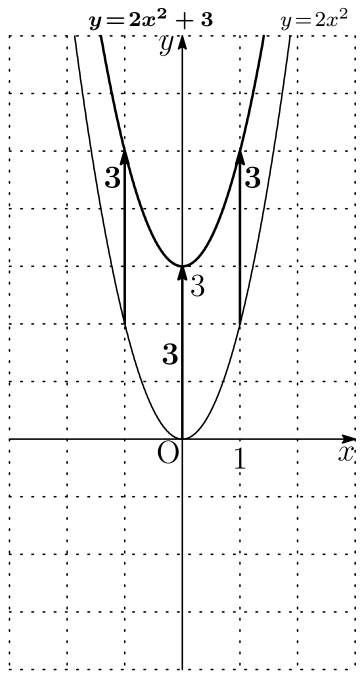
よって，$y=2x^2+3$ のグラフ上の各点は，$y=2x^2$ のグラフ上の各点を，

y 軸の正の向きに3だけ移動させたもの

になっている．

したがって，$y=2x^2+3$ のグラフは右の図のようになる．

その軸は y 軸，頂点は点 $(0,3)$ である．



練習 2.9　$y=2x^2-3$ のグラフを右の図にかけ．また，その放物線の軸と頂点をいえ．

図形上の各点を一定の方向に一定の距離だけ動かす移動を，**平行移動**するという．一般に，次のことがいえる．

$y = ax^2 + q$ のグラフ

> 2 次関数 $y = ax^2 + \boldsymbol{q}$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを，
> 点 $(0, \boldsymbol{q})$ が頂点となるように平行移動した放物線である．
> その軸は y 軸である．

練習 2.10 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その頂点を求めよ．

(1) $y = x^2 + 1$　　(2) $y = -2x^2 + 3$

(3) $y = -x^2 - 2$　　(4) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 4$

C》2 次関数 $y = a(x - p)^2$ のグラフ

次の 2 つの 2 次関数のグラフの関係を調べてみよう．

$$y = 2x^2, \qquad y = 2(x-3)^2$$

2 つの関数の値を比べると，次のような表ができる．

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	8	2	0	2	8	18	32	50	$\cdots$
$2(x-3)^2$	$\cdots$	50	32	18	8	2	0	2	8	$\cdots$

よって，$y = 2(x-3)^2$ のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを，

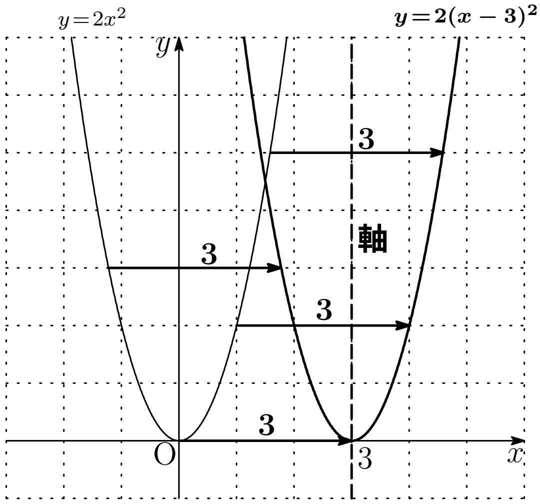
x 軸の正の向きに 3 だけ
平行移動させたもの

であることがわかる．

したがって，$y = 2(x-3)^2$ のグラフは，右の図のようになる．

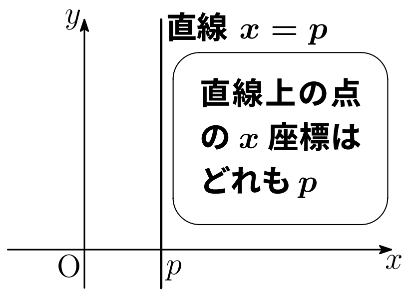
その頂点は点 $(3, 0)$ である．

また，その軸は，点 $(3, 0)$ を通り y 軸に平行な直線 $x = 3$ である．



注意 点 $(p, 0)$ を通り y 軸に平行な直線を，

直線 $x = p$ という．



次の 2 つの 2 次関数のグラフの関係はどうであろうか.

$$y = 2x^2, \qquad y = 2(x+3)^2$$

前ページと同様な表を作ると，次のようになる.

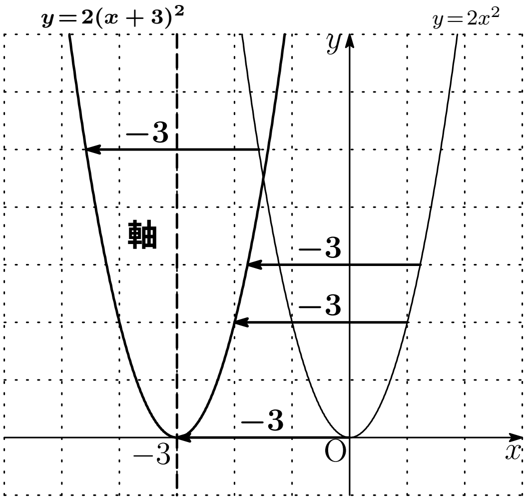
x	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	50	32	18	8	2	0	2	8	$\cdots$
$2(x+3)^2$	$\cdots$	8	2	0	2	8	18	32	50	$\cdots$

したがって，$y = 2(x+3)^2$ のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを，

x 軸の正の向きに -3 だけ平行移動させたもの

であり，右の図のようになる.

その頂点は点 $(-3, 0)$ であり，軸は直線 $x = -3$ である.



注意　「正の向きに -3」とは,「負の向きに 3」ということである.

一般に次のことがいえる.

$y = a(x-p)^2$ のグラフ

2 次関数 $y = a(x - \boldsymbol{p})^2$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを，
点 $(\boldsymbol{p}, 0)$ が頂点となるように平行移動した放物線である.
その軸は直線 $x = \boldsymbol{p}$ である.

練習 2.11 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

(1) $y = (x-2)^2$

(2) $y = 2(x+1)^2$

(3) $y = -(x-3)^2$

(4) $y = -2(x+2)^2$

D》2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

これまでに調べたことから，$y=a(x-p)^2+q$ の形で表される 2 次関数のグラフについてもわかる．

例 2.5 2 次関数 $y=2(x-3)^2+1$ のグラフ

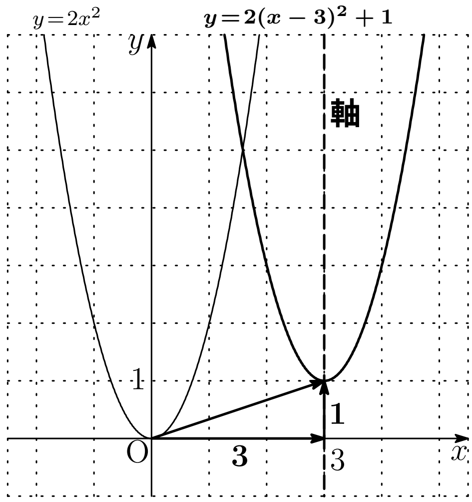
$y=2x^2$ と $y=2(x-3)^2+1$ のグラフの関係は，次のようになる．

$$y=2x^2 \xrightarrow[\text{平行移動}]{x\text{ 軸の正の向きに }\mathbf{3}} y=2(x-\mathbf{3})^2 \xrightarrow[\text{平行移動}]{y\text{ 軸の正の向きに }\mathbf{1}} y=2(x-3)^2+\mathbf{1}$$

したがって，$y=2(x-3)^2+1$ のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを

x 軸の正の向きに 3,
y 軸の正の向きに 1

だけ平行移動させた放物線で，右の図のようになる．
その頂点は点 $(3,1)$ であり，軸は直線 $x=3$ である．



一般に，次のことがいえる．

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

2 次関数 $y=a(x-\boldsymbol{p})^2+\boldsymbol{q}$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを，
点 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ が頂点となるように平行移動した放物線である．
その軸は 直線 $x=\boldsymbol{p}$ である．

練習 2.12 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

(1) $y=(x-1)^2+2$ (2) $y=2(x-2)^2-4$

(3) $y=-2(x+1)^2+2$ (4) $y=-\dfrac{1}{2}(x+2)^2-1$

前ページでまとめたことは，次のようにいうこともできる．

2次関数 $y=ax^2$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動させると，$y=a(x-p)^2+q$ のグラフになる．

注意 今後は「x 軸の正の向き」を単に「x 軸方向」という．「y 軸方向」についても同じである．

例 2.6 2次関数 $y=2x^2$ のグラフの平行移動

平行移動後の放物線をグラフにもつ2次関数の式を調べると，たとえば次のようになる．

	もとの式	**x 軸方向**	**y 軸方向**	**平行移動後の式**
(1)	$y=2x^2$	1	3	$y=2(x-1)^2+3$
(2)	$y=2x^2$	1	-3	$y=2(x-1)^2-3$
(3)	$y=2x^2$	-1	3	$y=2\{x-(-1)\}^2+3$ すなわち $y=2(x+1)^2+3$

練習 2.13 2次関数 $y=-2x^2$ のグラフを次のように平行移動させると，どのような2次関数のグラフになるか．その関数の式を求めよ．

(1) x 軸方向に3，y 軸方向に1だけ平行移動

(2) x 軸方向に3，y 軸方向に -1 だけ平行移動

(3) x 軸方向に -3，y 軸方向に1だけ平行移動

E 》2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

2 次式 $2(x+1)^2+3$ を整理すると

$$\begin{aligned} 2(x+1)^2+3 &= 2(x^2+2x+1)+3 \\ &= 2x^2+4x+2+3 \\ &= 2x^2+4x+5 \end{aligned}$$

となる．すなわち，次の等式が成り立つ．

$$2x^2+4x+5 = 2(x+1)^2+3$$

平方完成

$a(x+\square)^2+\bigcirc$ の形の 2 次式に表すこと

x の 2 次式を上の右辺のような形に変形することを，**平方完成**するという．

例 2.7　$3x^2+6x+2$ を平方完成する．

$$\begin{aligned} \underline{3x^2+6x}+2 &= \underline{3(x^2+2x)}+2 \quad ① \\ &= \underline{3\{(x+1)^2-1^2\}}+2 \quad ② \\ &= \underline{3(x+1)^2-3\cdot 1}+2 \quad ③ \\ &= 3(x+1)^2-1 \end{aligned}$$

① x^2，x を含む項だけを x^2 の係数 3 でくくる．

② $x^2+2x = \left(x+\dfrac{2}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{2}{2}\right)^2$

③ 3 をかけて｛　｝をはずす．

2 次式を平方完成するときは，次の変形を使うと考えやすい．

$$x^2+\blacksquare x = \left(x+\frac{\blacksquare}{2}\right)^2 - \left(\frac{\blacksquare}{2}\right)^2$$

練習 2.14　次の 2 次式を平方完成せよ．

(1)　x^2+8x

(2)　x^2-4x

(3)　x^2+6x+8

(4)　$x^2-8x+10$

(5)　$2x^2+8x-3$　　　　(6)　$2x^2-4x-1$

(7)　x^2+x-2　　　　(8)　$2x^2-6x+3$

2次式の平方完成を利用して，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを調べてみよう．

例題 2.3 次の2次関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

$$y=-2x^2-4x+1$$

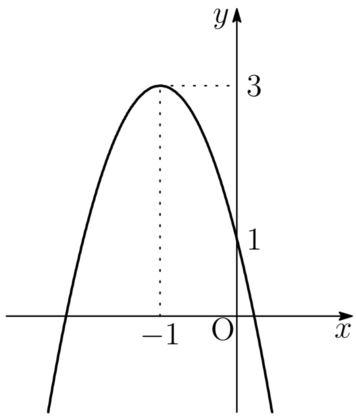
解答

$$\begin{aligned}-2x^2-4x+1&=-2(x^2+2x)+1\\&=-2\{(x+1)^2-1^2\}+1\\&=-2(x+1)^2+3\end{aligned}$$

よって　　$y=-2(x+1)^2+3$

したがって，この関数のグラフは右の図のような放物線である．

頂点は点 $(-1,\ 3)$，軸は直線 $x=-1$ である．



練習 2.15 次の2次関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

(1)　$y=x^2-4x+3$　　　　(2)　$y=2x^2+4x-1$

(3)　$y = -3x^2 + 6x + 1$

(4)　$y = -x^2 - 4x + 2$

(5)　$y = 2x^2 - 6x - 1$

(6)　$y = -x^2 + 3x$

一般に，次のことがいえる[1]．

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを平行移動させた放物線である．

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを，**放物線** $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ ということもある．また，$y = ax^2 + bx + c$ をこの**放物線の方程式**という．

[1]2 次式 $ax^2 + bx + c$ の平方完成は 87 ページに示す．

応用例題 2.1　放物線 $y = x^2 + 2x + 2$ を平行移動して放物線 $y = x^2 - 6x + 11$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか．

考え方》 2 つの放物線の頂点の移動に注目する．

解答　$y = x^2 + 2x + 2$ を変形すると

$$y = (x+1)^2 + 1$$

$y = x^2 - 6x + 11$ を変形すると

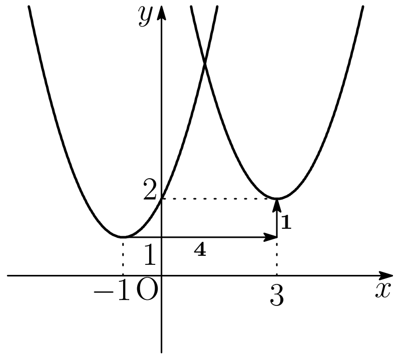
$$y = (x-3)^2 + 2$$

よって，頂点は点 $(-1, 1)$ から点 $(3, 2)$ に移動する．

したがって，

x 軸方向に 4，y 軸方向に 1

だけ平行移動すればよい．



練習 2.16　放物線 $y = 2x^2 - 4x$ を平行移動して次の放物線に重ねるには，どのように平行移動すればよいか．

(1) $y = 2x^2$　　　　(2) $y = 2x^2 + 4x - 3$

■ 2 次式 ax^2+bx+c の平方完成

2 次式 ax^2+bx+c は，次のようにして平方完成することができる．

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

このことから，放物線 $y=ax^2+bx+c$ において

頂点は **点** $\boldsymbol{\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)}$，　軸は **直線** $\boldsymbol{x=-\frac{b}{2a}}$

であることがわかる．

研究

グラフの平行移動

2 次関数 $y=2x^2$ のグラフ F を，x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動することを，グラフ上の点の移動で考えてみよう．移動後の放物線を G とする．

F 上に点 $\mathrm{P}(s,t)$ をとり，この平行移動によって，点 P が G 上の点 $\mathrm{Q}(x,y)$ へ動くとすると

$t=2s^2$　$\cdots$ ①

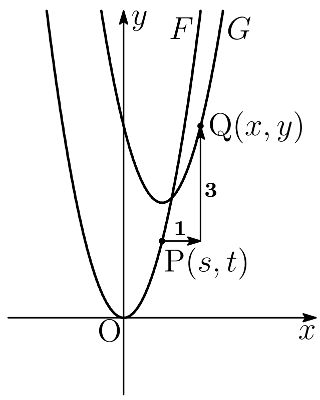
$x=s+1,\ y=t+3$　$\cdots$ ②

が成り立つ．② から

$s=x-1,\ t=y-3$

① に代入すると　$y-3=2(x-1)^2$

すなわち　$y=2(x-1)^2+3$



この 2 次関数のグラフが，放物線 G である．

一般に，2 次関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，移動後の放物線は，次のようになる．

$\boldsymbol{y-q=f(x-p)}$　すなわち　$y=f(x-p)+q$

たとえば，$y=2x^2+3x+1$ のグラフを，x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，移動後の放物線の方程式は

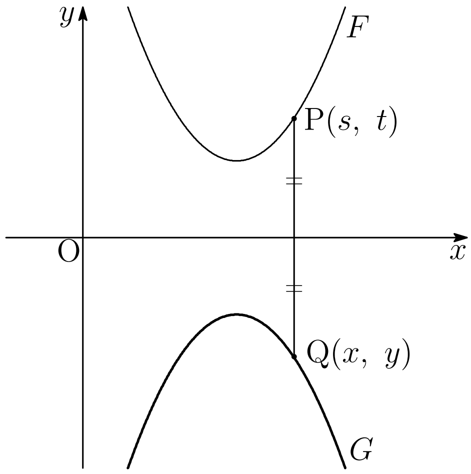
$$y-3=2(x-1)^2+3(x-1)+1$$

すなわち　$y=2x^2-x+3$

発展

グラフの対称移動

図形上の各点を，直線または点に関して対称な位置に動かすことを，直線または点に関して**対称移動**するという．



2次関数 $y=x^2-4x+5$ のグラフ F を，x 軸に関して対称移動するとき，移動後の放物線を G とする．

F 上に点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ をとり，この対称移動によって，点Pが G 上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ へ動くとすると

$$t=s^2-4s+5 \quad \cdots ①$$

$$x=s,\ y=-t \quad \cdots ②$$

② より $s=x$，$t=-y$ である．これを ① に代入すると

$$-y=x^2-4x+5 \quad すなわち \quad y=-(x^2-4x+5)$$

一般に，2次関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸，y 軸，原点それぞれに関して対称移動すると，移動後の放物線の方程式は，次のようになる．

x 軸：$y=-f(x)$　　y 軸：$y=f(-x)$　　原点：$y=-f(-x)$

2次関数 $y=x^2-4x+5$ のグラフの，y 軸，原点それぞれに関する対称移動後の放物線の方程式は，次のようになる．

y 軸に関する対称移動では

$$y=(-x)^2-4(-x)+5 \quad すなわち \quad y=x^2+4x+5$$

原点に関する対称移動では

$$y=-\{(-x)^2-4(-x)+5\} \quad すなわち \quad y=-x^2-4x-5$$

2.1.3　補充問題

1 関数 $y = ax + b$ $(-1 \leqq x \leqq 5)$ の値域が，$1 \leqq y \leqq 13$ となるような定数 a，b の値を求めよ．ただし，$a < 0$ とする．

2 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

(1)　$y = 2x^2 + 4x + 2$　　　(2)　$y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x - 1$

(3) $y=(x-1)(x-5)$　　(4) $y=(2x-1)(x+3)$

3 放物線 $y=2x^2-4x-1$ について，次の問いに答えよ．

(1) この放物線の頂点をAとするとき，Aの座標を求めよ．

(2) この放物線を，x 軸方向に2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したとき，移動後の放物線の方程式を求めよ．

2.2　2 次関数の値の変化

2.2.1　2 次関数の最大・最小

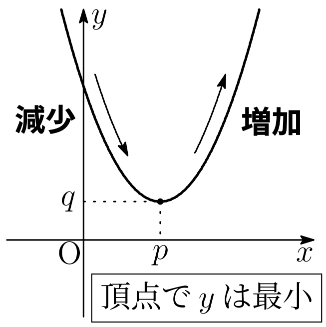
関数のグラフを利用すると，関数の値の変化のようすを知ることができる．ここでは，2 次関数の値の変化を調べよう．

A 》2 次関数の最大・最小

2 次関数 $y = ax^2$ の値の変化については，75 ページで述べた．

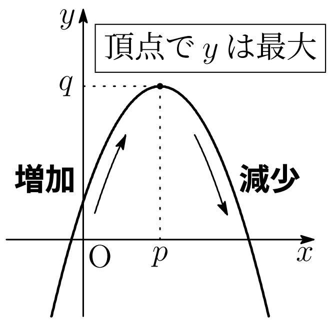
2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ の変化についても，a の値が正か負かによって次のような 2 つの場合がある．

