高校生の

新　編　数　学　I

解答編

平成 20 年 8 月 2 日

Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

目 次

第 1 章　方程式と不等式

1.1　式の計算

1.1.1　多項式の加法と減法

練習 1.1 次の単項式の係数と次数をいえ．

(1) $6x^2$　　(2) x　　(3) $-a^2b^2$　　(4) $5abc$

【答】 (1) 係数 6，次数 2　(2) 係数 1，次数 1
(3) 係数 -1，次数 4　(4) 係数 5，次数 3

練習 1.2 次の単項式で [　] 内の文字に着目したとき，その係数と次数をいえ．

(1) $2ax^3$　$[\,x\,]$　　(2) $3a^2x$　$[\,a\,]$　　(3) $-6ax^2y$　$[\,x$ と $y\,]$

【答】 (1) 係数 $2a$，次数 3　(2) 係数 $3x$，次数 2　(3) 係数 $-6a$，次数 3

練習 1.3 次の多項式の同類項をまとめよ．

(1) $4x^2+3x-1-2x^2+5x+6$　　(2) $3a^2-2ab-4b^2-5a^2+2ab-8b^2$

【解】 (1) $$(\text{与式}) = (4-2)x^2+(3+5)x+(-1+6) = 2x^2+8x+5$$

(2) $$(\text{与式}) = (3-5)a^2+(-2+2)ab+(-4-8)b^2 = -2a^2-12b^2$$

練習 1.4 次の多項式は何次式か．

(1) x^3+4x^2-5　　(2) $1+6a-8a^2-3a^4$

【答】 (1) 3 次式　(2) 4 次式

練習 1.5 多項式 $ax^3 - x^2y + by^2 + c$ は，次の文字に着目すると何次式か．また，そのときの定数項は何か．

(1) x　(2) y　(3) x と y

【答】 (1) 3 次式，定数項 $by^2 + c$　(2) 2 次式，定数項 $ax^3 + c$　(3) 3 次式，定数項 c

練習 1.6 次の多項式を，x について降べきの順に整理せよ．

(1) $4a^2 + ax + 2x - 3a$　(2) $x^2 + 2xy + 3y^2 - x + 4y + 1$

【答】 (1) $(a + 2)x + (4a^2 - 3a)$　(2) $x^2 + (2y - 1)x + (3y^2 + 4y + 1)$

練習 1.7 次の多項式 A と B について，$A+B$ と $A-B$ を計算せよ．

(1) $A=2x^2+3x-1$，$B=4x^2-5x-6$

(2) $A=4x^3-3x^2-2x+5$，$B=2x^3-3x^2+7$

(3) $A=x^2-3xy+y^2$，$B=3x^2+xy-y^2$

【解】 (1)
$$\begin{aligned}A+B&=(2x^2+3x-1)+(4x^2-5x-6)\\&=(2+4)x^2+(3-5)x+(-1-6)\\&=6x^2-2x-7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A-B&=(2x^2+3x-1)-(4x^2-5x-6)\\&=2x^2+3x-1-4x^2+5x+6\\&=(2-4)x^2+(3+5)x+(-1+6)\\&=-2x^2+8x+5\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}A+B&=(4x^3-3x^2-2x+5)+(2x^3-3x^2+7)\\&=(4+2)x^3+(-3-3)x^2-2x+(5+7)\\&=6x^3-6x^2-2x+12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A-B&=(4x^3-3x^2-2x+5)-(2x^3-3x^2+7)\\&=4x^3-3x^2-2x+5-2x^3+3x^2-7\\&=(4-2)x^3+(-3+3)x^2-2x+(5-7)\\&=2x^3-2x-2\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}A+B&=(x^2-3xy+y^2)+(3x^2+xy-y^2)\\&=(1+3)x^2+(-3+1)xy+(1-1)y^2\\&=4x^2-2xy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A-B&=(x^2-3xy+y^2)-(3x^2+xy-y^2)\\&=x^2-3xy+y^2-3x^2-xy+y^2\\&=(1-3)x^2+(-3-1)xy+(1+1)y^2\\&=-2x^2-4xy+2y^2\end{aligned}$$

練習 1.8 $A=x^2+4x-3$，$B=2x^2-x+4$ とする．$A+B+2(A-B)$ を計算せよ．

【解】
$$\begin{aligned}A+B+2(A-B)&=A+B+2A-2B\\&=3A-B\\&=3(x^2+4x-3)-(2x^2-x+4)\\&=3x^2+12x-9-2x^2+x-4\\&=x^2+13x-13\end{aligned}$$

1.1.2　多項式の乗法

練習 1.9 次の式を計算せよ.

(1) $2a^3 \times 4a^2$　(2) $a^2 \times (-3a)$　(3) $4ab^2 \times b^4$

(4) $3x^2y \times (-2x^3y^2)$　(5) $(-2ab^3)^2$　(6) $(-3x^2y)^3$

【解】 (1) $2a^3 \times 4a^2 = (2 \times 4) \times a^{3+2} = 8a^5$

(2) $a^2 \times (-3a) = -3 \times a^{2+1} = -3a^3$

(3) $4ab^2 \times b^4 = 4 \times a \times b^{2+4} = 4ab^6$

(4) $3x^2y \times (-2x^3y^2) = \{3 \times (-2)\} \times x^{2+3} \times y^{1+2} = -6x^5y^3$

(5) $(-2ab^3)^2 = (-2)^2 \times a^2 \times (b^3)^2 = 4a^2b^6$

(6) $(-3x^2y)^3 = (-3)^3 \times (x^2)^3 \times y^3 = -27x^6y^3$

練習 1.10 次の式を展開せよ.

(1) $4x^2(2x^2 - 3x + 5)$　(2) $(2x - 1)(4x^2 + 3)$

(3) $(2x^2 + x - 3)(x - 2)$　(4) $(2x + 1)(x^2 - 4x - 1)$

(5) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$　(6) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

【解】 (1)
$$\begin{aligned} 4x^2(2x^2 - 3x + 5) &= 4x^2 \times 2x^2 + 4x^2 \times (-3x) + 4x^2 \times 5 \\ &= 8x^4 - 12x^3 + 20x^2 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} (2x - 1)(4x^2 + 3) &= (2x - 1)\cdot 4x^2 + (2x - 1)\cdot 3 \\ &= 8x^3 - 4x^2 + 6x - 3 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} (2x^2 + x - 3)(x - 2) &= (2x^2 + x - 3)x + (2x^2 + x - 3)\cdot(-2) \\ &= 2x^3 + x^2 - 3x - 4x^2 - 2x + 6 \\ &= 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} (2x + 1)(x^2 - 4x - 1) &= (2x + 1)x^2 + (2x + 1)\cdot(-4x) + (2x + 1)\cdot(-1) \\ &= 2x^3 + x^2 - 8x^2 - 4x - 2x - 1 \\ &= 2x^3 - 7x^2 - 6x - 1 \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} (a + b)(a^2 - ab + b^2) &= (a + b)a^2 + (a + b)\cdot(-ab) + (a + b)b^2 \\ &= a^3 + a^2b - a^2b - ab^2 + ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3 \end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned} (a - b)(a^2 + ab + b^2) &= (a - b)a^2 + (a - b)\cdot ab + (a - b)b^2 \\ &= a^3 - a^2b + a^2b - ab^2 + ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$

練習 1.11 次の式を展開し，x について降べきの順に整理せよ．

(1) $(x^2 - ax + 1)(x + a)$　　(2) $(x - 2a)(x^2 + 3ax + 1)$

【解】 (1)
$$\begin{aligned}(x^2 - ax + 1)(x + a) &= (x^2 - ax + 1)x + (x^2 - ax + 1)a \\ &= x^3 - ax^2 + x + ax^2 - a^2x + a \\ &= x^3 + (1 - a^2)x + a\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(x - 2a)(x^2 + 3ax + 1) &= (x - 2a)x^2 + (x - 2a)\cdot 3ax + (x - 2a)\cdot 1 \\ &= x^3 - 2ax^2 + 3ax^2 - 6a^2x + x - 2a \\ &= x^3 + ax^2 + (-6a^2 + 1)x - 2a\end{aligned}$$

練習 1.12 次の式を展開せよ．

(1) $(2x + 5)^2$　　(2) $(2x - 3y)^2$　　(3) $(5x + 4)(5x - 4)$

(4) $(x + 1)(x + 5)$　　(5) $(x - 3)(x + 8)$　　(6) $(x - 2)(x - 4)$

(7) $(x + 2y)(x + 5y)$　　(8) $(x + y)(x - 4y)$　　(9) $(x - 2a)(x - 7a)$

【解】 (1) $(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$

(2) $(2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

(3) $(5x + 4)(5x - 4) = (5x)^2 - 4^2 = 25x^2 - 16$

(4) $(x + 1)(x + 5) = x^2 + (1 + 5)x + 1\cdot 5 = x^2 + 6x + 5$

(5) $(x - 3)(x + 8) = x^2 + (-3 + 8)x + (-3)\cdot 8 = x^2 + 5x - 24$

(6) $(x - 2)(x - 4) = x^2 + \{(-2) + (-4)\}x + (-2)\cdot(-4) = x^2 - 6x + 8$

(7) $(x + 2y)(x + 5y) = x^2 + (2y + 5y)x + 2y\cdot 5y = x^2 + 7xy + 10y^2$

(8) $(x + y)(x - 4y) = x^2 + (y - 4y)x + y\cdot(-4y) = x^2 - 3xy - 4y^2$

(9) $(x - 2a)(x - 7a) = x^2 + (-2a - 7a)x + (-2a)\cdot(-7a) = x^2 - 9ax + 14a^2$

練習 1.13 次の式を展開せよ.

(1) $(2x+1)(4x+5)$ (2) $(x+4)(2x-3)$

(3) $(3x-7)(x+2)$ (4) $(2x-5)(2x-1)$

(5) $(x+2y)(3x-y)$ (6) $(3x-2a)(4x-3a)$

【解】 (1) $(2x+1)(4x+5)=2\cdot4x^2+(2\cdot5+1\cdot4)x+1\cdot5=8x^2+14x+5$

(2) $(x+4)(2x-3)=1\cdot2x^2+\{1\cdot(-3)+4\cdot2\}x+4\cdot(-3)=2x^2+5x-12$

(3) $(3x-7)(x+2)=3\cdot1x^2+\{3\cdot2+(-7)\cdot1\}x+(-7)\cdot2=3x^2-x-14$

(4) $$\begin{aligned}(2x-5)(2x-1)&=2\cdot2x^2+\{2\cdot(-1)+(-5)\cdot2\}x+(-5)\cdot(-1)\\&=4x^2-12x+5\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}(x+2y)(3x-y)&=1\cdot3x^2+\{1\cdot(-1)+2\cdot3\}xy+2\cdot(-1)y^2\\&=3x^2+5xy-2y^2\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}(3x-2a)(4x-3a)&=3\cdot4x^2+\{3\cdot(-3)+(-2)\cdot4\}ax+(-2)\cdot(-3)a^2\\&=12x^2-17ax+6a^2\end{aligned}$$

練習 1.14 次の式を展開せよ.

(1) $(x+1)(x^2-x+1)$ (2) $(x-2)(x^2+2x+4)$

(3) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$ (4) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

【解】 (1) $(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x^2-x\cdot1+1^2)=x^3+1^3=x^3+1$

(2) $(x-2)(x^2+2x+4)=(x-2)(x^2+x\cdot2+2^2)=x^3-2^3=x^3-8$

(3) $$\begin{aligned}(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)&=(x+3y)\{x^2-x\cdot3y+(3y)^2\}\\&=x^3+(3y)^3=x^3+27y^3\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)&=(2x-y)\{(2x)^2+2x\cdot y+y^2\}\\&=(2x)^3-y^3=8x^3-y^3\end{aligned}$$

練習 1.15 $(a-b)^3$ を展開すると次のようになることを確かめよ.

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

【解】 $$\begin{aligned}(a-b)^3&=(a-b)^2(a-b)\\&=(a^2-2ab+b^2)(a-b)\\&=(a^2-2ab+b^2)a+(a^2-2ab+b^2)\cdot(-b)\\&=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\&=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

練習 1.16 次の式を展開せよ.

(1) $(x+2)^3$ (2) $(x-1)^3$ (3) $(3a+b)^3$ (4) $(x-2y)^3$

【解】 (1) $(x+2)^3 = x^3 + 3{\cdot}x^2{\cdot}2 + 3{\cdot}x{\cdot}2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

(2) $(x-1)^3 = x^3 - 3{\cdot}x^2{\cdot}1 + 3{\cdot}x{\cdot}1^2 - 1^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

(3) $(3a+b)^3 = (3a)^3 + 3{\cdot}(3a)^2{\cdot}b + 3{\cdot}3a{\cdot}b^2 + b^3 = 27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3$

(4) $(x-2y)^3 = x^3 - 3{\cdot}x^2{\cdot}2y + 3{\cdot}x{\cdot}(2y)^2 - (2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

練習 1.17 次の式を展開せよ.

(1) $(a+b-c)^2$ (2) $(x+2y+3z)^2$

【解】 (1)
$$\begin{aligned}(a+b-c)^2 &= \{(a+b)-c\}^2\\ &= (a+b)^2 - 2(a+b)c + c^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(x+2y+3z)^2 &= \{(x+2y)+3z\}^2\\ &= (x+2y)^2 + 2(x+2y){\cdot}3z + (3z)^2\\ &= x^2 + 4xy + 4y^2 + 6xz + 12yz + 9z^2\\ &= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 12yz + 6zx\end{aligned}$$

練習 1.18 次の式を展開せよ.

(1) $(x+1)^2(x-1)^2$ (2) $(x^2+1)(x+1)(x-1)$

【解】 (1)
$$\begin{aligned}&(x+1)^2(x-1)^2\\ &= \{(x+1)(x-1)\}^2\\ &= (x^2-1)^2\\ &= (x^2)^2 - 2{\cdot}x^2{\cdot}1 + 1^2\\ &= x^4 - 2x^2 + 1\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(x^2+1)(x+1)(x-1)\\ &= (x^2+1)(x^2-1)\\ &= (x^2)^2 - 1^2\\ &= x^4 - 1\end{aligned}$$

練習 1.19 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ を次の方法で展開せよ.

(1) そのまま展開する.

(2) $x^2+1=A$ とおいて展開する.

【解】(1)
$$\begin{aligned}&(x^2+x+1)(x^2-x+1)\\&=(x^2+x+1)x^2+(x^2+x+1)\cdot(-x)+(x^2+x+1)\cdot 1\\&=x^4+x^3+x^2-x^3-x^2-x+x^2+x+1\\&=x^4+x^2+1\end{aligned}$$

(2) $x^2+1=A$ とおくと
$$\begin{aligned}(\text{与式})&=(A+x)(A-x)=A^2-x^2\\&=(x^2+1)^2-x^2=(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot 1+1^2-x^2\\&=x^4+x^2+1\end{aligned}$$

1.1.3 因数分解

練習 1.20 次の式を因数分解せよ.

(1) $12x^3-8x^2y$　　(2) $3a^2x+6ax^2-2ax$

【答】(1) $4x^2(3x-2y)$　(2) $ax(3a+6x-2)$

練習 1.21 次の式を因数分解せよ.

(1) $(a+b)c+d(a+b)$　　(2) $(a-2b)x+(2b-a)y$

【解】(1) $(a+b)c+d(a+b)=(a+b)(c+d)$

(2)
$$\begin{aligned}(a-2b)x+(2b-a)y&=(a-2b)x-(a-2b)y\\&=(a-2b)(x-y)\end{aligned}$$

練習 1.22 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2+10x+25$　(2) $x^2-12x+36$

(3) $x^2+6xy+9y^2$　(4) $4x^2-4xy+y^2$

(5) x^2-9y^2　(6) $16a^2-25b^2$

【解】 (1) $x^2+10x+25=x^2+2{\cdot}x{\cdot}5+5^2=(x+5)^2$

(2) $x^2-12x+36=x^2-2{\cdot}x{\cdot}6+6^2=(x-6)^2$

(3) $x^2+6xy+9y^2=x^2+2{\cdot}x{\cdot}3y+(3y)^2=(x+3y)^2$

(4) $4x^2-4xy+y^2=(2x)^2-2{\cdot}2x{\cdot}y+y^2=(2x-y)^2$

(5) $x^2-9y^2=x^2-(3y)^2=(x+3y)(x-3y)$

(6) $16a^2-25b^2=(4a)^2-(5b)^2=(4a+5b)(4a-5b)$

練習 1.23 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2+8x+12$　(2) $x^2-7x+12$

(3) x^2+2x-8　(4) x^2-5x-6

(5) a^2-7a+6　(6) y^2-y-20

【解】 (1) $x^2+8x+12=x^2+(2+6)x+2{\cdot}6=(x+2)(x+6)$

(2) $x^2-7x+12=x^2+(-3-4)x+(-3){\cdot}(-4)=(x-3)(x-4)$

(3) $x^2+2x-8=x^2+(4-2)x+4{\cdot}(-2)=(x+4)(x-2)$

(4) $x^2-5x-6=x^2+(1-6)x+1{\cdot}(-6)=(x+1)(x-6)$

(5) $a^2-7a+6=a^2+(-1-6)a+(-1){\cdot}(-6)=(a-1)(a-6)$

(6) $y^2-y-20=y^2+(4-5)y+4{\cdot}(-5)=(y+4)(y-5)$

練習 1.24 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2+5xy+6y^2$　(2) $x^2-6xy+8y^2$

(3) $x^2+7ax-18a^2$　(4) $x^2-ax-12a^2$

【解】 (1) $x^2+5xy+6y^2=x^2+(2y+3y)x+2y{\cdot}3y=(x+2y)(x+3y)$

(2) $x^2-6xy+8y^2=x^2+(-2y-4y)x+(-2y){\cdot}(-4y)=(x-2y)(x-4y)$

(3) $x^2+7ax-18a^2=x^2+(9a-2a)x+9a{\cdot}(-2a)=(x+9a)(x-2a)$

(4) $x^2-ax-12a^2=x^2+(3a-4a)x+3a{\cdot}(-4a)=(x+3a)(x-4a)$

練習 1.25 次の式を因数分解せよ.

(1) $3x^2+7x+2$　(2) $2x^2+9x+10$　(3) $2x^2-7x+6$

(4) $4x^2+8x-21$　(5) $3x^2+5ax-2a^2$　(6) $6x^2-7ax-3a^2$

【解】 (1)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & \longrightarrow & 6 \\ 3 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline 3 & & 2 & & 7 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & \longrightarrow & 4 \\ 2 & & 5 & \longrightarrow & 5 \\ \hline 2 & & 10 & & 9 \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -2 & \longrightarrow & -4 \\ 2 & & -3 & \longrightarrow & -3 \\ \hline 2 & & 6 & & -7 \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{ccccc} 2 & & -3 & \longrightarrow & -6 \\ 2 & & 7 & \longrightarrow & 14 \\ \hline 4 & & -21 & & 8 \end{array}$$

(5)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 2a & \longrightarrow & 6a \\ 3 & & -1a & \longrightarrow & -1a \\ \hline 3 & & -2a^2 & & 5a \end{array}$$

(6)
$$\begin{array}{ccccc} 2 & & -3a & \longrightarrow & -9a \\ 3 & & 1a & \longrightarrow & 2a \\ \hline 6 & & -3a^2 & & -7a \end{array}$$

（答） (1) $(x+2)(3x+1)$　(2) $(x+2)(2x+5)$　(3) $(x-2)(2x-3)$
(4) $(2x-3)(2x+7)$　(5) $(x+2a)(3x-a)$　(6) $(2x-3a)(3x+a)$

練習 1.26 次の式を因数分解せよ.

(1) x^3+1　(2) x^3+27a^3　(3) x^3-1　(4) $8x^3-y^3$

【解】 (1) $x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)=(x+1)(x^2-x+1)$

(2) $x^3+27a^3=x^3+(3a)^3=(x+3a)\{x^2-x\cdot 3a+(3a)^2\}$
$=(x+3a)(x^2-3ax+9a^2)$

(3) $x^3-1=x^3-1^3=(x-1)(x^2+x\cdot 1+1^2)=(x-1)(x^2+x+1)$

(4) $8x^3-y^3=(2x)^3-y^3=(2x-y)\{(2x)^2+2x\cdot y+y^2\}$
$=(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

練習 1.27 次の式を因数分解せよ．

(1) $(x-1)^2-5(x-1)+6$ (2) $2(x+3)^2-(x+3)-1$

【解】 (1) $x-1=A$ とおく．

$$\begin{aligned}(x-1)^2-5(x-1)+6 &= A^2-5A+6\\ &= (A-2)(A-3)\\ &= \{(x-1)-2\}\{(x-1)-3\}\\ &= (x-3)(x-4)\end{aligned}$$

(2) $x+3=A$ とおく．

$$\begin{aligned}2(x+3)^2-(x+3)-1 &= 2A^2-A-1\\ &= (A-1)(2A+1)\\ &= \{(x+3)-1\}\{2(x+3)+1\}\\ &= (x+2)(2x+7)\end{aligned}$$

練習 1.28 次の式を因数分解せよ．

(1) $x^2+3ax-9a-9$ (2) $a^2+ab-4a-b+3$

【解】 (1) a について整理すると

$$\begin{aligned}x^2+3ax-9a-9 &= 3(x-3)a+(x^2-9)\\ &= 3(x-3)a+(x+3)(x-3)\\ &= (x-3)\{3a+(x+3)\}\\ &= (x-3)(x+3a+3)\end{aligned}$$

(2) b について整理すると

$$\begin{aligned}a^2+ab-4a-b+3 &= (a-1)b+(a^2-4a+3)\\ &= (a-1)b+(a-1)(a-3)\\ &= (a-1)\{b+(a-3)\}\\ &= (a-1)(a+b-3)\end{aligned}$$

練習 1.29 次の式を因数分解せよ.

(1) x^2-4y^2+4y-1　(2) $x^2-6x+9-y^2$

(3) $x^2+3xy+2y^2-2x-3y+1$　(4) $x^2-2ax+a^2-x+a-2$

【解】 (1)
$$\begin{aligned}&\quad x^2-4y^2+4y-1\\&=x^2-(2y-1)^2\\&=\{x+(2y-1)\}\{x-(2y-1)\}\\&=(2x+2y-1)(2x-2y+1)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\quad x^2-6x+9-y^2\\&=(x-3)^2-y^2\\&=\{(x-3)+y\}\{(x-3)-y\}\\&=(x+y-3)(x-y-3)\end{aligned}$$

(3) x について整理すると
$$\begin{aligned}&\quad x^2+3xy+2y^2-2x-3y+1\\&=x^2+(3y-2)x+(2y^2-3y+1)\\&=x^2+(3y-2)x+(y-1)(2y-1)\\&=\{x+(y-1)\}\{x+(2y-1)\}\\&=(x+y-1)(x+2y-1)\end{aligned}$$

(4) x について整理すると
$$\begin{aligned}&\quad x^2-2ax+a^2-x+a-2\\&=x^2-(2a+1)x+(a^2+a-2)\\&=x^2-(2a+1)x+(a-1)(a+2)\\&=\{x-(a-1)\}\{x-(a+2)\}\\&=(x-a+1)(x-a-2)\end{aligned}$$

1.1.4 補充問題

1 次の式を計算せよ.

(1) $(6x^3 - 3x - 4) + (5 + 8x^2 + 2x - x^3) + 2(x - 4x^2 - 3)$

(2) $(7x^3 - 4x - 5) + x(3x + 6 - 2x^2) - 3x(2x^2 - x + 4)$

【解】 (1)
$$\begin{aligned}&(6x^3 - 3x - 4) + (5 + 8x^2 + 2x - x^3) + 2(x - 4x^2 - 3)\\ &= 6x^3 - 3x - 4 + 5 + 8x^2 + 2x - x^3 + 2x - 8x^2 - 6\\ &= (6-1)x^3 + (8-8)x^2 + (-3+2+2)x + (-4+5-6)\\ &= 5x^3 + x - 5\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(7x^3 - 4x - 5) + x(3x + 6 - 2x^2) - 3x(2x^2 - x + 4)\\ &= 7x^3 - 4x - 5 + 3x^2 + 6x - 2x^3 - 6x^3 + 3x^2 - 12x\\ &= (7-2-6)x^3 + (3+3)x^2 + (-4+6-12)x - 5\\ &= -x^3 + 6x^2 - 10x - 5\end{aligned}$$

2 次の式を展開せよ.

