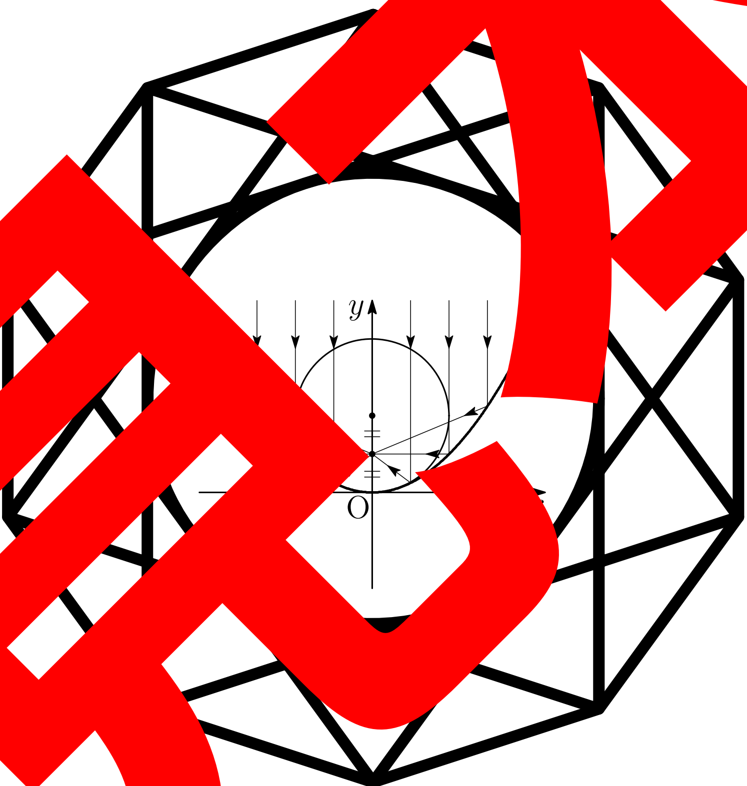
九州地区国立大学

大学受験　数学Ⅲ

2001－2016

解答



はじめに

2014年に開催された第68回九州算数・数学教育研究(熊本)大会で研究発表者(熊本県数学部会)より九州地区国立大学の入試問題を分析した大学入[illegible]問題集の作成に向けた取り組みが報告されました．この報告に対し多くの先生[illegible]ご賛同を頂き

『大学受験　数学I・A・II・[illegible]『大学受[illegible]III』

が作成されました．

また，情報化に対応するため，本書および[illegible]書化(PDF)を推進し携帯端末やパソコンでの操作に対応した電子書[illegible]

本書の編集にあたり，以下の点に留意し[illegible]

1. 本書に掲載した問題は，九州大[illegible]工業[illegible]福[illegible]大学[illegible]学・長崎大学・熊本大学・大分大[illegible]崎大学・鹿[illegible]大学[illegible]全学部全学科過去16[illegible]分(2001-2016)の[illegible]般前期試験問[illegible]ら厳選[illegible]

2. 本書は[illegible]題配置を行うと共に，難易[illegible]「基[illegible]準」「応[illegible]展」[illegible]明示しました．頻出問題[illegible]て[illegible]□□を付[illegible]て繰り返[illegible]できる[illegible]しました．

3. [illegible]書に掲[illegible]問題[illegible]記10大学の全学部全学科過去16年分(2001-2016)の一般[illegible]試験問[illegible]次のサイトから入手することもできます．

http[illegible]amoto.s12.xr[illegible]/ruihi.html

[illegible]に関[illegible]同サ[illegible]載しています．

平成28年5月　編者

目 次

第 1 章　式と曲線

1.1　2次曲線

□□ **1.1** 楕円 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点 $\left(1,\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ [illegible] 方程式を求めよ.

基本 1.2 直線 $l: ax+y-2=0\ (a \geqq 0)$ に [illegible] 答えよ.
([illegible]教育大学 [illegible]) 8

(1) 直線 l と接し，原点を中心と [illegible] 方程式を [illegible] よ.

(2) 上の (1) で求 [illegible] た円と直線 l の接点を P とする [illegible] $0 \leqq a$ [illegible] 動くとき，P の x 座標 [illegible] 囲を求めよ.

基本 1.3 [illegible], 0) [illegible] $C: \frac{x^2}{3}+y^2=1$ を考える [illegible] と [illegible] 円 C 上の点 P$(u,\ v)$ との距 [illegible] とす [illegible] は正の定数とする. [illegible] 問いに答えよ.
(福岡教育大学 2013) 3

(1) [illegible] を u の [illegible] せ.

(2) d の [illegible] を求 [illegible] また [illegible] きの u の値を求めよ.

[illegible] 楕円 [illegible] $\left(\frac{y}{5}\right)^2$ [illegible] の点 P$(a,\ b)$ [illegible] る接線と x 軸，y 軸が作る三角 [illegible] 積 [illegible] る．た [illegible] $b>0$ と [illegible]
(福岡教育大学 2002) 3

(1) [illegible] を用 [illegible] せ.

(2) 点 P [illegible] の範囲で動 [illegible] S の最小値とそのときの a，b の値を求めよ.

基本 1.5 k を定数とす [illegible] 標平面上に曲線 $C: 2x^2+3y^2-12x-12y+24=0$ がある．次の問いに答え [illegible]
(福岡教育大学 2006) 3

(1) 曲線 C の概形を [illegible]

(2) 曲線 C と直線 [illegible] $+k$ の共有点の個数を求めよ.

(3) 曲線 C と直線 $y=x+k$ が異なる 2 点 P，Q で交わるとき，線分 PQ の中点の軌跡を求めよ.

基本 1.6 曲線 $C : 4x^2 + 9y^2 = 36\ (x > 0)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y_1\right)$ が第 1 象限にある．点 P における曲線 C の接線を ℓ とする．　(大分大学 2015) 4

(1) y_1 の値を求めなさい．

(2) 接線 ℓ の方程式を求めなさい．

(3) 接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標を求めなさい．

(4) 曲線 C，接線 ℓ，x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めな[illegible]

基本 1.7 $m > 0$ とする．曲線 $C : x^2 + 3y$[illegible] $L_m : y = mx - 1$ の 2 つの共有点を $\mathrm{A}(0, -1)$，$\mathrm{B}_m(p,\ q)$ とおく．次[illegible]　(九工大 [工]2006) 4

(1) p，q を m を用いて表せ．

(2) 2 点 A，B_m の間の距離を $f(m)$ とす[illegible]のときの m の値 m_0 を求めよ．

(3) (2) で求めた m_0 に対して，曲[illegible]線分 AB[illegible]む図[illegible]求めよ．

基本 1.8 $p > 1$[illegible]座標平面の点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ から楕[illegible]$+ \dfrac{y^2}{}$[illegible] 2 本の接線が直交[illegible] p の値を求めよ．　([illegible]球大[illegible]) 3

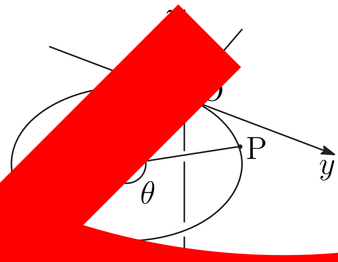
基本 1[illegible]の文中[illegible]に適する数を[illegible]その結果だけを答えよ．　(鹿児島大学 2002) 10

点 (1[illegible]直線[illegible]か[illegible]離が等しい点の軌跡は放物線であり，その方程[illegible] $y =$ [illegible] $-\dfrac{1}{3}$ [illegible]このとき[illegible] □，$b =$ □ である．

[illegible](3,[illegible]1, 0)[illegible]離の和が 12 [illegible]点の軌跡は楕円であり，その[illegible]$- r)^2$[illegible] $=$ [illegible]，$p =$ □，$q =$ □，
$r =$ [illegible]

標準 1.10 点 O を原点とし，x 軸，y 軸，z 軸を座標軸とする座標空間において，3 点 A(1, 0, 0)，B(2, 0, 0)，C(1, 0, 1) がある．点 A を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上に点 P をとり，図のように $\theta = \angle \mathrm{BAP}$ とおく．ただし，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ とする．また，直線 CP と yz 平面の交点を Q とおく．このとき，次の問に答えよ．

(佐賀大学 2015) $\boxed{3}$



(1) 点 P の座標を θ を用いて表せ．

(2) 点 Q の座標を θ を用いて表せ．

(3) θ の値が $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で変化す[illegible] yz 平面における点 Q の軌跡の方程式を[illegible] その概形を図示せよ．

標準 1.11 楕円 $C_1 : 6x^2 + 4y^2 = 3$ と曲線 C_2 [illegible] えよ．

(長崎大学 [illegible]09) $\boxed{5}$

(1) C_1 と C_2 の交点において，C_1 [illegible]接線は直[illegible]ること[illegible]明[illegible]

(2) $x > 0$ の範囲において，C_1 と [illegible]囲まれた部[illegible]面積を求[illegible]

標準 1.12 次の[illegible]答えよ．

[illegible]) $\boxed{10}$

(1) α [illegible] > 0 [illegible] $\alpha > \beta$ を満たす定数と[illegible]程式 $\dfrac{x^2}{\alpha} + \dfrac{y^2}{\beta} = 1$ で表さ[illegible]平面上[illegible]曲[illegible]とする．点 P(x_0, y[illegible]だし $y_0 \neq 0$) を C 上の点とし，点[illegible]ける[illegible]傾きを m とするとき，$m = -\dfrac{\beta x_0}{\alpha y_0}$ であることを示[illegible]だし C [illegible]曲線の[illegible]接線の傾[illegible]漸近線の傾きが一致しないこと[illegible]明せず[illegible]てよい[illegible]

[illegible] $1 <$ [illegible]を満た[illegible]

[illegible] $+ y^2$ [illegible]よび [illegible] $\dfrac{y^2}{4}$ [illegible]で与えられる 2 次曲線をそれぞれ C_1, [illegible]る[illegible](x_0, y_0) ([illegible]0) が C_1 と C_2 の交点であるとき，点 P にお[illegible] C_2 の接線は互いに直交することを，(1) の結果を用いて示せ．

標準 1.13 $x^2 - y^2 = 2$ で表される曲線を C とし，$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を C 上の点とする．次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2010) $\boxed{6}$

(1) 曲線 C の点 P における接線 l の方程式は

$$x_0 x - y_0 y = 2$$

となることを証明せよ．

(2) 原点 O から l に下ろした垂線を OH とする．H の座標[illegible]$y_1)$ とするとき，x_1，y_1 を x_0 と y_0 で表せ．

(3) $\mathrm{F}(1,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-1,\ 0)$ とする．FH·F′H [illegible] ならず一定であることを証明せよ．また，その値を求めよ．

標準 1.14 xy 平面において，点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ と [illegible] る．ただし，$p > 0$ とする．次の各問い[illegible]　(鹿児島大学 2[illegible]13) $\boxed{6}$

(1) C を表す方程式を求めよ．

(2) C 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における [illegible] 接線 l の方程[illegible]めよ．[illegible] $y_0 \neq 0$ とする．

(3) (2) の l [illegible] 点を Q とするとき，FP = F[illegible] 証明[illegible]

標準 [illegible] 円 C [illegible] について，次の各問[illegible]えよ．　(鹿児島大学 2006) $\boxed{6}$

(1) [illegible] 0 で[illegible]数 m [illegible] 傾きが[illegible]であり y 切片が正である C の接線[illegible]方程式[illegible]よ．

(2) [illegible]と直交[illegible]片が正[illegible] C の接線 l_2 の[illegible]式を求めよ．

(3) [illegible]点 P [illegible]

(4) m [illegible]ない[illegible]動くとき，[illegible]の円周上にあることを示せ．

標準 1.16 xy[illegible]にお[illegible]原点 O と直線 $x = 2$ からの距離の比が $\sqrt{r} : 1$ であるような点 P について，次[illegible]答えよ．　(鹿児島大学 2001) $\boxed{10}$

(1) 点 P の軌跡を C と[illegible]とき，曲線 C の方程式を求めよ．

(2) $r = 2$ のとき，軌[illegible]どのような図形になるか答え，その軌跡の概形を描け．

(3) 軌跡 C が，長[illegible]さが $\sqrt{5}$ であるような楕円になるときの r の値を求めよ．

標準 1.17 次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2009) $\boxed{6}$

(1) 平面上の二点 $\mathrm{F_1}(-1,\ 0)$，$\mathrm{F_2}(1,\ 0)$ からの距離の和が $2a$ $(a > 1)$ である楕円 C の方程式を求めよ．

(2) 楕円 C が直線 $x + y = 2$ と接するとき，a の値と接点 P の座標を求めよ．

(3) 点 P における楕円 C の法線が x 軸と交わる点を Q とするとき

$$\frac{\mathrm{PF_1}}{\mathrm{PF_2}} = \frac{\mathrm{QF_1}}{\mathrm{QF_2}}$$

であることを示せ．

標準 1.18 O を原点とする座標空間の 2 点 A(0, [illegible] $\sin\theta,\ 1)$ に対して，直線 AP 上の点で原点 O から最も近い点を [illegible] して，次に答えよ．　([illegible]) [illegible]

(1) X，Y，Z を θ を用いて表せ．

(2) θ が 0，π，$\frac{3}{2}\pi$ のときの点 Q [illegible] ベクトルを [illegible] ぞれ $\vec{a}$ [illegible] る．$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ をみたす実 [illegible] t, [illegible] て表せ．また，[illegible] 値を求めよ．

(3) 点 Q [illegible] xy 平 [illegible] いた垂線と xy 平面の交 [illegible] R$(X,\ Y,\ 0)$ とする．θ が [illegible] $\leqq 2\pi$ の [illegible] き，xy 平面におけ [illegible] の軌跡を求めよ．

[illegible] **1.19** θ [illegible] $\theta <$ [illegible] 数とする．座標平面上で，$a^2 > 4b$ を満たす点 [illegible] $a,\ b)$ [illegible] 物線 [illegible] に引 [illegible] つの接 [illegible] 点を Q，R とし，接線 PQ，PR [illegible] れぞ [illegible] m_2 と [illegible] 点 P は ∠QP [illegible] を満たしている．点 P の全体 [illegible] 形を [illegible] る．　(九大 [理]2003) $\boxed{8}$

(1) [illegible] m_2 [illegible] $\tan\theta$ [illegible] せ．

(2) G を [illegible]

(3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ の [illegible] G [illegible] せよ．

応用 1.20 楕円 $C : x^2 +$ [illegible] 4 と点 P$(2,\ 0)$ を考える．以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2011) $\boxed{3}$

(1) 直線 $y = x + b$ [illegible] C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ．

(2) (1) における 2 つの交点を A，B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ．

応用 1.21 $a < 0$，b を実数とする．楕円 $C : x^2 + 4y^2 = 4$ と直線 $l : y = ax + b$ が異なる2個の共有点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 < x_2)$ を持つとし，l に平行な直線 m が第1象限の点 A において C と接しているとする．次に答えよ．(九工大 [工]2016) $\boxed{3}$

(1) b の値の範囲を a を用いて表せ．

(2) 直線 m の方程式を a を用いて表せ．

(3) $x_2 - x_1$ を a，b を用いて表せ．

(4) 三角形 APQ の面積 S を a，b を用いて表せ．

(5) b が (1) で求めた範囲を動くとき，([illegible] めた S の [illegible] を求めよ．

発展 1.22 中心の xyz 座標が $(0,\ 0,\ 1)$ で半径 [illegible] 点 $\mathrm{P}(0,\ -2,\ a)$ に関して，点 P を通る直線が球 G と共有点をもつとき，そ [illegible] 図形の外形を表す方程式を求めよ．また，そ [illegible] 分類せよ．(分大 [医]2 [illegible] 10) $\boxed{8}$

1.2　媒介変数表示と極 [illegible] 式

基本 1.23 次の [illegible] 答えよ．([illegible]) $\boxed{3}$

(1) 実数 [illegible] $<$ a [illegible] みたし，$x = a\cos\theta + 5$，[illegible] $2a$ [illegible] θ とする．[illegible] 数 θ が 0 [illegible] 2π を [illegible] 点 $(x,\ y)$ はどのような [illegible] を表すか．

(2) [illegible] $(0,$ [illegible] り，[illegible] た曲線に接する [illegible] の方程式と，接点の座標を求めよ．

(3) 原 [illegible] 0) と [illegible] 求めた [illegible] 作られ [illegible] 形の外心を C とする．C の座標 [illegible] を用い [illegible]．(1 [illegible] が C を通る [illegible] a の値を定めよ．

標準 [illegible] 線 C : [illegible] F(0 [illegible] いて考える．以下の問いに答えよ．た [illegible] は [illegible] す．(熊大 [理]2008) $\boxed{4}$

(1) 放物線 [illegible]) $(x > 0$ と [illegible] る) に対して $\theta = \angle\mathrm{OFA}$，$r = \mathrm{FA}$ とおく．r を θ を用いて表 [illegible]

(2) 放物線 C 上に n 個 [illegible] $\mathrm{A}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{A}_2(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，$\mathrm{A}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$x_k \ [illegible] \ かつ \quad \angle\mathrm{OFA}_k = \frac{k\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

を満たすようにとる．極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{FA}_k$ を求めよ．

標準 1.25 曲線 C は極方程式 $r = 2\cos\theta$ で定義されているとする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2011) $\boxed{6}$

(1) 曲線 C を直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表し，さらに図示せよ．

(2) 点 $(-1,\ 0)$ を通る傾き k の直線を考える．この直線が曲線 C と 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ．

(3) (2) のもとで，2 交点の中点の軌跡を求めよ．

標準 1.26 極方程式 $r = a\cos\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta\right.$ [illegible]$\left.\right)$ で与えら[illegible]を C_1 とする．ただし，a は正の定数である．このとき，次[illegible]に答[illegible]　(鹿児島大学 2008) $\boxed{6}$

(1) 曲線 C_1 上の点 P と極 O を結ぶ直線 OP の[illegible]上に PQ $= a$ となるように点 Q をとる．点 P が C_1 上を動く[illegible]めよ．

(2) (1) で求めた曲線 C_2 上の点 Q$(r_0,$[illegible]), [illegible]結ぶ直線[illegible]垂直な直線を l とする．直線 l の直交[illegible]$y)$ に関[illegible]方程[illegible]

(3) (2) で求めた直線 l は，点 Q に[illegible]なく常に点[illegible]を中心[illegible]が a の円に接するこ[illegible]証明せよ．

標準 1.27 [illegible]C_1 は直交座標に関する方[illegible]で[illegible]，曲線[illegible]極方程式で表[illegible]いる．

$$C_1 : \text{[illegible]}\ y^2 + 6x - 2y + \text{[illegible]}$$

$$C_2 : \text{[illegible]}\ \frac{1}{\text{[illegible]}2 - \sin\text{[illegible]}}$$

[illegible]，次の[illegible]に答[illegible]　(鹿児島大学 2007) $\boxed{6}$

(1) [illegible]変数[illegible]

(2) 曲[illegible]ど[illegible]線になるか[illegible]の概形もかけ．

(3) 円 C_1[illegible]線 C_2 に接する直線の方程式を求めよ．

標準 1.28 極方程式 $r = \dfrac{a}{2+\cos\theta}$ で与えれる2次曲線がある．ただし，a は正の定数とする．このとき次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2012) 6

(1) この2次曲線を直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表せ．

(2) (1) で求めた2次曲線を x 軸方向に $\dfrac{a}{3}$ だけ平行移動した2次曲線を C で表す．C を直交座標 x，y の方程式で表せ．また，この2次曲線 C は x 軸と2点A，Bで交わる．この2点A，Bの座標を求めよ．ただし，Bの x [illegible]正とする．

(3) (2) で求めた2次曲線 C 上の x 軸上にない点P$(\alpha,\ \beta)$[illegible]に下ろした垂線をPHとする．さらにPと x 軸に関[illegible]な点を[illegible]るとき，次の値は定数であることを証明せよ．

PH·[illegible] / AH·B[illegible]

標準 1.29 xy 平面において，2点 $F_1(a,\ a)$ [illegible]距離の積[illegible]となるような点Pの軌跡を C とする．[illegible] a [illegible]のとき，[illegible]の各問いに答えよ． ([illegible]) 10

(1) 直交座標 $(x,\ y)$ に関しての C の[illegible]程式を求め[illegible]

(2) 原点を極[illegible]軸の正の部分を始線とする極座[illegible]$\theta)$[illegible]極方程式を求[illegible]

(3) C [illegible]点を除[illegible]は，平面上の第1象限[illegible]象限を合わせた範囲に含[illegible]ことを[illegible]．

[illegible]Pが[illegible]限内[illegible]Pは点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ を中心とする半径 a の円の周[illegible]内部に[illegible]ことを[illegible]よ．

[illegible] 原点[illegible]中心と[illegible]の円 O と，[illegible]中心とし半径 b $(b<a)$ の円 C [illegible]ある[illegible]円 C が[illegible]ながら滑ることなく転がるときの円[illegible]点Pの[illegible]考える[illegible]A$(a,\ 0)$ をとる．点Pが点Aと重なるよう[illegible]内接させ[illegible]置から円 C が回転して $\angle \mathrm{AOC} = \theta$ の位置まで移動[illegible]Pの座標を $(x,\ y)$ とする．ただし，角度は弧度法で考える．このとき次[illegible]各問[illegible]えよ． (鹿児島大学 2004) 11

(1) Pの軌跡の方程式[illegible]媒介変数として表せ．

(2) $a = 4b$ のとき，P[illegible]跡の方程式を a，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ．

応用 1.31 点Oを原点，点Pを楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$ 上の点とする．x 軸の正の部分を始線として動径OPの表す角を θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点Pの y 座標を $\dfrac{a+b\sin\theta}{c+d\sin\theta}$ $(a, b, c, d$ は実数$)$ の形で表せ．(九工大 [情]2010) $\boxed{3}$

(2) 点Pにおける楕円の接線を l とする．直線 l の方程式を求めよ．

(3) 点Aの座標を $(0,\ 6)$ とする．点Aを (2) の直線 l に関して対[illegible]移動した点をQとする．点Qの座標を θ を用いて表せ．

応用 1.32 座標平面上に与えられた2点[illegible] A(a,[illegible]0) に対し，点Qを直線AP上にAから見てPと同じ側にAP·[illegible]満たすようにとる．以下の問いに答えよ．(九工大 [情]2009) $\boxed{3}$

(1) $a>0$ のとき x 軸上に点B$(b,\ 0)$ $(b \leqq 0$[illegible]とる．ただし，点Oは原点を表す．[illegible]めよ．

(2) 点Aが $a>0$ を満たしながら x [illegible]動す[illegible]き，[illegible]同一[illegible]の周上にある．この円の中心の座[illegible]径を求めよ．

(3) 点Qの y 座標の値が最大となる[illegible]きの点Qの座[illegible]求めよ．[illegible]のときの a の値を求[illegible]

応用 1.33 [illegible]を[illegible]し，半径1の円を C とす[illegible]次の[illegible]いに答えよ．

(長大 [医]2012) $\boxed{7}$

[illegible]線 $y=$ [illegible]点P([illegible]円 C に2本の接[illegible]引き，その接点をM，Nとする．[illegible]OPと[illegible]Qとする．点Qの座標を t を用いて表せ．ただ[illegible]は実数[illegible].

[illegible]が直線[illegible]上を[illegible]き，点Qの軌[illegible]求めよ．

応用 [illegible]を0で[illegible] C と[illegible]れぞれ s と t を媒介変数として

$$[illegible]\quad x=\frac{[illegible]}{s^2+c^2},\quad y=\frac{s}{s^2+c^2} \qquad D:\begin{cases} x=\dfrac{t}{t^2+d^2} \\ y=\dfrac{d}{t^2+d^2} \end{cases}$$

で与えられる曲線とする[illegible]のとき，次の各問に答えよ．(鹿児島大学 2014) $\boxed{6}$

(1) C と D は円から[illegible]除いた曲線になっている．それぞれの円を表す方程式と除かれる点を求[illegible]

(2) C と D の交点の座標を求めよ．

(3) C と D の交点における C の接線の方程式を求めよ．

応用 1.35 楕円 E : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ を考える．楕円 E 上の点を $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ とし，直線 l : $\dfrac{\cos\theta}{a}x+\dfrac{\sin\theta}{b}y=k$ が異なる２点 Q，R において楕円 E と交わるものとする．以下に答えよ． (九工大 [情]2003) $\boxed{6}$

(1) 実数 k のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 点 P と直線 l の距離を k と θ を用いて表せ．

(3) 点 Q，R の座標を k と θ を用いて表せ．

(4) 三角形 PQR の面積 $S(k)$ は θ によら[illegible]とを示せ．

(5) 三角形 PQR の面積 $S(k)$ の最大値を求[illegible]

応用 1.36 平面上の点 P の x 座標と y 座標が，[illegible]いて $\begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta \\ y=f(\theta)\sin\theta \end{cases}$ と表されている[illegible]$\leqq$[illegible]変化した[illegible]き，点 P が描く曲線を C とする．点 P を [illegible]し，$\mathrm{P}_1=$ [illegible] P_2 [illegible] $=\mathrm{P}(\pi)$ とおく．次の問い[illegible]答えよ． [illegible]2002) $\boxed{7}$

(1) 方程式 [illegible] $\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ [illegible]楕円[illegible]を通る[illegible]この[illegible] P_3 がこの楕円の内部[illegible]れる (ただし，楕円の上に[illegible]ための[illegible]を α のみを用いて表[illegible]

[illegible] P_2 に[illegible]曲線[illegible] l とする．l の方程式を求めよ．

[illegible] 次の[illegible]),（i[illegible]）を[illegible]円 D を考える．

[illegible]の軸[illegible]は x 軸[illegible]る．

[illegible]）D [illegible]1，P[illegible]

[illegible]2 にお[illegible]の接[illegible]であ[illegible]

こ[illegible]楕円 D の内[illegible]るかどうか判定せよ．

1.3　問題研究

1.3.1　2 次曲線の極方程式

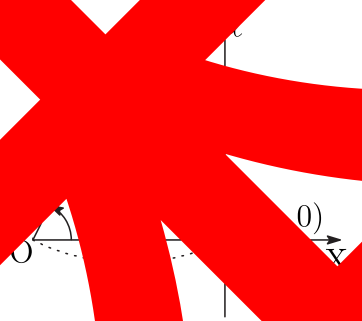
O を通らない直線 ℓ(準線) に，点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ から下ろした垂線を PH とするとき

$$e = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$$

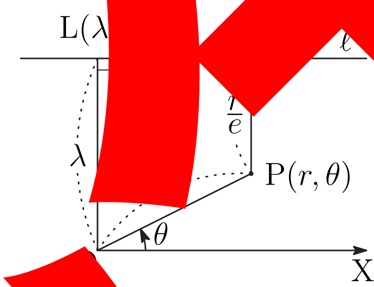
の値が一定であるような点 P の軌跡は，2 次曲線になる．
点 $\mathrm{L}(\lambda,\ 0)$ を通り，始線 OX に垂直な直線を　　する．
右の図において，L と H は ℓ 上にあるから

$$r\cos\theta + \frac{r}{e} = \lambda$$

ゆえに　　$r = \dfrac{e\lambda}{1+e\cos\theta}$　　$\cdots$①



同様に，点 $\mathrm{L}(\lambda,$　を通り，始線 OX　に平行な直線を　　する．
右の図におい　　　は ℓ 上にあるから



　　in θ

ゆ　　r
　　　　e sin

②　　の軌　　す極　　である．
　　極方程　　$-f($　　$r = f(\theta)$ は　　る．
し　　て　　のと　　おくと　　，①，② は，それぞれ次のように　　できる．

$$r \quad\quad \frac{e(-\ \ }{-\ e\cos(\theta+\pi)} = \frac{ed}{1-e\cos\theta} \qquad \cdots①'$$

$$r = \frac{e\lambda}{1+\sin\theta} \quad\quad \frac{e(-\lambda)}{-\ e\sin(\theta+\pi)} = \frac{ed}{1-e\sin\theta} \qquad \cdots②'$$

極方程式 ① を直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表すと

$$(1-e^2)x^2+y^2+2e^2\lambda x-e^2\lambda^2=0 \quad \cdots (*)$$

$(*)$ は，$e \neq 1$ のとき　$\dfrac{(1-e^2)^2}{e^2\lambda^2}\left(x+\dfrac{e^2\lambda}{1-e^2}\right)^2+\dfrac{1-e^2}{e^2\lambda^2}y^2=1$

i)　$0<e<1$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1-e^2}{e|\lambda|}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e|\lambda|}$ とおくと　[illegible]$\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

したがって，$(*)$ は λ の符号によって[illegible]ようにな[illegible]

$\lambda>0$ のとき　$\dfrac{(x+ea)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, [illegible]

中心 $(-ea,\ 0)$, [illegible]

$\lambda<0$ のとき　$\dfrac{(x-ea)^2}{a^2}$ [illegible],

中心 $(ea,$ [illegible]　準線 $x=$ [illegible] $\dfrac{a}{e}$

ii)　$e=1$ の[illegible]　$y^2=-2\lambda\left(x-\dfrac{\lambda}{2}\right)$

iii) [illegible]のと[illegible] $\dfrac{\sqrt{e^2-1}}{e|\lambda|}$ とお[illegible] $=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

した[illegible]，$(*)$[illegible]符号[illegible]て，次の[illegible]うになる．

λ[illegible]き [illegible] $-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,

[illegible]心[illegible] $=ea-\dfrac{a}{e}$

[illegible]$\dfrac{(x+ea)^2}{a^2}-$[illegible]$=1$,

[illegible]心 $(-ea,\ 0)$,　準線 $x=-ea+\dfrac{a}{e}$

これらの表す曲線は，e[illegible]値によって，次のような2次曲線に分類される．この e の値を離心率という[illegible]

[1]　$0<e<1$[illegible]　　O を焦点の1つとする楕円
[2]　$e=1$ のとき　　O を焦点，ℓ を準線とする放物線
[3]　$e>1$ のとき　　O を焦点の1つとする双曲線

同様に，極方程式②を直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表すと

$$x^2+(1-e^2)y^2+2e^2\lambda x-e^2\lambda^2=0 \quad \cdots(**)$$

$(**)$ は，$e\neq 1$ のとき　$\dfrac{1-e^2}{e^2\lambda^2}x^2+\dfrac{(1-e^2)^2}{e^2\lambda^2}\left(y+\dfrac{e^2\lambda}{1-e^2}\right)^2=1$

i) $0<e<1$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e|\lambda|}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{1-e^2}{e|\lambda|}$ とおくと　e [illegible] $\dfrac{\ \text{[illegible]}^2-a^2}{b}$

したがって，$(**)$ は λ の符号によって[illegible]のように[illegible]

$\lambda>0$ のとき　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y+ea)^2}{b^2}=1$ [illegible]

中心 $(0,-ea)$，　準[illegible]

$\lambda<0$ のとき　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-e\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$ [illegible]

中心 $(0,$ [illegible]　準線 $y=$ [illegible] $\dfrac{a}{e}$

ii) $e=1$ のと[illegible]は　$x^2=-2\lambda\left(y-\dfrac{\lambda}{2}\right)$

iii) [illegible]とき[illegible]　$\dfrac{1}{b}=\dfrac{e^2-1}{e|\lambda|}$ とお[illegible] $=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$

[illegible]したが[illegible] $(**)$ [illegible]って，次のようになる．

$\lambda>$ [illegible] $-\dfrac{x^2}{\text{[illegible]}}$ [illegible] $\dfrac{\text{[illegible]}-ea)^2}{b^2}=1$

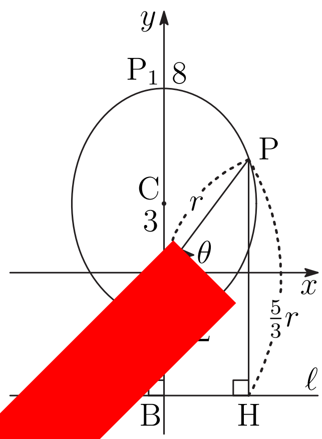
[illegible]，　準線 [illegible] $a-\dfrac{a}{e}$

[illegible] $-\dfrac{x^2}{a^2}+$ [illegible]

[illegible]心 $(0,-ea)$，　準線 $y=-ea+\dfrac{a}{e}$

補足

9 ページの 1.31 の楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$ の焦点は y 軸上にあるから（準線は y 軸に垂直），極方程式を次のようにおける．



$$r=\frac{\delta}{1+\varepsilon\sin\theta}$$

2 点 $\mathrm{P}_1\left(8,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{P}_2\left(2,\ \frac{3\pi}{2}\right)$ を通ることから

$$\delta=\frac{16}{5},\quad \varepsilon=-\frac{3}{5}\quad \text{ゆえに}\quad r=\frac{[illegible]}{5-[illegible]}$$

よって　$x=\dfrac{16\cos\theta}{5-3\sin\theta}$，$y=\dfrac{16\sin\theta}{5-3\,[illegible]}$

$(*)$，$(**)$ で示した楕円と双曲線の中心，[illegible] に平行移動した 2 次曲線は，次のようになる．

［1］ 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$a>b$ の [illegible] $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，焦点 $(\pm ea,\ 0)$，[illegible]（複[illegible]

[illegible]とき [illegible] a^2 [illegible]，焦点 $(0,\ \pm eb)$，[illegible] $y=\pm\dfrac{b}{e}$　（複号同順）

[illegible]物線 [illegible] $2\lambda x$

[illegible] 1，焦 [illegible] $\dfrac{[illegible]}{2},\ 0\Big)$，[illegible]線 $x=\dfrac{\lambda}{2}$

[illegible]物線 [illegible] $2\lambda y$

[illegible] 焦 [illegible] $-\dfrac{\lambda}{2}\Big)$，[illegible]

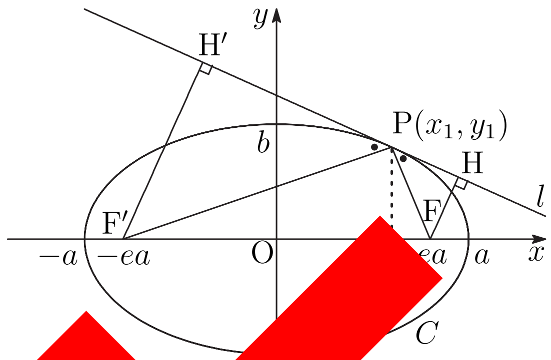
［3］ 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=$ [illegible]

$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$，[illegible]点 $(\pm ea,\ 0)$，準線 $x=\pm\dfrac{a}{e}$　（複号同順）

双曲線 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{[illegible]}{b^2}=$ [illegible]

$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$，焦点 $(0,\ \pm eb)$，準線 $y=\pm\dfrac{b}{e}$　（複号同順）

楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ について $(a > b)$，C 上の点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，焦点を $\mathrm{F}(ea,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-ea,\ 0)$，C の P における接線を l とする．F，F$'$ から l にそれぞれ垂線 FH，F$'$H$'$ を引くと，次が成り立つ．



$$\mathrm{FP} = a - ex_1$$
$$\mathrm{F'P} = a + ex_1$$
$$\angle\mathrm{FPH} = \angle\mathrm{F'PH'}$$

証明

$$\mathrm{FP}^2 = (x_1 - ea)^2 + \text{[illegible]} + {y_1}^2$$
$$= {x_1}^2 - 2e\text{[illegible]}\left(\text{[illegible]} - b^2 \over a^2\right)\text{[illegible]}\frac{b^2}{a^2}(a\text{[illegible]}$$
$$= a^2 - 2eax_1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}{x_1}^2$$
$$\text{[illegible]}a^2 - 2eax_1 + e^2{x_1}^2 = (a - \text{[illegible]}$$

[illegible]であ[illegible] $a - ex_1$　同様にし[illegible]$'\mathrm{P} = a + ex_1$

$(ea,\ 0)$[illegible]$(-ea,$[illegible]$x + \dfrac{y_1}{b^2}y - 1 = 0$ までの距離は，それぞれ

$$\mathrm{F}\text{[illegible]}\frac{1}{a^2}ea\text{[illegible]} = \frac{a\text{[illegible]}}{\sqrt{x_1\text{[illegible]}}} = \frac{\mathrm{FP}}{\sqrt{{x_1}^2 + \left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}$$

$$\text{[illegible]}-ea) - 1\text{[illegible]}\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2 = \frac{\text{[illegible]} + ex_1}{\sqrt{{x_1}^2 + \left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}} = \frac{\mathrm{F'P}}{\sqrt{{x_1}^2 + \left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}$$

上の 2 式から　$\dfrac{\mathrm{F}\text{[illegible]}\mathrm{H}'}{\mathrm{F}\text{[illegible]}'\mathrm{P}}$　ゆえに　$\angle\mathrm{FPH} = \angle\mathrm{F'PH'}$　**証終**

第 2 章　複素数平面

2.1　複素数平面

□□ **2.1** 複素数 z_1，z_2 に対して $|z_1||z_2| \geqq$ [illegible] $\overline{z_2}$ [illegible]立つことを示せ．ただし，複素数 z に対して $\overline{z}$ は z の共役複素数であ[illegible]
([illegible]岡教育大学 2003) 5

基本 2.2 α，β，γ はいずれも 0 でない複素数[illegible]
複素数 z に対して，$\overline{z}$ は z の共役複素数[illegible]
([illegible]島大[illegible]) 7

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が正の実数ならば，$|\alpha+\beta|$[illegible]$|+|\beta|$ が成[illegible]ことを[illegible]

(2) $\gamma+\overline{\gamma}=2$[illegible]り立つならば，$\gamma$ は正の実数[illegible]こと[illegible]

(3) $|\alpha+$[illegible]成り立つならば，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ は正[illegible]ことを[illegible]

標準[illegible]に答[illegible]
(九工大 [工]2004) 2

(1) [illegible]等式 α^2[illegible]$+4=$[illegible]素数 α について，α^3 の値を求めよ．

(2) (1)[illegible]が α^2[illegible]$+\dfrac{k}{\alpha}$ を[illegible]ときの[illegible]を求めよ．

[illegible]で求[illegible]数 k [illegible]程式 $z^2=3$[illegible]解け．

2.2　複[illegible]形式と乗[illegible]法

□□ **2.4** $|z+$[illegible]$|z-$[illegible]6 を満たし，偏角が 45° である複素数 z を求めよ．
(福岡教育大学 2002) 5

基本 2.5　0でない複素数 z の極形式を $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とするとき，次の複素数を極形式で表せ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とし，また z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表す．

(佐賀大学 2016) $\boxed{3}$

(1) $-\overline{z}$

(2) $\dfrac{1}{z^2}$

(3) $z - |z|$

基本 2.6　点Oを原点とする複素数平面上で，2つの複素数 [illegible] 表す点をそれぞれA，Bとする．α，β が $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \dfrac{\beta}{\alpha} + 1$ [illegible] 満たすと [illegible] の各問に答えよ．

(1) △OABは正三角形であることを示せ．　(宮崎大学 2003) $\boxed{6}$

(2) 複素数 $1+i$ を表す点をCとする．正三 [illegible] △OABが直線OCに関して対称であ [illegible] β を求 [illegible] α の実部は β の実部より大きく， [illegible] と [illegible]

基本 2.7　0でない複素数 z_1，z_2 の [illegible] r_1，r_2 と [illegible]，z_2 [illegible] ぞれ θ_1，θ_2 とする．ただし，$\theta_2 > \theta_1$ とする．[illegible] の問いに答え [illegible]　(福岡 [illegible] 2004) $\boxed{3}$

(1) 複素数平 [illegible] z_1，z_2，$z_1 + z_2$ を頂点とす [illegible] め [illegible] 平行四辺 [illegible] 積 [illegible] r_2，θ_1，θ_2 で表せ．

(2) [illegible]

$$[illegible]\ |z_1|^2|z_2|^2 - \frac{(z_1\overline{z_2}\ [illegible])^2}{4}$$

が成 [illegible] ことを [illegible]．た [illegible] 複素数 z に対して $\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．

[illegible] 方程式 [illegible] $(12 -$ [illegible] $+ (9-6a)x$ [illegible] 0 は1つの実数解と2つの虚数 [illegible] つ．[illegible] a は実 [illegible] する．次の [illegible] 答えよ．(長崎大学 2004) $\boxed{4}$

(1) [illegible] 式の左 [illegible] $x+3$ を [illegible] を示し，実数解と a の値の範囲を求め [illegible]

(2) 2つの虚 [illegible] と r [illegible] $+ i\sin\theta)$ $(r > 0,\ 0^\circ < \theta < 180^\circ)$ と表す．r を求め，$\cos\theta$，$\sin\theta$ を a で表せ．

(3) 複素数平面内で3つ [illegible] の表す点が正三角形をなすとする．θ と a の値を求めよ．

標準 2.9 実数 a $(a > 0)$ と実数 t $(t \geqq 0)$ に対して，つぎのように表される複素数 $z(t)$ を考える．

$$z(t) = \frac{1}{2 - 2t^2 - \sqrt{a}\,ti}$$

ただし，i は虚数単位とする．複素数平面上において，原点を O とし，複素数 $z(t)$ と $z(2t)$ が表す点をそれぞれ A，B とする．以下に答えよ．　(九工大 [情]2005) $\boxed{2}$

(1) $z(t)$ の実部と虚部をそれぞれ a と t を用いて表せ．

(2) $a = 2$ のとき，$\angle$AOB が直角となる t を求めよ．

(3) $\angle$AOB が直角となる t が存在する a [illegible] を求め[illegible]

2.3　ド・モアブルの定理

□□ **2.10** $z = 1 + i$ のとき，z^{4n+1} を求[illegible]とする．
[illegible]球大[illegible] $\boxed{5}$

□□ **2.11** z を $z^2 + z + 1 = 0$ を満た[illegible]複素数とする[illegible] $z^3 =$ [illegible]つことを示し，さらに [illegible] $\frac{1}{[illegible] - z^{2n})}$ の値を求めよ．ただし[illegible]は虚[illegible]然数とする．
[illegible]球大[illegible] $\boxed{5}$

基本 [illegible]数 a [illegible]る 2 次方程式 $x^2 + a$[illegible]$= 0$ は異なる 2 つの虚数解 α [illegible]持ち，[illegible]$(\sqrt{3}$ [illegible]立しているとす[illegible]のとき，次の各問に答え[illegible]
(宮崎大学 2004) $\boxed{7}$

[illegible]示し[illegible]偏角[illegible]よ．

[illegible] α^{2n} [illegible]とな[illegible]然数とする[illegible]のとき，α^{2n} の値を求めよ．

基本 [illegible]式 z^5 [illegible]解 z に[illegible]答えよ．　(佐賀大学 2003) $\boxed{11}$

(1) z を[illegible]

(2) $z^5 - 1 = ($[illegible]$- 1)($[illegible]$+ z^2 + z + 1)$ を用いて $z + \dfrac{1}{z}$ の値を求めよ．

(3) $\cos 144^\circ$ の値を求め[illegible]

基本 2.14 次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2016) $\boxed{7}$

(1) 複素数 z，w について，次の関係が成立することを示せ．ただし複素数 α に対し，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す．

(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

(2) 方程式 $z^2 - z + 1 = 0$ の 2 つの解を α，β とする．次の各[illegible]答えよ．

(a) α，β を求めよ．さらにそれらを極[illegible]式で表せ．

(b) $\alpha^{100} + \beta^{100}$ を求めよ．

基本 2.15 i を虚数単位とし，$z = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin$[illegible]問いに答えよ．

(1) z^5 および $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ の値を[illegible] ([illegible])

(2) $t = z + \dfrac{1}{z}$ とおく．$t^2 + t$ の値を求[illegible]

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ．

(4) 半径 1 の円[illegible]接する正五角形の 1 辺の長さの[illegible]求め[illegible]

基本 2.1[illegible]数 z [illegible] $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，虚部は正で $|z|$ [illegible]ある[illegible]次の問い[illegible]答えよ．

[illegible] $+\dfrac{1}{z}\Big)^2$ [illegible] $+\dfrac{1}{}$ [illegible]求めよ． (福岡教育大学 2016) $\boxed{3}$

[illegible] $1 +$ [illegible] $+ z^3$ [illegible]値を[illegible]

[illegible]角 θ を[illegible]よ．た[illegible] $\leqq \theta < 2\pi$ と[illegible]

基[illegible] z につ[illegible]程式を解[illegible]解を複素数平面上に図示せよ．

$$(z - \text{[illegible]} \sqrt{3}\,i$$

ただし，i は[illegible]位[illegible] (佐賀大学 2002) $\boxed{9}$

基本 2.18 0 でない複素[illegible]ついて，次の問いに答えよ． (佐賀大学 2001) $\boxed{10}$

(1) z の絶対値を r，[illegible] θ とするとき，$z + \dfrac{1}{z}$ の実部と虚部を，r と θ を用いて表せ．

(2) n を正の整数とする．$z + \dfrac{1}{z}$ が実数または純虚数ならば，$z^n + \dfrac{1}{z^n}$ も実数または純虚数であることを証明せよ．

基本 2.19 2つの複素数は α，β は

$$|\alpha| = 1,\quad |\beta| = \sqrt{10},\quad \frac{\beta}{\alpha} = 3 + i$$

を満たしているとする．$\theta = \arg\dfrac{\beta}{\alpha}$ $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$ とおくとき，次の各問に答えよ．

(宮崎大学 2002) $\boxed{6}$

(1) 複素数 α^2，β^2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ P，Q[illegible]点を O とするとき，△POQ の面積を求めよ．

(2) $30^\circ < 2\theta < 45^\circ$ であることを示せ．

(3) $n\theta > 90^\circ$ となる最小の自然数 n を求め[illegible]

標準 2.20 複素数平面上に複素数 $z = \cos\theta + i$[illegible]
$\beta = z - 1$ とおく．

([illegible]) [illegible]

(1) $|\,\beta\,| = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ を示せ．

(2) $\arg\beta = \dfrac{\theta}{2} +$ [illegible]$^\circ$ を示せ．ただし，$0^\circ \leqq \arg\beta <$ [illegible]とする．

(3) $\theta = 60^\circ$ [illegible]つの複素数 $\alpha^m\beta^n$ $(m,\ n = 1,$ [illegible]．そ
の最[illegible]$n)$ のすべてを決定せよ．

標準 [illegible]$< \theta$ [illegible]に対して，$\alpha = 2(\mathrm{c}$[illegible]$\sin\theta)$ とする．ただし，i
は[illegible]位で[illegible]$= 1$[illegible]対して

$$\cdots - 2\alpha^n \cdots$$

[illegible]下の[illegible]答え[illegible]

(熊大 [理]2016) $\boxed{3}$

(1) [illegible]π[illegible]るとき[illegible]表せ．

(2) $\theta =$ [illegible] $\displaystyle\sum^{n} |z_k| > 5$[illegible]最小の n を求めよ．

(3) z_{1000} が実[illegible]とな[illegible] θ の値の個数を求めよ．

標準 2.22 複素数 $z = x$[illegible]x，y は実数) について，次の問いに答えよ．

(長崎大学 2001) $\boxed{6}$

(1) z^4 が 0 でない実[illegible]るとき，z の偏角 α を求めよ．$(0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ)$

(2) $(z-1)^3$ が純虚数であるとき，$z-1$ の偏角 β を求めよ．$(0^\circ \leqq \beta < 360^\circ)$

(3) $x > 0$，$y > 0$ で z^4 が実数，$(z-1)^3$ が純虚数となるときの z^4 をすべて求めよ．

応用 2.23 以下の問いに答えよ. (九大 [理]2016) 5

(1) θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数, i を虚数単位とし, z を $z = \cos\theta + i\sin\theta$ で表される複素数とする. このとき, 整数 n に対して次の式を証明せよ.

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) 次の方程式を満たす実数 x $(0 \leqq x < 2\pi)$ を求めよ.