$a > 0$ のとき



y はいくらでも大きな値をとる

$a < 0$ のとき



y はいくらでも小さな値をとる

したがって，次のことがいえる．

2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ の最大・最小

$a > 0$ のとき，$x = p$ で最小値 q をとる．最大値はない．
$a < 0$ のとき，$x = p$ で最大値 q をとる．最小値はない．

練習 2.17 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1) $y = 2(x-3)^2 + 4$　　(2) $y = -2(x+1)^2 - 3$

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の最大値，最小値を調べるには，関数の式を $y = a(x-p)^2 + q$ の形にすればよい．

例題 2.4 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1) $y = x^2 - 4x + 3$ (2) $y = -2x^2 - 4x$

解答 (1) 関数の式を変形すると $y = (x-2)^2 - 1$

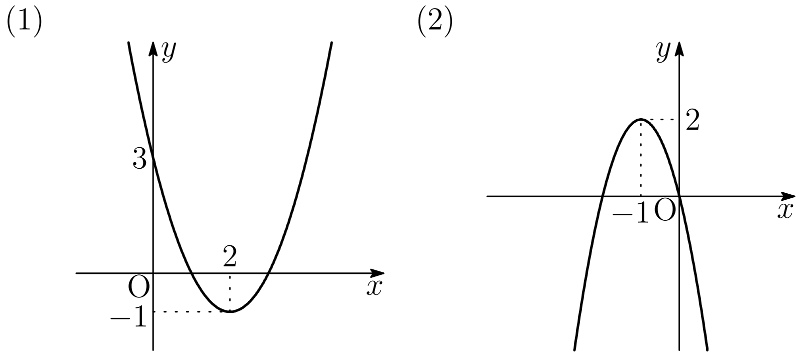
よって，y は $x = 2$ で最小値 -1 をとる．

最大値はない．

(2) 関数の式を変形すると $y = -2(x+1)^2 + 2$

よって，y は $x = -1$ で最大値 2 をとる．

最小値はない．



練習 2.18 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1) $y = x^2 - 6x + 5$ (2) $y = 2x^2 + 4x - 1$

(3) $y = -x^2 - 4x + 2$ (4) $y = -2x^2 + 8x$

(5) $y = x^2 + 3x + 1$　　(6) $y = -2x^2 + 5x$

B 》 2 次関数の値域と最大・最小

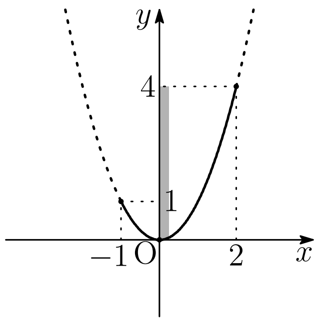
これまでは 2 次関数の定義域が実数全体であったが，関数の定義域に制限のある場合についても，最大・最小を調べてみよう．

例 2.8　関数 $\boldsymbol{y = x^2}$ $\boldsymbol{(-1 \leqq x \leqq 2)}$ の値域と最大値，最小値

この関数のグラフは，右の図の実線部分である．
よって，値域は

$$0 \leqq y \leqq 4$$

である．また，y は
$x = 2$ で最大値 4 をとり，
$x = 0$ で最小値 0 をとる．

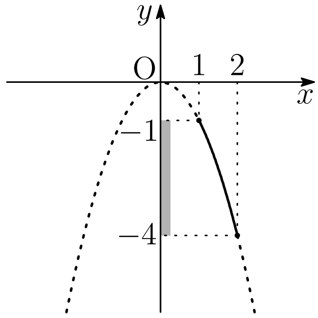


例 2.9　関数 $\boldsymbol{y = -x^2}$ $\boldsymbol{(1 \leqq x \leqq 2)}$ の値域と最大値，最小値

この関数のグラフは，右の図の実線部分である．
よって，値域は

$$-4 \leqq y \leqq -1$$

である．また，y は
$x = 1$ で最大値 -1 をとり，
$x = 2$ で最小値 -4 をとる．



練習 2.19 次の関数の値域と最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = x^2$ $(-2 \leqq x \leqq -1)$

(2) $y = 2x^2$ $(-2 \leqq x \leqq 1)$

(3) $y = -x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$

(4) $y = -2x^2$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$

例題 2.5 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1) $y = x^2 - 4x + 1 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$　　(2) $y = -2x^2 + 8x \quad (1 < x < 4)$

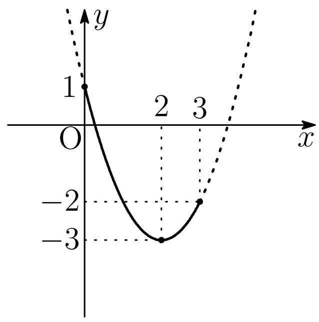
解答 (1) $y = x^2 - 4x + 1$ を変形すると

$$y = (x-2)^2 - 3$$

$0 \leqq x \leqq 3$ でのグラフは，右の図の実線部分である．よって，y は

$x = 0$ で最大値 1 をとり，

$x = 2$ で最小値 -3 をとる．



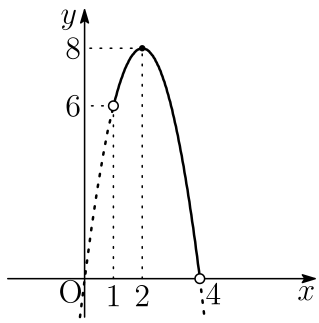
(2) $y = -2x^2 + 8x$ を変形すると

$$y = -2(x-2)^2 + 8$$

$1 < x < 4$ でのグラフは，右の図の実線部分である．よって，y は

$x = 2$ で最大値 8 をとる．

最小値はない．



補足 (2) y は 0 にいくらでも近い値をとるが，定義域のどんな x に対しても $y = 0$ とはならないので，最小値は存在しない．

練習 2.20 関数 $y = x^2 - 4x + 1$ の定義域として次の範囲をとるとき，各場合について，最大値と最小値を求めよ．

(1) $-2 \leqq x \leqq 1$　　(2) $1 \leqq x \leqq 3$

(3) $3 \leqq x \leqq 4$　　(4) $1 < x < 4$

練習 2.21 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1) $y = x^2 + 2x + 3 \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$

(2) $y = -x^2 + 4x - 3 \quad (0 \leqq x \leqq 4)$

(3) $y = 3x^2 + 6x - 1 \quad (1 \leqq x \leqq 3)$

(4) $y = -2x^2 + 14x \quad (0 < x < 7)$

応用例題 2.2 次の条件を満たすように，定数 c の値を定めよ．

(1) 関数 $y = x^2 - 4x + c \ \ (1 \leqq x \leqq 5)$ の最大値が 8 である．

(2) 関数 $y = -x^2 - 2x + c \ \ (0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値が -3 である．

考え方》 (1) 下に凸の放物線 → 軸から遠いほど y の値は大きい．

(2) 上に凸の放物線 → 軸から遠いほど y の値は小さい．

解答　(1) 式を変形すると

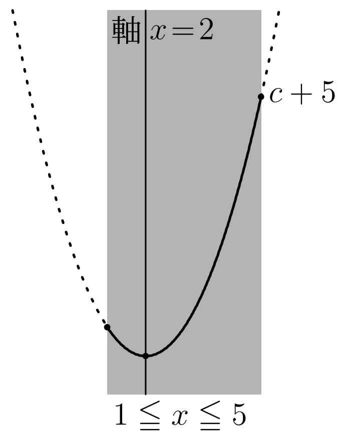
$$y = (x-2)^2 + c - 4$$

$1 \leqq x \leqq 5$ であるから，$x = 5$ で最大値をとる．

$x = 5$ のとき

$$y = 5^2 - 4\cdot 5 + c = c + 5$$

$c + 5 = 8$ より　　$c = 3$



(2) 式を変形すると

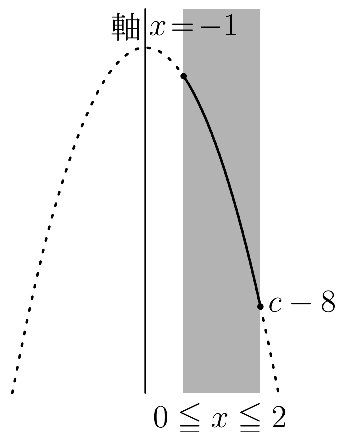
$$y = -(x+1)^2 + c + 1$$

$0 \leqq x \leqq 2$ であるから，$x = 2$ で最小値をとる．

$x = 2$ のとき

$$y = -2^2 - 2\cdot 2 + c = c - 8$$

$c - 8 = -3$ より　　$c = 5$



練習 2.22 次の条件を満たすように，定数 c の値を定めよ．

(1) 関数 $y = x^2 - 2x + c \ (-2 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が 5 である．

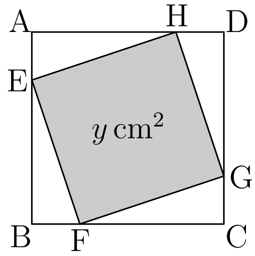
(2) 関数 $y = x^2 + 4x + c$ $(-1 \leqq x \leqq 0)$ の最大値が 2 である．

(3) 関数 $y = -x^2 + 6x + c$ $(1 \leqq x \leqq 4)$ の最小値が -7 である．

C》 最大・最小の応用

2 次関数の最大・最小を応用して解決できる問題について，考えてみよう．

応用例題 2.3　1 辺が 10cm の正方形 ABCD に，それより小さい正方形 EFGH を右の図のように内接させる．
正方形 EFGH の面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とするとき，y の最小値を求めよ．



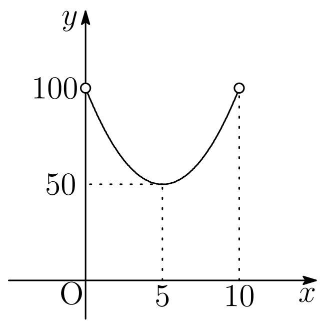
考え方》 AH=x (cm) として y を x で表す．x の値の範囲にも注意．

解答　AH= x (cm) とすると，AE=HD= $10-x$ (cm) である．
$x>0$ かつ $10-x>0$ から

$$0<x<10 \qquad \cdots ①$$

また，$y=\mathrm{EH}^2$ である．
三平方の定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{EH}^2 &= \mathrm{AE}^2+\mathrm{AH}^2\\ &=(10-x)^2+x^2\\ &=2x^2-20x+100\end{aligned}$$

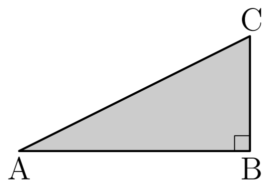


よって　　$y=2(x-5)^2+50$

① において，y は $x=5$ すなわち $\mathrm{AH}=5$ で最小値 50 をとる．

補足　正方形 EFGH の面積が最小のとき，1 辺 EH の長さも最小となる．

練習 2.23　直角三角形 ABC において，直角をはさむ 2 辺 AB，BC の長さの和が 10cm であるとする．このような三角形の面積の最大値を求めよ．



2.2.2 2次関数の決定

これまでは与えられた2次関数について，そのグラフを調べたり関数の最大値，最小値などを求めてきた．ここでは，与えられた条件を満たす2次関数を求めてみよう．

A 》最大値，最小値から関数を決定

2次関数を決定する問題で，2次関数の最大値か最小値がわかっているときは，91ページで調べた「2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小」を使うとよい．

例題 2.6 $x=1$ で最大値9をとり，$x=0$ で $y=6$ となるような2次関数を求め，$y=ax^2+bx+c$ の形で表せ．

解答 $x=1$ で最大値9をとるから，y は

$$y=a(x-1)^2+9 \qquad \text{ただし，} a<0$$

の形に表される．

$x=0$ で $y=6$ となるから

$$6=a(0-1)^2+9$$

← $y=a(x-1)^2+9$ に $x=0$，$y=6$ を代入する．

よって　$a=6-9=-3$

これは，$a<0$ を満たす．

したがって　$y=-3(x-1)^2+9$

すなわち　$y=-3x^2+6x+6$

注意 とくに指定がない場合には，2次関数の定義域は実数全体である．

練習 2.24 次の条件を満たす2次関数を求め，$y=ax^2+bx+c$ の形で表せ．

(1) $x=2$ で最大値8をとり，$x=1$ で $y=5$ となる．

(2) $x=-1$ で最小値 -3 をとり，$x=0$ で $y=-1$ となる．

B 》放物線の軸や頂点から関数を決定

2 次関数のグラフの放物線について，その頂点や軸がわかっているときも，$y = a(x - p)^2 + q$ の形が利用できる．

例題 2.7 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ．

(1) 頂点が点 $(2,\ 5)$ で，点 $(-1, -4)$ を通る．

(2) 直線 $x = -1$ を軸とし，2 点 $(0, -6)$，$(2, 10)$ を通る．

解答 (1) 頂点が点 $(2,\ 5)$ であるから，この 2 次関数は

$$y = a(x - 2)^2 + 5$$

の形に表される．グラフが点 $(-1, -4)$ を通るから

$$-4 = a(-1 - 2)^2 + 5$$

よって　$a = -1$

したがって　$y = -(x - 2)^2 + 5$

(2) 軸が直線 $x = -1$ であるから，この 2 次関数は

$$y = a(x + 1)^2 + q$$

の形に表される．グラフが

点 $(0, -6)$ を通るから　$-6 = a(0 + 1)^2 + q$

点 $(2,\ 10)$ を通るから　$10 = a(2 + 1)^2 + q$

よって　$a + q = -6$，$9a + q = 10$

これを解くと　$a = 2$，$q = -8$

したがって　$y = 2(x + 1)^2 - 8$

練習 2.25 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ．

(1) 頂点が点 $(1, -3)$ で，点 $(3, 5)$ を通る．

(2) 頂点が点 $(-2, 4)$ で，点 $(-4, 2)$ を通る．

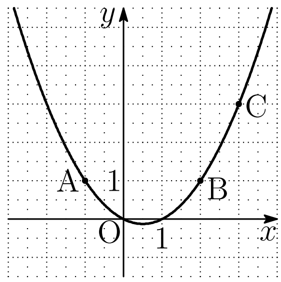
練習 2.26 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ．

(1) 直線 $x = 3$ を軸とし，2 点 $(2, 6)$，$(5, 9)$ を通る．

(2) 直線 $x = -1$ を軸とし，2 点 $(0, 5)$，$(2, -11)$ を通る．

C》放物線上の3点から関数を決定

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが3点 A$(-1, 1)$，B$(2, 1)$，C$(3, 3)$ を通るとする．このとき，係数 a，b，c が満たすべき条件を式で表すと，次のようになる．



点Aを通るから　$1 = a(-1)^2 + b(-1) + c$
点Bを通るから　$1 = a{\cdot}2^2 + b{\cdot}2 + c$
点Cを通るから　$3 = a{\cdot}3^2 + b{\cdot}3 + c$

そこで，これらを同時に成り立たせる a，b，c の値を求めてみよう．

例 2.10 次の等式を同時に満たす a，b，c の値を求める．

$$\begin{cases} a - b + c = 1 & \cdots ① \\ 4a + 2b + c = 1 & \cdots ② \\ 9a + 3b + c = 3 & \cdots ③ \end{cases}$$

① と ② を用いて c を消去する．

② − ① から　$3a + 3b = 0$
すなわち　$a + b = 0$　$\cdots$ ④

① と ③ を用いて c を消去する．

③ − ① から　$8a + 4b = 2$
すなわち　$4a + 2b = 1$　$\cdots$ ⑤

② − ① の計算

$$\begin{array}{rrrrl} & 4a & +2b & +c & =1 \\ -) & a & -b & +c & =1 \\ \hline & 3a & +3b & & =0 \end{array}$$

④ と ⑤ を連立させた方程式を解くと　$a = \dfrac{1}{2}$，$b = -\dfrac{1}{2}$

これらを ① に代入して　$c = 0$

よって　$a = \dfrac{1}{2}$，$b = -\dfrac{1}{2}$，$c = 0$

例 2.10 のような，3文字を含む1次方程式を3つ組み合わせた連立方程式を**連立3元1次方程式**という．

連立3元1次方程式の解き方は，次のようになる．

連立3元1次方程式の解き方

① 1文字を消去して，残りの2文字の連立方程式を導く．

② 2文字の連立方程式を解く．

③ 残りの1文字の値を求める．

練習 2.27 次の連立3元1次方程式を解け．

(1) $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \\ 9a+3b+c=4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a-b+c=1 \\ 4a-2b+c=-6 \\ 9a+3b+c=9 \end{cases}$

例題 2.8 2次関数のグラフが3点 $(1,5)$，$(2,1)$，$(3,-7)$ を通るとき，その2次関数を求めよ．

解答 求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする．
グラフが3点 $(1,5)$，$(2,1)$，$(3,-7)$ を通るから

$$5=a+b+c \qquad \cdots ①$$
$$1=4a+2b+c \qquad \cdots ②$$
$$-7=9a+3b+c \qquad \cdots ③$$

② − ① から　$3a+b=-4$　$\cdots$ ④

③ − ① から　$8a+2b=-12$　$\cdots$ ⑤

④，⑤ を解くと　$a=-2$，$b=2$

これらを ① に代入して　$c=5$

よって，求める2次関数は　$y=-2x^2+2x+5$

練習 2.28 2 次関数のグラフが次の 3 点を通るとき，その 2 次関数を求めよ．

(1) $(0,2)$，$(2,0)$，$(3,5)$

(2) $(2,-2)$，$(3,5)$，$(-1,1)$

2.2.3　補充問題

4 2 次関数 $y = x^2 + 2mx + m$ について，次の問いに答えよ.

(1) この関数の最小値を m の式で表せ.

(2) この関数の最小値が -2 であるとき，m の値を求めよ.

5 $1 < a < 2$ のとき，関数 $y = x^2 - 2ax \ (0 \leqq x \leqq 2)$ の最大値と最小値を求めよ.