(1) $(2m+5)(m-2)$ (2) $(4x-5a)(4x+5a)$

(3) $(2x-3)^3$ (4) $(1+x+x^2)(1-x)$

(5) $(x-a+1)^2$ (6) $(x+y+z)(x+y-z)$

【解】 (1) $(2m+5)(m-2) = 2\cdot 1m^2 + \{2\cdot(-2) + 5\cdot 1\}m + 5\cdot(-2) = 2m^2 + m - 10$

(2) $(4x-5a)(4x+5a) = (4x)^2 - (5a)^2 = 16x^2 - 25a^2$

(3)
$$\begin{aligned}(2x-3)^3 &= (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 3 + 3\cdot 2x\cdot 3^2 - 3^3\\ &= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}(1+x+x^2)(1-x) &= (1-x)(1^2 + 1\cdot x + x^2)\\ &= 1^3 - x^3 = 1 - x^3\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}(x-a+1)^2 &= \{(x-a)+1\}^2 = (x-a)^2 + 2(x-a) + 1\\ &= x^2 - 2ax + a^2 + 2x - 2a + 1\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}(x+y+z)(x+y-z) &= \{(x+y)+z\}\{(x+y)-z\} = (x+y)^2 - z^2\\ &= x^2 + 2xy + y^2 - z^2\end{aligned}$$

3 次の式を因数分解せよ．

(1) $2ax^2-8a$　(2) $ax^2+by^2-ay^2-bx^2$

(3) $(x-4)(3x+1)+10$　(4) $2n^3+3n^2+n$

(5) $x^3+x^2y-x^2-y$　(6) $2x^2+5xy+3y^2-3x-5y-2$

【解】 (1) $2ax^2-8a=2a(x^2-4)=2a(x+2)(x-2)$

(2) $$\begin{aligned}ax^2+by^2-ay^2-bx^2&=a(x^2-y^2)-b(x^2-y^2)\\&=(x^2-y^2)(a-b)=(a-b)(x+y)(x-y)\end{aligned}$$

(3) $(x-4)(3x+1)+10=3x^2-11x+6=(x-3)(3x-2)$

(4) $2n^3+3n^2+n=n(2n^2+3n+1)=n(n+1)(2n+1)$

(5) $$\begin{aligned}x^3+x^2y-x^2-y&=x^2(x-1)+y(x^2-1)\\&=x^2(x-1)+y(x+1)(x-1)\\&=(x-1)\{x^2+y(x+1)\}\\&=(x-1)(x^2+xy+y)\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}&2x^2+5xy+3y^2-3x-5y-2\\&=2x^2+(5y-3)x+(3y^2-5y-2)\\&=2x^2+(5y-3)x+(y-2)(3y+1)\\&=\{x+(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}\\&=(x+y-2)(2x+3y+1)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}1 & y-2 & \longrightarrow\ 2y-4\\2 & 3y+1 & \longrightarrow\ 3y+1\\\hline 2 & (y-2)(3y+1) & 5y-3\end{array}$$

4 $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ を因数分解せよ．

▶ a について降べきの順に整理する．

【解】 $$\begin{aligned}&a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\\&=-(b-c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b-c)\\&=-(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)\\&=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=-(b-c)(a-b)(a-c)\\&=(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

1.2 実数

1.2.1 実数

練習 1.30 次の分数を小数に直し，循環小数の表し方で書け．

(1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{8}{9}$　(3) $\dfrac{3}{22}$　(4) $\dfrac{15}{7}$

【解】 (1) $\dfrac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\dot{3}$

(2) $\dfrac{8}{9} = 0.888\cdots = 0.\dot{8}$

(3) $\dfrac{3}{22} = 0.1363636\cdots = 0.1\dot{3}\dot{6}$

(4) $\dfrac{15}{7} = 2.142857142857\cdots = 2.\dot{1}4285\dot{7}$

練習 1.31 下の表は数の範囲と四則計算についてまとめたものである．表の空らんに○か×のうち適切なものを入れよ．また，×の場合は，結果がその範囲にない計算の例を１つあげよ．

数の範囲	加法	減法	乗法	除法
自然数	○	×		
整数	○	○		
有理数	○	○	○	○
実数	○	○	○	○

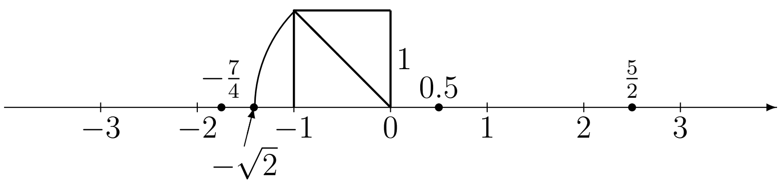
■表の説明■
○は計算がその範囲で常にできる場合
×は計算がその範囲で常にできるとは限らない場合

【答】 自然数の乗法○，自然数の除法×，整数の乗法○，整数の除法×

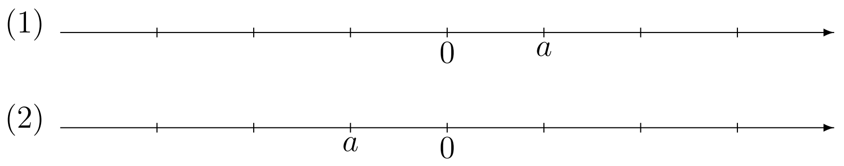
練習 1.32 次の実数に対応する点を数直線上にしるせ．

(1) 0.5　(2) $\dfrac{5}{2}$　(3) $-\dfrac{7}{4}$　(4) $-\sqrt{2}$

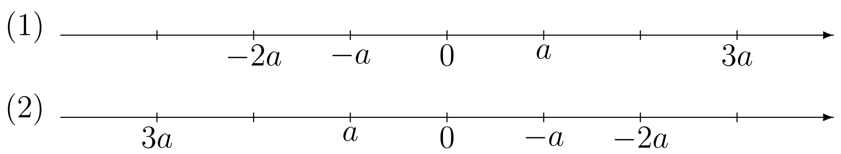
【答】



練習 1.33 実数 a に対応する点が次のように与えられているとき，$3a$，$-a$，$-2a$ に対応する点の位置を，それぞれ数直線上にしるせ．



【解】



練習 1.34 次の値を求めよ．

(1) $|3|$　(2) $|-4|$　(3) $\left|\dfrac{2}{3}\right|$　(4) $|2-8|$

【解】 (1) $|3|=3$　(2) $|-4|=4$　(3) $\left|\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{2}{3}$　(4) $|2-8|=|-6|=6$

1.2.2 根号を含む式の計算

練習 1.35 次の問いに答えよ．

(1) 6 の平方根は何か　(2) $\sqrt{16}$，$\sqrt{\dfrac{9}{25}}$ の値を，それぞれ求めよ．

【解】 (1) $\pm\sqrt{6}$　(2) $\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$，$\sqrt{\dfrac{9}{25}}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

練習 1.36 次の値を求めよ．

(1) $(\sqrt{3})^2$　(2) $(-\sqrt{3})^2$　(3) $\sqrt{(-5)^2}$

【解】 (1) 3　(2) 3　(3) 5

練習 1.37 次の計算をせよ.

(1) $\sqrt{2}\sqrt{3}$　(2) $\sqrt{2}\sqrt{5}$　(3) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$　(4) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

【解】 (1) $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$　(2) $\sqrt{2}\sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{10}$

(3) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{6}{3}} = \sqrt{2}$　(4) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

練習 1.38 次の数を $\sqrt{a}$ の形に表せ.

(1) $3\sqrt{2}$　(2) $4\sqrt{3}$　(3) $3\sqrt{3}$　(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解】 (1) $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2}\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{18}$

(2) $4\sqrt{3} = \sqrt{4^2}\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \times 3} = \sqrt{48}$

(3) $3\sqrt{3} = \sqrt{3^2}\sqrt{3} = \sqrt{3^2 \times 3} = \sqrt{27}$

(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2^2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2^2}} = \sqrt{\dfrac{3}{4}}$

練習 1.39 次の数を $k\sqrt{a}$ の形に表せ.

(1) $\sqrt{8}$　(2) $\sqrt{12}$　(3) $\sqrt{50}$　(4) $\sqrt{98}$

【解】 (1) $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{2^2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{2^2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{50} = \sqrt{5^2 \times 2} = \sqrt{5^2}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

(4) $\sqrt{98} = \sqrt{7^2 \times 2} = \sqrt{7^2}\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

練習 1.40 次の計算をせよ.

(1) $2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+\sqrt{3}$　(2) $2\sqrt{2}-\sqrt{32}+\sqrt{72}$

(3) $(5\sqrt{2}-3\sqrt{3})-(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$　(4) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{6})-(\sqrt{96}-\sqrt{45})$

【解】 (1) $2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+\sqrt{3}=(2-5+1)\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

(2) $$\begin{aligned}2\sqrt{2}-\sqrt{32}+\sqrt{72}&=2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+6\sqrt{2}\\&=(2-4+6)\sqrt{2}=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

(3) $(5\sqrt{2}-3\sqrt{3})-(2\sqrt{2}-\sqrt{3})=(5-2)\sqrt{2}+(-3+1)\sqrt{3}=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

(4) $$\begin{aligned}(2\sqrt{5}+3\sqrt{6})-(\sqrt{96}-\sqrt{45})&=(2\sqrt{5}+3\sqrt{6})-(4\sqrt{6}-3\sqrt{5})\\&=(2+3)\sqrt{5}+(3-4)\sqrt{6}=5\sqrt{5}-\sqrt{6}\end{aligned}$$

練習 1.41 次の計算をせよ.

(1) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$　(2) $\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

(3) $\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$　(4) $\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}+3\sqrt{6}\right)$

(5) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$　(6) $\left(2-\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$

【解】 (1) $$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2&=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\\&=3+2\sqrt{6}+2=5+2\sqrt{6}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2&=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\cdot2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\\&=4\times3-4\sqrt{6}+2=14-4\sqrt{6}\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}&\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\\&=4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}-4\sqrt{2}\sqrt{5}+3\sqrt{5}\times2\sqrt{2}-3\sqrt{5}\sqrt{5}\\&=8\times2-4\sqrt{10}+6\sqrt{10}-3\times5\\&=1+2\sqrt{10}\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}&\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}+3\sqrt{6}\right)\\&=2\sqrt{3}\sqrt{3}+2\sqrt{3}\times3\sqrt{6}-\sqrt{6}\sqrt{3}-\sqrt{6}\times3\sqrt{6}\\&=2\times3+6\times3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-3\times6\\&=-12+15\sqrt{2}\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)&=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\\&=3-2=1\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}\left(2-\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)&=2^2-\left(\sqrt{5}\right)^2\\&=4-5=-1\end{aligned}$$

練習 1.42 次の数の分母を有理化せよ．

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　(2) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$　(3) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$　(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

【解】 (1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(2) $\dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

(3) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{10}$

(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

練習 1.43 次の数の分母を有理化せよ．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$　(3) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1}$　(4) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

【解】 (1)
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1} &= \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)} \\ &= \frac{2\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)}{5-1} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} &= \frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} \\ &= \frac{5+2\sqrt{10}+2}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{7+2\sqrt{10}}{3}\end{aligned}$$

1.2.3 補充問題

5 x の次の値に対して，$\sqrt{(x+1)^2}$ の値をそれぞれ求めよ.

(1) $x=3$　　(2) $x=-1$　　(3) $x=-3$

【解】 (1) $x=3$ のとき
$\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{(3+1)^2}=\sqrt{4^2}=4$

(2) $x=-1$ のとき
$\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{(-1+1)^2}=\sqrt{0^2}=0$

(3) $x=-3$ のとき
$\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{(-3+1)^2}=\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$

6 $x=\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $y=\sqrt{3}-\sqrt{5}$ のとき，次の式の値を求めよ.

(1) $x+y$　　(2) xy　　(3) x^2+y^2　　(4) x^3+y^3

▶ (3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$　　(4) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

【解】 (1) $x+y=(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})=2\sqrt{3}$

(2) $xy=(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})=3-5=-2$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{3})^2-2\cdot(-2)=16$

(4) $x^3+y^3=(x+y)\{(x^2+y^2)-xy\}=2\sqrt{3}\{16-(-2)\}=36\sqrt{3}$

7 $\sqrt{2}$ の値として 1.4142 を使うとき，$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ の値を求めよ.

【解】 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-1}=2+\sqrt{2}=2+1.4142=3.4142$

8 次の計算をせよ．(3)〜(6) は分母を有理化せよ．

(1) $2\sqrt{27}-3\sqrt{12}+\sqrt{54}$　　(2) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$　　(4) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(5) $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$　　(6) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}$

【解】 (1) $2\sqrt{27}-3\sqrt{12}+\sqrt{54}=2\times3\sqrt{3}-3\times2\sqrt{3}+3\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

(2) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}\right)^2=3+2\cdot3\sqrt{2}+6=9+6\sqrt{2}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(4)
$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}&=\frac{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}\\&=\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2}\\&=6+2\sqrt{6}+\sqrt{6}+2=8+3\sqrt{6}\end{aligned}$$

(5) $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1-3}=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

(6) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

1.3 方程式と不等式

1.3.1 1次方程式と1次不等式

練習 1.44 次の1次方程式を解け.

(1) $5x+2=2x+7$　　(2) $4x+5=6x-1$

(3) $0.5x-2=0.2x+4$　　(4) $\dfrac{2}{3}x-4=\dfrac{1}{2}x-3$

【解】 (1) $5x+2=2x+7$

移項すると　$5x-2x=7-2$

すなわち　$3x=5$

両辺を3で割って　$x=\dfrac{5}{3}$

(2) $4x+5=6x-1$

移項すると　$4x-6x=-1-5$

すなわち　$-2x=-6$

両辺を -2 で割って　$x=3$

(3) $0.5x-2=0.2x+4$

両辺に10をかけると　$5x-20=2x+40$

移項すると　$5x-2x=40+20$

すなわち　$3x=60$

両辺を3で割って　$x=20$

(4) $\dfrac{2}{3}x-4=\dfrac{1}{2}x-3$

両辺に6をかけると　$4x-24=3x-18$

移項すると　$4x-3x=-18+24$

すなわち　$x=6$

練習 1.45 次のことを不等式で表せ.

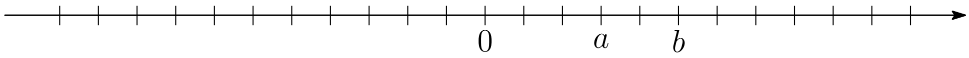
(1) ある数 x の2倍に3を足した数は5以上である.

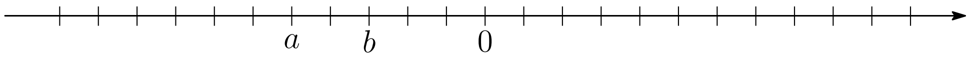
(2) ある数 x を3で割って1を引くと4より小さい.

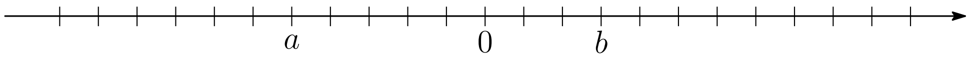
(3) 2数 a, b の和は負で，かつ -2 より大きい.

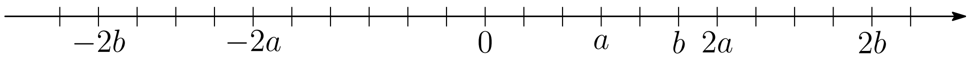
【答】 (1) $2x+3\geqq 5$　(2) $\dfrac{x}{3}-1<4$　(3) $-2<a+b<0$

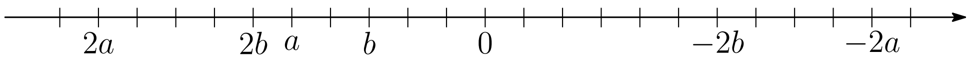
練習 1.46 $a < b$ のとき，$2a < 2b$，$-2a > -2b$ が成り立つことを，下の数直線の図の各場合について確かめよ．

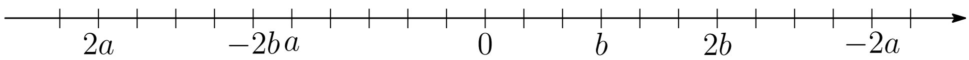
(1) 

(2) 

(3) 

【解】 (1) 

(2) 

(3) 

練習 1.47 $a < b$ のとき，次の $\square$ に適する不等号は何か．

(1) $3a \ \square \ 3b$　　(2) $-3a \ \square \ -3b$

(3) $\dfrac{a}{3} \ \square \ \dfrac{b}{3}$　　(4) $\dfrac{a}{-3} \ \square \ \dfrac{b}{-3}$

【答】 (1) $<$　(2) $>$　(3) $<$　(4) $>$

練習 1.48 次の $\square$ に適する不等号は何か．

(1) $2 < a$　ならば　$0 \ \square \ a-2$，　$2-a \ \square \ 0$

(2) $a > 0$　ならば　$-a \ \square \ 0$，　$2a \ \square \ 0$

(3) $-2a \geqq 6$　ならば　$-a \ \square \ 3$，　$a \ \square \ -3$

【答】 (1) $<, <$　(2) $<, >$　(3) $\geqq, \leqq$

練習 1.49 次の値は，不等式 $3x-5<10$ の解であるかどうかを調べよ．

① $x=-1$　② $x=4$　③ $x=7$

【解】

x	$3x-5$	不等号	10
-1	-8	$<$	10
4	7	$<$	10
7	16	$>$	10

上の表により　① 解である　② 解である　③ 解でない

練習 1.50 次の 1 次不等式を解け．

(1) $5x-2<2x+4$　(2) $6x-3 \geqq 8x+7$

(3) $2(4x-1)>5x-11$　(4) $3(3-2x) \leqq 4-3x$

【解】 (1) $5x-2<2x+4$

移項すると　$5x-2x<4+2$

整理すると　$3x<6$

両辺を 3 で割って　$x<2$

(2) $6x-3 \geqq 8x+7$

移項すると　$6x-8x \geqq 7+3$

整理すると　$-2x \geqq 10$

両辺を -2 で割って　$x \leqq -5$

(3) $2(4x-1)>5x-11$ より

$8x-2>5x-11$

移項すると　$8x-5x>-11+2$

整理すると　$3x>-9$

両辺を 3 で割って　$x>-3$

(4) $3(3-2x) \leqq 4-3x$ より

$9-6x \leqq 4-3x$

移項すると　$-6x+3x \leqq 4-9$

整理すると　$-3x \leqq -5$

両辺を -3 で割って　$x \geqq \dfrac{5}{3}$

練習 1.51 次の 1 次不等式を解け.

(1) $\dfrac{1}{2}x-1 \leqq \dfrac{2}{7}x+\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{1}{3}x+2 < \dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$

【解】 (1) $\dfrac{1}{2}x-1 \leqq \dfrac{2}{7}x+\dfrac{1}{2}$

両辺に 14 をかけると $14\left(\dfrac{1}{2}x-1\right) \leqq 14\left(\dfrac{2}{7}x+\dfrac{1}{2}\right)$

すなわち $7x-14 \leqq 4x+7$

移項して整理すると $3x \leqq 21$

よって $x \leqq 7$

(2) $\dfrac{1}{3}x+2 < \dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$

両辺に 12 をかけると $12\left(\dfrac{1}{3}x+2\right) < 12\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}\right)$

すなわち $4x+24 < 9x-6$

移項して整理すると $-5x < -30$

よって $x > 6$

練習 1.52 次の連立不等式を解け.

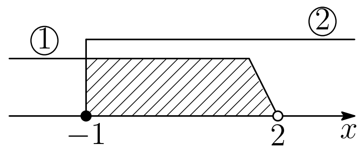
(1) $\begin{cases} 6x-9 < 2x-1 \\ 3x+7 \leqq 4(2x+3) \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x+1 \geqq 7x-5 \\ -x+6 \geqq 3(1-2x) \end{cases}$

【解】 (1) $6x-9 < 2x-1$ から $4x < 8$

よって $x < 2$ $\cdots$①

$3x+7 \leqq 4(2x+3)$ から $-5x \leqq 5$

よって $x \geqq -1$ $\cdots$②



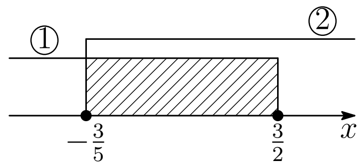
① と ② の共通部分を求めて $-1 \leqq x < 2$

(2) $3x+1 \geqq 7x-5$ から $-4x \geqq -6$

よって $x \leqq \dfrac{3}{2}$ $\cdots$①

$-x+6 \geqq 3(1-2x)$ から $5x \geqq -3$

よって $x \geqq -\dfrac{3}{5}$ $\cdots$②



① と ② の共通部分を求めて $-\dfrac{3}{5} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$

練習 1.53 次の不等式を解け.

(1) $-2 < 3x + 1 < 5$　　(2) $1 \leqq x \leqq 15 - 2x$

【解】 (1) 各辺から1を引いて　$-2-1 < 3x < 5-1$

すなわち　$-3 < 3x < 4$

各辺を3で割って　$-1 < x < \dfrac{4}{3}$

(2) $\begin{cases} 1 \leqq x & \cdots ① \\ x \leqq 15 - 2x & \cdots ② \end{cases}$

② から　$3x \leqq 15$

よって　$x \leqq 5$　$\cdots$ ③

① と ③ の共通範囲を求めて　$1 \leqq x \leqq 5$

練習 1.54 次の不等式を満たす最小の自然数 n を求めよ.

$600 + 25(n - 20) \leqq 32n$

【解】 不等式を変形すると　$-7n \leqq -100$

よって　$n \geqq \dfrac{100}{7}$

$\dfrac{100}{7} = 14.2\cdots$ で，n は自然数であるから　$n \geqq 15$

したがって，最小の自然数 n は　$n = 15$

練習 1.55 次の不等式を満たす最大の自然数 n を求めよ.

$4 + \dfrac{1}{5}(n-4) > \dfrac{1}{2}n$

【解】 両辺に10をかけると　$40 + 2(n-4) > 5n$

整理すると　$-3n > -32$

よって　$n < \dfrac{32}{3}$

$\dfrac{32}{3} = 10.6\cdots$ で，n は自然数であるから　$n \leqq 10$

したがって，最大の自然数 n は　$n = 10$

練習 1.56 1 個 120 円の洋菓子と 1 個 80 円の和菓子を合わせて 30 個買い，100 円の箱に詰めてもらう．箱代と合わせた予算が 3000 円以下で，洋菓子をできるだけ多く買うとき，洋菓子は最大何個買えるか.

【解】 洋菓子を x 個買うとすると，和菓子は $(30-x)$ 個買うことになるから

$$120x+80(30-x)+100 \leqq 3000$$

整理すると　$40x \leqq 500$

よって　$x \leqq \dfrac{25}{2}$

$\dfrac{25}{2}=12.5$ で，x は自然数であるから

$x \leqq 12$　　(答) 12 個

練習 1.57 例 1.25(2) にならって，次の式の絶対値記号をはずせ.

(1) $|\,x-3\,|$　　(2) $|\,x+2\,|$　　(3) $|\,2x-3\,|$

【解】 (1) $x-3 \geqq 0$　すなわち　$x \geqq 3$ のとき　$|\,x-3\,|=x-3$

$x-3<0$　すなわち　$x<3$ のとき　$|\,x-3\,|=-x+3$

(2) $x+2 \geqq 0$　すなわち　$x \geqq -2$ のとき　$|\,x+2\,|=x+2$

$x+2<0$　すなわち　$x<-2$ のとき　$|\,x+2\,|=-x-2$

(3) $2x-3 \geqq 0$　すなわち　$x \geqq \dfrac{3}{2}$ のとき　$|\,2x-3\,|=2x-3$

$2x-3<0$　すなわち　$x<\dfrac{3}{2}$ のとき　$|\,2x-3\,|=-2x+3$

練習 1.58 次の式を絶対値記号を用いて表せ.

(1) $\sqrt{(x+3)^2}$　　(2) $\sqrt{x^2-10x+25}$　　(3) $\sqrt{4x^2+4x+1}$

【解】 (1) $\sqrt{(x+3)^2}=|\,x+3\,|$

(2) $\sqrt{x^2-10x+25}=\sqrt{(x-5)^2}=|\,x-5\,|$

(3) $\sqrt{4x^2+4x+1}=\sqrt{(2x+1)^2}=|\,2x+1\,|$

練習 1.59 次の方程式，不等式を解け．

(1) $|\,x\,| = 2$ (2) $|\,x\,| < 2$ (3) $|\,x\,| > 4$ (4) $|x| \leqq 4$

【解】 (1) $x = \pm 2$ (2) $-2 < x < 2$ (3) $x < -4,\ 4 < x$ (4) $-4 \leqq x \leqq 4$

練習 1.60 次の方程式，不等式を解け．

(1) $|\,x-4\,| = 2$ (2) $|\,x+1\,| = 3$ (3) $|\,x-4\,| < 2$
(4) $|\,x+1\,| \leqq 3$ (5) $|\,x-3\,| > 5$ (6) $|\,x+2\,| \geqq 1$

【解】 (1) $x-4 = \pm 2$ から $x = 6,\ 2$
(2) $x+1 = \pm 3$ から $x = 2, -4$
(3) $-2 < x-4 < 2$ から $2 < x < 6$
(4) $-3 \leqq x+1 \leqq 3$ から $-4 \leqq x \leqq 2$
(5) $x-3 < -5,\ 5 < x-3$ から $x < -2,\ 8 < x$
(6) $x+2 \leqq -1,\ 1 \leqq x+2$ から $x \leqq -3,\ -1 \leqq x$

1.3.2 2 次方程式

練習 1.61 次の 2 次方程式を解け.

(1) $x(x+4)=0$ (2) $x^2-5x+6=0$

(3) $2x^2+3x+1=0$ (4) $3x^2-4x-4=0$

(5) $2x^2+5x-3=0$ (6) $4x^2-9x+2=0$

【解】 (1) $x=0,\ -4$

(2) $(x-2)(x-3)=0$ から $x=2,\ 3$

(3) $(x+1)(2x+1)=0$ から $x=-1,\ -\dfrac{1}{2}$

(4) $(x-2)(3x+2)=0$ から $x=2,\ -\dfrac{2}{3}$

(5) $(x+3)(2x-1)=0$ から $x=-3,\ \dfrac{1}{2}$

(6) $(x-2)(4x-1)=0$ から $x=2,\ \dfrac{1}{4}$

練習 1.62 次の 2 次方程式を解け.

(1) $x^2=5$ (2) $2x^2=5$

(3) $(x-1)^2=8$ (4) $(2x+3)^2=0$

【解】 (1) $x=\pm\sqrt{5}$

(2) $x^2=\dfrac{5}{2}$ から $x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

(3) $x-1=\pm\sqrt{8}$ から $x=1\pm2\sqrt{2}$

(4) $2x+3=0$ から $x=-\dfrac{3}{2}$

練習 1.63 次の2次方程式を解け.

(1) $x^2+7x+4=0$　　(2) $x^2-5x+2=0$

(3) $3x^2+5x-1=0$　　(4) $2x^2-3x-3=0$

【解】 (1) $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\dfrac{-7\pm\sqrt{33}}{2}$

(2) $x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

(3) $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot3\cdot(-1)}}{2\cdot3}=\dfrac{-5\pm\sqrt{37}}{6}$

(4) $x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}=\dfrac{3\pm\sqrt{33}}{4}$

練習 1.64 次の2次方程式を解け.

(1) $x^2+6x+3=0$　　(2) $x^2+2x-2=0$

(3) $2x^2-4x+1=0$　　(4) $3x^2-8x-3=0$

【解】 (1) $x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\dfrac{-6\pm\sqrt{24}}{2}=\dfrac{-6\pm2\sqrt{6}}{2}=-3\pm\sqrt{6}$

(2) $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\dfrac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=\dfrac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$

(3) $x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\dfrac{4\pm\sqrt{8}}{4}=\dfrac{4\pm2\sqrt{2}}{4}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

(4) $x=\dfrac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot3\cdot(-3)}}{2\cdot3}=\dfrac{8\pm\sqrt{100}}{6}=\dfrac{8\pm10}{6}=3,-\dfrac{1}{3}$

練習 1.65 x の2次方程式 $2x^2+mx-3m^2=0$ が -1 を解にもつとき，定数 m の値を求めよ.

【解】 この方程式が $x=-1$ を解にもつから，次の等式が成り立つ.

$$2\cdot(-1)^2+m\cdot(-1)-3m^2=0$$

すなわち　$3m^2+m-2=0$

これを解いて　$m=\dfrac{2}{3},\ -1$

練習 1.66 次の 2 次方程式の実数解の個数を求めよ.

(1) $x^2+3x-5=0$ (2) $3x^2-5x+4=0$ (3) $x^2-x+\dfrac{1}{4}=0$

【解】 (1) 2 次方程式 $x^2+3x-5=0$ の実数解の個数は

$$D=3^2-4\cdot1\cdot(-5)=29>0$$

であるから 2 個

(2) 2 次方程式 $3x^2-5x+4=0$ の実数解の個数は

$$D=(-5)^2-4\cdot3\cdot4=-23<0$$

であるから 0 個

(3) 2 次方程式 $x^2-x+\dfrac{1}{4}=0$ の実数解の個数は

$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{4}=0$$

であるから 1 個

練習 1.67 x の 2 次方程式 $x^2-4x+m=0$ について,次の問いに答えよ.

(1) 重解をもつとき,定数 m の値を求めよ.

(2) 実数解をもたないとき,定数 m の値の範囲を求めよ.

【解】 2 次方程式 $x^2-4x+m=0$ の係数について

$$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot m=16-4m$$

とする.