$\cos x + \cos$ [illegible] $\cos 3x =$ [illegible]

(3) 次の式を証明せよ.

$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \mathrm{si}$[illegible]

応用 2.24 方程式 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ の解で[illegible]と[illegible]のものを[illegible]実部が負で虚部が正のものを x_2, 実部と[illegible]もに負[illegible]のを[illegible]部[illegible]部が負のものを x_4 とする. ([illegible]015) 7

(1) この方程式[illegible]きなさい.

(2) ${x_1}^k$ (k[illegible]を計算しなさい.

(3) 与[illegible]の解[illegible]数 n に対して, ${x_i}^{4n} +$ [illegible]1 $(i = 1, 2, 3, 4)$ を求めな

[illegible]4 [illegible]数と[illegible]形

[illegible]5 複素[illegible]面上の[illegible]), B(β), C([illegible]三角形の頂点で, α [illegible] $\sqrt{}$[illegible]$(1 -$ [illegible]$(1+i)^3$ [illegible]き, γ の値を求めよ. ただし, i は虚[illegible]する (福岡教育大学 2001) 5

基本 2.26 [illegible]す実数であ[illegible]α, β を方程式 $x^2 - 2x + a = 0$ の 2 つの解とし, 複素数[illegible]面上[illegible]を A(α), O(0), B(β) とする. (大分大学 2005) 3

(1) $\angle\mathrm{AOB} = 180^\circ$ とな[illegible]うな a の範囲を求めなさい.

(2) $\angle\mathrm{AOB} = 30^\circ$ とな[illegible]な a の値を求めなさい.

基本 2.27 整式 $F(x)=x^3-x^2+(k^2-1)x+k^2+1$ について，次の各問に答えよ．ただし，$k>0$ とする．　(宮崎大学 2001) 7

(1) $F(x)$ は $x+1$ で割り切れることを示せ．また，$F(x)=0$ の 2 つの虚数解を求めよ．

(2) 複素数平面において，$F(x)=0$ の 2 つの虚数解を表す点を P，Q とし，実数解を表す点を R とする．このとき，次の (A)，(B) に答えよ．

(A) 3 点 P，Q，R を通る円の方程式を複素数 z を用い…

(B) $\angle\mathrm{PRQ}=45^\circ$ であるとき，k の値…めよ．

基本 2.28 複素数 α，β を $\alpha=1+2i$，$\beta=$… …の問いに答えよ．

(1) $|\alpha-\overline{\beta}|$ の値を求めよ．ただし，$\overline{\beta}$ は β の共…

(2) 次の値を最小にする実数 x を求めよ．

$$|\ldots|x-\ldots$$

基本 2.29 原点を O とする複素数平…に，O と異な… A(α)，… 2 点 O，A を通る直線 l があ… 次に答えよ．　(…03) 2

(1) 直線 l… と対称な点を P$'(z')$ とする… $\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}}\overline{z}$ が成…ことを…

(2) …$3+i$，β… $\gamma=-8+7i$ を…をそれぞれ B，C とおく．

(ア) 点…直線 l…な点を B$'(\beta')$ とする．β' を求めよ．

(イ) …OA…Q(w)…て，∠…∠CQO が成り立つときの w を求めよ．

基本 …平面…$+i$)，…) とするとき，次の問いに答えなさい．　(大分大学 2003) 6

(1) 線分 A…正三角形 AB…頂点 C(γ) を表す複素数 γ を求めなさい．

(2) 点 P(z) が…分 AB…A から B まで動く．このとき複素数 iz^2 が表す点は，複素数平面上でどの…図形をえがくか図示しなさい．

基本 2.31 次に答えよ． (九工大 [工]2005) $\boxed{2}$

(1) 複素数 $z = x + yi$ (x，y は実数) が

$$(\sqrt{3} - i)z + (\sqrt{3} + i)\overline{z} = 2 \quad \cdots (*)$$

をみたすとき，x と y の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2) $|z + i| \geqq |2z - i|$ および $(*)$ をみたす複素数 z の表す点が[illegible]形 D を，複素数平面上に図示せよ．

(3) 複素数 z の表す点が (2) で求めた D [illegible]くとき [illegible] $- 1 - 2i|$ のとる値の最大値と最小値を求めよ．

基本 2.32 複素数 z と w の間に $w = (1 + \sqrt{3}\,i)$[illegible]
答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $z \neq 0$ のとき，複素数平面の原点[illegible] w [illegible]角形は[illegible]形の三角形か．

(2) 複素数平面上の 2 点 $\sqrt{3}\,i$ と -3[illegible]る直線の上[illegible]が動く[illegible]描く図形の概形と w [illegible]たす方程式を求めよ．

(3) z が $\sqrt{3}$[illegible]る半径 $\sqrt{3}$ の円周上を動く[illegible]図形[illegible]と w が満[illegible]程式[illegible]よ．

基本 [illegible] z_1，[illegible]素数[illegible] z_2，$z_1 \neq 1$，$z_2 \neq$ [illegible]び $\arg(z_1 - 1) = \arg(z_2 - 1)$ [illegible]すもの[illegible]る．こ[illegible]問いに答えよ． (鹿児島大学 2004) $\boxed{8}$

(1) 複[illegible]面上[illegible]て，2[illegible] z_2 を結[illegible] l は，点 1 を通ることを示せ．

(2) [illegible] $z_1 - 1)$ [illegible]$g(z_2$ [illegible]$rg(i - 1)$ であ[illegible]き，(1) の直線 l の方程式を求[illegible]こ[illegible]示せ[illegible]は虚数単[illegible]る．

(3) [illegible] z_2 が (2)[illegible]た直[illegible] $\dfrac{z_1}{|z_1|}$，$-\dfrac{z_2}{|z_2|}$ が 3 次方程式 $z^3 - 1 = 0$ の[illegible]を求めよ．

基本 2.34 複素[illegible]平面[illegible]点を中心とし半径 1 の円周 C 上の点 $\mathrm{P}(z)$ (z の偏角を θ とする) をとる．点 P を[illegible]$+ i)$ を中心として，角 α だけ回転させた点を $\mathrm{Q}(w)$ とする．このとき，次の各[illegible]答えよ． (宮崎大学 2005) $\boxed{8}$

(1) 点 P が C 上を動[illegible]，点 Q はある点 $\mathrm{B}(a + bi)$ を中心とする円周上を動くことを示し，そ[illegible]を求めよ．ただし，a，b は実数とする．

(2) (1) において，$b = 1$ のとき，a の値を求めよ．

標準 2.35 α を 0 でない複素数とし，k，m は互いに異なる正の実数とする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2005) $\boxed{7}$

(1) 複素数平面上において，複素数 $k^2\alpha$ を表す点を A とし，複素数 $m^2\alpha$ を表す点を B とする．線分 AB を $k:m$ に内分する点を表す複素数を γ，$k:m$ に外分する点を表す複素数を δ とする．このとき，γ と δ それぞれを k，m，α を用いて表せ．

(2) 複素数 z が $m|z-k^2\alpha| = k|z-m^2\alpha|$ を満たすとき，$|z|$ を [illegible] $|\alpha|$ を用いて表せ．

(3) z は γ，δ と異なる複素数で，$m|z-$ [illegible] $z-$ [illegible] たすものとする．このとき，$\dfrac{\gamma-z}{\delta-z}$ は純虚数であることを証 [illegible]

標準 2.36 複素数 z の方程式 $z^3+i=z^2+iz$ [illegible]
θ (ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$) の小さい順に α [illegible] 平面上で，[illegible] β，γ の表す点をそれぞれ A，B，C とし，[illegible] に関 [illegible] 点を [illegible] AB に関して C と対称な点を E とする [illegible] き，次の [illegible] に答 [illegible]

(1) α，β，γ を [illegible] yi (x，y は実数) の形でそれぞ [illegible]．　([illegible]2016) $\boxed{2}$

(2) $\triangle$ABC [illegible] めよ．

(3) 複素 [illegible] 上 [illegible] A，D，E を通る円周上の [illegible] 複素数 z も，[illegible] $+t\bar{z}$ [illegible] たすような複素数の [illegible] t，u を求めよ．

[illegible] 37 虚 [illegible] i と [illegible] 数 z に対し，$\alpha = z\bar{z}-\bar{z}i+zi+1$，$w = i+\dfrac{1}{z+i}$ [illegible] くと [illegible] 下に答 [illegible]　(九工大 [情]2002) $\boxed{2}$

[illegible] 正の実 [illegible] ること [illegible] せ．

[illegible] $i+1$ [illegible] 表せ．

(3) [illegible] となる [illegible] z の集 [illegible] 上に図示せよ．

標準 2.38 [illegible] 複素数平面において，点 z が原点を中心とする半径 r の円周上を動くと [illegible]，$w=$ [illegible] を満たす点 w が描く図形を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．　(福岡教育大学 2001) $\boxed{2}$

標準 2.39 複素数平面上において，3 つの複素数 z，u，w を表す点をそれぞれ $\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(u)$，$\mathrm{R}(w)$ とする．以下に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(九工大 [情]2003) $\boxed{3}$

(1) 点 $\mathrm{P}(z)$ が，点 $1+i$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，$u = \dfrac{z+(1-i)}{2}$ で表される点 $\mathrm{Q}(u)$ が描く図形を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ が，点 $1+i$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき [illegible] $\dfrac{4\{z-(1+i)\}}{z-(2+i)}$ で表される点 $\mathrm{R}(w)$ が描く図形を求め [illegible] ただし $r \neq$ [illegible]．

標準 2.40 次の各問いに答えよ．ただし，[illegible]．

[illegible]

(1) 方程式 $z^4 = -1$ を解け．

(2) α を方程式 $z^4 = -1$ の解の一つとする [illegible] $|z-\beta| = \sqrt{2}|z-\alpha|$ を満たす点 z 全 [illegible] 円 C を描く [illegible] き，複素数 β を α で表せ．

(3) 点 z が (2) の円 C 上を動くと [illegible] と z を結 [illegible] 分の中 [illegible] ような図形を描くか．

標準 2.41 複 [illegible] の点 z が $|z+1| = |2z-1|$ [illegible] とき [illegible] 問いに答えよ [illegible]

(長崎大学 2 [illegible] 02) $\boxed{6}$

(1) [illegible] どの [illegible] 図 [illegible] くか．

(2) [illegible] -1 の [illegible] を θ と [illegible] $^2 - 4z|$ を $\cos\theta$ を用いて表せ．

(3) $|z^2$ [illegible] が最大 [illegible] z の [illegible] 大値を求 [illegible]．

[illegible] i を [illegible] 位とす [illegible] 次の各問に [illegible]．

(鹿児島大学 2001) $\boxed{7}$

(1) [illegible] に対し [illegible] $(z-2)$ [illegible] とき，複素数平面において点 z はどの [illegible] か．

(2) (1) で [illegible] の原点 O，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ が正三角形の頂点をなすとき，複素数 α，[illegible] を求 [illegible] ただし，$0^\circ \leqq \arg\alpha < \arg\beta < 360^\circ$ とし，$\arg z$ は z の偏角を表す．

標準 2.43 1 の 3 乗根のうち，実数でないものの 1 つを α とするとき，複素数平面上の 3 点 A(α)，B(β)，C(α^2) を頂点する $\triangle$ABC の重心が $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ で表される．

(1) 点 B を表す複素数 β を求めなさい．　(大分大学 2002) $\boxed{3}$

(2) $\triangle$ABC の外接円の周上の点を表す複素数を z とするとき，z の満たす式を求めなさい．

(3) z が (2) で求めた式を満たすとき，$w = \dfrac{1}{z}$ を満たす点 w の [illegible] 図形を求めなさい．

標準 2.44 複素数平面上において，次の各 [illegible] 形を表すかを答えよ．
(鹿児島大学 2003) $\boxed{7}$

(1) 複素数 z が $|z| = 1$ および $z \neq 1$ を満た [illegible]

(2) 複素数 z が $|z| = 1$ を満たすとき [illegible] $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \cdots}$ [illegible] 体．

(3) 複素数 z が $|z| = 1$ および $0^\circ <$ [illegible] $z < 90^\circ$ を満 [illegible] とき，[illegible] が表す点の全体 [illegible]

標準 2.45 [illegible] 数 [illegible] て，複素数平面上で式 [illegible] + [illegible] $| = a$ を満 [illegible] す複素数 z の [illegible] 全体 [illegible] を C_1 とする．また，[illegible] 数 z の表す点が図形 C_1 全体の [illegible] 動くと [illegible] $w =$ [illegible] たす複素数 w の [illegible] 全体からなる図形を C_2 と [illegible] 2 つの [illegible] C_1 と [illegible] 個数を求めよ．　(佐賀大学 2005) $\boxed{8}$

標 [illegible] $< a <$ [illegible] る定 [illegible] 対し，複素 [illegible] 面上で $z = t + ai$ (t は実数全体 [illegible] を表す [illegible] ℓ とす [illegible] だし，i は虚数 [illegible] である．　(九大 [文]2003) $\boxed{7}$

(1) [illegible] ℓ 上を [illegible] とき [illegible] 表す [illegible] を図示せよ．

(2) 直 [illegible] 原 [illegible] 心に角 θ だ [illegible] した直線を m とする．m と (1) で求めた軌 [illegible] 数を $\sin\theta$ の [illegible] 場合分けして求めよ．

標準 2.47 t を実数とするとき，2 次方程式

$$z^2 + tz + t = 0$$

について，次の問いに答えよ．　(九大 [理]2005) $\boxed{3}$

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ．

(2) (1) の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す．[illegible]で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が[illegible]く図形 C を[illegible]示せよ．

(3) 複素数平面上で，点 z が (2) の図形[illegible]くと[illegible]

[illegible]

で表される点 w が動く図形を求め，図[illegible]

応用 2.48 複素数 z に関する等式

$$|z| + |[illegible]| = k \quad \cdots [illegible]$$

がある．$z = \frac{1}{[illegible]}$ [illegible] $(*)$ をみたしているとき，次に[illegible]よ．　[illegible]02) $\boxed{3}$

(1) k を[illegible]

(2) 複[illegible] $= \alpha$ [illegible]をみたし，偏角が 60° [illegible]．α を求めよ．

(3) [illegible] (2) で[illegible]複素[illegible]．$\beta - \alpha$ が正の実[illegible]なるような複素数 $z = \beta$ は等式 ([illegible]たさ[illegible]

(4) 複[illegible]面にお[illegible]，原点[illegible] (2) で[illegible] α の表す点を A，α と異なり等[illegible]をみた[illegible]素数 z [illegible]表す点を B [illegible] ∠BAO は 120° である．β を求めよ．

応用 [illegible]数平面[illegible]点 z を[illegible]　(九大 [理]2001) $\boxed{4}$

(1) 実数[illegible]が $|b|^2 - ac$ [illegible]たすとき

$$az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$$

をみたす点 z は a [illegible]とき，どのような図形を描くか．ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す[illegible]

(2) 0 でない複素数[illegible]素数平面上の異なる 2 点 p，q に対して

$$d(z - p)(\overline{z} - \overline{q}) = \overline{d}(z - q)(\overline{z} - \overline{p})$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか．

応用 2.50 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円 C 上に相異なる 3 点 z_1，z_2，z_3 をとる．次の問いに答えよ． (九大 [理]2002) $\boxed{5}$

(1) $w_1 = z_1 + z_2 + z_3$ とおく．点 w_1 は 3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ．ここで三角形の**垂心**とは，各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり，これら 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている．

(2) $w_2 = -\overline{z}_1 z_2 z_3$ とおく．$w_2 \neq z_1$ のとき，2 点 z_2，z_3 を通る[illegible]に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と[illegible]わる点は w_2 [illegible]ことを示せ．ここで $\overline{z}_1$ は z_1 に共役な複素数である．

(3) 2 点 z_2，z_3 を通る直線とこの直線上に点[illegible]垂線との交点は，点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の中点であることを示[illegible]と w_2 の中点は w_1 と解釈する．

2.5　問題研究

2.5.1　トレミーの定理

複素数平面上に 4 点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) をとる．このとき次式が成り立つ．

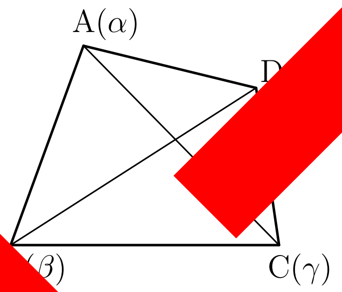
$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)=(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)$$

したがって

$$|\alpha-\beta||\gamma-\delta|+|\alpha-\delta| \text{[illegible]} -\gamma| \geqq |\alpha- \text{[illegible]}|$$

よって，次の定理 (トレミーの定理) が成り [illegible]

$$\mathrm{AB{\cdot}CD}+\mathrm{AD{\cdot}BC} \geqq \mathrm{AC{\cdot}BD} \text{ [illegible]}$$



とくに，(*) [illegible] するとき，正の実数 k を用 [illegible]

$$(\alpha- \text{[illegible]} k(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)$$

ゆ [illegible]

[illegible]たが [illegible] $\arg$ [illegible] $+\arg$ [illegible] $=\pi$

[illegible] $+\angle$ [illegible]

す [illegible] DAB [illegible]

よって [illegible]，B [illegible] が同一 [illegible] きに限る．

第 3 章　関数

3.1　関数

□□ **3.1** 関数

$$y = \frac{e^x - [illegible]}{e^x + e^{-[illegible]}}$$

の増減を調べ，y のとり得る値の範囲を求め[illegible]

(長崎大学 [illegible]16) 5

応用 3.2 すべての正の実数 x に対[illegible]された[illegible]数 [illegible] (b) を満たすものとする．

(a) すべての正[illegible] x，y に対して　$f(xy) = f(x)$[illegible])

(b) すべて[illegible]して　$f(n) < f(n+1)$

この関[illegible]につ[illegible]問いに答えよ．　(長大 [医]2009) 8

[illegible]を正の[illegible]とする[illegible]値を求めよ．

$$[illegible] f(x) + f[illegible]$$

[illegible] a [illegible]満たす[illegible]るとき，次[illegible]式を証明せよ．

(3) a，b を[illegible]たす有理数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$f(a) < f(b)$$

(4) a，b が $0 < a < b$ [illegible]たす実数でも (3) の不等式が成り立つことを用いて，正の実数 x，y に対[illegible]次の不等式を証明せよ．

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

発展 3.3　区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとは，

$$a \leqq x \leqq b \text{ ならば，}\quad a \leqq f(x) \leqq b$$

が成り立つこととする．$f(x) = 4x(1-x)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 区間 $[0,\ 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変であることを示せ．　(九大 [理]2006) $\boxed{5}$

(2) $0 < a < b < 1$ とする．このとき，区間 $[a,\ b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではないことを示せ．

第 4 章　極限

4.1　数列の極限

□□ **4.1**　数列 $\{a_n\}$ において，a_n は小数第 [illegible] 位までの数字が 0 で小数第 $(n+1)$ 位から小数第 $2n$ 位までの数字が [illegible] $(2n+1)$ 以降の数字が 0 である実数とする．ただし，$0 < a_n < 1$ $(n =$ [illegible] を，$b_n = 10^n a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める． [illegible]

(1)　b_1，b_2，b_3 を求め，数列 $\{b_n\}$ の [illegible]

(2)　$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく．s_n を求め [illegible]

(3)　$\lim_{n\to\infty} s_n$ [illegible]

□□ **4** [illegible] 関係 [illegible] められる数列 $\{a_n\}$ に [illegible]，一般項 a_n と $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め [illegible]

(長崎大学 2015) $\boxed{5}$

$$\begin{cases} [illegible] \\ [illegible]_{+1} - ([illegible])a_n = 1 \quad ([illegible], 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

□ [illegible] $|c| < \frac{1}{[illegible]}$ [illegible] 数とする [illegible] き，

$$a_{n+1} = 2 [illegible] \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定めら [illegible] る数 [illegible] について $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{3}$ が成立するような c の値を求めよ．

(福岡教育大学 2006) $\boxed{1}$

基本 4.4 $0 < p < 1$ とする．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + pa_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2016) $\boxed{1}$

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

基本 4.5 点 $(r,\ 0)$ を中心とする半径 r の[illegible]点のうち原点でないほうを P_0 とする．原点 O と点 P_0 の中点を P_1 と[illegible]を通り y 軸に接する円の面積を S_1 とする．さらに 2 以上の自然数[illegible]点を P_n とし，原点 O と点 P_n を通り y 軸に[illegible]とするとき[illegible]を求めよ．　([illegible]育大[illegible]) $\boxed{1}$

基本 4.6 等差数列 $\{a_n\}$ は，$a_5 = 14$，[illegible]$_{10} = 29$ を満[illegible]する．[illegible]，次の問いに答えよ．　([illegible]09) $\boxed{1}$

(1) 一般項[illegible]

(2) $\sum$[illegible]を求[illegible]

[illegible]

$\sum\limits_{k=1}$[illegible]を求め[illegible]

[illegible]$^{-a_k}$ お[illegible]$\sum\limits_{k=1}$[illegible]求めよ．

基本[illegible]の数列[illegible] $\{b_n\}$ [illegible]1 および

$$[illegible]_{+1} = 2a_n + [illegible] \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$[illegible] = 2a_n + 3b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められているとき，[illegible]各問に答えよ．　(宮崎大学 2014) $\boxed{7}$

(1) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta$[illegible]$- \alpha a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす定数 α，β の組を 2 組求めよ．

(2) a_n を，n を用い[illegible]せ．

(3) 極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ を求めよ．

標準 4.8 $a_n = \dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(佐賀大学 2013) $\boxed{2}$

(1) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ のとき，等式 $\dfrac{1}{2}\tan\theta = \dfrac{1}{2\tan\theta} - \dfrac{1}{\tan 2\theta}$ を示せ．

(2) (1) を用いて，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の和を求めよ．

標準 4.9 a，b を $a > b > 0$ を満たす定数と[illegible]

$$\begin{cases} a_1 = a, & a_{n+1} = {a_n}^2 + {b_n}^2 \\ b_1 = b, & b_{n+1} = 2a_nb_n \end{cases}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える[illegible] (長崎大学 [illegible]0) $\boxed{5}$

(1) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_n + b_n$ $(n$ [illegible]$\cdots)$ によ[illegible]義す[illegible]般項 c_n を a，b を用いて表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$[illegible]の一般項 a_n，b_n を a，b を用い[illegible]せ．

(3) 極限値[illegible] a_n [illegible]するかどうか調べ，存在[illegible]の値を[illegible]．

(4) [illegible]数 $\displaystyle\sum^{\infty}$[illegible]とき，$a + b < 1$ が[illegible]つことを証明せよ．

[illegible]**4.10** [illegible]，$t >$[illegible]る．[illegible]からなる[illegible]つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は初項と第[illegible]項が[illegible]$= s$[illegible]$b_2 = t$[illegible]，すべて[illegible]数 n に対して

$$a \text{[illegible]} + a_n, \quad b_{n+}\text{[illegible]}_{n+1}b_n$$

をみた[illegible]．次[illegible]よ． (九工大 [工]2016) $\boxed{2}$

(1) a_3，[illegible]を用いて[illegible]

(2) 自然数 n[illegible]し[illegible]$= a_{n+1} - a_n$ とおく．数列 $\{c_n\}$ は等比数列であることを示し，一般項を求[illegible]さらに，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 自然数 n に対して[illegible]$= \log b_n$ とおく．数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．さらに，数列 $\{b_n\}$ の一般[illegible]の累乗と t の累乗を用いて表せ．ただし，対数は自然対数とする．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

(5) $t = s$ は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ であるための必要十分条件であることを示せ．

標準 4.11 r を $r>1$ である実数とし，数列 $\{a_n\}$ を次で定める．

$$a_1=1,\qquad a_{n+1}=\frac{a_n+r^2}{a_n+1}$$

以下の問いに答えよ．　(熊大 [理]2014) 3

(1) n が奇数のとき $a_n<r$，n が偶数のとき $a_n>r$ であることを[illegible]せ．

(2) 任意の自然数 n について，$a_{n+2}-r$ を a_n と r を用いて表[illegible]

(3) 任意の自然数 n について，次の不等式[illegible]せ．

$$\frac{a_{2n+2}-r}{a_{2n}-r}<[illegible]$$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_{2n}$ および $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$ を求めよ．

標準 4.12 0 でない実数 r が $|r|<1$ の[illegible]下の[illegible]さい．[illegible]自然数 n に対して $\lim_{n\to\infty} nr^n=0$，$\lim_{n\to\infty}$[illegible]$r^n=0$[illegible]．　([illegible]6) 6

(1) $R_n=\sum_{k=0}^{n}$[illegible]$=\sum_{k=0}^{n} kr^{k-1}$ を求めなさい．

(2) T[illegible]$k(k$[illegible]求めなさい．

[illegible]$\sum_{k=0}$[illegible]k^2[illegible]めなさ[illegible]

[illegible]自然数[illegible]対して[illegible]$=2nx-x^2$[illegible]フと x 軸で囲まれた領域 (境[illegible]む)R[illegible]える[illegible]に答えなさ[illegible]　(分大 [医]2016) 7

(1) [illegible]含ま[illegible]子点 ([illegible]ともに整数である点) の数 S_n を求め[illegible]

(2) 点 A(0,[illegible](2[illegible]および関数 y の頂点を結ぶ線分で囲まれた領域 (境界を含む) に含まれる[illegible]の数 T_n を求めなさい．

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$ を求めなさ[illegible]

標準 4.14 座標平面上の曲線 C_1，C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = \log x \quad (x > 0)$$
$$C_2 : y = (x-1)(x-a)$$

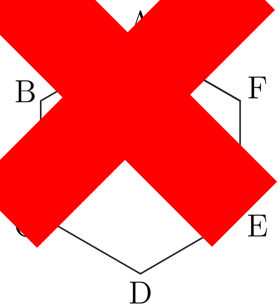
とする．ただし，a は実数である．n を自然数とするとき，曲線 C_1，C_2 が 2 点 P，Q で交わり，P，Q の x 座標はそれぞれ 1，$n+1$ となっている．ま[illegible]曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n，曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた[illegible]T_n とする．このとき，以下の問いに答えよ．　([illegible]大 [理]2016) 1

(1) a を n の式で表し，$a > 1$ を示せ．

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \log T_n}$ を求めよ．

標準 4.15 右図のように平面上に正六角[illegible]CD[illegible]る．時刻 n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ におい[illegible]は正六[illegible]6 つの頂点のいずれかにあり，時刻[illegible]は頂点 A に[illegible]のとする．時刻[illegible]には，時刻 n のときにあった[illegible]隣り合う 2 つ[illegible]ずれかに移動する．どちらの[illegible]に移動すか[illegible]しいものとする．時刻 n [illegible]て，動[illegible]頂点[illegible]D，E，F にある確率[illegible]それ[illegible]，c_n，[illegible]n，[illegible]る．以下の問いに答[illegible]



(九工大 [情]2010) 4

(1) a_2，[illegible]d_2，[illegible]

(2) [illegible]c_3，[illegible]f_3 を[illegible]．

(3) [illegible]偶数の[illegible]，$b_n +$[illegible]を求めよ．

(4) [illegible]刻 n に[illegible]およ[illegible]e_n が同時に成立することを数[illegible]法を用[illegible]示せ．

(5) m を[illegible]するとき，[illegible]を用いて表せ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_{2m}$ を求めよ．

標準 4.16 複素数 z_n を

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_{n+2} = z_{n+1} + \alpha(z_{n+1} - z_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

により定める．ただし，i を虚数単位とし，$\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ とする．また，複数平面上で複素数 z_n を表す点を P_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) z_2，z_3，z_4 を求めよ．　([illegible][情]2016) $\boxed{3}$

(2) 点 P_0，P_1，P_2，P_3，P_4 を図示せよ．[illegible]た，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}$[illegible]，$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$，$\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ の長さ，および $\angle\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1\mathrm{P}_0$，$\angle\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1$，[illegible]$\mathrm{P}_2$ の値[illegible]示せ．

(3) $z_{n+1} - z_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を α と n を[illegible]

(4) z_n の実部，虚部をそれぞれ x_n，y_n とする[illegible]用いて表せ．

(5) (4) で求めた x_n，y_n について，$\lim\limits_{n\to[illegible]}$[illegible]れ求めよ．

標準 4.17 複素数平面上の点 z に対[illegible]

$$w = \frac{3(1-i)z - 2i}{z + 3(1-i)}$$

で表され[illegible]とき，次の問に答えよ．　(佐大 [医]2[illegible]6) $\boxed{7}$

(1) [illegible]となる[illegible]2つある．これらを[illegible]．

(2) [illegible])で求[illegible]なる[illegible]とする．ただし，$0 \leqq \arg\alpha < \arg\beta < 2\pi$ とする．[illegible]，β と[illegible]点[illegible]き，

$$\frac{w-\beta}{w-\alpha} = k\cdot[illegible]$$

[illegible]な定[illegible]値を[illegible]

(3) 複[illegible]を[illegible]

$$z_1 = [illegible], \quad z_{n+1} = \frac{3(1-i)z_n - 2i}{z_n + 3(1-i)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．また，[illegible]実部と虚部をそれぞれ x_n，y_n とする．このとき，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の一[illegible]それぞれ求めよ．さらに，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の極限を求めよ．

応用 4.18 次の問に答えよ．　(琉球大学 2005) 2

(1) 複素数 $z\,(\neq 1)$ に対し，等式

$$1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

がすべての自然数 n について成り立つことを数学的帰納法で[illegible]明せよ．

(2) 上記の等式において，z に $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$ を代[illegible]

$$1+r\cos\theta+r^2\,\text{c}[illegible]+\cdots+r^n[illegible]$$

を計算せよ．ただし $r(\cos\theta+i\sin\theta)\neq$ [illegible]

(3) $0<r<1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}(1+r\cos\theta+r^2[illegible]n\theta)$$

を求めよ．

応用 4.19 実数 a [illegible]自然数 n に対し[illegible] x の方程式

$$[illegible](x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}[illegible]$$

を考え[illegible]の問[illegible]よ．　(九大 [理]2012) 3

(1) [illegible]方程式[illegible]解[illegible]うな a の範囲を，[illegible]用いて表せ．

(2) [illegible]の方[illegible]，す[illegible] n に対して実数解を持つような a の範囲を求め[illegible]

[illegible] p と[illegible]もに整[illegible]るとする．2次[illegible]式 $x^2+px+q=0$ が実数解 α，β[illegible]条[illegible]$|-1)$[illegible]をみたし[illegible]とする．
この[illegible] $\{a_n\}$[illegible]

$$a_n=(\alpha[illegible]-1)\qquad(n=1,2,\cdots)$$

によって定義す[illegible]．以[illegible]いに答えよ．　(九大 [理]2012) 4

(1) a_1，a_2，a_3 は整数[illegible]ことを示せ．

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)$[illegible]のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1+[illegible]5}{2}$ となるとき，p と q の値をすべて求めよ．ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい．

応用 4.21 $p > 0$ とする．各項が正である 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，次の条件をみたすものとする．

$$\begin{cases} a_1 = 3,\ b_1 = 1 \\ a_n - a_{n-1} = b_n - b_{n-1} + 1 \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots) \\ (a_{n-1} + b_n)(b_n - b_{n-1}) = 2pn + 3 - b_n \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots) \end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ．　[illegible][医]2009) $\boxed{2}$

(1) $a_n - b_n$ を求めよ．

(2) $a_n b_n$ を求めよ．

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{{a_n}^3 + {b_n}^3}{{a_n}^3 - {b_n}^3}$ の値を $f(p)$ とおくとき，li[illegible]求めよ．

応用 4.22 方程式 $\tan x = x$ について，次の[illegible]だし，必要[illegible]，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす x について，不等式[illegible] x [illegible]立つこと[illegible]用いてもよい．　[illegible]) $\boxed{8}$

(1) 各自然数 n について，$n\pi - \dfrac{\pi}{2} <$ [illegible] $< n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ の[illegible]に方程[illegible] x の解がただ 1 つ[illegible]ことを示せ．

(2) 各自[illegible](1) で存在が示された解を[illegible]このと[illegible]極限値 li[illegible]$\pi +$ [illegible]求めよ．

応用 4.23 漸[illegible]$= 1$[illegible]$\sqrt{1 + a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ によって定められる数列[illegible]につい[illegible]の問[illegible]え[illegible]ことは既知としてよい．(長大 [医]2008) $\boxed{8}$

> [illegible]な定[illegible]につい[illegible]A) または[illegible]うち一方が成立すれば，$n \to$ [illegible]き数[illegible]は有[illegible]値を持つ．
>
> A) [illegible] $< M$ [illegible] $1, 2,$ [illegible]
>
> B) $x_n >$ [illegible] $1, 2, \cdots)$

(1) $n \to \infty$ のとき $\{a_n$[illegible]限な極限値をもつことを証明せよ．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

応用 4.24 関数 $y = f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ に関して，次の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ と $y = x$ のグラフを描け．　(分大 [医]2012) $\boxed{10}$

(2) $1 < x_0 < \frac{3}{2}$ に対して，$x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を定義する．このとき，$x_n > x_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が単調減少で，ある実数 L に対して $a_n > L$ $(n =$ [illegible] $2, \cdots)$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する．このことを用いて，数列 $\{x_n\}$ の極 [illegible] よ．

応用 4.25 $f(x) = x^3 - 3x - 5$ とするとき [illegible] 問いに [illegible]　(分大 [医]2004) $\boxed{10}$

(1) 方程式 $f(x) = 0$ はただ一つの実数解を [illegible] さらに，この実数解を α とするとき，$2 < \alpha < 3$ をみたすこと [illegible]

(2) $\alpha < t \leqq 3$ とし，点 $(t,\ f(t))$ における [illegible] 接線と [illegible] $(s,\ 0)$ とするとき，$0 < s - \alpha <$ [illegible] が成 [illegible] 示せ．

(3) $t_1 = 3$ とする．点 $(t_n,\ f(t_n))$ [illegible] る曲線 y [illegible] の [illegible] 交点を $(t_{n+1},\ 0)$ とする．このように数 [illegible] $\{t_n\}$ を定め [illegible]，$\lim$ [illegible] 成り立つことを示 [illegible]

応用 4.26 [illegible] 数列 $\{a_n\}$ を

$$[\text{illegible}]_{+1} = f(a_n) \quad (n = [\text{illegible}] \cdots)$$

[illegible] て定 [illegible]　(分大 [医]2008) $\boxed{9}$

(1) [illegible] $_{n+1}$ $(n$ [illegible] $, \cdots)$ [illegible]．

(2) [illegible] < 2 [illegible] $, \cdots)$ [illegible]

(3) [illegible] みた [illegible] 求 [illegible]

(4) $f($ [illegible] の [illegible]

$$[\text{illegible}]_{+1} < \frac{\alpha \log 2}{2}(\alpha - a_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つことを [illegible]

(5) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．
ただし，必要な [illegible] 意の実数 $x \neq 0$ に対して $e^x > 1 + x$ が成り立つことを証明なしに用いて [illegible]．

応用 4.27 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

によって定義されている.　(分大 [医]2006) 7

(1) $0 < a_n < 2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示しなさい.

(2) $2\cos b_n = a_n$, $0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす b_n の値を求めなさい.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ の値を求めよ.

応用 4.28 実数 a_n, b_n $(n = 1, 2, \cdots)$ は次の[illegible]る.　(分大 [医]2005) 9

$$\tan(a_n) = \frac{1}{2n^2}, \quad 0 < a_n < \frac{\pi}{2} \quad \text{t[illegible]} < b_n < \frac{\pi}{2}$$

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $\tan x$ と x [illegible]を調べ[illegible]

(2) $\tan(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ の値を[illegible]よ.

(3) $a_1 + a_2 +$ [illegible] $+ b_n$ の値を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ ([illegible] a_n) の値を求めよ.

4.[illegible] 関数の[illegible]限

[illegible] 4.29 [illegible]極限値[illegible]よ.　(宮崎大学 2004) 2

$$\lim [illegible]{}^2 + x + 1 - [illegible] 1)$$

基本 [illegible]平面上[illegible]して[illegible]る曲線 $C : x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(a > 0,$ [illegible] $0 \leqq$ [illegible]) につい[illegible]答えよ.　(宮崎大学 2003) 3

(1) x, y [illegible]求めよ.

(2) $0 \leqq x \leqq a\cos\theta$ $\left(\text{[illegible]} < \dfrac{\pi}{2}\right)$ において, 曲線 C, y 軸および直線 $x = a\cos\theta$ によって囲まれる部[illegible]積 $S(\theta)$ を求めよ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{S(\theta)\text{[illegible]}}{\frac{\pi}{2}\text{[illegible]}}$ [illegible]めよ. ただし, $\theta \to \dfrac{\pi}{2} - 0$ は, θ が $\dfrac{\pi}{2}$ より小さい値をとりながら $\dfrac{\pi}{2}$ [illegible]なく近づくことを表す.

基本 4.31 次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2012) $\boxed{4}$

(1) 無限級数

$$1+\frac{1}{1+e^x}+\frac{1}{(1+e^x)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+e^x)^n}+\cdots$$

はすべての実数 x について収束することを示し，その和を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(2) (1) で求めた無限級数の和を $f(x)$ とする．方程式

$$\log f(x) [illegible] | + \log 6 [illegible]$$

を解け．ただし，対数は自然対数とする [illegible]

標準 4.32 C_1，C_2 をそれぞれ次式で与えられ [illegible]

$$C_1 : y = -x^2 + [illegible] \leqq [illegible]$$
$$C_2 : y = - [illegible] , \quad -2 \leqq [illegible] 0$$

また，a を実数とし [illegible] 直線 $y = a(x + [illegible])$ を ℓ とする．[illegible] 2015) $\boxed{1}$

(1) 直線 ℓ [illegible] る 2 つの共有点をもつための [illegible] を求 [illegible]

以下，a [illegible] の条件 [illegible] とする．このとき，ℓ と [illegible] 囲まれた部分の面積を S_1，x 軸 [illegible] 囲ま [illegible] 下側にある部分の面 [illegible] $_2$ とする．

(2) S_1 を a [illegible] て表 [illegible]

(3) S [illegible] を満た [illegible] 数 a が [illegible] $< \frac{1}{5}$ の [illegible] 存在することを示せ．

4.3 問題研究

4.3.1 ネイピア数

次の極限値

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (e\,\text{はネイピア数})$$

について述べる．

n を自然数とする．1 と n 個の $1+\dfrac{1}{n}$ の相加・相乗平均の[illegible]より

$$\frac{1}{n+1}\left\{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} > [illegible]\Big)^n}$$

両辺を $n+1$ 乗すると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} [illegible]\left(1+[illegible]\right)^n$$

$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とすると，数列 $\{a_n\}$ は単調増加列で[illegible]．

また，1 と n [illegible] $\dfrac{n}{n+1}$ の相加・相乗平均の関[illegible]より

$$[illegible]+1)\cdot\frac{n}{n+1}\right\} > \sqrt[n+2]{[illegible]1}\Big)^{n+1}}$$

両辺を $n+2$ 乗すると

$$\left(\frac{n}{n[illegible]}\right)^{n+2} > \left(\frac{n}{n[illegible]}\right)^{n+1}$$

逆数をとると

$$[illegible]\Big)^{n+2} < \Big([illegible]n\Big)^{n+1}$$

$b_n=\left(1+[illegible]\right)^{n+1}$ [illegible] 数列 $\{b_n\}$ は単調減少列である．したがって

$$2=a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n<b_n<b_{n-1}<\cdots<b_2<b_1=4$$

40 ページの 4.23 にあ[illegible]に，上に有界な単調増加列 $\{a_n\}$ および下に有界な単調減少列 $\{b_n\}$ は収束す[illegible]た，$b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$ であるから

$$0<b_n-a_n=\frac{a_n}{n}<\frac{4}{n}$$

はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=e$

第 5 章　微分法とその応用

5.1　導関数

□□ **5.1**　関数 $y = x^2 \sin(3x+5)$ の導関数 [illegible] (琉球大学 2003) [1]

□□ **5.2**　次の関数を微分せよ. [illegible]

(1)　$y = e^{\cos x}$　　(2)　[illegible]

□□ **5.3**　次の関数を微分せよ. [illegible] [2]

(1)　$y = x \log|x|$　　(2)　$y = \frac{e^{2[illegible]}}{e^{2x}[illegible]}$

□□ **5.4**　次の[illegible]微分せよ. [illegible] [4]

(1)　$y = $ [illegible]　　(2)　$y = \sin($[illegible]$)$

□□ [illegible]の関[illegible] (宮崎大学 2010) [1]

(1)　[illegible]$= e^{\sin[illegible]}$　　(2)　$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

□□ [illegible]の関[illegible]せよ. (宮崎大学 2011) [1]

(1)　[illegible]$= e^{\sqrt{x}}$　　(2)　$y = $ [illegible]$\cos x|$

□□ [illegible]関数[illegible]よ. (宮崎大学 2012) [1]

(1)　$y = \frac{[illegible]}{1+[illegible]}$　　(2)　$y = \sin^3(2x+1)$

□□ **5.8**　次の関数を微[illegible]. (宮崎大学 2013) [1]

(1)　$y = \frac{x}{e^x}$　　(2)　$y = \log\left(\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right)$

□□ **5.9**　次の関数を[illegible]よ. (宮崎大学 2014) [1]

(1)　$y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$　　(2)　$y = (x+2)\sqrt{x^2+2x+5}$

□□ **5.10** 次の関数を微分せよ．　(宮崎大学 2015) $\boxed{1}$

(1)　$y = \sin(\cos x)$　　(2)　$y = \dfrac{e^{2x}}{x+1}$

□□ **5.11** 次の関数を微分せよ．　(宮崎大学 2016) $\boxed{1}$

(1)　$y = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$　　(2)　$y = \log\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}$

□□ **5.12** 関数 $y = e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x + \cos 2x)$ は，次の等式を満た[illegible]示せ．

$$4y'' - 12y' \text{[illegible]} = 0$$

(福岡教育大学 2007) $\boxed{1}$

標準 5.13 次の問いに答えよ．

(1)　関係式

$$a_1 = 1,\quad na_{n+1} - \text{[illegible]}\, a_n = \text{[illegible]})$$

によって定義される数列 $\{a_n\}$ [illegible]項を求め[illegible] $b_n =$ [illegible]$, \cdots)$ と
おいて数列 [illegible] の一般項を求めることにより，[illegible]求め[illegible]

(2)　$x \neq 1$ の[illegible]比数列の和の公式

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x-1}$$

の両[illegible]で微[illegible]を利用して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kx^k$ を求めよ．

(3)　[illegible]のと[illegible]係式

$$c_1 \text{[illegible]} \frac{c_n}{\text{[illegible]}+1} \text{[illegible]} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

に[illegible]数列 $\{c_n\}$ [illegible]求めよ．

標準 5.14 確[illegible]で「当たり」が出るくじを繰り返して引く．2 回目の「当たり」が出たときに[illegible]行を終える．$n \geqq 2$ として，n 回目でこの試行を終える確率を p_n とする．次[illegible]に答えよ．　(琉球大学 2015) $\boxed{3}$

(1)　p_2，p_3，p_4 を求め[illegible]

(2)　p_n を求めよ．

(3)　$N \geqq 2$ として，$\displaystyle\sum_{k=2}^{N} p_k$ を求めよ．

標準 5.15 2つの関数 $f(x) = \int_0^x e^t(\sin t + \cos t)dt$ と $g(x) = \int_0^x e^t(\cos t - \sin t)dt$ について，以下の問いに答えよ．　(熊大 [理]2012) $\boxed{3}$

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

(2) $f^{(n)}(x)$ と $g^{(n)}(x)$ をそれぞれ $f(x)$ と $g(x)$ の第 n 次導関数とする．

　(i) $n \geqq 2$ のとき，$f^{(n)}(x)$ および $g^{(n)}(x)$ を，$f^{(n-1)}(x)$ と [illegible]$^{-1)}(x)$ を用いて表せ．

　(ii) $\{f^{(n)}(x)\}^2 + \{g^{(n)}(x)\}^2$ を求めよ[illegible]

　(iii) 実数 a について，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[illegible]}{\{f^{(n)}(a)\}^2 + [illegible]}$ [illegible]を求めよ．

5.2　接線と法線

基本 5.16 楕円 $C : x^2 + 4y^2 = 5$ につい[illegible]の問[illegible]　([illegible]08) $\boxed{3}$

(1) 楕円 C 上の[illegible]$(a,\ b)$ における接線の方程式は[illegible]$4by =$ [illegible]ることを示せ．

(2) 点 A[illegible]$\left(\ \right.$[illegible]$\left.2\right)$ か[illegible] C に 2 本の接線をひき，[illegible]接点[illegible] T_1，T_2 と[illegible]る．こ[illegible]，2 点[illegible]る直線の方程式を求[illegible]

[illegible].17 [illegible]を動[illegible]における座標 $(x,\ y)$ が $x = \frac{1-t}{1+t}$，$y = \frac{2\sqrt{t}}{1+t}$ 与え[illegible]いる．[illegible]< 1 の[illegible]点 $(1,$ [illegible] P を結ぶ線分の中点を M とし，[illegible]曲線[illegible]とする．　(大分大学 2001) $\boxed{4}$

(1) [illegible]る点[illegible]用いて[illegible]

(2) [illegible]おけ[illegible]での C の[illegible]を求めよ．

(3) C の[illegible]かわらず，[illegible]る定点を通ることを示し，その点の座標を求め[illegible]

基本 5.18 曲線 C を $y = e^x$ とする．C 上の点 $\mathrm{A}_0(0,\ 1)$ における接線と x 軸の交点を $\mathrm{B}_1(b_1,\ 0)$ とし，C 上の点 $\mathrm{A}_1(b_1,\ e^{b_1})$ における接線と x 軸の交点を $\mathrm{B}_2(b_2,\ 0)$ とする．これをくりかえし，C 上の点 $\mathrm{A}_n(b_n,\ e^{b_n})$ における接線と x 軸の交点を $\mathrm{B}_{n+1}(b_{n+1},\ 0)$ とする．このとき，次の問いに答えよ． (佐賀大学 2010) $\boxed{3}$

(1) b_1 を求めよ．

(2) b_{n+1} と b_n の関係式を求め，一般項 b_n を求めよ．

(3) $\triangle \mathrm{B}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n+1}$ の面積を S_n とするとき，$\sum^{\infty}$ [illegible] S_n を求め [illegible] し，B_0 は原点とする．

基本 5.19 座標平面上において，x 軸上の点列 $\{$[illegible] $\frac{1}{\ }$[illegible] 上の点列 $\{$[illegible] を次のように定める．$\mathrm{P}_1(a,\ 0)\ (a > 0)$ とす [illegible] 通り y 軸に平行な直線と C との交点を Q[illegible] C の接線と [illegible] 軸との交点を P_{n+1} とする．次の問いに答え [illegible] 熊大 [理 [illegible]) $\boxed{3}$

(1) $\mathrm{P}_n(a_n,\ 0)$ とするとき，a_n を [illegible] よ．

(2) 三角形 P[illegible] の面積を S_n とするとき，$\sum_{n=1}^{\infty}$ [illegible] a で [illegible]

標準 5[illegible] 平面 [illegible] $\frac{1}{x^2}$ を描き，この曲線 [illegible] 象限内の部分を C_1，第 2 象 [illegible] 部分を [illegible] 呼ぶ [illegible] 点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \frac{1}{a^2}\right)$ か [illegible] に向けて接線を引き，C_2 [illegible] 接点を [illegible] する [illegible] 点 Q[illegible] に向けて接線を引き，C_1 との接点を P_2 と [illegible] る．[illegible] P_2 か [illegible] に向け [illegible] を引き，[illegible] Q_2 とする．以下同様に続けて，[illegible] 列 P_n [illegible] 上の点 [illegible] を定める．こ [illegible] 次の問いに答えよ．

(九大 [理]2010) $\boxed{3}$

(1) [illegible] 標を求 [illegible]

(2) 三 [illegible] $\mathrm{Q}_1\mathrm{P}$[illegible] 積 S_1 を求 [illegible]

(3) 三角 [illegible] $1, 2, 3, \cdots)$ [illegible] 積 S_n を求めよ．

(4) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を [illegible] よ．

標準 5.21 関数 $f(x)=\log(x^2-x+2)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ に対して，以下の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数を表している． (九工大 [情]2013) [2]

(1) $y=f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の極値を求めよ．

(2) x についての方程式 $\log(x^2-x+2)=x$ は $\dfrac{1}{2}<x<1$ の範囲に実数解をただ1つもつことを示せ．必要であれば，$\log 2<0.7$，$\log 7>1.9$ であることを用いてよい．

(3) $y=f'(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の最大値と最小値を求めよ．

(4) 平均値の定理を用いることで，$0 \leqq$ [illegible] $b \leqq 1$ [illegible]実数 a，b に対して，$|f(b)-f(a)|<\dfrac{1}{2}|b-a|$ となることを[illegible]

標準 5.22 a を定数とする．方程式 $(\log x)^2 =$ [illegible]えよ． ([illegible]) [illegible]

(1) 解の個数を調べよ．必要なら，[illegible] $\dfrac{(\log x)^2}{x}$ [illegible]用[illegible]

(2) 解がちょうど2個のとき，これ[illegible]解を p^2，q^2 [illegible]$p<q$) [illegible]の値を求めよ．また[illegible]は $\dfrac{e}{e+1}<p<1$ を満たすこと[illegible]

標準 5.23 [illegible](x)[illegible]x^2-x-1 について，次[illegible]よ． (鹿児島大学 2001) [11]

(1) [illegible]関数[illegible]0 の[illegible]個数は1個であ[illegible]を証明せよ．

(2) (1) の[illegible]ュー[illegible]式は

$$x_{n+1}=\frac{[illegible]-x_n{}^2+1}{[illegible]^2-2x_n-1} \quad ([illegible]1,2,3,\cdots)$$

[illegible]を証[illegible]

(3) こ[illegible]の近似値を[illegible]ン法を用いて計算する．$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ と $f(2)$ の絶[illegible] $|f(2)|$ の小さい方の x の値 x_1 を求めよ．さらに，x_1 を初期値として，正[illegible]近似値 x_2 を求めよ．

標準 5.24 方程式 $x^2-2=0$ の解 $\sqrt{2}$ の近似値をニュートン法を用いて求めたい．次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2003) 11

(1) $\sqrt{2}$ の近似値を求めるためのニュートンの繰り返し公式が

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{2}{x_k}\right) \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

で与えられることを示せ．

(2) $x_1=2$ とするとき，x_2 および x_3 を求め[illegible](小数第4位[illegible]五入して，小数第3位まで求めること)．

(3) $y_k=\dfrac{x_k-\sqrt{2}}{x_k+\sqrt{2}}$ とおくとき，$y_{k+1}={y_k}^2$ と[illegible]

(4) y_k を k と y_1 を用いて表せ．さらに，x[illegible]

標準 5.25 $f_1(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$，$f$[illegible]$2x+$[illegible]る．[illegible]曲線 $y=f_2(x)$ の交点をニュートン法を用[illegible]求めたい．[illegible]き，[illegible]答えよ． ([illegible]005) 11

(1) $f(x)=$[illegible]とおく．区間 $[0,\ 2]$ に $f(x$[illegible]ること[illegible]．

(2) $f($[illegible]の解[illegible]ートン法を用いて，適[illegible]期値 x_1 から始め x_2，x_3，[illegible]x_n，$\cdots$[illegible]く．このとき，x_{n+1}[illegible]を用いて表す式を求めよ．

[illegible]$=1$[illegible]，x_2 を[illegible]

[illegible]用 5.2[illegible]上の[illegible]n に[illegible]関数 f[illegible]

$$f[illegible]1)(2x-1)[illegible]-1)$$

と定義[illegible]$=1$[illegible]$n-1$[illegible]が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ1つの極値をも[illegible]よ． (九大[理]2014) 5

応用 5.27 正の実数 a の 3 乗根 $\sqrt[3]{a}$ を近似することを考える．与えられた 2 以上の整数 p に対して関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$\begin{cases} f(x) = x^p - ax^{p-3} \\ g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

とする．ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である．次の問いに答え[illegible]
([illegible]大[理]2002) $\boxed{8}$

(1) $g(x) - \sqrt[3]{a}$ は

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - [illegible]$$

の形で表されることを示せ．

(2) $p = 2$ とする．このとき，$g(x) - \sqrt[3]{a}$ [illegible]

$$g(x) - \sqrt[3]{[illegible]} [illegible] \sqrt[3]{a})^3 \times [illegible]$$

の形で表さ[illegible]ることを示せ．

(3) $a = 9$，[illegible]る．$2 < \sqrt[3]{9} < 2.1$ に注意して[illegible]

$$0 < \sqrt[3]{9} - g(2) < [illegible]$$

[illegible]成り立[illegible]を示[illegible] $\sqrt[3]{9}$ を小数第 3 位まで求めよ (すなわち，小数第 4 位以[illegible]切り捨[illegible]).