6 次のような 2 次関数を求めよ．

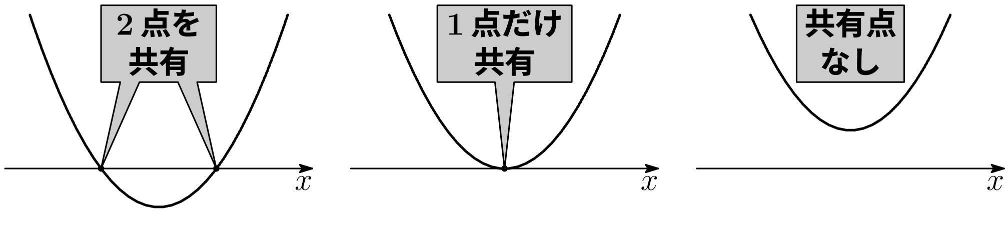
(1) グラフが 3 点 $(3, 0)$，$(-1, 0)$，$(2,\ 6)$ を通る．

(2) グラフの頂点は放物線 $y = 2x^2 + 4x + 1$ の頂点と同じであり，y 軸と点 $(0, 2)$ で交わる．

2.3　2次不等式

2.3.1　2次関数のグラフと x 軸の位置関係

2次関数のグラフと x 軸の位置関係は，次のような3つの場合に分類できる．ここでは，これらの場合についてもう少し詳しく調べることにしよう．



A》2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，共有点の x 座標は，$y = 0$ となる x の値，すなわち2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解である．

例題 2.9 2次関数 $y = x^2 - 2x - 2$ のグラフは x 軸と2点で交わる．その交点の座標を求めよ．

解答　交点の x 座標は，2次方程式

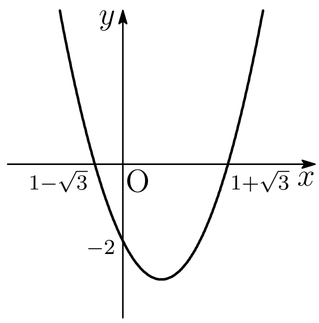
$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

の解である．

これを解くと　　$x = 1 \pm \sqrt{3}$

よって，交点の座標は

$$(1 - \sqrt{3},\ 0),\ (1 + \sqrt{3},\ 0)$$



例題 2.10 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ．

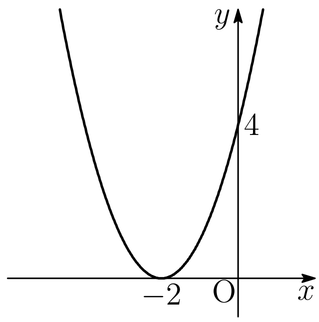
$$y = x^2 + 4x + 4$$

解答 このグラフと x 軸の共有点の x 座標は，
2 次方程式

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

の実数解である．
これを解くと　　$x = -2$
よって，共有点の座標は

$$(-2,\ 0)$$



例題 2.10 の場合のように，2 次関数のグラフと x 軸の共有点がただ 1 つのとき，グラフは x 軸に**接する**といい，その共有点を x 軸との**接点**という．x 軸との接点は，放物線の頂点でもある．

練習 2.29 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ．また，グラフが x 軸に接するものはどれか．

(1)　$y = x^2 - 2x - 3$　　　　(2)　$y = -x^2 + 3x - 1$

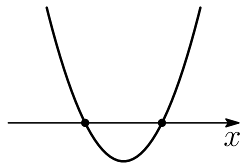
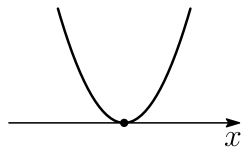
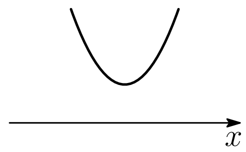
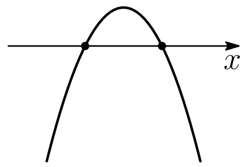
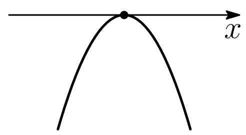
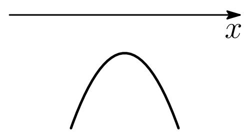
(3)　$y = 2x^2 + 4x + 2$　　　　(4)　$y = 2x^2 - 5x - 3$

B》2次関数のグラフと x 軸の位置関係

次の①と②がいえるから，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係は，$D=b^2-4ac$ とすると，D の符号によって下の表のようにまとめられる．

① 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，
2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数と一致する．

② 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数は，52ページの表のように
$D=b^2-4ac$ の符号によって分類される．

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係			
$D=b^2-4ac$ の符号	$D=b^2-4ac>0$	$D=b^2-4ac=0$	$D=b^2-4ac<0$
$a>0$ のとき			
$a<0$ のとき			
x 軸との位置関係	異なる2点で交わる	接する	共有点をもたない
x 軸との共有点の個数	2個	1個	0個
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$-\dfrac{b}{2a}$	ない

例 2.11　2次関数のグラフと x 軸の共有点の個数

(1) 2次関数 $y=x^2+5x+3$ のグラフと x 軸の共有点の個数は

$$D=5^2-4\cdot1\cdot3=13>0$$

$\longleftarrow D=b^2-4ac>0$

であるから　　2個

(2) 2次関数 $y=-2x^2+x-1$ のグラフと x 軸の共有点の個数は

$$D=1^2-4\cdot(-2)\cdot(-1)=-7<0$$

$\longleftarrow D=b^2-4ac<0$

であるから　　0個

練習 2.30 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ．

(1) $y = x^2 + 3x + 3$　(2) $y = -2x^2 + 5x + 1$　(3) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

例題 2.11 2次関数 $y = x^2 + mx + 9$ のグラフが x 軸に接するとき，定数 m の値を求めよ．また，そのときの接点の座標を求めよ．

解答 2次関数 $y = x^2 + mx + 9$ の係数について

$$D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = m^2 - 36$$

とする．このグラフが x 軸に接するための条件は，$D = 0$ が成り立つことであるから

$$m^2 - 36 = 0$$

これを解いて　$m = \pm 6$

接点の x 座標は $x = -\dfrac{m}{2}$ であるから，接点の座標は

$m = 6$ のとき　$(-3, 0)$，　$m = -6$ のとき　$(3, 0)$

練習 2.31 2次関数 $y = x^2 + mx + 4$ のグラフが x 軸に接するとき，定数 m の値を求めよ．また，そのときの接点の座標を求めよ．

応用例題 2.4　2 次関数 $y = x^2 - 3x + m$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

考え方》　110 ページの表で，$b^2 - 4ac > 0$ または $b^2 - 4ac = 0$ すなわち $D = b^2 - 4ac \geqq 0$ の場合である．

解答　2 次関数 $y = x^2 - 3x + m$ の係数について

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 9 - 4m$$

とする．このグラフが x 軸と共有点をもつための条件は，

$D \geqq 0$ が成り立つことであるから　　$9 - 4m \geqq 0$

これを解いて　　$m \leqq \dfrac{9}{4}$

練習 2.32　2 次関数 $y = x^2 + 5x + m + 2$ のグラフについて，次の問いに答えよ．

(1)　x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(2)　x 軸と共有点をもたないとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

2.3.2 2次不等式

これまでは，2次関数のグラフと2次方程式の実数解の関係について調べた．
ここでは，関数のグラフを利用して，不等式を解くことを考えよう．

A》1次不等式と1次関数

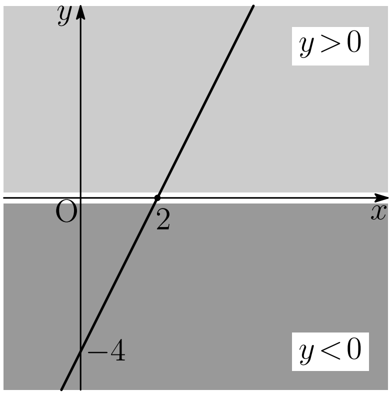
1次不等式の解を，関数のグラフで考えてみよう．

例 2.12 1次不等式 $2x-4<0$ の解

1次関数 $y=2x-4$ のグラフは右の図のようになる．
x 軸との交点の x 座標は，1次方程式

$$2x-4=0$$

の解 $x=2$ である．
右の図から，$y=2x-4$ の値が負になる x の値の範囲は $x<2$ である．



よって，1次不等式 $2x-4<0$ の解は，$x<2$ である． **[終]**

例 2.12 と同様に考えて，1次不等式 $2x-4>0$ の解は，$x>2$ である．

x	$x<2$	2	$2<x$
$y=2x-4$	$-$	0	$+$

練習 2.33 1次関数のグラフを利用して，次の1次不等式の解を求めよ．

(1) $2x+4<0$　　(2) $-3x+6>0$

(3) $4x+3\geqq 0$　　(4) $-3x+1\leqq 0$

B》2次不等式と2次関数

不等式のすべての項を左辺に移項して整理したとき,

$$ax^2+bx+c>0,\ ax^2+bx+c\leqq 0$$

などのように，左辺が x の2次式になる不等式を，x の **2次不等式**という．ただし，$a\neq 0$ とする．

2次関数のグラフを利用して，2次不等式を解いてみよう．

まず，2次関数の値の符号について調べることにしよう．

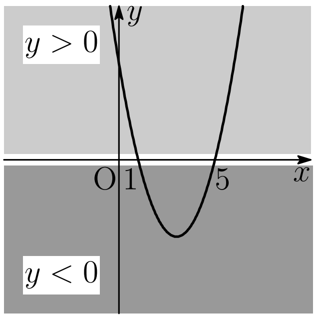
例 2.13　2次関数 $y=x^2-6x+5$ の値の符号

この関数のグラフは，右の図のように x 軸と2点で交わる．交点の x 座標は，2次方程式

$$x^2-6x+5=0$$

の実数解 $x=1,\ 5$ である．

右の図から，$y=x^2-6x+5$ の値の符号について，次の表が得られる．



x	$x<1$	1	$1<x<5$	5	$5<x$
$y=x^2-6x+5$	$+$	0	$-$	0	$+$

例 2.13 の表から，次のことがいえる．

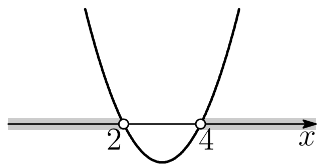
2次不等式 $x^2-6x+5<0$ の解は，$y<0$ となる x の値の範囲であるから，$1<x<5$ である．

2次不等式 $x^2-6x+5>0$ の解は，$y>0$ となる x の値の範囲であるから，$x<1,\ 5<x$ である．

例 2.14　(1) **2 次不等式 $(\boldsymbol{x}-2)(\boldsymbol{x}-4)>0$ を解く．**

$(x-2)(x-4)=0$ の解は

$$x=2,\ 4$$



$y=(x-2)(x-4)$ のグラフと x 軸の位置関係は，右の図のようになる．
$y>0$ となる x の値の範囲は

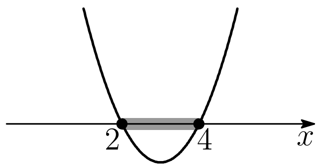
$$x<2,\ 4<x$$

よって，$(x-2)(x-4)>0$ を解くと

$$x<2,\ 4<x$$

(2) **2 次不等式 $(\boldsymbol{x}-2)(\boldsymbol{x}-4)\leqq 0$ を解く．**
$y\leqq 0$ となる x の値の範囲を求めて

$$2\leqq x\leqq 4$$



練習 2.34 次の 2 次不等式を解け．

(1) $(x-1)(x-3)>0$　　(2) $(x-2)(x-5)<0$

(3) $(x+1)(x-2)\geqq 0$　　(4) $x(x-1)\leqq 0$

(5) $x(x+1)>0$　　(6) $(x+2)(x+3)\leqq 0$

$a>0$ とする．

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係が右の図のようなとき，次のことがいえる．

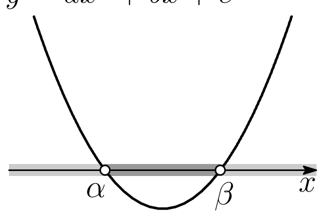
2 次不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解は

$$x<\alpha,\ \beta<x$$

2 次不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解は

$$\alpha<x<\beta$$

$y=ax^2+bx+c$



$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ の
実数解が $\boldsymbol{\alpha}$（アルファ），$\boldsymbol{\beta}$（ベータ）

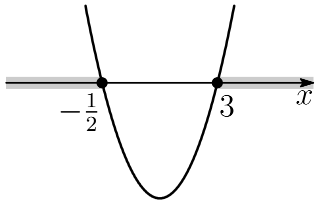
C》2次不等式の解き方

例題 2.12 次の2次不等式を解け.

(1) $2x^2 - 5x - 3 \geqq 0$ (2) $x^2 - 2x - 2 < 0$

解答 (1) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ を解くと

$$x = -\frac{1}{2},\ 3$$

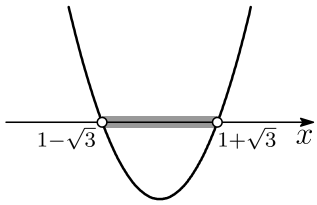


よって，この2次不等式の解は

$$x \leqq -\frac{1}{2},\ 3 \leqq x$$

(2) $x^2 - 2x - 2 = 0$ を解くと

$$x = 1 \pm \sqrt{3}$$



よって，この2次不等式の解は

$$1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$$

練習 2.35 次の2次不等式を解け.

(1) $2x^2 - 5x + 2 \geqq 0$ (2) $2x^2 + 5x + 3 < 0$

(3) $x^2 + 2x - 1 \leqq 0$ (4) $x^2 + 3x + 1 > 0$

x^2 の係数が負の 2 次不等式は，両辺に-1を掛けて2 次の係数を正にして解けばよい.

例題 2.13 次の 2 次不等式を解け.

$$-x^2 + 4x + 1 \leqq 0$$

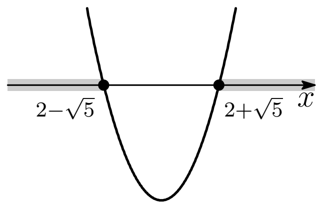
解答 両辺に -1 を掛けると　$x^2 - 4x - 1 \geqq 0$

$x^2 - 4x - 1 = 0$ を解くと

$$x = 2 \pm \sqrt{5}$$

よって，この 2 次不等式の解は

$$x \leqq 2 - \sqrt{5},\ 2 + \sqrt{5} \leqq x$$



練習 2.36 次の 2 次不等式を解け.

(1) $-2x^2 + 5x + 3 < 0$

(2) $-3x^2 + 5x - 1 \geqq 0$

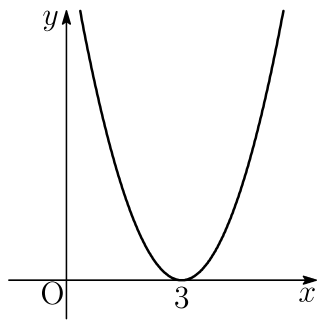
D》解の範囲が特別な2次不等式

2次関数のグラフが x 軸と2点で交わらない場合について，2次関数の値の符号を調べてみよう．

例 2.15　2次関数 $y = x^2 - 6x + 9$ の値の符号

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

であるから，この関数のグラフは，右の図のように x 軸と点 $(3,\ 0)$ で接する．右の図から，$y = x^2 - 6x + 9$ の値の符号について，次の表が得られる．



x	$x < 3$	3	$3 < x$
$y = x^2 - 6x + 9$	$+$	0	$+$

例 2.15 の表から，次のことがわかる．

2次不等式	**解**
$x^2 - 6x + 9 > 0$	3以外のすべての実数
$x^2 - 6x + 9 \geqq 0$	すべての実数
$x^2 - 6x + 9 < 0$	ない
$x^2 - 6x + 9 \leqq 0$	$x = 3$

← $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ であることに着目しよう．

練習 2.37　次の2次不等式を解け．

(1) $x^2 - 4x + 4 > 0$

(2) $x^2 - 4x + 4 \geqq 0$

(3) $x^2 + 6x + 9 < 0$

(4) $x^2 + 6x + 9 \leqq 0$

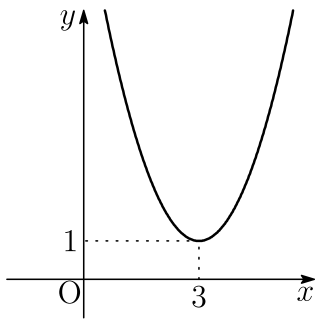
(5) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

(6) $4x^2 + 4x + 1 \geqq 0$

例 2.16　2 次関数 $y = x^2 - 6x + 10$ の値の符号

$$x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$$

であるから，この関数のグラフは，右の図のように x 軸より上側にあり，x 軸と共有点をもたない．関数の値の符号は，常に正である．



例 2.16 で調べたことから，次のことがわかる．

2 次不等式	解
$x^2 - 6x + 10 > 0$	すべての実数
$x^2 - 6x + 10 \geqq 0$	すべての実数
$x^2 - 6x + 10 < 0$	ない
$x^2 - 6x + 10 \leqq 0$	ない

← $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$ であることに着目しよう．

練習 2.38　次の 2 次不等式を解け．

(1) $x^2 - 4x + 6 > 0$　　(2) $x^2 - 4x + 6 \geqq 0$

(3) $2x^2 + 4x + 3 < 0$　　(4) $2x^2 + 4x + 3 \leqq 0$

E》2 次不等式の解き方のまとめ

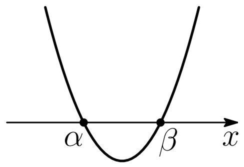
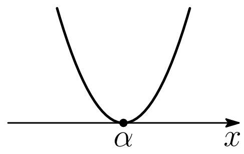
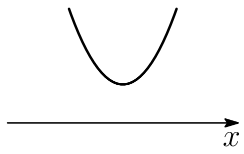
2 次不等式は，不等式のすべての項を左辺に移項して整理し，2 次関数のグラフと x 軸の位置関係を利用して解くことができる．そこで，110 ページの表のように，2 次不等式

$$ax^2 + bx + c > 0, \qquad ax^2 + bx + c \leqq 0$$

などの解についても，$D = b^2 - 4ac$ とすると，D の符号によって分類される．

なお，$a < 0$ のときは，不等式の両辺に -1 を掛けて 2 次の係数を正にして解けばよいで，$a > 0$ の場合だけを次ページにまとめた．

2 次不等式の解についてのまとめ $(a > 0$ の場合$)$

$D = b^2 - 4ac$ の符号	$D = b^2 - 4ac > 0$	$D = b^2 - 4ac = 0$	$D = b^2 - 4ac < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の位置関係			
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解	$x = \alpha,\ \beta$	$x = \alpha$	ない
$ax^2 + bx + c > 0$ の解	$x < \alpha,\ \beta < x$	α 以外のすべての実数	すべての実数
$ax^2 + bx + c \geqq 0$ の解	$x \leqq \alpha,\ \beta \leqq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2 + bx + c < 0$ の解	$\alpha < x < \beta$	ない	ない
$ax^2 + bx + c \leqq 0$ の解	$\alpha \leqq x \leqq \beta$	$x = \alpha$	ない

例題 2.14　次の 2 次不等式を解け．

$$2x^2 - 3x + 4 < 0$$

解答　この 2 次不等式の係数について　$(-3)^2 - 4{\cdot}2{\cdot}4 = -23 < 0$

x^2 の係数が正であるから，この 2 次不等式の解は　ない．

練習 2.39 次の 2 次不等式を解け.