(1) 重解をもつための条件は,$D=0$ が成り立つことであるから

$$16-4m=0$$

これを解いて $m=4$

(2) 実数解をもたないための条件は,$D<0$ が成り立つことであるから

$$16-4m<0$$

これを解いて $m>4$

練習 1.68 長さ 8cm の線分を大小 2 つに分けて，それぞれの長さを 1 辺とする正方形を作る．2 つの正方形の面積の和が 46cm^2 であるとき，大きい正方形の 1 辺の長さは何 cm か．

【解】 大きい正方形の 1 辺の長さを x cm とすると，小さい正方形の 1 辺の長さは $(8-x)$ cm である．$0 < 8-x < x$ であるから　$4 < x < 8$　$\cdots$①

面積の関係を式に表すと　$x^2 + (8-x)^2 = 46$

整理すると　$x^2 - 8x + 9 = 0$

よって　$x = 4 \pm \sqrt{7}$

このうち，① を満たすものは $x = 4 + \sqrt{7}$ である．

したがって　$x = 4 + \sqrt{7}$　　(答) $(4+\sqrt{7})$cm

1.3.3　補充問題

9 次の不等式を解け．

(1) $\begin{cases} 2x + 6 > 5x - 12 \\ 3x - 7 \leqq 2(4-x) \end{cases}$　　(2) $0.05 \leqq 0.2 - \dfrac{x}{100} \leqq 0.1$

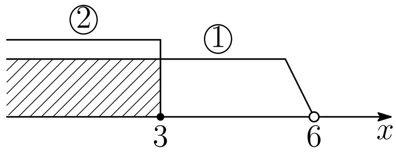
【解】 (1) $2x + 6 > 5x - 12$ から　$-3x > -18$

よって　$x < 6$　$\cdots$①

$3x - 7 \leqq 2(4-x)$ から　$5x \leqq 15$

よって　$x \leqq 3$　$\cdots$②

① と ② の共通範囲を求めて　$x \leqq 3$



(2) 各辺に 100 をかけると

$$100 \times 0.05 \leqq 100\left(0.2 - \frac{x}{100}\right) \leqq 100 \times 0.1$$

すなわち　$5 \leqq 20 - x \leqq 10$

各辺から 20 を引くと　$-15 \leqq -x \leqq -10$

各辺に -1 をかけると　$15 \geqq x \geqq 10$

よって　$10 \leqq x \leqq 15$

10 次の方程式，不等式を解け．

(1) $|2x-1|=3$　　(2) $|2x-1|<3$

【解】 (1) $2x-1=\pm 3$ から　$x=2,-1$

(2) $-3<2x-1<3$ から　$-1<x<2$

11 次の 2 次方程式を解け．

(1) $3x^2-2x-8=0$　　(2) $4x^2+5x-6=0$

(1) $4x^2+4x+1=0$　　(2) $2a^2-6a+3=0$

(3) $2(x-1)^2=3+4x$　　(4) $x^2+2\sqrt{2}x+2=0$

【解】 (1) $(x-2)(3x+4)=0$ から　$x=2,-\dfrac{4}{3}$

(2) $(x+2)(4x-3)=0$ から　$x=-2,\ \dfrac{3}{4}$

(3) 左辺を因数分解すると　$(2x+1)^2=0$

したがって　$x=-\dfrac{1}{2}$

(4) $a=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4{\cdot}2{\cdot}3}}{2{\cdot}2}=\dfrac{6\pm\sqrt{12}}{4}=\dfrac{6\pm 2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

(5) 展開して整理すると　$2x^2-8x-1=0$

$x=\dfrac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4{\cdot}2{\cdot}(-1)}}{2{\cdot}2}=\dfrac{8\pm\sqrt{72}}{4}=\dfrac{8\pm 6\sqrt{2}}{4}=\dfrac{4\pm 3\sqrt{2}}{2}$

(6) $x=\dfrac{-2\sqrt{2}\pm\sqrt{(2\sqrt{2})^2-4{\cdot}1{\cdot}2}}{2{\cdot}1}=\dfrac{-2\sqrt{2}\pm\sqrt{0}}{2}=-\sqrt{2}$

12 2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ は，$b'^2-ac \geqq 0$ のとき，次の解をもつことを示せ．また，このことを使って，2 次方程式 $2x^2+6x-1=0$ を解け．

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

【解】 (前半) $x=\dfrac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}$

$$=\frac{-2b'\pm 2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

(後半) $2x^2+2{\cdot}3x-1=0$ であるから $[a=2,\ b'=3,\ c=-1]$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-2{\cdot}(-1)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{11}}{2}$$

1.4 章末問題

1.4.1 章末問題 A

1 次の計算をせよ．

(1) $(x+y)^3-3xy(x+y)$　　(2) $n^3-(n-1)^3$

【解】 (1) $(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)-(3x^2y+3xy^2)$

$=x^3+y^3$

(2) $n^3-(n-1)^3=n^3-(n^3-3n^2+3n-1)$

$=3n^2-3n+1$

2 次の式を展開し，x について降べきの順に整理せよ．

(1) $(x^3+4-3x)(1-2x)$　　(2) $(x-a)(x-b)(x-c)$

(3) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$　　(4) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

【解】 (1)
$$\begin{aligned}&(x^3+4-3x)(1-2x)\\&=(x^3+4-3x)\cdot 1+(x^3+4-3x)\cdot(-2x)\\&=x^3+4-3x-2x^4-8x+6x^2\\&=-2x^4+x^3+6x^2-11x+4\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(x-a)(x-b)(x-c)\\&=\{x^2-(a+b)x+ab\}(x-c)\\&=\{x^2-(a+b)x+ab\}\cdot x+\{x^2-(a+b)x+ab\}\cdot(-c)\\&=x^3-(a+b)x^2+abx-cx^2+(a+b)cx-abc\\&=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)\\&=(x-1)(x+1)\times(x-2)(x+2)\\&=(x^2-1)(x^2-4)\\&=(x^2)^2-5x^2+4\\&=x^4-5x^2+4\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)\\&=\{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\}\\&=(x^2+2)^2-(2x)^2\\&=(x^2)^2+4x^2+4-4x^2\\&=x^4+4\end{aligned}$$

3 次の式を因数分解せよ．

(1) $6x^2+(3a-2b)x-ab$　　(2) $3x^2+ax-2a^2+4x-a+1$

【解】 (1) $6x^2+(3a-2b)x-ab=(2x+a)(3x-b)$

(2)
$$\begin{aligned}&3x^2+ax-2a^2+4x-a+1\\&=3x^2+(a+4)x-(2a^2+a-1)\\&=3x^2+(a+4)x-(a+1)(2a-1)\\&=\{x+(a+1)\}\{3x-(2a-1)\}\\&=(x+a+1)(3x-2a+1)\end{aligned}$$

4 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{8}}+\dfrac{1}{\sqrt{32}}$　　(2) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

【解】 (1)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{32}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\sqrt{2}\\&=\frac{3\sqrt{2}}{8}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\\&=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}+\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}\\&=\frac{2^2-4\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2+4\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\\&=4-4\sqrt{3}+3+4+4\sqrt{3}+3\\&=14\end{aligned}$$

5 次の不等式を成り立たせる正の整数 n をすべて求めよ．

$$\frac{1}{2}(n+3)+\frac{1}{6}>\frac{1}{3}(4n-1)$$

【解】 両辺に6をかけると

$$6\left\{\frac{1}{2}(n+3)+\frac{1}{6}\right\}>6\times\frac{1}{3}(4n-1)$$

展開すると　$3n+9+1>8n-2$

移項して整理すると　$-5n>-12$

よって　$n<\dfrac{12}{5}$

$\dfrac{12}{5}=2.4$ であるから，不等式を成り立たせる正の整数 n は　$n=1,\ 2$

6 4km の道のりを，歩くか走って行くことにした．ただし，歩くときの速さは分速 80m で，走るときは分速 200m である．目的地に着くまでにかかる時間を 32 分以上 35 分以下にしたいとき，歩く距離を何 m 以上何 m 以下にすればよいか.

【解】 歩く距離を x m とすると

$$32 \leqq \frac{x}{80} + \frac{4000-x}{200} \leqq 35$$

各辺に 400 をかけると

$$12800 \leqq 5x + 2(4000-x) \leqq 14000$$

よって　$12800 \leqq 3x + 8000 \leqq 14000$

各辺から 8000 を引くと　$4800 \leqq 3x \leqq 6000$

各辺を 3 で割ると　$1600 \leqq x \leqq 2000$

(答) 1600m 以上 2000m 以下

7 次の方程式，不等式を解け.

(1) $|3x-2| = 4$　　(2) $|2x+5| > 2$

【解】 (1) $3x - 2 = \pm 4$ から　$x = 2, -\dfrac{2}{3}$

(2) $2x+5 < -2,\ 2 < 2x+5$ から　$x < -\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{3}{2} < x$

8 次の 2 次方程式を解け.

(1) $2(x+1)^2 = 4 - 5(x+1)$ (2) $0.3x^2 - 1.2x + 1 = 0$

【解】 (1) $x+1 = A$ とおくと $2A^2 = 4 - 5A$

すなわち $2A^2 + 5A - 4 = 0$

これを解くと

$$A = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{57}}{4}$$

よって

$$\begin{aligned} x &= A - 1 \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{57}}{4} - 1 \\ &= \frac{-9 \pm \sqrt{57}}{4} \end{aligned}$$

(2) 両辺に 10 をかけると

$$3x^2 - 12x + 10 = 0$$

これを解くと

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10}}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{12 \pm \sqrt{24}}{6} = \frac{12 \pm 2\sqrt{6}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

1.4.2 章末問題 B

9 次の式を展開せよ.

(1) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

(2) $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

【解】 (1) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

$=(x-1)(x+2)\times(x-3)(x+4)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)$

$=\{(x^2+x)-2\}\{(x^2+x)-12\}$

$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$

$=x^4+2x^3+x^2-14x^2-14x+24$

$=x^4+2x^3-13x^2-14x+24$

(2) $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$=(x-1)(x^2+x+1)\times(x+1)(x^2-x+1)$

$=(x^3-1)(x^3+1)$

$=(x^3)^2-1^2=x^6-1$

10 次の式を因数分解せよ.

(1) $2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1)$

(2) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

【解】 (1) $2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1)$

$=(n+1)\{2(n+1)^2-3n-2\}$

$=(n+1)\{2(n^2+2n+1)-3n-2\}$

$=(n+1)(2n^2+n)$

$=n(n+1)(2n+1)$

(2) a について整理すると

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

11 $\sqrt{5}$ の整数の部分を a，小数の部分を b とする．

(1) a と b を求めよ．　　(2) $\dfrac{a}{b}$ の整数の部分を求めよ．

【解】 (1) $2<\sqrt{5}<3$ であるから　$a=2$

$a+b=\sqrt{5}$ より　$b=\sqrt{5}-a=\sqrt{5}-2$

(2) $$\frac{a}{b}=\frac{2}{\sqrt{5}-2}=\frac{2\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}+4}{\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2}=2\sqrt{5}+4$$

$2\sqrt{5}=\sqrt{20}$ より　$4<2\sqrt{5}<5$

よって　　$4+4<2\sqrt{5}+4<5+4$

すなわち　$8<2\sqrt{5}+4<9$

したがって，$\dfrac{a}{b}$ の整数部分は　8

12 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とするとき，x^2-x と x^3+x^2 の値を，それぞれ求めよ．

【解】 $$x^2-x=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{2^2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$=\frac{6+2\sqrt{5}-2\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}$$
$$=1$$

$x^2-x=1$ より，$x^2=x+1$ であるから

$$x^3+x^2=x^2(x+1)=(x+1)^2$$
$$=x^2+2x+1$$
$$=(x+1)+2x+1=3x+2$$
$$=3\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}+2$$
$$=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

13 定価が 1 個 100 円の商品がある．この商品を，A 店では定価の 12%引きで売っている．また，B 店では 10 個までは定価であるが，11 個以上は 1 個につき定価の 25%引きで売っている．この商品を A 店で買うより B 店で買った方が安くなるのは，何個以上買うときか．

【解】 条件を満たすように x 個買うとすると

$$x \times 100 \times \frac{88}{100} > 10 \times 100 + (x-10) \times 100 \times \frac{75}{100}$$

よって　$88x > 1000 + 75(x-10)$

展開して整理すると　$13x > 250$

$$x > \frac{250}{13}$$

$\dfrac{250}{13} = 19.2\cdots$ であるから，B 店で買った方が安くなるのは，商品の数が 20 個以上のときである．

(答) 20 個以上

14 次の式の根号をはずし，x の多項式で表せ．

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$$

【解】
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-4x+4} &= \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2} \\ &= |\,x\,| + |\,x-2\,|\end{aligned}$$

［1］ $x < 0$ のとき

$|\,x\,| + |\,x-2\,| = -x - (x-2) = -2x + 2$

［2］ $0 \leqq x < 2$ のとき

$|\,x\,| + |\,x-2\,| = x - (x-2) = 2$

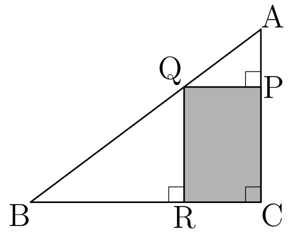
［3］ $2 \leqq x$ のとき

$|\,x\,| + |\,x-2\,| = x + (x-2) = 2x - 2$

したがって，［1］，［2］，［3］から

$x < 0$ のとき　$-2x+2$，$0 \leqq x < 2$ のとき　2，$2 \leqq x$ のとき　$2x-2$

15 右の図のような AB$=5$，BC$=4$，CA$=3$ である直角三角形 ABC がある．この三角形に面積が $\dfrac{8}{3}$ である長方形 PQRC が内接しているとき，長方形の短い辺の長さを求めよ．



【解】 PQ $= x$ とすると　　$0 < x < 4$　$\cdots$ ①

$\triangle$AQP と $\triangle$ABC は相似であるから，

$x : 4 = \mathrm{AP} : 3$ より　　$\mathrm{AP} = \dfrac{3}{4}x$

このとき　　$\mathrm{PC} = \mathrm{AC} - \mathrm{AP} = 3 - \dfrac{3}{4}x$

よって，長方形の PQRC の面積について，次の等式が成り立つ．

$$x\left(3 - \frac{3}{4}x\right) = \frac{8}{3}$$

両辺に 12 をかけると　　$12x\left(3 - \dfrac{3}{4}x\right) = 12 \times \dfrac{8}{3}$

展開して整理すると　　$9x^2 - 36x + 32 = 0$

左辺を因数分解すると　　$(3x-4)(3x-8) = 0$

これを解くと　　$x = \dfrac{4}{3},\ \dfrac{8}{3}$

これらは ① を満たす．

$x = \dfrac{4}{3}$ のとき　$\mathrm{QR} = \dfrac{8}{3} \div \dfrac{4}{3} = 2$

$x = \dfrac{8}{3}$ のとき　$\mathrm{QR} = 1$

よって，長方形の短い辺の長さは　1 または $\dfrac{4}{3}$

第 2 章　2次関数

2.1　2次関数とグラフ

2.1.1　関数とグラフ

練習 2.1 気温は地上から 10km までは，1km 高くなるごとに 6 ℃ずつ下がるという．地上の気温が 30 ℃のとき，地上から高さ x km の地点の気温を y ℃とすると，y は x の関数である．y を x の式で表せ．

【答】 $y = 30 - 6x \quad (0 \leqq x \leqq 10)$

練習 2.2 2 次関数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ において，次の値を求めよ．

(1) $f(3)$	(2) $f(0)$	(3) $f(-1)$
(4) $f(-2)$	(5) $f(a)$	(6) $f(a+1)$

【解】 (1) $f(3) = 3^2 - 2\cdot3 + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$

(2) $f(0) = 0^2 - 2\cdot0 + 1 = 1$

(3) $f(-1) = (-1)^2 - 2\cdot(-1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$

(4) $f(-2) = (-2)^2 - 2\cdot(-2) + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$

(5) $f(a) = a^2 - 2a + 1$

(6) $f(a+1) = (a+1)^2 - 2(a+1) + 1 = (a^2 + 2a + 1) - 2a - 2 + 1 = a^2$

練習 2.3 1次関数 $f(x)=ax+b$ が次の条件を満たすとき，定数 a，b の値を求めよ．

(1) $f(2)=8$，$f(-1)=-4$　　(2) $f(0)=2$，$f(3)=-7$

【解】 (1) $f(2)=8$ から　$2a+b=8$　$\cdots$①

$f(-1)=-4$ から　$-a+b=-4$　$\cdots$②

①，② を解いて　$a=4$，$b=0$

(2) $f(0)=2$ から　$b=2$　$\cdots$①

$f(3)=-7$ から　$3a+b=-7$　$\cdots$②

① を ② に代入して　$a=-3$

よって　$a=-3$，$b=2$

練習 2.4 次の関数のグラフをかけ．また，関数の値域を求めよ．

(1) $y=3x-2$　$(0 \leqq x \leqq 3)$

(2) $y=-2x+4$　$(-2 \leqq x \leqq 2)$

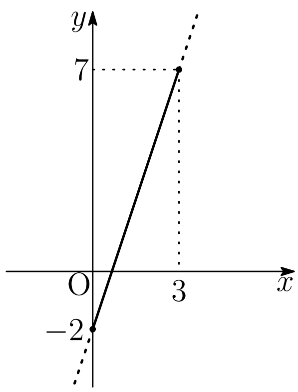
【解】 (1) この関数グラフは，$y=3x-2$ のグラフのうち，$0 \leqq x \leqq 3$ に対応する部分である．

$x=0$ のとき　$y=3\cdot0-2=-2$

$x=3$ のとき　$y=3\cdot3-2=7$

よって，グラフは右の図の実線部分である．

値域は　　$-2 \leqq y \leqq 7$



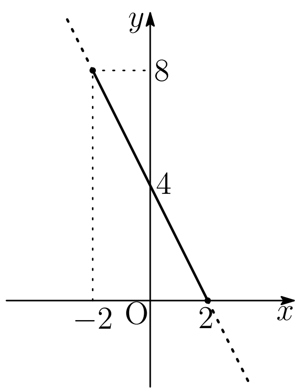
(2) この関数グラフは，$y=-2x+4$ のグラフのうち，$-2 \leqq x \leqq 2$ に対応する部分である．

$x=-2$ のとき　$y=-2\cdot(-2)+4=8$

$x=2$ のとき　$y=-2\cdot2+4=0$

よって，グラフは右の図の実線部分である．

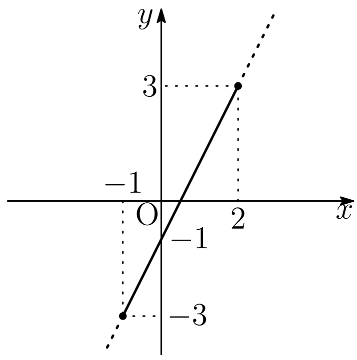
値域は　　$0 \leqq y \leqq 8$



練習 2.5 次の関数の値域を求めよ．また，関数の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ．

(1)　$y = 2x - 1$　$(-1 \leqq x \leqq 2)$　　　(2)　$y = -3x + 5$　$(0 \leqq x \leqq 3)$

【解】 (1) この関数のグラフは右の図の実線部分である．

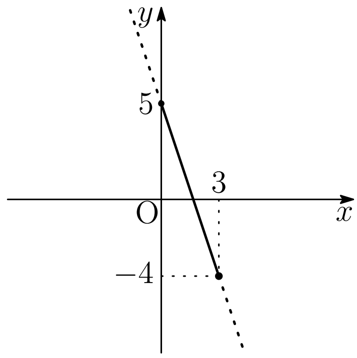


よって，関数の値域は

$$-3 \leqq y \leqq 3$$

である．
また，この関数は $x = 2$ で最大値 3 をとり，$x = -1$ で最小値 -3 をとる．

(2) この関数のグラフは右の図の実線部分である．



よって，関数の値域は

$$-4 \leqq y \leqq 5$$

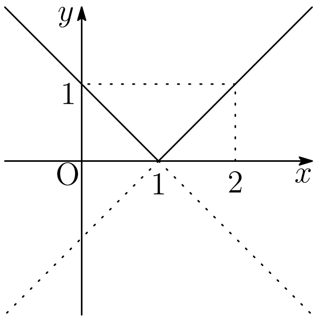
である．
また，この関数は $x = 0$ で最大値 5 をとり，$x = 3$ で最小値 -4 をとる．

練習 2.6 次の関数のグラフをかけ.

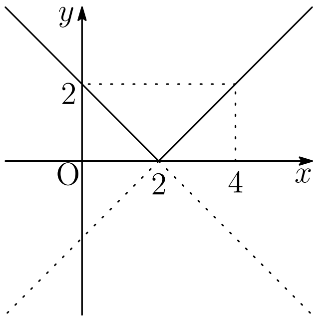
(1) $x \geqq 1$ のとき　$y = x - 1$,　$x < 1$ のとき　$y = -x + 1$

(2) $y = |\,x - 2\,|$

【解】 (1)



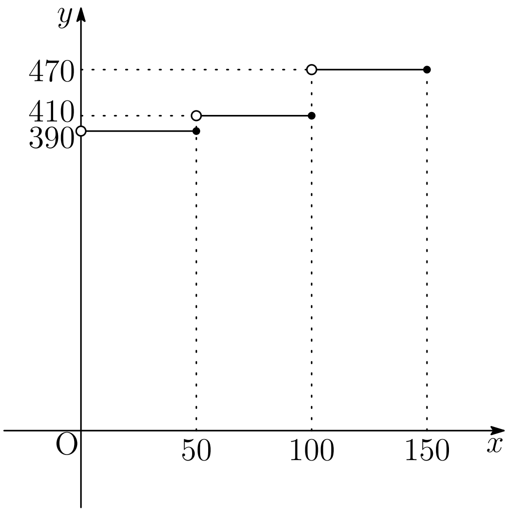
(2)　$x \geqq 2$ のとき　$y = x - 2$
　　$x < 2$ のとき　$y = -x + 2$



練習 2.7 重さが 150g までの定形外の速達郵便料金は,右の表のようになっている.郵便物の重さを xg,料金を y 円とするとき,この関数のグラフをかけ.

重さ	料金
50g まで	390 円
100g まで	410 円
150g まで	470 円

【解】



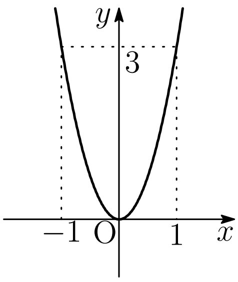
2.1.2　2 次関数のグラフ

練習 2.8 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その放物線は上に凸，下に凸のどちらであるか．

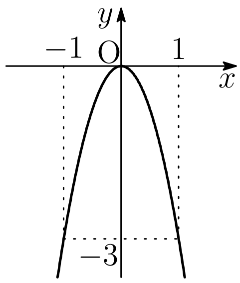
(1) $y = 3x^2$　　(2) $y = -3x^2$

(3) $y = \dfrac{1}{3}x^2$　　(4) $y = -\dfrac{1}{3}x^2$

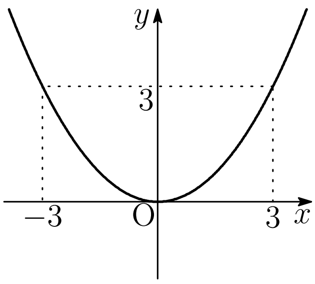
【答】 (1) 下に凸



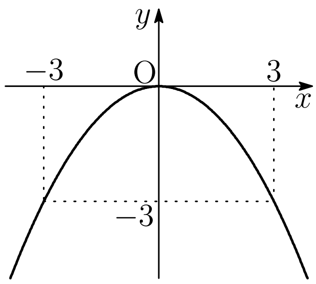
(2) 上に凸



(3) 下に凸



(4) 上に凸



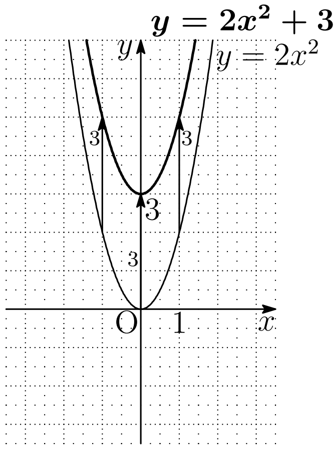
　$y = 2x^2 + 3$ のグラフ上の各点は，$y = 2x^2$ のグラフ上の各点を，

　y 軸の正の向きに 3 だけ移動させたもの

になっている．

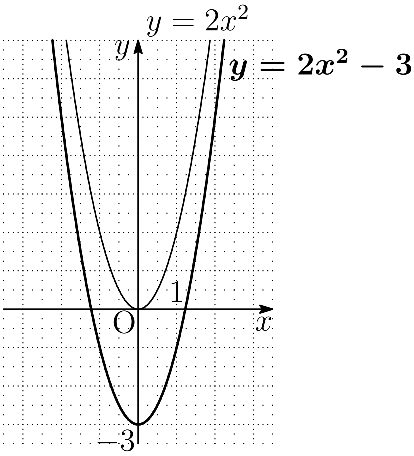
　したがって，$y = 2x^2 + 3$ のグラフは右の図のようになる．

　その軸は y 軸，頂点は点 $(0, 3)$ である．



練習 2.9　$y = 2x^2 - 3$ のグラフを右の図にかけ．また，その放物線の軸と頂点をいえ．

【答】 軸は y 軸，頂点は点 $(0, -3)$

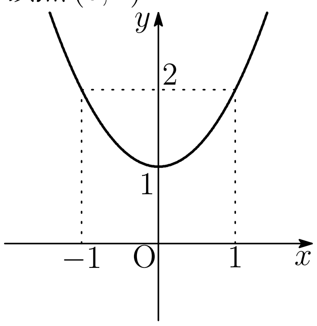


練習 2.10　次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その頂点を求めよ．

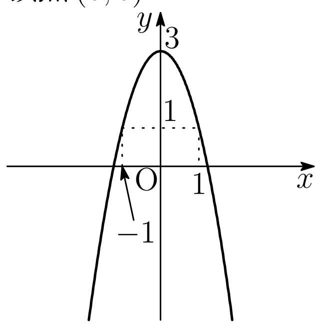
(1) $y = x^2 + 1$　　(2) $y = -2x^2 + 3$

(3) $y = -x^2 - 2$　　(4) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 4$

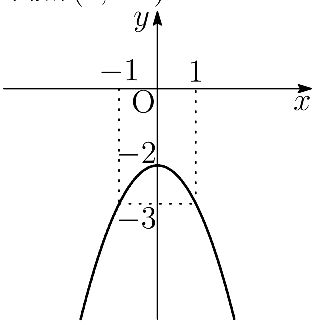
【答】 (1) 頂点 $(0, 1)$



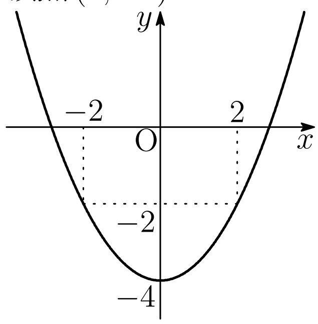
(2) 頂点 $(0, 3)$



(3) 頂点 $(0, -2)$



(4) 頂点 $(0, -4)$

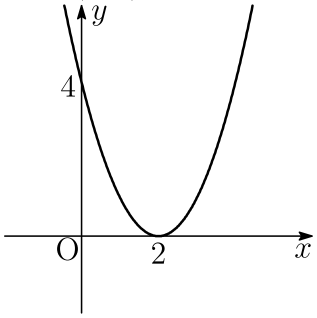


練習 2.11 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

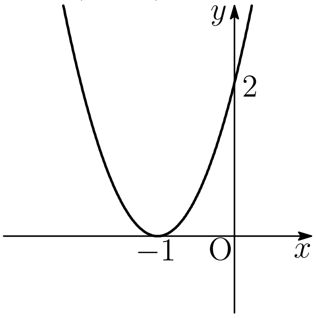
(1) $y = (x-2)^2$　　(2) $y = 2(x+1)^2$

(3) $y = -(x-3)^2$　　(4) $y = -2(x+2)^2$

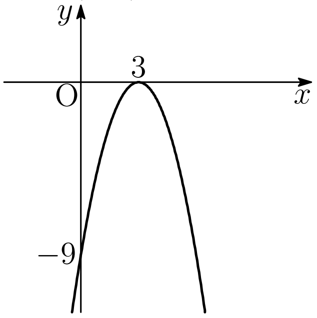
【答】 (1) 頂点 $(2, 0)$，軸 $x = 2$



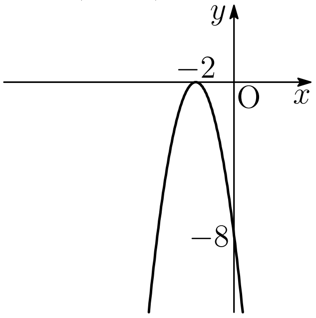
(2) 頂点 $(-1, 0)$，軸 $x = -1$



(3) 頂点 $(3, 0)$，軸 $x = 3$



(4) 頂点 $(-2, 0)$，軸 $x = -2$



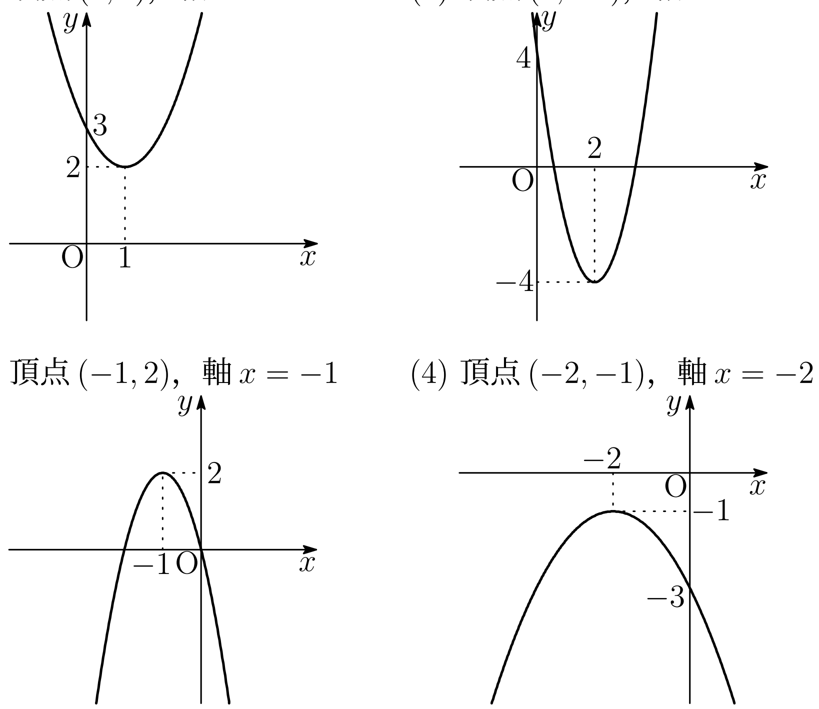
練習 2.12 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