[illegible]関数[illegible]グラフ[illegible]

基本 [illegible]，b，c [illegible]数で，[illegible]関数

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

について，次の各問いに[illegible]よ．　(鹿児島大学 2007) $\boxed{9}$

(1) $f(x)$ が極値をもつ[illegible]条件を，a，b，c，d を用いて表せ．

(2) $f(x)$ が常に変曲[illegible]つことを示し，その変曲点を求めよ．

基本 5.29 $x > 1$ において $f(x) = \sqrt{x} - \log x$，$g(x) = \dfrac{x}{\log x}$ とするとき，次の問いに答えよ．(ただし，対数は自然対数とする．)　(佐賀大学 2009) $\boxed{2}$

(1) $f(x) > 0$ を示せ．

(2) $g(x) > \sqrt{x}$ を示せ．これを用いて，$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ を示せ．

(3) $g'(x)$，$g''(x)$ を計算し，$g(x)$ の極値，変曲点の座標を求め[illegible]

(4) 関数 $y = g(x)$ のグラフをかけ．

標準 5.30 2以上の自然数 n に対して，関[illegible]$=\log$[illegible]を考える．次の問いに答えよ．　(長崎大学 2004) $\boxed{6}$

(1) $xf'(x)$，$x^2f''(x)$ を求めよ．

(2) $x > 0$ において，$f'(x) > 0$ なる x の範[illegible]りな[illegible]ぞれ求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減，曲線 $y =$ [illegible]凸を[illegible]関[illegible]曲線 $y = f(x)$ の変曲点がそれぞれ[illegible]つあること[illegible]せ．

(4) 上問 (3) の[illegible]値を与える x の値を a_n，変曲点[illegible]標を[illegible]き，極限値 $\lim_{n\to}$[illegible] なお $\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e$ (自[illegible]ある[illegible]用いて[illegible]

標準[illegible]関数[illegible]

$$f(x) = \begin{cases} [illegible]\log|x| & ([illegible]\neq 0) \\ 0 & ([illegible]0) \end{cases}$$

[illegible]き，[illegible]問い[illegible]　(鹿児島大学 2009) $\boxed{3}$

(1) [illegible]のと[illegible]$< -\log$[illegible]つことを示せ．

(2) 微分[illegible]て $f'(0) =$ [illegible]ることを示せ．

(3) $x \neq 0$ の[illegible]$f'(x$[illegible]よ．

(4) 関数 $f(x)$ の極値を[illegible]よ．

標準 5.32 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とするとき，次の各問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(鹿[illegible]大学 2006) 2

(1) $x > 0$ のとき，すべての自然数 n につい[illegible]て不等式 e^x [illegible]成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ．

(2) $x \neq 0$ のとき，すべての自然数 n につい[illegible] $< n!|x|^n$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ であることを示せ[illegible]

(4) $f'(x) = 0$ となる x の値および $f($[illegible]を[illegible]値を求[illegible]

標準 5.33 a，b，c，d を実数とし，[illegible] $f(x)$ を次の[illegible]に定め[illegible]

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{x} & (x \text{[illegible]}) \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & (-\text{[illegible]}) \\ \dfrac{1}{\text{[illegible]}} + 1 & (1\text{[illegible]}) \end{cases}$$

た[illegible] $f(x)$ [illegible] -1 [illegible]で微分可能であるものとする，以下に答えよ．

(九工大 [情]2002) 1

([illegible]) a，[illegible] d を[illegible]

[illegible]の増減[illegible]極値[illegible]て，$y = f(x)$ [illegible]ラフの概形を描け．

[illegible]に対し[illegible](x) と直[illegible]$x + \dfrac{1}{2}$ との共有点の個数を求[illegible]

標準 5.34 f[illegible]おく．ただし，e は自然対数の底とする．このとき，次の問いに答えよ．

(九大 [理]2008) 1

(1) $y = f(x)$ の増減，[illegible]漸近線を調べ，グラフをかけ．

(2) $f(x)$ の逆関数 f^{-1}[illegible]求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\frac{\text{[illegible]}}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}$ を求めよ．

標準 5.35 m は正の定数とする．関数 $f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + m^2x$ について，次の問いに答えよ．　(長崎大学 2007) $\boxed{2}$

(1) 方程式 $f(x) = 0$ は 0 以外に相異なる 2 つの実数解をもつことを示せ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の 0 以外の解を α，β $(\alpha < \beta)$ とする．$\alpha + \beta$ および $\alpha\beta$ を m を用いて表せ．また α，β がともに正であることを示せ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形について，$y \geqq 0$ の範[illegible]る部分の面積と $y \leqq 0$ の範囲にある部分の面積が等しいものとする．[illegible]，m，α，β の値を求めよ．

応用 5.36 x の三次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx$ [illegible]る点に関して対称であることを証明せよ．ここに，a，b，c，d は定数[illegible]　[illegible]

発展 5.37 3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ [illegible]

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，[illegible]) に[illegible]を求め[illegible]

(2) G はこの上のある点に関して[illegible]であること[illegible]せ．

(3) 直線 $mx + n$[illegible]$= 0$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称[illegible]座標を[illegible]ただし m，n は共に[illegible]いとする．

(4) G は[illegible]直線に関しても線対称で[illegible]せ．

5[illegible] 最大[illegible]小

□ 5[illegible] $f(x)$ [illegible] $\cos x$ [illegible] $\sqrt{1+}$ [illegible] $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq\right.$ [illegible]$\left.\right)$ の増減を調べ，最大値と最小[illegible]よ．　(福岡教育大学 2010) $\boxed{1}$

□□[illegible] AC [illegible]ある[illegible]三角[illegible]において，BC $= 2x$，内接円の半径を[illegible]　(琉球大学 2014) $\boxed{1}$

(1) r を x [illegible]

(2) r が最大となる x [illegible]求めよ (最大値そのものは求める必要はない)．

基本 5.40 曲線 $y = \sqrt{x}$[illegible] $(x \geqq 1)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(a > 1)$ での接線と y 軸との交点を Q とする．次の問[illegible]えよ．　(琉球大学 2012) $\boxed{1}$

(1) 点 Q の座標を[illegible]せ．

(2) PQ^2 の最小値を求めよ．

基本 5.41 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ で表される曲線を C とする．　(琉球大学 2008) $\boxed{2}$

(1) 曲線 C の凹凸を調べ，その概形を図示せよ．

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(0<a<1)$ における接線 l の x 切片，y 切片をそれぞれ a を用いて表せ．

(3) (2) において点 P が曲線 C 上を動くとき，P における接線 l と x 軸および y 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積[illegible]大値を求めよ．

標準 5.42 O を原点とする座標平面上に 4 点[illegible]$(4,\ 0)$，B$(4$[illegible]$,\ 4)$，D$(3,\ 2)$ がある．点 R は正方形 OABC の周上では速[illegible]き，[illegible]内部では速さが 1 で動く．次に答えよ．　(九工大 [工]2008) $\boxed{4}$

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ 0)$ を線分 OA 上の点とする．点 R[illegible]
て D に到達するまでの時間 $f(x)$ $(0 \leqq$[illegible]

(2) (1) で求めた $f(x)$ に対して，$f'(x)$[illegible]

(3) (1) で求めた $f(x)$ の最小値 T_1[illegible]．

(4) 点 $\mathrm{Q}(4,\ x)$ を線分 AB 上の点と[illegible]る．点 R が [illegible]発して[illegible]OAQD に沿って D [illegible]するまでの時間を $g(x)$ $(0 \leqq x$[illegible]とす[illegible]小値 T_2 を求め[illegible]た値 T_1 との大小を比較せよ[illegible]

標準 5[illegible]標平面[illegible]中心とする半径 1 の円[illegible]$+y^2=1$ と点 $\mathrm{A}(-1,-1)$，B$(0$[illegible]あり[illegible]k の直線 ℓ を考え[illegible]線 ℓ は円 C と異なる 2 点[illegible]ものの[illegible]点 A[illegible]の交点を P，近い方の交点を Q とする．以下の[illegible]に答え[illegible]　(九工大 [情]2015) $\boxed{2}$

[illegible]の方程[illegible]k を用[illegible]せ．

[illegible]P，Q[illegible]標をそ[illegible]用いて表せ[illegible]

(3) [illegible]Q の[illegible]を[illegible]せ[illegible]

(4) 三[illegible]を最大にす[illegible]よ．

標準 5.44 Oを原点とする座標平面上に点A$(0,\ 1)$があり，点Aからの距離が4である点P$(x,\ y)$が$x>0$，$y>1$をみたすように動く．直線APがx軸の正の向きとなす角をθ，点Pからx軸に垂線を下ろしたときの交点をQとする．以下の問いに答えよ．
(九工大 [情]2012) 2

(1) 点Pの座標をθを用いて表せ．

(2) 四角形OAPQの面積Sをθを用いて表せ．

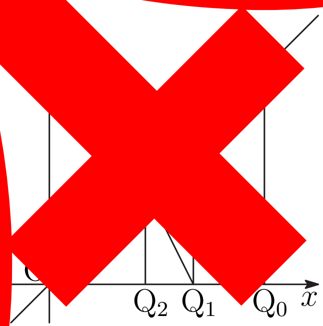
(3) (2)で求めたSが最大となるときの$\sin\theta$の値を求めよ[illegible]

(4) 四角形OAPQをx軸のまわりに1回[illegible]てでき[illegible]体積Vをθを用いて表せ．

(5) (4)で求めたVが$\sin\theta=\dfrac{3}{4}$で最大となる[illegible]

標準 5.45 Oを原点とする座標平面上に[illegible]
Q$_0(1,\ 0)$がある．あるp $(0<p<$[illegible]して[illegible]
P$_1(p,\ p)$，Q$_1(p,\ 0)$を定め，さら[illegible]数nに[illegible]
て点P$_{n+1}$，Q$_{n+1}$を次のように定め[illegible]

- 点Q$_n$を[illegible]Q$_0$P$_1$と平行な直線と，直線O[illegible]の交[illegible]．
- 点[illegible]通り[illegible]行な直線と，x軸の交点[illegible]とする[illegible]



[illegible]$\triangle$Q$_n$[illegible]の面[illegible]るとき，以下の問いに答えよ．

(九工大 [情]2012) 3

([illegible]) S[illegible]用い[illegible]．

[illegible]$_{n-1}$の[illegible]標をq[illegible]き，点Q$_n$の[illegible]標をp，qを用いて表せ．

([illegible]用い[illegible]

(4) [illegible]として[illegible]$0<p$[illegible]かすとき，S_nを最大にするpとそのと[illegible]れnを用い[illegible]

(5) (4)で求[illegible]$_n$[illegible]て，$\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$を求めよ．必要であれば，自然対数の底$e$について$\lim\limits_{h\to 0}(1+$[illegible]$e$が成り立つことを用いてよい．

標準 5.46 座標平面上の曲線 $C : y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ と点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ $(s > 0,\ t > 0,\ st < 1)$ を考える．また，$u = st$ とする．点 P を通る曲線 C の 2 本の接線をそれぞれ l_1，l_2 とし，これらの接線と曲線 C との接点をそれぞれ $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ とする．ただし，$a < b$ とする．以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2016) $\boxed{1}$

(1) a，b を s，t を用いて表せ．

(2) 2 点 $\mathrm{E}(a,\ 0)$，$\mathrm{F}(b,\ 0)$ を考える．台形 ABFE の面積を u [illegible] 表せ．

(3) $\triangle$PAB の面積を u を用いて表せ．

(4) (3) で求めた $\triangle$PAB の面積を $S(u)$ と [illegible] (u) [illegible] $0 < u < 1$ で減少することを示せ．

(5) 点 P が 2 点 $(3,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を結ぶ線分上の [illegible] き，$\triangle$PAB の面積が最小となる点 P の [illegible] た，[illegible] 求めよ．

標準 5.47 xy 平面において，y 軸上 [illegible] $(0,\ a)$ と [illegible] $=$ log [illegible] $\log x)$ を考える．ただし [illegible] 対数は自然対数と [illegible] る． ([illegible] 2003) $\boxed{4}$

(1) 線分 AX [illegible] 最短になる点 B はただ 1 つ存 [illegible] 線 [illegible] は [illegible] ける曲線 [illegible] $g\,x$ [illegible] l と直交することを，以下 [illegible] 順 [illegible] 明せよ．

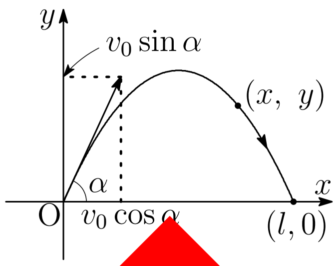
(i) [illegible] 数 a [illegible] $+ \log x - a = 0$ を満 [illegible] はただ 1 つ存在することを示 [illegible]

(ii) b [illegible] $+ \log$ [illegible] 満たす実数とする．線分 AX の長さが最短となる [illegible] は，B [illegible] $\log b)$ で [illegible] ることを [illegible] せ．

(iii) [illegible] 線分 [illegible]，B$(b$ [illegible] における曲線 [illegible] $\log x$ の接線 l と直交すること [illegible]

(2) [illegible] $)$ を，[illegible] 導い [illegible] る [illegible] B の長さが，$\mathrm{AB} = \sqrt{6}$ となるとき [illegible] 値を [illegible]

標準 5.48 右の図のように，原点 O から物体 P を，水平面と角 α $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ をなす方向に，速さ v_0m/秒 $(v_0 > 0)$ で投げたとき，投げてから t 秒後の P の位置を $(x,\ y)$ とする．空気抵抗を無視すると，x と y は g を正定数として $x = (v_0\cos\alpha)t$，$y = (v_0\sin\alpha)t - \dfrac{1}{2}gt^2$ と表される．　(佐賀大学 2001) 4



(1) P が正の時刻で x 軸に到達する位置を [illegible] 0) とすると[illegible]，v_0，g で表せ．

(2) 正の時刻で x 軸に到達するまでに P[illegible]軌線と[illegible]囲まれる図形の面積 S を α，v_0，g で表せ．

(3) v_0 を固定し，α を動かすとき，S の最大値[illegible]

標準 5.49 楕円 $E : \dfrac{x^2}{8} + y^2 = 1$ について[illegible]　(熊大 [理][illegible]02) 3

(1) E 上の点 $(a,\ b)$ における E の[illegible]切片と[illegible]片の[illegible]で[illegible]のを $f(a)$ とするとき，$f(a)$ を求め[illegible]だし，$a >$[illegible]> 0 [illegible]

(2) $f(a)$ が最小[illegible]る a の値を求めよ．

応用 5.50 [illegible]ラメータ) k に対して，放[illegible]直線 y[illegible]$+ k$，$x = -1$[illegible]で囲[illegible]形の面積の最小値と，[illegible]きの定数 k を求めよ．　(分大 [医]2011) 8

[illegible]5.51 [illegible]の 3[illegible]$= a$，AC $= b$，AB $= c$ とし，条件

[illegible]$c = 1$，　9[illegible]

か[illegible]つ[illegible]以下[illegible]よ。　(熊大 [医]2015) 1

(1) a[illegible]範囲を[illegible]よ。

(2) $\theta = 2$[illegible]$\cos\theta$ の値[illegible]求めよ。

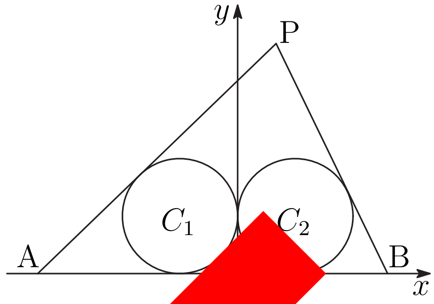
応用 5.52 座標[illegible]面上に[illegible]$-l,\ 0)$ をとる．ただし，l は正の定数とする．また，原点を中心とする半径 1 の[illegible]に 2 点 Q$(\cos\theta, -\sin\theta)$，R$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ をとる．△PQR の周の[illegible] $f(\theta)$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $f(\theta)$ を，l と θ[illegible]て表せ．　(宮大 [医]2008) 7

(2) $f(\theta)$ の最大値を，l を用いて表せ．

応用 5.53 座標平面上に2つの円

$$C_1 : (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$$
$$C_2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$



がある．不等式 $y > 2$ が表す領域 D 内に点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとる．点Pから円 C_1，C_2 にひいた接線と x 軸との交点をそれぞれA，Bとする．ただし，右図のように△PABは円 C_1，C_2 [illegible]もに含むも[illegible]る．このとき，次の各問に答えよ． (宮大 [医]2010) 7

(1) b を定数とするとき，辺ABの長さが最小[illegible]0のときであることを示せ．

(2) 点Pが領域 D 内を動くとき，△PAB[illegible]求めよ．

5.5 方程式・不等式への応用

標準 5.54 a を[illegible]の実数とし，$x > -1$ で定義さ[illegible]数

$$f(x) = 2x^2 + (1-a^2)\log(x+1)$$

につ[illegible]次の各[illegible] (鹿児島大学 2010) 4

(1) [illegible]程式[illegible]$= 0$ が[illegible]なる2つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を[illegible]よ．

(2) [illegible](1)で求[illegible]範囲に[illegible]き，関数 $f($[illegible]増減を調べ，極値を求めよ．

(3) [illegible](1)[illegible]めた範[illegible]関数 f[illegible]小値は $\dfrac{1-2\log 2}{2}$ より大きい[illegible]明せよ．

標準 5.55 実数 c $(c>0)$ に対して，$x>0$ で定義された次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x)=\log_e x-c(x-1)$$

ただし，e は自然対数の底である．以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2008) $\boxed{1}$

(1) $f(x)$ は最大値を持つことを示せ．また，$f(x)$ が最大になるときの x の値とそのときの $f(x)$ の値を c を用いて表せ．

(2) (1) で求めた最大値を m とするとき，c の値によらず m [illegible]ることを示せ．

(3) すべての x $(x>0)$ に対して，$f(x)$ [illegible]成り立つ [illegible] の値を求めよ．

(4) すべての x $(x>0)$ に対して

$$\log_a x-b(x \text{ [illegible]}$$

が成り立つときの，実数 a $(a>1)$ [illegible]き関係式を[illegible]めよ．

標準 5.56 a，b を正の実数とし，関数 [illegible](x) をそ[illegible] $a\,f($[illegible]$\cos x$，$g(x)=x^2+b\cos^2 x-b$ とする．以[illegible]問いに答えよ． ([illegible]2011) $\boxed{1}$

(1) $a=3$ の[illegible]$< x \leqq \pi$ における $f(x)$ の増減[illegible]，[illegible]

(2) $a=1$[illegible]において $f(x) \geqq 0$ が成り[illegible]せ．

(3) x[illegible]おいて[illegible]が成り立つような a の[illegible]を求めよ．

(4) [illegible]0 にお[illegible]$g(x)$[illegible]り立つような b の[illegible]を求めよ．

[illegible] 5.5[illegible] [illegible] $=\dfrac{\sin \text{[illegible]}}{\cos \text{[illegible]}}$ [illegible] $=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{\text{[illegible]}}$ とする．$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき，以下[illegible]答えよ． (九工大 [情]2014) $\boxed{3}$

(1) [illegible]よ．

(2) $f'($[illegible]

(3) $\dfrac{\pi}{2}<f($[illegible]

(4) $f(x)<g(x)$ を示せ．

標準 5.58 $0 < a < 3$ とする．次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \log(1 + a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を次の手順で求めよ．　(熊大 [理]2009) $\boxed{2}$

(1) $0 < x < 3$ のとき，$0 < \log(1 + x) < x - \frac{1}{6}x^2$ であること [illegible]．必要があれば，$0.69 < \log 2 < 0.70$ を用いてもよ [illegible]

(2) $0 < a_n < \frac{6}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であ [illegible] を示 [illegible] a_n を求めよ．

標準 5.59 a を正の定数とする．条件

$$\cos\theta - \sin\theta = a \sin\theta [illegible]$$

を満たす θ について，以下の問いに答 [illegible] 大 [illegible]) $\boxed{2}$

(1) 条件を満たす θ は，$0 < \theta < \frac{[illegible]}{2}$ [illegible] 範囲で，ただ [illegible] 存在す [illegible] せ．

(2) 条件を満 [illegible] の個数を求めよ．

標準 5.60 [illegible] (x) [illegible] $> 0)$ について，次の問 [illegible] えなさい．

(1) [illegible] (x) の [illegible] さい．　(長崎大学 2003) $\boxed{3}$

[illegible] 数 y [illegible] の接 [illegible] 通るものは 1 本しかないことを示し，その接線の方 [illegible] 求め [illegible]．

[illegible] 次の [illegible] 答え [illegible] し，$\lim_{x\to\infty} \frac{\log [illegible]}{x}$ [illegible] であること，また，e は自然対 [illegible] で [illegible] であ [illegible] てよい．　(九大 [理]2006) $\boxed{1}$

(1) 自 [illegible] に対 [illegible] 方程式 [illegible] $x > 0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をも [illegible]

(2) (1) の 2 つ [illegible] 実数 [illegible]，β_n $(\alpha_n < \beta_n)$ とするとき，

$$1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}, \quad ne < \beta_n$$

が成り立つこと [illegible]．また，$\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ を求めよ．

応用 5.62 a を正の定数とする．以下の問いに答えよ．　(九大 [理]2011) $\boxed{2}$

(1) 関数 $f(x) = (x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ．

(2) $x \geqq 3$ のとき，不等式 $x^3 e^{-x} \leqq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ．さらに，極限値

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$$

を求めよ．

(3) k を定数とする．$y = x^2 + 2x + 2$ のグラフと $y = ke^x +$ [illegible]ラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を，a [illegible]を用いて表[illegible]

応用 5.63 以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2014) $\boxed{3}$

(1) 正の実数 a，b，c について，不等式

$$\frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{[illegible]} [illegible]$$

が成立することを示せ．ただし[illegible]自然対[illegible]，[illegible] e [illegible]よび $\log 2 > 0.6$ を用いてもよい．

(2) 自然数 a，b，[illegible] d の組で

$$[illegible]^{bc} b^{ca} c^{ab} = d^{abc}, \qquad a \leqq b \leqq [illegible]$$

を[illegible]ものを[illegible]よ．

応[illegible]**4** n は[illegible]上の自[illegible]る．関数 $f_n(x) =$ [illegible]$\log x$ $(x > 0)$ について，次の問いに答[illegible]ただし[illegible]$\lim_{x\to+0}$ [illegible] $= 0$ であることを用いてよい．

([illegible]) [illegible] $= f_n($[illegible]増減，[illegible]調べ，グラ[illegible]け．　(長大 [医]2007) $\boxed{5}$

[illegible]数 y [illegible]) の最[illegible]するとき[illegible]数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n+1}}{n}$ の和を求めよ．

(3) [illegible] $f_n(x)$ [illegible] $= 1$ にお[illegible]式を求めよ．

(4) k を[illegible] x に関する[illegible] $x^n \log x = x + k$ $(x > 0)$ の解の個数を求めよ．

応用 5.65 $n \geqq 2$ を自然[illegible]る．　(分大 [医]2007) $\boxed{8}$

(1) 関数 $f(x) = nx -$ [illegible]$- x)^n$ の極値を求めよ．

(2) 次の不等式を示[illegible]

(i) $(1 - x^2)e^{x}$ [illegible] $+ x \leqq e^x \quad (x \geqq -1)$

(ii) $0 \leqq e^x - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \leqq \dfrac{x^2}{n} e^x \quad (x \geqq -n)$

発展 5.66 a，b は $b \geqq a > 0$ をみたす定数とする．x，y が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x^3+y^3=1$ をみたしながら変化するとき，a^2x+b^2y のとり得る値の範囲を求めよ．

(分大 [医]2008) $\boxed{8}$

発展 5.67 正の実数 p_i，q_i $(i=1,2,\cdots,\ n)$ が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ を満たすとき，次の問いに答えなさい．

([illegible]大 [医]2015) $\boxed{8}$

(1) 不等式 $\log x \leqq x-1$ が成り立つことを証明しなさい．

(2) 不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i$ が成り立つことを証明しなさい．

(3) $F = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$ の最小値を求めなさい．

(4) 正の実数 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$ に対し [illegible] $= \displaystyle\sum_{i=1}$ [illegible] の最小値を求めなさい．

5.6　問題研究

5.6.1　相加平均・相乗平均の拡張

63 ページの 5.67(分大 [医]2015) の証明で用いた関数 $f(x) = x - 1 - \log x$ を用いて，次の不等式を証明する．

$a_k > 0,\ p_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$，$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k \geqq \prod_{k=1}^{n} {a_k}^{p_k}$$

等号が成立するのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のと[illegible]

証明　$c = \sum_{k=1}^{n} p_k a_k$ とおく．

$$\sum_{k=1}^{n} p_k f\left(\frac{a_k}{c}\right) = \text{[illegible]} \left(\frac{a_k}{c} - \text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]}}{c}\right)$$

$$= \log c - \sum_{k=1}^{n} p_k \text{l[illegible]}$$

$f(x) \geqq 0$ [illegible]から[illegible]

$\log c$ [illegible] $p_k \log$ [illegible]よって　$\sum_{k=1}^{n} p$[illegible]$\prod_{k=1}^{n} {a_k}^{p_k} \quad \cdots(*)$

[illegible]式に[illegible]，等号[illegible]立する[illegible]次の場[illegible]る．

a[illegible]$\frac{\text{[illegible]}}{c} = \cdot$[illegible]$1$　すなわち[illegible]$= a_2 = \cdots = a_n$

証終

とくに，[illegible]$= p_2 = \cdots =$[illegible]$\frac{\text{[illegible]}}{n}$ とすると，次の相加平均・相乗平均の関係を得る．

$$\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

第 6 章　積分法

6.1　不定積分

基本 6.1 次の各問に答えよ．　(琉球大学 2006) 2

(1) 不定積分 $\int x \cos x \, dx$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ はすべての実数 x で $f'(x)$ [illegible] る．$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で $f(x)$ を求[illegible]

6.2　定積分

□□ **6.2** 次の[illegible]値を求めよ．　([illegible]崎[illegible]) 2

(1) $\int_0^1$ [illegible] x　　(2) $\int_0^{\pi} x \sin$ [illegible]

(3) $\int_0$ [illegible]　　(4) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

□□ [illegible]の定積[illegible]値を求[illegible]　(宮崎大学 2007) 1

(1) [illegible]　(2) $\int^{e} \frac{\log x}{x} dx$　(3) $\int_0^{\pi} \sin^3 x \, dx$

□□ **6.4** [illegible]を求めよ．　(宮崎大学 2008) 2

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos$ [illegible]　　(2) $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$

(3) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \cos 3x \, dx$

□□ **6.5** 次の定積分の値を求めよ. (宮崎大学 2009) 4

(1) $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ ただし，$f(x) = \begin{cases} \sin x & (0 \leqq x \leqq \pi \text{ の[illegible]}) \\ -x + \text{[illegible]} & (\pi \leqq x \leqq 2\text{[illegible]}) \end{cases}$

(4) $\displaystyle\int_0^1 x\log(x^2+1)\,dx$

□□ **6.6** 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{\log\pi}^{\log(2\pi)} e^x\sin(e^x)\,dx$

(2) [illegible]

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\cos(4x)\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\text{[illegible]}}{(x+\text{[illegible]}+3)}\,d\text{[illegible]}$

□□ **6.7** 次の[illegible]値を求めよ. ([illegible]崎[illegible]) 1

(1) $\displaystyle\int^{\sqrt{\text{[illegible]}}}$ [illegible]an$(x^2$[illegible]

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} xe^{3x}$[illegible]

(3) $\displaystyle\int_e$ [illegible] x

(4) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+1}{x(x+1)}\,dx$

□□ [illegible]次の定積[illegible]値を求[illegible] (宮崎大学 2012) 1

(1) [illegible] $\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}x+2}\,d$[illegible]

(2) $\displaystyle\int^1$ [illegible] $+2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1$ [illegible]

(4) $\displaystyle\int_0$ [illegible] $\left(\cos^2 x\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 5x\right)\,dx$

□□ **6.9** 次の定積分の[illegible]めよ. (宮崎大学 2013) 1

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2-x}{2x+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\cos(x^2)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e x^3\log(x^2$[illegible]

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |e^{\cos x}\sin x|\,dx$

□□ **6.10** 次の定積分の値を求めよ. (宮崎大学 2014) $\boxed{1}$

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\sin(5x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 3x + 2}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_1^2 x^5 e^{x^3}\,dx$

□□ **6.11** 次の定積分の値を求めよ. ([illegible]大学 2015) $\boxed{1}$

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x\cos x|\,dx$ (2) $\displaystyle\int^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 + 2x^2 -}{x^2 -}$ [illegible]

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + \sqrt{\frac{3}{4 - 3x^2}}\right) dx$ (4) $\displaystyle\int_1$ [illegible]

□□ **6.12** 次の定積分の値を求めよ. (宮崎[illegible]) [illegible]

(1) $\displaystyle\int_0^2 |e^x - 2|\,dx$ [illegible] $\displaystyle\int_0 x\,\mathrm{s}$ [illegible] $)\,d$ [illegible]

(3) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \log x}}{x}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x^3}{x}$ [illegible] $2x +$ [illegible]

□□ **6.1**[illegible]分 $\displaystyle\int$ [illegible] $|\,dx$ を求めよ. (福[illegible]教育大学 2012) $\boxed{5}$

[illegible]**.14** 定[illegible] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |$ [illegible] の値を求めよ. (琉球大学 2003) $\boxed{1}$

[illegible]定積[illegible] $x\cos$ [illegible]を求めよ. (琉球大学 2014) $\boxed{1}$

□□[illegible]分

$$I_n = \int_0 \cdots x\,dx$$

について, I_1, [illegible] I_3 [illegible]よ. (長崎大学 2016) $\boxed{5}$

基本 6.17 関数 $f(x) =$ [illegible] $1 + \dfrac{x^2}{2}$ について, 次の各問いに答えよ.

(1) 導関数 $f'(x)$ およ[illegible]導関数 $f''(x)$ をそれぞれ求めよ. (鹿児島大学 2016) $\boxed{8}$

(2) $x \geqq 0$ において[illegible] $\geqq 0$ および $f(x) \geqq 0$ が成り立つことを示せ.

(3) $f(x)$ の定積分を利用して $\sin 1 \geqq \dfrac{5}{6}$ を示せ.

基本 6.18 関数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ について，以下に答えよ．　(九工大 [情]2004) $\boxed{1}$

(1) 曲線 $y=f(x)$ の増減，極値および変曲点を調べ，そのグラフの概形を描け．

(2) $a>0$ として，$S(a)=\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ とする．$S(2a)=2S(a)$ となる a の値を求めよ．

基本 6.19 関数 $f(x)=|\,x\,|\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ について，次[illegible]に答えよ．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，最大値，最小値を[illegible]めよ．　([illegible]球大学 2015) $\boxed{2}$

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ を求めよ．

基本 6.20 定積分 $\displaystyle\int_a^{a+1}|e^x-1|\,dx$ の値を $I($[illegible]

(1) $-1\leqq a\leqq 0$ のとき，$I(a)$ を a で[illegible]　([illegible]球大[illegible]) $\boxed{2}$

(2) a が実数全体を動くとき，$I($[illegible]にするよ[illegible]a の値[illegible]

基本 6.21 a，b[illegible]数とし，$f(x)=(ax+b\cos x)\sin$[illegible]おく[illegible]

$$[illegible]\,f'(0)=2,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx\,[illegible]$$

を[illegible]き，[illegible]の値を[illegible]さい．　(大分大学 2014) $\boxed{3}$

[illegible] **6.22** [illegible]は 0[illegible]β[illegible]満たす実数[illegible]とする．$\alpha\leqq t\leqq\beta$ となる t に対[illegible]

$$[illegible]\int^{\beta}|\sin x-[illegible]$$

とお[illegible]最小[illegible]t の値[illegible]　(琉球大学 2003) $\boxed{3}$

基本 6.23 [illegible]関数 $f(x)$[illegible]$e^{-\frac{x}{a}}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $x=c$ で $f(x)$ が極[illegible]とるとき，c を a で表せ．　(熊大 [理]2002) $\boxed{4}$

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$[illegible]表せ．

基本 6.24 区間 $[1,\ e]$ において，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x\log x - x$$

とするとき，次の各問いに答えよ．e は自然対数の底である．(鹿児島大学 2009) 10

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$ を求めよ．

基本 6.25 a，b を定数として，関数 $f(x) =$ [illegible] る．$f(x)$ は $x = 2$ で極小値 $-\dfrac{1}{3}e^2$ をとるとき，次の問いに答えよ．た [illegible]

[illegible] 岡教育 [illegible]

(1) a，b の値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$ を求めよ．

基本 6.26 次の問 [illegible] に答えなさい．([illegible] 2011) 4

(1) 不定積 [illegible] を求めなさい．

(2) x [illegible] 義さ [illegible]

$$[illegible] -x + \int_0^x (xt [illegible])[illegible]\,dt$$

の [illegible] とそ [illegible] の x の [illegible] めなさ [illegible]

[illegible] 次の [illegible] に答え [illegible]　(長崎大学 2014) 7

(1) [illegible] $< \dfrac{\pi}{2}$ の [illegible] $\tan x$ [illegible] x と $\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}$ [illegible] $2 -$ [illegible] めよ．

(3) 関数 $y = \dfrac{e^{[illegible]} - e^{-x}}{2}$ [illegible] 関数を求めよ．

(4) $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ とお [illegible] により，$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ．

標準 6.28 $a>0$ とし，$f(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos ax|\,dx$ とする．次の問に答えよ．

(1) $0<a<1$ のとき，$f(a)$ を求めよ． (琉球大学 2009) $\boxed{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{a\to+0} f(a)$ を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，$f(n)$ を求めよ．

標準 6.29 $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ とおく．次の各問いに答えよ．た… は自然対数の底とする． (…教育大学 2009) $\boxed{4}$

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 7} f(x)\,dx$ を求めよ．ただし，… 数とする．

(2) 等式 $f'(x)=af(x)+b\{f(x)\}^2$ が成り立… だし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 7} \{f(x)\}^2\,dx$ を求め…

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 7} \{f(x)\}^3\,dx$ を求め…

標準 6.30 … よ． (熊大 […) $\boxed{3}$

(1) … 然数 … $x \geqq 0$ ならば，不等 …

$$e^x > \frac{x^n}{n!}$$

が … 立つこ … せ．

(2) … の不等 … いて … ${}^2e^{-x}=0$ であ … を示せ．

(3) … ${}^{-x}$ の … ける接 … 線が x 軸と交わる点を，それぞ … とお … だし a … PQ の長さを $l(a)$ とするとき，極限値 … よ．

標準 6.31 関数 … $(x)=$ … の区間 $t \leqq x \leqq t+1$ における最小値を $g(t)$ とする．このとき，以下の問いに答 … (熊大 [理]2010) $\boxed{3}$

(1) $g(t)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^2 g(t)\,dt$ の値 … よ．

標準 6.32 関数 $f(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ について考える．$\alpha>1$ のとき，次の問いに答えよ．
(長崎大学 2002) 4

(1) 方程式 $f(t)=\alpha$ を満たす正の解を T とする．T を α を用いて表せ．

(2) $x=f(t)$，$y=f'(t)$ とするとき，次の定積分 I の値を α を用いて表せ．

$$I=\int_1^{\alpha} y\,dx$$

標準 6.33 関数

$$f(t)=\int_1^t \frac{\log [illegible]}{x+t} [illegible]$$

を考える．ただし，対数は自然対数とする．

(1) この定積分を $x=ty$ によって置換す[illegible]

$$f(t)=\log t [illegible] \,dy+ [illegible]$$

を示せ．

(2) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_t^1$ [illegible] $\dfrac{\log t}{t(t+1)}$ を示せ．

(3) 導[illegible](t) を[illegible]

(4) [illegible]$f(t)$ の[illegible]

[illegible]6.34 [illegible]然数[illegible]に答えよ． (熊大 [理]2006) 3

(1) [illegible]のとき[illegible]$f(x)$[illegible]$x)^3x^n$ の[illegible]求めよ．

(2) [illegible]積分 $\displaystyle\int_0$ [illegible] $(1-$ [illegible]を求めよ．

(3) 無[illegible] $\displaystyle\sum^{\infty}$ [illegible]を求めよ．

標準 6.35 実数[illegible]に対[illegible]関数 $f(x)$ を

$$[illegible](x)=\int_{p-x}^{p}(t^6+2t^3-3)dt$$

で定める．このとき，[illegible]問いに答えよ． (熊大 [理]2009) 1

(1) $f'(x)$ は，$x=p+1$ のとき最小値をとることを示せ．

(2) $f(p+1)$ の $p>0$ における最小値を求めよ．

標準 6.36 半径1，中心角 θ $(0 < \theta < \pi)$ の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく．以下の問いに答えよ．　(熊大 [理]2013) $\boxed{3}$

(1) $f(\theta)$ を求めよ．

(2) $0 < \theta < \pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ．

(3) 定積分

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\, d\theta$$

を求めよ．

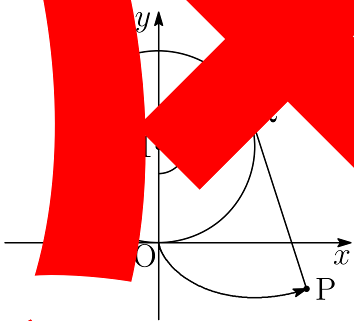
標準 6.37 図のように，固定された半径1の[illegible]$=1$ のまわりに糸がまきつけられており，この糸をぴんと張りながら[illegible]原点Oの位置にあるものとし，ほどいた部分[illegible]太さおよび伸縮は無視できるものとする[illegible]ように与えられるものとし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする．　([illegible]工大 [illegible]) $\boxed{1}$

(1) 点Qの座標を θ を用いて表せ[illegible]

(2) 点Pの座標[illegible]を用いて表せ．

(3) (2) で求[illegible] y 座標を θ の関数とみて[illegible](θ)[illegible] $y = f(\theta)$ の増減を[illegible]その[illegible]小値を求めよ．

(4) [illegible]関数[illegible](θ)[illegible]定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f$[illegible]を計算[illegible]



[illegible]関数

$$f(\ldots) \ldots t - 4 \ldots dt \quad (x > 0)$$

について，[illegible]よ．　(宮大 [医]2008) $\boxed{6}$

(1) $f(x)$ の導[illegible]数 $f'($[illegible]いて，$f'(x) = 0$ を満たす x の値を求めよ．

(2) $f(x)$ の極値を求め[illegible]

標準 6.39 次の各問いに答えよ. (鹿児島大学 2013) $\boxed{4}$

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin 3x\,dx$ を求めよ.

(3) m，n を自然数とする. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{2013}\sin kx\right)^2 dx$ を求めよ.

標準 6.40 次の問いに答えよ. (熊大 [理]2009) $\boxed{4}$

(1) $-\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sqrt{3}\cos x - \sin x >$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left|\frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\right| dx$ を求め

応用 6.41 楕円 E $(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ について，次の　に答え　，b は正の定数とする　) $\boxed{4}$

(1) E を　方程　$= f(\theta)$ とするとき，$f(\theta$　め

(2)　E 上　原点 O と P との距　が点 $(2,\ 0)$ 以外で最大と　ため　条件

　b は　めた　OP が最大となる点における θ の値を θ_0 と　お　だし　$\leqq \dfrac{\pi}{2}$　このと　で求めた $f(\theta)$ について，定積分

$$\int^{\theta_0} f(\theta$$

の

応用 6.42 次の条件によって定められる関数の列 $f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ を考える．

$$f_0(x) = 1$$
$$f_n(x) = 1 - \int_0^x t\, f_{n-1}(t)\, dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ． ([illegible]大 [理]2011) $\boxed{3}$

(1) $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 1$ のとき，$f_n(x) - f_{n-1}(x)$ は x [illegible]ての次数 [illegible]単項式となることを示し，その単項式を求めよ．

(3) $n \geqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{1}{2} \leqq f_n(1 \text{[illegible]}$$

が成り立つことを示せ．

応用 6.43 関数 $f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4($[illegible]$)\, dt$ $\left(0 \text{[illegible]} \frac{\pi}{8}\right)$ [illegible]の問いに答えよ． ([illegible]2010) $\boxed{3}$

(1) $f(x)$ の[illegible]) を求めよ．

(2) $f(0$[illegible]求[illegible]

(3) [illegible] $= f($[illegible]$a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots$[illegible]って定まる数列 $\{a_n\}$ の一[illegible] a_n を[illegible]よ．

[illegible] 6.4[illegible]定数[illegible]して，[illegible](x) を

$$\text{[illegible]} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin t - \text{[illegible]} t \right| dt$$

とお[illegible]の問い[illegible]よ． (熊大 [医]2012) $\boxed{3}$

(1) $f(x)$ [illegible]

(2) $f(x)$ の最[illegible]値と[illegible]きの x の値を求めよ．

6.3　定積分と最大・最小

基本 6.45 すべての実数 x について $f(x)=\int_0^1 e^{|t-x|}\,dt$ とおくとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2005) $\boxed{4}$

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を求めよ．

標準 6.46 実数 a，b は $a \geqq 0$，$b \geqq 0$，a^2+[illegible]1 を満たし[illegible]する．このとき，次の問に答えよ．　(佐大 [医]2016) $\boxed{6}$

(1) 定積分

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\,a\sin \text{[illegible]}$$

を a，b を用いて表せ．

(2) S の最大値，最小値とそのとき[illegible]の値を[illegible]ぞれ[illegible]

標準 6.47 次の問[illegible]に答えよ．　([illegible]2011) $\boxed{4}$

(1) 定積分[illegible]dx を求めよ．

(2) [illegible]自然[illegible]積分 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin$ [illegible]を求めよ．

[illegible]b を実[illegible]する[illegible]を変化させたときの定積分

$$I = \text{[illegible]} - a\sin x \text{[illegible]} 2x)^2\,dx$$

[illegible]最小[illegible]および[illegible]b の値を[illegible]

6.4　漸[illegible]積分法

標準 6.48 n が 0 以上の[illegible]とき，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx$ について，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2002) $\boxed{4}$

(1) I_0 と I_1 を求めよ[illegible]

(2) n が 1 以上のと[illegible]I_n を I_{n-1} を用いて表せ．

(3) I_n を求めよ．

標準 6.49 (佐賀大学 2008) 4

(1) 自然数 n と実数 α について，n が偶数のとき，

$$\int_0^{\pi} \sin^n(\alpha + x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi} \sin^{n-2}(\alpha + x)\,dx$$

となることを示せ.

(2) $a \neq 0$，$b \neq 0$ を満たす実数 a，b に対して，

$\int_0^{\pi} (a \sin$ [illegible] $)^6$ [illegible]

を求めよ.