(1) $x^2 - 3x + 5 > 0$

(2) $-x^2 + x - 1 \geqq 0$

(3) $2x^2 + 3x + 3 < 0$

(4) $-9x^2 + 6x - 1 \geqq 0$

(5) $x + 6 \leqq x^2$

(6) $x^2 - 3x + 2 > 2x^2 - x$

F 》2 次不等式の応用

応用例題 2.5　2 次関数 $y = 2x^2 + 2mx + 1$ のグラフが x 軸と異なる 2 点を共有するとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

考え方 》　110 ページの表で，$b^2 - 4ac > 0$ の場合である．

解答　与えられた 2 次関数の係数について

$$D = (2m)^2 - 4\cdot2\cdot1 = 4(m^2 - 2)$$

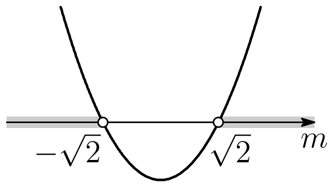
とする．このグラフが x 軸と異なる 2 点を共有するための条件は，$D > 0$ が成り立つことであるから

$$m^2 - 2 > 0$$

$m^2 - 2 = 0$ を解くと　　$m = \pm\sqrt{2}$

よって，求める m の値の範囲は

$$m < -\sqrt{2},\ \sqrt{2} < m$$

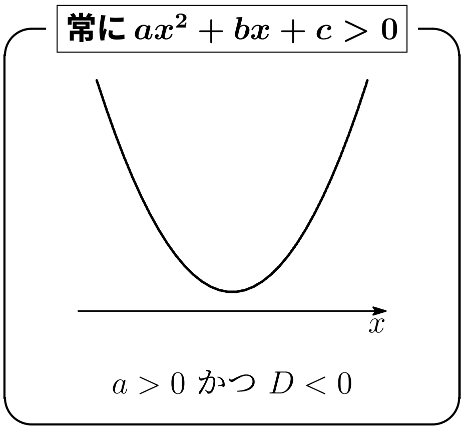


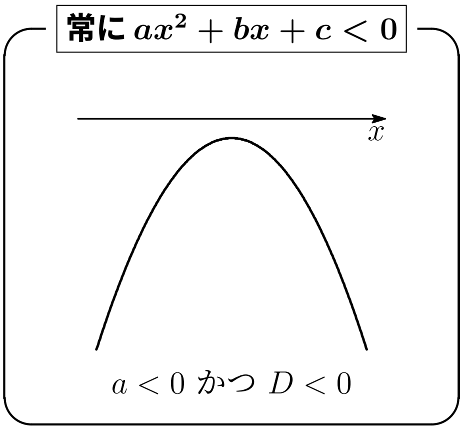
練習 2.40　2 次関数 $y = x^2 + mx + m$ のグラフと x 軸の位置関係が次のようなとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(1)　共有点をもたない．　　　(2)　共有点をもつ．

練習 2.41　2 次方程式 $2x^2 + mx + 2 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

110 ページの表によると，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の値の符号が一定になる場合がある．





応用例題 2.6 2 次不等式 $x^2 + 2mx + m + 2 > 0$ の解がすべての実数であるとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

考え方 》 常に $x^2 + 2mx + m + 2 > 0$ が成り立つ条件から求める．

解答 与えられた 2 次不等式の係数について

$$D = (2m)^2 - 4\cdot 1\cdot (m+2) = 4(m^2 - m - 2)$$

とする．

2 次不等式の x^2 の係数が正であるから，$D < 0$ が成り立てばよい．

$m^2 - m - 2 < 0$ から　　$(m+1)(m-2) < 0$

これを解いて　　$-1 < m < 2$

練習 2.42 2 次不等式 $-x^2 + mx - 4 < 0$ の解がすべての実数であるとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

G 》連立不等式

例題 2.15 次の連立不等式を解け．

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ x^2-3x-4 \leqq 0 \end{cases}$$

解答 $x^2-4>0$ から　　$(x+2)(x-2)>0$

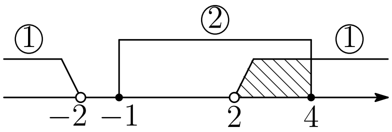
よって　　$x<-2,\ 2<x$　$\cdots$①

$x^2-3x-4 \leqq 0$ から　　$(x+1)(x-4) \leqq 0$

よって　　$-1 \leqq x \leqq 4$　　$\cdots$②

①と②の共通範囲を求めて

$2<x \leqq 4$



練習 2.43 次の連立不等式を解け．

(1) $\begin{cases} 5x-2<3x+4 \\ x^2-3x \leqq 4 \end{cases}$

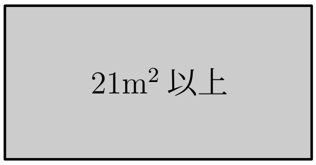
(2) $\begin{cases} x^2-5x+4 \leqq 0 \\ x^2-2x-3 \geqq 0 \end{cases}$

練習 2.44 次の不等式を解け.

(1) $-2 \leqq x^2 + 3x \leqq 4$

(2) $3 < x^2 - 2x \leqq 3x - 4$

応用例題 2.7 周の長さが 20m で，面積が 21m^2 以上の長方形状の囲いを作りたい.
短い方の辺の長さをどのような範囲にとればよいか.



考え方》 短い方の辺の長さを x m として，条件から不等式を作る.
長方形の辺の長さが正の数であることにも注意する.

解答 短い方の辺の長さを x m とすると，他方の辺の長さは
$(10-x)$ m である．$x > 0$ かつ $x < 10 - x$ から

$$0 < x < 5 \qquad \cdots ①$$

長方形の面積が 21m^2 以上なので　$x(10-x) \geqq 21$

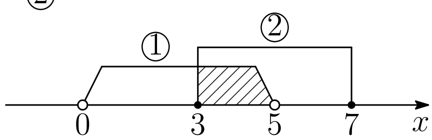
式を整理すると　$x^2 - 10x + 21 \leqq 0$

すなわち　$(x-3)(x-7) \leqq 0$

これを解くと　$3 \leqq x \leqq 7 \qquad \cdots ②$

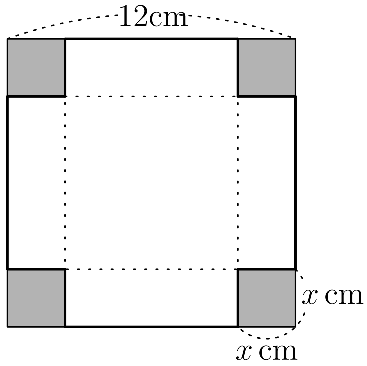
① と ② の共通範囲を求めて

$$3 \leqq x < 5$$



(答) 3m 以上 5m 未満

練習 2.45 1 辺が 12cm の正方形の厚紙がある．この厚紙の四隅から等しい正方形を切り取り，ふたのない箱を作る．底面の正方形の 1 辺を 6cm より長く，側面の長方形の面積を $10\mathrm{cm}^2$ 以上にするとき，切り取る正方形の 1 辺の長さをどのような範囲にとればよいか．



2.3.3 補充問題

7 放物線 $y = x^2 + 4x + 2$ は x 軸と 2 点で交わる．その交点を A，B とする．この放物線が x 軸から切り取る線分 AB の長さを求めよ．

8 次の 2 次不等式を満たす整数 x をすべて求めよ．

(1) $2x^2 + x - 6 < 0$ (2) $4x - 2 \geqq x^2$

9 2 次不等式 $ax^2 + 2ax - 3 < 0$ の解がすべての実数であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

10 ある速さで真上に打ち上げたボールの，打ち上げてから x 秒後の地上からの高さを h m とする．h の値が $h=-5x^2+40x$ で与えられるとき，ボールが地上から 60m 以上 75m 以下の高さにあるのは，x の値がどのような範囲にあるときか.

2.4　章末問題

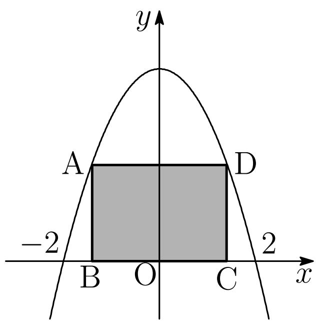
2.4.1　章末問題 A

1 放物線 $y=-2x^2+3x+1$ を平行移動したものが，2 点 $(-2,0)$，$(1,12)$ を通るとき，その放物線の方程式を求めよ.

2 次の 2 つの放物線の頂点が一致するとき，定数 a，b の値を求めよ．

$$y = 2x^2 + 4x, \quad y = x^2 + ax + b$$

3 放物線 $y = 4 - x^2$ と x 軸で囲まれた部分に，長方形 ABCD を，辺 BC が x 軸上にあるように内接させる．
この長方形の周の長さが最大となるときの辺 BC の長さを求めよ．



4 x の 2 次関数 $y = x^2 - mx + m$ の最小値を k とする.

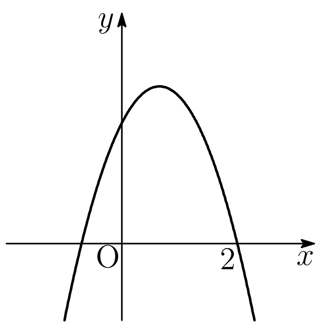
(1) k を m の式で表せ.

(2) k の値を最大にする m の値と, k の最大値を求めよ.

5 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが右の図のようになるとき, 次の値の符号を求めよ.

(1) a　　(2) c　　(3) $-\dfrac{b}{2a}$　　(4) b

(4) $b^2 - 4ac$　　(5) $a + b + c$



6 2次関数 $y = x^2 - 2ax + a$ が正の値しかとらないとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

7 a は定数とする．2次不等式 $x^2 - ax - 2a^2 < 0$ を次の場合について解け．

(1) $a > 0$ のとき　　(2) $a < 0$ のとき

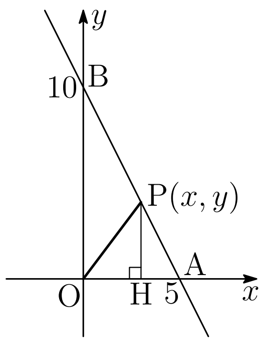
2.4.2　章末問題B

8 放物線 $y = 2x^2 - 4x + 5$ の頂点をPとする．次の問いに答えよ．

(1) x 軸に関して点Pと対称な点Qの座標を求めよ．

(2) この放物線と x 軸に関して対称な放物線の方程式を求めよ．

9 1次関数 $y = -2x + 10$ のグラフが，x 軸，y 軸と交わる点を，それぞれA，Bとする．点 $\mathrm{P}(x, y)$ が線分AB上を動くとき，次の問いに答えよ．



(1) OP^2 を x で表せ．

(2) 線分OPの長さの最小値を求めよ．

10 a は定数とする．関数 $y = x^2 - 4x$ $(a \leqq x \leqq a+2)$ の最大値，最小値を，次の場合について，それぞれ求めよ．

(1) $a \leqq 0$　　(2) $0 < a < 1$　　(3) $a = 1$　　(4) $1 < a < 2$　　(5) $2 \leqq a$

11 周の長さが一定である長方形には，いろいろな大きさのものがある．このうち，面積が最大になるものは正方形であることを示せ．

12 2 次関数 $y = x^2 + (m+1)x + m$ のグラフは，定数 m の値に関係なく常に x 軸と共有点をもつことを示せ．

13 2次関数 $y = x^2 - 2mx + 1$ のグラフが x 軸の正の部分と，異なる2点で交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ．

ヒント

8 (1) 点 (a, b) と x 軸について対称な点の座標は $(a, -b)$ である．
11 周の長さを $2a$ とおく．　**13** 頂点の x 座標，y 座標の符号に着目．

発展　放物線と直線の共有点の座標

放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ が共有点をもつとき，その点の x 座標は，2 次方程式 $ax^2+bx+c=mx+n$ の実数解である．
このことを利用して，共有点の座標を求めてみよう．

例 1　放物線 $y=x^2-4x+5$ と直線 $y=x+1$

共有点の x 座標は，次の 2 次方程式の実数解である．

$$x^2-4x+5=x+1$$

式を整理すると　　$x^2-5x+4=0$

これを解いて　　$x=1,\ 4$

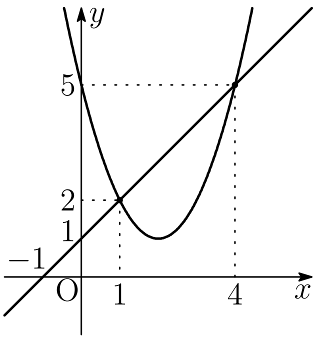
$y=x+1$ に代入すると

$x=1$ のとき　$y=1+1=2$

$x=4$ のとき　$y=4+1=5$

よって，共有点の座標は

$(1,\ 2),\ (4,\ 5)$



[終]

例 2　放物線 $y=x^2-4x+5$ と直線 $y=2x-4$

共有点の x 座標は，次の 2 次方程式の実数解である．

$$x^2-4x+5=2x-4$$

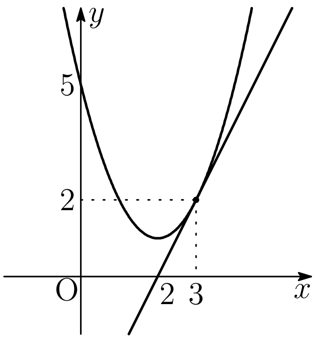
式を整理すると　　$x^2-6x+9=0$

これを解いて　　$x=3$

$y=2x-4$ に代入すると

$$y=2\cdot3-4=2$$

よって，共有点の座標は　$(3,\ 2)$



[終]

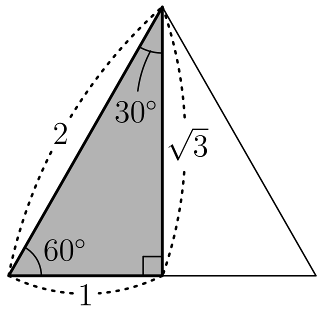
例 2 のような場合，放物線と直線は**接する**といい，ただ 1 つの共有点を**接点**という．

第 3 章　図形と計量

3.1　三角比

3.1.1　三角比

1 辺の長さが 2 の正三角形を半分に折ってできる直角三角形を考えると，3 辺の長さは，右の図のようになっている．以下では，直角三角形の 2 辺の長さの関係に着目してみよう．



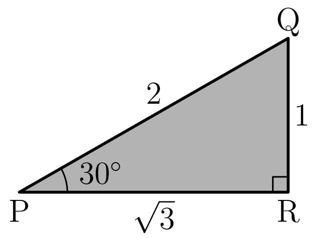
A ≫ 正弦・余弦・正接

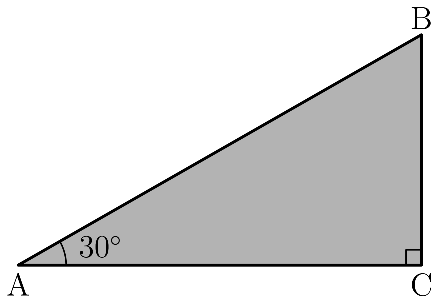
右の図の 2 つの直角三角形は，2 組の角がそれぞれ等しいので相似である．

直角三角形 ABC における

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}},\ \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}},\ \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} \qquad \cdots ①$$

の値は，それぞれ次のようになる．



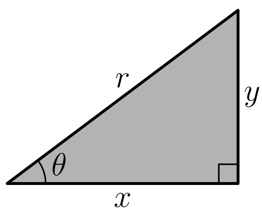


$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{PQ}} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PQ}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{PR}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

これから，次のことがわかる．

① の各値は，直角三角形 ABC の大きさに関係なく，いずれも一定になる．

直角三角形の鋭角の1つを$\overset{\text{シータ}}{\boldsymbol{\theta}}$とし，斜辺の長さを$r$，他の辺の長さを右の図のように$x$，$y$とするとき，



$$\frac{y}{r},\qquad \frac{x}{r},\qquad \frac{y}{x}$$

の各値は，三角形の大きさに関係なく，いずれも角θの大きさだけで決まる．これらを，それぞれθの

正弦 (sine)，**余弦** (cosine)，**正接** (tangent)

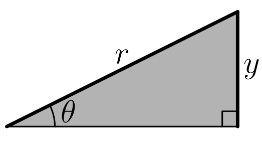
といい，$\boldsymbol{\sin\theta}$，$\boldsymbol{\cos\theta}$，$\boldsymbol{\tan\theta}$ と書く．

正弦を**サイン**，余弦を**コサイン**，正接を**タンジェント**ともいう．

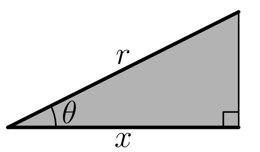
正弦，余弦，正接をまとめて**三角比**という．

三角比の定義

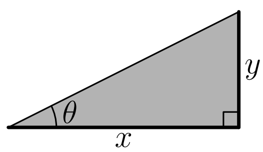
$\boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{y}{r}}$



$\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{x}{r}}$



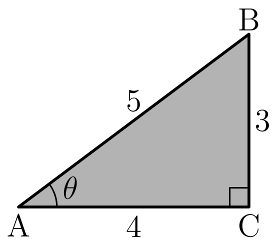
$\boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{y}{x}}$



例 3.1　$\boldsymbol{\theta}$ の正弦，余弦，正接

右の図の直角三角形ABCでは

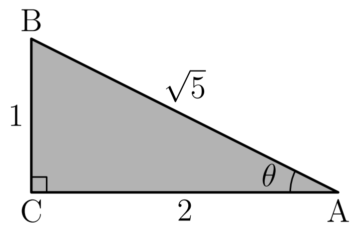
$$\sin\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{3}{5}$$
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{4}{5}$$
$$\tan\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{3}{4}$$



例 3.2　$\boldsymbol{\theta}$ の正弦，余弦，正接

右の図の直角三角形ABCでは

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\tan\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2}$$

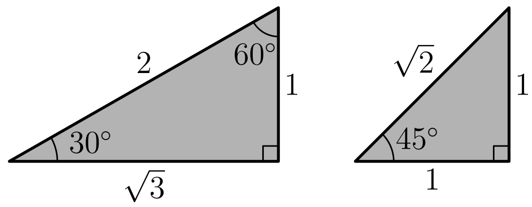


練習 3.1 下の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ．

B ≫ 30°，45°，60° の三角比

30°，45°，60° の三角比は，下の図から求められる．

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$



練習 3.2 次の値を求めよ．

(1) $\cos 30^\circ$，$\tan 30^\circ$

(2) $\sin 45^\circ$，$\tan 45^\circ$

(3) $\sin 60^\circ$，$\cos 60^\circ$

C》三角比の表

三角比 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値は，θ に対して決まっている．196 ページには，1° ごとの角 θ について，それらの値を表にして載せた．

この表の値は，小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで示したものである．たとえば

$$\sin 25^\circ = 0.4226, \qquad \cos 28^\circ = 0.8829$$

$$\tan 32^\circ = 0.6249$$

として使う．

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
⋮	⋮	⋮	⋮
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
⋮	⋮	⋮	⋮

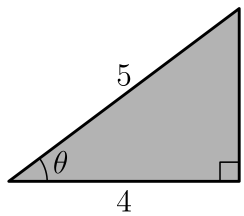
練習 3.3 次の値を三角比の表から求めよ．

(1) $\sin 12^\circ$　　(2) $\cos 48^\circ$　　(3) $\tan 75^\circ$

例 3.3 右の図における θ のおよその大きさ

図より　$\cos\theta = \dfrac{4}{5} = 0.8$

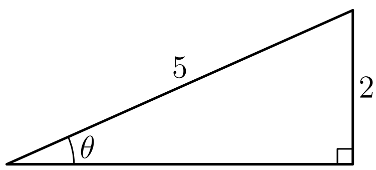
三角比の表から，$\cos\theta$ の値が 0.8 に近い θ を求めると　$\theta \fallingdotseq 37^\circ$



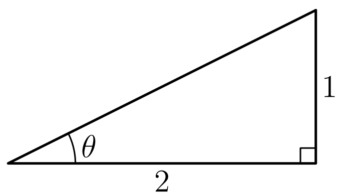
注意 $a \fallingdotseq b$ は,「a と b がほぼ等しい」ということを意味する．

練習 3.4 下の図における θ のおよその大きさを，三角比の表を用いて求めよ．

(1)



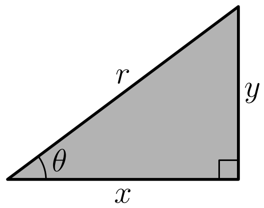
(2)