(1) $y = (x-1)^2 + 2$　　(2) $y = 2(x-2)^2 - 4$

(3) $y = -2(x+1)^2 + 2$　　(4) $y = -\dfrac{1}{2}(x+2)^2 - 1$

【答】(1) 頂点 $(1, 2)$，軸 $x = 1$　　(2) 頂点 $(2, -4)$，軸 $x = 2$

(3) 頂点 $(-1, 2)$，軸 $x = -1$　　(4) 頂点 $(-2, -1)$，軸 $x = -2$



練習 2.13 2 次関数 $y = -2x^2$ のグラフを次のように平行移動させると，どのような 2 次関数のグラフになるか．その関数の式を求めよ．

(1) x 軸方向に 3，y 軸方向に 1 だけ平行移動

(2) x 軸方向に 3，y 軸方向に -1 だけ平行移動

(3) x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動

【解】(1) $y = -2(x-3)^2 + 1$

(2) $y = -2(x-3)^2 - 1$

(3) $y = -2\{x-(-3)\}^2 + 1$　すなわち　$y = -2(x+3)^2 + 1$

練習 2.14 次の2次式を平方完成せよ．

(1) x^2+8x (2) x^2-4x

(3) x^2+6x+8 (4) $x^2-8x+10$

(5) $2x^2+8x-3$ (6) $2x^2-4x-1$

(7) x^2+x-2 (8) $2x^2-6x+3$

【答】 (1)
$$\begin{aligned} & x^2+8x \\ &= (x+4)^2-4^2 \\ &= (x+4)^2-16 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} & x^2-4x \\ &= (x-2)^2-2^2 \\ &= (x-2)^2-4 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} & x^2+6x+8 \\ &= (x+3)^2-3^2+8 \\ &= (x+3)^2-1 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} & x^2-8x+10 \\ &= (x-4)^2-4^2+10 \\ &= (x-4)^2-6 \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} & 2x^2+8x-3 \\ &= 2(x^2+4x)-3 \\ &= 2\{(x+2)^2-2^2\}-3 \\ &= 2(x+2)^2-11 \end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned} & 2x^2-4x-1 \\ &= 2(x^2-2x)-1 \\ &= 2\{(x-1)^2-1^2\}-1 \\ &= 2(x-1)^2-3 \end{aligned}$$

(7)
$$\begin{aligned} & x^2+x-2 \\ &= x^2+x-2 \\ &= \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-2 \\ &= \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4} \end{aligned}$$

(8)
$$\begin{aligned} & 2x^2-6x+3 \\ &= 2(x^2-3x)+3 \\ &= 2\left\{\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\left(\tfrac{3}{2}\right)^2\right\}+3 \\ &= 2\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

練習 2.15 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

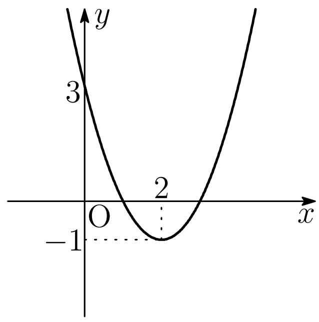
(1) $y = x^2 - 4x + 3$　　(2) $y = 2x^2 + 4x - 1$

(3) $y = -3x^2 + 6x + 1$　　(4) $y = -x^2 - 4x + 2$

(5) $y = 2x^2 - 6x - 1$　　(6) $y = -x^2 + 3x$

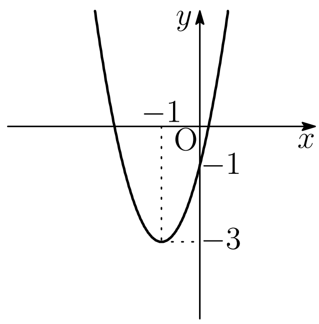
【解】 (1)
$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 3 \\ &= (x-2)^2 - 2^2 + 3 \\ &= (x-2)^2 - 1 \end{aligned}$$

頂点は点 $(2, -1)$，軸は直線 $x = 2$ である．



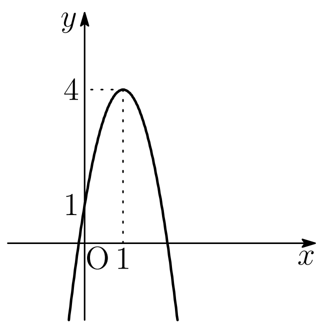
(2)
$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x - 1 \\ &= 2(x^2 + 2x) - 1 \\ &= 2\{(x+1)^2 - 1^2\} - 1 \\ &= 2(x+1)^2 - 3 \end{aligned}$$

頂点は点 $(-1, -3)$，軸は直線 $x = -1$ である．



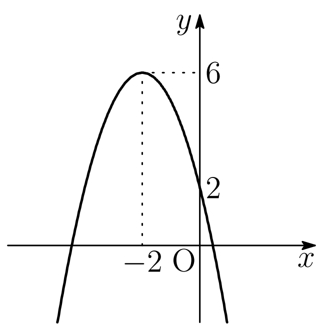
(3)
$$\begin{aligned} y &= -3x^2 + 6x + 1 \\ &= -3(x^2 - 2x) + 1 \\ &= -3\{(x-1)^2 - 1^2\} + 1 \\ &= -3(x-1)^2 + 4 \end{aligned}$$

頂点は点 $(1, 4)$，軸は直線 $x = 1$ である．



(4)
$$\begin{aligned} y &= -x^2 - 4x + 2 \\ &= -(x^2 + 4x) + 2 \\ &= -\{(x+2)^2 - 2^2\} + 2 \\ &= -(x+2)^2 + 6 \end{aligned}$$

頂点は点 $(-2, 6)$，軸は直線 $x = -2$ である．



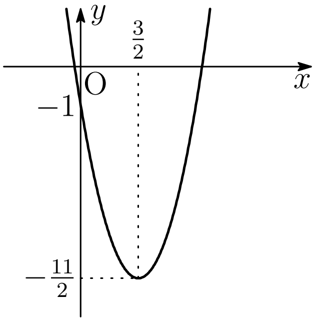
(5)　$y = 2x^2 - 6x - 1$

$$= 2(x^2 - 3x) - 1$$

$$= 2\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} - 1$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}$$

頂点は点 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right)$，軸は直線 $x = \frac{3}{2}$ である．



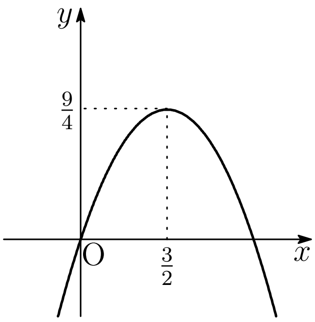
(6)　$y = -x^2 + 3x$

$$= -(x^2 - 3x)$$

$$= -\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}$$

$$= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

頂点は点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$，軸は直線 $x = \frac{3}{2}$ である．



練習 2.16 放物線 $y=2x^2-4x$ を平行移動して次の放物線に重ねるには，どのように平行移動すればよいか.

(1) $y=2x^2$　　(2) $y=2x^2+4x-3$

【解】 $y=2x^2-4x=2(x^2-2x)=2\{(x-1)^2-1^2\}=2(x-1)^2-2$ であるから，
$y=2x^2-4x$ の頂点の座標は $(1,-2)$

(1) $y=2x^2$ の頂点は $(0,0)$ である.
$y=2x^2-4x$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して
$y=2x^2$ に重なるとすると

$1+p=0$，$-2+q=0$　よって　$p=-1$，$q=2$

したがって，x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動すればよい

(2)
$$\begin{aligned} y&=2x^2+4x-3\\ &=2(x^2+2x)-3\\ &=2\{(x+1)^2-1^2\}-3\\ &=2(x+1)^2-5 \end{aligned}$$
ゆえに，$y=2x^2+4x-3$ の頂点は $(-1,-5)$ である.
$y=2x^2-4x$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して
$y=2x^2+4x-5$ に重なるとすると

$1+p=-1$，$-2+q=-5$　よって　$p=-2$，$q=-3$

したがって，x 軸方向に -2，y 軸方向に -3 だけ平行移動すればよい

2.1.3 補充問題

1 関数 $y=ax+b$ $(-1\leqq x\leqq 5)$ の値域が，$1\leqq y\leqq 13$ となるような定数 a，b の値を求めよ．ただし，$a<0$ とする.

【解】 $a<0$ であるから，この関数のグラフは右下がりである.

よって，$x=-1$ のとき $y=13$ より　$-a+b=13$　$\cdots$①
　　　$x=5$ のとき $y=1$ より　$5a+b=1$　$\cdots$②

①，① を解いて　$a=-2$，$b=11$

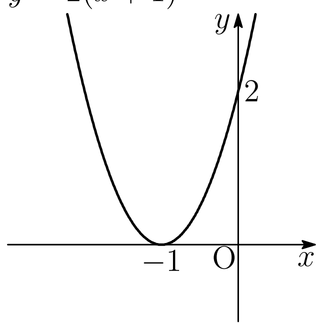
これは，$a<0$ を満たす.

2 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

(1) $y = 2x^2 + 4x + 2$　　(2) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x - 1$

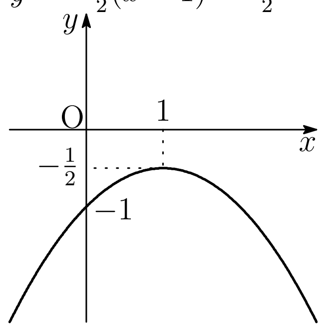
(3) $y = (x-1)(x-5)$　　(4) $y = (2x-1)(x+3)$

【答】 (1) $y = 2(x+1)^2$



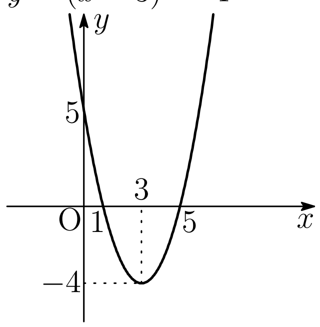
頂点 $(-1, 0)$，軸 $x = -1$

(2) $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}$



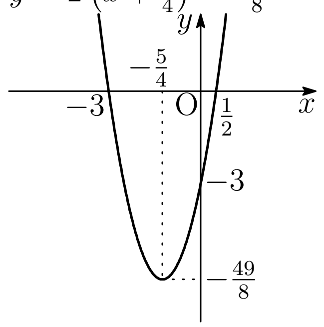
頂点 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$，軸 $x = 1$

(3) $y = (x-3)^2 - 4$



頂点 $(3, -4)$，軸 $x = 3$

(4) $y = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$



頂点 $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{49}{8}\right)$，軸 $x = -\frac{5}{4}$

3 放物線 $y = 2x^2 - 4x - 1$ について，次の問いに答えよ．

(1) この放物線の頂点を A とするとき，A の座標を求めよ．

(2) この放物線を，x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したとき，移動後の放物線の方程式を求めよ．

【解】 (1) $y = 2(x-1)^2 - 3$

したがって　　A$(1, -3)$

(2) 移動後の放物線の頂点の座標は

$(1+2, -3-1)$　すなわち　$(3, -4)$

放物線 $y = 2x^2 - 4x - 1$ を平行移動するから，

求める式は　　$y = 2(x-3)^2 - 4$

よって，求める 2 次関数は　$y = 2x^2 - 12x + 14$

2.2　2 次関数の値の変化

2.2.1　2 次関数の最大・最小

練習 2.17 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1) $y=2(x-3)^2+4$　　(2) $y=-2(x+1)^2-3$

【答】(1) $x=3$ で最小値 4，最大値はない．
(2) $x=-1$ で最大値 -3，最小値はない．

練習 2.18 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

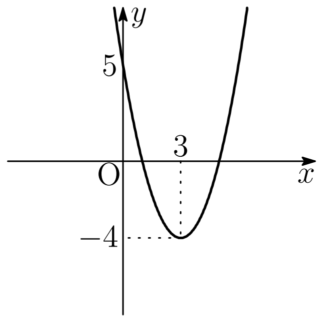
(1) $y=x^2-6x+5$　　(2) $y=2x^2+4x-1$

(3) $y=-x^2-4x+2$　　(4) $y=-2x^2+8x$

(5) $y=x^2+3x+1$　　(6) $y=-2x^2+5x$

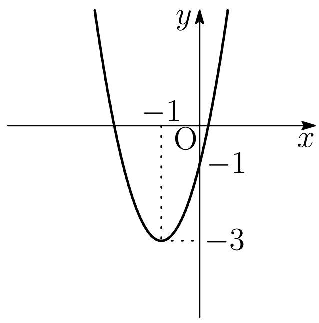
【解】 (1)
$$\begin{aligned} y&=x^2-6x+5\\ &=(x-3)^2-3^2+5\\ &=(x-3)^2-4 \end{aligned}$$

よって，y は $x=3$ で最小値 -4 をとる．
最大値はない．



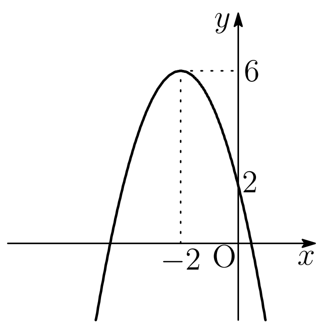
(2)
$$\begin{aligned} y&=2x^2+4x-1\\ &=2(x^2+2x)-1\\ &=2\{(x+1)^2-1^2\}-1\\ &=2(x+1)^2-3 \end{aligned}$$

よって，y は $x=-1$ で最小値 -3 をとる．
最大値はない．



(3)
$$\begin{aligned} y&=-x^2-4x+2\\ &=-(x^2+4x)+2\\ &=-\{(x+2)^2-2^2\}+2\\ &=-(x+2)^2+6 \end{aligned}$$

よって，y は $x=-2$ で最大値 6 をとる．
最小値はない．



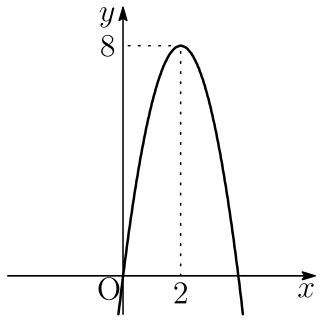
(4)　$y = -2x^2 + 8x$

$= -2(x^2 - 4x)$

$= -2\{(x-2)^2 - 2^2\}$

$= -2(x-2)^2 + 8$

よって，y は $x = 2$ で最大値 8 をとる．
最小値はない．

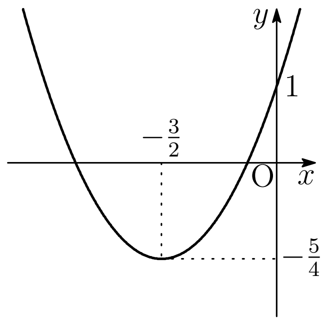


(5)　$y = x^2 + 3x + 1$

$= \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 1$

$= \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4}$

よって，y は $x = -\dfrac{3}{2}$ で最小値 $-\dfrac{5}{4}$ をとる．
最大値はない．



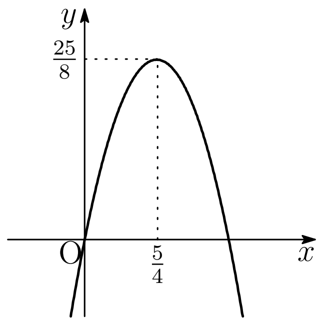
(6)　$y = -2x^2 + 5x$

$= -2\left(x^2 - \dfrac{5}{2}x\right)$

$= -2\left\{\left(x - \dfrac{5}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{5}{4}\right)^2\right\}$

$= -2\left(x - \dfrac{5}{4}\right)^2 + \dfrac{25}{8}$

よって，y は $x = \dfrac{5}{4}$ で最大値 $\dfrac{25}{8}$ をとる．
最小値はない．

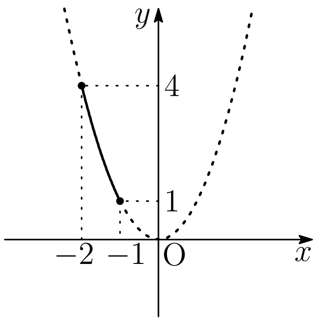


練習 2.19 次の関数の値域と最大値，最小値を求めよ．

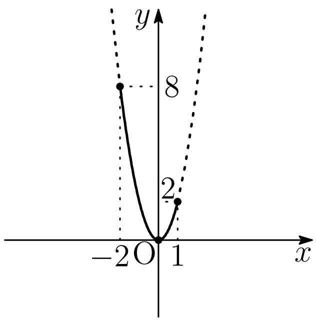
(1) $y = x^2$ $(-2 \leqq x \leqq -1)$　　(2) $y = 2x^2$ $(-2 \leqq x \leqq 1)$

(3) $y = -x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$　　(4) $y = -2x^2$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$

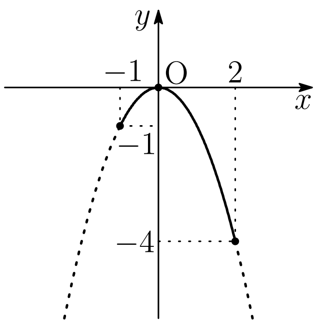
【解】 (1) この関数のグラフは右の図の実線部分である．
よって，値域は $1 \leqq y \leqq 4$ である．
また，y は $x = -2$ で最大値 4 をとり，
$x = -1$ で最小値 1 をとる．



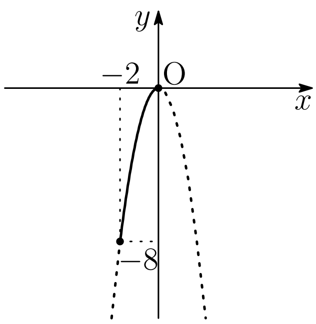
(2) この関数のグラフは右の図の実線部分である．
よって，値域は $0 \leqq y \leqq 8$ である．
また，y は $x = -2$ で最大値 8 をとり，
$x = 0$ で最小値 0 をとる．



(3) この関数のグラフは右の図の実線部分である．
よって，値域は $-4 \leqq y \leqq 0$ である．
また，y は $x = 0$ で最大値 0 をとり，
$x = 2$ で最小値 -4 をとる．



(4) この関数のグラフは右の図の実線部分である．
よって，値域は $-8 \leqq y \leqq 0$ である．
また，y は $x = 0$ で最大値 0 をとり，
$x = -2$ で最小値 -8 をとる．



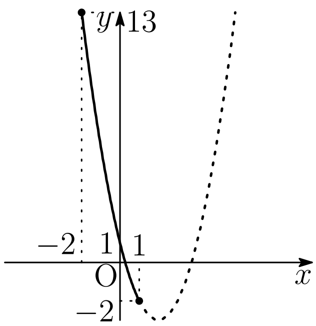
練習 2.20 関数 $y = x^2 - 4x + 1$ の定義域として次の範囲をとるとき，各場合について，最大値と最小値を求めよ．

(1) $-2 \leqq x \leqq 1$　　(2) $1 \leqq x \leqq 3$

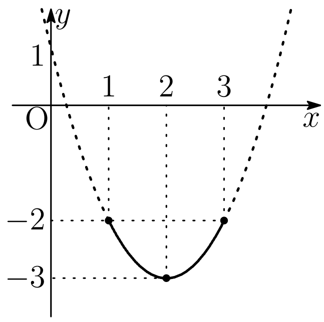
(3) $3 \leqq x \leqq 4$　　(4) $1 < x < 4$

【解】
$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 1 \\ &= (x-2)^2 - 2^2 + 1 \\ &= (x-2)^2 - 3 \end{aligned}$$

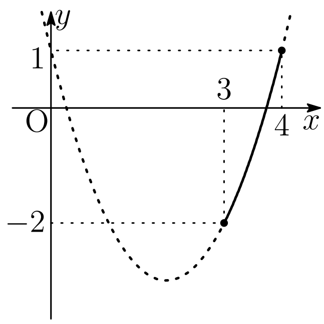
(1) $-2 \leqq x \leqq 1$ でのグラフは，
右の図の実線部分である．
よって，y は $x = -2$ で最大値 13 をとり，
$x = 1$ で最小値 -2 をとる．



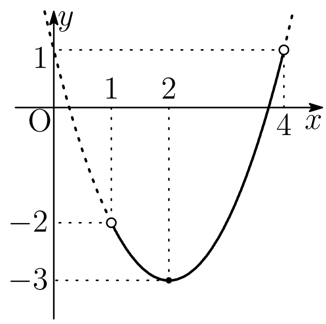
(2) $1 \leqq x \leqq 3$ でのグラフは，
右の図の実線部分である．
よって，y は $x = 1,\ 3$ で最大値 -2 をとり，
$x = 2$ で最小値 -3 をとる．



(3) $3 \leqq x \leqq 4$ でのグラフは，
右の図の実線部分である．
よって，y は $x = 4$ で最大値 1 をとり，
$x = 3$ で最小値 -2 をとる．



(4) $1 < x < 4$ でのグラフは,
右の図の実線部分である.
よって, y は $x = 2$ で最小値 -3 をとる.
最大値はない.



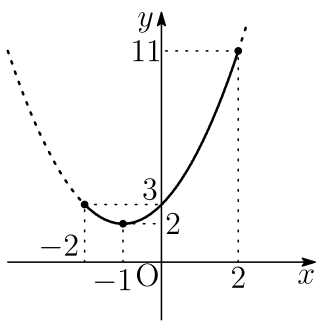
練習 2.21 次の関数に最大値, 最小値があれば, それを求めよ.

(1) $y = x^2+2x+3 \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$　(2) $y = -x^2+4x-3 \quad (0 \leqq x \leqq 4)$

(3) $y = 3x^2+6x-1 \quad (1 \leqq x \leqq 3)$　(4) $y = -2x^2+14x \quad (0 < x < 7)$

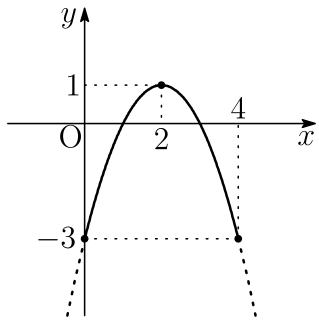
【解】 (1)
$$\begin{aligned} y &= x^2+2x+3 \\ &= (x+1)^2-1^2+3 \\ &= (x+1)^2+2 \end{aligned}$$

$-2 \leqq x \leqq 2$ でのグラフは,
右の図の実線部分である.
よって, y は $x = 2$ で最大値 11 をとり,
$x = -1$ で最小値 2 をとる.



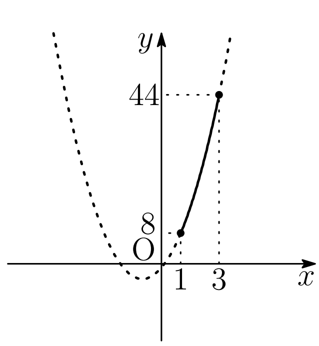
(2)
$$\begin{aligned} y &= -x^2+4x-3 \\ &= -(x^2-4x)-3 \\ &= -\{(x-2)^2-2^2\}-3 \\ &= -(x-2)^2+1 \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 4$ でのグラフは,
右の図の実線部分である.
よって, y は $x = 2$ で最大値 1 をとり,
$x = 0,\ 4$ で最小値 -3 をとる.



(3)
$$\begin{aligned} y &= 3x^2+6x-1 \\ &= 3(x^2+2x)-1 \\ &= 3\{(x+1)^2-1^2\}-1 \\ &= 3(x+1)^2-4 \end{aligned}$$

$1 \leqq x \leqq 3$ でのグラフは,
右の図の実線部分である.
よって, y は $x = 3$ で最大値 44 をとり,
$x = 1$ で最小値 8 をとる.