標準 6.50 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n\theta\,d\theta$ $(n = 1, 2, 3$ [illegible] 問に答えよ[illegible]

[illegible]2) 4

(1) I_1 および $I_n + I_{n+2}$ $(n = 1, 2$ [illegible] 求めよ.

(2) 不等式 $I_n \geqq I$[illegible]$_{+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots$ [illegible] を示せ.

(3) $\lim_{n\to\infty} nI_n$ [illegible]

標準 6.5[illegible] 各問[illegible]よ．ただし，e は自然対[illegible]底と[illegible]る.

(鹿児島大学 2012) 4

[illegible]を自然[illegible]する．[illegible]$) = x^n e^{1-x}$ について，$0 < x < 1$ ならば $0 <$ $f(x)$ [illegible]である[illegible]示せ.

[illegible]数 n に[illegible] $I_n =$ [illegible] $e^{1-x}\,dx$ とお[illegible]．I_1 を求めよ．さらに，I_{n+1} [illegible] I_n の[illegible]成り立[illegible]めよ.

(3) ([illegible]に対[illegible] $= \frac{I_n}{n!}$ と[illegible] $= a_1 - a_n$ であることを示せ.

(4) $S_n = \sum_{k=1}$ [illegible] とお[illegible] $\lim_{n\to\infty} S_n = e - 1$ であることを示せ.

標準 6.52 $r > 0$ とするとき，関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を

$$f_1(x) = e^{-rx},$$
$$f_{n+1}(x) = nre^{-(n+1)rx} \int_0^x f_n(t)e^{(n+1)rt}\,dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．このとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2016) 9

(1) 関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f_n(x)$ を推測し，その推測が正しい[illegible]を，数学的[illegible]を用いて証明せよ．

(3) $n \geqq 3$，$x > 0$ のとき，関数 $f_n(x)$ の[illegible]

標準 6.53 定積分 $I_n = \int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^n\,dx$ $(n = 1$ [illegible]
よ． (宮崎[illegible]) [illegible]

(1) I_1 の値を求めよ．

(2) 等式

$$[illegible]_{+1} = \sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{[illegible]} - (n+1)I_n \quad [illegible] 1, 2 [illegible]$$

が成[illegible]せ．

(3) す[illegible]自然数[illegible]て，等式

$$I[illegible] + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\frac{[illegible]!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

[illegible]立つ[illegible]，数学[illegible]法を用いて[illegible]せよ．ただし，$0! = 1$ とする．

応用 6.54 n を自然数とし，関数 $f_m(x)$ $(m = 0, 1, 2, \cdots, n)$ を次のように定める．

$$f_m(x) = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ x^m & (m \geqq 1) \end{cases}$$

さらに，a_k $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ を次のように定める．

$$a_k = \int_{-1}^{1} f_k(1-x) f_{n-k}(1+x)\, dx$$

以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2015) 3

(1) a_0 と a_1 をそれぞれ n を用いて表せ．

(2) $k \geqq 1$ のとき，a_k を n，k，a_{k-1} を用いて[illegible]

(3) a_k を n，k を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k}$ を n を用いて表せ．

応用 6.55 $n = 1$[illegible]$\cdots$ に対して

$$I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^2 x^n e^x\, dx$$

とお[illegible]だし，[illegible] (九大 [理]2004) 1

(1) [illegible]$_0$ の値[illegible]，n [illegible]き I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ．また，これらを用[illegible]I_3 の値[illegible]よ．

(2) [illegible]$\leqq 2$ [illegible]て e^x [illegible]あることを[illegible]て，次の不等式を示せ．

$$[illegible] \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

(3) 極限 $\lim\limits_{n \to \infty}$[illegible]を求めよ．

6.5　積分方程式 (定数型)

基本 6.56　関数 $f(x)$，$g(x)$ は，次の式を満たすものとする．　(佐賀大学 2002) 2

$$f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x+2}},\quad g(x)=3x^2+\int_{-1}^{1}(x+t)g(t)\,dt$$

(1) $f(x)$ を微分せよ．

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) $b=\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$，$c=\displaystyle\int_{-1}^{1} tg(t)\,dt$ とお[illegible]で表せ．さらに，b，c を求めよ．

基本 6.57　a を正の定数とする．関数 $f(x)$ [illegible]

$$f(x)=2\,\mathrm{c}[illegible]\int_0 [illegible] f(t) [illegible] dt$$

を満たしているとする．次の問いに答えよ．　(福[illegible]2014) 4

(1) $f(x)$ を[illegible]

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}$ [illegible] $\sin x$ [illegible]を満たす定数 a の値を[illegible]．

(3) [illegible](2) で[illegible]値の[illegible]次の (ア)，(イ) に[illegible]．

　(ア) [illegible]$\leqq \pi$ に[illegible]の最大値と最小値を求めよ．

　(イ) [illegible]$\displaystyle\int_0$ [illegible]$|f($[illegible]値を[illegible]．

基本 [illegible] $f(x)$ [illegible] $f(x$[illegible]$+2\displaystyle\int^{2}$[illegible]$dt+\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$ を満たす．次の問いに答[illegible]　(福岡教育大学 2009) 8

(1) $f(x)$ を[illegible]．

(2) $x\log x-x$ と $\dfrac{x^2}{2}\log$[illegible]$\dfrac{x^2}{4}$ の導関数をそれぞれ求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_1^2\{3x^2$[illegible]$\}\log x\,dx$ を求めよ．

標準 6.59 関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\cos x+\int_0^{2\pi} f(y)\sin(x-y)\,dy$$

をみたすものとする．次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2011) 9

(1) $f(x)$ は

$$f(x)=a\sin x+b\cos x$$

の形に表されることを示せ．ただし，[illegible] b は定数で[illegible]

(2) $f(x)$ を求めよ．

6.6 積分方程式 (変数型)

基本 6.60 a は正の定数とする．関数 f[illegible] $\geqq$ [illegible]

$$\int_a^x f(\text{[illegible]}) \text{[illegible]} x\log 2x - \text{[illegible]}$$

を満たす．た[illegible]数は自然対数とする． ([illegible]) 4

(1) $f(x$[illegible]うな[illegible]

(2) [illegible]を求め[illegible]

[illegible].61 次[illegible]いに答[illegible] (琉球大学 2015) 1

(1) [illegible] $\int^{2x}$ [illegible]とするとき，$f'(1)$ および [illegible] を求めよ．

(2) [illegible]数 $f($[illegible]$x)$ が

$$\begin{cases} f(x)\text{[illegible]} = 2\sin x-3 \\ f'(x)g(x)=\cos^2 x \end{cases}$$

を満たすとき，$f($[illegible]$x)$ を求めよ．

標準 6.62 2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の関係式

$$f(x)=\int_0^x (g(t)+t\cos t)\,dt+\sin x,\quad g(x)=\sin x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(f'(t)-\cos t)\,dt$$

を満たすとき，次の問いに答えよ. (熊大 [理]2003) $\boxed{4}$

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}(f(x)-g(x))^2\,dx$ を求めよ.

標準 6.63 次の問いに答えよ. ([illegible]岡教育大学 2001) $\boxed{4}$

(1) $g(x)$ と $h(x)$ を連続な関数とするとき，次[illegible]

$$\int_0^x h(t)g(x-t)\,d \text{[illegible]} dt$$

(2) $g(x)$ を微分可能な関数とし，[illegible] $\frac{\text{[illegible]}}{2}+\int_0^x tg$ [illegible] dt [illegible]の (ア), (イ), (ウ) に答えよ.

(ア) $f''($[illegible]のとき，$g(x)$ と $f(x)$ をそれ[illegible]

(イ) [illegible]求[illegible]) の $0\leqq x\leqq 2\pi$ における[illegible]値を[illegible]とする. [illegible]のとき，[illegible]の値[illegible]を満たす α の値を求[illegible]ただし，[illegible] $0\leqq$ [illegible]とす[illegible]

(ウ) [illegible]求めた[illegible]求めた α の値に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\alpha}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2dx$ [illegible]求め[illegible]

6.7[illegible]・不[illegible]

基本 6.64 [illegible] (琉球大学 2004) $\boxed{3}$

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}<\frac{\text{[illegible]}}{2}+\int_2^{10\text{[illegible]}}$ [illegible]示せ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}$ の小数点以[illegible]捨五入して得られる整数を求めよ. ただし，必要ならば $\log 2$，$\log 5$ [illegible]値として，それぞれ 0.693 ，1.609 を用いよ.

標準 6.65 自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$ とおく．次の問に答えよ． (琉球大学 2003) $\boxed{4}$

(1) I_1 を求めよ．さらに，すべての自然数 n に対して，$I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqq I_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(3) これらの結果を使って，$\log 2 = \lim\limits_{n\to} [illegible] \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ が [illegible] ことを示せ．

標準 6.66 次の各問いに答えよ． ([illegible]児島大学 2007) [illegible]

(1) 微分可能な 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ の積 [illegible]

(2) a を実数とするとき，関数 $y = (1$ [illegible]

(3) 関数 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ の増減，グラ [illegible]，漸近 [illegible] 調 [illegible] の [illegible] かけ．

(4) n が正の整数であるとき，次の [illegible] 等式が成り立 [illegible] とを示 [illegible]

$$[illegible]\ n^2} - 1 < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}} [illegible]\ n^2}$$

標準 6 [illegible] (九工大 [工]2004) $\boxed{5}$

[illegible] > 0 の [illegible] 不等 [illegible] $\cos x$ が成り立つことを示せ．

[illegible] 2) x [illegible] とき [illegible] 式 $\cos$ [illegible] $- \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{}{24}$ [illegible] り立つことを示せ．

[illegible] の長 [illegible]，4，5 [illegible] 三角形の内角 [illegible] 最小のものを θ ラジアンとす [illegible] 次 [illegible] り立つ [illegible]

$$\frac{2}{5} < [illegible] \frac{2\sqrt{195}}{5}$$

標準 6.68 e を自然対数の底とする．このとき，次の各問いに答えよ．
(鹿児島大学 2008) $\boxed{3}$

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^x (x-t)e^t\,dt$ を計算することにより，次の等式を証明せよ．

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t\,dt$$

(2) すべての自然数 n について，等式

$$e^x = 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}x^p + \int_0^x [illegible]\,dt$$

が成り立つことを数学的帰納法により証[illegible]

(3) $x > 0$ のとき，すべての自然数 n に[illegible]が成り立つことを証明せよ．

$$[illegible] + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} [illegible]$$

標準 6.69 0 [illegible] に対して，$f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ [illegible]，0 [illegible]，e は自然対[illegible]とす[illegible]問いに答えよ．
(佐賀大学 [illegible]12) $\boxed{2}$

(1) [illegible]のと[illegible](x)[illegible]数を $f_n(x)$，$f_{n-1}($[illegible]いて表せ．

$\sum_{k=[illegible]} f$[illegible]導関数[illegible]

[illegible]$_n(x)$[illegible]めよ

(4) [illegible]を示[illegible]

標準 6.70 [illegible]．
(琉球大学 2016) $\boxed{3}$

(1) 自然数 n に対して[illegible] dx を求めよ．

(2) $x > 0$ のとき，[illegible]$- \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x+\log(1+x)}\,dx$ を求めよ．

標準 6.71　関数 $f(x) = \log x$ がある．曲線 $y = f(x)$ の点 $(t,\ \log t)$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とするとき，次に答えよ．ただし，対数は自然対数を表し，e は自然対数の底とする．　(九工大 [工]2013) $\boxed{3}$

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $f(x) - g(x) \leqq 0$ を証明せよ．

(2) $t > \dfrac{1}{2}$ のとき，$\displaystyle\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ と $\displaystyle\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} g(x)\,dx$ をそれぞれ t を用いて表せ．

(3) 自然数 n に対して，$n!$ と $\sqrt{2}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ の大小[illegible]よ．

応用 6.72　以下の問いに答えよ．　(九大 [理]2015) $\boxed{2}$

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において単調[illegible]

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$ を求めよ[illegible]

(3) n を 3 以上の整数とするとき[illegible]

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2} < [illegible]$$

が[illegible]こと[illegible]

応[illegible] a，[illegible]数であ[illegible] $a < b$ とする．[illegible]　(佐大 [医]2015) $\boxed{5}$

$$[illegible]\int_0^1 a^{1-t}[illegible]$$

[illegible]，次の[illegible]答えよ[illegible]

(1) [illegible]．

(2) $0 \leqq$ [illegible]の

$$a^{1-t}b^{t} + a^{t}b^{1-t} \geqq 2\sqrt{ab}$$

であることを示せ[illegible]，$I > \sqrt{ab}$ を示せ．

(3) $0 < t < 1$ とする．[illegible]のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$x^t < 1 + t(x-1)$$

(4) (3) の不等式を利用して，$I < \dfrac{a+b}{2}$ を示せ．

応用 6.74 次の各問に答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) $0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，次の不等式を証明せよ． (宮大 [医]2006) $\boxed{6}$

$$\log(\cos x)+\frac{x^2}{2}<0$$

(2) 次の不等式を証明せよ．

$$-\frac{\pi}{3}\log 2+\frac{\pi^3}{81}<\int^{\frac{\pi}{3}}\text{[illegible]}(\cos x)\,dx \text{ [illegible]}$$

応用 6.75 整数 m，n は $m \geqq 1$，$n \geqq 2$ をみ[illegible]の問いに答えよ． ([illegible]大学 2014) [illegible]

(1) $x>0$ のとき，$y=\log x$ の第 1 次導関[illegible]数 y[illegible]を記すのみでよい．

(2) 座標平面上の 3 点 A$(m,\ \log m)$[illegible]$+1$，lo[illegible]$1)$[illegible]と[illegible]形の面積を S_m とする．S_m を m [illegible]表せ．答[illegible]記すの[illegible]

(3) $f(m)=$ l[illegible] $S_m-\int_m^{m+1}\log x\,dx$ とおく．[illegible]$<$[illegible]ことを，$y=$ lo[illegible]用いて説明せよ．

(4) f[illegible]$2)+$[illegible]$-1)<0$ であることを[illegible]，不等式

$$\text{[illegible]}+\log\text{[illegible]}\log(n-1)<n\log n\text{[illegible]}n+1-\frac{1}{2}\log n$$

を[illegible]よ．

(5) [illegible]式 $n!$ [illegible] $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ [illegible]せよ．ただし[illegible]は自然数の底である．

応用 [illegible]以上[illegible]数[illegible]次の[illegible]よ． (琉球大学 2009) $\boxed{3}$

(1) 定積[illegible]を求めよ．

(2) 次の不等[illegible]証明[illegible]

$$\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}\text{[illegible]}1)<\sum_{k=1}^{n}k\log k<\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)+n\log n$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left\{(1^2\cdot 2^2\cdot 3^3\text{[illegible]})^{\frac{1}{n^2\log n}}\right\}$ を求めよ．

応用 6.77　曲線 $y=\log x$ の接線は常にこの曲線の上側にあることを利用して，次の問いに答えよ．以下，k は自然数とする．　(長大 [医]2011) $\boxed{8}$

(1) 点 $\mathrm{A}_k(k,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線と曲線 $y=\log x$ との交点を $\mathrm{A}_k{}'$ とし，$\mathrm{A}_k{}'$ におけるこの曲線の接線を l_k とする．また，$k \geqq 2$ のとき，$\mathrm{B}_k\left(k-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{C}_k\left(k+\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通り x 軸に垂直な直線と接線 l_k との交点を[illegible]れぞれ $\mathrm{B}_k{}'$，$\mathrm{C}_k{}'$ とする．四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}_k{}'\mathrm{B}_k{}'$ の面積を求めよ．

(2) 次の 2 つの値の大小を比較せよ．

(ア) $\log k$ と $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x\,dx$

(イ) $\dfrac{\log k+\log(k+1)}{2}$ と $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \log x\,d$[illegible]

(3) $a_n=\log(n!)-\dfrac{1}{2}\log n$ とおくと[illegible]自[illegible]に[illegible]次の[illegible]が成り立つことを示せ．

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n} \log [\text{illegible}] < a_n < \int_{1}^{n} \text{l}[\text{illegible}]$$

(4) 2 以上の[illegible]ついて

$$[\text{illegible}]\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+[\text{illegible}]\log\frac{3}{2}\Big)$$

$$[\text{illegible}]\Big)\log n-n+1$$

[illegible]とき[illegible]不等[illegible]せ．

$$[\text{illegible}] < \log([\text{illegible}]$$

発展 6.78 次の問いに答えよ．　(九大 [理]2002) 3

(1) すべての正の実数 x，y に対して，不等式

$$x \log x - x \log y - x + y \geqq 0$$

が成り立つことを示せ．ここで log は自然対数を表す．

(2) a，b は実数で $a < b$ とする．関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 [illegible] 正の値をとる連続関数で $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ を [illegible] たす．この [illegible] 等式

$$\int_a^b f(x) \log f(x)\,dx \geqq \text{[illegible]} x)\,dx$$

が成り立つことを示せ．

(3) a，b は実数で $a < b$ とする．閉区間 [illegible] 連続関数 $f($[illegible]$)$ に対し正の実数 M を $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b$ [illegible] とする．[illegible] 式

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \log f(x)\,dx \text{ [illegible] } \log M$$

が [illegible] こと [illegible]

極 [illegible]

本 6 [illegible] の条件 [illegible] って定 [illegible] る数列 { [illegible] ある．

$$\text{[illegible]} \frac{e}{e \text{[illegible]}} \text{[illegible]} \sum^{n} \int_0^k a_k \text{[illegible]} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問い [illegible]　e は自然 [illegible] とする．　(福岡教育大学 2008) 4

(1) a_2，a_3 の [illegible] 求め [illegible]

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 [illegible] めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{n^2}$ を求め [illegible] ただし，対数は自然対数とする．

基本 6.80 相異なる正数 a，b に対して

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{(t+a)^2}\,dt,\quad g(x)=\int_0^x \frac{1}{(t+a)(t+b)}\,dt$$

とおくとき，以下の問に答えよ． (佐賀大学 2005) 4

(1) $x\to+\infty$ のときの $f(x)$ の極限値 A および $g(x)$ の極限値 B を求めよ．

(2) $b\to a$ のときの B の極限値を求めよ．

標準 6.81 放物線 $y=1-x^2$ 上の点 P$(t,$ [illegible] における [illegible] L とする．ただし，$0<t<1$ とする．接線 L と x 軸，y 軸との [illegible]，B とする．次の問いに答えよ． (琉球大学 2001) 2

(1) 接線 L の方程式と，点 A の x 座標を求 [illegible]

(2) 放物線 $y=1-x^2$ と線分 PB および [illegible] 面積を $S(t)$，放物線 $y=1-x^2$ と線分 PA および点 [illegible] y 軸 [illegible] な [illegible] 囲まれ [illegible] の面積を $T(t)$ とする．$\lim_{t\to 0}\{S(t)\cdot T$ [illegible] 求めよ．

(3) $0<t<1$ の [illegible] 囲で面積の和 $S(t)+T(t)$ が最小 [illegible] る t の [illegible] る．このとき $S(a$ [illegible] を示せ．

標準 6.8[illegible] 上に [illegible] 0)，(1，0)，(1，1)，([illegible] を頂点とする正方形と，2 つの放 [illegible] $C_1: y$ [illegible] $C_2: y=-q(x-1)^2$ [illegible] ある．ただし，p，q は定数 [illegible] >1，[illegible] とする [illegible] C_2 が正方形の内 [illegible] 接しているとき，次の問いに答えよ． (長崎大学 2002) 3

[illegible] の値を [illegible] よ．

[illegible] 物線 [illegible] 上側に [illegible] の部分の面 [illegible]，放物線 C_2 の下側にある正 [illegible] の面 [illegible] と [illegible] S [illegible] S_2 を p を用いて表せ．

(3) 極 [illegible] よ．

(4) S が最 [illegible] p [illegible] と最大値を求めよ．

標準 6.83　$x \geqq 0$ で定義された関数

$$f_n(x) = x^2 - \frac{n}{n+1}x^{2+\frac{2}{n}} \quad (n\text{ は自然数})$$

について，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2001) 4

(1) 方程式 $f_n(x) = 0$ の正の解を求めよ．

(2) (1) で求めた正の解を x_n とするとき，$S_n = \int_0^{x_n} f_n(x)\,dx$ [illegible] 用いて表せ．

(3) $\lim_{n\to\infty} nx_nS_n$ を求めよ．
ただし，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (自然対数 [illegible]

標準 6.84　関数 $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ について，次 [illegible]

(1) 極限値 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ と $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を [illegible] 求め [illegible] ま [illegible] $f(x)$ [illegible] を求めよ．

(2) n を自然数と [illegible] するとき，直線 $y = 2^{-n}$ と曲線 y [illegible] によ [illegible] る部分の面積を S [illegible] このとき，S_n を n を用いて [illegible]

(3) (2) の [illegible] 極限値 $\lim_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n)$ を [illegible]．

標準 [illegible] 関数 [illegible] について，次 [illegible] に答えよ．

(熊大 [理]2003) 3

(1) $\int_0^1$ [illegible] x を求 [illegible]

(2) $g(x)$ [illegible] 間 $k \leqq$ [illegible] $+1$ $(k = 0,$ [illegible] $\cdots)$ において，

[illegible] $\left(2\right.$ [illegible] $- k)$

と定 [illegible]

[illegible] $\int_0^n g(x)\,dx \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$

とするとき，数列 [illegible] の極限を求めよ．

標準 6.86 自然数 n に対して,

$$a_n = -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} |\,x\,| \cos nx\,dx, \quad b_n = -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx\,dx$$

とおく．次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2005) 4

(1) a_n と b_n の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{b_{2n}}$ は発散することを示せ．

標準 6.87 関数 $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\cdots$ を

$$f_0(x) = \sin x, \quad f_n(x) = \sin x + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{[illegible]}$$

とする．$g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ $(n =$ [illegible]$)$ [illegible]の問いに[illegible]えよ．

(1) $g_1(x)$ を求めよ． ([illegible]3) 4

(2) $c = g_1(x)$ と[illegible]くとき，$g_n(x)$ を[illegible]と c を用いて[illegible]

(3) $a_n = f_n($[illegible]とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め[illegible]

標準 6.8[illegible]問い[illegible] (琉球大学 2[illegible]02) 4

(1) [illegible]$x < \frac{\pi}{\text{[illegible]}}$[illegible]き，[illegible]$x$ が成り立つ事を[illegible]

(2) $\lim\limits_{r\to}$[illegible] $e^{-r^2 \sin}$[illegible]を求め[illegible]

[illegible]**9** n を[illegible]数とし[illegible]$y = e^{-x}$ 上の[illegible]$(n,\ e^{-n})$ における接線と x 軸と[illegible]を a[illegible] x 軸上[illegible]$(n,\ 0)$ と点 $\mathrm{R}_n(a_n,\ 0)$ をとる．このと[illegible]の各問[illegible]よ． (宮崎大学 2006) 3

(1) a_n を[illegible]

(2) $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$ の面積[illegible]用いて表せ．

(3) 曲線 $y = e^{-x}$，直線[illegible]，$x = a_n$ および x 軸で囲まれる部分から，$\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1$，$\triangle \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2\mathrm{R}_2$，$\cdots$，[illegible]$_n\mathrm{R}_n$ を取り除いた部分の面積を S_n とする．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を[illegible]．

標準 6.90 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{x-1}} + \dfrac{1}{1+e^{-x-1}} - 1$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ が最大となる x の値を求めよ．　(宮崎大学 2009) 5

(2) 正の数 a に対し，定積分 $I(a) = \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ を a を用いて表せ．

(3) (2) の $I(a)$ について，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

標準 6.91 n を 2 以上の自然数とし，関数 $f(x)$ を $f(x) = x^n$ l[illegible] $0)$ とする．ただし，対数は自然対数とする．次に答えよ[illegible]工大 [工]2015) 3

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $\log x + \dfrac{1}{x} > 0$ を[illegible]

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^n \log x = 0$ を示せ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，その最小値[illegible]曲線 y [illegible]かけ．ただし，曲線の凹凸は調べ[illegible]

(4) $f(x)$ が最小値をとるときの x [illegible] c_n とし

$$I_n = \int_{c_n}^{1} f(x)\,dx$$

とす[illegible]$\displaystyle\lim_{n\to\infty}$[illegible]求めよ．

標準 [illegible] 次の[illegible]答え[illegible]　(鹿児島大学 2001) 2

(1) 関数 [illegible] $x - e$ [illegible]方程式 $f(x) = 0$ は正の解をただ 1 つもつことを[illegible]その解[illegible]よ．

(2) [illegible]で曲[illegible] $2x^2$ l[illegible]曲線 $y = kx^2$ [illegible] $> 0)$ が共有点において，共通接線[illegible]ように[illegible]を定めよ．

(3) [illegible]値と[illegible]の共[illegible]対して，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{a} (2x \text{[illegible]} x - kx^2 + k)\,dx$$

を求めよ．ただし[illegible]があれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0$ を用いてよい．

標準 6.93 関数 $f(x)=e^{-x}\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right|$ に対して，

$$a_n=\int_0^n f(x)\,dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

とおく．ただし記号 $[x]$ は x を越えない整数を表すものとする．このとき次の各問いに答えよ．
(鹿[illegible]大学 2003) 2

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を $0\leqq x\leqq 1$ の範囲でかけ．[illegible]凹凸も調べよ．

(2) a_1 を求めよ．

(3) a_n を n と a_1 を用いて表せ．さらに $\lim\limits_{n\to\infty}$ [illegible]

応用 6.94 次の問いに答えよ．

(1) e を自然対数の底とし，$f(x)=e^{x}$ [illegible] x [illegible]
$0<x<1$ においては $0<f(x)$ [illegible]成り立[illegible]を示[illegible]
また，$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)=0$ を示[illegible]必要であれ[illegible]3 を使[illegible]

(2) 関数 $g(x)$ [illegible]考える．区間 $0\leqq x\leqq 1$ を n [illegible]区[illegible]小区間を[illegible]左端の点における関数 $g(x)$ [illegible]を[illegible]とする[illegible]の面積[illegible] K_n と[illegible] $\to\infty$ のとき

$$[illegible]\left|\int_0^1 g(x)\,dx-K_n\right|$$

が[illegible]の値に[illegible]るよ[illegible]の自然[illegible]そのときの極限値を求めよ．

応[illegible]5 a [illegible]実数と[illegible]

$$[illegible]=ax-[illegible]) \quad (x>1)$$

とおく．た[illegible]対数である．各 a に対して，$f(x)$ が最小となるときの x の値を $h(a)$ と[illegible]る．
(九工大 [工]2001) 4

(1) $h(a)$ を求めよ．

(2) a の関数 $h(a)$ に対[illegible] $F(a)=ah(a)-\log(h(a)+\log\sqrt{(h(a))^2-1}\,)$ とおく．
$F(a)$ が $h(a)$ の[illegible]数であることを示せ．

(3) $I_n=\int_n^{n+1} h(a)\,da \ (n=1,2,\cdots)$ とおく．I_n を求めよ．さらに，$\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

応用 6.96　$f(x)$ は数直線上の連続関数で，次の条件 (i) と (ii) をみたすものとする．

(i)　$f(x)$ は周期 1 の周期関数，すなわち，すべての x で $f(x+1) = f(x)$ が成り立つ．

(ii)　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2011) $\boxed{4}$

(1)　条件 (i) と (ii) をみたす恒等的に 0 でない連続関数 $f(x)$ の[illegible]つ挙げよ．

(2)　$F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)\,dy$ とおくと，$F(x)$ も[illegible]期 1 の周期[illegible]ることを示せ．

(3)　$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$\dfrac{d}{dx}F(nx)$ を f [illegible]

(4)　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^1 xf(nx) \text{[illegible]})$$

と定める．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ．

応用 6.97　以下の問いに答えよ．　([illegible]2010) $\boxed{4}$

(1)　p を 0 で[illegible]する．関数 $f(x) = ae^{-x}\sin$ [illegible]
$f'(x)$ [illegible]るように，定数 a，b を定[illegible]

(2)　[illegible] $\displaystyle\int_0^{t^2}$ [illegible] t [illegible] $0)$ とおく．このと[illegible] (t) を求めよ．

[illegible] $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{\text{[illegible]}}$ [illegible]を求[illegible]

[illegible]を正[illegible]とする[illegible]列 $\{a_n\}$ を

$$a \text{[illegible]} x|\,dx \quad (\text{[illegible]}, 2, 3, \cdots)$$

と定める[illegible]に答えよ．　(熊大 [医]2015) $\boxed{4}$

(1)　$a_{n+1} - a_n$ [illegible]求め[illegible]

(2)　$\{a_n\}$ の一般項を求[illegible]

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を r を用い[illegible]せ．

(4)　(3) で求めた r の[illegible] (r) とおく．$\displaystyle\lim_{r\to+0} rf(r)$ を求めよ．

応用 6.99 次の各問いに答えよ．　　(宮大 [医]2007) 6

(1) $x \geqq 1$ のとき，不等式 $\log x < 2\sqrt{x}$ が成り立つことを示せ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(2) n を自然数とするとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ．

(3) n を自然数とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin x)^n \text{[illegible]}\right\}^{\frac{1}{n}} = 3$$

であることを示せ．

応用 6.100 n を自然数とするとき，極限値 li[illegible]
求めよ．　　(宮大 [医]2[illegible]09) 7

応用 6.101 $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^n}\,dx$ ([illegible], $\cdots$) とお[illegible]，次[illegible]よ．

(1) I_1，I_2 の値[illegible]めよ．　　[illegible]09) 6

(2) $\lim_{n\to\infty} I$[illegible]

応用 [illegible]数列 [illegible]

$$\text{[illegible]}\sum_{k=1}\text{[illegible]} \qquad b_n = \sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k}\cos\frac{2k\pi}{3}$$

[illegible]定義す[illegible]　　(分大 [医]2007) 9

(1) [illegible] $\sum$ [illegible] $\frac{1}{\text{[illegible]}}$ [illegible]．

(2) $\lim_{n\to\infty} a$[illegible]

(3) $\lim_{n\to\infty} b_n$ を[illegible]めよ．

応用 6.103 連続関数 $f(x)$ に対して

$$v(x) = \int_0^x e^t f(x-t)\,dt$$

とする．このとき，次の問に答えよ．　(佐大 [医]2014) 7

(1) $f(x) = x$ のとき，$v(x)$ を求めよ．

(2) $v(x) + f(x) = \sin^4 x$ のとき，$v(x)$ を求めよ．

(3) $v(x) + f(x) = \sin^4 x$ のとき，$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{[illegible]}$ [illegible]求めよ．

発展 6.104 次の一連の問いに答えなさい．　(分大 [医]2014) 9

(1) 自然数 m に対して，$x > 0$ のとき $e^x >$ [illegible]

(2) 自然数 n に対して，$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ [illegible]さい．

(3) 自然数 n に対して $\Gamma_K(n) = \int_0^{[illegible]} [illegible] e^{-x}\,dx$ と[illegible]き，[illegible]を求めなさい．

6.9 区分求積法

□□ **6.105** [illegible] $\lim_{n \to \infty} \sum [illegible])^{\frac{1}{3}}$ の値を求めよ．　(琉球大学 2003) 1

□□ **6.106** 次の[illegible]を求め[illegible]　(長崎大学 2015) 5

$$\lim_{n \to \infty} \left([illegible] + \frac{3}{n^2 + [illegible]} [illegible] \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$$

□□ **6.107** [illegible] $+ \frac{n}{n^2 + 2^2} + [illegible] \frac{n}{n^2 + n^2} \Big)$ を，ある関数 $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における定積[illegible]を用い[illegible]，この極限値を求めよ．　(長崎大学 2011) 5

標準 6.108 $\log x$ の定積分を用いて，次の極限値を求めよ．(福岡教育大学 2002) 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}$$

標準 6.109 n を自然数とする．次の各問に答えよ． (琉球大学 2006) 1

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$ を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots}$ [illegible] を求めよ．

標準 6.110 関数 $f(x)$ の区間 $[a,\ b]$ $(a<b)$ に [illegible] 近似値として，$[a,\ b]$ を n 等分してえられる，次の A_n，B_n，T_n を考え [illegible]

$$A_n=\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)h,\quad B_n=\sum_{j=1}^{n}f(\text{[illegible]} \quad \text{[illegible]}+f(x_{j+1})\text{[illegible]}h$$

ただし，$h=\dfrac{b-a}{n}$，$x_j=a+jh$ $(j$ [illegible] $1,2,\cdots,n)$ [illegible] る．

このとき，次の [illegible] ある空欄 $\boxed{}$ に適する数ま [illegible] 式を [illegible] だけを答えよ． [illegible] 島大 [illegible] 11

(1) T [illegible]，B_n [illegible] 表すと $T_n=\boxed{}$ で [illegible]

(2) [illegible] $f(x)$ [illegible] $[0,$ [illegible] ける定積分の近似 [illegible] B_n，T_n を n を用いて表すと A [illegible] $\boxed{}$，$T_n=\boxed{}$ である．また，近似値 T_n による [illegible] 対誤差 [illegible] 以下 [illegible] ような分 [illegible] の数 n の最小値は $\boxed{}$ である．[illegible] し，真 [illegible] の近 [illegible] による相対誤 [illegible] $\left|\dfrac{s-S}{S}\right|$ である．

標準 6.111 $I = \displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$ とおく．区間 $[0,\ 1]$ を n 等分して台形公式を適用したときの I の近似値を I_n と表す．このとき次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2004) 12

(1) 分点の x 座標を小さい方から $x_0 = 0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n = 1$ としたとき，I_n を n と x_k $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ を用いて表せ．

(2) $y = x^3$ のグラフの概形を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲でかき，I_2 はどの[illegible]うな領域の面積を表しているか図示せよ．

(3) $I_n - I$ を n の式で表せ．必要ならば，[illegible]式

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + [illegible]\}^2$$

を用いてもよい．

標準 6.112 次の問いに答えよ．　([illegible]崎大学[illegible]) 6

(1) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$ とする．$x =$ [illegible] とおくこと[illegible]り，I_1 [illegible]．

(2) (1) の I[illegible]して，I_1 と $I_2 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2+[illegible]}$ [illegible]値を求め[illegible]

(3) [illegible]$+\sqrt{x^2}$[illegible]により，不定積分[illegible]$\dfrac{dx}{[illegible]^2+1}$ を求めよ．

[illegible]合成関[illegible]分法[illegible]数 $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ の導関数を求めよ．

[illegible]) 極[illegible] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{ [illegible] + 1^2} + [illegible] + 2^2} + \cdots [illegible] \frac{1}{[illegible] + n^2} \right\}$ を求めよ．

6.10 問題研究

6.10.1 テイラー展開

$f(t)$ を必要な回数だけ微分可能 (C^∞級) な関数とし，$k \geqq 1$ とする．

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt = -\int_a^x \left\{\frac{(x-t)^k}{k!}\right\}' f^{(k)}(t)\,dt$$

$$= -\left[\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt$$

$$= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt$$

よって $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$

上式を $k = 1, 2, 3, \ldots n-1$ について辺々を加えると

$$\int_a^x f'(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

ゆえに

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \tag{6.1}$$

積分区間における $f^{(n)}(t)$ は最大値，最小値をもつので，これらをそれぞれ M，m とすると $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$ は [illegible]

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} M\,dt = \frac{M}{n!}(x-a)^n, \quad \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} m\,dt = \frac{m}{n!}(x-a)^n$$

[illegible]をとるから，この間にある c は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{6.2}$$

を満たす．(6.2) を (6.1) に代入すると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{6.3}$$

(6.3) を $f(x)$ の $x = a$ におけるテイラー展開 (Taylor expansion) という．
とくに $a = 0$ とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n \tag{6.4}$$

となり，これをマクローリン展開 (Maclaurin's expansion) という．

6.10.2　多項式のテイラー展開

n 次多項式 $f(x)$ の最高次の係数を a とすると　$f^{(n)}(x)=a\cdot n!$
したがって，$x=p$ を極とする $f(x)$ のテイラー展開は

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-p)^k}{k!}f^{(k)}(p)+a(x-p)^n$$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ のとき

$$f'(x)=3ax^2+2bx+ \text{[illegible]} x)= \text{[illegible]}$$

$p=-\dfrac{b}{3a}$ とすると，$f''(p)=0$ であるから

$$f(x)=f(p)+f'(p)(\text{[illegible]}$$

このとき　$f(p+k)=f(p)$ [illegible] $+ak$ [illegible]
$f(p-k)=f($ [illegible] $p)k-ak^3$ [illegible]

任意の実数 k に[illegible]て 2 点 $(p+k,\ f(p+k))$，$(p$ [illegible] $(p$ [illegible]変曲点 $(p,\ f(p))$ であ[illegible]って，54 ページの 5.36 にあ[illegible]関数[illegible]は，変曲点に関[illegible]称[illegible]

とくに[illegible]$x)=0$[illegible]$ax^2+2b+c=0$ が異[illegible]2 つの実数解 α，β をもつと[illegible]$\beta)$，[illegible]数の[illegible]り

$$\text{[illegible]}\ \alpha+\beta\ \text{[illegible]}\ 3a=2p\ \text{[illegible]}=\frac{c}{3a}$$

$$\text{[illegible]}x)=3\ \text{[illegible]}\ 2bx+\ \text{[illegible]}-\alpha)(x-\beta)\ \text{[illegible]}\ x)=3a\{2x-(\alpha+\beta)\}$$

$f(x)$[illegible]極とし[illegible]イ[illegible]開を行[illegible]

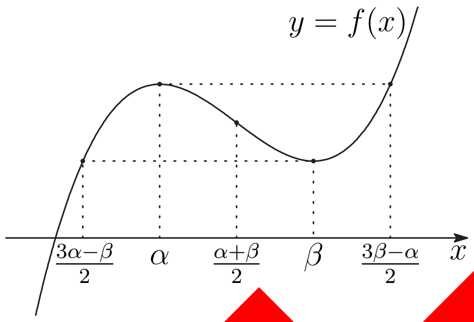
$$\text{[illegible]}\ f'(\alpha)(x-\alpha\ \text{[illegible]}\ 2!\ \text{[illegible]}'(\alpha)(x-\alpha)^2+a(x-\alpha)^3$$

したがって　$f(x)-$ [illegible] $\dfrac{3a}{2}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2+a(x-\alpha)^3$

$$=a(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$$

同様にして　$f(x)-f(\beta)=a(x-\beta)^2\left(x-\dfrac{3\alpha-\beta}{2}\right)$

$a>0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる．



このとき，数列 $\frac{3\alpha-\beta}{2}$, α, $\frac{\alpha+\beta}{2}(=p)$, [illegible] α は [illegible] 数列をなす．

補足 この結果は，定義域が与えられた 3 次関数 [illegible] 値を求める問題や 3 次方程式の解の存在する範囲をグラフを [illegible] 活用できる．

6.10.3　オイラーの公式

(6.3) から得ら [illegible] 級数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)} [illegible]}{n [illegible]}$$

をテ [illegible] 級数 ([illegible] s [illegible] いう．同様に，(6. [illegible] 得られる級数

$$[illegible] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad \cdots(*)$$

[illegible] リン [illegible] Macla [illegible] eries) という．

[illegible] とき [illegible] り $f^{(n)}$ [illegible]

- $f($ [illegible] x [illegible] $f^{(n)}(x)$ [illegible] $2\Big)$ より $f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}$
- $f(x)=$ s [illegible] と [illegible] $(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ より $f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$

これらの結果を $(*)$ に代 [illegible] と

$$e [illegible] x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$
$$\cos [illegible] 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

上の第 1 式から　　$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

したがって　　$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ をオイラーの公式 [illegible] Fo[illegible] という.

6.10.4　ギブスの不等式

2 つの確率分布 $P = \{p_1, p_2 \dots, p_n\}$，$Q$ [illegible] q_2 [illegible] て，次の [illegible] ブスの不等式 (Gibbs' inequality) が成立する [illegible] 論にお [illegible] 離 [illegible] 布 [illegible] 分野で用いられる).

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \leqq -\sum_{i=1}^{n} p_i \ \text{[illegible]}$$

上式より [illegible] 式

$$\text{[illegible]} \log p_i \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log \text{[illegible]}$$

得る. [illegible] 証明 [illegible] 問題 [illegible] ージの 5 [illegible] 分大 [医]2015) である. これに対 [illegible] 連 [illegible] の不等 [illegible]

$$\int^{b} \text{[illegible]}\, dx \geqq \int^{b} \text{[illegible]} \log g(x)\, dx$$

を証明さ [illegible] ージの 6.78 [illegible] 002) である.

第 7 章　積分法の応用

7.1　面積

7.1.1　有理・無理関数と面積

基本 7.1
$$f(x) = \begin{cases} x(5-x) & [illegible] \\ x(x^2 & [illegible] \end{cases}$$

とおき，関数 $y=f(x)$ のグラフを C とお[illegible]は，原点 O [illegible]よびそれ以外の 2 点 P，Q で交わっているも[illegible]る．た[illegible]座標[illegible]点 Q の x 座標は負であるとする．線分 O[illegible]によって[illegible]る図[illegible](a)，線分 OQ と C によって囲まれる図形の面[illegible]積を $S_2(a)$ とし[illegible]$a) = S$[illegible]$a)$ とおく．このとき，次の[illegible]えよ．　　　　　　[illegible]5)　1

(1) a の値[illegible]よ．

(2) S[illegible]a を用[illegible]

(3) [illegible]を a [illegible]

[illegible]1) で求[illegible]範囲を[illegible]とき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

基本 7.2 [illegible]，c，[illegible]数とし[illegible]4 次関数[illegible]を

$$f(x) [illegible] + 2ax^3 + 6bx [illegible] + d$$

とす[illegible]曲線 y[illegible]る．[illegible] $\alpha = 1+\sqrt{\frac{5}{6}}$，$\beta = 1-\sqrt{\frac{5}{6}}$ とおくとき[illegible]と[illegible]の 3 つの条[illegible]），（は）を満たすものとする．

（い）点 $(\alpha,$ [illegible]$f(\beta))$ は共に C の変曲点である．

（ろ）$f(x)$ は $x=1$ で極[illegible]つ．

（は）$f(2)=0$

次の問いに答えよ．　　　　　　(福岡教育大学 2011)　5

(1) a，b，c，d の[illegible]めよ．

(2) C を x 軸方向に -1 だけ平行移動した曲線を $y=g(x)$ とおく．$g(x)$ を求めよ．

(3) x 軸と C とで囲まれた図形の面積 S を求めよ．

基本 7.3　曲線 $y=\sqrt{x}$ について，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2004) $\boxed{4}$

(1) この曲線上の点 $(a,\ \sqrt{a})$ $(a>0)$ における接線と x 軸およびこの曲線で囲まれた図形の面積 $S_1(a)$ を求めよ．

(2) この曲線上の点 $(a,\ \sqrt{a})$ $(a>0)$ における法線と x 軸およびこの曲線で囲まれた図形の面積 $S_2(a)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\frac{S_1(a)}{S_2(a)}$ を求めよ．

基本 7.4　n は自然数とし，数列 $\{x_n\}$ は

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{4}{x_n}\right) \end{cases}$$

によって定まるものとする．このとき，[illegible]　(佐賀大学 [illegible]08) $\boxed{3}$

(1) すべての n について $x_n \geqq 2$ で[illegible]とを証明[illegible]

(2) すべての n [illegible]ついて $x_{n+1}-2 \leqq$ [illegible](x_n-2) であ[illegible]とを証[illegible]

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ [illegible]

(4) $f($[illegible]，$g($[illegible]$+\dfrac{4}{x}\Big)$ とするとき，$g($[illegible]$f(x)$ となる x の範囲を求[illegible]

[illegible]$=f($[illegible]$=g($[illegible]1 で囲まれた図形の面積を求めよ．

基本 7.[illegible]数 $f($[illegible]$\dfrac{\ }{1+x^2}$[illegible]て，次の各[illegible]えよ．　(宮崎大学 2012) $\boxed{4}$

(1)[illegible](x) 上の[illegible]における[illegible]の方程式を求めよ．

(2) 曲[illegible]l との共有[illegible]点 P と異なる点 Q の x 座標を求めよ．

(3) 曲線 y[illegible]によって囲まれる部分の面積を求めよ．

標準 7.6 関数 $f(x) = kx^3 - 3kx$ $(k > 0)$ が表す座標平面上の曲線を $C : y = f(x)$ とする．曲線 C 上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(ap,\ f(ap))$ における接線をそれぞれ l_1，l_2 とする．ただし，$p > 0$，$a \neq 1$ とする．以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2012) 1

(1) 点 P における接線 l_1 の方程式を k，p を用いて表せ．

(2) 点 Q における接線 l_2 が点 P を通るとき，a の値を求めよ．

(3) ある k に対して 2 つの接線 l_1，l_2 が点 P において垂直に交[illegible]ているとき，k を p を用いて表せ．また，そのような k が存在する p の[illegible]囲を求めよ．

(4) ある k に対して 2 つの接線 l_1，l_2 が点[illegible]おいて垂[illegible]っているとき，接線 l_2 と曲線 C によって囲まれた図形[illegible]を[illegible]て表せ．

標準 7.7 関数 $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 11$ に[illegible]

(1) $y = f(x)$ の増減と極値を調べ，グラフ[illegible] (長崎[illegible]

(2) $y = f(x)$ と異なる 2 点で接する直[illegible]程式[illegible]

(3) $y = f(x)$ と (2) で求めた直線[illegible]れた部分[illegible]積を[illegible]

標準 7.8 a を実数[illegible]する．関数

$$[\text{illegible}]x + \frac{1}{2}, \quad f_2(x) = x^2 + ax \quad [\text{illegible}] \quad g[\text{illegible}]\frac{x}{x+1}$$

につ[illegible]以下に[illegible] (九工大 [情]2005) 1

(1) [illegible]限値[illegible](x) を[illegible]の範囲で $y = g(x)$ のグラフの概形を描け．

(2) す[illegible] $x \geqq 0$ [illegible]して f[illegible]$\geqq f_2(g$[illegible]なる a の範囲を求めよ．

(3) [illegible]のと[illegible]線 y[illegible]$x))$ と $y = f_2($[illegible]直線 $x = 1$，y 軸によって囲[illegible]れる[illegible]面積 [illegible]

標準 7.[illegible]面[illegible]，直角双[illegible]$\frac{[\text{illegible}]}{x}$ と直線 $l : x + y = k$ を考え，C と l の 2 つの[illegible]る．ここで[illegible]より大きな定数である．次の問いに答えよ． (長崎大学 2004) 5

(1) 点 A，B の x 座標[illegible]それぞれ α，β $(\alpha < \beta)$ とする．点 A における曲線 C の法線の方程式を，α[illegible]て表せ．

(2) 2 点 A，B におい[illegible]線 C に接する円の中心の座標と半径を，k を用いて表せ．

(3) 曲線 C と直線[illegible]まれた部分の面積を，k を用いて表せ．

標準 7.10 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする．ただし，$t>1$ とする．このとき，以下の問いに答えよ． (九大 [理]2011) $\boxed{1}$

(1) H の座標を t を用いて表せ．

(2) $x \geqq 1$ の範囲において，曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ．

(3) 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とす[illegible] $S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ．

標準 7.11 $a>0$ とする．曲線 $C: y=$ [illegible] x [illegible] $>1)$ [illegible] $=a$ における接線 $l: y=px+q$ について，次に答えよ． (九工大 [工]2009) $\boxed{4}$

(1) p と q を a を用いて表せ．

(2) 等式 $(px+q)(x^2-1)-1$ を $p(x-a)^2($ [illegible] いて表せ．また，$x>1$ のとき $\frac{1}{x^{[illegible]}}$ [illegible]

(3) 曲線 C と直線 l および直線 x [illegible] 囲まれた [illegible] の面 [illegible] とき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} S(a)$ を求めよ．