D 》三角比の応用

右の図の直角三角形では，

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

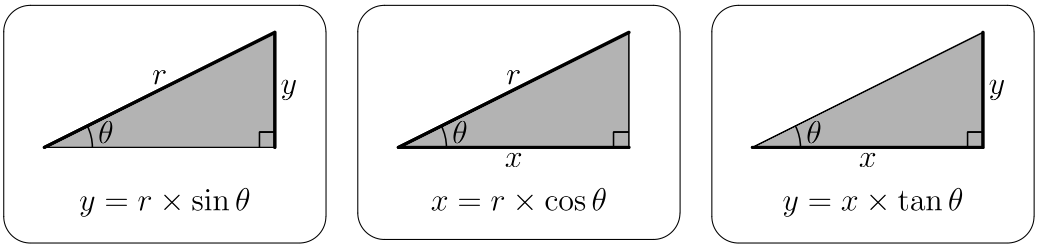


であるから，次が成り立つ．

$$y = r \times \sin\theta$$

同様にして，次が成り立つ．

$$x = r \times \cos\theta$$
$$y = x \times \tan\theta$$

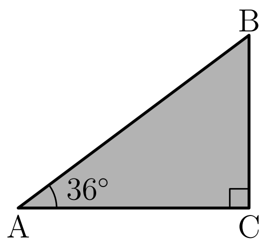


例 3.4 辺 BC の長さを表す式

右の図の直角三角形 ABC において，
辺 BC の長さを表す式は

$$\mathrm{BC} = \mathrm{AB} \times \sin 36^\circ$$
$$\mathrm{BC} = \mathrm{AC} \times \tan 36^\circ$$

となる．



練習 3.5 例 3.4 の図の直角三角形 ABC において，辺 AC の長さを表す式は次のようになる．$\boxed{}$ に sin，cos，tan のいずれかを入れよ．

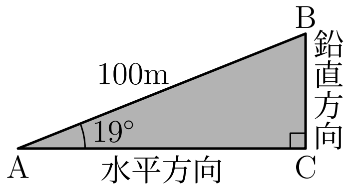
$$\mathrm{AC}{=}\mathrm{AB}\times\boxed{}\,36^\circ$$

$$\mathrm{AC}{=}\mathrm{BC}\times\boxed{}\,54^\circ$$ ← ∠B=54°

例題 3.1 傾斜角 19° の坂をまっすぐに 100m 登るとき，鉛直方向には何 m 登ったことになるか．1m 未満を四捨五入して求めよ．

解答 右の図において

$$\begin{aligned} BC &= AB \times \sin 19^\circ \\ &= 100 \times 0.3256 \\ &= 32.56 \end{aligned}$$



よって，鉛直方向に 33m 登ったことになる．

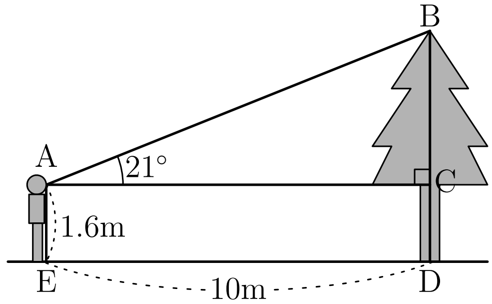
練習 3.6 例題 3.1 において，水平距離には何 m 進んだことになるか．1m 未満を四捨五入して求めよ．

応用例題 3.1 木の根もとから 10m 離れた地点に立って木の先端を見上げると，水平面とのなす角が 21° であった．目の高さを 1.6m として，木の高さを求めよ．ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ．

考え方》 まず，目の位置より上にある部分の木の高さを求める．

解答 右の図において

$$\begin{aligned} BC &= AC \times \tan 21^\circ \\ &= 10 \times 0.3839 \\ &= 3.839 \fallingdotseq 3.8 \end{aligned}$$



よって，木の高さ BD は

$$BD = 3.8 + 1.6 = 5.4$$

(答)　5.4m

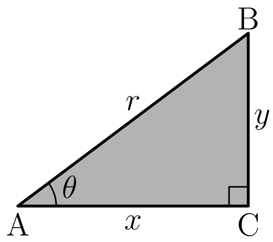
練習 3.7 鉄塔の先端の真下から 20m 離れた地点に立って鉄塔の先端を見上げると，水平面とのなす角が 40° であった．目の高さを 1.6m として，鉄塔の高さを求めよ．ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ．

3.1.2 三角比の相互関係

直角三角形では3辺の長さの関係として，三平方の定理が成り立つ．ここでは，三角比 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の間に，どのような関係が成り立つかを調べてみよう．

A 》三角比の相互関係

右の図の直角三角形 ABC において



$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

である．よって

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

となる．また，三平方の定理により

$$x^2 + y^2 = r^2$$

が成り立つことから

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1 \qquad \leftarrow \left(\tfrac{x}{r}\right)^2 + \left(\tfrac{y}{r}\right)^2 = 1$$

が得られる．また，この等式の両辺を $(\cos\theta)^2$ で割ると

$$1 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{1}{(\cos\theta)^2} \qquad \leftarrow \tfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

となる．

以上から，三角比の間に次の関係が成り立つ．

三角比の相互関係

1 $\boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

2 $\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

3 $\boldsymbol{1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

注意 $(\sin\theta)^2$，$(\cos\theta)^2$，$(\tan\theta)^2$ を，それぞれ $\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$，$\tan^2\theta$ と書く．

例題 3.2 $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．ただし，θ は鋭角とする．

解答 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から

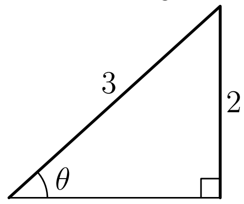
$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$\cos\theta > 0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

また $$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$



練習 3.8 $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．ただし，θ は鋭角とする．

例題 3.3 $\tan\theta = 2$ のとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．ただし，θ は鋭角とする．

解答 $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

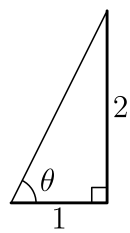
$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}$$

$\cos\theta > 0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

また $$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

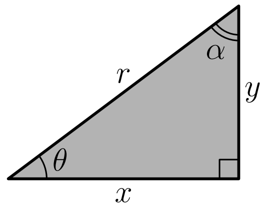
$\tan\theta = 2$



練習 3.9 $\tan\theta = \sqrt{2}$ のとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．ただし，θ は鋭角とする．

B ≫ $90^\circ - \theta$ の三角比

右の図において，次のことがいえる．



$$\sin\alpha = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\cos\alpha = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

また　$$\tan\alpha \times \tan\theta = \frac{x}{y} \times \frac{y}{x} = 1$$

$\alpha = 90^\circ - \theta$ であるから，鋭角 θ について，次の関係が成り立つ．

$90^\circ - \theta$ の三角比

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

$\boxed{◯ + △ = 90^\circ}$

$\sin ◯ = \cos △$

$\cos ◯ = \sin △$

$\tan ◯ = \dfrac{1}{\tan △}$

例 3.5　(1)　$\sin 53^\circ = \cos 37^\circ$　　$\leftarrow 53^\circ+37^\circ=90^\circ$

(2)　$\cos 80^\circ = \sin 10^\circ$　　$\leftarrow 80^\circ+10^\circ=90^\circ$

(3)　$\tan 75^\circ = \dfrac{1}{\tan 15^\circ}$　　$\leftarrow 75^\circ+15^\circ=90^\circ$

練習 3.10　次の$\boxed{}$に適する角度を入れよ．

(1)　$\sin 62^\circ = \cos\boxed{}$　　(2)　$\cos 78^\circ = \sin\boxed{}$

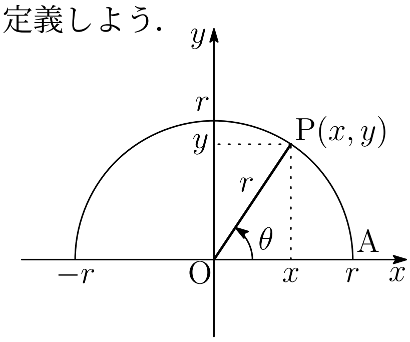
練習 3.11　次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ．

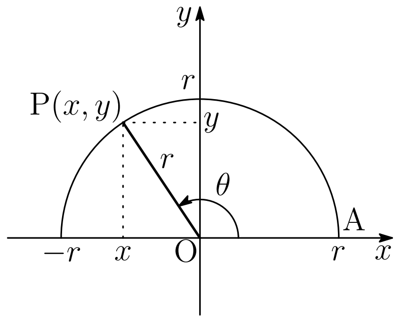
(1)　$\sin 64^\circ$　　(2)　$\cos 58^\circ$　　(3)　$\tan 83^\circ$

3.1.3　三角比の拡張

これまでは，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲にある θ についての三角比を扱ってきたが，ここでは θ の範囲を $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ に広げて三角比を定義しよう．

A》座標を用いた三角比の定義





右の図のように，座標平面上において原点Oを中心とする半径 r の半円をかき，この半円と x 軸の正の部分との交点をAとする．

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲にある θ に対して，$\angle\mathrm{AOP} = \theta$ となる点Pをこの半円上にとり，点Pの座標を (x, y) とする．

このとき，θ の三角比を次の式で定義する．$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のときは，138 ページの定義と同じになる．

$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r},\quad \tan\theta = \frac{y}{x}}$$

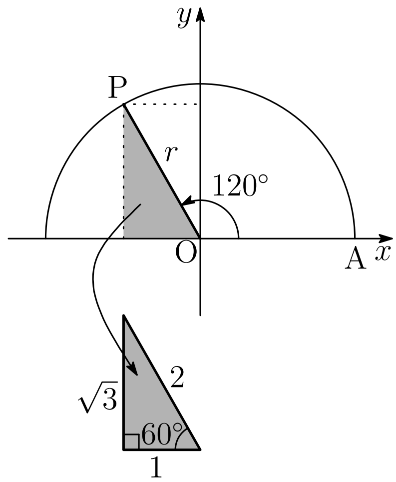
0°，90°，180° の三角比は，次のようになる．

θ	**Pの座標**	**正弦**	**余弦**	**正接**
0°	$(r, 0)$	$\sin 0^\circ = 0$	$\cos 0^\circ = 1$	$\tan 0^\circ = 0$
90°	$(0, r)$	$\sin 90^\circ = 1$	$\cos 90^\circ = 0$	なし
180°	$(-r, 0)$	$\sin 180^\circ = 0$	$\cos 180^\circ = -1$	$\tan 180^\circ = 0$

注意　$\theta = 90^\circ$ のときは，$x = 0$ であるから，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ は定義されない．

例 3.6　120° の正弦，余弦，正接

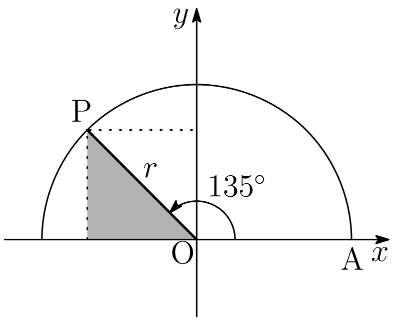
右の図で，$\angle\mathrm{AOP} = 120^\circ$ とする．
半円の半径を $r = 2$ にとると，
点Pの座標は $(-1, \sqrt{3})$ である．
そこで $x = -1$，$y = \sqrt{3}$ として



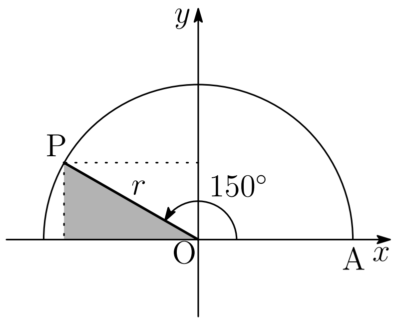
$$\sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 120^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$\tan 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

練習 3.12 次の角の正弦，余弦，正接の値を，下の図などを用いて求めよ．

(1) 135°
$r = \boxed{\quad}$ にとると，
点 P の座標は $\boxed{\qquad\quad}$



(2) 150°
$r = \boxed{\quad}$ にとると，
点 P の座標は $\boxed{\qquad\quad}$



三角比の符号とそのとる値の範囲については，次のようになる．

$\boldsymbol{\theta}$	**0°**	**鋭角**	**90°**	**鈍角**	**180°**	**とる値の範囲**
$\sin\theta$	0	+	1	+	0	$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$
$\cos\theta$	1	+	0	−	−1	$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$
$\tan\theta$	0	+		−	0	実数全体

補足 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ の範囲の角 θ を鈍角という．

B 》$180^\circ-\theta$ の三角比

右の図のように，半径 r の半円上に $\angle\mathrm{AOP}=\theta$ となる点 $\mathrm{P}(x,y)$ をとる．

y 軸に関して点 P と対称な点 Q をとると，Q の座標は $(-x,y)$ である．

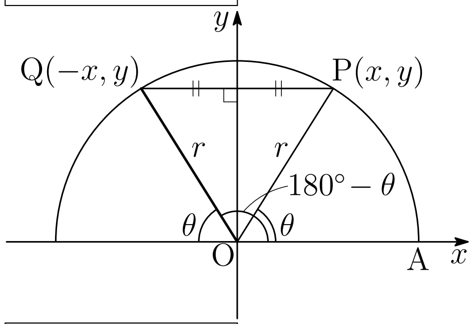
このとき，$180^\circ-\theta$ の三角比は，次のようになる．

$$\sin(180^\circ-\theta)=\frac{y}{r}=\sin\theta$$

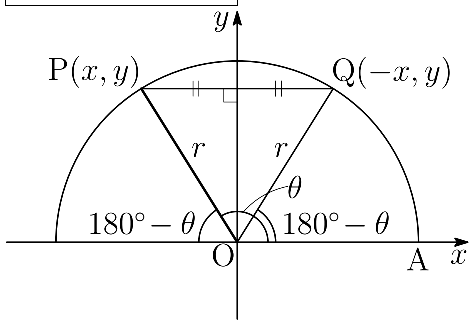
$$\cos(180^\circ-\theta)=\frac{-x}{r}=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=\frac{y}{-x}=-\tan\theta$$

θ が鋭角の場合



θ が鈍角の場合



一般に，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の関係が成り立つ．

$180^\circ-\theta$ の三角比

$$\boldsymbol{\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta}$$

$$\boldsymbol{\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta}$$

$$\boldsymbol{\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta}$$

$\bigcirc+\square=180^\circ$

$\sin\bigcirc=\sin\square$

$\cos\bigcirc=-\cos\square$

$\tan\bigcirc=-\tan\square$

上の関係を使うと，鈍角の三角比を鋭角の三角比で表すことができる．

例 3.7
(1) $\sin 120^\circ=\sin 60^\circ$ $\leftarrow$ $120^\circ+60^\circ=180^\circ$

(2) $\cos 135^\circ=-\cos 45^\circ$ $\leftarrow$ $135^\circ+45^\circ=180^\circ$

(3) $\tan 150^\circ=-\tan 30^\circ$ $\leftarrow$ $150^\circ+30^\circ=180^\circ$

練習 3.13 次の値を，三角比の表を用いて求めよ．

(1) $\sin 140^\circ$ (2) $\cos 156^\circ$ (3) $\tan 100^\circ$

C 》三角比の値が与えられたときの θ

ある角 θ の三角比の値が与えられたとき，その θ を求めてみよう．

例 3.8 (1) **$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ**

半径 2 の半円上で，y 座標が 1 である点は 2 つある．

求める θ は，下の図 (1) で $\angle$AOP と $\angle$AOQ である．

よって $\theta = 30^\circ,\ 150^\circ$ ← $150^\circ=180^\circ-30^\circ$

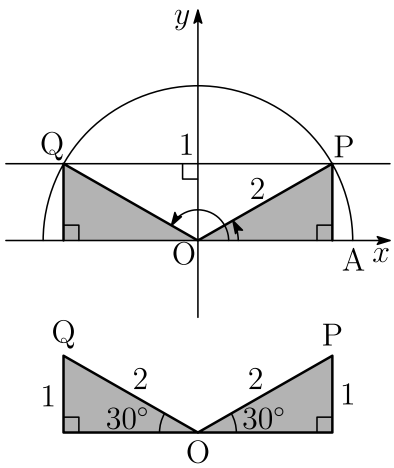
(2) **$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ**

半径 $\sqrt{2}$ の半円上で，x 座標が -1 である点は 1 つある．

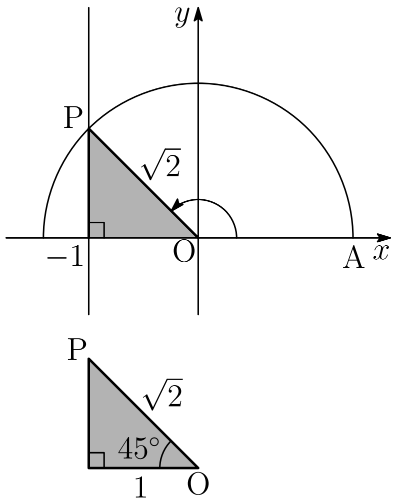
求める θ は，下の図 (2) で $\angle$AOP である．

よって $\theta = 135^\circ$ ← $135^\circ=180^\circ-45^\circ$

(1)



(2)



練習 3.14 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次のような θ を求めよ.

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

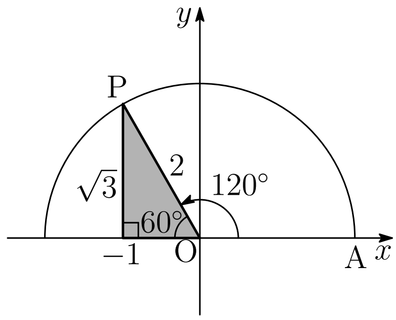
例 3.9 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\tan\theta = -\sqrt{3}$ を満たす θ

$-\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{-1}$ であるから，

求める θ は右の図で $\angle\mathrm{AOP}$

である.

よって　　$\theta = 120^\circ$



練習 3.15 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次のような θ を求めよ.