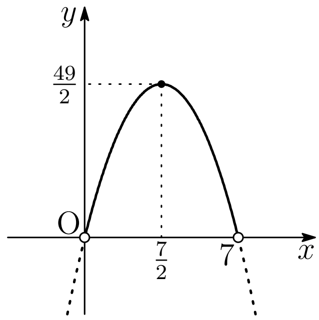
(4) $y=-2x^2+14x$

$=-2(x^2-7x)$

$=-2\left\{\left(x-\frac{7}{2}\right)-\left(\frac{7}{2}\right)^2\right\}$

$=-2\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{2}$

$0<x<7$ でのグラフは，
右の図の実線部分である．
よって，y は $x=\frac{7}{2}$ で最大値 $\frac{49}{2}$ をとり，
また，y の最小値はない．



練習 2.22 次の条件を満たすように，定数 c の値を定めよ．

(1) 関数 $y=x^2-2x+c\ (-2\leqq x\leqq 2)$ の最大値が 5 である．

(2) 関数 $y=x^2+4x+c\ (-1\leqq x\leqq 0)$ の最大値が 2 である．

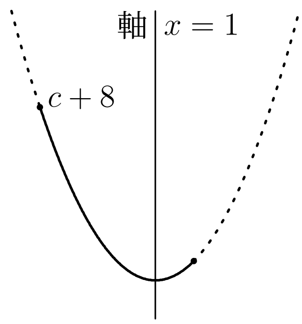
(3) 関数 $y=-x^2+6x+c\ (1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が -7 である．

【解】 (1) 式を変形すると　$y=(x-1)^2+c-1$

$-2\leqq x\leqq 2$ であるから，$x=-2$ で最大値をとる．
$x=-2$ のとき

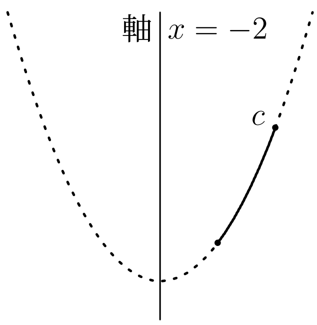
$$y=(-2)^2-2\cdot(-2)+c=c+8$$

$c+8=5$ より　　$c=-3$

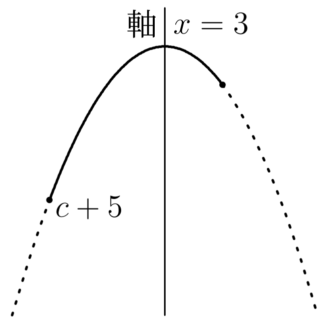


(2) 式を変形すると　$y=(x+2)^2+c-4$

$-1\leqq x\leqq 0$ であるから，$x=0$ で最大値をとる．
$x=0$ のとき　$y=c$
ゆえに　$c=2$



(3) 式を変形すると　$y = -(x-3)^2 + c + 9$



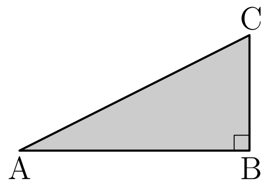
$1 \leqq x \leqq 4$ であるから，$x = 1$ で最小値をとる．

$x = 1$ のとき

$$y = -1^2 + 6 \cdot 1 + c = c + 5$$

$c + 5 = -7$ より　　$c = -12$

練習 2.23 直角三角形 ABC において，直角をはさむ 2 辺 AB，BC の長さの和が 10cm であるとする．このような三角形の面積の最大値を求めよ．

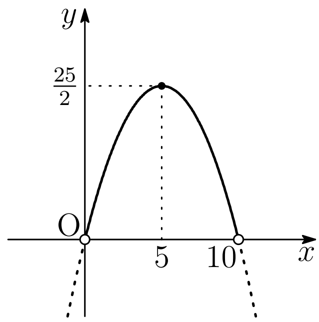


【解】 $\mathrm{AB} = x$ (cm) とすると　$\mathrm{BC} = 10 - x$ (cm)

$x > 0$ かつ $10 - x > 0$ から

$$0 < x < 10 \quad \cdots ①$$

三角形の面積を y cm^2 とすると



$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \mathrm{BC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot x(10 - x) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 10x) \\ &= -\frac{1}{2}\{(x-5)^2 - 5^2\} \\ &= -\frac{1}{2}(x-5)^2 + \frac{25}{2} \end{aligned}$$

① において，y は $x = 5$ すなわち $\mathrm{AB} = 5$ で最大値 $\frac{25}{2}$ をとる．　(答) $\frac{25}{2}$ cm^2

2.2.2　2次関数の決定

練習 2.24 次の条件を満たす2次関数を求め，$y = ax^2 + bx + c$ の形で表せ.

(1) $x = 2$ で最大値8をとり，$x = 1$ で $y = 5$ となる.

(2) $x = -1$ で最小値 -3 をとり，$x = 0$ で $y = -1$ となる.

【解】(1) $x = 2$ で最大値8をとるから，y は

$$y = a(x-2)^2 + 8 \qquad \text{ただし，} a < 0$$

の形に表される．$x = 1$ で $y = 5$ となるから

$$5 = a(1-2)^2 + 8$$

よって　$a = 5 - 8 = -3$

これは，$a < 0$ を満たす.

したがって　$y = -3(x-2)^2 + 8$

すなわち　$y = -3x^2 + 12x - 4$

(2) $x = -1$ で最小値 -3 をとるから，y は

$$y = a(x+1)^2 - 3 \qquad \text{ただし，} a > 0$$

の形に表される．$x = 0$ で $y = -1$ となるから

$$-1 = a(0+1)^2 - 3$$

よって　$a = -1 + 3 = 2$

これは，$a > 0$ を満たす.

したがって　$y = 2(x+1)^2 - 3$

すなわち　$y = 2x^2 + 4x - 1$

練習 2.25 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ．

(1) 頂点が点 $(1, -3)$ で，点 $(3, 5)$ を通る．

(2) 頂点が点 $(-2, 4)$ で，点 $(-4, 2)$ を通る．

【解】(1) 放物線の頂点が点 $(1, -3)$ であるから，この 2 次関数は

$$y = a(x-1)^2 - 3$$

の形に表される．このグラフが点 $(3,\ 5)$ を通るから

$$5 = a(3-1)^2 - 3$$

よって　$4a - 3 = 5$

これを解くと　$a = 2$

したがって　$y = 2(x-1)^2 - 3$

(2) 放物線の頂点が点 $(-2,\ 4)$ であるから，この 2 次関数は

$$y = a(x+2)^2 + 4$$

の形に表される．このグラフが点 $(-4,\ 2)$ を通るから

$$2 = a(-4+2)^2 + 4$$

よって　$4a + 4 = 2$

これを解くと　$a = -\dfrac{1}{2}$

したがって　$y = -\dfrac{1}{2}(x+2)^2 + 4$

練習 2.26 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ．

(1) 直線 $x=3$ を軸とし，2点 $(2,6)$，$(5,9)$ を通る．

(2) 直線 $x=-1$ を軸とし，2点 $(0,5)$，$(2,-11)$ を通る．

【解】 (1) 放物線の軸が直線 $x=3$ であるから，この2次関数は

$$y=a(x-3)^2+q$$

の形に表される．このグラフが

点 $(2,\ 6)$ を通るから　$6=a(2-3)^2+q$

点 $(5,\ 9)$ を通るから　$9=a(5-3)^2+q$

よって　$a+q=6$，$4a+q=9$

これを解くと　$a=1$，$q=5$

したがって　$y=(x-3)^2+5$

(2) 放物線の軸が直線 $x=-1$ であるから，この2次関数は

$$y=a(x+1)^2+q$$

の形に表される．このグラフが

点 $(0,\ 5)$ を通るから　$5=a(0+1)^2+q$

点 $(2,-11)$ を通るから　$-11=a(2+1)^2+q$

よって　$a+q=5$，$9a+q=-11$

これを解くと　$a=-2$，$q=7$

したがって　$y=-2(x+1)^2+7$

練習 2.27 次の連立 3 元 1 次方程式を解け.

(1) $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \\ 9a+3b+c=4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} a-b+c=1 \\ 4a-2b+c=-6 \\ 9a+3b+c=9 \end{cases}$

【解】 (1) $\begin{cases} a+b+c=0 & \cdots ① \\ 4a+2b+c=0 & \cdots ② \\ 9a+3b+c=4 & \cdots ③ \end{cases}$

② − ① から　$3a+b=0$　$\cdots$ ④

③ − ② から　$5a+b=4$　$\cdots$ ⑤

④, ⑤ を解くと

$$a=2,\ b=-6$$

これらを ① に代入して　$c=4$

よって　$a=2,\ b=-6,\ c=4$

(2) $\begin{cases} a-b+c=1 & \cdots ① \\ 4a-2b+c=-6 & \cdots ② \\ 9a+3b+c=9 & \cdots ③ \end{cases}$

② − ① から　$3a-b=-7$　$\cdots$ ④

③ − ② から　$5a+5b=15$

すなわち　$a+b=3$　$\cdots$ ⑤

④, ⑤ を解くと

$$a=-1,\ b=4$$

これらを ① に代入して　$c=6$

よって　$a=-1,\ b=4,\ c=6$

練習 2.28 2次関数のグラフが次の3点を通るとき，その2次関数を求めよ．

(1) $(0,2)$，$(2,0)$，$(3,5)$　　　(2) $(2,-2)$，$(3,5)$，$(-1,1)$

【解】 (1) 求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする．

グラフが3点 $(0,\ 2)$，$(2,\ 0)$，$(3,\ 5)$ を通るから

$$2=c \qquad \cdots①$$
$$0=4a+2b+c \qquad \cdots②$$
$$5=9a+3b+c \qquad \cdots③$$

① より　$c=2$

これを ②，③ に代入して

$4a+2b=-2$　すなわち　$2a+b=-1$　$\cdots$④

$9a+3b=3$　すなわち　$3a+b=1$　$\cdots$⑤

④，⑤ を解くと　$a=2$，$b=-5$

したがって，求める2次関数は　$y=2x^2-5x+2$

(2) 求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする．

グラフが3点 $(2,-2)$，$(3,\ 5)$，$(-1,\ 1)$ を通るから

$$-2=4a+2b+c \qquad \cdots①$$
$$5=9a+3b+c \qquad \cdots②$$
$$1=a-b+c \qquad \cdots③$$

② − ① から　$5a+b=7$　$\cdots$④

① − ③ から　$3a+3b=-3$　すなわち　$a+b=-1$　$\cdots$⑤

④，⑤ を解くと　$a=2$，$b=-3$

これらを ③ に代入して　$c=-4$

よって，求める2次関数は　$y=2x^2-3x-4$

2.2.3　補充問題

4 2 次関数 $y=x^2+2mx+m$ について，次の問いに答えよ.

(1) この関数の最小値を m の式で表せ.

(2) この関数の最小値が -2 であるとき，m の値を求めよ.

【解】 (1) $y=x^2+2mx+m$ を変形すると

$$y=(x+m)^2-m^2+m$$

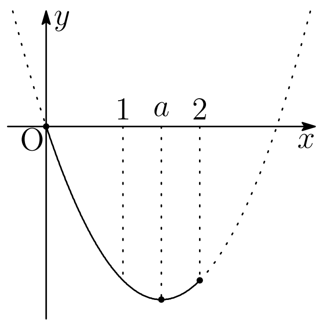
この 2 次関数は，$x=-m$ で最小値 $-m^2+m$ をとる.
よって，求める最小値は　$-m^2+m$

(2) (1) より　$-m^2+m=-2$
すなわち　$m^2-m-2=0$
左辺を因数分解すると　$(m-2)(m+1)=0$
これを解くと　$m=2,-1$

5 $1<a<2$ のとき，関数 $y=x^2-2ax\ (0\leqq x\leqq 2)$ の最大値と最小値を求めよ.

【解】 式を変形すると

$$y=(x-a)^2-a^2$$



$1<a<2$ であるから，グラフは右の図の実線部分のようになる.
よって　$x=0$ で最大値 0,
$x=a$ で最小値 $-a^2$ をとる.

6 次のような2次関数を求めよ．

(1) グラフが3点 $(3,0)$，$(-1,0)$，$(2,\ 6)$ を通る．

(2) グラフの頂点は放物線 $y=2x^2+4x+1$ の頂点と同じであり，y 軸と点 $(0,2)$ で交わる．

【解】 (1) 求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする．

グラフが3点 $(3,\ 0)$，$(-1,\ 0)$，$(2,\ 6)$ を通るから

$0=9a+3b+c \quad \cdots ①$

$0=a-b+c \quad \cdots ②$

$6=4a+2b+c \quad \cdots ③$

① − ② から　$8a+4b=0$

すなわち　$2a+b=0 \quad \cdots ④$

① − ③ から　$5a+b=-6 \quad \cdots ⑤$

④，⑤ を解くと　$a=-2$，$b=4$

これらを ② に代入して　$c=6$

よって，求める2次関数は

$$y=-2x^2+4x+6$$

(2) $y=2x^2+4x+1$ を変形すると

$$y=2(x+1)^2-1$$

よって，求める2次関数は $y=a(x+1)^2-1$ の形で表される．

この放物線が点 $(0,\ 2)$ を通るから　$2=a-1$

これを解くと　$a=3$

よって，求める2次関数は　$y=3(x+1)^2-1$

2.3　2 次不等式

2.3.1　2 次関数のグラフと x 軸の位置関係

練習 2.29 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ．また，グラフが x 軸に接するものはどれか．

(1) $y = x^2 - 2x - 3$　　(2) $y = -x^2 + 3x - 1$

(3) $y = 2x^2 + 4x + 2$　　(4) $y = 2x^2 - 5x - 3$

【解】 (1) 2 次方程式 $x^2 - 2x - 3 = 0$ を解くと

$(x+1)(x-3) = 0$ より　$x = -1,\ 3$

よって，共有点の座標は　$(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$

(2) 2 次方程式 $-x^2 + 3x - 1 = 0$ を解くと

$x^2 - 3x + 1 = 0$ より

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}1}}{2{\cdot}1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

よって，共有点の座標は　$\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$

(3) 2 次方程式 $2x^2 + 4x + 2 = 0$ を解くと

$(x+1)^2 = 0$ より　$x = -1$

よって，共有点の座標は　$(-1,\ 0)$

(4) 2 次方程式 $2x^2 - 5x - 3 = 0$ を解くと

$(x-3)(2x+1) = 0$ より　$x = 3, -\dfrac{1}{2}$

よって，共有点の座標は　$(3,\ 0)$，$\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

グラフが x 軸に接するものは　(3)

練習 2.30 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ．

(1) $y = x^2 + 3x + 3$　(2) $y = -2x^2 + 5x + 1$　(3) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

【解】 (1) 2次関数 $y = x^2 + 3x + 3$ について

$$D = 3^2 - 4{\cdot}1{\cdot}3 = -3 < 0$$

であるから，共有点の個数は0個

(2) 2次関数 $y = -2x^2 + 5x + 1$ について

$$D = 5^2 - 4{\cdot}(-2){\cdot}1 = 33 > 0$$

であるから，共有点の個数は2個

(3) 2次関数 $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ について

$$D = (-2)^2 - 4{\cdot}\frac{1}{2}{\cdot}2 = 0$$

であるから，共有点の個数は1個

練習 2.31 2次関数 $y = x^2 + mx + 4$ のグラフが x 軸に接するとき，定数 m の値を求めよ．また，そのときの接点の座標を求めよ．

【解】 2次関数 $y = x^2 + mx + 4$ の係数について

$$D = m^2 - 4{\cdot}1{\cdot}4 = m^2 - 16$$

とする．このグラフが x 軸に接するための条件は，$D = 0$ が成り立つことであるから

$$m^2 - 16 = 0$$

これを解いて　$m = \pm 4$

接点の x 座標は $x = -\dfrac{m}{2}$ であるから，接点の座標は

$$m = 4 \text{ のとき} \quad (-2, 0), \qquad m = -4 \text{ のとき} \quad (2, 0)$$

練習 2.32 2次関数 $y = x^2 + 5x + m + 2$ のグラフについて，次の問いに答えよ．

(1) x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(2) x 軸と共有点をもたないとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

【解】 2次関数 $y = x^2 + 5x + m + 2$ の係数について

$$D = 5^2 - 4{\cdot}1(m + 2) = 17 - 4m$$

とする．

(1) このグラフが x 軸と共有点をもつための条件は，
$D \geqq 0$ が成り立つことであるから

$$17 - 4m \geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad m \leqq \frac{17}{4}$$

(2) このグラフが x 軸と共有点をもたないための条件は，
$D < 0$ が成り立つことであるから

$$17 - 4m < 0 \quad \text{これを解いて} \quad m > \frac{17}{4}$$

2.3.2　2次不等式

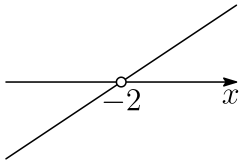
練習 2.33 1次関数のグラフを利用して，次の1次不等式の解を求めよ．

(1) $2x+4<0$　　(2) $-3x+6>0$

(3) $4x+3 \geqq 0$　　(4) $-3x+1 \leqq 0$

【解】 (1) $2x+4=0$ の解は　$x=-2$

$y=2x+4$ のグラフと x 軸の位置関係は，右の図のようになる．

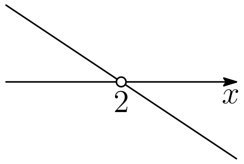


よって，$2x+4<0$ を解くと

$$x<-2$$

(2) $-3x+6=0$ の解は　$x=2$

$y=-3x+6$ のグラフと x 軸の位置関係は，右の図のようになる．

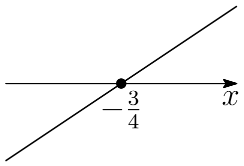


よって，$-3x+6>0$ を解くと

$$x<2$$

(3) $4x+3=0$ の解は　$x=-\dfrac{3}{4}$

$y=4x+3$ のグラフと x 軸の位置関係は，右の図のようになる．

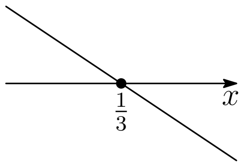


よって，$4x+3 \geqq 0$ を解くと

$$x \geqq -\frac{3}{4}$$

(4) $-3x+1=0$ の解は　$x=\dfrac{1}{3}$

$y=-3x+1$ のグラフと x 軸の位置関係は，右の図のようになる．



よって，$-3x+1 \leqq 0$ を解くと

$$x \geqq \frac{1}{3}$$

練習 2.34 次の 2 次不等式を解け.

(1) $(x-1)(x-3)>0$　　(2) $(x-2)(x-5)<0$

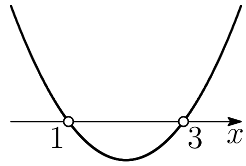
(3) $(x+1)(x-2)\geqq 0$　　(4) $x(x-1)\leqq 0$

(5) $x(x+1)>0$　　(6) $(x+2)(x+3)\leqq 0$

【解】 (1) $(x-1)(x-3)=0$ の解は　　$x=1,\ 3$

$y=(x-1)(x-3)$ のグラフと x 軸の位置関係は,
右の図のようになる.
よって, $(x-1)(x-3)>0$ を解くと

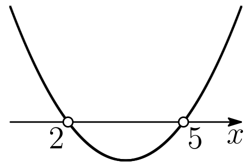
$x<1,\ 3<x$



(2) $(x-2)(x-5)=0$ の解は　　$x=2,\ 5$

$y=(x-2)(x-5)$ のグラフと x 軸の位置関係は,
右の図のようになる.
よって, $(x-2)(x-5)<0$ を解くと

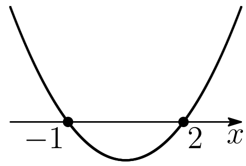
$2<x<5$



(3) $(x+1)(x-2)=0$ の解は　　$x=-1,\ 2$

$y=(x+1)(x-2)$ のグラフと x 軸の位置関係は,
右の図のようになる.
よって, $(x+1)(x-2)\geqq 0$ を解くと

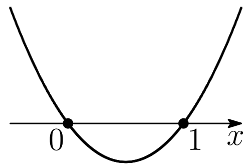
$x\leqq -1,\ 2\leqq x$



(4) $x(x-1)=0$ の解は　　$x=0,\ 1$

$y=x(x-1)$ のグラフと x 軸の位置関係は,
右の図のようになる.
よって, $x(x-1)\leqq 0$ を解くと

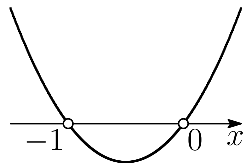
$0\leqq x\leqq 1$



(5) $x(x+1)=0$ の解は　　$x=0,-1$

$y=x(x+1)$ のグラフと x 軸の位置関係は,
右の図のようになる.
よって, $x(x+1)>0$ を解くと

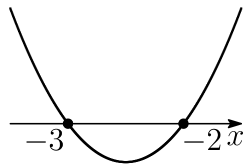
$x<-1,\ 0<x$



(6) $(x+2)(x+3)=0$ の解は　　$x=-2,-3$

$y=(x+2)(x+3)$ のグラフと x 軸の位置関係は,
右の図のようになる.
よって, $(x+2)(x+3)\leqq 0$ を解くと

$-3\leqq x\leqq -2$



練習 2.35 次の 2 次不等式を解け.

(1) $2x^2 - 5x + 2 \geqq 0$ (2) $2x^2 + 5x + 3 < 0$

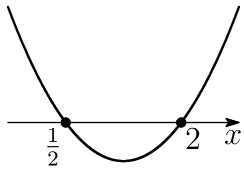
(3) $x^2 + 2x - 1 \leqq 0$ (4) $x^2 + 3x + 1 > 0$

【解】 (1) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ を解くと

$(2x-1)(x-2) = 0$ より $x = \frac{1}{2},\ 2$

よって，この 2 次不等式の解は

$$x \leqq \frac{1}{2},\ 2 \leqq x$$

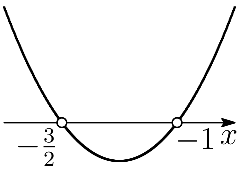


(2) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ を解くと

$(2x+3)(x+1) = 0$ より $x = -\frac{3}{2}, -1$

よって，この 2 次不等式の解は

$$-\frac{3}{2} < x < -1$$

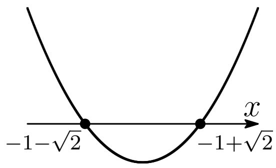


(3) $x^2 + 2x - 1 = 0$ を解くと

$$x = -1 \pm \sqrt{2}$$

よって，この 2 次不等式の解は

$$-1 - \sqrt{2} \leqq x \leqq -1 + \sqrt{2}$$

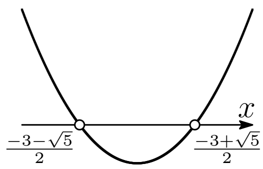


(4) $x^2 + 3x + 1 = 0$ を解くと

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

よって，この 2 次不等式の解は

$$x < \frac{-3-\sqrt{5}}{2},\quad \frac{-3+\sqrt{5}}{2} < x$$



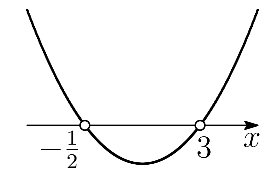
練習 2.36 次の 2 次不等式を解け.

(1) $-2x^2+5x+3<0$　　(2) $-3x^2+5x-1 \geqq 0$

【解】 (1) 両辺に -1 をかけると　$2x^2-5x-3>0$

$2x^2-5x-3=0$ を解くと

$(x-3)(2x+1)$ より　　$x=-\dfrac{1}{2},\ 3$



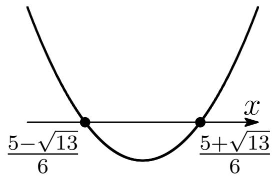
よって，この 2 次不等式の解は

$$x<-\frac{1}{2},\ \ 3<x$$

(2) 両辺に -1 をかけると　$3x^2-5x+1 \leqq 0$

$3x^2-5x+1=0$ を解くと

$$x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$$



よって，この 2 次不等式の解は

$$\frac{5-\sqrt{13}}{6} \leqq x \leqq \frac{5+\sqrt{13}}{6}$$

練習 2.37 次の2次不等式を解け.

(1) $x^2-4x+4>0$　　(2) $x^2-4x+4 \geqq 0$

(3) $x^2+6x+9<0$　　(4) $x^2+6x+9 \leqq 0$

(5) $4x^2-4x+1>0$　　(6) $4x^2+4x+1 \geqq 0$

【解】 (1) $x^2-4x+4=(x-2)^2$

$y=(x-2)^2$ のグラフは，x 軸と点 $(2,\ 0)$ で接し，下に凸.

よって，$x^2-4x+4>0$ の解は　2以外のすべての実数

(2) $x^2-4x+4 \geqq 0$ の解は　すべての実数

(3) $x^2+6x+9=(x+3)^2$

$y=(x+3)^2$ のグラフは，x 軸と点 $(-3,\ 0)$ で接し，下に凸.

よって，$x^2+6x+9<0$ の解は　ない

(4) $x^2+6x+9 \leqq 0$ の解は　$x=-3$

(5) $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$

$y=4x^2-4x+1$ のグラフは，x 軸と点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ で接し，下に凸.

よって，$4x^2-4x+1>0$ の解は　$\dfrac{1}{2}$ 以外のすべての実数

(6) $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$

$y=4x^2+4x+1$ のグラフは，x 軸と点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ で接し，下に凸.

よって，$4x^2+4x+1 \geqq 0$ の解は　すべての実数

練習 2.38 次の 2 次不等式を解け.

(1) $x^2-4x+6>0$　　(2) $x^2-4x+6 \geqq 0$

(3) $2x^2+4x+3<0$　　(4) $2x^2+4x+3 \leqq 0$

【解】 (1) $x^2-4x+6=(x-2)^2+2$
$y=x^2-4x+6$ のグラフは,
x 軸より上側にあり, x 軸と共有点をもたない.
よって, $x^2-4x+6>0$ の解は　すべての実数　である.

(2) $x^2-4x+6 \leqq 0$ の解は　すべての実数　である.

(3) $2x^2+4x+3=2(x+1)^2+1$ である.
$y=2x^2+4x+3$ のグラフは,
x 軸より上側にあり, x 軸と共有点をもたない.
よって, $2x^2+4x+3<0$ の解は　ない.

(4) $2x^2+4x+3 \leqq 0$ の解は　ない.

練習 2.39 次の 2 次不等式を解け.

(1) $x^2 - 3x + 5 > 0$ (2) $-x^2 + x - 1 \geqq 0$

(3) $2x^2 + 3x + 3 < 0$ (4) $-9x^2 + 6x - 1 \geqq 0$

(5) $x + 6 \leqq x^2$ (6) $x^2 - 3x + 2 > 2x^2 - x$

【解】 (1) 2 次不等式の係数について $(-3)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}5 = -11 < 0$
よって，この 2 次不等式の解は すべての実数 である.

(2) 両辺に -1 をかけると $x^2 - x + 1 \leqq 0$
2 次不等式の係数について $(-1)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}1 = -3 < 0$
よって，この 2 次不等式の解は ない.

(3) 2 次不等式の係数について $3^2 - 4{\cdot}2{\cdot}3 = -15 < 0$
よって，この 2 次不等式の解は ない.

(4) 両辺に -1 をかけると $9x^2 - 6x + 1 \leqq 0$
2 次不等式の係数について $(-6)^2 - 4{\cdot}9{\cdot}1 = 0$
$9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$ より，この 2 次不等式の解は $x = \dfrac{1}{3}$

(5) 式を整理すると $x^2 - x - 6 \geqq 0$
2 次不等式の係数について $(-1)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}(-6) = 25 > 0$
$x^2 - x - 6 = 0$ を解くと $x = -2,\ 3$
よって，この 2 次不等式の解は $x \leqq -2,\ 3 \leqq x$

(6) 式を整理すると $x^2 + 2x - 2 < 0$
2 次不等式の係数について $2^2 - 4{\cdot}1{\cdot}(-2) = 12 > 0$
$x^2 + 2x - 2 = 0$ を解くと $x = -1 \pm \sqrt{3}$
よって，この 2 次不等式の解は $-1 - \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{3}$

練習 2.40 2 次関数 $y = x^2 + mx + m$ のグラフと x 軸の位置関係が次のようなとき，定数 m の値の範囲を求めよ.

(1) 共有点をもたない.　　(2) 共有点をもつ.

【解】 与えられた 2 次関数の係数について　$D = m^2 - 4{\cdot}1{\cdot}m = m^2 - 4m$

(1) このグラフが x 軸と共有点をもたないための条件は，$D < 0$ が成り立つことであるから

$$m^2 - 4m < 0 \quad \text{すなわち} \quad m(m-4) < 0$$

これを解いて　$0 < m < 4$

(2) このグラフが x 軸と共有点をもつための条件は，$D \geqq 0$ が成り立つことであるから

$$m^2 - 4m \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad m(m-4) \geqq 0$$

これを解いて　$m \leqq 0,\ 4 \leqq m$

練習 2.41 2 次方程式 $2x^2 + mx + 2 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ.