標準 7.12 $f($ [illegible] $-x^2|$ $(x \geqq 0)$ とするとき，[illegible] 次に答えよ． [illegible] 工大 [工] [illegible]) $\boxed{4}$

(1) [illegible] 増減を [illegible] C の概形を描け．

(2) [illegible] 定積分 [illegible] x^2- [illegible] めよ．

(3) $0 \leqq$ [illegible] 2 とす [illegible] 曲線 C [illegible] $y=m$ で囲まれた図形の面積 $S(m)$ を求 [illegible]

(4) [illegible] で求 [illegible] $m)$ の [illegible] 求めよ．

標準 [illegible] とし [illegible] の曲 [illegible]

$$y=\sqrt{\ [illegible]}\ \ [illegible] \geqq 0),$$

$$y=\frac{a^3}{x} \qquad (x>0)$$

を順に C_1，C_2 とする． [illegible] C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を l_1 とする．以下の問いに答えよ． (九大 [理]2013) $\boxed{1}$

(1) 曲線 C_1 と y 軸 [illegible] 直線 l_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ．

(2) 点 P における C_2 の接線と直線 l_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $\left(0<\theta(a)<\dfrac{\pi}{2}\right)$．このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a)$ を求めよ．

応用 7.14 関数 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ の極限を求め，グラフをかけ． (長大 [医]2006) $\boxed{4}$

(2) m を実数とするとき，直線 $y = m(x-1)$ と曲線 $y = f(x)$ の交点の x 座標を求めよ．

(3) $m > 0$ のとき，(2) で求めた x 座標のうち，最小のものを α，最大のものを β として，$\alpha + \beta$ および $\alpha\beta$ を求めよ．

(4) $m > 0$ のとき，$y = m(x-1)$ と $y = f(x)$ で囲まれた部分[illegible]$S(m)$ を求めよ．

応用 7.15 曲線 $C : y = (x-a)(x-4)(x-$[illegible]て考[illegible]こで a，b は $a < 4 < b$ を満たす定数とする． (分大 [医]2006) $\boxed{6}$

(1) 曲線 C と x 軸とで囲まれる 2 つの部分の[illegible]なさい．

(2) $a > 0$ とする．曲線 C と x 軸，y[illegible]ま[illegible]の面積[illegible]いとき，a，b の値を求めなさい．

応用 7.16 xy 平面[illegible]で，点 (1，0) ま[illegible]の距離と y 軸[illegible]の距離[illegible]ある点の軌跡を C とす[illegible]の問いに答えよ． [illegible]) $\boxed{4}$

(1) C で[illegible]た[illegible]積を求めよ．

(2) [illegible]数と[illegible]$y^2 = a$ と C の交点[illegible]が，a の値によってどのよ[illegible]変わ[illegible]調べ

[illegible] **7.1**[illegible]面上[illegible]$2\cos$[illegible]$2\cos 3$[illegible]$\leqq \theta \leqq \pi)$ と媒介変数表示された[illegible]線 C[illegible]る．[illegible]き，[illegible]に答えよ． (佐大 [医]2014) $\boxed{5}$

[illegible]$\theta \leqq$[illegible]おいて[illegible]式で表せ．[illegible]$\frac{}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ において，y を x の

(2) 曲[illegible]

(3) 曲線 C[illegible]積を求めよ．

応用 7.18 放物線 $y=x^2$ 上に，x 座標が t である点 $\mathrm{P}(t)$ をとる．ただし，$t \geqq 0$ とする．$h \neq 0$ とし，放物線の $\mathrm{P}(t)$ における法線と，$\mathrm{P}(t+h)$ における法線を考える．$h \to 0$ とするとき，この 2 法線の交点の x 座標の極限値を $u(t)$，y 座標の極限値を $v(t)$ とする．さらに $(u(t),\ v(t))$ を $\mathrm{Q}(t)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $u(t)$ と $v(t)$ を求めよ．　(長大 [医]2008) 6

(2) $\mathrm{Q}(t)$ が上の放物線上にあるとき，t の値と $\mathrm{Q}(t)$ の座標を求[illegible]

(3) 上の放物線，曲線 $x=u(t)$，$y=v(t)$ および y 軸で囲[illegible]図形の面積を求めよ．

応用 7.19 曲線 $C_1 : y=\dfrac{x^2}{2}$ の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ [illegible]点 $\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の交点を R とする．ただし，$b \neq a$ とする[illegible]

(1) b が a に限りなく近づくとき，R [illegible] A [illegible]く．A [illegible]標を a で表せ．

(2) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき，[illegible]で求めた点 A [illegible]く軌跡[illegible]る．曲線 C_1 と軌跡[illegible]概形を描き，C_1 と C_2 の交点の[illegible]求め[illegible]

(3) 曲線 C[illegible]囲まれた部分の面積を求め[illegible]

発展 7.[illegible]標平面[illegible]標と y 座標がともに整[illegible]る点を格子点と呼ぶ．格子[illegible]とし[illegible]長さ[illegible]ある正方形 (周は[illegible]い) を単位正方形と呼ぶこ[illegible]る．n[illegible]自然数[illegible]

$$D_n = [illegible] \mid 0 \leqq x,\ [illegible] \leqq n\}$$

[illegible]その[illegible]S_n と[illegible]M_n を，そ[illegible]D_n に含まれる格子点の個数およ[illegible]形の個[illegible]る．　(九大 [理]2003) 3

(1) ク[illegible]$\leqq n^{\frac{1}{p}}$) と[illegible]正方形の個数は n であることを示せ．

(2) 不等式[illegible]n[illegible]$+\,n$ を示せ．また，面積 S_n を求めよ．

(3) 極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}}$[illegible]求めよ．

7.1.2 三角関数と面積

基本 7.21 関数 $f(x)=2\sin x\cos x-\tan x+2x$ について，次の問いに答えよ．
(佐賀大学 2012) 3

(1) 区間 $-\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ における $f(x)$ の最大値および最小値を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=-\frac{\pi}{6}$，$x=\frac{\pi}{3}$ とで囲ま[illegible]た 2 つの部分の面積の和を求めよ．

基本 7.22 2 つの曲線 $C_1: y=\sin 2x$ $(0$ [illegible] $\pi)$，C_2 [illegible] x $\left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$ について，次の各問に答えよ．
(宮崎大学 2004) 4

(1) $0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ における $\sin 2x=\tan x$ の解を[illegible]

(2) C_1 と C_2 の概形を同一座標平面上にか[illegible]

(3) C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を[illegible]

基本 7.23 次に答えよ． ([illegible]010) 3

(1) $0\leqq x\leqq\pi$ [illegible]囲において，$\sin^2 x=\sin^2 (x+$ [illegible] 解[illegible]

(2) 曲線[illegible] $\leqq\pi)$ と曲線 $y=\sin^2 (x$ [illegible] $($[illegible] $x\leqq\pi)$ で囲まれた 図[illegible]積 S[illegible]

基[illegible]**24** 次[illegible]いに答[illegible] (鹿児島大学 2006) 10

(1) y [illegible]の導関[illegible]定義[illegible]て求め[illegible]
[illegible]し，三[illegible]の極限[illegible]性質 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin}{x}$ [illegible]は用いてよい．

(2) [illegible]sin[illegible]第 1 次[illegible]次導関数[illegible]よ．

(3) [illegible] $\sin^2$ [illegible] $x\leqq\frac{\pi}{2})$ [illegible]よび変曲点を調べて，そのグラフの概[illegible]

(4) (3) のグ[illegible] C [illegible] C の変曲点と原点を通る直線を l とする．l と C で囲まれた部分の面積を[illegible]．

基本 7.25 関数 $f(x) = -x + 2\int_0^x (x-t)\sin t\,dt$ と $y = f(x)$ が表す曲線 C について，次の各問いに答えよ．（鹿児島大学 2002）$\boxed{2}$

(1) $f(x)$ を積分を含まない形で表せ．

(2) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲における極値とそのときの x の値を求めよ．

(3) 点 $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{2},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ における C の法線 L を表す方程式 $y = g(x)$ を求め，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲では $f(x) \leqq g(x)$ であることを示せ．

(4) L と C および y 軸によって囲まれる[illegible]面積を求[illegible]

標準 7.26 関数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \sin^2 x$ $(0 \leqq x \leqq$ [illegible]線 $C : y = f(x)$ がある．次に答えよ．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 直線 $l : y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + a$ $(a > 0)$ は[illegible]に接し[illegible]．[illegible]接[illegible]を求めよ．

(3) a を (2) で[illegible]値とする．曲線 C と直線 l で[illegible]た図[illegible]求めよ．

標準 7.2[illegible] $f(x) = \left|\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right|$ [illegible]

を[illegible]ただ[illegible]$\pi \leqq$[illegible]する．さらに，[illegible]$\leqq \frac{\pi}{2}$ に対して，

[illegible] $= \int$ [illegible] $\left(x - \frac{\pi}{}\right.$[illegible]

[illegible]のと[illegible]問い[illegible]．（九大 [理]2006）$\boxed{4}$

(1) [illegible]よる x[illegible]

(2) [illegible]$f(x)$[illegible]フの概形[illegible]

(3) $F(a)$[illegible]

7.1.3　指数関数と[illegible]

基本 7.28 $1 \leqq a \leqq e$ と[illegible]$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，曲線 $y = e^x - a$ と x 軸で挟まれた部分の面積を $S(a)$[illegible]．このとき，次の問いに答えよ．（琉球大学 2002）$\boxed{3}$

(1) $S(a)$ を求めよ．

(2) $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

基本 7.29 a を正の定数とし，関数

$$f(x)=(x-a)e^{-x}$$

について，次の各問いに答えよ．ただし e は自然対数の底である．

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ． (鹿児島大学 2010) $\boxed{9}$

(2) 関数 $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調[illegible]グラフの概形をかけ．

(4) n を正の整数とする．曲線 $y=f(x)$ と[illegible]$=a+n$ とで囲まれた部分の面積 S_n を n と a で表せ．また，[illegible]

基本 7.30 関数 $f(x)=xe^{-x}$ について，次の[illegible]ただし，[illegible]の底であり，$x>0$ とする． ([illegible]児島大学 [illegible]5) $\boxed{6}$

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．また，[illegible] $f(x)$ の[illegible]調べ[illegible]け．ただし，$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ を用いて[illegible]．

(2) $t>0$ とす[illegible]曲線 $y=f(x)$ と x 軸，およ[illegible]部分の面積[illegible]

(3) t[illegible]ると[illegible]$=f(x)$ と x 軸，およ[illegible]の直線 $x=t$ と $x=t+1$ [illegible]れる[illegible]が最大となるよう[illegible]値を求めよ．

[illegible].31 [illegible] $xe^{-\frac{x}{[illegible]}}$[illegible]) とする．次の問いに答えよ．ただし，e は自[illegible]対数の[illegible]る． (福岡教育大学 2013) $\boxed{4}$

[illegible]) の極[illegible]めよ．

[illegible]る．[illegible]囲で $f($[illegible]の実数解の個数を求めよ．

(3) 2[illegible]線 y [illegible]と $y=g($[illegible]部分の面積を求めよ．

基本 7.32 関[illegible]$)=$[illegible]$+2e^x-3$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ の $-1 \leqq x \leqq$ [illegible]ける最小値を求めよ． (宮崎大学 2001) $\boxed{3}$

(2) 曲線 $C: y=f(x)$ [illegible] 0 における接線と $x=a$ における接線が直交している．このとき，次の[illegible]B) に答えよ．

(A) a の値を求[illegible]

(B) x 軸，y 軸，直線 $x=a$ および曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ．

基本 7.33 定数 a, b と自然対数の底 e に対して，$f(x) = (ax + b)e^{-x}$ とおく．曲線 $y = f(x)$ は点 $(0,\ 2)$ を通り，その点における接線の傾きは 2 であるとする．このとき，次の問に答えよ． (佐賀大学 2013) 3

(1) a, b の値を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲において，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれ[illegible]形の面積 S を求めよ．

基本 7.34 関数 $f(x) = ae^{2x}$ (a は定数) に[illegible]曲線[illegible])上の点 $(b,\ f(b))$ における接線が $y = x$ であるとき，次の各問に[illegible]，e は自然対数の底で，$e = 2.718\cdots$ である． [illegible]

(1) a と b の値を求めよ．

(2) $g(x) = f(x) - x$ とおくとき，$0 \leqq$[illegible]最大値と最[illegible]値を求めよ．

(3) $y = f(x)$ の逆関数を $y = f^{-1}($[illegible]表す．この[illegible]曲線 y[illegible] $y = f^{-1}(x)$[illegible]軸および y 軸によって囲まれる[illegible]面積[illegible]

標準 7.35 [illegible]よ． ([illegible]熊大 [[illegible]) 1

(1) [illegible]とき[illegible]1 の大小関係を調べ[illegible]

(2) [illegible]の曲線[illegible]e^{-x},[illegible]$^2 + 1)$ と直線 x[illegible]で囲まれる部分の面積を求めよ．

標準 7.[illegible]数 $f($[illegible]e^{-2x}[illegible]て次の問[illegible]よ．ただし，e は自然対数の底 (佐大 [医]2013) 6

(1) [illegible](x) の[illegible]か[illegible]なら[illegible]$xe^{-2x} = 0$ を使ってよい．

(2) 曲[illegible]のうちで[illegible]となるものを l とする．その接線 l の方程式[illegible])を求めよ．

(3) $x < a$ にお[illegible]て，[illegible]は曲線 $y = f(x)$ より上側にあることを証明せよ．ただし，a は (2) で求め[illegible]のとする．

(4) 曲線 $y = f(x)$，接[illegible]および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

標準 7.37 関数 $f(x) = xe^x$ で定まる曲線 $C : y = f(x)$ を考える．p を正の数とする．以下の問いに答えよ．　(長崎大学 2016) $\boxed{7}$

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．また，すべての x について

$$\{(ax+b)e^x\}' = f(x)$$

が成り立つような定数 a，b の値を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における C の接線を $\ell : y =$ [illegible] $+ d$ とする．c と d の値を p を用いて表せ．さらに [illegible] $x \geqq 0$ に [illegible] 数 $g(x) = f(x) - \{c(x-p)+d\}$ の増減を調べ，不等式 [illegible]

$$f(x) \geqq c(x-p) + \text{[illegible]}$$

が成り立つことを示せ．

(3) $x \geqq 0$ の範囲で，曲線 C と接線 ℓ [illegible] y 軸 [illegible] 形を F [illegible] その面積 $S(p)$ を求めよ．

(4) 2 辺が x 軸，y 軸に平行な長方 [illegible] を考える．[illegible] 図形 F [illegible] いるとき，R の面積 [illegible] $T(p)$ を求めよ．さらに，$\lim\limits_{p\to\infty}$ [illegible] を [illegible]

標準 7.3[illegible] $f(x)$ [illegible] $\sqrt{3}\,x$ について以下の [illegible] 答えよ．ただし，e は自然対 [illegible] とする．　(九工大 [情]2015) $\boxed{1}$

(1) [illegible] $0 \leqq x$ [illegible] $\frac{\text{[illegible]}}{3}\pi$ の [illegible] をみたす x の値をすべて求めよ．

(2) [illegible] $\leqq \frac{2\sqrt{\text{[illegible]}}}{\text{[illegible]}}$ [illegible] 範囲で [illegible] の増減を調べ [illegible] だし，凹凸は調べなくてよい．

(3) [illegible] 分積 [illegible] 回用い [illegible] 定積分を [illegible]

(4) 0 [illegible] $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ [illegible] 囲で 2 つ [illegible] と $y = e^{-x}$ によって囲まれた部分の面 [illegible]

標準 7.39 自然対数の底を e とする．区間 $x \geqq 0$ 上で定義される関数

$$f(x) = e^{-x} \sin x$$

を考え，曲線 $y = f(x)$ と x 軸との交点を，x 座標の小さい順に並べる．それらを，P_0，P_1，P_2，$\cdots$ とする．点 P_0 は原点である．

自然数 n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して，線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ と $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする．以下の問いに答えよ．([illegible]大[医]2015) 8

(1) 点 P_n の x 座標を求めよ．

(2) 面積 S_n を求めよ．

(3) $I_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$ とする．このとき，I_n と $\lim_{n\to\infty}$ [illegible]

応用 7.40 $f(x) = xe^x$ とおく．また p を $p \geqq$ [illegible]，[illegible]点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線の方程式を y [illegible] e は自然対数の底である．このとき，次の問いに答えよ[illegible] ([illegible]大[illegible]) 1

(1) $x \geqq 0$ において $f(x) \geqq g(x)$ が[illegible]つことを[illegible]

(2) L を正の数[illegible]る．曲線 $y = f(x)$，接線 $y = g($[illegible]よび[illegible] $x = L$ で囲ま[illegible]面積を $S(p)$ とするとき，$p \geqq$ [illegible]$)$[illegible]を与える[illegible]

7[illegible]対数[illegible]と面[illegible]

[illegible] **7.41**[illegible]

$$f [illegible] \frac{[illegible] + \log x}{x} [illegible])$$

[illegible]曲線[illegible] $= f($[illegible]を $\mathrm{P}(a,\ f(a$[illegible]る．曲線 C と直線 $x = a$，および[illegible]れた図[illegible]積[illegible]よ．(長崎大学 2016) 5

基本 7.4[illegible]を[illegible]然対数とす[illegible]き，次の問に答えよ．ただし，e は自然対数の底[illegible] (佐賀大学 2006) 3

(1) $y = \log x$ を微分せ[illegible]

(2) 不定積分 $\int \log x\, d$[illegible]めよ．

(3) 関数 $f(x) = \frac{1}{e}x$[illegible] $\left(\frac{1}{e} \leqq x \leqq e^2\right)$ の増減を調べよ．

(4) xy 平面において，2 直線 $y = \frac{1}{e}x$，$x = \frac{1}{e}$ と曲線 $y = \log x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

基本 7.43 直線 $\ell : y = ax + b$ と曲線 $C : y = \log x$ $(x > 0)$ は接するものとする．ただし，a，b は定数であり，$a > 0$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) b を a を用いて表せ．　(佐賀大学 2015) $\boxed{2}$

(2) ℓ と C および x 軸で囲まれた図形の面積を S とする．$0 < a < 1$ のとき，S を a を用いて表せ．

基本 7.44 $k > 0$ とする．2つの曲線

$$C_1 : y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4-k}{2}x + 1 \text{ [illegible] } y = k\text{[illegible]} - 1$$

は，ある共有点 P において共通の接線 l をも[illegible]対数は自然対数を表す．次に答えよ．

(1) 共有点 P の座標と共通の接線 l の方程[illegible]す．

(2) 接線 l が点 $(1,\ 0)$ を通るとき，曲[illegible] x 軸[illegible]標を[illegible]

(3) 接線 l が点 $(1,\ 0)$ を通るとき[illegible]$_2$ と x 軸[illegible]接線[illegible]分の面積を求めよ．

基本 7.45 e [illegible]の底，a，b，c は実数である．[illegible]+[illegible]し，曲線 $y =$ [illegible] C[illegible] C_1 と C_2 が点 $\mathrm{P}(e,\ e)$[illegible]て[illegible]るとき，次[illegible]問いに答えよ[illegible]で，2[illegible]点 P で接しているとは[illegible]に点 P を通り，かつ，その点[illegible]る接[illegible]致し[illegible]とである．　(佐賀大学 2010) $\boxed{4}$

(1) a，b[illegible]を求[illegible]

(2) C[illegible]およ[illegible] y 軸[illegible]まれた図[illegible]積を求めよ．

基[illegible] a [illegible]定数[illegible] $= \dfrac{\log x}{a}$ を[illegible]る．次の問いに答えよ．ただし，[illegible]対数[illegible]は自[illegible]の底[illegible]．　(福岡教育大学 2014) $\boxed{7}$

(1) 点 $\Big(0$[illegible]線 C に引い[illegible]線の方程式を a を用いて表せ．

(2) (1) で求め[illegible]接線[illegible] C と x 軸によって囲まれた部分のうち第 1 象限の部分の面積を a を用い[illegible]．

(3) 曲線 C が曲線 $y =$ [illegible]共有点をもち，その点における 2 つの曲線の接線が一致しているとき[illegible]線 C と曲線 $y = \dfrac{x^2}{2e}$ と x 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ．

基本 7.47　a を正の定数とする．関数 $f(x) = ax - x\log x$ の最大値が 1 であるとする．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2016) $\boxed{4}$

(1) a の値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ の接線のうち，傾きが $-\dfrac{1}{2}$ であるものを求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および (2) で求めた接線によって囲まれ [illegible] 部分の面積を求めよ．

基本 7.48　関数 $f(x) = (\log x)^2 - \log x$ $(x$ [illegible] を考える． [illegible] 問いに答えよ．

(1) $f(x) = 0$ を満たす x をすべて求めよ．　(鹿児島大学 2016) $\boxed{6}$

(2) 導関数 $f'(x)$ および 2 次導関数 $f''(x)$ をそれ [illegible]
ラフの概形を描け．ただし関数 $y = f(x)$ [illegible]
を明示すること．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた [illegible] 面積を [illegible] よ．

基本 7.49　次の各問いに答えよ．　(鹿 [illegible] 2005) $\boxed{2}$

(1) $t > 0$ の [illegible] 等式

$$\log t \leqq 2\sqrt{t} - 2 \text{ [illegible]}$$

が [illegible] つこ [illegible] よ．

(2) [illegible] $\lim\limits_{t\to}$ [illegible] を求 [illegible]

[illegible] $f(x)$ [illegible] $\log x$ $($ [illegible] と [illegible] の結果を用いて $\lim\limits_{x\to+0} f(x)$ を求め，さらに [illegible] (x) を [illegible]．

[illegible] 数 $y =$ [illegible] $(x >$ [illegible] 極値およ [illegible] フの凹凸を調べて，そのグラ [illegible] かけ．

(5) 区 [illegible] $e]$ [illegible]，曲線 y [illegible] 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．
ただ [illegible] の底である [illegible]

標準 7.50 n を 2 以上の自然数とし，x の関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x) = x^n \log 2x, \quad g(x) = \log 2x$$

とする．ただし，対数は自然対数とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ． (福岡教育大学 2011) 4

(2) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ．

(3) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲ま[illegible]た図形の面積[illegible]めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

標準 7.51 曲線 $C_1 : y = \sqrt{x}\,|\log x|$ と曲線 C_2 : [illegible]ただし，対数は自然数対数とする．次に答えよ．

(1) 関数 $f(x) = \sqrt{x}\log x$ の増減，極値[illegible]の概形をか[illegible]．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to+0} \sqrt{x}\log x = 0$ であるこ[illegible]てよ[illegible]

(2) 曲線 C_1，C_2 は $x > 0$ におい[illegible]の交点をも[illegible]れら[illegible]よ．

(3) (2) で求めた[illegible]点の x 座標を a，b $(a < b)$ とす[illegible]線 C[illegible]$x \leqq b$ の部分が囲[illegible]面積 S を求めよ．

標準 7.5[illegible]正の[illegible]る．また，対数は自然[illegible]e は自然対数の底を表す．以下の[illegible]に答え[illegible] (九工大 [情]2010) 1

[illegible]不定積[illegible]log(a[illegible]

(2) 0[illegible]e の範[illegible]曲線 y[illegible](ax) と直[illegible]1 とが交わるように，a の値の[illegible]を定め[illegible]

([illegible]値[illegible]で求め[illegible]とする．[illegible]面において，曲線 $y = \log(ax)$[illegible]$y = 0$[illegible]e と[illegible]うち，$y \leqq 1$ の部分の面積を S_1，$y \geqq$[illegible]分[illegible]を S_2 とする[illegible]$-S_2$ を a を用いて表せ．

(4) a の値[illegible]範囲にあるとする．S の最大値とそのときの a の値を求めよ．

標準 7.53 関数 $f(x) =$ [illegible]$+1)$[illegible]$+1$，$g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ がある．次に答えよ．

(1) $f(x)$ の増減をし[illegible]極値を求めよ． (九工大 [工]2004) 4

(2) 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ の交点の座標を求めよ．

(3) 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

標準 7.54 $a > 0$ に対して，$f(x) = a + \log x\ (x > 0)$，$g(x) = \sqrt{x-1}\ (x \geqq 1)$ とおく．2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ が，ある点 P を共有し，その点で共通の接線 l を持つとする．このとき，次の問いに答えよ．　(九大 [理]2008) $\boxed{4}$

(1) a の値，点 P の座標，および接線 l の方程式を求めよ．

(2) 2 曲線は点 P 以外の共有点を持たないことを示せ．

(3) 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

標準 7.55 次に答えよ．ただし，対数は自然[illegible]数とする．必[illegible]は，$1.09 < \log 3 < 1.10$ を用いてよい．　[illegible]九工大 [工]2010) $\boxed{4}$

(1) すべての $x > 0$ に対して，不等式 $x - \frac{x}{2}$[illegible]り立つことを示せ．

(2) 関数 $f(x) = x - \frac{x^2}{3} - \log(1+x)$ の $0 \leqq$[illegible]大値，最[illegible]

(3) 方程式 $x - \frac{x^2}{3} = \log(1+x)$ は 0[illegible]の範囲[illegible]を[illegible]もつ[illegible]示せ．

(4) (3) における解を α $(0 < \alpha <$ [illegible]る．
曲線 $y = x$[illegible]と曲線 $y = \log(1+x)$ で囲まれ[illegible]形 (0[illegible]分) を S とす[illegible] $= x - \frac{x^2}{3}$，曲線 $y = \log($[illegible] $x = 2$ [illegible]れた図[illegible] $\leqq x \leqq$ [illegible]の面積を T とする．S[illegible]の大小を比較せよ．

[illegible]　そ[illegible]の面[illegible]

[illegible]準 7[illegible]程式[illegible] $(1 -$ [illegible]表す図形で[illegible]れた面積を求めなさい．　(分大 [医]2015) $\boxed{6}$

標準 [illegible] $= \int^{3}$ [illegible] dx，[illegible]とする．　(大分大学 2012) $\boxed{4}$

(1) 次の等[illegible]数 x につい[illegible]成り立つように，定数 a，b の値を定めなさい．

$$[illegible]\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} = a\sqrt{x^2+9} + \frac{b}{\sqrt{x^2+9}}$$

(2) I_1 において部分積[illegible]することにより，I_1 を I_2 で表しなさい．

(3) $\log(x + \sqrt{x^2+}$[illegible]関数を利用して，I_2 を求めなさい．

(4) 曲線 $x^2 - y^2 = -9$ と直線 $y = 3\sqrt{2}$ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

標準 7.58 O を原点とする座標平面上に 2 点 A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ をとる．ただし，O，A，B は一直線上にないものとする．$0 < t < 1$ として，線分 AO を $t : (1-t)$ に内分する点を P_t，線分 OB を $t : (1-t)$ に内分する点を Q_t，さらに，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ を $t : (1-t)$ に内分する点を R_t とし，$\mathrm{R}_0 = \mathrm{A}$，$\mathrm{R}_1 = \mathrm{B}$ とする．また，t が 0 から 1 まで動くときに点 R_t の軌跡として得られる曲線を S とし，点 A，B の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とおく．以下に答えよ． (九工大 [情]2001) $\boxed{2}$

(1) 3 点 P_t，Q_t，R_t の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}_t$，$\vec{q}_t$，$\vec{r}_t$ とお[illegible] $\vec{q}_t$，$\vec{r}_t$ を t と $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) R_t の座標を t，a_1，a_2，b_1，b_2 を用[illegible]

(3) $0 < t < 1$ のとき，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ は R_t で曲[illegible]とを示せ．

(4) 2 点 A，B の座標がそれぞれ A$(2,\ 1)$，B[illegible] OB，および曲線 S で囲まれる部分の面[illegible]

標準 7.59 実数 t が $t \geqq 0$ の範囲を動く[illegible] y 平[illegible]$^{-t})$ が[illegible]線を C とする．a を正の実数とし，曲線[illegible]軸，y 軸[illegible]直[illegible]れる部分の面積を $S(a)$ とする．このとき[illegible]問いに答えよ[illegible]2005) $\boxed{5}$

(1) 面積 $S(a$[illegible]よ．

(2) $a > 0$[illegible](a) の増減，凹凸を調べ，[illegible]の概形を[illegible]ただし[illegible]ae^{-a}[illegible]ことを用いてよい．

(3[illegible]$) = 1$[illegible]る a[illegible]< 3 の範囲に存在[illegible]ことを示せ．ただし，必要なら 2[illegible]< 3 で[illegible]いてよい．

[illegible] [illegible]関数 $f($[illegible]t $+ \frac{2t}{}$[illegible] $g(t) = 4$[illegible]$\frac{e}{}$ $\leqq t \leqq 2e\Big)$ の定める曲線 C : [illegible] $y =$[illegible]ついて[illegible]よ．ただし[illegible]は自然対数で e は自然対数の底[illegible] (九工大 [工]2001) $\boxed{5}$

(1) 関[illegible]と[illegible]減を調べ[illegible]

(2) $f(\alpha)$[illegible]つような α，β $(\alpha \neq \beta)$ に対して $\alpha\beta$ の値を求めよ．

(3) 曲線 C は[illegible]軸に平[illegible]ある直線に関して対称であることを示せ．

(4) 曲線 C と y 軸で囲[illegible]図形の面積を求めよ．

標準 7.61 $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ を満たす θ について，$r(\theta) = \sqrt{2\cos 2\theta}$ とするとき，座標平面上で円 $x^2 + y^2 = \{r(\theta)\}^2$ と直線 $y = (\tan\theta)x$ は2つの交点をもつ．そのうち，x 座標が正であるものをPとし，Pの x 座標を $f(\theta)$，y 座標を $g(\theta)$ とする．θ を $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の範囲で動かしたときの点Pの軌跡を C とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $f(\theta)$，$g(\theta)$ を求めよ．　(宮大 [医]2015) 6

(2) $g(\theta)$ の最大値を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸，直線 $x = f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ で囲ま[illegible]た部分の面積[illegible]よ．

応用 7.62 平面上を運動する点P$(x,\ y)$ の時[illegible] y 座標が

$$\begin{cases} x = \dfrac{e^t - e^{[illegible]}}{2} [illegible] \\ y = e^t [illegible] \end{cases}$$

で表されている．ただし，e は自然[illegible]である[illegible]を[illegible]とする．t が $t \geqq 0$ の範囲で変化したと[illegible]が描く曲[illegible]とす[illegible]において，曲線 C，線分OM[illegible]よび線分OPで囲まれる図形の[illegible]を A([illegible]曲線 C と線分MPで囲[illegible]の面積を $S(t)$ で表す．次の[illegible]

(1) 点[illegible]の座[illegible]に対して y を x を用いて[illegible]　(九大 [理]2[illegible]02) 1

(2) [illegible]を用い[illegible](t)[illegible]を表せ．

(3) [illegible]$(t) -$ [illegible]最大[illegible]を求めよ．

[illegible]用 7[illegible]標平面[illegible]動く点[illegible]$,\ y(t))$[illegible]における座標が

$$\begin{cases} x = [illegible]\cos\left(t + \dfrac{\pi}{[illegible]}\right) [illegible] \\ y = [illegible](2t)[illegible] \end{cases} \quad (0 \leqq t < 2\pi)$$

で与えら[illegible]の点の軌跡[illegible]る．　(九大 [理]2004) 3

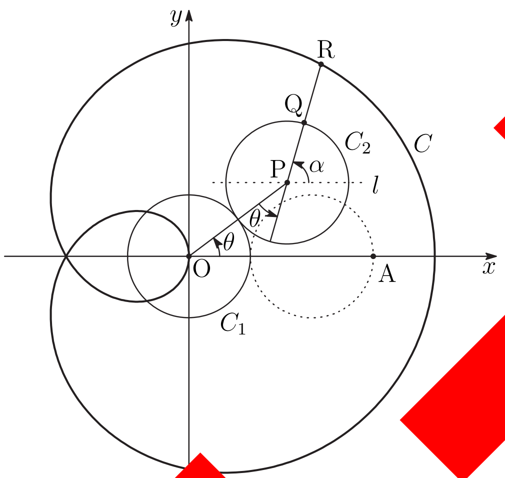
(1) Pが原点[illegible]ると[illegible]度ベクトルを求めよ．

(2) C が x 軸，y 軸に[illegible]対称であることを示せ．

(3) C の概形を描け．

(4) C が囲む図形の[illegible]求めよ．

応用 7.64 原点 O を中心とする半径 1 の円を C_1 とする．円 C_1 に外接しながら，半径 1 の円 C_2 がすべることなく回転する．円 C_2 の中心を P とし，円 C_2 上の点 Q は最初，x 軸上の点 A(3, 0) にあるものとする．半直線 PQ 上で点 P からの距離が 2 の点を R とし，OP が x 軸の正の向きとなす角を θ とする．C_2 が回転して θ が 0 から 2π まで変化するとき，点 R が描く曲線を C とする．曲線 C の概形を図 1 に示す．以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2016) $\boxed{2}$



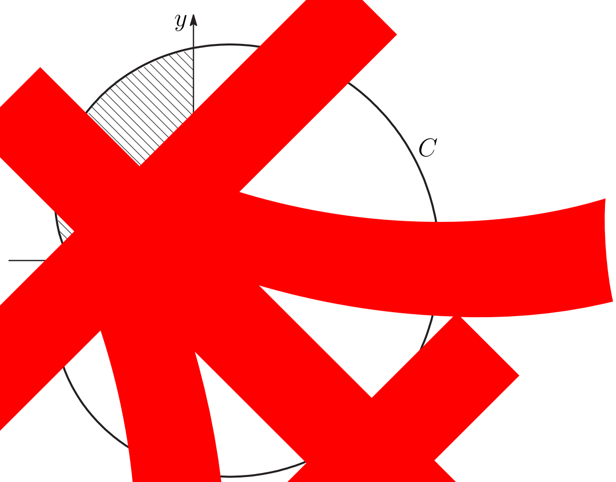


図 [illegible]

(1) 点 P [illegible]いて表せ．

(2) 点[illegible]通り x 軸[illegible]直線を l とする．直線[illegible]分 PR のなす角 α を，θ を[illegible]て表せ[illegible]た，[illegible]標を θ を用いて表せ[illegible]

[illegible]曲線 C [illegible]軸の共[illegible]すべて求めよ．

[illegible]) 曲線[illegible] y 軸の[illegible]点の座[illegible]べて求[illegible]

[illegible]の x 座[illegible]最小と[illegible]きの点 R の座[illegible]すべて求めよ．

[illegible]線 C [illegible]と，y 軸[illegible]図 2 の斜線[illegible]の面積を求めよ．

応用 7.65 半径 1 の円と長さ 2 の線分がある．この線分の一方の端点を，円の中心に合わせて円上に固定した図形を考える．線分の端点で，円の中心とは異なるものを P とする．この図形を下の図 1 のように xy 平面上に置く．すなわち，中心が点 $(0,\ 1)$，P が点 $(0, -1)$ と一致するように置く．

図 1

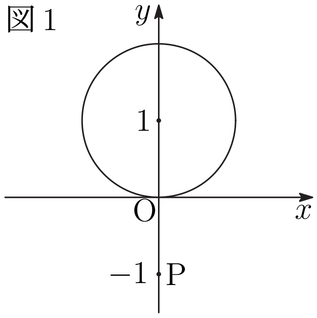
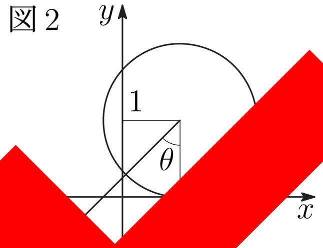


図 2



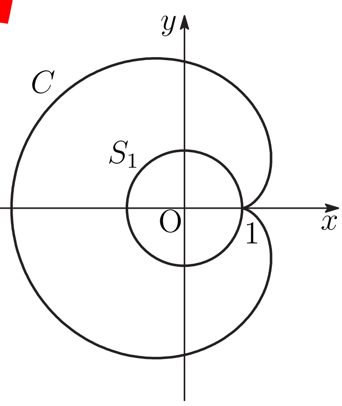
次に，x 軸上で正の方向に，すべらないよう[illegible]る．[illegible]
だけ回転したときの状態を表している．[illegible] P が描く[illegible]線 C について考察する．次の問いに答えよ[illegible]大[illegible]) 7

(1) 図 2 における点 P の x 座標と y [illegible]標を，それぞ[illegible]を用い[illegible]

(2) 曲線 C 上[illegible]て，x 座標が最小となる点，最[illegible]なる[illegible]小となる点，[illegible]について，それぞれの座標[illegible]

(3) 曲[illegible]直線[illegible]および $x = \pi$ によって[illegible]た図形の面積 S を求めよ．

応[illegible]66 x[illegible]に原[illegible]とする半径 1 の[illegible]と，[illegible]中心と[illegible]径[illegible] S_2 がある．円[illegible]は円[illegible]接し[illegible]，すべ[illegible]なく円[illegible]計回[illegible]周する[illegible]の出発点は ([illegible]円 S[illegible]点で，[illegible]0) に位置[illegible]いる[illegible]る．点[illegible](2, 0)[illegible]発し[illegible]に戻っ[illegible]き[illegible]描く曲線[illegible]，図のようにな[illegible]A と x 軸の[illegible]部分とのなす角が θ (0[illegible] 2[illegible]るときの点 P の座標を $(x(\theta),\ y(\theta))$ とする．こ[illegible]，次の問いに答えよ．



(1) $x(\theta)$，$y(\theta)$ を θ を[illegible]表せ． (長大 [医]2009) 7

(2) 曲線 C が x 軸に[illegible]対称であることを証明せよ．

(3) 曲線 C と円 S[illegible]て囲まれた部分の面積を求めよ．

応用 7.67 $-1 < x < 1$ で定義される関数 $f(x) = 2x + \sqrt{5 - 5x^2}$ について，座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ を考える．このとき，次の各問に答えよ．(宮大 [医]2013) $\boxed{8}$

(1) 曲線 C は上に凸であることを示し，$f(x)$ の最大値を求めよ．

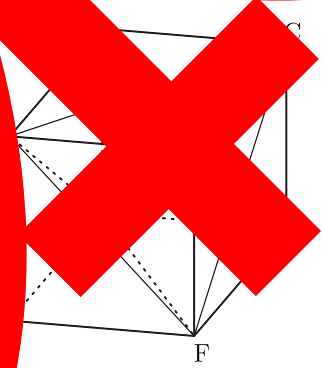
(2) 曲線 C 上の点のうち，原点 O との距離が最大となる点を A，最小となる点を B とするとき，A，B の座標をそれぞれ求めよ．

(3) (2) で求めた点 A，B について，線分 OA，線分 OB，および[illegible]線 C で囲まれる部分の面積を求めよ．

7.2　体積

7.2.1　非回転体の体積

標準 7.68 次の問いに答えよ．(琉球大学[illegible]) [illegible]



(1) 直径 1 の球を球の中心から距離 [illegible] 切って二つの部分に分けたとき，[illegible]含まない部分の体積を求めよ．ただし，$0 < a < \frac{1}{2}$ とする．

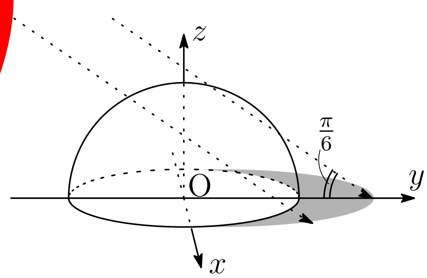
(2) 一辺[illegible]る立方体 ABCD-EFGH を[illegible]．この[illegible]内接する球と正四面[illegible]FH と[illegible]積を求めよ．

[illegible]69 座[illegible]内に[illegible]0, 0) を中心とする半径 1 の球がある．下の概[illegible]のよう[illegible]軸の[illegible]向[illegible] $\frac{\pi}{6}$ で太陽光線が当っている．この太陽光線[illegible]ク[illegible]0, $\sqrt{3}$[illegible]と平行[illegible]．球は光[illegible]ないものとするとき，以下の問[illegible]よ．(九大 [理]2015) $\boxed{3}$

(1) [illegible]の部分[illegible]つくる影[illegible]る．k を $-1 < k < 1$ を満たす[illegible]るとき[illegible]平面上の[illegible]いて，球の外で光が当らない部分の y[illegible]て表せ．

(2) xy 平面[illegible]の外で光が当らない部分の面積を求めよ．

(3) $z \geqq 0$ において，球[illegible]で光が当らない部分の体積を求めよ．



応用 7.70 空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える．円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である．正四角柱の中心軸は z 軸で，xy 平面による切り口は一辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である．$0 < r \leqq \sqrt{2}$ とし，円柱と正四角柱の共通部分を K とする．

(九大 [理]2001) $\boxed{3}$

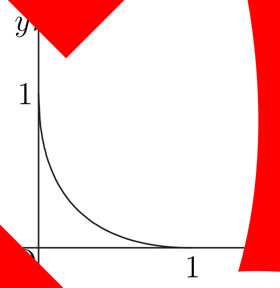
(1) 高さが $z = t\ (-r \leqq t \leqq r)$ で xy 平面に平行な平面と K と [illegible] りの面積を求めよ．

(2) K の体積 $V(r)$ を求めよ．

(3) $0 < r \leqq \sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を [illegible]

7.2.2　x 軸の周りの回転体の体積

□□ **7.71** 曲線 $C : \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ と x [illegible] y [illegible] 下図の図 [illegible] x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体 [illegible] を求めよ [illegible]) $\boxed{5}$



[illegible] 曲線 y [illegible] $+1$ と [illegible] よび 2 直線 x [illegible] $x = 2k$ (ただし $k > 0$) で囲ま [illegible] を x [illegible] わり [illegible] て得られる立 [illegible] 体積を $V(k)$ とする．次の問いに答 [illegible]

(長崎大学 2001) $\boxed{4}$

(1) $V($ [illegible]

(2) $V(k)$ の [illegible] と [illegible] きの k の値を求めよ．

基本 7.73 曲線 $y = \tan$ [illegible] $\leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\Big)$，直線 $x = \dfrac{\pi}{4}$，および x 軸で囲まれる部分を S とする．このとき，[illegible] 各問に答えよ．

(宮崎大学 2006) $\boxed{4}$

(1) S の面積を求め [illegible]

(2) 関数 $f(x) = \tan x - x$ を微分せよ．

(3) S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

基本 7.74 次の問に答えよ． (佐賀大学 2016) $\boxed{2}$

(1) $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$ を求めよ．

(2) 2 つの曲線 $y = \dfrac{3}{2}\tan x \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y = \cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

基本 7.75 xy 座標平面において，曲線

$$y = \cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

と直線

$$y = -\frac{2}{\pi}x + 1 \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

で囲まれた図形を D とする．このとき，次[illegible]

(1) ① および ② のグラフを描き，[illegible]図示[illegible]島大[illegible] $\boxed{10}$

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転さ[illegible]きる立体の[illegible]を求め[illegible]

基本 7.76 $-\dfrac{\pi}{2}$ [illegible] $\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，曲線 C_1 : [illegible] $2x$ [illegible] $= \cos x$ の交点の x 座[illegible] $(a < b < c)$ とする．以下[illegible]．

(1) a [illegible]の値を[illegible] (九工大 [情]2013) $\boxed{1}$

(2) [illegible] b，si[illegible]お[illegible]の曲線 C_1 と C_2 の[illegible]ぞれの接線は垂直ではない[illegible]ことを示[illegible]

(3) $a \leqq$ [illegible]の範囲[illegible]の曲[illegible] C_2 によって囲まれた部分の面積を S_1 とし，b [illegible] $\leqq c$ の[illegible] 2 つの[illegible] C_1，C_2 に[illegible]囲まれた部分の面積を S_2 とするとき，S[illegible]面積の[illegible] S_2 を求めよ．

(4) [illegible] $\dfrac{\pi}{2} \leqq$ [illegible] x 軸で[illegible]た部分を，x 軸の周りに 1 回転して[illegible]きる[illegible]体積 V を[illegible]

基本 7.77 a [illegible]を満たす定数[illegible]る．2 つの曲線

$$[illegible] = \sin x \quad \left(\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq a\right),$$
$$y = \cos x \quad \left(\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と 2 つの直線 $x = a$，[illegible]で囲まれる図形を D とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) D の面積 S を求めよ． (佐賀大学 2014) $\boxed{1}$

(2) D を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

基本 7.78 2つの曲線 $y=x+2\cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$ と $y=x-2\cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$ をつないでできる曲線を C とする． (大分大学 2016) 4

(1) 曲線 C の概形を図示しなさい．

(2) k を実数とする．曲線 C と直線 $y=k$ が異なる 2 点で交わるための k の値の範囲を求めなさい．

(3) 曲線 C で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してでき[illegible]体積を求めなさい．

基本 7.79 次の問いに答えよ． (佐賀大学 2009) 3

(1) 2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq\right.$ [illegible] 求めよ．

(2) 区間 $\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5\pi}{4}$ における，$|\sin$ [illegible] $x|$ [illegible]述べよ．

(3) (1) の図形 D を x 軸の回りに[illegible]てできる[illegible]の体[illegible]

基本 7.80 直線 ℓ [illegible] $=x+a$ が曲線 C : $y=2\sin x$ ([illegible] $x \leqq \pi$[illegible]るとき，次の問いに答[illegible]し，$a \geqq 0$ とする． [illegible]) 1

(1) a の[illegible]

(2) [illegible]と直線[illegible]図形の $y \geqq 0$ の範囲[illegible]部分を，x 軸のまわりに[illegible]する[illegible]回転[illegible]を求めよ．

[illegible] **7.81** [illegible] $f(x)$ [illegible] $\leqq \dfrac{\pi}{2}\Big)$ を考える．曲線 $y=f(x)$ の接線で傾き 1 [illegible]るもの[illegible]とする． (九大 [理]2014) 1

(1) [illegible]方程[illegible]接点の[illegible]求めよ．

(2) [illegible]求め[illegible]とする[illegible]，直線 $x=a$，および x 軸で囲まれ[illegible]まわりに 1 [illegible]きる回転体の体積 V を求めよ．

基本 7.82 xy [illegible]にお[illegible]曲線 $y=e^x$ と 3 直線 $y=x+1$，$x=1$，$x=-1$ で囲まれた部分を D とする．[illegible]し e は自然対数の底である．次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2013) 9

(1) 関数 $f(x)=e^x-$ [illegible]) の増減，極値，凹凸を $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で調べ，増減表にまとめ[illegible]

(2) D を図示せよ．

(3) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ．

基本 7.83 次の各問に答えよ． (鹿児島大学 2014) 4

(1) θ を媒介変数として，

$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$$

で表される曲線の $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ．

(2) 2 つの曲線 $y = e^{-x} + 1$，$y = 3(e^{-x} - 1)$ の交点の座標を[illegible]ただし，e は自然対数の底とする．

(3) (2) の曲線と y 軸で囲まれた図形を[illegible] D [illegible]求めよ．

(4) (3) で与えられた D を x 軸のまわりに 1 [illegible]る立体の体積を求めよ．

基本 7.84 e を自然数の底とし，$\log x$ を自然[illegible] ([illegible]鹿児島大[illegible]) [illegible]

(1) p，q を $p > 0$，$q > 1$ を満たす[illegible]る．[illegible] $=$ [illegible]直[illegible]と x 軸とで囲まれた部分の面積を[illegible]使って表[illegible]

(2) 2 つの曲線 [illegible] $\log x$，$y = 3\log$ [illegible] と 2 つの直線[illegible]，$x =$ [illegible]れた部分を D とす[illegible]の面積を求めよ．

(3) (2) で[illegible] x 軸のまわりに回転させ[illegible]る[illegible]の体積[illegible]よ．

基本 [illegible]関数 [illegible] $< x \leqq e^3$) につい[illegible]の問いに答えよ．ただし，[illegible]自然[illegible]し，[illegible]る． (福岡教育大学 2007) 4

([illegible]) 関[illegible] $f(x)$ [illegible]を調[illegible]値を求め[illegible]た，グラフの凹凸を調べ，変曲[illegible]求めよ．

[illegible] y [illegible]) と[illegible] $x = e^2$ [illegible]て囲まれた部分の面積 S を求[illegible]

(3) 曲[illegible]および直[illegible]よって囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転[illegible]体の体積 V を求めよ．

標準 7.86 実数 a $(a>0)$ に対して曲線 $C_1 : y = x^2+ax$ および曲線 $C_2 : y = -2x^2+ax$ を考える．曲線 $C_3 : y = f(x)$ は

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & (x<0) \\ -2x^2 + ax & (x \geqq 0) \end{cases}$$

で与えられるものとする．
また，実数 k に対して直線 $l : y = -ax+k$ を考える．　([illegible][情]2007) $\boxed{2}$

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 は原点 O で共通の接[illegible]をもつこと[illegible]

(2) 直線 l が原点を通るとき，曲線 C_3 と[illegible]囲ま[illegible]分の面積を求めよ．

(3) 曲線 C_3 と直線 l の共有点の個数が 2 とな[illegible]用いて表せ．

(4) (3) で，共有点の個数が 2 となる $k>0$ [illegible]によって囲まれる $x \geqq 0$ の部分を，x[illegible]てできる[illegible]を求めよ．

標準 7.87 曲線 $C : y = x\sqrt{1-x^2}$ ([illegible]$\leqq 1$) と，直[illegible] $y =$ [illegible]) を考える．以下の問いに答えよ．　([illegible]2009) $\boxed{1}$

(1) 曲線 C [illegible]座標が最大となるものの座標[illegible]

(2) 曲線[illegible]直線 l[illegible]以外の交点を持つときの[illegible]範囲を求め，その交点の座標[illegible]を用い[illegible]

(3) [illegible]k は[illegible]求め[illegible]動くものとする．原点を O，(2) で求めた交点を P とし，曲線 C と[illegible]れる図形 A の面積を S とする．また点 P から[illegible]下ろ[illegible]線と[illegible]の交点を[illegible]し，△OPQ の面積を T とする．[illegible]のと[illegible]$S-T$[illegible]値および最[illegible]そのときの k の値をそれぞれ求め[illegible]

(4) [illegible]A を[illegible]まわ[illegible]転[illegible]きる回転体の体積が，△OPQ を x 軸[illegible]転させてで[illegible]の体積と等しくなるときの k の値を求めよ．

標準 7.88 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において，2 つの関数 $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$，$g(x) = x - \sqrt{1-x^2}$ を考える．曲線 $C_1 : y = f(x)$ と曲線 $C_2 : y = g(x)$ で囲まれた図形を D とする．以下の問いに答えよ． (長崎大学 2016) $\boxed{6}$

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，その最大値と最小値を求めよ．

(2) 曲線 C_1 は曲線 C_2 と原点に関して対称であることを示せ．

(3) 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x)$ と $-g(x)$ の値の大小関[illegible]調べよ．また，$g(x) \geqq 0$ が成り立つような x の範囲を求めよ．

(4) 図形 D の $x \geqq 0$ の部分を x 軸のまわ[illegible]1 回転して[illegible]回転体の体積 V を求めよ．

標準 7.89 次の問いに答えよ． (長崎大学 2013) $\boxed{6}$

(1) 関数 $y = -x + 2 - \sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1$[illegible]
また，y の最大値およびそのときの[illegible]よびそのとき[illegible]x の値を求めよ．

(2) 2 つの曲線

$$y = -x + 2 [illegible] \sqrt{1-x^2}\ (-1 \leqq x [illegible] 1) \quad と \quad y = [illegible] + \sqrt{1 [illegible]} \leqq x \leqq 1)$$

によって[illegible]図形 D を座標平面上に描け．[illegible]の共有点[illegible]よ[illegible]の座標も記入せよ．

(3) [illegible]D を[illegible]りに 1 回転してでき[illegible]体の体積を求めよ．

標[illegible]0 曲[illegible]$y = -$[illegible]$\geqq 0)$ と直線 $L : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{11}{2}$ がある．C と L [illegible]点を[illegible]，点 [illegible] x[illegible]な直線を[illegible]とする．次に答えよ． (九工大 [工]2005) $\boxed{5}$

[illegible]座標[illegible]よ．

[illegible]線 l に[illegible]直線[illegible]直線の方程[illegible]めよ．

(3) [illegible]線 L[illegible]y 軸[illegible]れた[illegible]直線 l の周りに 1 回転してできる立[illegible]積 V[illegible]よ．

標準 7.91 n[illegible]数[illegible] 曲線 $y = 2 + \sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \left(n + \dfrac{1}{3}\right)\pi\right)$，直線 $x = \left(n + \dfrac{1}{3}\right)\pi$，$x$ 軸および[illegible]囲まれる部分を D_n とおくとき，次の各問いに答えよ． (宮崎大学 2005) $\boxed{3}$

(1) D_n の面積 S_n を[illegible]．

(2) D_n を x 軸のま[illegible]に 1 回転してできる立体の体積 V_n を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{S_n}$ を求めよ．

標準 7.92 次の問いに答えよ. (長崎大学 2011) $\boxed{6}$

(1) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において次の不等式を解け.

$$\sin x + \cos 2x \geqq 0$$

(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = -\cos 2x$ および直線 $x = -\dfrac{\pi}{2}$ が囲む図形の面積 S を求めよ.