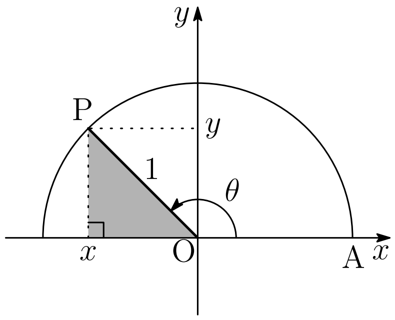
(1) $\tan\theta = 1$　　(2) $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

D》三角比の相互関係

右の図のような半径 1 の半円上に，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ となる点 $\mathrm{P}(x, y)$ をとる．

147 ページの三角比の定義で，$r=1$ とすると，x，y は次のようになる．

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta$$



また，三平方の定理を用いると，

$$x^2+y^2=1^2$$

がいつでも成り立つことがいえる．

したがって，143 ページで示した三角比の相互関係は，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲にある角 θ についても，そのまま成り立つ．

三角比の相互関係

1　$\boldsymbol{\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

2　$\boldsymbol{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$

3　$\boldsymbol{1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

例題 3.4　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．$\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．

解答　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

$\sin\theta \geqq 0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

また

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\div\left(-\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times(-3)=-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

練習 3.16 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうち，1 つが次の値をとるとき，各場合について他の 2 つの値を求めよ．

(1) $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$

(2) $\tan\theta = -2$

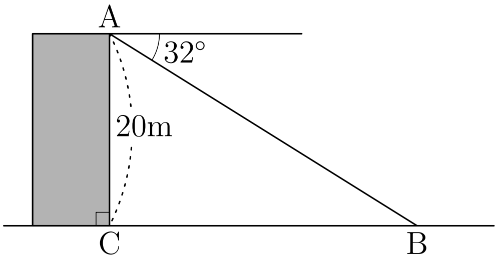
■ 代表的な角の三角比のまとめ

次の表の空らんに適する数値を入れて，表を完成させよう．

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$			0
$\cos\theta$	1			$\dfrac{1}{2}$	0		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		-1
$\tan\theta$	0		1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0

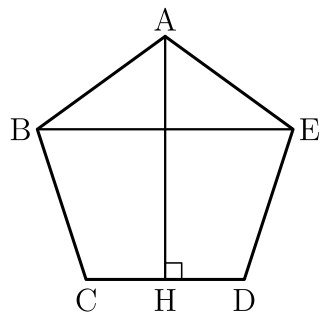
3.1.4 補充問題

1 地上から高さ 20m の地点 A で地上の場所 B を見下ろしたら，その角は右図のように水平面に対して 32° であった．場所 B は，地点 A の真下から何 m 離れているか．1m 未満を四捨五入して答えよ．



2 1 辺の長さが 10 の正五角形 ABCDE において，次の線分の長さを，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ．

(1) 対角線 BE



(2) 頂点 A から辺 CD に下ろした垂線 AH

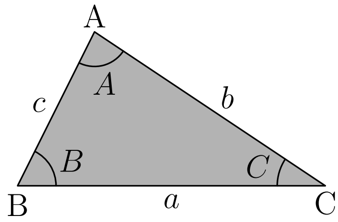
3 $\sin\theta = \dfrac{1}{4}$ のとき，次の各場合について，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(1) $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$　　(2) $90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$

3.2　正弦定理と余弦定理

3.2.1　正弦定理

以下では，△ABC において頂点 A，B，C に向かい合う辺 BC，CA，AB の長さを，それぞれ a，b，c で表す．また，∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C で表す．

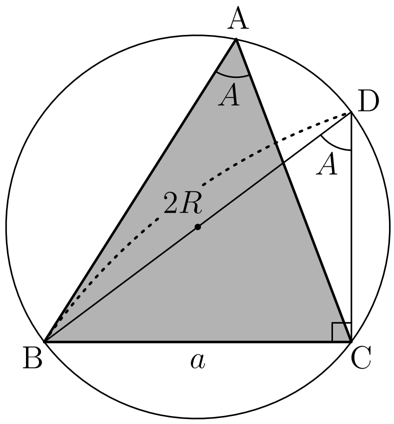


△ABC において，3 辺の長さ a，b，c と 3 つの角の正弦 $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ の間に成り立つ関係を調べてみよう．

A 》三角形の外接円と正弦

三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の**外接円**という．
△ABC の外接円の半径を R とする．

［1］ $0° < A < 90°$ のとき，右の図で，線分 BD は △ABC の直径とする．



このとき，円周角と中心角の性質[1]により，

$$\angle \mathrm{BDC} = \angle \mathrm{BAC} = A$$
$$\angle \mathrm{BCD} = 90°$$

が成り立つ．また，$\mathrm{BD} = 2R$ である．
よって，△BCD において

$$\boldsymbol{a = 2R \sin A}$$

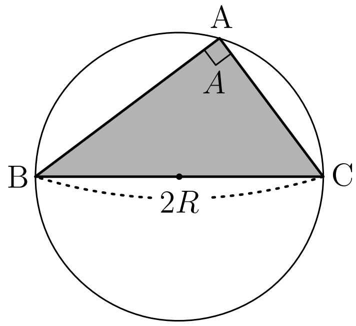
が成り立つ．

$A = 90°$ と $90° < A < 180°$ のときは，次ページ［2］,［3］で調べる．

[1] 1 つの弧に対する円周角の大きさは一定で，中心角の大きさの半分である．
とくに，半円の弧に対する円周角の大きさは 90° である．

■次の$\boxed{\quad}$の中に適する文字や数値を入れ，説明を完成させよう．

［2］$A = 90^\circ$ のとき



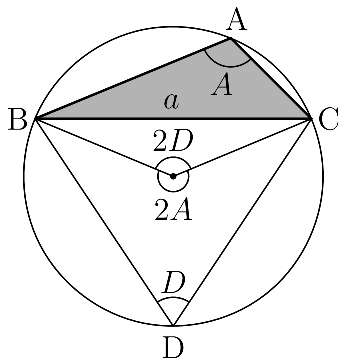
辺 BC は，△ABC の外接円の直径になる．外接円の半径は R であるから，$a = \boxed{\quad}$ である．

一方，$\sin A = \sin 90^\circ = \boxed{\quad}$ であるから，

$$\boldsymbol{a = 2R\sin A}$$

が成り立つ．

［3］$90^\circ < A < 180^\circ$ のとき



△ABC の外接円の周上に，辺 BC に関して点 A とは反対側の点 D をとる．

∠BDC $= D$ とすると，円周角と中心角の性質により

$$2A + 2D = \boxed{\quad}^\circ$$

すなわち　$A + D = 180^\circ$

が成り立つ[2]から

$$\sin D = \sin\left(\boxed{\quad}^\circ - A\right) = \sin A \quad \cdots ①$$

$0^\circ < D < 90^\circ$ であるから，［1］より △BCD において，

$$\boxed{\quad} = 2R\sin D$$

が成り立つ．

したがって，① により，

$$\boldsymbol{a = 2R\sin A}$$

が成り立つ．

---

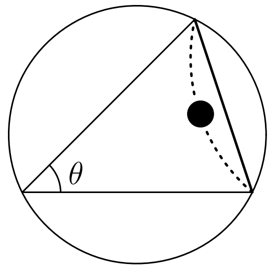
[2] 四角形が円に内接するとき，向かい合う角の和は 180° になる．

B 》正弦定理

　一般に，△ABC の外接円の半径を R とすると，

$$a = 2R\sin A \quad \text{すなわち} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

が成り立つ．



$$\frac{\bullet}{\sin\theta} = 2R$$

　同様に，

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が成り立つ．

　したがって，次の**正弦定理**が得られる．

正弦定理

　△ABC の外接円の半径を R とすると，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

補足 上の関係式を比の形で書くと，$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C$ となる．
この比の関係を，$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ と書くことがある．

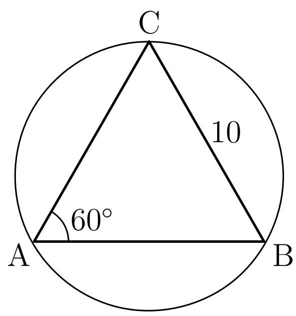
例 3.10　正三角形の外接円の半径

1 辺の長さが 10 の正三角形の外接円の半径を R とする．
正弦定理により

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = 2R$$

が成り立つから

$$R = \frac{10}{2\sin 60^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$



$\leftarrow \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} = 5.77\cdots$

練習 3.17　次のような △ABC において，外接円の半径 R を求めよ．

(1) $a=5$，$A=45^\circ$　　(2) $b=\sqrt{3}$，$B=120^\circ$

練習 3.18　$c=10$ である △ABC において，外接円の半径が $R=10$ のとき，角 C を求めよ．

　正弦定理によると，次が成り立つ．

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\quad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

　三角形の 1 辺の長さと 2 角の大きさがわかっている場合には，これらを用いて，他の辺の長さを求めることができる．

例題 3.5　△ABC において，$A=45^\circ$，$B=60^\circ$，$b=\sqrt{6}$ であるとき，辺 BC の長さ a を求めよ．

解答　正弦定理により

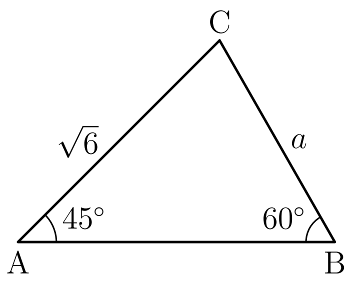
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

よって

$$a\sin 60^\circ=\sqrt{6}\sin 45^\circ$$

$$a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \leftarrow\ \sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$$

したがって　　$a=2$



練習 3.19 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ．

(1) $a=\sqrt{2}$，$A=30^\circ$，$B=45^\circ$ のとき，辺 CA の長さ b

(2) $b=4$，$B=45^\circ$，$C=60^\circ$ のとき，辺 AB の長さ c

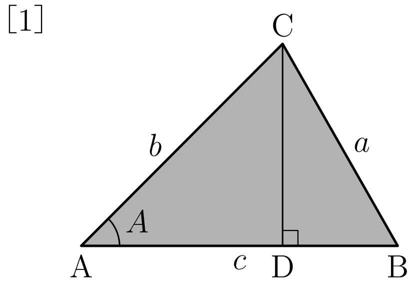
(3) $c=3$，$A=120^\circ$，$C=30^\circ$ のとき，辺 BC の長さ a

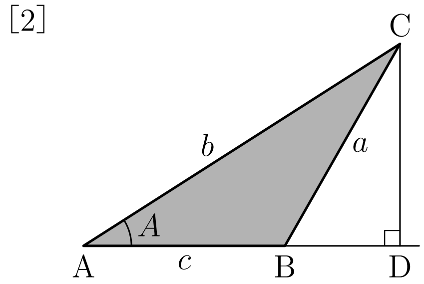
3.2.2 余弦定理

直角三角形においては，3辺の長さに関する三平方の定理が成り立つ．
ここでは，一般の三角形の3辺の長さの間に成り立つ関係を調べよう．

A》余弦定理

△ABCの頂点Cから辺ABまたはその延長に垂線CDを下ろす．





上の図［1］,［2］では，いずれの場合にも次が成り立つ．

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CD}^2 + \mathrm{BD}^2,$ ⟵ 三平方の定理

$\mathrm{CD}^2 = (b\sin A)^2,\ \mathrm{BD}^2 = (c - b\cos A)^2$ ⟵ 図［2］では $\mathrm{BD} = b\cos A - c$

よって，BC^2 すなわち a^2 は次のように表される．

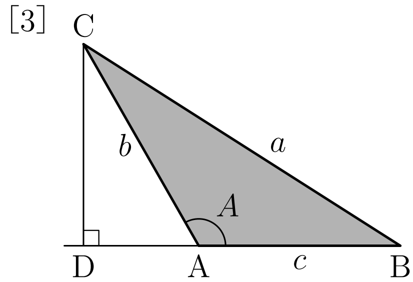
$$\begin{aligned} a^2 &= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$

⟵ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

練習 3.20 右の図［3］の場合にも

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CD}^2 + \mathrm{BD}^2,$$
$$\mathrm{CD}^2 = (b\sin A)^2,$$
$$\mathrm{BD}^2 = (c - b\cos A)^2$$

が成り立つことを確かめよ．

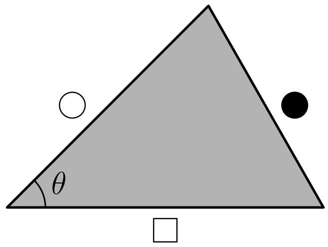


前ページで調べたことから，次の**余弦定理**が得られる．

余弦定理

△ABC において，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$
$$\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B}$$
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$



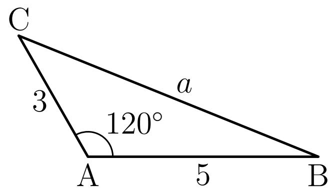
$$●^2 = ○^2 + □^2 - 2\,○□\cos\theta$$

三角形の 2 辺の長さとその間の角の大きさがわかっている場合には，余弦定理を用いて，残りの辺の長さを求めることができる．

例題 3.6 △ABC において，$b = 3$，$c = 5$，$A = 120°$ であるとき，辺 BC の長さ a を求めよ．

解答 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 3^2 + 5^2 - 2\cdot3\cdot5\cos 120° \\ &= 9 + 25 - 2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 49 \end{aligned}$$



$a > 0$ であるから　　$a = 7$

練習 3.21 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ．

(1) $b = 4$，$c = 5$，$A = 60^\circ$ のとき，辺 BC の長さ a

(2) $a = 3$，$c = 2\sqrt{2}$，$B = 45^\circ$ のとき，辺 CA の長さ b

(3) $a = 2$，$b = \sqrt{3}$，$C = 150^\circ$ のとき，辺 AB の長さ c

B》三角形の角の余弦を表す式

余弦定理によると，△ABC において，次が成り立つ．

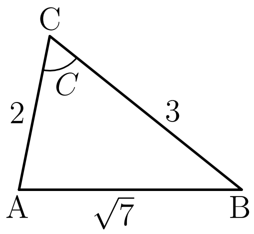
$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

△ABC において 3 辺の長さがわかっている場合には，上の式を用いることにより，3 つの角の大きさを求めることができる．

例題 3.7 △ABC において，$a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{7}$ のとき，$\cos C$ の値と角 C を求めよ．

解答 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ &= \frac{3^2+2^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}{2\cdot 3\cdot 2}\\ &= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$



また，$\cos C = \dfrac{1}{2}$ を満たす C は　　$C = 60^\circ$

練習 3.22 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ．

(1) $a=7$，$b=3$，$c=8$ のとき，$\cos A$ の値と角 A

(2) $a=1$，$b=\sqrt{5}$，$c=\sqrt{2}$ のとき，$\cos B$ の値と角 B

△ABC において，$\cos A$ の符号は $b^2+c^2-a^2$ の符号と同じなので，b^2+c^2 と a^2 の大小によって，次のことがいえる．

b^2+c^2 と a^2 の大小	$b^2+c^2>a^2$	$b^2+c^2=a^2$	$b^2+c^2<a^2$
$\cos A$ の符号	$\cos A>0$	$\cos A=0$	$\cos A<0$
角 A の種類	A は鋭角	A は直角	A は鈍角

3.2.3　正弦定理・余弦定理の応用

正弦定理と余弦定理は，三角形の形状を調べたり，土地の測量や空間図形における線分や角の計量などにも活用できる便利な定理である．

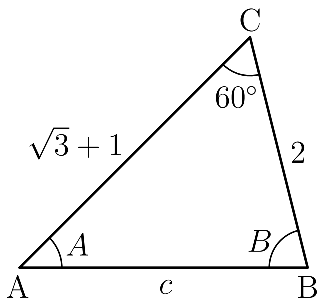
A 》三角形の辺と角

三角形の辺や角についての条件が与えられたとき，その条件を満たす三角形の形状を調べよう．

応用例題 3.2　$\triangle$ABC において，$a=2$，$b=\sqrt{3}+1$，$C=60^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

考え方 》　余弦定理により c，A が求められる．
B は $B=180^\circ-(A+C)$ から求められる．

解答　余弦定理により



$$\begin{aligned} c^2 &= 2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot 2(\sqrt{3}+1)\cos 60^\circ \\ &= 4+(3+2\sqrt{3}+1)-4(\sqrt{3}+1)\times\frac{1}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$c>0$ であるから　　$c=\sqrt{6}$

余弦定理により　　$\cos A=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{6})^2-2^2}{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{6}}$

$$=\frac{2(3+\sqrt{3})}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

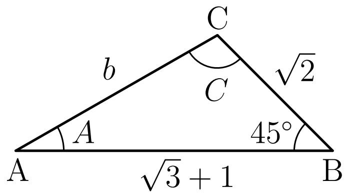
$\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす A は　　$A=45^\circ$

したがって　　$B=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$

(答) $c=\sqrt{6}$，$A=45^\circ$，$B=75^\circ$

補足　c を求めた後，A は正弦定理によっても求められる．$\sin A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるが，$A+B+C=180^\circ$，$C=60^\circ$ より，$A=135^\circ$ は不適である．

練習 3.23 △ABC において，$a=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}+1$，$B=45^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．



応用例題 3.3 △ABC において次が成り立つとき，角 A を求めよ．

$$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$$

考え方》 157 ページの「補足」を参照．角 A は，3 辺の長さ a, b, c の比がわかれば，余弦定理から求められる．

解答 正弦定理により　$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

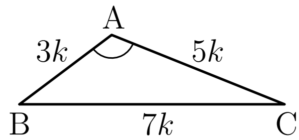
が成り立つから　$a : b : c = 7 : 5 : 3$

となる．

このとき，正の数 k を用いて

$$a = 7k,\ b = 5k,\ c = 3k$$

と表すことができる．



余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{(5k)^2 + (3k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 3k} \\ &= \frac{-15k^2}{30k^2} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって　$A = 120°$

補足 $a : b : c = 7 : 5 : 3$ である △ABC はどれも相似であり，大きさによらず常に $A = 120°$ となる．

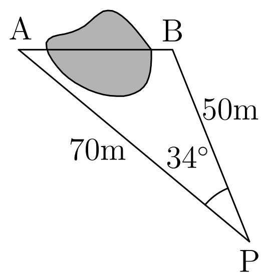
練習 3.24 △ABC において次が成り立つとき，角 B を求めよ．

$$\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 7 : 3$$

B》測量

建物や山の高さなどに限らず，平地でも 2 地点間の距離が直接は測れない場合がある．このような場合には，直接測れる距離や角度を使って，正弦定理や余弦定理などから求めるのも 1 つの方法である．

応用例題 3.4 右の図のように，池をはさんで 2 地点 A，B がある．地点 P から A と B を見て $\angle\mathrm{APB}$ を測ると 34° で，また A，P 間の距離は 70m，B，P 間の距離は 50m であった．A，B 間のおよその距離を求めよ．



考え方》 余弦定理を使う．なお，三角比の表から，$\cos 34^\circ = 0.8290$ である．

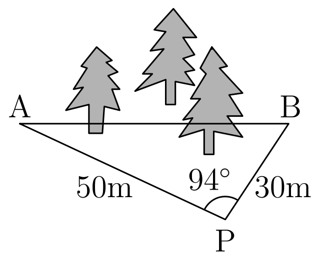
解答 $\triangle\mathrm{APB}$ において，余弦定理を使うと

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 - 2 \times \mathrm{AP} \times \mathrm{BP} \times \cos 34^\circ \\ &= 70^2 + 50^2 - 2 \times 70 \times 50 \times 0.8290 \\ &= 4900 + 2500 - 5803 \\ &= 1597\end{aligned}$$

$\mathrm{AB} > 0$ であるから　　$\mathrm{AB} = \sqrt{1597} \fallingdotseq 40$　　(答) およそ 40m

補足 $\sqrt{1597} \fallingdotseq \sqrt{1600} = 40$ と考えた．$\sqrt{1597} = 39.96\cdots$ である．

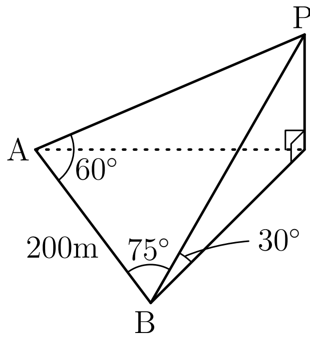
練習 3.25 右の図のように，林をはさんで 2 地点 A，B がある．地点 P から A と B を見て $\angle\mathrm{APB}$ を測ると 94° で，また A，P 間の距離は 50m，B，P 間の距離は 30m であった．A，B 間のおよその距離を求めよ．



応用例題 3.5 山の高さを求めるため，200m 離れた山のふもとの 2 地点 A と B から，山の頂上 P を見ると

$$\angle \mathrm{PAB} = 60^\circ, \quad \angle \mathrm{PBA} = 75^\circ$$

であった．また，B から P を見上げた角度は 30° であった．図において，山の高さ PH を求めよ．



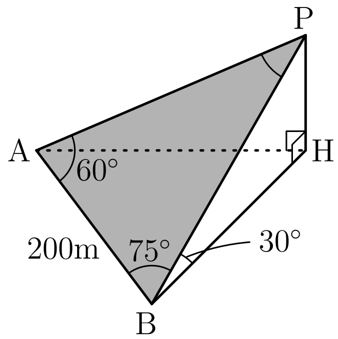
考え方》 図で，$\mathrm{PH} = \mathrm{BP}\sin 30^\circ$ である．そこで，$\triangle\mathrm{ABP}$ に正弦定理を使って，まず BP の長さを求める．

解答　　$\angle \mathrm{APB} = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

$\triangle\mathrm{ABP}$ に正弦定理を使うと　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{200}{\sin 45^\circ}$