【解】 2 次方程式の係数について　$D = m^2 - 4{\cdot}2{\cdot}2 = m^2 - 16$

この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつための条件は，$D > 0$ が成り立つことである.

$m^2 - 16 > 0$ から　$(m+4)(m-4) > 0$　これを解いて　$m < -4,\ 4 < m$

練習 2.42 2 次不等式 $-x^2 + mx - 4 < 0$ の解がすべての実数であるとき，定数 m の値の範囲を求めよ.

【解】 与えられた 2 次不等式の係数について　$D = m^2 - 4{\cdot}(-1){\cdot}(-4) = m^2 - 16$

2 次不等式の x^2 の係数が負であるから，$D < 0$ が成り立てばよい.

$m^2 - 16 < 0$ から　$(m+4)(m-4) < 0$

これを解いて　$-4 < m < 4$

練習 2.43 次の連立不等式を解け.

(1) $\begin{cases} 5x-2<3x+4 \\ x^2-3x \leqq 4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-5x+4 \leqq 0 \\ x^2-2x-3 \geqq 0 \end{cases}$

【解】 (1) $\begin{cases} 5x-2<3x+4 & \cdots ① \\ x^2-3x \leqq 4 & \cdots ② \end{cases}$

① から $2x<6$ これを解くと $x<3$ $\cdots ③$

② から $x^2-3x-4 \leqq 0$ これを解くと $-1 \leqq x \leqq 4$ $\cdots ④$

③ と ④ の共通範囲を求めて $-1 \leqq x < 3$

(2) $\begin{cases} x^2-5x+4 \leqq 0 & \cdots ① \\ x^2-2x-3 \geqq 0 & \cdots ② \end{cases}$

① を解くと $1 \leqq x \leqq 4$ $\cdots ③$

② を解くと $x \leqq -1,\ 3 \leqq x$ $\cdots ④$

③ と ④ の共通範囲を求めて $3 \leqq x \leqq 4$

練習 2.44 次の不等式を解け.

(1) $-2 \leqq x^2+3x \leqq 4$ (2) $3 < x^2-2x \leqq 3x-4$

【解】 (1) $-2 \leqq x^2+3x$ から $x^2+3x+2 \geqq 0$

$(x+1)(x+2) \geqq 0$

これを解くと $x \leqq -2,\ -1 \leqq x$ $\cdots ①$

$x^2+3x \leqq 4$ から $x^2+3x-4 \leqq 0$

$(x+4)(x-1) \leqq 0$

これを解くと $-4 \leqq x \leqq 1$ $\cdots ②$

① と ② の共通範囲を求めて $-4 \leqq x \leqq -2,\ -1 \leqq x \leqq 1$

(2) $3 < x^2-2x$ から $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$

これを解くと $x<-1,\ 3<x$ $\cdots ①$

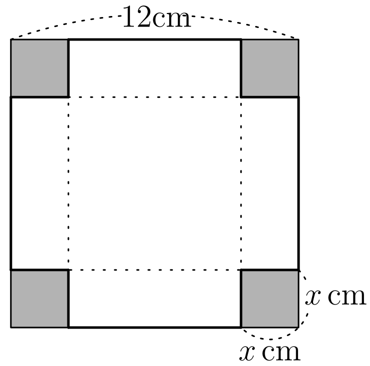
$x^2-2x \leqq 3x-4$ から $x^2-5x+4 \leqq 0$

$(x-1)(x-4) \leqq 0$

これを解くと $1 \leqq x \leqq 4$ $\cdots ②$

① と ② の共通範囲を求めて $3 < x \leqq 4$

練習 2.45 1辺が 12cm の正方形の厚紙がある．この厚紙の四隅から等しい正方形を切り取り，ふたのない箱を作る．底面の正方形の1辺を 6cm より長く，側面の長方形の面積を 10cm^2 以上にするとき，切り取る正方形の1辺の長さをどのような範囲にとればよいか．



【解】 切り取る正方形の1辺の長さを x cm とすると，底面の正方形の一辺の長さは $(12-2x)$cm であり，側面の長方形の面積は $x(12-2x)$ である．

$x>0$ かつ $12-2x>6$ から　$0<x<3$　$\cdots$①

側面の長方形の面積が 10cm^2 以上であるから

$$x(12-2x) \geqq 10$$

整理すると　$x^2-6x+5 \leqq 0$

これを解くと　$1 \leqq x \leqq 5$　$\cdots$②

① と ② の共通範囲を求めて　$1 \leqq x < 3$　　(答) 1cm 以上 3cm 未満

2.3.3 補充問題

7 放物線 $y=x^2+4x+2$ は x 軸と2点で交わる．その交点を A，B とする．この放物線が x 軸から切り取る線分 AB の長さを求めよ．

【解】 放物線 $y=x^2+4x+2$ と x 軸の交点の x 座標は，

$x^2+4x+2=0$ を解いて　$x=-2\pm\sqrt{2}$

よって，線分 AB の長さは

$$(-2+\sqrt{2})-(-2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

8 次の2次不等式を満たす整数 x をすべて求めよ.

(1) $2x^2+x-6<0$ (2) $4x-2 \geqq x^2$

【解】(1) $(x+2)(2x-3)<0$ より $-2<x<\dfrac{3}{2}$

この不等式を満たす整数 x は $-1,\ 0,\ 1$

(2) 式を展開すると $x^2-4x+2 \leqq 0$

$x^2-4x+2=0$ を解くと $x=2\pm\sqrt{2}$

よって，この2次不等式の解は

$$2-\sqrt{2} \leqq x \leqq 2+\sqrt{2}$$

$1<\sqrt{2}<2$ であるから，整数 x の値の範囲は

$$1 \leqq x \leqq 3$$

この不等式を満たす整数 x は $1,\ 2,\ 3$

9 2次不等式 $ax^2+2ax-3<0$ の解がすべての実数であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ.

【解】与えられた2次不等式の係数について

$$D=(2a)^2-4\cdot a\cdot(-3)=4(a^2+3a)$$

とする.

2次不等式の x^2 の係数が負，$D<0$ であればよいから

$$\begin{cases} a<0 & \cdots ① \\ a^2+3a<0 & \cdots ② \end{cases}$$

② を解いて $-3<a<0$ $\cdots$ ③

①，③ より $-3<a<0$

10 ある速さで真上に打ち上げたボールの，打ち上げてから x 秒後の地上からの高さを h m とする．h の値が $h=-5x^2+40x$ で与えられるとき，ボールが地上から 60m 以上 75m 以下の高さにあるのは，x の値がどのような範囲にあるときか.

【解】 $60 \leqq -5x^2+40x \leqq 75$ であるから，次の連立不等式を解く.

$$\begin{cases} -5x^2+40x \geqq 60 & \cdots ① \\ -5x^2+40x \leqq 75 & \cdots ② \end{cases}$$

① から　　$x^2-8x+12 \leqq 0$

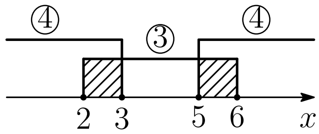
これを解くと　　$2 \leqq x \leqq 6 \quad \cdots ③$

② から　　$x^2-8x+15 \geqq 0$

これを解くと　　$x \leqq 3,\ 5 \leqq x \quad \cdots ④$

③ と ④ の共通範囲を求めて

$$2 \leqq x \leqq 3,\ 5 \leqq x \leqq 6$$



2.4　章末問題

2.4.1　章末問題 A

1 放物線 $y=-2x^2+3x+1$ を平行移動したものが，2点 $(-2,0)$，$(1,12)$ を通るとき，その放物線の方程式を求めよ．

【解】 放物線 $y = -2x^2 + 3x + 1$ を平行移動した放物線をグラフにもつ2次関数は $y=-2x^2+bx+c$ の形で表される．
点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ 12)$ を通るので

$$0=-2\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c$$
$$12=-2\cdot1^2+b\cdot1+c$$

よって　$-2b+c=8,\quad b+c=14$
これを解くと　$b=2$，$c=12$
よって，求める2次関数は

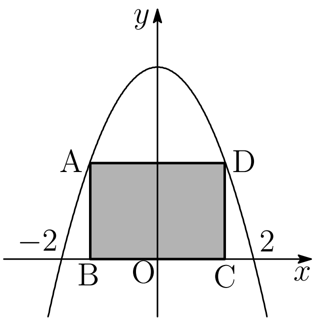
$$y=-2x^2+2x+12$$

2 次の2つの放物線の頂点が一致するとき，定数 a，b の値を求めよ．

$$y=2x^2+4x,\quad y=x^2+ax+b$$

【解】 $2x^2+4x=2(x+1)^2-2$ より，
放物線 $y=2x^2+4x$ の頂点の座標は　$(-1,-2)$
$x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b$ より，
放物線 $y=x^2+ax+b$ の頂点の座標は　$\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{4}+b\right)$
よって　$-\dfrac{a}{2}=-1,\quad -\dfrac{a^2}{4}+b=-2$
これを解いて　$a=2$，$b=-1$

3 放物線 $y = 4 - x^2$ と x 軸で囲まれた部分に，長方形 ABCD を，辺 BC が x 軸上にあるように内接させる．
この長方形の周の長さが最大となるときの辺 BC の長さを求めよ．



【解】 $\mathrm{OC} = x$ とすると $0 < x < 2$ で　　$\mathrm{CD} = 4 - x^2$
周の長さを L とすると

$$\begin{aligned} L &= 4\mathrm{OC} + 2\mathrm{CD} = 4x + 2(4 - x^2) \\ &= -2x^2 + 4x + 8 \\ &= -2(x-1)^2 + 10 \end{aligned}$$

よって，周の長さが最大となるのは $x = 1$ のときである．
そのとき　　$\mathrm{BC} = 2x = 2$

4 x の 2 次関数 $y = x^2 - mx + m$ の最小値を k とする．

(1) k を m の式で表せ．

(2) k の値を最大にする m の値と，k の最大値を求めよ．

【解】 (1) $x^2 - mx + m = \left(x - \dfrac{m}{2}\right)^2 - \dfrac{m^2}{4} + m$
よって，2 次関数 $y = x^2 - mx + m$ は，
$x = \dfrac{m}{2}$ で最小値 $-\dfrac{m^2}{4} + m$ をとるから

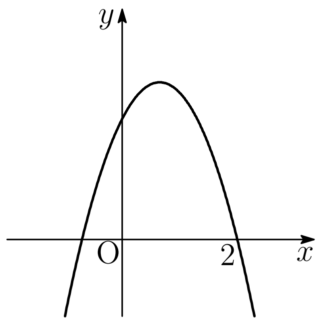
$$k = -\frac{m^2}{4} + m$$

(2) $-\dfrac{m^2}{4} + m = -\dfrac{1}{4}(m-2)^2 + 1$ であるから，
$k = -\dfrac{m^2}{4} + m$ は，$m = 2$ で最大値 1 をとる．

5 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになるとき，次の値の符号を求めよ．

(1) a　　(2) c　　(3) $-\dfrac{b}{2a}$　(4) b

(4) b^2-4ac　　(5) $a+b+c$



【解】 (1) 放物線が上に凸なので　$a<0$
よって，符号は　負

(2) 放物線と y 軸の交点の y 座標が正だから　$c>0$
よって，符号は　正

(3) 頂点の x 座標は $x=-\dfrac{b}{2a}$ で，y 軸の右側にあるから　$-\dfrac{b}{2a}>0$
$a<0$ だから　$b>0$

(4) $a<0$ かつ $-\dfrac{b}{2a}>0$ より　$b>0$
よって，符号は　正

(5) 放物線と x 軸は異なる2点を共有しているから　$b^2-4ac>0$
よって，符号は　正

(6) グラフ上の点で，x 座標が1である点の y 座標が $a+b+c$ である．
この点は x 軸の上側にあるから　$a+b+c>0$
よって，符号は　正

6 2次関数 $y=x^2-2ax+a$ が正の値しかとらないとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

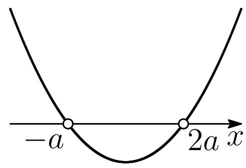
【解】 $x^2-2ax+a=(x-a)^2-a^2+a$ より，2次関数 $y=x^2-2ax+a$ は，
$x=a$ で最小値 $-a^2+a$ をとる．
この2次関数が正の値しかとらないための条件は $-a^2+a>0$
両辺に -1 をかけて　　$a^2-a<0$
これを解いて　　　　　$0<a<1$

7 a は定数とする．2 次不等式 $x^2 - ax - 2a^2 < 0$ を次の場合について解け．

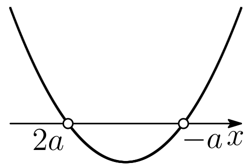
(1) $a > 0$ のとき　　(2) $a < 0$ のとき

【解】 $x^2 - ax - 2a^2 = (x+a)(x-2a)$ より，放物線 $y = x^2 - ax - 2a^2$ は，
x 軸と 2 点 $(-a,\ 0)$，$(2a,\ 0)$ で交わる．

(1) $a > 0$ のとき　$-a < 2a$
このとき，2 次不等式の解は
$-a < x < 2a$



(2) $a < 0$ のとき　$2a < -a$
このとき，2 次不等式の解は
$2a < x < -a$



2.4.2　章末問題 B

8 放物線 $y = 2x^2 - 4x + 5$ の頂点を P とする．次の問いに答えよ．

(1) x 軸に関して点 P と対称な点 Q の座標を求めよ．

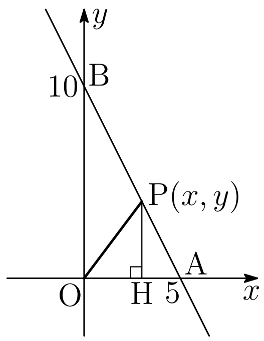
(2) この放物線と x 軸に関して対称な放物線の方程式を求めよ．

【解】 $y = 2(x-1)^2 + 3$ より，点 P の座標は　$(1,\ 3)$
(1) Q の座標は $(1, -3)$
(2) 2 次の係数は -2 で，Q を頂点とするから，求める方程式は
$y = -2(x-1)^2 - 3$

9 1次関数 $y=-2x+10$ のグラフが，x 軸，y 軸と交わる点を，それぞれ A，B とする．点 $\mathrm{P}(x, y)$ が線分 AB 上を動くとき，次の問いに答えよ．

(1) OP^2 を x で表せ．

(2) 線分 OP の長さの最小値を求めよ．



【解】 (1) ［1］ 点 P が点 A，点 B と異なるとき

P から x 軸へ下ろした垂線と x 軸との交点を H とする．

直角三角形 OHP において，$\mathrm{OH}=x$，$\mathrm{PH}=y$ であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{OP}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{PH}^2=x^2+y^2 \quad \cdots ①$$

［2］ 点 P が点 A と一致するとき

$$\mathrm{OP}^2=x^2=x^2+0^2$$

点 P が点 B と一致するとき

$$\mathrm{OP}^2=y^2=0^2+y^2$$

であるから，① が成り立つ．

よって　$\mathrm{OP}^2=x^2+y^2$，$y=-2x+10$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2&=x^2+(-2x+10)^2\\&=5x^2-40x+100\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{OP}>0$ であるから，OP^2 が最小のとき OP も最小となる．

点 P は線分 AB 上を動くから

$$0<x<5 \quad \cdots ②$$

また　$\mathrm{OP}^2=5(x-4)^2+20$

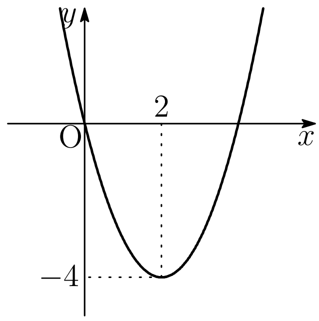
② の範囲で，$x=4$ のとき OP^2 は最小値 20 をとる．

よって，$x=4$ のとき OP は最小で，最小値は　$\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

10 a は定数とする．関数 $y=x^2-4x\ (a \leqq x \leqq a+2)$ の最大値，最小値を，次の場合について，それぞれ求めよ．

(1) $a \leqq 0$　(2) $0<a<1$　(3) $a=1$　(4) $1<a<2$　(5) $2 \leqq a$

【解】 $y=(x-2)^2-4$



(1) $a \leqq 0$ のとき

$a \leqq x \leqq a+2$ の範囲では，y の値は減少する．

よって

$x=a$ で最大値 a^2-4a,

$x=a+2$ で最小値 $(a+2)^2-4(a+2)=a^2-4$

(2) $0<a<1$ のとき

$a \leqq x \leqq a+2$ の範囲に放物線の頂点を含むので，$x=2$ で最小値をとる．

また，$x=a$ で最大値をとる．

よって

$x=a$ で最大値 a^2-4a

$x=2$ で最小値 -4

(3) $a=1$ のとき

$x=1,\ 3$ で最大値 -3，$x=2$ で最小値 -4

(4) $1<a<2$ のとき

$a \leqq x \leqq a+2$ の範囲に放物線の頂点を含むので，$x=2$ で最小値をとる．

また，$x=a+2$ で最大値をとる．

よって

$x=a+2$ で最大値 a^2-4

$x=2$ で最小値 -4

(5) $2 \leqq a$ のとき

$a \leqq x \leqq a+2$ の範囲では，y の値は増加する．

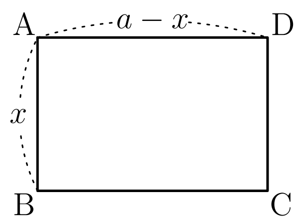
よって

$x=a+2$ で最大値 a^2-4

$x=a$ で最小値 a^2-4a

11 周の長さが一定である長方形には，いろいろな大きさのものがある．このうち，面積が最大になるものは正方形であることを示せ．

【解】 長方形ABCDの周の長さを$2a$とし，辺ABの長さをxとすると，隣り合う辺ADの長さは$a-x$である．



$x>0$，$a-x>0$ から

$$0<x<a \quad \cdots ①$$

このときの長方形の面積をyとすると

$$y=x(a-x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$$

① の範囲では，yは$x=\dfrac{a}{2}$で最大となる．このとき

$$\mathrm{AD}=a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$$

であり，$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}$ となるから，面積が最大になるものは正方形である．

12 2次関数 $y=x^2+(m+1)x+m$ のグラフは，定数mの値に関係なく常にx軸と共有点をもつことを示せ．

【解】 与えられた2次関数の係数について

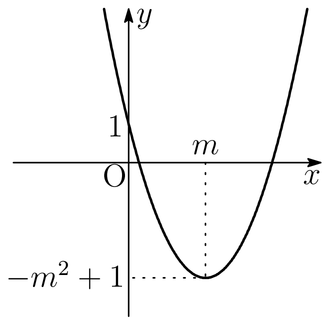
$$\begin{aligned}D&=(m+1)^2-4\cdot1\cdot m\\&=m^2-2m+1=(m-1)^2\end{aligned}$$

どのような実数mについても，$(m-1)^2\geqq 0$ が成り立つ．

よって，グラフは定数mの値に関係なく常にx軸と共有点をもつ．

13 2次関数 $y=x^2-2mx+1$ のグラフが x 軸の正の部分と異なる2点で交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ．

【解】 $y=(x-m)^2-m^2+1$ であるから，グラフが右の図のような位置にあればよい．
すなわち，頂点 $(m,\ -m^2+1)$ の x 座標が正の値，y 座標が負の値であればよいから



$$\begin{cases} m>0 & \cdots ① \\ -m^2+1<0 & \cdots ② \end{cases}$$

がともに成り立てばよい．

② から　$m^2-1>0$
すなわち　$(m+1)(m-1)>0$
よって　$m<-1,\ 1<m$　$\cdots ③$

① と ③ の共通範囲を求めて　$m>1$

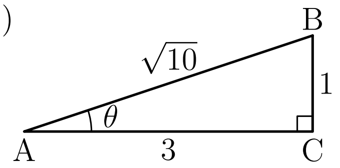
第 3 章　図形と計量

3.1　三角比

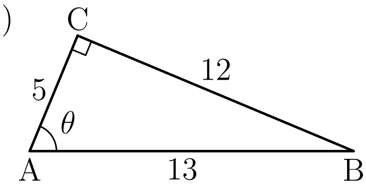
3.1.1　三角比

練習 3.1 下の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ．

(1)



(2)



【答】 (1) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\tan\theta = \dfrac{1}{3}$

(2) $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$，$\cos\theta = \dfrac{5}{13}$，$\tan\theta = \dfrac{12}{5}$

練習 3.2 次の値を求めよ．

(1) $\cos 30^\circ$，$\tan 30^\circ$　　(2) $\sin 45^\circ$，$\tan 45^\circ$

(3) $\sin 60^\circ$，$\cos 60^\circ$

【答】 (1) $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(2) $\sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan 45^\circ = \dfrac{1}{1} = 1$

(3) $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

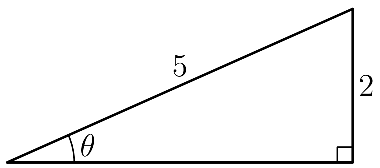
練習 3.3 次の値を三角比の表から求めよ．

(1) $\sin 12^\circ$　　(2) $\cos 48^\circ$　　(3) $\tan 75^\circ$

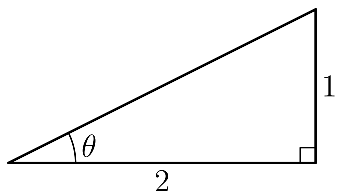
【答】 (1) $\sin 12^\circ = 0.2079$　(2) $\cos 48^\circ = 0.6691$　(3) $\tan 75^\circ = 3.7321$

練習 3.4　下の図における θ のおよその大きさを，三角比の表を用いて求めよ．

(1)



(2)

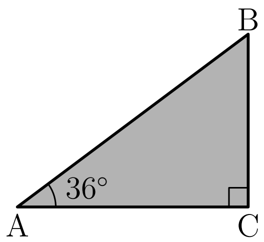


【解】 (1) $\sin\theta = \dfrac{2}{5} = 0.4$　　三角比の表から　　$\theta \fallingdotseq 24^\circ$

(2) $\tan\theta = \dfrac{1}{2} = 0.5$　　三角比の表から　　$\theta \fallingdotseq 27^\circ$

例 3.4　辺 BC の長さを表す式

右の図の直角三角形 ABC において，
辺 BC の長さを表す式は



$$\mathrm{BC} = \mathrm{AB} \times \sin 36^\circ$$

$$\mathrm{BC} = \mathrm{AC} \times \tan 36^\circ$$

となる．

練習 3.5　例 3.4 の図の直角三角形 ABC において，辺 AC の長さを表す式は次のようになる．$\boxed{}$ に sin，cos，tan のいずれかを入れよ．

$$\mathrm{AC}{=}\mathrm{AB}{\times}\boxed{}36^\circ$$

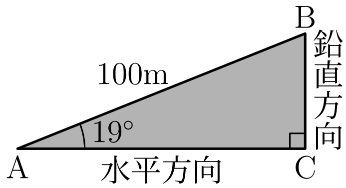
$$\mathrm{AC}{=}\mathrm{BC}{\times}\boxed{}54^\circ \qquad \leftarrow\ \angle\mathrm{B} = 54^\circ$$

【解】 $\mathrm{AC} = \mathrm{AB} \times \cos 36^\circ$，　$\mathrm{AC} = \mathrm{BC} \times \tan 54^\circ$

よって，上から順に　cos，tan

例題 3.1 傾斜角 19° の坂をまっすぐに 100m 登るとき，鉛直方向には何 m 登ったことになるか．1m 未満を四捨五入して求めよ．

【解】 右の図において



$$
\begin{aligned}
BC &= AB \times \sin 19^\circ \\
&= 100 \times 0.3256 \\
&= 32.56
\end{aligned}
$$

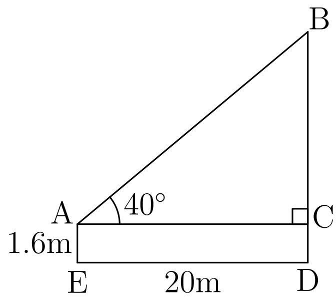
よって，鉛直方向に 33m 登ったことになる．

練習 3.6 例題 3.1 において，水平方向には何 m 進んだことになるか．1m 未満を四捨五入して求めよ．

【解】 $AC = AB \times \cos 19^\circ = 100 \times 0.9455 = 94.55$
よって，水平方向に 95m 進んだことになる．

練習 3.7 鉄塔の先端の真下から 20m 離れた地点に立って鉄塔の先端を見上げると，水平面とのなす角が 40° であった．目の高さを 1.6m として，鉄塔の高さを求めよ．ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ．

【解】 右の図において



$$
\begin{aligned}
BC &= AC \times \tan 40^\circ \\
&= 20 \times 0.8391 \\
&= 16.782 \fallingdotseq 16.8
\end{aligned}
$$

よって，鉄塔の高さ BD は

$$BD = 16.8 + 1.6 = 18.4$$

(答) 18.4 m

3.1.2 三角比の相互関係

練習 3.8 $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．ただし，θ は鋭角とする．

【解】 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$\sin\theta > 0$ であるから　　$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

また　　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \div \dfrac{1}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \times 3 = 2\sqrt{2}$

練習 3.9 $\tan\theta = \sqrt{2}$ のとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．ただし，θ は鋭角とする．

【解】 $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から　　$\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1}{1+(\sqrt{2})^2} = \dfrac{1}{3}$

$\cos\theta > 0$ であるから　　$\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

また　　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = \sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

練習 3.10 次の □ に適する角度を入れよ．

(1) $\sin 62^\circ = \cos\square$　　(2) $\cos 78^\circ = \sin\square$

【解】 (1) $\sin 62^\circ = \cos 28^\circ$　よって　28°

(2) $\cos 78^\circ = \sin 12^\circ$　よって　12°

練習 3.11 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ．

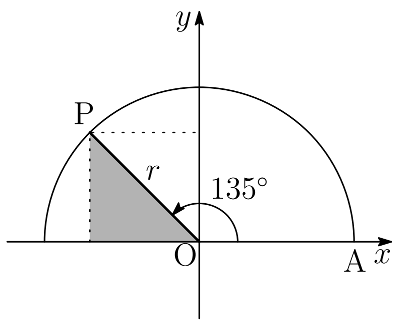
(1) $\sin 64^\circ$　　(2) $\cos 58^\circ$　　(3) $\tan 83^\circ$

【答】 (1) $\sin 64^\circ = \cos 26^\circ$　(2) $\cos 58^\circ = \sin 32^\circ$　(3) $\tan 83^\circ = \dfrac{1}{\tan 7^\circ}$

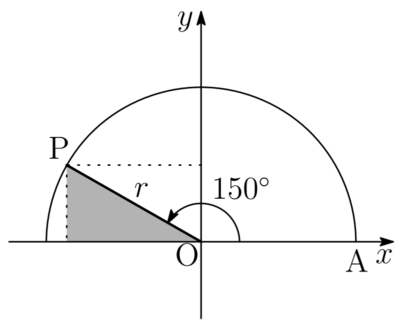
3.1.3　三角比の拡張

練習 3.12 次の角の正弦，余弦，正接の値を，下の図などを用いて求めよ．

(1)　$135°$
$r =$ $\boxed{}$ にとると，
点 P の座標は $\boxed{}$



(2)　$150°$
$r =$ $\boxed{}$ にとると，
点 P の座標は $\boxed{}$



【解】 (1) $r = \sqrt{2}$ にとると，点 P の座標は $(-1, 1)$

$$\sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 135° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \tan 135° = \frac{1}{-1} = -1$$