(3) 上の図形の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分を x 軸のまわりに1回転 [illegible] る回転体の体積 V を求めよ.

標準 7.93 a を正の定数とし，曲線 $y = a\cos x$ [illegible] 曲線 $y = \sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と y 軸によって囲まれる部分の面積が $\sqrt{3} - 1$ [illegible]
([illegible]岡教育大学 [illegible]15) $\boxed{4}$

(1) a の値を求めよ.

(2) 曲線 $y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ [illegible] $=\tan$ [illegible] $\leqq$ [illegible] の交 [illegible] よ.

(3) 曲線 $y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ [illegible] 線 $y = \tan$ [illegible] $\leqq x <$ [illegible] によって囲まれる部 [illegible] x 軸の周りに1回転させてでき [illegible] 体の [illegible]

標準 7.94 [illegible] よ. ただし，対数は自然 [illegible] す [illegible]

(1) [illegible] $(x) =$ [illegible] 小値を求めよ. (福岡教育大学 2015) $\boxed{8}$

(2) [illegible] を1よ [illegible] い定 [illegible] 線 $y = a\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \tan x$ $\left(0 \right.$ [illegible] $\left.\dfrac{}{2}\right)$ に [illegible] て囲ま [illegible] 分 D の面 [illegible] が $1 - \log 2$ であるとする. 次の [illegible] (イ) に [illegible] よ.

[illegible] a の [illegible] 求めよ.

[illegible] x 軸の [illegible] 1回 [illegible] てで [illegible] 体の体積を求めよ.

標準 7.95 [illegible] $\displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{1+\mathrm{ta}\text{[illegible]}}{1+e^{\tan t}}$ [illegible] $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ について，次の問いに答えよ. (熊大 [理]2006) $\boxed{4}$

(1) 関数 $u = e^{\tan t}$ を t [illegible] せよ.

(2) $f(x)$ を求めよ.

(3) 曲線 $y = f(x)$ [illegible] および2直線 $x = 0$，$x = \dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を x 軸の周りに回転して得られる図形の体積を求めよ.

標準 7.96 関数 $f(x) = -\tan x = \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$，$g(x) = \sin 2x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ について，次の問いに答えよ．　(九工大 [工]2014) $\boxed{4}$

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x\, dx$，$\displaystyle\int \tan^2 x\, dx$ を求めよ．

(2) $b > 0$ とする．曲線 $y = g(x)$ および 3 直線 $y = -b$，$x = 0$，$x = \dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を直線 $y = -b$ のまわりに 1 回転してできる立体の体[illegible] を b を用いて表せ．

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき，不等式 $f(x) + g($[illegible]0 を示せ．

(4) 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ および直線 [illegible]た部分を直線 $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積 [illegible]

標準 7.97 曲線 $C : y = \log x$ の点 $(1,\ 0)$ [illegible]る．曲線 C[illegible]直線 l_1 および直線 $l_2 : x = e$ で囲まれる部分を[illegible]ま[illegible]1[illegible]させてで[illegible]転体の体積 V を求めたい．次の問いに答[illegible]7) $\boxed{6}$

(1) 直線 l_1 の方[illegible]式を求めよ．

(2) x 軸と直[illegible]で囲まれる部分を，x 軸のま[illegible]1[illegible]せ[illegible]回転体の[illegible]

(3) 2[illegible]項式[illegible]$+bx+c$ が，次の条件[illegible]$\log x)\}' = (\log x)^2 \ (x > 0)$ [illegible]たす[illegible]定[illegible]c の値を求めよ．

[illegible]体積 V[illegible]よ．

[illegible]> 0 で[illegible]可能な[illegible](x) が

$$\int^{x} \text{[illegible]} 1)f(x) \text{[illegible]} 2 - x + 1$$

をみたし[illegible]対数は自[illegible]る．次に答えよ．

(1) $f(x)$ を[illegible]．　(九工大 [工]2003) $\boxed{5}$

(2) x 軸上に点 $\mathrm{A}(e-1$[illegible]とり，曲線 $C : y = f(x)\ (x > 0)$ 上に 2 点 $\mathrm{P}(1,\ f(1))$，$\mathrm{Q}(e-1, f(e-1))$[illegible]．C の弧 PQ，および，線分 AP，線分 AQ で囲まれた図形を x 軸のま[illegible]に 1 回転してできる立体の体積を求めよ．ただし，e は自然対数の底と[illegible]

標準 7.99 a，b を実数とし，関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x)=a(e^x+e^{-x})$，$g(x)=4x+b$ とする．曲線 $C: y=f(x)$ の点 $(\log 3,\ f(\log 3))$ における接線が直線 $l: y=g(x)$ と一致するとき，次に答えよ．ただし，対数は自然対数を表し，e は自然対数の底とする．また，$\log 3<1.1$ を用いてよい．　(九工大 [工]2012) $\boxed{4}$

(1) a，b の値を求めよ．

(2) 曲線 C と直線 l および直線 $x=-\log 3$ で囲まれた図形の面[illegible]を求めよ．

(3) 曲線 C と直線 l および直線 $x=-\log 3$ で囲まれた図形[illegible]まわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ．

標準 7.100 関数 $f(x)=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ に[illegible]えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，$y=f(x)$ の[illegible]．また，[illegible] x 軸の交点の x 座標を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ の $y \geqq 0$ の部分[illegible]を求め[illegible]

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれ[illegible]形を x 軸の[illegible]に1[illegible]きる立体の体積 V を[illegible]よ．

応用 7.101 [illegible]，[illegible] $\dfrac{\pi}{2}$ とする．座標平面上の[illegible]，[illegible]$(0,\ 1)$ [illegible]，第一象限[illegible]を，[illegible]を満たすように円 D : [illegible] $=1$ 上にとり，直線 OP と直[illegible] $k\theta$ [illegible]．θ を $0<\theta<$ [illegible]囲で動かすときの点 Q の[illegible]曲線[illegible](x) と[illegible] $=\dfrac{f(x)}{x}$ で定める曲線を C とする．このと次の[illegible]に答え[illegible]　(宮大 [医]2016) $\boxed{6}$

(1) [illegible] $=$ O[illegible]るとき[illegible](θ) の値を求[illegible]

(2) [illegible]に円[illegible]部[illegible]めの[illegible]件を求めよ．

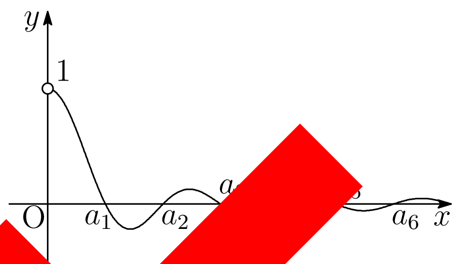
(3) 関[illegible]の[illegible]凸を調べ，[illegible]概形をかけ．

(4) 曲線 C [illegible]直線 $x=\dfrac{\pi}{4}k$，$x=\dfrac{\pi}{3}k$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転させて[illegible]立体の体積を，k を用いて表せ．

応用 7.102 右の図は，関数

$$y = \frac{\sin x}{x} \quad (x > 0)$$

のグラフの概形である．このグラフと x 軸との交点の x 座標を左から順に，a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$ とおく．$a_n \leqq x \leqq a_{n+1}$ において，このグラフを x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n とすると，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ は収束する．
次の問いに答えよ． (長大 [医]2003) 4



(1) a_n の値を求め，V_n を $\dfrac{\sin 2x}{x}$ の定積分[illegible]

(2) $V_n \leqq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ となることを示[illegible]．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} V_n \leqq 1$ となることを示し[illegible]．

応用 7.103 [illegible]る実数とする．xy 平面上の[illegible] $\dfrac{1}{\sin x \cos x}$ [illegible]$< x < \dfrac{\pi}{2}\Big)$ と直線[illegible]交点[illegible] α，β $(\alpha < \beta)$ とする．[illegible]の問いに答えよ．

(1) [illegible]および[illegible] β を[illegible]て表せ． (熊大 [医]2014) 4

(2) C と[illegible]よび[illegible] $x = \beta$ で囲まれた領域を S とする．S の面積を[illegible]いて表[illegible]

(3) [illegible]軸の[illegible]回転[illegible]られる立体の[illegible]を a を用いて表せ．

応用 7.104 [illegible]面上で[illegible] $\cos t$，[illegible] $\sin t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$
で表さ[illegible]を C [illegible]． (九大 [理]2003) 1

(1) $r(t)$ [illegible]の最小値と[illegible]大値を求め，C の概形を図示せよ．

(2) 一般に，[illegible]て[illegible]で微分可能な関数 $r(t)$ に対し，

$$\int_0^{\pi} \{r(t)\}[illegible]\text{in}^2 t \cos t \, dt = \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t\right) dt$$

が成り立つこと[illegible]．ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である．

(3) (1) で求めた曲線[illegible]と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積は $V = \dfrac{2\pi}{3} \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-3t} \sin t \, dt$ と表せることを示せ．

応用 7.105 次の問いに答えよ．　(琉球大学 2007) $\boxed{4}$

(1) 極方程式 $r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi\right)$ が表す曲線を直交座標平面上にかけ．

(2) (1) で求めた曲線を x 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる曲線を C とする．この曲線 C と x 軸によって囲まれる図形 D の面積を求めよ．

(3) (2) の図形 D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の[illegible]めよ．

応用 7.106 円 $x^2 + (y-1)^2 = 4$ で囲まれ[illegible]を x 軸の[illegible]1 回転してできる立体の体積を求めよ．　(九大 [理]2012) $\boxed{1}$

応用 7.107 原点 O を中心とし，点 A(0, 1) を[illegible]

円 S に内接する円 T が，点 C で y 軸に接[illegible]問いに答え[illegible]

(1) 円 T の中心 D の座標と半径を[illegible]) $\boxed{4}$

(2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を[illegible]とする．円 S [illegible]い方の[illegible] T の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ [illegible]び線分 AC で囲まれた図形を l [illegible]り[illegible]きる立体の体[illegible]

応用 [illegible]楕円[illegible] > 0) と y 軸の交点[illegible], a)，B$(0, -a)$ とする．θ が[illegible] $\leqq \theta \leqq$ [illegible]範囲を[illegible]点 P$(\cos\theta,\ a\sin\theta)$ はこの楕円上を動く．以下の[illegible]に答え[illegible]　(長大 [医]2016) $\boxed{8}$

(1) [illegible]AP の[illegible] ℓ とす[illegible] $= \sin\theta$ $\left(-\right.$[illegible]$\left.\leqq \frac{\pi}{2}\right)$ のとき，$Y = \ell^2$ となる[illegible]数を[illegible](X) と[illegible]) を X の式[illegible]．

(2) [illegible]の場合[illegible]

(1) [illegible] $f($[illegible]大値を a [illegible]，そのときの X の値を求めよ．

(3) $a = 2$ [illegible]

(1) の関数 [illegible](X) [illegible]最大となるときの点 P を P_1 とする．$f(X)$ の最大値と P_1 の座標を求めよ[illegible]と，点 A(0, 2) を中心とし点 P_1 を通る円を，x 軸のまわりに 1 回転して[illegible]回転体の体積 V を求めよ．

7.2.3　y 軸の周りの回転体の体積

基本 7.109 次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2006) $\boxed{4}$

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{2}\{x\sqrt{x^2+4} + 4\log(x+\sqrt{x^2+4})\}$ を微分せよ．

(2) 双曲線 $x^2 - 4y^2 = -4$ と直線 $y = \sqrt{2}$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) 双曲線 $x^2 - 4y^2 = -4$ と直線 $y = \sqrt{2}$ で囲まれた部分を y [illegible]わりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

標準 7.110 実数 a $(a > 0)$ に対して曲線 [illegible] $-\,a$ [illegible] とし，C_1 と x 軸によって囲まれる部分の面積を S とする．また [illegible] 1 を満たす領域にあり，原点を中心とする半径最大の円を C_2 とする．以 [illegible]

(1) S を a を用いて表せ．

(2) S の最小値とそのときの a の値を [illegible]

(3) (2) で求めた a の値に対して，[illegible] によっ [illegible] れ [illegible] りに 1 回転させてできる立体の体積 [illegible] 求めよ．

標準 7.111 x [illegible] 義された関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

に [illegible]，以下 [illegible] いに答 [illegible]　(熊大 [理]2016) $\boxed{4}$

([illegible]) $x \geqq$ [illegible] ける [illegible] 最大 [illegible] のときの [illegible] の値を求めよ．

([illegible]) [illegible] 求めた [illegible] をa [illegible] 曲線 $y =$ [illegible] 2 直線 $y = 0$，$x = a$ で囲まれ [illegible] 図形を [illegible] る．[illegible] 積を求めよ．

(3) [illegible] を y [illegible] 転させ [illegible] る立体の体積を求めよ．

標準 7.11[illegible] $y^2 = 1$ $(x$ [illegible] 曲線 $C_2 : x^2 + y^2 = 1$ $(x \geqq 0)$ がある．曲線 C_1 の点 P [illegible] $\sqrt{}$ [illegible] 0，$t > 0)$ における法線を l とする．次に答えよ．　(九工大 [工]2013) $\boxed{4}$

(1) s を t を用いて表せ [illegible] た，直線 l の方程式を t を用いて表せ．

(2) 直線 l が曲線 C_2 [illegible] るときの点 P の座標および接点 Q の座標を求めよ．

(3) P，Q は (2) で [illegible] 点とし，点 (0, 1) を R とする．曲線 C_1，弧 RQ および線分 PQ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

標準 7.113 点 A$(1,\ 0)$ および点 P$(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ がある．x 軸に関して点 P と対称な点を Q とし，2 点 P，A を通る直線を l，2 点 O，Q を通る直線を m とする．次に答えよ．ただし，O は原点を表す． (九工大 [工]2016) $\boxed{4}$

(1) $\sqrt{3}\cos\theta>1$ を示せ．

(2) 直線 l の方程式と直線 m の方程式を θ を用いて表せ．

(3) 直線 l と直線 m の交点 R の座標を θ を用いて表せ．

(4) 三角形 PAQ の面積を S とする．θ が変[illegible]するとき，S [illegible]値とそのときの θ の値を求めよ．

(5) θ が (4) で求めた値をとるとき，2 直線 l, [illegible] $+y^2=3\ (x \geqq \sqrt{3}\cos\theta)$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転し[illegible]積 V を求めよ．

標準 7.114 xy 平面上において $y=|x-c$ [illegible] で囲まれた[illegible]分を y 軸に関して回転させてできる回転[illegible]積を[illegible]ただし，[illegible] $c<2$ とする． [illegible] $\boxed{6}$

(1) $f(c)$ を求めよ．

(2) $f(c)$ が最[illegible] c を求めよ．

標準 7.11[illegible]答え[illegible]だし，対数は自然対数と[illegible] (九工大 [工]20[illegible]9) $\boxed{3}$

(1) [illegible]のとき[illegible] $2+\log\dfrac{x}{4}$ を示せ．[illegible] 等号が成り立つときの x の値を求[illegible]

(2) 曲線[illegible] $+\log$ [illegible] 軸と[illegible]の x 座標[illegible]求めよ．

(3) [illegible] $y=$ [illegible] $\geqq 0)$ [illegible] $+\log\dfrac{x}{4}$ と x [illegible]まれた図形を D とするとき，[illegible]の面[illegible]求め[illegible]

(4) [illegible] D を[illegible]まわ[illegible]転[illegible]る立体の体積 V を求めよ．

標準 7.116 [illegible] $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ $(x \geqq 1)$ と曲線 $C: y=f(x)$ について，次に答えよ． (九工大 [工]2015) $\boxed{4}$

(1) 区間 $x>1$ で，$f($[illegible]加し，曲線 C は上に凸であることを示せ．

(2) 曲線 C の点 $(\sqrt{2}$, [illegible]$))$ における接線 ℓ の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた直[illegible]曲線 C および x 軸で囲まれた図形を D とする．D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(4) (3) で定めた図形 D の面積 S を求めよ．

標準 7.117 a を正の実数とする．xy 平面上の曲線 $C : y = e^{ax}$ の接線で，原点を通るものを l とし，C と l および y 軸で囲まれた領域を S とする．以下の問いに答えよ．

(熊大 [理]2014) $\boxed{4}$

(1) S を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V_1 を求めよ．

(2) S を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V_2 を求めよ．

(3) $V_1 = V_2$ となるときの a の値を求めよ．

応用 7.118 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，関数 [illegible] と関数 $g($[illegible]

$$f(x) = \frac{1}{2}c\text{[illegible]}$$
$$g(x) = \cos\frac{x}{\text{[illegible]}}$$

とする．c は定数である．次の問いに答え[illegible] (長大 [医][illegible]14) $\boxed{8}$

(1) 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，2 曲線 [illegible]$x)$ と y [illegible]) が [illegible] 接するように c の値を定め，接点 $(p$[illegible] 求めよ．ま[illegible]そのと[illegible] $\leqq x \leqq \pi$ における関数 [illegible]$x)$ と $g(x)$ の大小関係を調べよ．

(2) 定数 c と[illegible] (1) で求めたものとする．[illegible] $x \leqq$ [illegible]て，y 軸[illegible]曲線 [illegible]$x)$，$y = g(x)$ によって囲[illegible]た図形を D とする．D を y 軸[illegible]わりに[illegible]きる立体の体積 V を[illegible]よ．

[illegible].4 [illegible]を軸と[illegible]回転[illegible]

[illegible] a は[illegible]数と[illegible]物線 $y = a$[illegible]線 $y = ax$ で囲まれる図形を，[illegible] ax の[illegible]と 1 回[illegible]る回転体の[illegible]を求めよ．

(分大 [医]2005) $\boxed{10}$

7.2.5　容積と水面の速度

基本 7.120 $0 \leqq x \leqq 3$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (1\leqq x\leqq 3)\\ 0 & (0\leqq x<1)\end{cases}$$

がある．曲線 $y=f(x)$ を y 軸のまわりに1回転してできる形の容[illegible]毎秒 2π の割合で水を注入する．注入し始めてから t 秒後の水の体積を V，底[illegible]面までの高さを h とする．このとき，次の問いに答えな[illegible] ([illegible]分大学 2008) $\boxed{4}$

(1) V を h の式で表せ．

(2) 容器が水で満たされるのは何秒後か．

(3) $t=6$ のときの水面の上昇する速度 $\dfrac{dh}{d[illegible]}$ [illegible]

標準 7.121 底面が半径 2m の円で高さ[illegible]の円[illegible]央に，[illegible]m の鉄製の球が置かれている．この水槽[illegible] m^3 の割[illegible]水を[illegible]に答えよ．

(1) この水槽[illegible]れる水の最大量を求めよ． ([illegible]3) $\boxed{1}$

(2) 水面の[illegible]$\leqq h \leqq 2$) になったとき，[illegible]れている[illegible] V を h [illegible]表せ．

(3) [illegible]の高さ[illegible]2) になったときの[illegible]上昇速度 $v(h)$ を a と h を[illegible]いて表[illegible]

(4) 水面[illegible]速度[illegible]値を[illegible]

[illegible]2 関数[illegible]$=1+$[illegible]x について，[illegible]各問いに答えよ．
(鹿児島大学 2004) $\boxed{2}$

(1) [illegible]の増[illegible]凸など[illegible]) のグラフの概形を $0\leqq x\leqq 5$ の範囲[illegible]

(2) 関数 $f($[illegible]の範囲を $0\leqq x\leqq 5$ とするとき，曲線 $y=f(x)$ を x 軸のまわりに1回転[illegible]きる立体の容器を考える．容器は横になっている．底面 ($x=0$) は閉ま[illegible]るものとする．開口部 (上面) は $x=5$ の位置である．この容器の底面か[illegible] h ($0\leqq h\leqq 5$) までの容積 V を h を用いて表せ．

(3) (2) で考えた容器[illegible]口部を上向きにして立て，底面を水平に固定する．開口部以外は密閉[illegible]いるものとする．そこに毎秒 a ($a>0$) の割合で水を注ぐ．底面からの水面の高さ h が4となるときの時刻 t およびそのときの水面が上昇する速度を求めよ．ただし，水を注ぎ始める時刻を0とする．

標準 7.123 a を $a>1$ を満たす定数とする．原点 O と点 P$(1,\ 0)$ を線分で結び，点 P と点 Q$(a,\ \log a)$ を曲線 $y=\log x$ で結ぶ．このようにして得られる曲線 OPQ を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の容器を考える．ただし，OP を含む部分を底面として，水平に置くものとする．次の問いに答えよ．　(長崎大学 2010) 4

(1) この容器の容積 V を a を用いて表せ．

(2) m を正の定数とする．この容器に，単位時間あたり m の水[illegible]一定の割合で注ぎ入れる．ただし，最初は水が全く入っていない状態とす[illegible]ぎ始めてから時間 t $\left(0<t<\dfrac{V}{m}\right)$ が経過したとき[illegible]底面から水面[illegible]高さを h，水面の上昇する速度を v とする．h および[illegible]t を用[illegible]せ．

標準 7.124 正の実数 a と関数 $f(x)=|x^2-a$[illegible]$2a)$ がある．$y=f(x)$ のグラフを y 軸のまわりに回転させてできる形[illegible]静かに注ぐ．水を注ぎ始めてから容器がい[illegible]の時間[illegible]ただし，長さの単位は cm とする．以下の[illegible]答[illegible]([illegible]工大 [情][illegible]11) 3

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を描[illegible]

(2) 水面の高さが a^2 (cm) になっ[illegible]，容器中の[illegible]体積を[illegible]する．V を a を用い[illegible]せ．

(3) T を a [illegible]．

(4) 水を[illegible]め[illegible]秒後の水面の高さを h (c[illegible]する[illegible]h を a と t [illegible]用いて[illegible]ただし[illegible]とする．

([illegible]) [illegible]注ぎ[illegible]から[illegible]水面の上昇速度を[illegible]/秒) とする．v を a と t を用いて[illegible]ただ[illegible]とする．

[illegible]曲線[illegible]さ

□□[illegible]変数[illegible]れた[illegible]

$$[illegible]\ \log_e(t+[illegible]\qquad y=\sqrt{t^2+1}$$

の $t=0$ から t[illegible]に[illegible]る部分の長さを t_0 で表せ．ただし $t_0>0$ とする．また e は自然対数の底である．　(福岡教育大学 2004) 1

標準 7.126 平面上の点[illegible]座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とする．極方程式 $r=f(\theta)$ によって表される[illegible]について，次の問いに答えよ．　(熊大 [理]2005) 4

(1) 曲線 C 上の点[illegible]について，$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2$ を $f(\theta)$，$f'(\theta)$ を用いて表せ．

(2) $f(\theta)=\sin^3\dfrac{\theta}{3}$ のとき，曲線 C の $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ．

標準 7.127 中心が原点 O で半径が a の定円 C_1 上を，半径 $\frac{a}{4}$ の円 C_2 が内接しながらすべることなく回転する．円 C_2 上の点 P は最初に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ にあるとする．円 C_2 の中心を B とするとき，以下の問いに答えなさい．　(分大 [医]2016) $\boxed{8}$

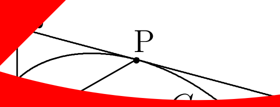
(1) $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を a，θ で表しなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を a，θ で表しなさい．

(3) $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，動点 P が移動する距離を求めなさい．

応用 7.128 O を原点とする座標平面上の曲[illegible] C は媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x = e^{-\theta}\cos\theta \\ y = e^{-\theta}\sin\theta \end{cases} \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$



と表されている．以下に答えよ．(九工大 [illegible])

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする．点 $\mathrm{P}(e^{-\theta}\cos$ [illegible] $\sin\theta)$ [illegible] る[illegible] 接 [illegible] を θ を用いて表せ．

(2) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ [illegible] る．点 $\mathrm{P}(e^{-\theta}\cos\theta,\ e^{-\theta}\sin\theta)$ に [illegible] 曲線 [illegible] 軸と交わる点 [illegible] き，$\angle\mathrm{OPQ}$ は θ の値によ [illegible] とを [illegible]

(3) 曲 [illegible] 長さ [illegible]

応用 [illegible] 関数 [illegible] の [illegible] 関数はつねに正と [illegible] 数 $y = f(x)$ のグラフ G 上の [illegible] $f(t)$ [illegible] ける [illegible] のなす角を $\theta(t)$ とする．ただし，$\theta(t)$ は $-\frac{\pi}{2} <$ [illegible] $< \frac{\pi}{2}$ [illegible] の傾 [illegible] 負 [illegible] って正 [illegible] 0 の値をとるものとする．また，[illegible] る G [illegible] 上に P [illegible] 離 1 の点 Q [illegible] $\beta(t))$ を G の下側にとる．[illegible] はつ [illegible] 増加す [illegible] せ．　(九大 [理]2001) $\boxed{7}$

(2) [illegible] を求 [illegible]

(3) t が [illegible] b [illegible] まで変化す [illegible] P，Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1，L [illegible] L_1 を $\theta(a)$ と [illegible] を用いて表せ．

応用 7.130 中心 $(0,\ a)$ [illegible] a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす．この [illegible] 円上の定点 P が原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする．次の問いに答えよ．　(九大 [理]2010) $\boxed{4}$

(1) 円が角 t だけ回転 [illegible] とき，点 P の座標を求めよ．

(2) t が 0 から 2π ま [illegible] いて円が 1 回転したときの点 P の描く曲線を C とする．曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(3) (2) の曲線 C の長さを求めよ．

7.4　速度と道のり

標準 7.131 関数 $s(t)$ はつねに $s'(t)>0$ をみたし，$s(0)=0$ とする．座標平面上を運動する点 P の座標 $(x,\ y)$ は，時刻 t の関数として

$$x=s(t),\quad y=\frac{1}{2}\{s(t)\}^2$$

で与えられ，点 P の速度 $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$ は

$$|\vec{v}|=\frac{[illegible]}{\sqrt{1+\{[illegible]}}$$

をみたすとする．また，$\alpha=s\left(-\frac{4}{3}\right)$，$\beta=$ [illegible]

(1) $\frac{dx}{dt}=f(x)$ が成り立つように関数 [illegible] を定め [illegible] （九大 [illegible]） 3

(2) $\frac{4}{3}=\int_{-\frac{4}{3}}^{0}\frac{1}{f([illegible]}\frac{dx}{dt}\,dt$，$\frac{4}{3}=\int_{0}^{[illegible]}\frac{[illegible]}{f(x)}\frac{dx}{dt}\,dt$ を用 [illegible] α，β [illegible] よ．

(3) $\frac{d^2x}{dt^2}=$ [illegible] つように関数 $g(x)$ を定め [illegible] $x\leqq\beta$ [illegible] $g(x)$ が [illegible] なる [illegible] めよ．

応用 7.132 曲 [illegible] e^x 上 [illegible] P の時刻 t における座標を $(x(t),\ y(t))$ と表し，P の [illegible] 度ベク [illegible] 加速 [illegible] それ $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$ と $\vec{\alpha}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$ と [illegible] ての時 [illegible] $|\vec{v}|$ [illegible] $\frac{dx}{dt}>0$ であ [illegible] して，次の問いに答えよ．（九大 [理]2009） 5

(1) [illegible] $e^s)$ [illegible] する時刻 [illegible] クトル $\vec{v}$ を s を用いて表せ．

(2) P が [illegible] する時刻に [illegible] 速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ．

(3) P が曲線 [illegible] を動 [illegible]，$|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ．

応用 7.133 曲線 $y = x^2$ の上を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ がある．この動点の速度ベクトルの大きさが一定 C のとき，次の問いに答えよ．ただし，動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は時刻 t に対して x が増加するように動くとする． (分大 [医]2013) 9

(1) $\mathrm{P}(x,\ y)$ の速度ベクトル $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を x で表せ．

(2) $\mathrm{P}(x,\ y)$ の加速度ベクトル $\vec{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ を x で表せ．

(3) 半径 r の円，$x^2 + (y-r)^2 = r^2$ 上を速度ベクトルの大[illegible]定 C で動く点 Q があるとき，この加速度ベクトルの[illegible]さを求め[illegible]

(4) 動点 P と Q の原点 $(0,\ 0)$ での加速度[illegible]の[illegible]が等しくなるときの半径 r を求めよ．

7.5 微分方程式

発展 7.134 微分可能な関数 $y = f($[illegible]方程式[illegible]す[illegible]

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}[\text{illegible}] + \cdots + a_1 f^{(}[\text{illegible}]\ a_0 f(x[\text{illegible}] \tag{A}$$

ここに n は自然[illegible] $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ は実数の[illegible]，[illegible]また，$y^{(k)} = f^{(n)}($[illegible]次導関数で $y^{(0)} = f^{(0)}(x)$ [illegible]．(A)[illegible]な方程式を第[illegible]分方[illegible]い，(A) に対して t の n[illegible]程式

$$a_n[\text{illegible}]t^{n-1} + \cdots + a_1 t[\text{illegible}]0 \tag{B}$$

[illegible]の特性[illegible]式とい[illegible]次の問いに答えよ． (分大 [医]2010) 9

(1) 特[illegible]式 (B[illegible]が実数[illegible]るとき[illegible] $y = e^{rx}$ が方程式 (A) を満たすことを証明[illegible]

[illegible]方程[illegible])が実[illegible]解(注) にも[illegible]次の t に関する方程式は r を[illegible]にもつ[illegible]証[illegible]たた[illegible]$= 2, 3, \cdots$ とする．

$$[\text{illegible}]{}^{-1} + (n - [\text{illegible}] + \cdots + 2a_2 t + a_1 = 0$$

(注) t の[illegible]方[illegible]適当な多項式 $Q(t)$ を用いて $(t-r)^k Q(t) = 0$ となるとき，$t = r$ を[illegible]程式の k 重解と定義する．ただし，$k = 1, 2, \cdots$ とする．

(3) 実数の定数 r に対[illegible]の関数を $y_i = x^i e^{rx}$ $(i = 0, 1, 2 \cdots)$ とする．
このとき，${y_j}^{(n)}$ を[illegible]${}_{j-1}{}^{(n-1)}$ および ${y_{j-1}}^{(n)}$ を用いて表せ．ただし，$j = 1, 2, 3, \cdots$ と[illegible]

(4) 実数 r が n 次方程[illegible](B) の k 重解であるとき $y_i = x^i e^{rx}$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$ が微分方程式 (A) を満たすことを証明せよ．ただし，k は自然数である．

7.6 問題研究

7.6.1 積分公式

m，n を 0 以上の整数とする．

$$I(m,n)=\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$$

とおくと，部分積分法により

$$I(m,n)=\frac{1}{m+1}\int_0^1 (t^{m+1})'(1-\ [illegible]$$

$$=\left[\frac{1}{m+1}t^{m+1}(1-t)^n\right]_0^1+\ [illegible]$$

$$=\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)\ [illegible]$$

$$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\ [illegible]\ (m+\ [illegible]$$

$$[illegible]\ \frac{m!n!}{(m+n)!}\int_0^1 t^{m+[illegible]}\,dt=\frac{m!n[illegible]}{(m+n\ [illegible]}$$

この結果を [illegible]

$$[illegible]\int^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\ [illegible]$$

[illegible]いて [illegible] $\alpha+($[illegible]$)$ とお[illegible] $\frac{dx}{dt}=\beta$ [illegible]

x	α	$\longrightarrow$	β
t	0	$\longrightarrow$	1

$$[illegible]-\alpha)^{[illegible]}\ [illegible]=(\beta-\alpha)\ [illegible]\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$$

よって [illegible] $\boldsymbol{\beta-x)^n}$ [illegible] $\boldsymbol{\frac{[illegible]!n!}{([illegible]+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$

105 ページの [illegible]6(九工[illegible]2012) について ($m=2$，$n=1$)

$$S=k\int_{-\frac{p}{2}}^{p}\left(x\ [illegible]\ (p-x)\,dx=k\cdot\frac{2!1!}{4!}\left\{p-\left(-\frac{p}{2}\right)\right\}^4=\frac{27}{64}kp^4$$

105 ページの 7.7(長[illegible]2009) について ($m=n=2$)

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(\beta-x)^2\,dx=\frac{2!2!}{5!}(\beta-\alpha)^5=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$$

7.6.2 シンプソンの公式

$f(x)$ が3次以下の整式のとき，次のシンプソン (Simpson) の公式が成り立つ．

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}}$$

証明 $k=\dfrac{b-a}{2}$，$x=t+\dfrac{a+b}{2}$，$g(t)=f\left(t+\dfrac{a+b}{2}\right)$ とおく [illegible]

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f$ [illegible]

$\displaystyle=\int_{-k}^{k} g(t)\,dt=$ [illegible]

$g(t)$，$g(-t)$ をマクローリン展開をすると [illegible] とする)

$g(t)=g(0$ [illegible] $+\dfrac{1}{2}g''($ [illegible] $\dfrac{c}{6}t^3$

$g(-t)=g(0)-g'(0)t+\dfrac{1}{2}g''(0$ [illegible] t^3

したがっ [illegible] $\displaystyle\int_0$ [illegible] $\{g$ [illegible] $t)\}dt=\int_0^k\{2g(0)+g''$ [illegible] t

[illegible] $=2g(0)k+\dfrac{1}{3}g''($ [illegible] $\dfrac{k}{3}\{6g(0)+g''(0)k^2\}$

[illegible] こで，[illegible] $g(-k$ [illegible] $(0)+$ [illegible] である [illegible]

[illegible] $\{6g($ [illegible] $(0)k^2$ [illegible] $k)+g(-k)+$ [illegible] $\}$

[illegible] $=$ [illegible] $\dfrac{\ }{6}$ [illegible] b [illegible] 2 [illegible] $+f(b)\Big\}$ **証終**

とくに，[illegible] いて $f(x)$ [illegible] (x) である3次以下の2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲ま [illegible] た図 [illegible] いて，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$ であるとき，シンプソンの公式により，$h=g$ [illegible] $-f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ とおくと，その面積 S は

$$S=\frac{2}{3}(b-a)h$$

7.6.3 法線群の包絡線

108 ページの 7.18(長崎 [医]2008) および 7.19(九大 [理]2009) は，曲線の法線群の包絡線に関する出題である．

一般に $C_1 : y = f(x)$ とすると，2 点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(u,\ f(u))$ における法線の方程式は $(u \neq t)$，それぞれ

$(x-t)+f'(t)(y-f(t))=0,\quad (x-u)+f'(u)(y-$ [illegible] 0

であり，これから

$x+f'(t)y=t+f'(t)f(t) \quad \cdots①,\quad x$ [illegible] $(u)f(u) \quad \cdots②$

② − ① より

$\{f'(u)-f'(t)\}y = u-t+f'(u)f$ [illegible]

$= u-t+f'$ [illegible]

$u \neq t$ であるから，両辺を $u-t$ で割 [illegible]

[illegible] $y=1+f'(u)\cdot\dfrac{f(u)-f(t)}{u-t}$ [illegible]

$u \to t$ と [illegible] $+\{f'(t)\}^2+f(t)f''(t$ [illegible]

f'' [illegible] のとき [illegible] $y=f$ [illegible] $+\{f'(t)\}^2$ / $f''(t)$ [illegible]

[illegible] れを [illegible] 入すると [illegible] $=t$ [illegible] $+\{f'(t)$ [illegible] / $f''(t)$

[illegible]，t を [illegible] して [illegible]) が描く軌跡 [illegible] である．

[illegible] $=t$ [illegible] $f''(t)$ [illegible] $f(t)+\dfrac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$

上で求め [illegible] おける曲率円 (接触円) の中心でもある．P における曲率円とは，曲線上 [illegible] 3 点 [illegible] R について，Q，R が曲線上を P に限りなく近づくときに占める極限の位置の [illegible] ある．その中心を**曲率中心**という．

C_1 上の 3 点を $\mathrm{P}(t,\ f(t$ [illegible] $u,\ f(u))$，$\mathrm{R}(v,\ f(v))$ とする $(t<u<v)$．3 点 P，Q，R を通る円を $(x-c_1)^2$ [illegible] $-c_2)^2-r^2=0$ とすると

$$(t-c_1)^2+\{f(t)-c_2\}^2-r^2=0$$
$$(u-c_1)^2+\{f(u)-c_2\}^2-r^2=0$$
$$(v-c_1)^2+\{f(v)-c_2\}^2-r^2=0$$

ここで，$g(s) = (s-c_1)^2 + \{f(s)-c_2\}^2 - r^2$ とおくと　$g(t) = g(u) = g(v) = 0$

$g(t) = g(u)$ であるから，ロル (Rolle) の定理により

$$g'(t_1) = 0 \quad (t < t_1 < u)$$

を満たす t_1 が存在する．同様に，$g(u) = g(v)$ であるから

$$g'(t_2) = 0 \quad (u < t_2 < v)$$

を満たす t_2 が存在する．$g'(t_1) = g'(t_2)$ であ[illegible]から，さら[illegible]定理を用いると

$$g''(t_3)\ [illegible]\ 2)$$

を満たす t_3 が存在する．Q，R が P に限りなく[illegible]ら，上の諸式において

$$g(t) = [illegible]) = 0\ [illegible]$$

$g'(s)$，$g''(s)$ は

$$g'(s) = 2(s-c_1) + 2f'(s)\ [illegible]$$
$$[illegible]''(s) = 2 + 2f''(s)\{f(s) - [illegible]\ 2[illegible]\}^2$$

$g'(t)$ [illegible] $(t) =$ [illegible]

$(t -$ [illegible] $(t)\{f$ [illegible]　$1 + \{f'(t)\}^2 + f''(t)\{f(t) - c_2\} = 0$

[illegible]の第[illegible]から　[illegible] $f(t)$ [illegible] $\dfrac{[illegible](t)\}^2}{f''(t)}$

こ[illegible]1 を[illegible]入する[illegible] $= -\dfrac{f'(t)(1 [illegible] (t)\}^2)}{[illegible])}$

上の 2[illegible] $= 0$ [illegible]することから[illegible]円の半径 r は

$[illegible]\dfrac{[illegible]\{f'(t)\}^2)^3}{[illegible]''(t)\}^2}$　ゆえに　$r = \dfrac{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t)|}$

よって，曲線の P にお[illegible]曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ は

$$c_1 = t\ [illegible]\ \frac{(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}, \qquad c_2 = f(t) + \frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ の描く軌跡を**縮閉線**といい，曲線の法線群の包絡線と一致することがわかる．

曲線の弧長 s に対する接線の向きの変化率を曲率といい，曲率 κ は，次式で定義される．

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ における接線が，x 軸の正の向きとなす角を θ とすると

$$y' = \tan\theta$$

これを θ について，微分することにより

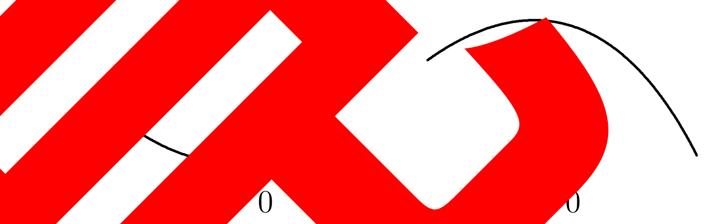
$y'' \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1$ [illegible] ゆえ [illegible] $= \dfrac{y''}{1+(y')^2}$

また，$\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y')^2}$ であるから，$\dfrac{dx}{ds} =$ [illegible]

$\kappa = \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{d\theta}{dx}\cdot\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{y''}{1+}$ [illegible] (7.1)

曲率 κ の逆数 $\dfrac{1}{}$[illegible] 曲率半径という．曲率円の半径 [illegible] 半径 [illegible] 等しい．
$\kappa > 0$ すなわ [illegible] のとき下に凸，$\kappa < 0$ すなわち [illegible]
変曲点は曲 [illegible] る点であり，頂点は曲率 [illegible] を [illegible] 点である．

例え [illegible] 関数 [illegible] $bx + c$ について $y'' =$ [illegible] るから，κ が極値をとるのは [illegible] 0 を満 [illegible] 点 [illegible] であることがわかる．



正則曲線 $C(t) = (x(t),\ y(t))$ の接ベクトルの x 軸の正の向きとなす角を θ とし，$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$，$\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ とすると

$$\cos\theta = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\quad \sin\theta = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \tag{7.2}$$

上の 2 式を t で微分すると

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\dot{y}(\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{x}(\dot{x}\dot{y}$$ [illegible]

したがって　$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

また，$\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ であるから

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dt}\ \text{[illegible]} \tag{7.3}$$

点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ が[illegible]刻 t の関数として[illegible]動するとき，[illegible]ベクト[illegible]速度ベクトルを $\vec{\alpha}$ とする[illegible]

$$\vec{v} = (\dot{x},\ \dot{y}),\quad \vec{\alpha} = (\ddot{x},\ \text{[illegible]}$$

とくに[illegible]$C(t)$ [illegible]速さ $c > 0$ で運動する[illegible]

[illegible]$= c$[illegible]を t で微分すると[illegible]$+ 2\dot{y}\ddot{y} = 0$

[illegible]がって[illegible]$\dot{y})\cdot($[illegible]$= 0$[illegible]ち $\vec{v} \perp$ [illegible]

[illegible](7.2) [illegible]単位接[illegible]ルを $\vec{e}_1$ とし[illegible]$\frac{\pi}{2}$ だけ回転させたベクトルを[illegible]と

[illegible]$=$[illegible]$\vec{e}_2$[illegible]$\dot{y},\ \dot{x})$

$\vec{v} = c\vec{e}_1 =$[illegible]あるから，[illegible]で微分すると

$$\vec{\alpha} = c\frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta,\ \text{[illegible]}\ c\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{e}_2 = c^2\kappa\vec{e}_2 = c^2\kappa\left(-\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\ \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)$$

補足　$C(t) = (x(t),\ y(t)$[illegible]率中心 $(c_1,\ c_2)$ は，曲線 $y = f(x)$ と同様にして求めることができるが[illegible]半径 $\dfrac{1}{\kappa}$ および $\vec{e}_2$ から，次のように求めることもできる．

$$(c_1,\ c_2) = (x(t),\ y(t)) + \frac{1}{\kappa}\vec{e}_2 = (x(t),\ y(t)) + \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}(-\dot{y},\ \dot{x})$$

7.6.4 等速運動と曲線の曲率

前ページ結果から，141 ページ 7.132(九大 [理]2009) や 7.133(分大 [医]2013) は，これらの公式を用いると簡単に求めることができる．

公式 1

正則曲線 $C(t)=(x(t),\ y(t))$ 上を一定の速さ $c>0$ で運動する[illegible]体の速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とすると

$$\vec{v}=c\vec{e}_1,\quad \vec{\alpha}=c^2\kappa$$ [illegible] $$|\vec{\alpha}|=c^2|\kappa$$ [illegible]