よって　$\mathrm{BP} = 200 \times \sin 60^\circ \times \dfrac{1}{\sin 45^\circ}$

$$= 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = 100\sqrt{6}$$



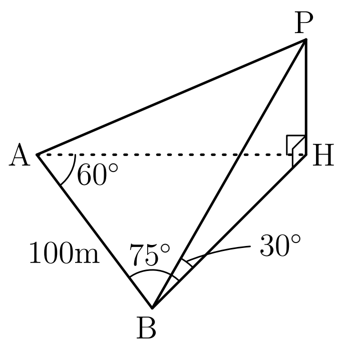
求める山の高さは　$\mathrm{PH} = \mathrm{BP}\sin 30^\circ = 100\sqrt{6} \times \dfrac{1}{2} = 50\sqrt{6}$　　(答) $50\sqrt{6}$ m

補足 $50\sqrt{6} = 122.4\cdots$ となり，山の高さは約 122m である．

練習 3.26 100m 離れた 2 地点 A と B から，気球 P の真下の地点 H を見たとき，

$$\angle \mathrm{HAB} = 60^\circ, \quad \angle \mathrm{HBA} = 75^\circ$$

であった．また，B から P を見上げた角度は 30° であった．図において，気球 P の高さ PH を求めよ．



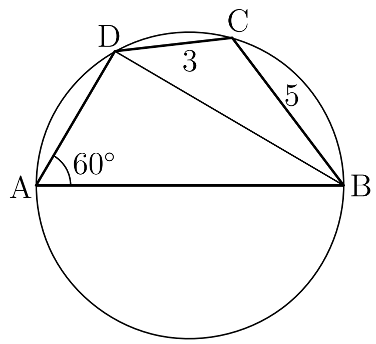
3.2.4　補充問題

4 円に内接する四角形 ABCD において，

$$\angle \mathrm{A} = 60^\circ,\ \mathrm{BC} = 5,\ \mathrm{CD} = 3$$

のとき，次のものを求めよ．

(1)　線分 BD の長さ　　(2)　円の半径



5 △ABC において，$a : b = 7 : 3$，$A = 60^\circ$ であるとき，$\sin B$ の値を求めよ．

6 △ABC の 3 辺の長さが次のようなとき，角 A が鋭角，直角，鈍角のいずれであるかを調べよ．

(1)　$a = 9$，$b = 4\sqrt{2}$，$c = 7$　　(2)　$a = \sqrt{7}$，$b = \sqrt{6}$，$c = 2$

(3)　$a = 2\sqrt{10}$，$b = 4$，$c = 4$

3.3　図形の計量

3.3.1　三角形の面積

三角形の面積を求めるには，次の計算式がある．

三角形の面積 $=$ 底辺 $\times$ 高さ $\div\, 2$

ここでは，この計算式から三角比を使う計算式を導いてみよう．

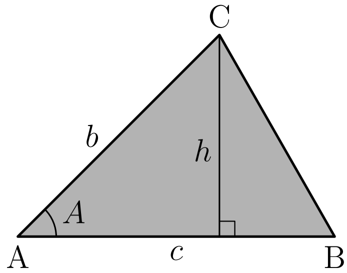
A ≫ 正弦と三角形の面積

△ABC において，辺 AB を底辺とするときの高さを h とすると，

$$h = b\sin A$$

である．よって，△ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times c \times b\sin A$$



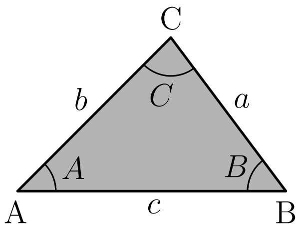
一般に，三角形の面積について，次のことが成り立つ．

三角形の面積

△ABC の面積 S は，次の式で表される．

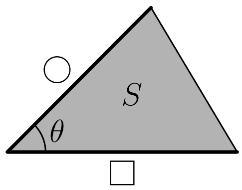
$$S = \frac{1}{2}bc\sin A, \quad S = \frac{1}{2}ca\sin B,$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C$$



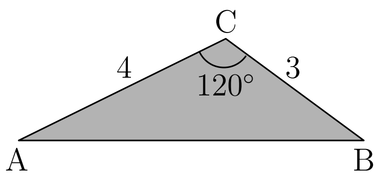
三角形の面積 S は，2 辺の長さとその間の角の大きさから求めることができる．

$$S = \frac{1}{2}○□\sin\theta$$



例 3.11　$a = 3$，$b = 4$，$C = 120°$ である △ABC の面積 S

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab\sin C \\ &= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\sin 120° \\ &= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$



練習 3.27 次のような △ABC の面積 S を求めよ．

(1) $b=10$，$c=8$，$A=45^\circ$　　(2) $a=6$，$c=5$，$B=150^\circ$

(3) 1 辺の長さが 4 である正三角形 ABC

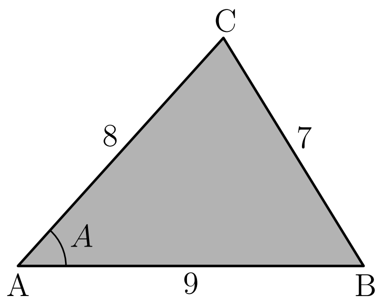
B 》三角形の 3 辺の長さと面積

例題 3.8 △ABC において，3 辺の長さが $a=7$，$b=8$，$c=9$ であるとき，次のものを求めよ．

(1) $\cos A$ の値　　(2) $\sin A$ の値　　(3) 面積 S

解答　(1) 余弦定理から

$$\cos A = \frac{8^2+9^2-7^2}{2\cdot8\cdot9} = \frac{96}{2\cdot8\cdot9} = \frac{2}{3}$$



(2) $\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

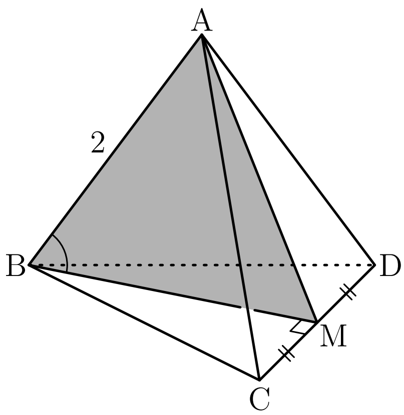
(3) $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot8\cdot9\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}$
$= 12\sqrt{5}$

練習 3.28 3 辺の長さが次のような $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S を求めよ．

(1) $a = 5,\ \ b = 7,\ \ c = 8$

(2) $a = 13,\ \ b = 14,\ \ c = 15$

C》空間図形への応用



応用例題 3.6 1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 CD の中点を M とするとき，次のものを求めよ．

(1) $\cos\angle\mathrm{ABM}$ の値

(2) $\triangle\mathrm{ABM}$ の面積 S

考え方》 (1)　$\triangle\mathrm{ABM}$ において，3 辺の長さから求める．
(2)　三角比の相互関係を用いて $\sin\angle\mathrm{ABM}$ を求める．

解答　(1) $\mathrm{AM}=\mathrm{BM}=\mathrm{BC}\sin 60^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

よって，$\triangle\mathrm{ABM}$ において

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{ABM}&=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BM}^2-\mathrm{AM}^2}{2\times\mathrm{AB}\times\mathrm{BM}}\\&=\frac{2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{2\times 2\times\sqrt{3}}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(2) $\sin\angle\mathrm{ABM}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

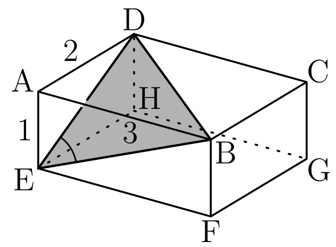
よって

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{BM}\times\sin\angle\mathrm{ABM}\\&=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

練習 3.29 右の図のように,

$$\mathrm{AB}=3,\ \mathrm{AD}=2,\ \mathrm{AE}=1$$

である直方体 ABCD-EFGH がある.



(1) $\cos\angle\mathrm{BED}$ の値を求めよ.

(2) $\triangle\mathrm{BED}$ の面積 S を求めよ.

■ 正四面体の体積

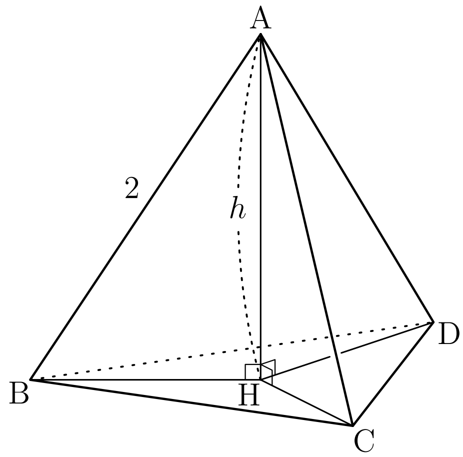
次の□に適する数値を入れて，説明を完成させよう。

前ページの応用例題 3.6 において，正四面体 ABCD の体積 V を求めることができる．

正四面体 ABCD を角錐(すい)CABM と角錐 DABM に分けると，2 つの角錐は，底面の △ABM が共通で高さが等しいから，体積が等しい．

したがって，正四面体 ABCD の体積 V は，次の式で求められる．

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{ABM} \times \mathrm{CM} \times \square$$

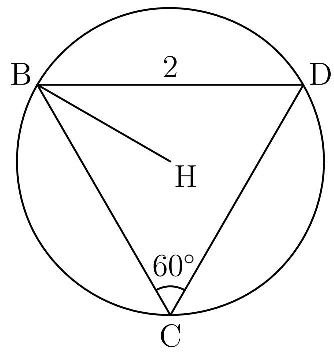


また，次のように考えることもできる．

頂点 A から底面の正三角形 BCD に垂線 AH を下ろすと，AH の長さは正四面体の高さ h に等しい．

点 H は △BCD の外接円の中心で，BH は半径である．BH の長さを求めるには，△BCD において，正弦定理により

$$\frac{2}{\sin 60^\circ} = \square \times \mathrm{BH}$$



よって

$$\mathrm{BH} = \frac{2}{\square \times \sin 60^\circ} = \frac{\square}{\sqrt{3}}$$

また　$h = \mathrm{AH}$

$$= \sqrt{2^2 - \mathrm{BH}^2}$$

$$= \sqrt{4 - \left(\frac{\square}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\square}{\sqrt{3}}$$

△BCD の面積 S は　$S = \frac{1}{2} \cdot \square^2 \cdot \sin 60^\circ = \square$

したがって　$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times \square \times \frac{\square}{\sqrt{3}} = \frac{\square}{\square}$

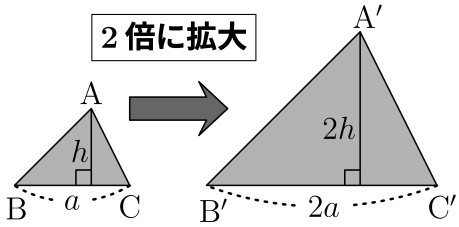
3.3.2 相似な図形の面積比・体積比

実物を拡大または縮小して作った複写物や実物の模型などは，大きさは違っても実物と同じ形をしている．
ここでは，図形を拡大または縮小すると，面積や体積がどう変化するかを調べよう．

A 》相似な平面図形の面積比

まず，相似[3]な 2 つの平面図形について，面積比を調べてみよう．

例 3.12 相似な 2 つの三角形の面積比



$\triangle A'B'C'$ と $\triangle ABC$ は相似で，相似比は $2:1$ であるとする．$\triangle ABC$ の底辺 BC の長さを a，高さを h とすると，$\triangle A'B'C'$ の底辺 $B'C'$ の長さは $2a$，高さは $2h$ である．
$\triangle ABC$ の面積を S，$\triangle A'B'C'$ の面積を S' とすると

$$S=\frac{1}{2}ah, \qquad S'=\frac{1}{2}\times 2a\times 2h=2^2\times\frac{1}{2}ah$$

よって $\quad S':S=2^2:1$

練習 3.30 $\triangle A'B'C'$ と $\triangle ABC$ の相似比が $3:1$ のとき，$\triangle A'B'C'$ の面積 S' と $\triangle ABC$ の面積 S の比 $S':S$ を求めよ．

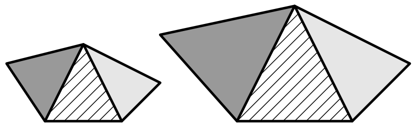
[3]相似な 2 つの平面図形で，対応する線分の長さの比を相似比という．

相似な2つの三角形について，一般に次のことがいえる．

相似比が $k : 1$ のとき，面積比は $k^2 : 1$ である．　(∗)

相似な多角形については，三角形に分割して，それぞれに対応する三角形の面積比を考えてみる．

すると，上に示した (∗) は，相似な2つの多角形についてもいえることがわかる．



相対比が $k : 1$ ならば，どの三角形についても面積比は $k^2 : 1$ である．

三角形や多角形に限らず，相似な図形について，次のことが成り立つ．

相似な図形の面積比

1　相似比が $k : 1$ である図形の面積比は，$k^2 : 1$ である．

2　相似比が $m : n$ である図形の面積比は，$m^2 : n^2$ である．

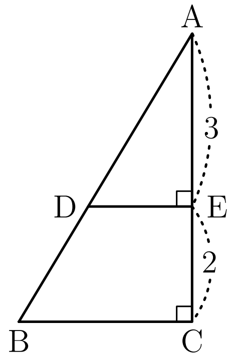
例 3.13　相似な三角形の面積比

右の図で，△ABC と △ADE は相似である．
相似比は

$$\mathrm{AC} : \mathrm{AE} = 5 : 3$$

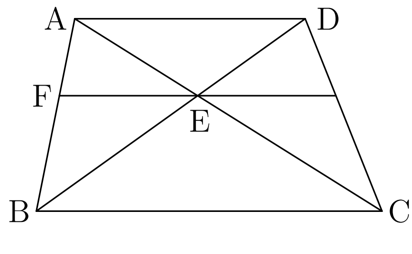
であるから，△ABC と △ADE の面積比は

$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{ADE} = 5^2 : 3^2 = 25 : 9$$　**[終]**



注意　△ABC と △ADE の面積比を，△ABC : △ADE と書く．

練習 3.31　AD//BCである台形ABCDの対角線の交点をEとする．Eを通り，辺ADに平行な直線を引き，辺ABとの交点をFとする．AF = 4，FB = 6 であるとき，次の面積比を求めよ．



(1)　△AFE : △ABC　　(2)　△AED : △CEB

例題 3.9 図形 P を縮小または拡大したときの図形を Q とし，P の面積を S，Q の面積を S' とする．

(1) P を 0.8 倍に縮小するとき，$S' : S$ を求めよ．

(2) P を何倍に拡大すれば，$S' = 2S$ となるか．

解答 (1) Q と P の相似比は，$0.8 : 1$ であるから

$$S' : S = (0.8)^2 : 1 = 0.64 : 1$$

(2) k 倍に拡大するとき

$$S' : S = k^2 : 1$$

$S' = 2S$ であるのは，$k^2 = 2$ のときである．

$k > 0$ であるから　　$k = \sqrt{2}$

したがって，$\sqrt{2}$ 倍に拡大すればよい．

補足 (1) $S' : S = 64 : 100$ でもある．すなわち，面積はもとの $\dfrac{64}{100}\,(= 64\%)$ になる．

(2) $\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$ であるから，拡大率はおよそ 141% である．

練習 3.32 例題 3.9 において，次の問いに答えよ．

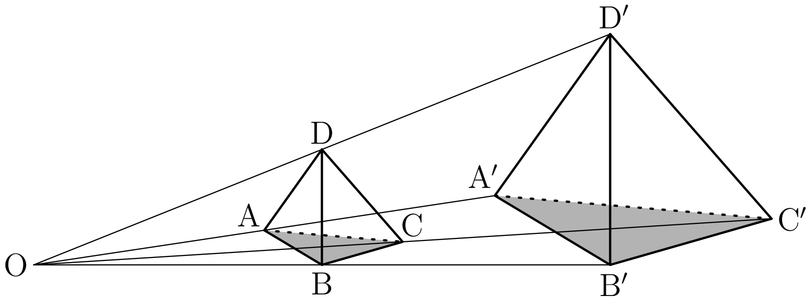
(1) P を 0.5 倍に縮小するとき，$S' : S$ を求めよ．

(2) P を何倍に拡大すれば，$S' = 3S$ となるか．

B ≫ 立体の相似

立体の相似についても，拡大や縮小を考えてみよう．

1つの立体を一定の比率で拡大または縮小して得られる立体は，もとの立体と**相似**であるという．



← 左の図で
$OA' : OA$
$OB' : OB$
$OC' : OC$
$OD' : OD$
がすべて等しい

相似な立体では，次のことがいえる．

相似な立体の性質

1　相似な立体においては，対応する線分の長さの比は，すべて等しい．

2　相似な立体においては，対応する角の大きさは，それぞれ等しい．

相似な立体で，対応する線分の長さの比を**相似比**という[4]．

練習 3.33 次の各組の立体のうち，常に相似であるものはどれか．

(1) 2つの直方体　　(2) 2つの立方体

(3) 2つの正四面体　　(4) 2つの正四角錐

(5) 2つの円錐　　(6) 2つの球

[4]たとえば，「$\frac{1}{25}$ 模型」と実物の相似比は $1 : 25$ である．

C》相似な立体の表面積の比と体積比

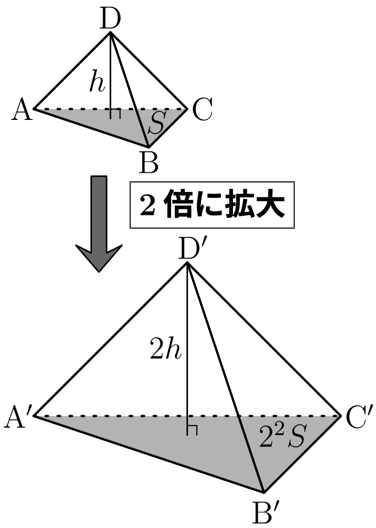
相似な2つの立体について，表面積の比と体積比を調べてみよう．

例 3.14　相似な2つの四面体の表面積の比と体積比．

四面体 A′B′C′D′ と四面体 ABCD は相似で，相似比は $2:1$ であるとする．
△A′B′C′ と △ABC の面積比は $2^2:1$ である．他の面も面積比は $2^2:1$ であるから，2つの四面体の表面積の比は

$$2^2:1$$

である．
また，底面の △ABC の面積を S，高さを h とすると，対応する底面の △A′B′C′ の面積は 2^2S，高さは $2h$ である．

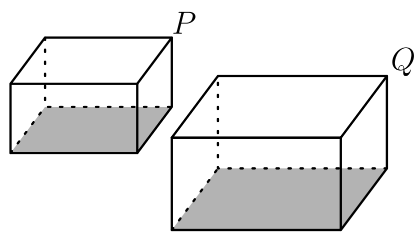


四面体 ABCD の体積を V，四面体 A′B′C′D′ の体積を V' とすると

$$V=\frac{1}{3}Sh,\qquad V'=\frac{1}{3}\times 2^2S\times 2h=2^3\times\frac{1}{3}Sh$$

したがって，体積比は　$V':V=2^3:1$

練習 3.34　2つの相似な直方体 P，Q がある．その相似比は，$k:1$ であるとする．
P と Q の表面積の比は $k^2:1$，体積比は $k^3:1$ となることを確かめよ．