(2) $r = 2$ にとると，点 P の座標は $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$

$$\sin 150° = \frac{1}{2},\ \cos 150° = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan 150° = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

練習 3.13 次の値を，三角比の表を用いて求めよ．

(1) $\sin 140°$　　(2) $\cos 156°$　　(3) $\tan 100°$

【解】 (1) $\sin 140° = \sin(180° - 40°) = \sin 40° = 0.6428$

(2) $\cos 156° = \cos(180° - 24°) = -\cos 24° = -0.9135$

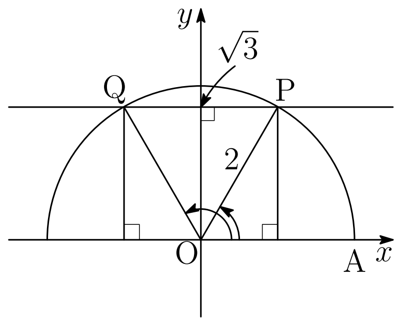
(3) $\tan 100° = \tan(180° - 80°) = -\tan 80° = -5.6713$

練習 3.14　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次のような θ を求めよ．

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　(2) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

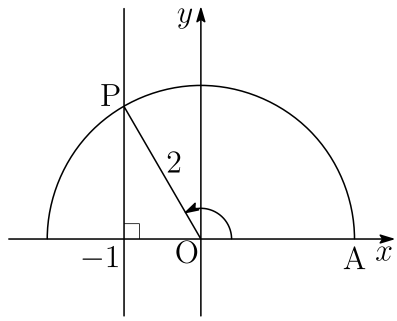
【解】 (1) 半径 2 の半円上で，y 座標が $\sqrt{3}$ である点は 2 つある．求める θ は，右の図で $\angle\mathrm{AOP}$ と $\angle\mathrm{AOQ}$ である．

よって　　$\theta = 60°,\ 120°$



(2) 半径 2 の半円上で，x 座標が -1 である点は 1 つある．求める θ は，右の図で $\angle\mathrm{AOP}$ である．

よって　　$\theta = 120°$

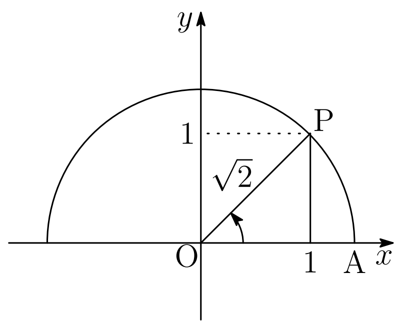


練習 3.15　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次のような θ を求めよ．

(1) $\tan\theta = 1$　　　(2) $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

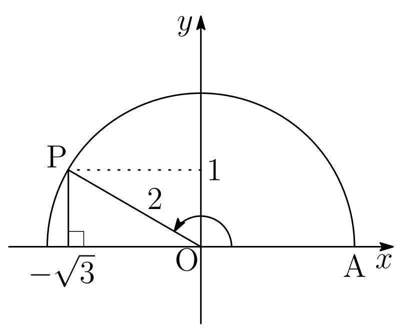
【解】 (1) $1 = \dfrac{1}{1}$ であるから，求める θ は右の図で $\angle\mathrm{AOP}$ である．

よって　　$\theta = 45°$



(2) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{-\sqrt{3}}$ であるから，求める θ は右の図で $\angle\mathrm{AOP}$ である．

よって　　$\theta = 150°$



練習 3.16 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうち，1 つが次の値をとるとき，各場合について他の 2 つの値を求めよ．

(1) $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$　　　(2) $\tan\theta = -2$

【解】 (1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から　$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

$\sin\theta \geqq 0$ であるから　$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$

また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{3}{5} \div \left(-\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{3}{5} \times \left(-\dfrac{5}{4}\right) = -\dfrac{3}{4}$

(2) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+(-2)^2} = \frac{1}{5}$$

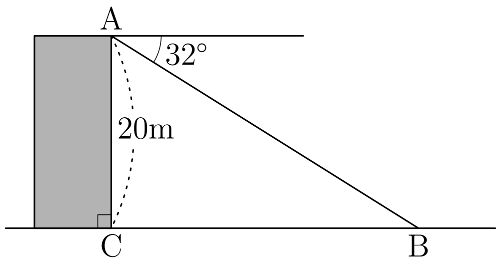
$\tan\theta < 0$ であるから θ は鈍角で，$\cos\theta < 0$ である．

よって　$\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{1}{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

また　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = (-2) \times \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

3.1.4　補充問題

1 地上から高さ 20m の地点 A で地上の場所 B を見下ろしたら，その角は右図のように水平面に対して 32° であった．場所 B は，地点 A の真下から何 m 離れているか．1m 未満を四捨五入して答えよ．



【解】 $\triangle$ABC において，$\angle$BAC $= 58^\circ$ であるから

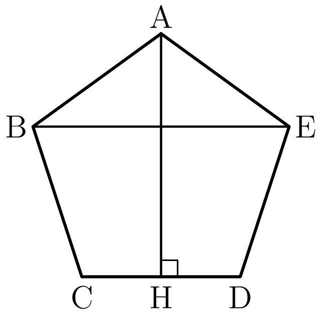
$$\begin{aligned}\mathrm{BC} &= \mathrm{AC} \times \tan 58^\circ = 20 \times 1.6003 \\ &= 32.006 \fallingdotseq 32\end{aligned}$$

(答) 32 m

2 1辺の長さが10の正五角形ABCDEにおいて，次の線分の長さを，小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めよ．

(1) 対角線BE

(2) 頂点Aから辺CDに下ろした垂線AH



【解】 (1) 対角線BEと線分AHの交点をFとする．

正五角形の１つの内角の大きさは

$$180^\circ \times 3 \div 5 = 108^\circ$$

∠ABEは，二等辺三角形ABEの底角であるから

$$\angle \mathrm{ABE} = (180^\circ - 108^\circ) \div 2 = 36^\circ$$

よって，直角三角形ABFにおいて

$$\mathrm{BF} = \mathrm{AB} \times \cos 36^\circ = 10 \times 0.8090 = 8.09$$

したがって

$$\mathrm{BE} = 2\mathrm{BF} = 2 \times 0.809 = 16.18 \fallingdotseq 16.2$$

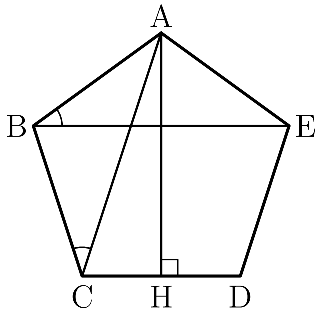
(2) 直角三角形ACHにおいて

$$\angle \mathrm{ACH} = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$$

$$\mathrm{CH} = \frac{1}{2}\mathrm{CD} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

よって　$\mathrm{AH} = \mathrm{CH}\tan 72^\circ = 5 \times 3.0777$

$= 15.3885 \fallingdotseq 15.4$



3 $\sin\theta = \dfrac{1}{4}$ のとき，次の各場合について，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(1) $0° \leqq \theta \leqq 90°$　　(2) $90° < \theta \leqq 180°$

【解】 (1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

$0° \leqq \theta \leqq 90°$ のとき $\cos\theta \geqq 0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{4} \div \frac{\sqrt{15}}{4} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}\end{aligned}$$

(2) $90° < \theta \leqq 180°$ のとき $\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{4} \div \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} \times \left(-\frac{4}{\sqrt{15}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{15}}\end{aligned}$$

3.2 正弦定理と余弦定理

3.2.1 正弦定理

■ 次の$\boxed{}$の中に適する文字や数値を入れ，説明を完成させよう．

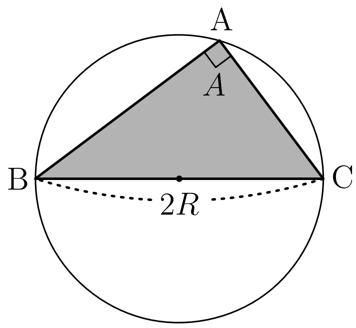
［2］ $A = 90°$ のとき

辺BCは，△ABCの外接円の直径になる．外接円の半径はRであるから，$a = \boxed{2R}$ である．

一方，$\sin A = \sin 90° = \boxed{1}$ であるから，

$$\boldsymbol{a = 2R\sin A}$$

が成り立つ．



［3］ $90° < A < 180°$ のとき

△ABCの外接円の周上に，辺BCに関して点Aとは反対側の点Dをとる．

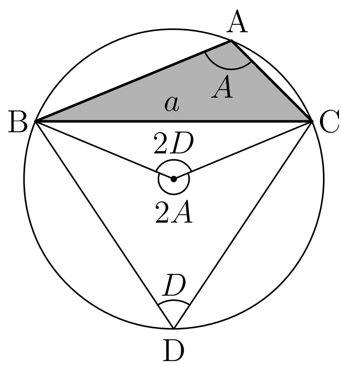
$\angle\mathrm{BDC} = D$ とすると，円周角と中心角の性質により

$$2A + 2D = \boxed{360}°$$

すなわち　$A + D = 180°$

が成り立つ[1]から

$$\sin D = \sin\left(\boxed{180}° - A\right) = \sin A \quad \cdots ①$$



$0° < D < 90°$ であるから，［1］より△BCDにおいて，

$$\boxed{a} = 2R\sin D$$

が成り立つ．

したがって，① により，

$$\boldsymbol{a = 2R\sin A}$$

が成り立つ．

[1] 四角形が円に内接するとき，向かい合う角の和は180°になる．

練習 3.17 次のような △ABC において，外接円の半径 R を求めよ．

(1) $a = 5$，$A = 45^\circ$　　(2) $b = \sqrt{3}$，$B = 120^\circ$

【解】 (1) 正弦定理により　$\dfrac{5}{\sin 45^\circ} = 2R$

よって　$R = \dfrac{5}{2\sin 45^\circ} = \dfrac{5}{2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

(2) 正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2R$

よって　$R = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sin 120^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 1$

練習 3.18 $c = 10$ である △ABC において，外接円の半径が $R = 10$ のとき，角 C を求めよ．

【解】 正弦定理により　$\dfrac{10}{\sin C} = 2\cdot 10$　　よって　$\sin C = \dfrac{1}{2}$

これを満たす C は　　$C = 30^\circ$，150°

練習 3.19 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ．

(1) $a=\sqrt{2}$，$A=30^\circ$，$B=45^\circ$ のとき，辺 CA の長さ b

(2) $b=4$，$B=45^\circ$，$C=60^\circ$ のとき，辺 AB の長さ c

(3) $c=3$，$A=120^\circ$，$C=30^\circ$ のとき，辺 BC の長さ a

【解】 (1) 正弦定理により $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

よって $\sqrt{2}\sin 45^\circ = b\sin 30^\circ$

$$\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = b\times\frac{1}{2}$$

したがって $b=2$

(2) 正弦定理により $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

よって $4\sin 60^\circ = c\sin 45^\circ$

$$4\times\frac{\sqrt{3}}{2} = c\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって $c=2\sqrt{6}$

(3) 正弦定理により $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$

よって $a\sin 30^\circ = 3\sin 120^\circ$

$$a\times\frac{1}{2} = 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

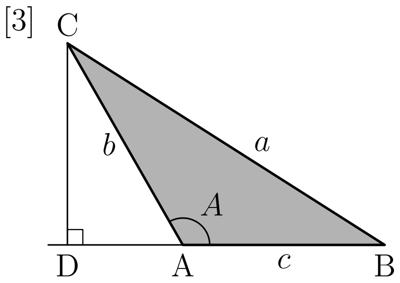
したがって $a=3\sqrt{3}$

3.2.2　余弦定理

練習 3.20 右の図 [3] の場合にも

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CD}^2 + \mathrm{BD}^2,$$
$$\mathrm{CD}^2 = (b\sin A)^2,$$
$$\mathrm{BD}^2 = (c - b\cos A)^2$$

が成り立つことを確かめよ.



【解】 直角三角形 BCD において，三平方の定理により　$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CD}^2 + \mathrm{BD}^2$

直角三角形 ADC において，$\angle\mathrm{CAD} = 180^\circ - A$ であるから

$$\mathrm{CD} = b\sin(180^\circ - A) = b\sin A \qquad \text{よって}\quad \mathrm{CD}^2 = (b\sin A)^2$$

また　$\mathrm{AD} = b\cos(180^\circ - A) = -b\cos A$

ゆえに　$\mathrm{BD} = \mathrm{BA} + \mathrm{AD} = c + (-b\cos A) = c - b\cos A$

よって　$\mathrm{BD}^2 = (c - b\cos A)^2$

練習 3.21 次のような $\triangle$ABC において，指定されたものを求めよ．

(1) $b=4$，$c=5$，$A=60^\circ$ のとき，辺 BC の長さ a

(2) $a=3$，$c=2\sqrt{2}$，$B=45^\circ$ のとき，辺 CA の長さ b

(3) $a=2$，$b=\sqrt{3}$，$C=150^\circ$ のとき，辺 AB の長さ c

【解】 (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ &= 4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cos 60^\circ \\ &= 16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\frac{1}{2}=21 \end{aligned}$$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{21}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2+a^2-2ca\cos B \\ &= (2\sqrt{2})^2+3^2-2\cdot2\sqrt{2}\cdot3\cos 45^\circ \\ &= 8+9-2\cdot2\sqrt{2}\cdot3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=5 \end{aligned}$$

$b>0$ であるから　$b=\sqrt{5}$

(3) 余弦定理により

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C \\ &= 2^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot2\cdot\sqrt{3}\cos 150^\circ \\ &= 4+3-2\cdot2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=13 \end{aligned}$$

$c>0$ であるから　$c=\sqrt{13}$

練習 3.22 次のような $\triangle$ABC において，指定されたものを求めよ．

(1) $a=7$，$b=3$，$c=8$ のとき，$\cos A$ の値と角 A

(2) $a=1$，$b=\sqrt{5}$，$c=\sqrt{2}$ のとき，$\cos B$ の値と角 B

【解】 (1) 余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\cdot3\cdot8}=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$$

また，$\cos A=\dfrac{1}{2}$ を満たす A は　$A=60^\circ$

(2) 余弦定理により

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(\sqrt{2})^2+1^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot1}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

また，$\cos B=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす B は　$B=135^\circ$

3.2.3　正弦定理・余弦定理の応用

練習 3.23 △ABC において，$a=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}+1$，$B=45^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

【解】 余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= (\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{2})^2-2(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}\cos 45^\circ \\ &= (3+2\sqrt{3}+1)+2-2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=4 \end{aligned}$$

$b>0$ であるから　$b=2$

正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$　よって　$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$A+C=135^\circ$ より，$A<135^\circ$ であるから　$A=30^\circ$

したがって　$C=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=105^\circ$

(答) $b=2$，$A=30^\circ$，$C=105^\circ$

練習 3.24 △ABC において次が成り立つとき，角 B を求めよ．

$$\sin A:\sin B:\sin C=8:7:3$$

【解】 正弦定理により $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ が成り立つから

$$a:b:c=8:7:3$$

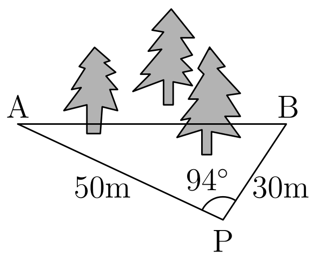
となる．このとき，正の数 k を用いて

$$a=8k,\ b=7k,\ c=3k$$

と表すことができるから

$$\cos B=\frac{(3k)^2+(8k)^2-(7k)^2}{2\cdot 3k\cdot 8k}=\frac{24k^2}{48k^2}=\frac{1}{2}$$　よって　$B=60^\circ$

練習 3.25 右の図のように，林をはさんで2地点A，Bがある．地点PからAとBを見て$\angle$APBを測ると94°で，またA，P間の距離は50m，B，P間の距離は30mであった．A，B間のおよその距離を求めよ．



【解】 $\triangle$APBにおいて，余弦定理を使うと

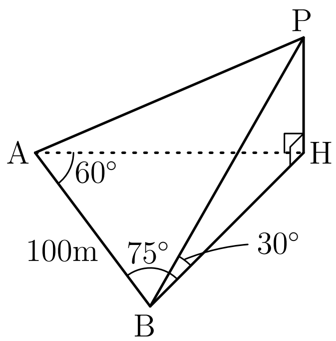
$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 - 2 \times \mathrm{AP} \times \mathrm{BP} \times \cos 94^\circ \\ &= 50^2 + 30^2 - 2 \times 50 \times 30 \times (-\cos 86^\circ) \\ &= 2500 + 900 - 3000 \times (-0.0698) = 3609.4\end{aligned}$$

AB > 0 であるから　$\mathrm{AB} = \sqrt{3609.4} \fallingdotseq 60$　　(答) およそ60m

練習 3.26 100m離れた2地点AとBから，気球Pの真下の地点Hを見たとき，

$$\angle\mathrm{HAB} = 60^\circ, \quad \angle\mathrm{HBA} = 75^\circ$$

であった．また，BからPを見上げた角度は30°であった．図において，気球Pの高さPHを求めよ．



【解】 $\angle\mathrm{AHB} = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

$\triangle$ABHに正弦定理を使うと　$\dfrac{\mathrm{BH}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{100}{\sin 45^\circ}$

よって　$\mathrm{BH} = 100 \times \sin 60^\circ \times \dfrac{1}{\sin 45^\circ} = 100 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = 50\sqrt{6}$

求める気球の高さPHは

$$\mathrm{PH} = \mathrm{BH}\tan 30^\circ = 50\sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{2}$$

(答) $50\sqrt{2}$ m

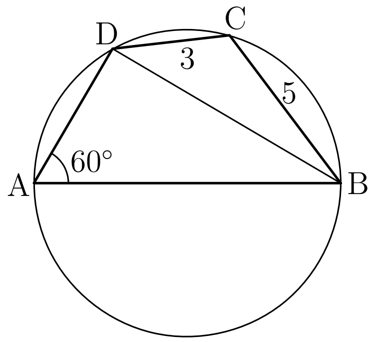
3.2.4 補充問題

4 円に内接する四角形ABCDにおいて，

$$\angle \mathrm{A} = 60^\circ,\ \mathrm{BC} = 5,\ \mathrm{CD} = 3$$

のとき，次のものを求めよ．

(1) 線分BDの長さ (2) 円の半径



【解】 (1) 四角形ABCDは円に内接するから

$$\angle \mathrm{C} = 180^\circ - \angle \mathrm{A} = 120^\circ$$

$\triangle$BCDにおいて余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 - 2 \times \mathrm{BC} \times \mathrm{CD} \times \cos 120^\circ \\ &= 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49\end{aligned}$$

$\mathrm{BD} > 0$ であるから　　$\mathrm{BD} = 7$

(2) 求める円の半径を R とすると，$\triangle$ABDにおいて正弦定理により

$$\frac{7}{\sin 60^\circ} = 2R$$

よって　　$R = \dfrac{7}{2 \sin 60^\circ} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$

5 $\triangle$ABCにおいて，$a : b = 7 : 3$，$A = 60^\circ$ であるとき，$\sin B$ の値を求めよ．

【解】 正弦定理により　$a : b = \sin A : \sin B = 7 : 3$

よって　　$$\begin{aligned}\sin B &= \frac{3}{7} \sin 60^\circ = \frac{3}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{14}\end{aligned}$$

6 $\triangle$ABC の 3 辺の長さが次のようなとき，角 A が鋭角，直角，鈍角のいずれであるかを調べよ.

(1) $a=9$，$b=4\sqrt{2}$，$c=7$　　(2) $a=\sqrt{7}$，$b=\sqrt{6}$，$c=2$

(3) $a=2\sqrt{10}$，$b=4$，$c=4$

【解】 (1) $a^2=81$，$b^2=32$，$c^2=49$ から　$b^2+c^2=a^2$

よって，角 A は　直角

(2) $a^2=7$，$b^2=6$，$c^2=4$ から　$b^2+c^2>a^2$

よって，角 A は　鋭角

(3) $a^2=40$，$b^2=16$，$c^2=16$ から　$b^2+c^2<a^2$

よって，角 A は　鈍角

3.3 図形の計量

3.3.1 三角形の面積

練習 3.27 次のような △ABC の面積 S を求めよ.

(1) $b=10,\ c=8,\ A=45^\circ$　　(2) $a=6,\ c=5,\ B=150^\circ$

(3) 1 辺の長さが 4 である正三角形 ABC

【解】 (1) $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot8\sin45^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot8\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=20\sqrt{2}$

(2) $S=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6\sin150^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{2}$

(3) $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

練習 3.28 3 辺の長さが次のような △ABC の面積 S を求めよ.

(1) $a=5,\ b=7,\ c=8$　　(2) $a=13,\ b=14,\ c=15$

【解】 (1) 余弦定理から　$\cos A=\dfrac{7^2+8^2-5^2}{2\cdot7\cdot8}=\dfrac{88}{2\cdot7\cdot8}=\dfrac{11}{14}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{11}{14}\right)}=\sqrt{\dfrac{75}{196}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot8\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=10\sqrt{3}$

(2) 余弦定理から　$\cos A=\dfrac{14^2+15^2-13^2}{2\cdot14\cdot15}=\dfrac{252}{2\cdot14\cdot15}=\dfrac{3}{5}$

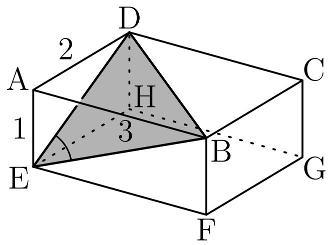
$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{4}{5}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot14\cdot15\cdot\dfrac{4}{5}=84$

練習 3.29 右の図のように，

$$\mathrm{AB}=3,\ \mathrm{AD}=2,\ \mathrm{AE}=1$$

である直方体 ABCD-EFGH がある．



(1) $\cos\angle\mathrm{BED}$ の値を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{BED}$ の面積 S を求めよ。

【解】 (1) 三平方の定理により

$$\mathrm{DE}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},\quad \mathrm{BE}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10},\quad \mathrm{BD}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

$\triangle\mathrm{BDE}$ において，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{BED}=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{2}{10\sqrt{2}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

(2) $\sin\angle\mathrm{BED}>0$ であるから，(1) の結果より

$$\sin\angle\mathrm{BED}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{49}{50}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$$

求める面積を S は

$$S=\frac{1}{2}\times\mathrm{DE}\times\mathrm{BE}\times\sin\angle\mathrm{BED}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7}{2}$$

■ 正四面体の体積

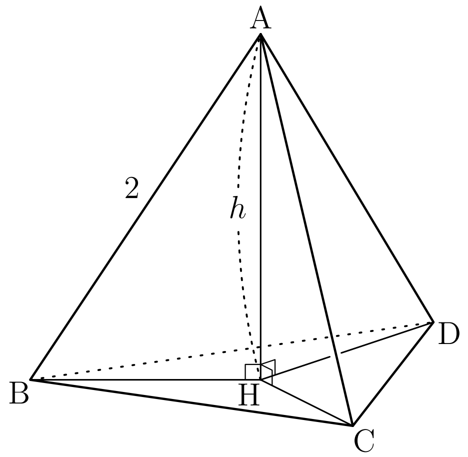
次の$\boxed{}$に適する数値を入れて，説明を完成させよう。

前ページの応用例題 3.6 において，正四面体 ABCD の体積 V を求めることができる．

正四面体 ABCD を角錐(すい)CABM と角錐 DABM に分けると，2 つの角錐は，底面の△ABM が共通で高さが等しいから，体積が等しい．

したがって，正四面体 ABCD の体積 V は，次の式で求められる．

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{ABM} \times \mathrm{CM} \times \boxed{2}$$

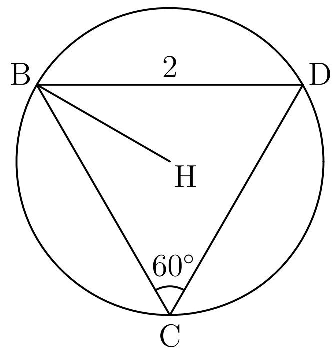


また，次のように考えることもできる．

頂点 A から底面の正三角形 BCD に垂線 AH を下ろすと，AH の長さは正四面体の高さ h に等しい．

点 H は△BCD の外接円の中心で，BH は半径である．BH の長さを求めるには，△BCD において，正弦定理により

$$\frac{2}{\sin 60^\circ} = \boxed{2} \times \mathrm{BH}$$



よって

$$\mathrm{BH} = \frac{2}{\boxed{2} \times \sin 60^\circ} = \frac{\boxed{2}}{\sqrt{3}}$$

また　$$\begin{aligned} h &= \mathrm{AH} \\ &= \sqrt{2^2 - \mathrm{BH}^2} \\ &= \sqrt{4 - \left(\frac{\boxed{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\boxed{2\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

△BCD の面積 S は　$$S = \frac{1}{2} \cdot \boxed{2}^2 \cdot \sin 60^\circ = \boxed{\sqrt{3}}$$

したがって　$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times \boxed{\sqrt{3}} \times \frac{\boxed{2\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} = \frac{\boxed{2\sqrt{2}}}{\boxed{3}}$$

3.3.2　相似な図形の面積比・体積比

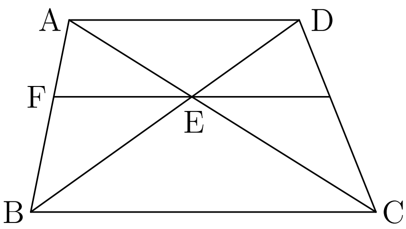
練習 3.30 △A′B′C′ と △ABC の相似比が 3 : 1 のとき，△A′B′C′ の面積 S' と △ABC の面積 S の比 $S' : S$ を求めよ．

【解】 △ABC の底辺 BC の長さを a，高さを h とすると，△A′B′C′ の底辺 B′C′ の長さは $3a$，高さは $3h$ である．
△ABC の面積を S，△A′B′C′ の面積を S' とすると

$$S = \frac{1}{2}ah, \qquad S' = \frac{1}{2} \times 3a \times 3h = 3^2 \times \frac{1}{2}ah$$

よって　　$S' : S = 3^2 : 1$

練習 3.31 AD//BC である台形 ABCD の対角線の交点を E とする．E を通り，辺 AD に平行な直線を引き，辺 AB との交点を F とする．AF $= 4$，FB $= 6$ であるとき，次の面積比を求めよ．



(1) △AFE : △ABC
(2) △AED : △CEB

【解】 (1) △AFE と △ABC は相似で，その相似比は

AF : AB $= 4 : 10 = 2 : 5$

よって，△AFE と △ABC の面積比は

△AFE : △ABC $= 2^2 : 5^2 = 4 : 25$

(2) △AED と △CEB は相似で，その相似比は

AE : CE $=$ AF : FB $= 4 : 6 = 2 : 3$

よって，△AED と △CEB の面積比は

△AED : △CEB $= 2^2 : 3^2 = 4 : 9$

例題 3.9 図形 P を縮小または拡大したときの図形を Q とし，P の面積を S，Q の面積を S' とする．

(1) P を 0.8 倍に縮小するとき，$S' : S$ を求めよ．

(2) P を何倍に拡大すれば，$S' = 2S$ となるか．

【解】 (1) Q と P の相似比は，$0.8 : 1$ であるから

$$S' : S = (0.8)^2 : 1 = 0.64 : 1$$

(2) k 倍に拡大するとき

$$S' : S = k^2 : 1$$

$S' = 2S$ であるのは，$k^2 = 2$ のときである．

$k > 0$ であるから　　$k = \sqrt{2}$

したがって，$\sqrt{2}$ 倍に拡大すればよい．

補足 (1) $S' : S = 64 : 100$ でもある．すなわち，面積はもとの $\dfrac{64}{100}$ $(= 64\%)$ になる．

(2) $\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$ であるから，拡大率はおよそ 141% である．