ただし，$\left(\dot{x}=\dfrac{dx}{dt},\quad \dot{y}=\dfrac{dy}{dt},\quad \ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2},\quad y\right.$ [illegible]

$$\vec{e}_1=\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right),$$ [illegible] $$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\Big)$$

[illegible] $$-\ddot{x}\dot{y}$$ [illegible] $$+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}$$

補足 $C(t)$ が[illegible]は，$\dot{x}^2+\dot{y}^2\neq 0$ であること[illegible] $C_1($[illegible]$,\ t^6)$ とす[illegible]$C_1'(t)$[illegible]$6t^5)$ であるから，$t=$ [illegible]き，[illegible]$^2+\dot{y}^2=$ [illegible]となり，[illegible](特異[illegible]の公式 1 を利用でき[illegible]この問題を解消するには，[illegible]曲線[illegible]$)=($[illegible]書き直すことによ[illegible]異点を解消することができ[illegible]る．確[illegible]$C_1(t)$[illegible]ric) には正則ではあるが，$C_2(t)$ のように一般 (ge[illegible]に正則[illegible]ない．

[illegible]7.1) な[illegible]ること[illegible]る．

[illegible]

曲線[illegible]$f(x)$[illegible]定の速さ[illegible]する物体の速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とする[illegible]

$$c\vec{e}_1,\quad \vec{\alpha}=c^2\kappa\vec{e}_2,\quad |\vec{\alpha}|=c^2|\kappa|$$

ただし，

$$\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{1+}}\right.$$ [illegible] $$\left.\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right),\quad \vec{e}_2=\left(-\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right),$$

$$\kappa=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

141 ページの 7.132(九大 [理]2009) の曲線 $y=e^x$ を公式 2 に適用すると，$y'=e^x$，$y''=e^x$ より

$$\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}},\ \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right),\quad \vec{e}_2=\left(-\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}},\ \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right),$$

$$\kappa=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

条件により $c=1$ であるから

$$\vec{v}=\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}},\ \text{[illegible]}\right)$$

$$\vec{\alpha}=\kappa\vec{e}_2=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}\left(-\text{[illegible]}\right)$$

$$=\left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2},\ \frac{e^x}{(1\text{[illegible]}}\right)$$

$$|\vec{\alpha}|=|\kappa|=\frac{e^x}{(1+e^{2}\text{[illegible]}}$$

同様に，7.133(分大 [医]2013) の曲[illegible] $=x^2$ を公式[illegible]用する[illegible]x，$y''=2$ より

$$\vec{e}_1\text{[illegible]}\ \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}\Big),\quad \vec{e}_2=\Big(-\text{[illegible]}\ \frac{\text{[illegible]}}{\sqrt{1+4x^2}}\Big)$$

$$\kappa=\frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

[illegible]より[illegible]であ[illegible]

$$\vec{v}\ \text{[illegible]}=C\left(\text{[illegible]}+4x^2\text{[illegible]}4x^2\right)$$

(2) [illegible] $\frac{2C^2}{(1\text{[illegible]}}\left(\text{[illegible]}\right)=\frac{2C^2}{(1+4x^2)^2}(-2x,\ 1)$

(3) 等速円[illegible]の加速度は[illegible]理学の公式を知っていれば) $\quad\dfrac{C^2}{r}$

(4) $|\vec{\alpha}|=C^2|\kappa|=\dfrac{2\text{[illegible]}}{(1+\text{[illegible]}}$ より，P が原点を通過するとき $\quad|\vec{\alpha}|=2C^2$

補足 曲線 $y=x^2$ の曲率[illegible] $\dfrac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$ は，原点 $(0,\ 0)$ で極大となる．曲率が極値をとる点を**頂点**と[illegible]曲線 $y=x^2$ の頂点が原点であることがわかる．

また，7.132(九大 [理]2009) の (4) では，$|\vec{\alpha}|=\kappa$ であるから，$|\vec{\alpha}|$ の最大値，すなわち，曲線 $y=e^x$ の頂点における曲率 κ を求めている．

7.6.5　バウムクーヘン型求積法

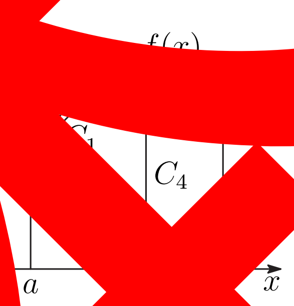
次の回転体の体積について，円筒形に区分して考えると積分の意味が理解できる．

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

証明　$y = f(x)$ のグラフを単調増加または[illegible]少の区間に分けて証明する．例えば，右の[illegible]のように $y = f(x)$ は $a \leqq x \leqq c$ で単調増[illegible]$c \leqq x \leqq b$ では単調減少とする．この[illegible]それぞれの区間で逆関数が存在す[illegible]



$$C_1 : x = g_1(y)\ (\alpha \leqq \text{[illegible]}$$
$$C_2 : \text{[illegible]} = g_2(y)\ (\beta \leqq y \leqq \text{[illegible]})$$

とおき[illegible]のようにおく．

C[illegible]a (0[illegible]),　$C_4 : x = c\ (0 \leqq y \leqq$[illegible]　C_5[illegible]$x = b\ (0 \leqq$[illegible]$\leqq \beta)$

[illegible]C_1，C[illegible]た部分および C_2，[illegible]で囲まれた部分をそれぞ[illegible]y 軸の[illegible]1 回[illegible]る立体の体積を[illegible]ぞれ V_1，V_2 とすると

$$\text{[illegible]} = \int^{\gamma} \text{[illegible]} - \int \text{[illegible]} - \int_\alpha^\gamma \{g_1(y)\}^2\,dy$$
$$\text{[illegible]} - a^2 \text{[illegible]} x^2 f'(x)\,dx$$
$$= c^2 \text{[illegible]} - \Big[\ \text{[illegible]}\ \Big]^c_a \text{[illegible]} x f(x)\,dx = 2\int_a^c x f(x)\,dx$$
$$\text{[illegible]} \int_0 \text{[illegible]} + \int_\beta^\gamma \{g_2(y)\}^2\,dy - \int_0^\gamma c^2\,dy$$
$$= b^2\beta - \text{[illegible]} \int_b^c x^2 f'(x)\,dx$$
$$= b^2\beta \text{[illegible]} + \Big[\ x^2 f(x)\ \Big]_b^c - 2\int_b^c x f(x)\,dx = 2\int_c^b x f(x)\,dx$$

よって　$V = V_1 + V_2 = 2\pi \displaystyle\int_a^c x f(x)\,dx + 2\pi \int_c^b x f(x)\,dx = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$

一般に，単調増加・単調減少の区間に分けることで上の結果を得る．　**証終**

7.6.6　パップス・ギュルダンの定理

パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem)

一般に，$a \leqq x \leqq b$ において $f_1(x) \geqq f_2(x) \geqq 0$ である 2 曲線 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた図形の面積を S，その重心の y 座標を h とすると

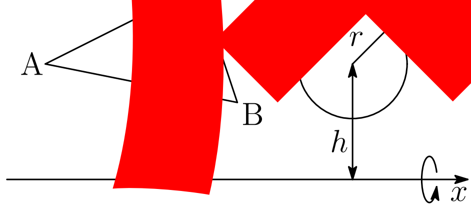
$$hS = \int_a^b \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} \times \{f_1(x) - f_2(x)\} [illegible]$$

$\{f_1(x) - f_2(x)\}\,dx$ は微小区間の面積，$\frac{f_1 [illegible] + f_2(x)}{[illegible]}$ は [illegible] 心を表す．
この図形を x 軸の周りに 1 回転してでき [illegible] は

$$V = \pi \int_a^b \{f_1(x) + f_2(x [illegible]$$

よって，上の 2 式から　　$\boldsymbol{V = 2\pi h}$ [illegible]
回転体の体積は，(回転による重心 [illegible] 長さ) [illegible] 積)

例 1 パップス・[illegible] ルダンの定理を用いると，右の [illegible] の面積が S，x 軸から重心 [illegible] の距 [illegible] とき，x 軸のまわ [illegible] 回転 [illegible] 積 V は



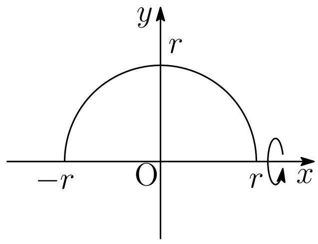
$$[illegible] = 2\pi h [illegible]$$

[illegible] r の円 [illegible] 心と x [illegible] の距離 [illegible] とき (r [illegible] h)，x 軸のまわりに 1 回転した立 [illegible] (soli [illegible] s) の体 [illegible] は (to [illegible] solid toru [illegible] 面)

$$[illegible] h \cdot \pi r^2 = 2 [illegible]$$

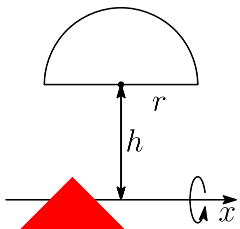
図形の [illegible] その回 [illegible] 体積か [illegible] 心を求めることができる．

例 2 右の半 [illegible] て対称であるから，重心の x 座標は 0 [illegible] ある．[illegible] 重心の y 座標 h は，x 軸のまわりに 1 回転する [illegible] その立体 (球) の体積 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ と半円の面積 [illegible] $\frac{[illegible]}{2}\pi r^2$ により



$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi h \cdot \frac{1}{2} [illegible]$$ ゆえに　$h = \frac{4r}{3\pi}$

例 3 右の図の半円 $(r < h)$ の重心の高さは，例 2 の結果から



$$h + \frac{4r}{3\pi}$$

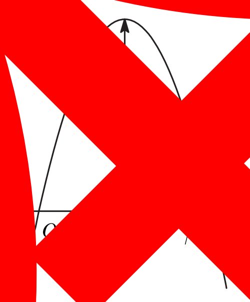
この半円を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$V = 2\pi\left(h + \frac{4r}{3\pi}\right)\cdot\frac{1}{2}\pi r^2 = \pi^2 hr^2 + \frac{4}{3}\pi r^3$$

例 4 放物線 $C : y = -a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha$ [illegible] x 軸で [illegible] 図形を D とすると，D の面積 S は

$$S = \frac{a}{6}(\beta - \alpha \text{[illegible]}$$

D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体 [illegible] 積 V は



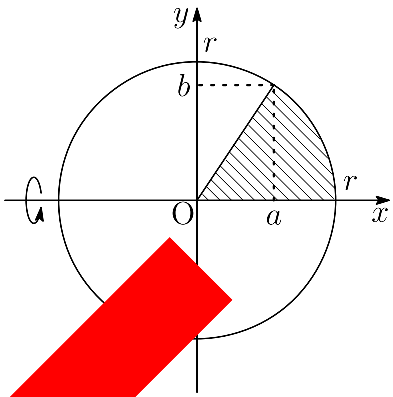
$$V = \pi a^2 \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta - \text{[illegible]}$$
$$= \frac{\pi a^2}{\text{[illegible]}} \text{[illegible]} \alpha)^5$$

また，頂 [illegible] 座標 [illegible] $\frac{a}{4}(\beta-\alpha)^2$

D の [illegible] y 座標 [illegible] と [illegible] パップス・ギュル [illegible] 定理により

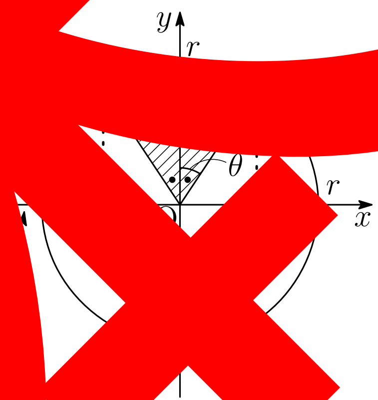
$$\text{[illegible]} = \text{[illegible]} \frac{a}{10}(\beta-\alpha)^2 = \frac{2}{5}l$$

例 5　右の図の斜線部分を x 軸のまわりに1回転させた立体の体積 V_1 は



$$V_1 = \frac{1}{3}\pi b^2 \cdot a + \pi \int_a^r (r^2 - x^2)dx$$
$$= \frac{\pi}{3}(r^2 - a^2)a + \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_a^r$$
$$= \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^2 a$$

したがって，右の図の斜線部分を x 軸のまわ[illegible]転させた立体の体積 V_2 は $(0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2})$



$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 - 2V_1 = \frac{4}{3}\pi r^2 a$$

斜線部分の面積を S，重心の y 座標を[illegible]ると

$$S = \frac{1}{2}r^2 \cdot 2\theta = r^2\theta$$
$$[illegible] \frac{V_2}{S} = \frac{2a}{3\theta}$$

また，[illegible]下の図[illegible]$\pi < \theta < \pi$ のとき，斜[illegible]の重心の y 座標を h とすると[illegible]線部以[illegible]形の[illegible]座標は

$$[illegible] \frac{2a}{3(\pi - \theta)}$$

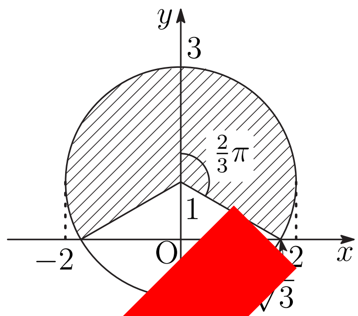
[illegible]て，斜[illegible]よび[illegible]外の図形をあ[illegible]た図形 (円) の重心は円の中心 (原[illegible]ある[illegible]

$$[illegible] + r^2(\pi - [illegible] (\pi - \theta)\Big\} = \pi r^2 \times 0$$

これを解いて　[illegible] $h =$ [illegible]　$\cdots (*)$

ゆえに，$(*)$ は，$0 < \theta$ [illegible]ついて成立する．

例 6 右の図形の面積 S は



$$S = 2 \times \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$$

$(*)$ から，その重心の座標 h は

$$h = 1 + \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\frac{2}{3}\pi} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{\pi}$$

よって，斜線部分を x 軸の回りに 1 回転させ[illegible]
立体の体積は

$$2\pi hS = 2\pi\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) \times \text{[illegible]}$$

また，3 点 $(-\sqrt{3},\ 0)$，$(\sqrt{3},\ 0)$，$(0,\ 1)$ を[illegible]のまわりに[illegible]転させた立体の体積は $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ である．

したがって，134 ページの 7.106([illegible]理]2012) に[illegible] $x^2 +$ [illegible] 4 を x 軸のまわりに回転[illegible]立体の体積 V は

$$\text{[illegible]}\frac{16}{\text{[illegible]}}\pi^2 + \frac{16\sqrt{3}}{3}\pi\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \text{[illegible]} \sqrt{3}\pi$$

[illegible].105([illegible]学 2[illegible]) も上と同様にし[illegible]めることができる．
[illegible]，パ[illegible]・ギ[illegible]は，高校数学の範囲外である．入試では使用[illegible]きない[illegible]利な[illegible]であ[illegible]

例題

曲線 $y = \sin x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれ部分を y 軸の周りに1回転してできる立体の体積 V

解1 (基本的な積分法) 曲線 $y = \sin x$ の $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ および $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ の部分をそれぞれ C_1, C_2 とする. C_1 および C_2 を y 軸の周りに回転させ[illegible]てできる立体の体積をそれぞれ V_1, V_2 とすると, $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ より

$$\frac{V_1}{\pi} = \int_0^1 x^2\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [illegible] dx$$

$$= \Big[(x^2 - 2)\sin x + 2x\,c [illegible]$$

$$\frac{V_2}{\pi} = \int_0^1 x^2\,dy = \int^{\frac{\pi}{2}} [illegible]$$

$$= \Big[(x^2 - [illegible] 2x\cos x [illegible] \frac{\pi^2}{4} + [illegible]$$

よって [illegible] $V_2 - V_1 = 2\pi^2$

解2 (バウ[illegible]積法)

$$[illegible] 2\pi [illegible] x\,dx = 2\pi \Big[-x\,c [illegible] \sin x \Big]_0^{\pi} = 2\pi^2$$

[illegible]3 (パ[illegible]・ギ[illegible]ンの定[illegible]

$$[illegible] \sin x = \Big[- [illegible] \Big]_0^{\pi} = 2$$

図[illegible]いは [illegible] $= \dfrac{\pi}{2}$ 上に[illegible]

$$V = 2\pi\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2 = 2\pi^2$$

7.6.7 線形微分方程式

142ページの7.134(分大[医]2010)は，第n階線形微分方程式の一般解を求める手がかりがある．

tに関するn次方程式

$$a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0=0$$

がα_iをm_i重解にもつとき$(i=0,1,\cdots,l)$

$$\sum_{k=0}^{n}a_kt^k=a_n\prod_{i=0}^{l}(t-\alpha_i)^{m_i} \quad [illegible]\ m_l=n)$$

このとき，第n階線形微分方程式

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots [illegible] \quad (*)$$

は，$\pi_m(x)$を$m-1$次のxの多項式[illegible]とすると[illegible]項(4)[illegible]は

$$y=\pi_{m_i}(x)e^{\alpha_ix}$$

を解にもつ[illegible]る．

また[illegible]方程式[illegible]性により，$(*)$が$y=$[illegible]び$y=v$を解にもつとき，

[illegible]は定数)，　$y=u+v$

$(*)$の解[illegible]る．し[illegible]って，[illegible]一般解は

$$\sum^{l}\pi_{m_i}(x) [illegible]$$

なお，[illegible]素[illegible]っても，[illegible]式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

により書き直すことがで[illegible]

例題 ばね定数 k[N/m] のばねの一端が固定され，他端に質量 m[kg] のおもりが付けられ，なめらかな水平面を運動している．自然長の位置を原点Oとし，ばねが伸びる向きを変位 x[m] の正の向きとし，おもりの加速度を a[m/s^2] とすると，次式が成り立つ．

$$ma = -kx$$

このとき，$a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ より，$a = x''$ とおくと

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

となる，このとき特性方程式の解が $\pm i\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ より

$$x = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \quad (C_1,\ C_2 \text{ は定数})$$

を得る．初期条件を $t = 0$ のとき $x = A$，$v = x' = 0$ とすると

$$C_1 + C_2 = A,\quad C_1 - C_2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad C_1 = C_2 = \frac{A}{2}$$

したがって $x = \dfrac{A}{2}\left(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right)$

オイラーの公式より

$$e^{\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}t} = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \pm i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \qquad (\text{複号同順})$$

よって $x = A\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$

この単振動の周期を T[s] とすると

$$\sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

を得る．

46 ページの 5.12(福岡教育大学) の微分方程式

$$4y'' - 12y' + 25y = 0 \tag{7.4}$$

について，その特性方程式 $4t^2 - 12t + 25 = 0$ の解が $\dfrac{3}{2} \pm 2i$ であるから，(7.4) の一般解は，定数 A_1，A_2 を用いて

$$\begin{aligned} y &= A_1 e^{(\frac{3}{2}+2i)x} + A_2 e^{(\frac{3}{2}-2i)x} \\ &= e^{\frac{3}{2}x}(A_1 e^{2xi} \text{[illegible]} A_2 e^{-2xi}) \end{aligned}$$

オイラーの公式により

$$e^{\pm 2xi} = \cos 2x \pm i \sin 2x$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= e^{\frac{3}{2}x}\{A_1(\cos 2x + \text{[illegible]} + A_2(\text{[illegible]} - i \text{[illegible]} \\ &= e^{\frac{3}{2}x}\{(A_1 + A_2)\text{[illegible]} + (A_1 - A_2\text{[illegible]} 2x\} \end{aligned}$$

ここで，$C_1 =$ [illegible] $C_2 = (A_1 - A_2)i$ とおくと

$$\text{[illegible]} = e^{\frac{3}{2}x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin \text{[illegible]}$$

よ[illegible] $= e^{\frac{3}{2}}$[illegible] $+$ [illegible]，(7.4) の解の 1[illegible]る．

[illegible] 微分[illegible] $y' -$ [illegible] を解[illegible] $= \dfrac{dy}{dx}\Big)$

[illegible]に e^{-}[illegible]ける[illegible]

$$\text{[illegible]} + y\text{[illegible]} 0 \text{[illegible]} \quad (ye^{-\alpha x})' = 0$$

これ[illegible] $^{-\alpha x} = C$ [illegible] $y = Ce^{\alpha x} \quad$ (C は定数)

例2 $\alpha \neq \beta$，$y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とするとき，次の微分方程式を解け．

$$y'' - (\alpha+\beta)y' + \alpha\beta y = 0$$

解答 与式から　$(y'-\beta y)' - \alpha(y'-\beta y) = 0$

両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$(y'-\beta y)'e^{-\alpha x} + (y'-\beta)(e^{-\alpha x})' = 0$　ゆえに　$\{(y'$ [illegible] $\}' = 0$

これを積分すると

$(y'-\beta y)e^{-\alpha x} = A_1$　ゆえに [illegible] $(A_1$は定数$)$

となる．同様にして　$y' - \alpha y = A_2 e^{\beta x}$

よって，上の2式から，y' を消去す[illegible]

$y = C_1e^{\alpha x}$ [illegible] $(C_1$, [illegible]

例3 例2において，$\beta=\alpha$ とした，[illegible]微分方程式[illegible]．

$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y =$ [illegible]

解答 両[illegible]を[illegible]

[illegible] $+ 2y$[illegible] $+ y(e^{-\alpha})'' = 0$ [illegible] $(ye^{-\alpha x})^{(2)} = 0$

これを[illegible]積分す[illegible]

[illegible] $e^{-\alpha x}$ [illegible] $+ C_4$ [illegible] $y = (C$[illegible]$_4)e^{\alpha x}$　$(C_3$，C_4は定数$)$

[illegible] $+ b$[illegible] につ[illegible]の特性方程式 $at^2+bt+c=0$ の解に[illegible]般解[illegible]のように[illegible] $1,2,\cdots,6)$ は定数．

i) 異なる[illegible] β をもつと[illegible]

$$y = C_1e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

ii) 重解 α をもつき

$$y=(C_3x+C_4)e^{\alpha x}$$

iii) 虚数解 $p\pm qi$ をも[illegible]き

$$y = e^{px}(C_5\cos qx + C_6 \sin qx)$$

解答

1.1 楕円 $\frac{1}{3}x^2+y^2=1$ 上の点 $\left(1,\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ における接線の方程式は

$$\frac{1}{3}\cdot 1x+\frac{\sqrt{6}}{3}y=1 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x+\sqrt{6}} \text{[illegible]}$$

1.2 (1) 原点から直線 $l: ax+y-2=0$ [illegible]離[illegible]ると

$$d=\frac{|-2|}{\sqrt{a^2+\text{[illegible]}}}$$

よって，求める円の方程式は [illegible] $+$ [illegible] $\boldsymbol{a}$ [illegible]

(2) 原点を通り，l に垂直な[illegible]方程式は [illegible] $ay=$ [illegible]
これと[illegible]の方程式から y を消去すると

[illegible] $x-a(-ax+2)=0$ ゆえ[illegible] $+1$

[illegible] $\leqq a$ [illegible] a [illegible] $\left(0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とお[illegible]

[illegible] $x=$ [illegible] θ [illegible] $+1$ $=2$[illegible]$\theta\cos\theta=\sin 2\theta$

この[illegible] $0\leqq 2$[illegible]であるから [illegible] $\boldsymbol{x\leqq 1}$

1.3 [illegible] $(a,\ 0)$ [illegible] $v)$ [illegible]離 d [illegible] $=\sqrt{(u-a)^2+v^2}$ $\cdots$①

[illegible] $+y^2=1$ 上[illegible]から

[illegible] $+v^2=1$ ゆえに $v^2=1-\frac{u^2}{3}$ $\cdots$②

② を ① に代[illegible]と

$$\text{[illegible]}(u-a)^2+1-\frac{u^2}{3}}=\sqrt{\boldsymbol{\frac{2}{3}u^2-2au+a^2+1}}$$

(2) (2) の結果から $d=\sqrt{\frac{2}{3}\left(u-\frac{3}{2}a\right)^2+1-\frac{1}{2}a^2}$ $(-\sqrt{3}\leqq u\leqq\sqrt{3})$

よって，求める d の最小値は

$0 < \dfrac{3}{2}a \leqq \sqrt{3}$　すなわち　$0 < a \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき

$$u = \frac{3}{2}a \text{ で　最小値 } \sqrt{\mathbf{1 - \frac{a^2}{2}}}$$

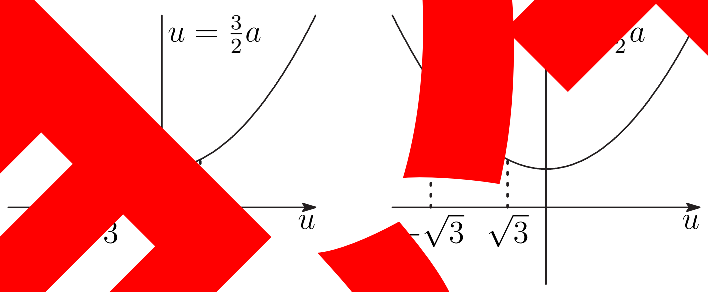
$\sqrt{3} < \dfrac{3}{2}a$　すなわち　$\dfrac{2\sqrt{3}}{3} < a$ のとき

$$u = \sqrt{3} \text{ で [illegible]値 } |\sqrt{} \text{[illegible]}$$

よって　$\begin{cases} \mathbf{0 < a \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}} \textbf{ のとき [illegible]} \\ \mathbf{\dfrac{2\sqrt{3}}{3} < a} \textbf{ のとき [illegible]} \left(\cdots = \sqrt{3}\right) \end{cases}$

補足　$f(u) = \dfrac{2}{3}\left(u - \dfrac{3}{2}a\right)^2 + 1$ [illegible]のグラフ[illegible]

$0 < \frac{3}{2}a \leqq \sqrt{3}$ のとき　　　　$\sqrt{}$[illegible]のとき



(1) 楕[illegible] $+ \dfrac{y^2}{25}$ [illegible] $b > 0)$ 上の[illegible]$, b)$ における接線の方程式は

$$\text{[illegible]} \frac{}{25} = 1$$

この接線の x[illegible]および y 切片は，それぞれ　$\dfrac{9}{a}$，$\dfrac{25}{b}$

よって　[illegible] $= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{a} \cdot \dfrac{25}{b} = \mathbf{\dfrac{225}{2ab}}$

(2) $\mathrm{P}(a, b)$ は[illegible]$\dfrac{}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ 上の点であるから　$\dfrac{a^2}{9} + \dfrac{b^2}{25} = 1$　$\cdots$①

したがって　$\left(\dfrac{a}{3} - \dfrac{b}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{2ab}{15}$　ゆえに　$2ab = 15 - 15\left(\dfrac{a}{3} - \dfrac{b}{5}\right)^2$

これを (1) の結果に代入すると

$$S=\frac{225}{15-15\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{5}\right)^2}=\frac{15}{1-\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{5}\right)^2}$$

① より，$\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{5}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，すなわち，$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{\sqrt{2}}}$，$\boldsymbol{b=\dfrac{5}{\sqrt{2}}}$ のとき，

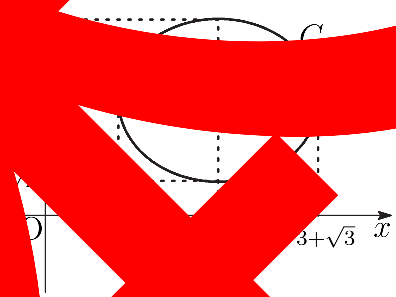
S は最小値 **15** をとる．

1.5 (1) 与えられた方程式から

$$2(x-3)^2+3(y-2)^2=6$$

ゆえに $\dfrac{(x-3)^2}{3}+\dfrac{(y-2)^2}{2}$ [illegible]

よって，C の概形は右のよう[illegible]



(2) $2x^2$ [illegible] $12x-12y+24=0$ に $y=x$ [illegible]代入[illegible]

[illegible] $2(3k-12)x+3k^2-12$[illegible] $=$ [illegible] $\cdots(*)$

$(*)$ の[illegible]と[illegible]ると

[illegible] $-12)^2-5(3k^2-12k+24)$

[illegible] $(k^2+2$[illegible]

よ[illegible] $\boldsymbol{-1}$ [illegible] $\boldsymbol{< -1+}$ [illegible]**とき** **2 個**

[illegible]**とき** **1 個**

[illegible] $\boldsymbol{-1-}$ [illegible] $\boldsymbol{< k}$ **のとき** **0 個**

(3) ([illegible]$5<k<-1+\sqrt{5}\cdots$① のとき，$(*)$ の 2 つの解を α，β とす[illegible]と，2[illegible]Q の座標は $(\alpha,\ \alpha+k)$，$(\beta,\ \beta+k)$ である．このとき，線分 PQ の中[illegible]$x,\ y)$ とすると

$$\text{[illegible]}+\beta}{2},\quad y=\frac{(\alpha+k)+(\beta+k)}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}+k$$

$(*)$ の解と係数の関係により $\alpha+\beta=-\dfrac{2(3k-12)}{5}$

したがって $x=\dfrac{-3k+12}{5}$，$y=\dfrac{2k+12}{5}$

上の2式から k を消去して　　$2x+3y=12$

① のとき　　$\dfrac{15-3\sqrt{5}}{5} < \dfrac{-3k+12}{5} < \dfrac{15+3\sqrt{5}}{5}$

よって，求める軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{2x+3y=12}\quad \left(\boldsymbol{\frac{15-3\sqrt{5}}{5} < x < \frac{15+3\sqrt{5}}{5}}\right)$$

1.6　(1)　$\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y_1\right)$ は $C: 4x^2+9y^2$ [illegible] の点で [illegible] る

$$4\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y_1{}^2 = \text{[illegible]}$$

P は第1象限にあるから，[illegible] 任意 [illegible]

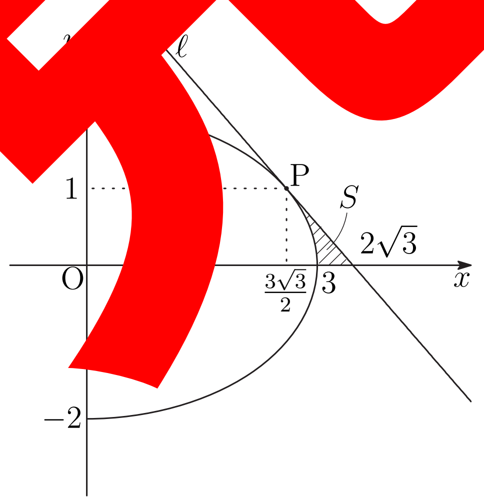
(2)　(1) の結果から，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \text{[illegible]}\right)$ における C [illegible] 線 ℓ は

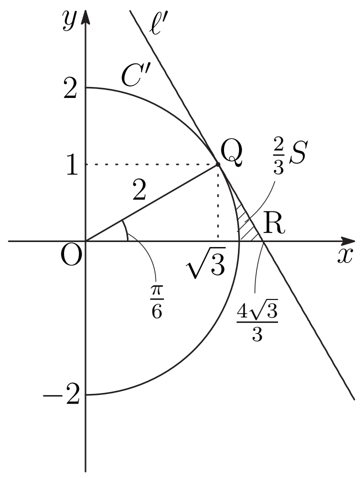
[illegible] $\sqrt{3}$ [illegible] $x+9\cdot 1y=36$　よって　[illegible] $\boldsymbol{x}$ [illegible] $\boldsymbol{y=12}$

(2) で [illegible] ℓ [illegible] に $y=0$ を代入す [illegible]

$2\sqrt{\ }$ [illegible] 2 [illegible] て，求める x 座標は　　$\boldsymbol{x=2\sqrt{3}}$

曲線 C [illegible] 接線 [illegible] 軸をもとに x [illegible] に $\dfrac{2}{3}$ だけ縮小したものを，それ [illegible] C'，ℓ' [illegible] ℓ'，x 軸 [illegible] れた図形の面積は $\dfrac{2}{3}S$ である．





したがって，右上の図から

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}S &= \triangle\mathrm{OQR} - \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot 1 - \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}}$

1.7　(1) $x^2+3y^2=3\cdots①$，$y=mx-1\cdots②$ から，y を消[illegible]

$x^2+3(mx-1)^2=$ [illegible] がって [illegible] $\dfrac{6m}{\ \ m^2+1}$

ゆえに　$\boldsymbol{p=\dfrac{6m}{3m^2+1}}$　　これを ② [illegible] $\boldsymbol{3m^2-1}$ [illegible]

(2) (1) の結果から

$$\{f(m)\}^2 = \left(\frac{6m}{3m^2+1}\right)^2 \text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]}m)^2+(6\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}m^2\text{[illegible]}}$$

$$= \frac{-8+4(\text{[illegible]}1)+4(3m\text{[illegible]}}{(3m^2+1)^2}$$

t [illegible] $g(t)=\{f(m)\}^2$ とおくと [illegible]

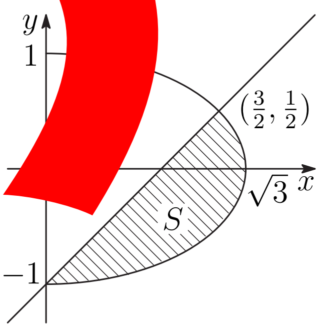
[illegible] $-8t^2+4t+4=-$ [illegible] $\dfrac{1}{4}\Big)^2+\dfrac{9}{2}$

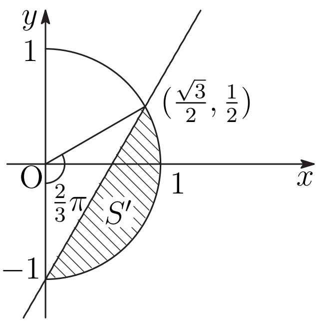
[illegible] って [illegible] のとき最大値 $\dfrac{9}{2}$ をとるから，$f(m)$ は

[illegible] $\dfrac{1}{3m\text{[illegible]}}$ [illegible] 4　すなわ[illegible] $=1$ のとき最大

[illegible] $f($[illegible] 最大 [illegible] $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ [illegible] $\boldsymbol{m}$ [illegible]

(3) [illegible] から，求め [illegible] 面積を S とし (左下の図)，これを y 軸を [illegible] 軸 [illegible] $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍縮小した図形の面積を S' とする (右下の図).





したがって　　$S' = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\cdot 1^2 \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

よって　　$S = \sqrt{3}\,S' = \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{3}{4}}$

1.8 P$(p,\ 0)$ から楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ に引いた 2 本の接線は，x 軸[illegible]関して対称である．この 2 本の接線が直交するとき，それらの傾きは ±[illegible]から，接線の 1 つは

y[illegible]

である．楕円およびこの直線を x 軸を[illegible] $\frac{1}{[illegible]}$ 倍に縮小すると

$x^2 + y^2 = 1$, [illegible]

上の円と直線は接するので，原点[illegible]距離は 1 [illegible]る．

したがって　　$\frac{|-[illegible]}{\sqrt{1^2+(-[illegible]}} = 1$ [illegible]

$p > 0$ に[illegible]これを解くと　　$\boldsymbol{p = \sqrt{5}}$

1.9 (1) [illegible] 1) [illegible]の焦点で，直線 $y = -2$ [illegible]準[illegible]であるから

放物[illegible]点は[illegible] $-\frac{1}{2}\Big)$

[illegible]，焦[illegible]び頂点[illegible]標から[illegible] $1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

した[illegible]，放物[illegible]程式は

$(x$ [illegible] $4\cdot$ [illegible] $\frac{}{2}$ [illegible] $\frac{1}{}\Big)$ [illegible]ち　$y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

[illegible] $\boldsymbol{1}$ [illegible]，$\boldsymbol{b = -\frac{[illegible]}{3}}$

別解 放物線上の点[illegible]について，次式が成り立つ．

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = |\,y+2\,|$$

これを平[illegible]と

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (y+2)^2 \quad \text{整理すると} \quad y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

(2) 2 点 $(3,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ は楕円の焦点であるから，楕円の中心は　$(1,\ 0)$
楕円の中心から焦点までの距離が 2 であるから，長軸および短軸の長さをそれぞれ $2a$，$2b$ とすると $(a,\ b>0)$

$$2a=12,\quad \sqrt{a^2-b^2}=2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2=36,\ b^2=32$$

したがって，楕円の方程式は　$\dfrac{(x-1)^2}{36}+\dfrac{y^2}{32}=1$

よって　　$\boldsymbol{p=36,\ q=32,\ r=1}$

別解 楕円上の点 $(x,\ y)$ について，次 [illegible] 立 [illegible]

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{\ }\ [illegible]$$

これから　　$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=1$ [illegible]

この両辺を平方して整理す [illegible]

$$[illegible]\ 1)^2+y^2\ [illegible]\ 17$$

さら [illegible] 式の両辺を平方して整理すると

$$[illegible])^2+9y^2=288 \quad \text{よって} \quad [illegible]\ 6 + \frac{y^2}{32}=1$$

1 [illegible]) [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=$ [illegible]

[illegible] $\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$

[illegible] $(1+$ [illegible] $\sin\theta,\ 0)$

よっ [illegible] P の [illegible] $\boldsymbol{(1+\cos\theta,}$ [illegible] $\boldsymbol{0)}$

[illegible] CP を [illegible] て表す [illegible]

$$\begin{aligned}[illegible]\ z) &= (1\ [illegible]\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= (1-t)(1,\ 0,\ 1)+t(1+\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)\\ &= (1+t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 1-t) \qquad \cdots(*)\end{aligned}$$

直線 CP と y [illegible] との交点 Q の x 座標は 0 であるから

$$1+t\cos\theta=0 \quad \text{ゆえに} \quad t=-\frac{1}{\cos\theta}$$

これを $(*)$ に代入すると　　$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{0,-\tan\theta,\ 1+\dfrac{1}{\cos\theta}}\right)$

(3) (2) の結果から，点 Q$(0,\ y,\ z)$ は

$$y=-\tan\theta,\quad z=1+\frac{1}{\cos\theta}\qquad\cdots(**)$$

このとき，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ より　$z\leqq 0$　$\cdots$①

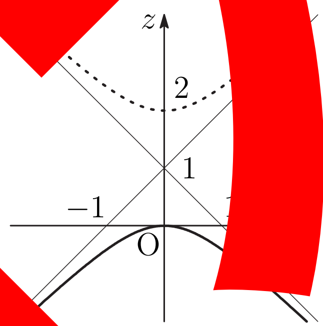
$(**)$ から　$\tan\theta=-y,\ \dfrac{1}{\cos\theta}=z-1$

これらを $1+\tan^2\theta=\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2$ 　入すると　 $y)^2=(z-1)^2$

点 Q の軌跡の方程式は，上式およ

$$\boldsymbol{x=0,\quad y^2-(z}$$

yz 平面における点 Q が描く軌　　　-1 を z 軸　向に 1
だけ平行移動したもので，　　の実線　で あ

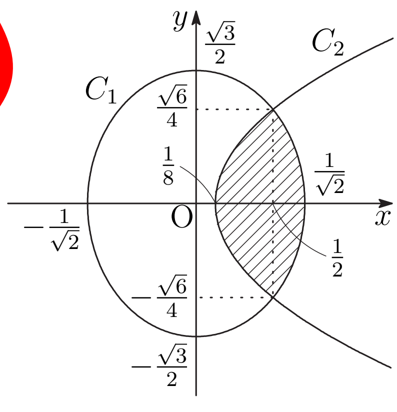


$8x^2+$　　　6　$\cdots$
$8x$　　　$=1$

① 　から y

$2x^2+8x$

$1)(6x+7)$



② より，$x=$　　$\geqq\dfrac{1}{8}$ であるから

$x=$　　えに　$y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

したがって，C_1 と C_2 の交点は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$

① を x で微分すると　$12x + 8yy' = 0$　すなわち　$y' = -\dfrac{3x}{2y}$

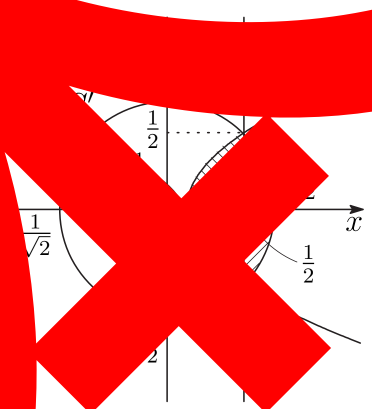
② を x で微分すると　$8 - 16yy' = 0$　すなわち　$y' = \dfrac{1}{2y}$

C_1，C_2 の交点における接線の傾きを，それぞれ m_1，m_2 とすると

$$m_1m_2 = -\frac{3\cdot\frac{1}{2}}{2\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)} \times \frac{1}{2\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)} = \ [illegible]$$

よって，C_1 と C_2 の交点におい[illegible]と C_2[illegible]直交する．

(2) C_1，C_2 を x 軸をもとに y 軸方向に [illegible]
縮小したものを，それぞれ C_1'，C'[illegible]



$$C_1' : x^2 + y^2 = \frac{1}{2},\quad C_2' : \ [illegible] + 1$$

C_1' と領域 $x \geqq \dfrac{1}{2}$ で囲まれた図形の面積は

$$[illegible]\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

C_2' と[illegible]$\geqq$[illegible]れた図形の面積は[illegible]$\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{4}$

よ[illegible]求め[illegible]すると

$$[illegible]\sqrt{2}\left\{\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\ }{4}\right)[illegible]\right\} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{16}\pi}$$

1.12 [illegible]$\dfrac{y^2}{\beta}$[illegible]両辺を x[illegible]

$$[illegible]\frac{2x}{\ } + \frac{2y}{\beta}\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\beta x}{\alpha y}$$

C の $\mathrm{P}(x_0,\ y$[illegible]ける接線の傾き m は　　$m = -\dfrac{\beta x_0}{\alpha y_0}$

(2) $C_1 : \dfrac{x^2}{4} +$ [illegible]，$C_2 : \dfrac{x^2}{4-t} + \dfrac{y^2}{1-t} = 1$ の交点を $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ とすると

$$x_0^2 = \frac{4(4-t)}{3},\quad y_0^2 = \frac{t-1}{3} \qquad \cdots(*)$$

P における C_1，C_2 の接線の傾きを，それぞれ m_1，m_2 とすると $(y_0 \neq 0)$

$$m_1 = -\frac{x_0}{4y_0}, \quad m_2 = -\frac{(1-t)x_0}{(4-t)y_0} \qquad \cdots(**)$$

$(*)$ より $\quad \dfrac{{x_0}^2}{{y_0}^2} = \dfrac{4(4-t)}{t-1}$，$\qquad (**)$ より $\quad m_1m_2 = \dfrac{1-t}{4(4-t)} \cdot \dfrac{{x_0}^2}{{y_0}^2}$

上の 2 式から $\qquad m_1m_2 = \dfrac{1-t}{4(4-t)} \cdot \dfrac{4(4-t)}{t-1} = -1$ [illegible]

よって，P における C_1，C_2 の [illegible] 互い [illegible] る．

1.13 (1) $x^2 - y^2 = 2$ を y について微分すると [illegible]

C の P$(x_0,\ y_0)$ における $\dfrac{dx}{dy}$ は，[illegible] $\dfrac{}{dy}$ [illegible] $\dfrac{}{x_0}$

よって，P における C の接 [illegible] 式は

$$x - x_0 = \frac{y_0}{x_0}(x \text{ [illegible]}) \quad \text{ゆえに} \quad \text{[illegible]} \; y_0y = \text{[illegible]}$$

P [illegible] であるから，${x_0}^2 - {y_0}^2 = 2$ [illegible] y

別[illegible] 0 の [illegible] $\dfrac{x_0}{}$ [illegible] であるから，P に [illegible] C の接線の方程式は

$$y - \text{[illegible]}\, x_0) \quad \text{ゆえに} \quad x_0x - y_0y = 2 \quad \cdots(*)$$

[illegible] $_0,\ y_0)$ [illegible] $\sqrt{2},\ 0)$ [illegible] る接線の [illegible] は $\quad x = \pm\sqrt{2} \quad$ (複号同順)

した [illegible]，C [illegible] ての点 P$(x_0,$ [illegible] ついて，$(*)$ が成立する．

[illegible] 求めた [illegible] に垂 [illegible] 点を通る直線は $\quad y_0x + x_0y = 0$

[illegible] 2 直 [illegible] 点が H$(x$ [illegible] から，これを解いて

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{2x_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2}, \quad y_1 = -\frac{2y_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2}}$$

(3) F$(1,\ 0)$，F$'($[illegible]，H$(x_1,\ y_1)$ より

$$\text{[illegible]} (x_1 - 1)^2 + {y_1}^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 - 2x_1 + 1 \quad \cdots①$$

$$\text{[illegible]} = (x_1 + 1)^2 + {y_1}^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 + 2x_1 + 1 \quad \cdots②$$

ここで，(2) の結果および $x_0{}^2 - y_0{}^2 = 2$ より

$$x_1 = \frac{2x_0}{x_0{}^2+y_0{}^2} = \frac{2x_0}{x_0{}^2+(x_0{}^2-2)} = \frac{x_0}{x_0{}^2-1} \quad \cdots ③$$

$$x_1{}^2+y_1{}^2 = \left(\frac{2x_0}{x_0{}^2+y_0{}^2}\right)^2 + \left(-\frac{2y_0}{x_0{}^2+y_0{}^2}\right)^2 = \frac{4(x_0{}^2+y_0{}^2)}{(x_0{}^2+y_0{}^2)^2}$$

$$= \frac{4}{x_0{}^2+y_0{}^2} = \frac{4}{x_0{}^2+(x_0{}^2-2)} = \frac{2}{x_0{}^2 [illegible]} \quad \cdots ④$$

③，④ から，①，② は

$$\mathrm{FH}^2 = \frac{2}{x_0{}^2-1} - [illegible] + 1 [illegible] \frac{[illegible]x_0-1)}{x_0{}^2-1}$$

$$= 1 - \frac{2}{x_0+1} = [illegible]$$

$$\mathrm{F'H}^2 = \frac{2}{x_0{}^2-1} + [illegible] \frac{[illegible]}{[illegible]-1}$$

$$= 1 + [illegible] \frac{x_0+ [illegible]}{x_0 - 1}$$

上の 2 式から　$\mathrm{FH}^2\cdot\mathrm{F'H}^2 = 1$　ゆえに　F[illegible]H $= 1$

よ[illegible]F′H は，P の取り方によらず[illegible]

解[illegible]で F[illegible]　F′$\left(-\sqrt{\frac{k}{2}},\ 0\right)$ とし[illegible]双曲線を $x^2-y^2=k$ と

する[illegible]式か[illegible]

$$[illegible]\mathrm{FH}\cdot\mathrm{F'H} [illegible] \frac{k^2}{[illegible]}$$

なお[illegible]は直[illegible]線の準線と x[illegible]点である．

1.1[illegible] C[illegible]点 $(x$[illegible] y 軸か[illegible]離にあるので

$$\sqrt{(}[illegible] = |x| \quad \cdots ①$$

ゆ[illegible] $+ y^2 = x^2$　整理すると　$\boldsymbol{y^2 = 2px - p^2}$

(2) $y^2 = 2px - p$[illegible]辺を x で微分すると

$$2y\frac{dy}{dx} = 2p \quad ゆえに \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

C 上の点 P[illegible]$_0)$ における接線 l の方程式は $(y_0 \neq 0)$

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x-x_0) \quad ゆえに \quad y_0y - y_0{}^2 = px - px_0$$

$y_0{}^2 = 2px_0 - p^2$ であるから　$\boldsymbol{y_0y = p(x+x_0-p)}$

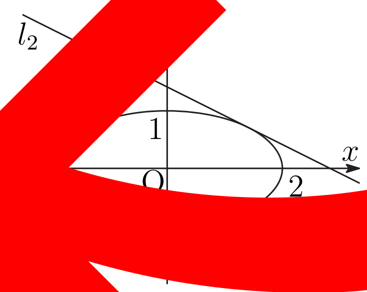
(3) $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ は，C 上の点であるから，① より

$$\mathrm{FP} = \sqrt{(x_0-p)^2+{y_0}^2} = |\,x_0\,|$$

(2) の結果から，l の x 軸との交点 Q の座標は　$(p-x_0,\ 0)$

これと $\mathrm{F}(p,\ 0)$ から　$\mathrm{FQ} = |\,x_0\,|$　　よって　$\mathrm{FP}=\mathrm{FQ}$