四面体や直方体に限らず，相似な立体について，次のことが成り立つ．

相似な立体の表面積の比と体積比

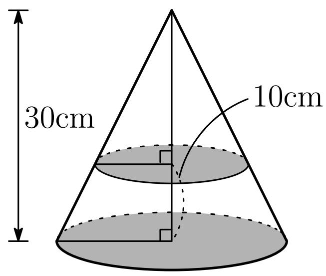
1 相似比が $k:1$ の立体について

表面積の比は，$\boldsymbol{k^2:1}$，体積比は $\boldsymbol{k^3:1}$ である．

2 相似比が $m:n$ の立体について

表面積の比は $\boldsymbol{m^2:n^2}$，体積比は $\boldsymbol{m^3:n^3}$ である．

例題 3.10 高さ 30cm の円錐 P を，右の図のように高さ 10cm のところで，底面に平行な平面で切ると，上に小さい円錐 Q ができる．



(1) P と Q の表面積の比を求めよ．

(2) P と Q の体積比を求めよ．

解答 (1) 2 つの円錐 P と Q は相似である．

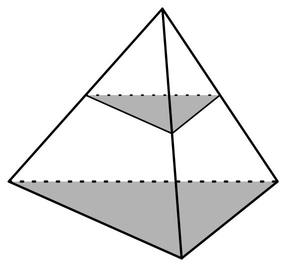
Q の高さは　$30-10=20$ (cm)

よって，相似比は　$30:20=3:2$　← 高さの比

したがって，表面積の比は　$3^2:2^2=9:4$

(2) 体積比は　$3^3:2^3=27:8$

練習 3.35 正四面体 P を，半分の高さのところで，底面に平行な平面で切ると，上に小さい正四面体 Q ができる．



(1) P と Q の表面積の比を求めよ．

(2) P と Q の体積比を求めよ．

3.3.3 球の体積と表面積

立方体や直方体，角錐や円錐などの体積や表面積の求め方は，既に学んでいる．ここでは，球の体積と表面積を求める公式について学ぼう．

A 》球の体積を求める公式

球の体積について，次の公式が知られている．

球の体積

半径が r の球の体積 V は $\qquad \boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$

例 3.15 半径が 2cm の球の体積は $\quad \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi \ (\mathrm{cm}^3)$ **[終]**

練習 3.36 次のような球の体積を求めよ．

(1) 半径が 5cm (2) 直径が 12cm

B 》球の表面積を求める公式

球の表面積について，次の公式が知られている．

球の表面積

半径が r の球の表面積 S は $\qquad \boldsymbol{S = 4\pi r^2}$

例 3.16 半径が 3cm の球の表面積は $\quad 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi \ (\mathrm{cm}^2)$ **[終]**

練習 3.37 次のような球の表面積を求めよ．

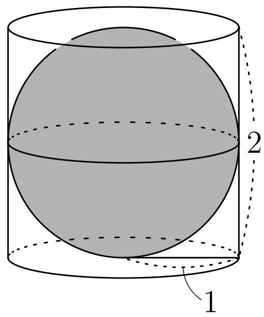
(1) 半径が 2cm (2) 直径が 10cm

C》球の体積と表面積の応用

例題 3.11 半径 1 の球と，底面の直径と高さがともに 2 である円柱について，次の問いに答えよ．

(1) 球と円柱の体積比を求めよ．

(2) 球と円柱の表面積の比を求めよ．



解答 (1) 球の体積は $\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi$

円柱の体積は $\pi\cdot 1^2 \times 2 = 2\pi$

よって，球と円柱の体積比は

$$\frac{4}{3}\pi : 2\pi = 4 : 6 = 2 : 3$$

(2) 球の表面積は $4\pi\cdot 1^2 = 4\pi$

円柱の表面積は $\pi\cdot 1^2 \times 2 + 2\pi\cdot 1 \times 2 = 6\pi$

よって，球と円柱の表面積の比は

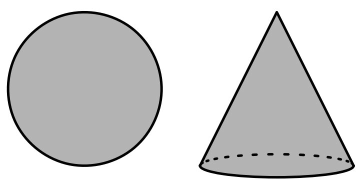
$$4\pi : 6\pi = 2 : 3$$

補足 半径 r の球と，底面の直径と高さがともに $2r$ である円柱について，球は円柱に内接する．このとき，

$$\text{球の体積} : \text{円柱の体積} = 2 : 3, \qquad \text{球の表面積} : \text{円柱の表面積} = 2 : 3$$

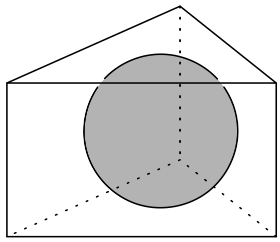
が成り立つ．

練習 3.38 半径 1 の球と，底面の直径と高さがともに 2 である円錐について，次の問いに答えよ．



(1) 球と円錐の体積比を求めよ．

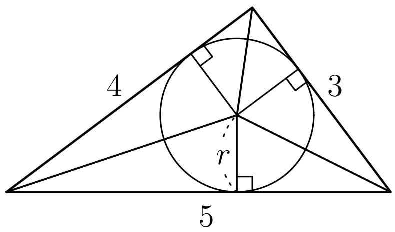
(2) 球と円錐の表面積の比を求めよ．



応用例題 3.7 三角柱に，直径が三角柱の高さに等しい球が内接している．三角柱の底面は，3辺の長さが3，4，5の直角三角形である．三角柱の表面積を S_1，球の表面積を S_2 とするとき，$S_1 : S_2$ を求めよ．

考え方》 球の中心を通り底面に平行な平面で三角柱を切ると，切り口では直角三角形に円が内接している．

解答 球の中心を通り底面に平行な平面で三角柱を切ったとき，切り口は右の図のようになる．球の半径を r とすると，この直角三角形の面積 S は



$$S = \frac{1}{2}\cdot 5r + \frac{1}{2}\cdot 3r + \frac{1}{2}\cdot 4r = 6r$$

一方　　$S = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6$

$6r = 6$ から　　$r = 1$

よって　　$S_1 = 2S + 2r(5+3+4) = 2\cdot 6 + 2\cdot 1\cdot 12 = 36$

また　　$S_2 = 4\pi r^2 = 4\pi\cdot 1^2 = 4\pi$

したがって　　$S_1 : S_2 = 36 : 4\pi = 9 : \pi$

練習 3.39 応用例題 3.7 において，三角柱の体積を V_1，球の体積を V_2 とするとき，$V_1 : V_2 = S_1 : S_2$ であることを示せ．

練習 3.40 応用例題3.7において，三角柱の底面が，5，12，13を3辺の長さとする直角三角形のとき，$S_1 : S_2$ を求めよ．

応用例題 3.8 同じ材質で大きさの違う2種類の鉄球がある．半径は，それぞれ3cmと5cmである．半径3cmの鉄球4個と半径5cmの鉄球1個とでは，どちらの方が重いか．

考え方》 同じ材質であるから，重さの代わりに体積を比べる．

解答 半径3cmの鉄球4個の体積の総量は

$$\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3 \times 4 = 144\pi \ (\mathrm{cm}^3)$$

半径5cmの鉄球1個の体積は

$$\frac{4}{3}\pi\cdot 5^3 = \frac{500}{3}\pi \ (\mathrm{cm}^3)$$

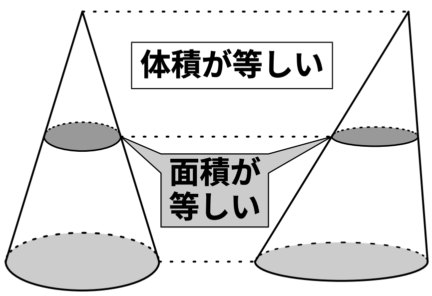
$\dfrac{500}{3} > 144$ であるから，半径5cmの鉄球1個の方が重い．

練習 3.41 半球の形をした2つの容器 P と Q がある．P の直径は 20cm，Q の直径は 15cm である．容器 P で3杯の水と容器 Q で7杯の水とでは，どちらの方の量が多いか．

■ 球の体積，表面積を求める公式

次の事実が知られている[5]．

> 底面積も高さも等しい2つの立体を，底面に平行な同じ高さの平面で切ったとき，2つの切り口の面積がいつも等しいならば，2つの立体の体積は等しい．



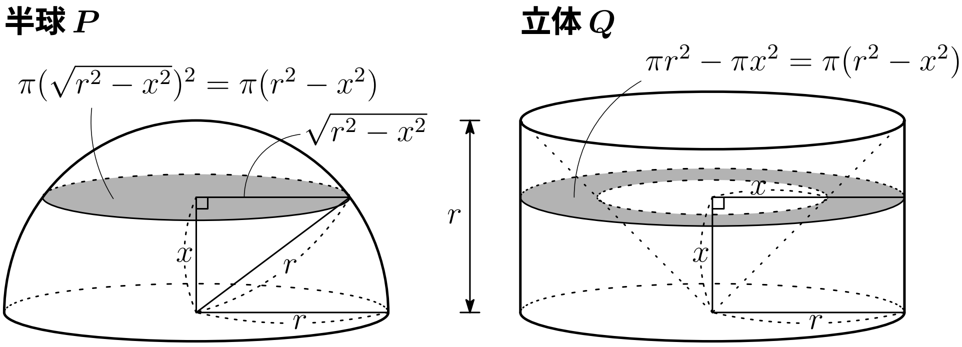
このことを用いると，182 ページで述べた球の体積を求める公式を導くことができる．

[5] 詳しくは数学 III で扱っている．

球の体積 V を求める式の説明

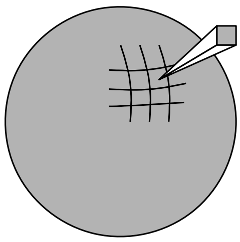
半径が r の半球を P，下の右図のように直円柱から円錐をくりぬいてできるすり鉢(ばち)型の立体を Q とする．ただし，直円柱と円錐について，底面の半径と高さはすべて r とする．
下の図からわかるように，2 つの立体を底面から高さ x のところで，底面に平行な平面で切ったときの切り口の面積は，ともに $\pi(r^2-x^2)$ である．よって，半球 P と立体 Q の体積は等しい．
半径が r の球の体積 V は，P の体積の 2 倍であるから

$$V = 2\times(\text{立体}\,Q\,\text{の体積}) = 2\times\left(\pi r^2\times r-\frac{1}{3}\times\pi r^2\times r\right)$$
$$= 2\times\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$



球の表面積を求める式の説明

球の表面を細かく分け，1 つの面を底面とし，
球の中心を頂点とする角錐状の立体を考える．
球の表面の分割を非常に多くすることにより，
球の体積 V は，次のように考えられる．



$$V = \text{角錐の体積の総和}$$
$$= \frac{1}{3}\times(\text{角錐の底面積の総和})\times(\text{角錐の高さ})$$
$$= \frac{1}{3}\times(\text{球の表面積})\times(\text{球の半径}) = \frac{1}{3}Sr$$

ここで，$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ であることを使うと，$S=4\pi r^2$ が得られる．

3.3.4 補充問題

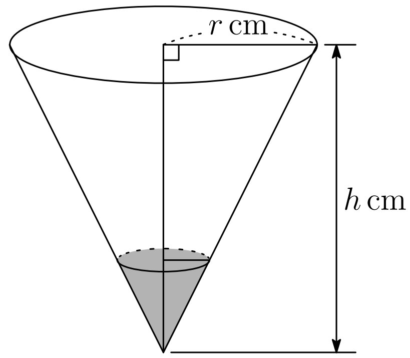
7 次の図形の面積を求めよ.

(1) $AB = 6$, $AD = 4$, $\angle A = 60^\circ$ である平行四辺形 ABCD

(2) 半径 2 の円に内接する正十二角形

8 △ABC において，AB $=5$，AC $=3$，$A=120^\circ$ とする．∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，AD の長さを求めよ．

9 右の図のように，底面の半径が r cm，高さが h cm の円錐の形をした容器がある．
この容器に，深さの $\dfrac{1}{3}$ のところまで水を入れたとき，あと何 cm^3 の水が入るか．

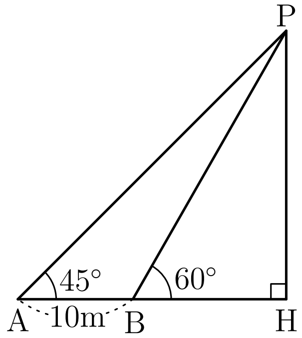


3.4 章末問題

3.4.1 章末問題 A

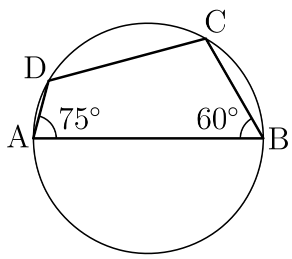
1 地点Aからテレビ塔の頂点Pを見上げた角は45° であった．次に塔へ向かって水平に10m進んだ地点BからPを見上げた角は60° であった．図のようにPの真下の地点をHとする．目の高さを無視するとき，次のものを求めよ．

(1) B，H間の距離　　(2) 塔の高さ

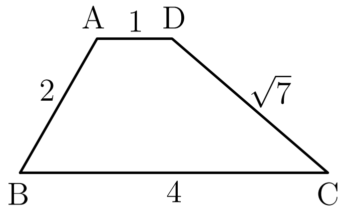


2 半径5の円において，1つの直径ABと，周上の2点C，Dをとり，四角形ABCDを作る．$\angle A = 75°$，$\angle B = 60°$ のとき，次の線分の長さを求めよ．

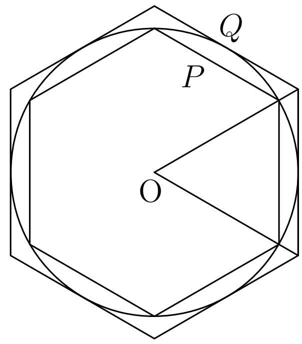
(1) 対角線AC　　(2) 辺CD



3 台形 ABCD において，AD//BC，AB $=2$，BC $=4$，CD $=\sqrt{7}$，DA $=1$ であるとき，この台形の面積 S を求めよ．



4 点 O を中心とする半径 2 の円に内接する正六角形 P と外接する正六角形 Q がある．



(1) Q の 1 辺の長さを求めよ．

(2) P と Q の相似比を求めよ．

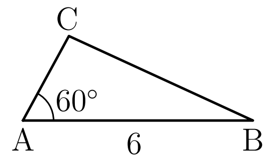
(3) P と Q の面積比を求めよ．

3.4.2 章末問題 B

5 △ABC において，

$$A = 60^\circ,\ a : b = 2 : 1,\ c = 6$$

であるとき，次のものを求めよ．



(1) $\sin B$ の値　　(2) b

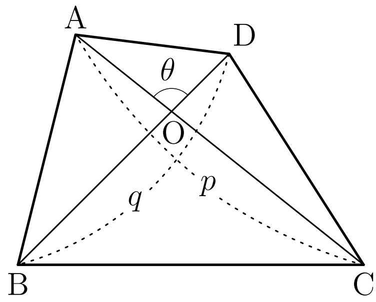
6 △ABC において，$b = 2\sqrt{3}$，$c = 2$，$C = 30^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

7 右の図のような四角形 ABCD の 2 本の対角線の交点を O とし,

$\angle\mathrm{AOD}=\theta,\ \mathrm{AC}=p,\ \mathrm{BD}=q$

とする．この四角形の面積 S は,

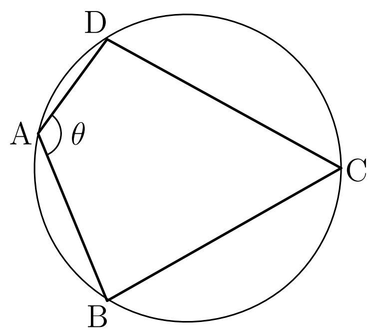
$S=\dfrac{1}{2}pq\sin\theta$ であることを示せ.



8 円に内接する四角形 ABCD があり,

$$\mathrm{AB}=5,\ \mathrm{BC}=7,\ \mathrm{CD}=7,\ \mathrm{DA}=3$$

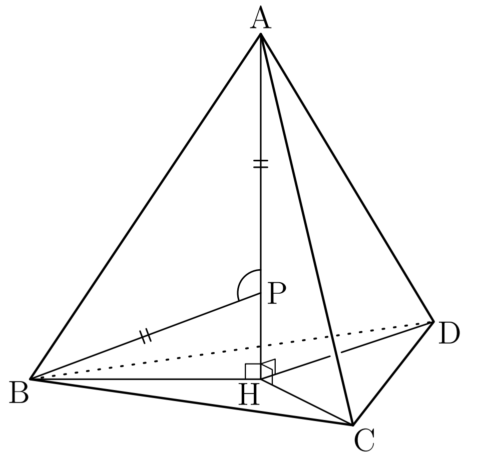
である．$\angle\mathrm{A}=\theta$ とするとき，次のものを求めよ.



(1) $\cos\theta$ の値

(2) 四角形 ABCD の面積 S

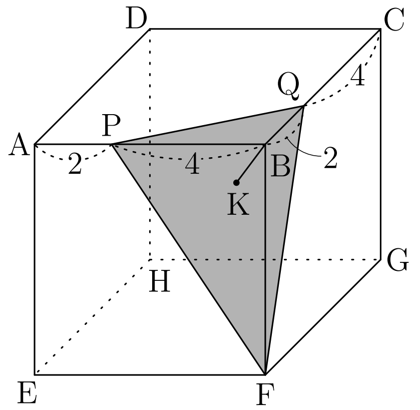
9　正四面体 ABCD の頂点 A から △BCD に下ろした垂線を AH とし，AP = BP であるように点 P を線分 AH 上にとる．$\mathrm{AB} = \sqrt{3}$ のとき，次の問いに答えよ．



(1)　線分 PH の長さを求めよ．

(2)　$\cos\angle\mathrm{APB}$ の値を求めよ．

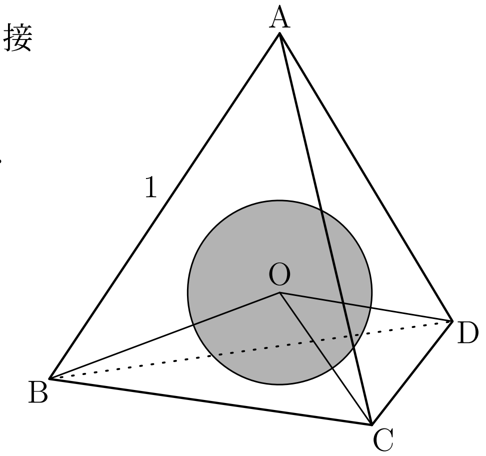
10　1 辺の長さが 6 の立方体 ABCD-EFGH において，辺 AB，BC 上に，それぞれ右の図のような点 P，Q をとる．



(1)　△PFQ の面積を求めよ．

(2)　B から △PFQ に下ろした垂線 BK の長さを求めよ．

11 1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD に内接する球の中心を O とする.



(1) 四面体 OBCD の体積 V を求めよ.

(2) 球の半径 r を求めよ.

(3) 球の表面積と体積を求めよ.

ヒント

5 (2) 余弦定理によって得られる b の 2 次方程式を解く.

6 $\sin B$ の値からは B が 2 つ求められる.

8 (1) BD^2 を 2 通りの式で表す.

9 (1) $\mathrm{PH} = x$ とおく.

(2) $\triangle\mathrm{APB}$ において余弦定理を用いる.

10 (2) 四面体 BFPQ の体積を 2 通りの方法で計算する.

11 (1) 正四面体 ABCD の体積 $= 4V$

(2) $\triangle\mathrm{BCD}$ の面積 $\times r = 3V$

3.5 三角比の表

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	———