練習 3.32 例題 3.9 において，次の問いに答えよ．

(1) P を 0.5 倍に縮小するとき，$S' : S$ を求めよ．

(2) P を何倍に拡大すれば，$S' = 3S$ となるか．

【解】 (1) Q と P の相似比は，$0.5 : 1$ であるから

$$S' : S = (0.5)^2 : 1 = 0.25 : 1 = 1 : 4$$

(2) k 倍に拡大するとき

$$S' : S = k^2 : 1$$

$S' = 3S$ であるのは，$k^2 = 3$ のときである．

$k > 0$ であるから　　$k = \sqrt{3}$

よって，$\sqrt{3}$ 倍に拡大すればよい．

練習 3.33 次の各組の立体のうち，常に相似であるものはどれか．

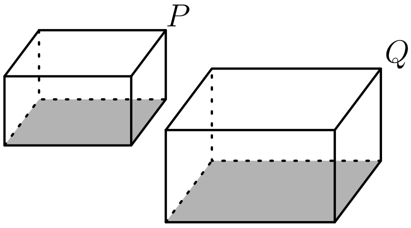
(1) 2つの直方体　　(2) 2つの立方体

(3) 2つの正四面体　　(4) 2つの正四角錐

(5) 2つの円錐　　(6) 2つの球

【答】 常に相似であるものは　(2), (3), (6)

練習 3.34 2つの相似な直方体 P，Q がある．その相似比は，$k:1$ であるとする．
P と Q の表面積の比は $k^2:1$，体積比は $k^3:1$ となることを確かめよ．



【解】 立方体 P と Q の底面の比は　$k^2:1$
他の面も面積比は $k^2:1$ であるので，P と Q の表面積の比は　$k^2:1$
直方体 Q の底面の面積を S，高さを h とすると，対応する P の底面の面積は k^2S，高さは kh である．直方体 P の体積を V'，直方体 Q の体積を V とすると

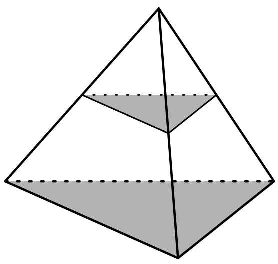
$$V = hS,\quad V' = k^2S \times kh = k^3hS$$

したがって　$V' : V = k^3 : 1$

練習 3.35 正四面体 P を，半分の高さのところで，底面に平行な平面で切ると，上に小さい正四面体 Q ができる．

(1) P と Q の表面積の比を求めよ．

(2) P と Q の体積比を求めよ．



【解】 (1) P と Q の相似比は　$2:1$
よって，P と Q の表面積の比は　$2^2:1^2 = 4:1$

(2) P と Q の体積比は　$2^3:1^3 = 8:1$

3.3.3 球の体積と表面積

練習 3.36 次のような球の体積を求めよ．

(1) 半径が 5cm　　(2) 直径が 12cm

【解】 (1) $\dfrac{4}{3}\pi\cdot 5^3 = \dfrac{500}{3}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$

(2) 半径は 6cm であるから　$\dfrac{4}{3}\pi\cdot 6^3 = 288\pi\ (\mathrm{cm}^3)$

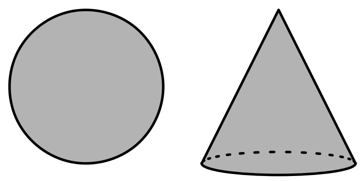
練習 3.37 次のような球の表面積を求めよ．

(1) 半径が 2cm　　(2) 直径が 10cm

【解】 (1) $4\pi\cdot 2^2 = 16\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

(2) 半径は 5cm であるから　$4\pi\cdot 5^2 = 100\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

練習 3.38 半径 1 の球と，底面の直径と高さがともに 2 である円錐について，次の問いに答えよ．



(1) 球と円錐の体積比を求めよ．

(2) 球と円錐の表面積の比を求めよ．

【解】 (1) 球の体積は　$\dfrac{4}{3}\pi\cdot 1^3 = \dfrac{4}{3}\pi$

円錐の体積は　$\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot 2 = \dfrac{2}{3}\pi$

よって，球と円錐の体積比は　$\dfrac{4}{3}\pi : \dfrac{2}{3}\pi = 2 : 1$

(2) 球の表面積は　$4\pi\cdot 1^2 = 4\pi$

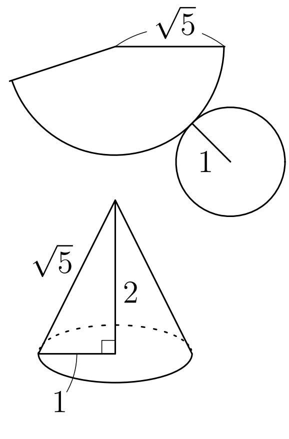
円錐の母線の長さは　$\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

円錐の側面の展開図は扇形で，その弧の長さは底面の円周に等しく 2π であるから，円錐の表面積は

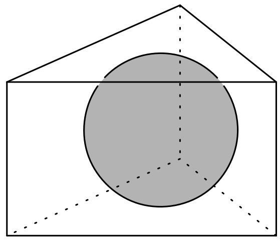
$$\pi\cdot 1^2 + \pi\cdot(\sqrt{5})^2\cdot\frac{2\pi}{2\sqrt{5}\pi} = (1+\sqrt{5})\pi$$

よって，球と円錐の表面積の比は

$$4\pi : (1+\sqrt{5})\pi = 4 : (1+\sqrt{5})$$

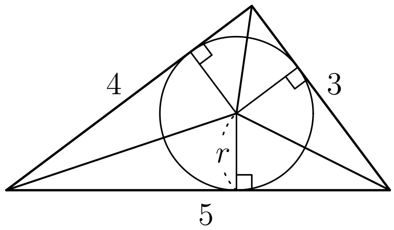


応用例題 3.7　三角柱に，直径が三角柱の高さに等しい球が内接している．三角柱の底面は，3 辺の長さが 3，4，5 の直角三角形である．三角柱の表面積を S_1，球の表面積を S_2 とするとき，$S_1 : S_2$ を求めよ．



考え方》　球の中心を通り底面に平行な平面で三角柱を切ると，切り口では直角三角形が内接している．

【解】 球の中心を通り底面に平行な平面で三角柱を切ったとき，切り口は右の図のようになる．球の半径を r とすると，この直角三角形の面積 S は



$$S = \frac{1}{2}\cdot 5r + \frac{1}{2}\cdot 3r + \frac{1}{2}\cdot 4r = 6r$$

一方　　$S = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6$

$6r = 6$ から　$r = 1$

よって　　$S_1 = 2S + 2r(5+3+4) = 2\cdot 6 + 2\cdot 1\cdot 12 = 36$

また　　$S_2 = 4\pi r^2 = 4\pi\cdot 1^2 = 4\pi$

したがって　　$S_1 : S_2 = 36 : 4\pi = 9 : \pi$

練習 3.39 応用例題 3.7 において，三角柱の体積を V_1，球の体積を V_2 とするとき，$V_1 : V_2 = S_1 : S_2$ であることを示せ．

【解】 $V_1 = S \times 2r = 6 \times 2 = 12$，　$V_2 = \dfrac{4}{3}\pi\cdot 1^3 = \dfrac{4}{3}\pi$

よって　　$V_1 : V_2 = 12 : \dfrac{4}{3}\pi = 9 : \pi$

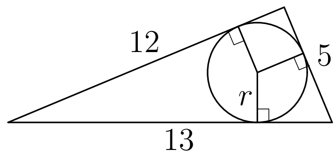
一方，$S_1 = 36$，$S_2 = 4\pi$ であるから

$$S_1 : S_2 = 36 : 4\pi = 9 : \pi$$

したがって　　$V_1 : V_2 = S_1 : S_2$

練習 3.40 応用例題 3.7 において，三角柱の底面が，5，12，13 を 3 辺の長さとする直角三角形のとき，$S_1 : S_2$ を求めよ．

【解】 球の中心を通り底面に平行な平面で三角柱を切ったとき，切り口は右の図のようになる．球の半径を r とすると，この直角三角形の面積 S は



$$S = \frac{1}{2}(5+12+13)r = 15r$$

一方　$S = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12 = 30$

$15r = 30$ から　$r = 2$

よって　$S_1 = 2S + 2r(5+12+13) = 2\cdot 30 + 2\cdot 2\cdot 30 = 180$

また　$S_2 = 4\pi r^2 = 4\pi\cdot 2^2 = 16\pi$

したがって　$S_1 : S_2 = 180 : 16\pi = 45 : 4\pi$

練習 3.41 半球の形をした 2 つの容器 P と Q がある．P の直径は 20cm，Q の直径は 15cm である．容器 P で 3 杯の水と容器 Q で 7 杯の水とでは，どちらの方の量が多いか．

【解】 容器 P で 3 杯の水の量は　$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 10^3 \times 3 = 2000\pi$ (cm^3)

容器 Q で 7 杯の水の量は　$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{15}{2}\right)^3 \times 7 = \frac{7875}{4}\pi$ (cm^3)

$2000 = \frac{8000}{4}$ であるから，容器 P で 3 杯の水の量の方が多い．

3.3.4　補充問題

7 次の図形の面積を求めよ．

(1) $\mathrm{AB}=6$，$\mathrm{AD}=4$，$\angle\mathrm{A}=60^\circ$　である平行四辺形 ABCD

(2) 半径 2 の円に内接する正十二角形

【解】 (1) この平行四辺形の面積は，$\triangle\mathrm{ABD}$ の面積の 2 倍である．

$$2\times\left(\frac{1}{2}\cdot4\cdot6\sin60^\circ\right)=24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$$

(2) 円の中心と正十二角形の各頂点を結ぶと，面積の等しい 12 個の二等辺三角形ができる．

この二等辺三角形の頂角は 30° である．

よって，正十二角形の面積は

$$12\times\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin30^\circ\right)=24\cdot\frac{1}{2}=12$$

8 $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{AC}=3$，$A=120^\circ$ とする．$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，AD の長さを求めよ。

【解】 $\mathrm{AD}=x$ とおく．

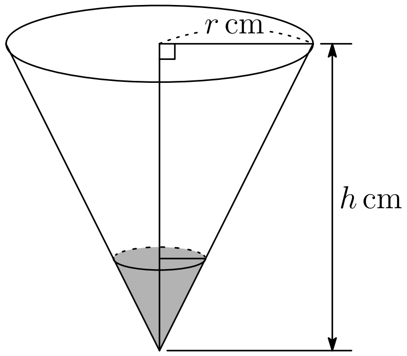
$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot5\cdot3\sin120^\circ=\frac{1}{2}\cdot5\cdot x\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot3\cdot x\sin60^\circ$$

式を整理すると　$15=5x+3x$

よって　$x=\dfrac{15}{8}$

9 右の図のように，底面の半径が $r\,\mathrm{cm}$，高さが $h\,\mathrm{cm}$ の円錐の形をした容器がある．
この容器に，深さの $\dfrac{1}{3}$ のところまで水を入れたとき，あと何 cm^3 の水が入るか．



【解】 容器の体積は　$\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ (cm^3)

容器全体と入っている水の体積比は

$$3^3 : 1 = 27 : 1$$

よって，この容器にさらに入れることのできる水の量は

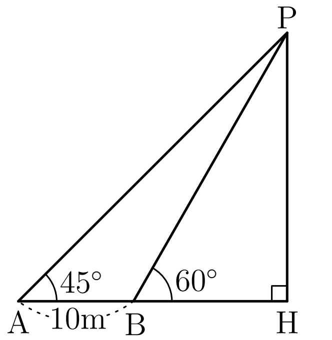
$$\frac{26}{27} \times \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{26}{81}\pi r^2 h\ (\mathrm{cm}^3)$$

3.4 章末問題

3.4.1 章末問題 A

1 地点 A からテレビ塔の頂点 P を見上げた角は 45° であった．次に塔へ向かって水平に 10m 進んだ地点 B から P を見上げた角は 60° であった．図のように P の真下の地点を H とする．目の高さを無視するとき，次のものを求めよ．

(1) B，H 間の距離　　(2) 塔の高さ



【解】 (1) $\mathrm{BH} = x$ (m) とすると

$$\mathrm{PH} = x\tan 60^\circ = \sqrt{3}x$$
$$\mathrm{PH} = (x+10)\tan 45^\circ = x+10$$

であるから　$\sqrt{3}x = x+10$

よって　$(\sqrt{3}-1)x = 10$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}-1} = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$= \frac{10(\sqrt{3}+1)}{2} = 5(\sqrt{3}+1)$$

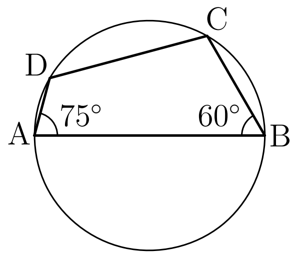
(答) $5(\sqrt{3}+1)$ m

(2) $\mathrm{PH} = x+10 = 5(\sqrt{3}+1)+10 = 5(\sqrt{3}+3)$

(答) $5(\sqrt{3}+3)$ m

2 半径 5 の円において，1 つの直径 AB と，周上の 2 点 C，D をとり，四角形 ABCD を作る．$\angle A = 75^\circ$，$\angle B = 60^\circ$ のとき，次の線分の長さを求めよ．

(1) 対角線 AC　　(2) 辺 CD



【解】 (1) $\triangle ABC$ は，半径 5 の内接するから，正弦定理を用いると

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2 \times 5$$

よって　　$AC = 10 \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

(2) $\angle ACB = 90^\circ$ であるから　　$\angle CAB = 30^\circ$

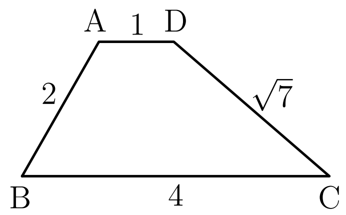
よって　　$\angle DAC = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$

$\triangle ACD$ に正弦定理を用いると

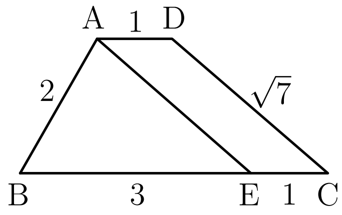
$$\frac{CD}{\sin 45^\circ} = 2 \times 5$$

したがって　　$CD = 10 \sin 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

3 台形 ABCD において，AD//BC，AB $=2$，BC $=4$，CD $=\sqrt{7}$，DA $=1$ であるとき，この台形の面積 S を求めよ．



【解】 頂点 A を通り，辺 CD に平行な直線と辺 BC の交点を E とすると



$$\mathrm{AE}=\mathrm{DC}=\sqrt{7}$$

$$\mathrm{EC}=\mathrm{AD}=1$$

$$\mathrm{BE}=3$$

△ABE において，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{B}=\frac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{2}$$

よって　　$\angle\mathrm{B}=60^\circ$

台形 ABCD の高さは　$\mathrm{AB}\sin 60^\circ=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

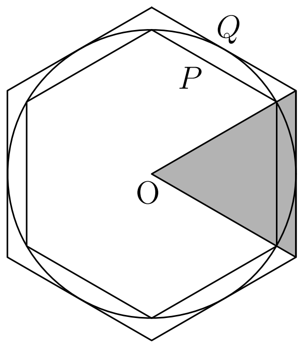
したがって　　$S=\dfrac{(1+4)\times\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

4 点Oを中心とする半径2の円に内接する正六角形 P と外接する正六角形 Q がある．

(1) Q の1辺の長さを求めよ．

(2) P と Q の相似比を求めよ．

(3) P と Q の面積比を求めよ．

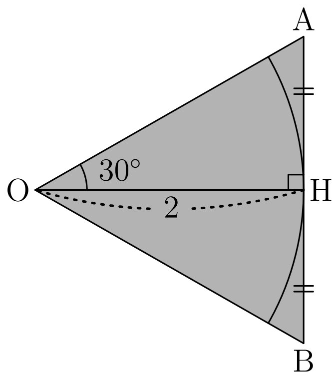


【解】 (1) 右の図において

$$\mathrm{AB} = 2\mathrm{AH}$$

また

$$\mathrm{AH} = \mathrm{OH}\tan 30^\circ = 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



よって，正六角形の Q の1辺の長さは

$$\mathrm{AB} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

(2) 正六角形 P の1辺の長さは，円の半径と同じ2である．P と Q の相似比は1辺の長さの比であるから

$$2 : \frac{4}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} : 2$$

(3) P と Q の面積比は

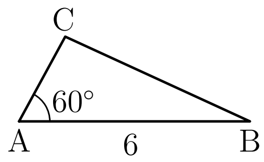
$$\left(\sqrt{3}\right)^2 : 2^2 = 3 : 4$$

3.4.2 章末問題B

5 △ABC において,

$$A = 60^\circ,\ a : b = 2 : 1,\ c = 6$$

であるとき，次のものを求めよ.



(1) $\sin B$ の値　　(2) b

【解】 (1) 正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin 60^\circ} = \dfrac{b}{\sin B}$　$\cdots$①

$a : b = 2 : 1$ から　$a = 2b$　$\cdots$②

よって，①，② から

$$\sin B = \frac{b}{a}\sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(2) 余弦定理により　$a^2 = b^2 + 6^2 - 2b{\cdot}6\cos 60^\circ$

② を代入して　$4b^2 = b^2 + 36 - 6b$

すなわち　$b^2 + 2b - 12 = 0$

これを解くと　$b = -1 \pm \sqrt{13}$

$b > 0$ であるから　$b = -1 + \sqrt{13}$

6 $\triangle$ABC において，$b=2\sqrt{3}$，$c=2$，$C=30^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

【解】 $\triangle$ABC において，正弦定理により

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin B}=\frac{2}{\sin 30^\circ}$$

よって　$\sin B=2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

これを満たす B は　$B=60^\circ,\ 120^\circ$

<u>$B=60^\circ$ のとき</u>

$A=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)=90^\circ$

$\triangle$ABC は $A=90^\circ$ の直角三角形であるから，

三平方の定理により

$$a=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{16}=4$$

<u>$B=120^\circ$ のとき</u>

$A=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$

$\triangle$ABC は AB $=$ BC の二等辺三角形であるから

$$a=c=2$$

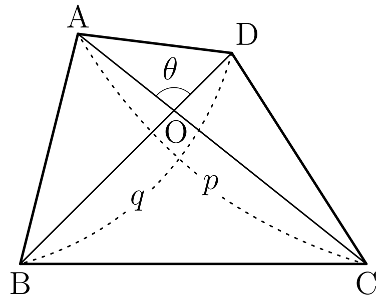
(答) $a=4$，$A=90^\circ$，$B=60^\circ$　または　$a=2$，$A=30^\circ$，$B=120^\circ$

7 右の図のような四角形 ABCD の 2 本の対角線の交点を O とし，

$\angle\mathrm{AOD} = \theta$， $\mathrm{AC} = p$， $\mathrm{BD} = q$

とする．この四角形の面積 S は，

$S = \dfrac{1}{2}pq\sin\theta$ であることを示せ．



【解】 $\mathrm{OA} = a$， $\mathrm{OB} = b$， $\mathrm{OC} = c$， $\mathrm{OD} = d$ とおくと

$$\triangle\mathrm{ODA} = \frac{1}{2}da\sin\theta$$

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}ab\sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

$$\triangle\mathrm{OBC} = \frac{1}{2}bc\sin\theta$$

$$\triangle\mathrm{OCD} = \frac{1}{2}cd\sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}cd\sin\theta$$

ゆえに，四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{ODA} + \triangle\mathrm{OAB} + \triangle\mathrm{OBC} + \triangle\mathrm{OCD} \\ &= \frac{1}{2}da\sin\theta + \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{2}bc\sin\theta + \frac{1}{2}cd\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}(da + ab + bc + cd)\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}(a + c)(b + d)\sin\theta = \frac{1}{2}pq\sin\theta \end{aligned}$$

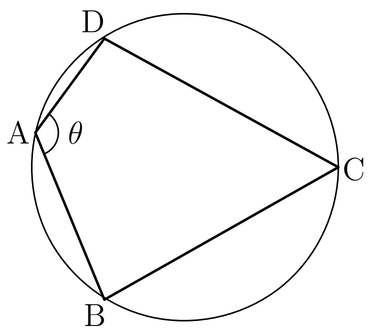
8 円に内接する四角形 ABCD があり，

$$\mathrm{AB}=5,\ \mathrm{BC}=7,\ \mathrm{CD}=7,\ \mathrm{DA}=3$$

である．$\angle\mathrm{A}=\theta$ とするとき，次のものを求めよ．

(1) $\cos\theta$ の値

(2) 四角形 ABCD の面積 S



【解】 (1) $\triangle\mathrm{ABD}$ において，余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos\theta\\&=34-30\cos\theta\end{aligned}$$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle\mathrm{C}=180^\circ-\theta$$

$\triangle\mathrm{BCD}$ において，余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=7^2+7^2-2\cdot7\cdot7\cos(180^\circ-\theta)\\&=98-98\cdot(-\cos\theta)\\&=98+98\cos\theta\end{aligned}$$

よって　$34-30\cos\theta=98+98\cos\theta$

これを解いて　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

(2) $\sin\theta>0$ であるから

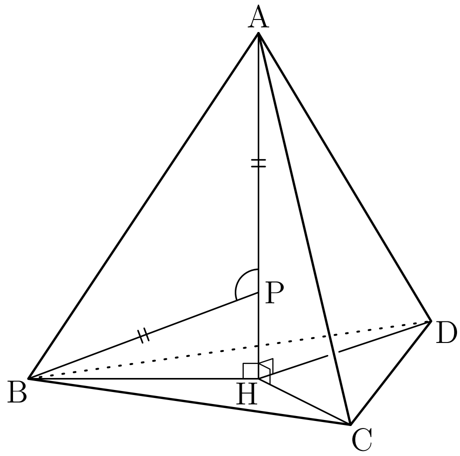
$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　
$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}\\&=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot7\cdot7\sin(180^\circ-\theta)\\&=\frac{15}{2}\sin\theta+\frac{49}{2}\sin\theta\\&=32\sin\theta=32\times\frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}\end{aligned}$$

9 正四面体 ABCD の頂点 A から △BCD に下ろした垂線を AH とし，AP = BP であるように点 P を線分 AH 上にとる．AB $= \sqrt{3}$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分 PH の長さを求めよ．

(2) $\cos\angle$APB の値を求めよ．



【解】 (1) $\mathrm{BH}^2 = \mathrm{CH}^2 = \mathrm{DH}^2 = (\sqrt{3})^2 - \mathrm{AH}^2$ であるから，点 H は △BCD の外接円の中心で，BH は半径である．

△BCD において，正弦定理により

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2\mathrm{BH} \quad \text{を解いて} \quad \mathrm{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = 1$$

△ABH において，三平方の定理により

$$\mathrm{AH} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$$

$\mathrm{PH} = x$ とすると　　$\mathrm{BP} = \mathrm{AP} = \sqrt{2} - x$

よって，△BPH において，三平方の定理により

$$\mathrm{BP}^2 = \mathrm{PH}^2 + \mathrm{BH}^2$$

すなわち　　$(\sqrt{2} - x)^2 = x^2 + 1^2$

整理すると　$2\sqrt{2}x = 1$

したがって　$x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(2) $\mathrm{BP} = \mathrm{AP} = \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

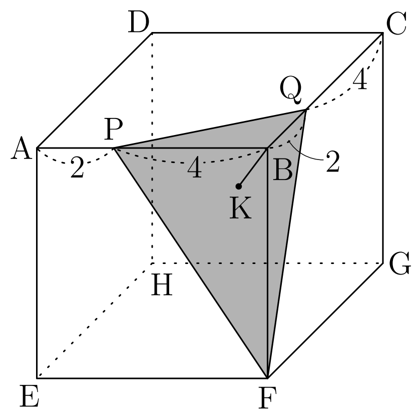
よって，△APB において，余弦定理を用いて

$$\cos\angle\mathrm{APB} = \frac{\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 - (\sqrt{3})^2}{2\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{4}} = -\frac{1}{3}$$

10 1 辺の長さが 6 の立方体 ABCD-EFGH において，辺 AB，BC 上に，それぞれ右の図のような点 P，Q をとる．

(1) △PFQ の面積を求めよ．

(2) B から △PFQ に下ろした垂線 BK の長さを求めよ．



【解】 (1) 三平方の定理により

$$\mathrm{PQ} = \sqrt{\mathrm{PB}^2 + \mathrm{BQ}^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$\mathrm{FP} = \sqrt{\mathrm{PB}^2 + \mathrm{BF}^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$
$$\mathrm{FQ} = \sqrt{\mathrm{BQ}^2 + \mathrm{BF}^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

よって，△PFQ に余弦定理を適用して

$$\cos\angle\mathrm{PQF} = \frac{\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{FQ}^2 - \mathrm{FP}^2}{2\cdot\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{FQ}} = \frac{20 + 40 - 52}{2\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$\sin\angle\mathrm{PQF} > 0$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{PQF} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

したがって，△PFQ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{FQ}\cdot\sin\angle\mathrm{PQF} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{7\sqrt{2}}{10} = 14$$

(2) △BPF を底面とし，BQ を高さとする三角錐と，△PFQ を底面とし，BK を高さとする三角錐は同じ立体であるから，体積は等しい．

よって
$$\frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{BPF} \times \mathrm{BQ} = \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{PFQ} \times \mathrm{BK}$$

すなわち $\quad \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 6 \times 2 = \dfrac{1}{3} \times 14 \times \mathrm{BK}$

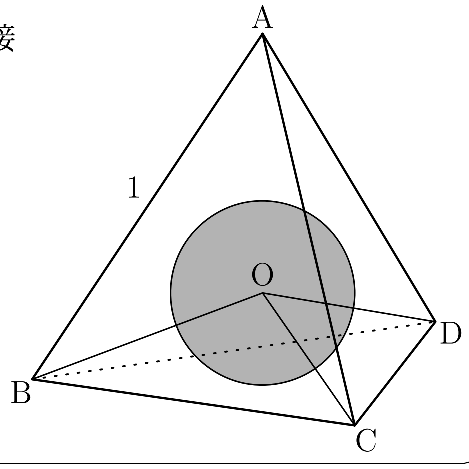
したがって $\qquad \mathrm{BK} = \dfrac{12}{7}$

11 1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD に内接する球の中心を O とする．

(1) 四面体 OBCD の体積 V を求めよ．

(2) 球の半径 r を求めよ．

(3) 球の表面積と体積を求めよ．



【解】 (1) 1 辺の長さが 1 の正四面体の体積は $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

正四面体 ABCD の体積は $4V$ であるから

$$4V = \frac{\sqrt{2}}{12}\quad \text{これを解いて}\quad V = \frac{\sqrt{2}}{48}$$

(2) $\triangle$BCD の面積 $\times\, r = 3V$

$\triangle$BCD の面積 $= \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

よって　$\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times r = 3 \times \dfrac{\sqrt{2}}{48}$

したがって　$r = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{16} = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$

(3) 球の表面積は　$4\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}}{12}\right)^2 = \dfrac{1}{6}\pi$

球の体積は　$\dfrac{4}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}}{12}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{6}}{216}\pi$