1.15　(1) l_1 を $y=mx+k$ とおく．



これを $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ に代入して整[illegible]ると

$$(4m^2+1)x^2+8mkx+4k^2-4 \ [illegible]$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D/4 = (4mk)^2-(4m^2+ \ [illegible]$$
$$= 4(4m^2-k^2+ \ [illegible]$$

C と l_1 は接するので，$D=0$ より　$k^2=$ [illegible] 1

条件[illegible] $k>0$ であるから　　$k=\sqrt{\ }$[illegible]1

[illegible]程式は　　$\boldsymbol{y=mx+\sqrt{\ }}$[illegible]　$\cdots$①

(1) の[illegible] m [illegible]に置き換えればよ[illegible]

$$[illegible]\ \frac{\boldsymbol{1}}{}\boldsymbol{x}+\sqrt{\frac{\boldsymbol{m^2+4}}{\boldsymbol{m^2}}}\quad\cdots②$$

①，②[illegible]，y を[illegible]ると

$$[illegible]\ x+ \ [illegible]\ 1 = [illegible] + \sqrt{\frac{m^2+4}{m^2}}$$
$$[illegible]\left(m+\frac{1}{m}\right)[illegible] = \sqrt{\frac{m^2+4}{m^2}}-\sqrt{4m^2+1}$$

ここで，$\varepsilon=$ [illegible] $=\operatorname{sign} m)$ とおくと

$$[illegible]\,m^2+1)x = \varepsilon\sqrt{m^2+4}-m\sqrt{4m^2+1}$$
$$x=\frac{\sqrt{m^2+4}-|m|\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\varepsilon$$

これを ① に代入すると

$$\begin{aligned} y &= m\cdot\frac{\sqrt{m^2+4}-|m|\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\varepsilon+\sqrt{4m^2+1} \\ &= \frac{|m|\sqrt{m^2+4}-m^2\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}+\sqrt{4m^2+1} \\ &= \frac{|m|\sqrt{m^2+4}+\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1} \end{aligned}$$

よって，$\varepsilon=\dfrac{m}{|m|}$ とおくと

$$\boldsymbol{P\left(\frac{\sqrt{m^2+4}-|m|\sqrt{4m\text{[illegible]}}}{m^2+1}\text{[illegible]}{}^2+4+\sqrt{4m^2+1}\right)}$$

(4) P$(X,\ Y)$ とおくと，(3) の結果か[illegible]

$$X=\frac{\sqrt{m^2+4}-|m|\sqrt{4\text{[illegible]}}}{m^2+\text{[illegible]}}\text{[illegible]},\quad Y\text{[illegible]}+\sqrt{4\text{[illegible]}}$$

したが[illegible]て

$$X\text{[illegible]}\left(\frac{\sqrt{m^2+4}-|m|\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\right)^2\text{[illegible]}\left(\frac{\text{[illegible]}+1}{m^2+1}\right)^2$$

$$\text{[illegible]}+(4m^2+1)\text{[illegible]}1 = 5$$

[illegible]点 P[illegible]5 上にある．

解[illegible]P$(X$[illegible]ら楕円[illegible]a^2 + $\dfrac{y^2}{b^2}=$[illegible]いた 2 本の接線 l_1，l_2 が直交す
るとき[illegible]それぞ[illegible]の傾きを m_1[illegible]すると，$m_1m_2=-1$
[illegible]通り[illegible]の方程[illegible] $y-Y=m(x-X)$
[illegible]で[illegible] x 軸を[illegible]に $\dfrac{a}{b}$ 倍に拡大した図形をそれぞれ

$$C': x^2+y^2=a^2$$

l' は点 $\left(X,\ \text{[illegible]}\right)$ を通り，傾き $\dfrac{am}{b}$ の直線であるから

$$y-\frac{aY}{\text{[illegible]}}=\text{[illegible]}(x-X)\quad すなわち\quad amx-by-amX+aY=0$$

このとき，l' は C' に接するので

$$\frac{|amX+aY|}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}=a\quad ゆえに\quad (X^2-a^2)m^2+2XYm+Y^2-b^2=0$$

上の m に関する2次方程式の解 m_1，m_2 について，$m_1m_2=-1$ のとき，解と係数の関係により

$$\frac{Y^2-b^2}{X^2-a^2}=-1 \quad すなわち \quad X^2+Y^2=a^2+b^2$$

よって，P は円 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上にある．
また，P が $(\pm a,\ \pm b)$ のときも成立する．

1.16 (1) 点 P を $(x,\ y)$ とおくと，条件により

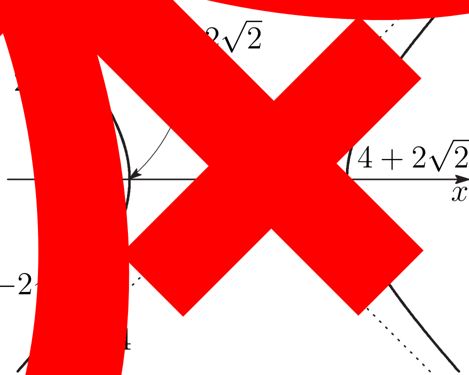
$\sqrt{x^2+y^2}:|x-2|=\sqrt{}$ … え… $2)^2=x^2+y^2$

整理すると $\quad \boldsymbol{(r-1)x^2-4rx-}$ …

(2) $r=2$ を (1) の結果に代入すると

$x^2-8x-y^2+8=$ …

$(x-4)^2-y$ …



ゆえ… $\boldsymbol{-4)^2}$ … $\boldsymbol{2)^2}$ $\boldsymbol{-\dfrac{y^2}{(2\sqrt{2})^2}=1}$

…て，… 図のような双曲線．
中心 (… 点 …)，$(8,\ 0)$
漸… $y=$ …

(3) … 結果を … $(1$ … $4rx+r^2-4r=0 \quad \cdots(*)$

この曲… 円で … き $\quad 1-r>$ … えに $\quad 0<r<1$

(… 形す … $\left(x+\right.$ … $+y^2=\dfrac{4r}{1-r}$

し… て … $\dfrac{\left(x+\dfrac{2r}{1-r}\right)^2}{\dfrac{4r}{(1-r)^2}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{4r}{1-r}}=1$

$0<r<1$ の … $\dfrac{4r}{(1-r)^2}>\dfrac{4r}{1-r}$ であるから

$$2\sqrt{\frac{4r}{(1-r)^2}}=\sqrt{5} \quad ゆえに \quad \frac{16r}{(1-r)^2}=5$$

整理すると $\quad 5r^2-26r+5=0 \quad$ すなわち $\quad (r-5)(5r-1)=0$

$0<r<1$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{r=\dfrac{1}{5}}$

解説 (2) のとき，C の離心率 $e=\sqrt{2}>1$ から，C は双曲線である．

また，O を極とする極方程式は　$r=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\cos\theta}$

(3) のとき，C が楕円であるとき，離心率 $\sqrt{r}<1$ から [illegible] $<r<1$

このとき，楕円の長軸は，O を通り準線 $x=2$ に垂 [illegible] 上 (x 軸上) にあるから，$(*)$ に $y=0$ を代入す [illegible]

$$(1-r)x \text{ [illegible]}$$

この方程式の 2 つの解を α，β とする [illegible]

$$\alpha+\beta=- \text{ [illegible]}$$

$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$ であるから [illegible] $)^2=5$ [illegible]

[illegible] $+\beta)^2-4\alpha\beta=5$　ゆえに　[illegible]

[illegible] る [illegible] $5)(5r-1)=0$　$0<r$ [illegible] あ [illegible] から　$r=$ [illegible]

1.17 [illegible] 楕円 [illegible] 軸 [illegible] の交点の x 座標は [illegible] $\pm a$

ま [illegible] の y 軸 [illegible] の交点の y 座標を $y=\pm b$ とすると

$$1^2 \text{ [illegible] } a^2 \quad \text{ゆ [illegible] } \quad b^2=a^2-1$$

よ [illegible] C の方 [illegible] $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{}}$ [illegible] $\boldsymbol{1}$

[illegible] $y=$ [illegible] および [illegible] y を消去し，整理すると

$$\text{[illegible]}^2-1)x^2-4a \text{ [illegible] } x+a^2(5-a^2)=0 \quad \cdots(*)$$

この方程式の [illegible] 式を D とすると

$$\text{[illegible]}4=(-2a^2)-2-(2a^2-1)a^2(5-a^2)$$
$$=a^2(a^2-1)(2a^2-5)$$

C と直線 ① が接するとき，$D=0$ であるから，$a>1$ に注意して

$$2a^2-5=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$$

これを (∗) に代入すると　$4x^2-10x+\dfrac{25}{4}=0$　すなわち　$x=\dfrac{5}{4}$

よって，① から　　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)$

(3) (2) の結果から　$\mathrm{PF}_1=\sqrt{\left(\dfrac{5}{4}+1\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$

$$\mathrm{PF}_2=\sqrt{\left(\dfrac{5}{4}-1\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\text{[illegible]}$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{PF}_1}{\mathrm{PF}_2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{4}\div$ [illegible]

P における C の法線の方程式は

$y-\dfrac{3}{4}=x-\dfrac{5}{4}$　すな[illegible]に　Q [illegible]

したがって　$\mathrm{QF}_1=\dfrac{1}{2}+$ [illegible] $\mathrm{QF}_2=$ [illegible] $=\dfrac{\text{[illegible]}}{2}$ [illegible] $=3$

よっ[illegible] $\dfrac{\mathrm{PF}_1}{\mathrm{PF}_2}=\dfrac{\mathrm{QF}_1}{\mathrm{QF}_2}$

1.18 (1) [illegible] (0, [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,$ [illegible] より，実数 t を用いて

[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(0,\ 0,\ 2)+$ [illegible] $2+\sin\theta,\ -1)$

[illegible]P で[illegible] $\overrightarrow{\text{[illegible]P}}=0$ より

-2[illegible]$s^2\theta+$[illegible]$n\,\theta)^2+(-1$[illegible]0　ゆえに　$t=\dfrac{1}{3+2\sin\theta}$

[illegible]って[illegible] $=($[illegible]$+$[illegible]$\theta(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ -1)$

[illegible] $\dfrac{\boldsymbol{\cos\theta}}{\text{[illegible]}+\mathbf{2}\boldsymbol{\sin\theta}}$, [illegible] $\dfrac{\text{[illegible]}+\boldsymbol{\sin\theta}}{\mathbf{3}+\mathbf{2}\boldsymbol{\sin\theta}}$,　$\boldsymbol{Z}=\dfrac{\mathbf{5}+\mathbf{4}\boldsymbol{\sin\theta}}{\mathbf{3}+\mathbf{2}\boldsymbol{\sin\theta}}$

(2) (1) の結果に[illegible]れ $\theta=0,\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ を代入すると

$\vec{a}=$ [illegible] $\dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\Big)$,　$\vec{b}=\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$,　$\vec{c}=(0,\ 1,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ より

$$(X,\ Y,\ Z)=s\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)+t\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)+u(0,\ 1,\ 1)$$

すなわち

$$\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}t=X\cdots①\quad \frac{2}{3}s+\frac{2}{3}t+u=Y\cdots②\quad \frac{5}{3}s+\frac{5}{3}t+u=Z\cdots③$$

③ − ② より　$s+t=-Y+Z\cdots④$

① × 3 より　$s-t=3X\qquad\cdots⑤$

④，⑤ より　$s=\frac{1}{2}(3X-Y+Z),\quad t=\frac{1}{2}(-3X-Y$ [illegible] $Z)$

②，④ より　$u=Y-\frac{2}{3}(s+t)=Y-\frac{2}{3}(-Y+Z$ [illegible] $Y-2Z)$

したがって

$$s=\frac{3\cos\theta-(2+\sin\theta)+(5\ \text{[illegible]}}{2(3+2\sin\theta)}\ \text{[illegible]}\ \boldsymbol{+\sin\theta+\cos\theta)}\ \text{[illegible]}$$

$$t=\frac{-3\cos\theta-(2+\sin\theta)+(5\ \text{[illegible]}}{2(3+2\sin\theta)}\ \text{[illegible]}\ \boldsymbol{(3+2\sin}\ \text{[illegible]}$$

$$u=\frac{5(2+\sin\theta)-2(5+\ \text{[illegible]}}{3(3+2\sin\ \text{[illegible]}}=-\ \text{[illegible]}$$

よって　$\boldsymbol{s+t+u=}$ [illegible]

(3) R(X [illegible] は，(1) の結果から

$$X=\frac{\cos\theta}{3+2\sin\theta}\cdots⑥,\quad Y=\ \text{[illegible]}\cdots⑦$$

[illegible] から [illegible] $\frac{Y+2}{\ \text{[illegible]}1}$　⑥ から [illegible] $X(3+2\sin\theta)$

上の [illegible] 式を第 [illegible] すると

$$\text{[illegible]}\cos\theta\ \text{[illegible]}\ 3+2\frac{-3Y+2}{\ \text{[illegible]}}\Big)=\frac{X}{2Y-1}$$

上式 [illegible] ⑦′ を [illegible] $\cos^2\theta=1$ に [illegible] すると

$$\frac{3Y+\ \text{[illegible]}}{2Y\ \text{[illegible]}}+\left(\frac{\ \text{[illegible]}}{2Y\ \text{[illegible]}}\right)^2\ \text{[illegible]}\ \text{ゆえに}\quad X^2+5Y^2-8Y+3=0$$

[illegible] 軌跡の方程 [illegible] 次の楕円である．

$$\text{[illegible]}x^2+5y\ \text{[illegible]}+3=0\quad\text{すなわち}\quad \boldsymbol{5x^2+25\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=1}$$

1.19　(1) 2 直線 PQ，[illegible] x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ θ_1，θ_2 とすると

$$m_1=\tan\theta_1,\quad m_2=\tan\theta_2$$

$m_1<0<m_2$ より，$0<\theta_2<\frac{\pi}{2}<\theta_1<\pi$ であるから

$$\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\boldsymbol{\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}}$$

(2) $y=\dfrac{1}{4}x^2$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{2}x$

Qの座標を $(\alpha,\ \frac{1}{4}\alpha^2)$ とすると，Qにおける接線の傾きは m_1 であるから

$$m_1=\frac{1}{2}\alpha$$

ゆえに　$\alpha=2m_1$　点Qの座標は　$(2m_1,\ {m_1}^2)$

Qにおける接線の方程式は

$$y-{m_1}^2=m_1(x-2m_1)$$ [illegible]ち　y [illegible] ${m_1}^2$　$\cdots$①

同様に，Rにおける接線の方程式[illegible] ${m_2}^2\cdots$②

①，② の交点がPであるから，m_1 [illegible]

$a=m_1$ [illegible]

また　$(m_1-m_2)^2=(m_1$ [illegible] $-4m_1m$ [illegible]

$m_1-m_2<0$ より　m_1- [illegible] $=-\sqrt{a^2-$ [illegible]

よっ[illegible]の表す方程式は (1) の結果から [illegible] $\boldsymbol{\theta}$ [illegible]

(3) [illegible] 4 の[illegible]の結果より

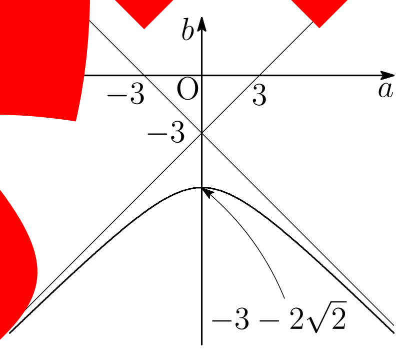
[illegible] $=$ [illegible] $4b$　$\cdots$③

[illegible]辺を[illegible]

[illegible] $2b+$ [illegible] $-4b$

[illegible]よび③[illegible]

$\boldsymbol{(b}$ [illegible] $\boldsymbol{-a^2=}$ [illegible]



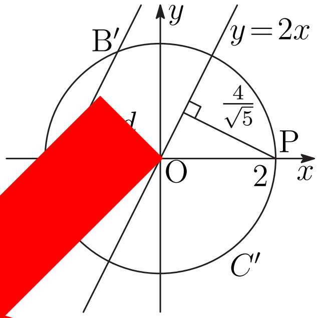
よ[illegible]G[illegible]図形は，右の図のような双曲線の一部である．

1.20　(1) $C: x^2+4y^2=$ [illegible]よび直線 $l: y=x+b$ を x 軸を元に y 軸方向に2倍に拡大した図形を[illegible]れぞれ，$C': x^2+y^2=4$，$l': y=2x+2b$ とする．C と l が異なる2[illegible]点をもつとき，C' と l' は異なる2つの交点をもつから

$$\frac{|\text{[illegible]}2b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}<2$$　これを解いて　$\boldsymbol{-\sqrt{5}<b<\sqrt{5}}$

(2) C' と l' の交点を A'，B' とし，$\triangle\mathrm{PAB}$，$\triangle\mathrm{PA'B'}$ の面積を，それぞれ，S，S' とすると，$S' = 2S$ が成り立つ．S' が最大となるとき，S は最大となるから，S' を最大にする b の値を求めればよい．

原点 O から l' までの距離を d とすると



$$d = \frac{|2b|}{\sqrt{5}}$$

$$\mathrm{A'B'} = 2\sqrt{2^2 - d^2} = \frac{4\sqrt{5-b^2}}{[illegible]}$$

S' を最大する b は，右の図から [illegible]

$$0 < b < \sqrt{5}$$

の範囲で調べればよい．P から l' [illegible]

$$h = \frac{2b}{\sqrt{5}} + \frac{4}{[illegible]}$$

$$S' = \frac{1}{2}\mathrm{A'B'}\cdot h = [illegible](b+2)\sqrt{5-[illegible]}$$

$$[illegible] = \frac{1}{2}S' = \frac{2}{5}(b+2)\sqrt{5-b^2} = [illegible]$$

[illegible]がっ[illegible]

$$[illegible](b+2)^2(5-b^2) \quad ([illegible] b < \sqrt{5})$$

[illegible]大にす[illegible]値を[illegible]ばよい

$$[illegible]) = -2(b+2[illegible]2b-5)$$

[illegible]$b < \sqrt{[illegible]}$[illegible]意して[illegible]と　$b = \dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}$

[illegible]右のように[illegible]
る[illegible]る b の値は

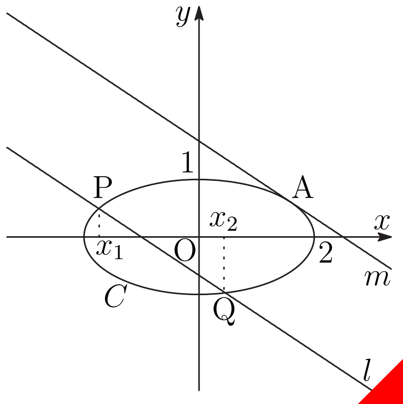
b	(0)	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$	$\cdots$	$(\sqrt{5})$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

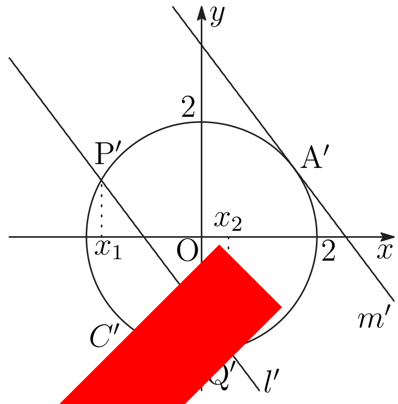
$$\boldsymbol{b = \frac{[illegible]\sqrt{11}}{[illegible]}}$$

1.21 (1) C，l を x 軸[illegible]に y 軸方向に 2 倍に拡大した図形をそれぞれ

$$C' : x^2 + y^2 = 4, \quad l' : 2ax - y + 2b = 0$$

とする．また，これらの曲線上に 2 点 $\mathrm{P}'(x_1,\ 2y_1)$，$\mathrm{Q}'(x_2,\ 2y_2)$ をとる．





l' と C' が異なる 2 個の共有点を持[illegible]

$$\frac{|2b|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}}<2 \quad \text{よって}$$ [illegible]

(2) l' に平行な直線 m' が第 1 象限[illegible]に[illegible]ている[illegible]る.
このとき，(1) と同様にし[illegible]

$$\frac{|2b|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}}=2$$ ゆえ[illegible]$|=$[illegible]

[illegible]号に[illegible] $b=\sqrt{4a^2+1}$ ⋯① [illegible]って $\boldsymbol{y=ax+\sqrt{4a^2+1}}$

C' と[illegible]程式[illegible]を消去すると x^2[illegible]$x+2b)^2=4$

[illegible]$abx+4b^2-4=0$ ⋯(∗)

[illegible]程式 ([illegible]と係数[illegible]係により

[illegible] $\frac{8ab}{[illegible]+1}$, [illegible] $\frac{[illegible]b^2-4}{4a^2+1}$ ⋯(∗∗)

[illegible] (x_2-x_1)[illegible]$)^2-4x_1x_2$

$$=\left(-\frac{8ab}{4a^2+1}\right)^2-4\times\frac{4b^2-4}{4a^2+1}$$

$$=\frac{16(4a^2-b^2+1)}{(4a^2+1)^2}$$

$x_1<x_2$ お[illegible]) の結果に注意して $\boldsymbol{x_2-x_1=\dfrac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}}$

(4) (2) の結果から，m' の方程式は　$y = 2ax + 2\sqrt{4a^2+1}$　$\cdots$②

A′ の座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると，x_0 は $(*)$ の重解である．

このとき，① に注意して

$$x_0 = -\frac{8ab}{2(4a^2+1)} = -\frac{8a\sqrt{4a^2+1}}{2(4a^2+1)} = -\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}$$

これを ② に代入することにより

$y_0 = 2a\left(-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+ \cdots}}\right.$ [illegible] $2\sqrt{4a^2+}$ [illegible] $\frac{2}{\sqrt{4a^2+1}}$

よって，A′$\left(-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}},\ \frac{2}{\sqrt{4a^2+1}}\right)$ [illegible]

の距離を d とすると，(1) の結果 [illegible]

$d =$ [illegible]

$= \frac{2|\sqrt{4a^2+1}-b|}{\sqrt{4a^2+1}} = 2\Bigl($ [illegible] b [illegible]

[illegible] 結果 [illegible]

[illegible] $|x_2 - x_1| =$ [illegible] $\times \frac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}$

[illegible] $= 4$ [illegible] $\frac{b^2}{\cdots a^2+1}$

した [illegible]

[illegible] $= \frac{1}{2}$ [illegible] $\frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\Bigr)\sqrt{1-\frac{b^2}{4a^2+1}}$

$S =$ [illegible] A′P [illegible] あるから

$$\boldsymbol{= 2\left(1-\frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right)\sqrt{1-\frac{b^2}{4a^2+1}}}$$

(5) (1) の結果から，$t=\dfrac{b}{\sqrt{4a^2+1}}$ とすると　$-1<t<1$

$f(t)=S^2$ とおくと　　$f(t)=4(1-t)^2(1-t^2)=-4(t-1)^3(t+1)$

これを微分すると　　$f'(t)=-8(t-1)^2(2t+1)$

したがって，$f(t)$ の増減表は

t	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1[illegible]
$f'(t)$		[illegible]	0	$-$	[illegible]
$f(t)$		[illegible]	極大 $\frac{27}{[illegible]}$	[illegible]	[illegible]

よって，求める S の最大値は　$\sqrt{\frac{27}{[illegible]}}$ [illegible]

別解 (5) で求めた $f(t)=4(1-t)^3(1$ [illegible] $<t<1$ であるから，
$1-t>0$，$1+t>0$ より

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\left(\frac{1[illegible]}{3}[illegible]\frac{1}{4}(1+t)\geqq[illegible]t\right)\ ([illegible]$$

こ[illegible]乗すると

$$[illegible]\geqq\frac{(1-t)^3(1+t)}{27}\quad ゆ[illegible]\ f(t)\leqq\frac{27}{4}$$

上[illegible]いて，[illegible]するとき

$$1[illegible]1+t\quad [illegible]ち\quad t=-\frac{1}{2}$$

し[illegible]て，[illegible]$\frac{1}{[illegible]}$ のとき [illegible] $\frac{27}{4}$ をとる．

[illegible] S の最大[illegible] $=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

補足 S が最大となるとき，$\triangle \mathrm{A'P'Q'}$ は正三角形である．

一般に，円に内接する三角形の面積が最大となる三角形は正三角形である．実際，辺 BC に対し，直線 BC から最も遠くなるように A を取ると面積は最大になる。このとき，$\triangle \mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ の鋭角二等辺三角形である．円の半径を R とし，$B = C = \theta$ とすると，$A = \pi - 2\theta$．このとき正弦定理により

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 2R\sin\theta \quad \cdots ③$$

したがって　$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}(2R\sin\theta)^2\sin(\pi - 2\theta)$

$= 2R^2\sin$ [illegible] $= 4R$ [illegible] $\cos\theta$

$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$ であるから

$\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\sin^2\theta}{3}\right) + \dfrac{1}{4}$ [illegible]

両辺を平方して　$\dfrac{1}{16} \geqq \dfrac{\sin^3}{}$ [illegible] ゆ [illegible] $\leqq$ [illegible]

上式において，等号が成 [illegible] のは

[illegible] $\sin^2\theta$ [illegible] $= \cos^2\theta$　ゆえに　$\tan^2\theta =$ [illegible] すな [illegible]

[illegible] と [illegible] $= C = \frac{\pi}{3}$ となる．したが [illegible] 円 [illegible] 接する三 [illegible] 形は面 [illegible] 最大 [illegible] 正三角形である．この [illegible] に注意すると，二等辺三角形 A′P [illegible] 面積 [illegible] のとき正三角形で [illegible] ら，$R = 2$ より

$$\mathrm{P'Q'} = 2\sqrt{3}$$

[illegible]) で求 [illegible] Q′ = [illegible] $\dfrac{b^2}{4a^2+1}$ [illegible] により

[illegible] $\dfrac{b^2}{4a}$ [illegible] 4

[illegible] 等 [illegible] 点である [illegible] のとき，二等辺三角形 A′P′Q′ は鈍

[illegible] ゆえに $b <$ [illegible])

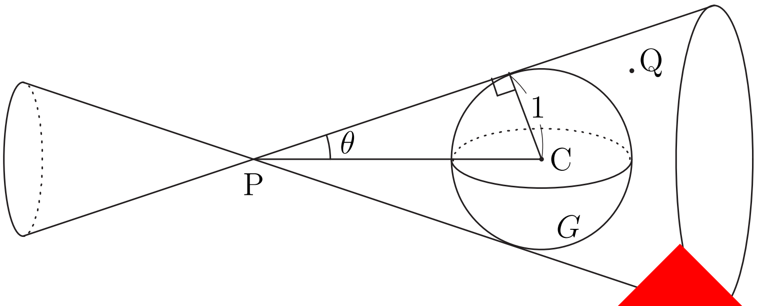
$$\frac{b}{\sqrt{4a^2+1}} = -\frac{1}{2}$$

1.22 G に接する P(0, − [illegible] を頂点とする円錐面上の点を Q(x, y, z) とする．

G の中心 (0, 0, [illegible] とおくと　$\mathrm{PC} = \sqrt{2^2 + (1-a)^2} = \sqrt{a^2 - 2a + 5}$

円錐面と直線 PC [illegible] なす角を θ とすると　$\sin\theta = \dfrac{1}{\mathrm{PC}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-2a+5}}$

したがって　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = \dfrac{a^2-2a+4}{a^2-2a+5}$



$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(0,\ 2,\ 1-a)$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(x,\ y+$ [illegible] $a)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=2(y+2) \text{[illegible]})$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=2^2+(1- \text{[illegible]}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=x^2+(\text{[illegible]}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の角は，θ または π [illegible]るから

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right) \text{[illegible]} =|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \text{[illegible]} \theta$$

また [illegible] 式および $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2\cos^2\theta=a^2$ [illegible] 入する

$$\text{[illegible]} (y+2) \text{[illegible]} a)\}^2=(a^2-2a+ \text{[illegible]} (y+2)^2+(z-a)^2\}$$

[illegible]れを[illegible]るこ[illegible]の円錐面の方程式を得る．

$$\text{[illegible]} a^2-2 \text{[illegible]} a^2+(\text{[illegible]})(y+2) \text{[illegible]} -a)^2$$
$$-4(1- \text{[illegible]} 2)(z-a)=0 \quad \cdots(*)$$

[illegible]よる円[illegible]$)$ の[illegible]を表[illegible]は，$z=0$ を代入することにより

$$(a \text{[illegible]} (a-2)(y \text{[illegible]} a(1-a)(y+2)+3a^2=0 \quad \cdots(**)$$

$a(a-2)$ [illegible]，す[illegible] $a\neq 0,\ 2$ のとき，$(**)$ より

$$(a^2-2a \text{[illegible]} +a(a-2)\left\{y+2+\frac{2(1-a)}{a-2}\right\}^2=\frac{a(a^2-2a+4)}{a-2}$$
$$(a^2-2a+ \text{[illegible]} a(a-2)\left(y-\frac{2}{a-2}\right)^2=\frac{a(a^2-2a+4)}{a-2} \quad \cdots(***)$$

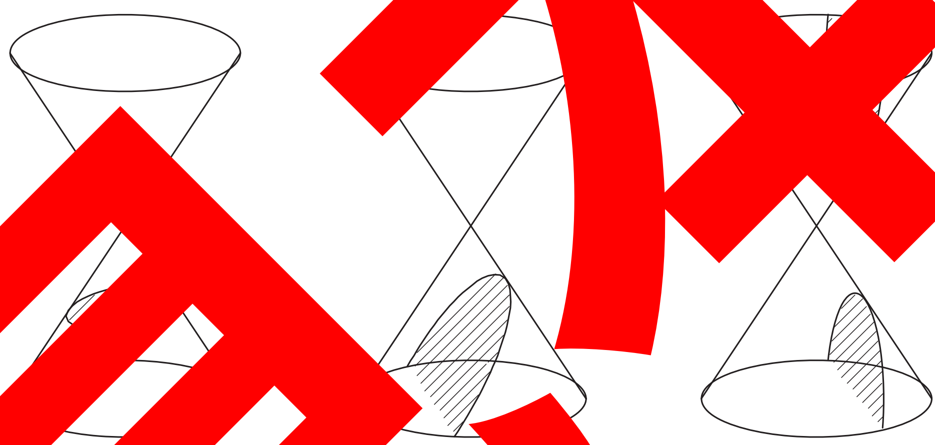
$a^2-2a+4=(a-1)^2+3>0$ であるから，$a(a-2)$ と $\dfrac{a(a^2-2a+4)}{a-2}$ は同符号．

したがって，(**)，(* * *) から

$$\begin{cases} \boldsymbol{a = 0} \text{ のとき} & \text{直線 } (\boldsymbol{x = 0}) \\ \boldsymbol{a = 2} \text{ のとき} & \text{放物線 } \left(\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}}\right) \\ \boldsymbol{a < 0,\ 2 < a} \text{ のとき} & \text{楕円} \\ \boldsymbol{0 < a < 2} \text{ のとき} & \text{双曲線} \end{cases}$$

解説 2次曲線は，平面 (問題では xy 平面) によ る円錐面の切[illegible]ても現れる．そのため，これらの曲線を円錐曲線と[illegible]

放物線となるのは，平面が母線と平行[illegible]また，直線となるのは，平面が頂点を通り，母線に平行な場合であ[illegible]平面が頂点のみを共有するとき，円錐曲線は1点に退化するので[illegible]していないことを確認している．



[illegible]　　放物線　　双曲線

[illegible] x [illegible] $s\theta +$ [illegible] θ より

$$\mathrm{co}\ [\text{illegible}] \quad \sin\theta = \frac{y}{2a}$$

$0 <$ [illegible] < 5, [illegible] 2π より　**楕円** $\boldsymbol{\left(\frac{x-5}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{2a}\right)^2 = 1}$

(2) 接点を $\mathrm{P}(x_1,$ [illegible] すると，P は楕円上の点であるから

$$\left(\frac{x_1 - 5}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{2a}\right)^2 = 1 \quad \cdots ①$$

P における楕円の接線の方程式は

$$\frac{(x_1 - 5)(x - 5)}{a^2} + \frac{y_1 y}{4a^2} = 1$$

これが原点を通るから　　$x_1 = \dfrac{25-a^2}{5}$

これを ① に代入すると　　$\dfrac{a^2}{25} + \left(\dfrac{y_1}{2a}\right)^2 = 1$

$0 < a < 5$ に注意して　　$y_1 = \pm\dfrac{2a\sqrt{25-a^2}}{5}$

この原点を通る直線の傾きは　$\dfrac{y_1}{x_1} = \pm\dfrac{2a}{\sqrt{25-a^2}}$

よって　接線の方程式は　$\boldsymbol{y = }$ [illegible]

接点の座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{25-a^2}{5}}, \right.$ [illegible]

(3) (2) で求めた 2 つの接点の垂直 [illegible] から，外心 C は，x 軸上の点である．原点 (0 [illegible] 点 [illegible] 二等分線は，点 $\left(\dfrac{25-a^2}{10}, \dfrac{a\sqrt{25-a^2}}{5}\right)$ を通 [illegible] き $-\dfrac{\sqrt{}}{}$ [illegible] 直線

[illegible] $\dfrac{a\sqrt{25-a^2}}{5} = -\dfrac{\sqrt{25-}}{2a}$ [illegible]

である [illegible] て　$x = \dfrac{3a^2+25}{10}$ [illegible] って　C$\left(\boldsymbol{\dfrac{3a^2+25}{10}, 0}\right)$

C [illegible] 円上に [illegible] 求めた楕円の方程式から

[illegible] $\dfrac{3a^2}{}$ [illegible] $= 1$　ゆえ [illegible] $a^2 - 25 = \pm 10a$

[illegible] より　$\boldsymbol{a = \dfrac{5}{3}}$

1.24 (1) [illegible] x^2 の焦点 [illegible] 準線 の [illegible] は [illegible] である．

右の図から，[illegible] 上の点 A の y 座標は

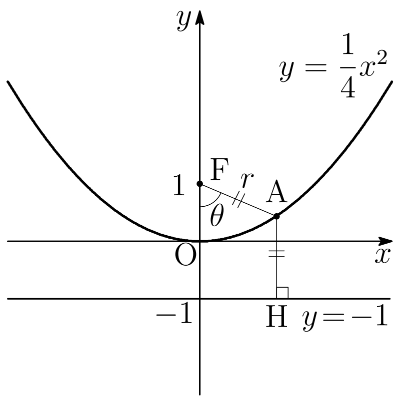
$y = 1$ [illegible] $\cos\theta$

A から準線に [illegible] した垂線 AH の長さは

AH $=$ [illegible] $r\cos\theta) - (-1)$

$= 2 - r\cos\theta$

放物線上の点 A について，FA = AH であるから



$r = 2 - r\cos\theta$　　これを解いて　　$\boldsymbol{r = \dfrac{2}{1+\cos\theta}}$

(2) (1) の結果から　　$\mathrm{FA}_k = \dfrac{2}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{FA}_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}} = \int_0^1 \text{[illegible]}\,dx$$

$$= \int_0^1 \text{[illegible]}\,dx = \left[\frac{4}{\text{[illegible]}}\right]_0^{\text{[illegible]}} = \boldsymbol{\frac{4}{\pi}}$$

1.25 (1) $r = 2\cos\theta$ の両辺に r をかけると

$$r^2 = 2r\cos\theta$$

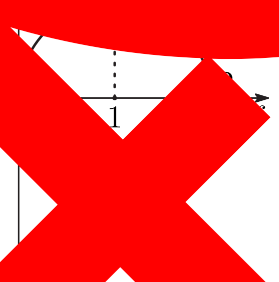
$r^2 = x^2+y^2$，$r\cos\theta = x$ であ[illegible]

$$x^2+y^2 = 2x$$

ゆえに　$\boldsymbol{(x-1)^2+y^2}$ [illegible] ⋯①

C の表[illegible]図形は，中心 $(1,\ 0)$，半径 1 の円[illegible]

右の[illegible]になる．



(2) [illegible]$1,\ 0$[illegible] 傾き k の直線は　$y =$ [illegible]$1)$ ⋯②

[illegible]①，②[illegible]すると　$(x-1)^2+$[illegible]$1)^2 = 1$

x[illegible]て整理[illegible]$+1)x^2+2(k^2-1)x+k^2 = 0$　⋯③

[illegible]程式 ③[illegible]判別式を[illegible]ると

[illegible]$k^2-1)^2-(k$[illegible]$k^2 = 1-3k^2$

[illegible]② が C[illegible]点て[illegible]から

[illegible]$3k^2 > 0$ [illegible]いて　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < k < \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(3) 直線と C の 2 [illegible]交点の x 座標を α，β とすると，2 つの交点の中点の座標は，② によ[illegible]

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ k\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\right)$$

方程式 ③ の解と係数の関係により　　$\alpha+\beta = \dfrac{2(1-k^2)}{k^2+1}$

ゆえに，中点の座標を $(x,\ y)$ とすると　$x = \dfrac{1-k^2}{k^2+1}$，$y = \dfrac{2k}{k^2+1}$

ここで，$k = \tan\theta$ とすると，(2) の結果から $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$

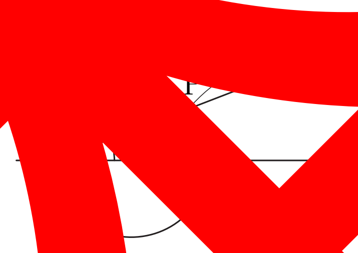
したがって
$$x = \frac{1-\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1} = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$
$$y = \frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

$-\frac{\pi}{3} < 2\theta < \frac{\pi}{3}$ であるから $\frac{1}{2} < x \leqq 1,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} < y <$ [illegible]

よって，求める軌跡の方程式は [illegible] $\boldsymbol{{}^2 + y^2}$ [illegible] $\boldsymbol{< x \leqq 1}\Big)$

1.26 (1) C_2 の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

$$r = \mathrm{OP} + \mathrm{PQ} = a\cos\theta + a \text{ [illegible]}$$
$$= a(\cos\theta + 1)$$



よって $\boldsymbol{r = a(\cos\theta}$ [illegible]

(2) 点 Q [illegible] の直交座標は $(r_0\cos\theta_0,\ r_0$ [illegible]

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = r_0(\cos\theta_0, \text{ [illegible]}$$

点 Q([illegible] $_0$, [illegible] を通り，法線ベク [illegible] 1 つが $(\cos\theta_0,\ \sin\theta_0)$ で
あ [illegible] が l で [illegible] その方程式は

[illegible] $\cos\theta_0($ [illegible] $\cos\theta_0) +$ [illegible] $(y - r_0\sin\theta_0) = 0$

整理 [illegible] $\boldsymbol{{}_0 + y\sin\theta}$ [illegible] $\boldsymbol{= 0}$

[illegible] $0)$ か [illegible] l ま [illegible] 離を [illegible] と，$r_0 = a(\cos\theta_0 + 1)$ より

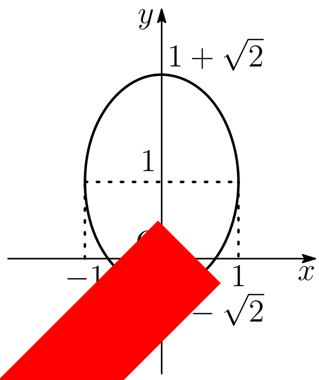
$$\frac{|a\cos\theta_0 - \text{[illegible]}}{\text{[illegible]}\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0} \text{ [illegible] } |a\cos\theta_0 - a(\cos\theta_0 + 1)| = a$$

よって，l は，[illegible] に関係なく常に点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 a の接する．

1.27 (1) $C_1 : x^2 + y^2$ [illegible] $2y + 7 = 0$ より $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 3$
C_1 は，中心 [illegible] $1)$，半径 $\sqrt{3}$ の円であるから

$$\boldsymbol{x = -3 + \sqrt{3}\cos\theta,\ y = 1 + \sqrt{3}\sin\theta}$$

(2) $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}$ より　$\sqrt{2}r=r\sin\theta+1$



このとき，$r\sin\theta=y$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ である

ことに注意して，上式の両辺を平方すると

$$2(x^2+y^2)=(y+1)^2$$

すなわち　$\boldsymbol{x^2+\dfrac{(y-1)^2}{2}=1}$

よって，C_2 の概形は右のよう[illegible]

(3) C_2 上の点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，P [illegible] から

$$p^2+\frac{(q-1)^2}{[illegible]} [illegible]$$

C_2 の P における接線の方程式 [illegible]

$$px+ [illegible] 1)(y-1) [illegible] \cdots(*)$$

$(*)$ が [illegible] 中心 $(-3,\ 1)$ を通るとき

$$[illegible] -3p=1 \quad ゆえに \quad p= [illegible] \cdots [illegible]$$

② を [illegible] 代入 [illegible] により　$q=\dfrac{7}{3}$ [illegible] $\dfrac{[illegible]}{3}$

[illegible] 上の点 [illegible] $\dfrac{[illegible]}{3}\Big)$ [illegible] る接線の [illegible] 式は，$(*)$ により

$$-\frac{1}{3}x+ [illegible] (y-1)= [illegible] わち \quad x-2y+5=0$$

[illegible] $\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{[illegible]}{3}\right)$ [illegible] る接線の方程式は，$(*)$ により

$$-\frac{1}{3}x+ [illegible] \frac{1}{3}-1\Big)(y-1)=0 \quad すなわち \quad x+2y+1=0$$

よって，求 [illegible] 線の方程式は

$$\boldsymbol{x-2y+5=0,\quad x+2y+1=0}$$

1.28 (1) $r=\dfrac{a}{2+\cos\theta}$ より　$2r+r\cos\theta=a$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$r\cos\theta=x$ を代入すると

$$2\sqrt{x^2+y^2}+x=a$$

$2\sqrt{x^2+y^2}=a-x$ の両辺を平方すると

$$4(x^2+y^2)=(a-x)^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{3x^2+4y^2+2a}\,[illegible]\,\boldsymbol{-a^2=0}$$

(2) (1) で求めた 2 次曲線を x 軸方向に $\dfrac{a}{3}$ だけ平行移動[illegible]

$$3\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+4y\,[illegible]\,=0$$

整理すると $\quad \boldsymbol{3x^2+4y^2-}$ [illegible]

2 次曲線 C と x 軸との交点は，[illegible]て

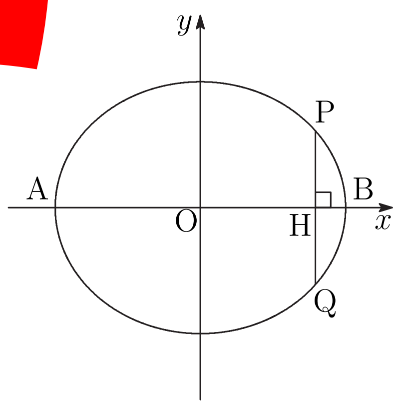
$$3x^2-\frac{4}{3}a^2\,[illegible]\,\text{これを解}\,[illegible]\,x$$

2 つの[illegible]A，B について，B の x 座標は[illegible]るか[illegible]

$$\mathbf{A}\left(-\frac{2}{3}a,\ 0\right),\ \mathbf{B}\,[illegible]$$

[illegible]$(\alpha,$ [illegible]から $\quad \beta\neq 0$

ま[illegible]$(\alpha,-$[illegible]より



PH[illegible]PH^2

[illegible]BH $=$ [illegible]$\left(\dfrac{2}{3}a-\alpha\right)$[illegible]

[illegible]$\dfrac{}{9}a^2-$[illegible]

[illegible]あるから

$$[illegible]\,4\beta^2-\frac{4}{3}a^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{4}{9}a^2-\alpha^2=\frac{4}{3}\beta^2$$

よって $\quad$ [illegible]$\dfrac{\cdots\mathrm{QH}}{\cdots\mathrm{BH}}=\dfrac{\beta^2}{\dfrac{4}{9}a^2-\alpha^2}=\dfrac{\beta^2}{\dfrac{4}{3}\beta^2}=\dfrac{3}{4}$

1.29 (1) $\mathrm{F}_1(a,\ a)$，$\mathrm{F}_2(-a,-a)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ より

$$\mathrm{F_1P}=\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2},\qquad \mathrm{F_2P}=\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}$$

これを $\mathrm{F_1P}\cdot\mathrm{F_2P} = 2a^2$ に代入すると

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}=2a^2$$

両辺を平方すると

$$\{(x^2+y^2+2a^2)-2a(x+y)\}\{(x^2+y^2+2a^2)+2a(x+y)\}=4a^4$$
$$(x^2+y^2+2a^2)^2 - [illegible] y)^2 = 4a^4$$
$$(x^2+y^2)^2+4a^2(x^2+y^2)+4a^4 [illegible] +y)^2 = 4a^4$$

よって　　$\boldsymbol{(x^2+y^2)^2 -}$ [illegible]

(2) (1) の結果に $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ [illegible]

$$(r^2)^2 - 8a^2 r\cos\theta\cdot r\sin\theta = [illegible] 4a^2\sin 2\theta)$$

$r=0$ は，$r^2=4a^2\sin 2\theta$ に[illegible]るから[illegible]か[illegible]式は

$$[illegible] = \boldsymbol{4a^2\sin} [illegible]$$

(3) 0 [illegible]り　$0 \leqq 2\theta < 4\pi$

[illegible]よ[illegible]であるから　$\sin 2\theta >$ [illegible]

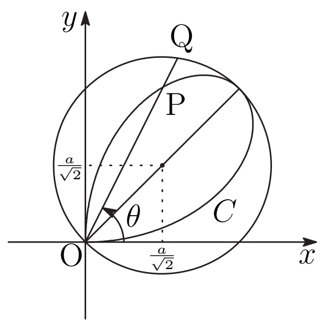
ゆえに [illegible] $\pi < 2\theta < 3\pi$　す[illegible]　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$

よ[illegible] C か[illegible]る部分は，平面上の第1象限と第3象限を合わ[illegible]範囲に[illegible]れる．

点 $\Big($ [illegible] $\sqrt{2}\Big)$ を[illegible]する半径 a の[illegible]極方程[illegible]表すと

[illegible] $= 2a\cos$ [illegible]

[illegible]Oと C 上の[illegible]を右の図のようにと[illegible]と



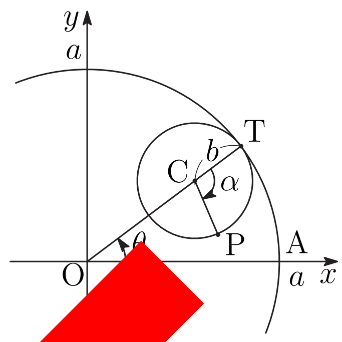
O[illegible] $\sqrt{2}a(\sin\theta+\cos\theta)$

ゆえに　O[illegible] $\mathrm{OP}^2 = 2a^2(\sin\theta+\cos\theta)^2 - 4a^2\sin 2\theta$

$$= a^2(\sin\theta-\cos\theta)^2 \geqq 0$$

よって，第1象限にあるPは，点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ を中心とする半径 a の周または内部にある．

1.30 (1) O と C の接点を T とし，$\alpha = \angle\mathrm{TCP}$ とすると，$\overset{\frown}{\mathrm{AT}} = \overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから



$$a\theta = b\alpha \quad ゆえに \quad \alpha = \frac{a}{b}\theta$$

$\mathrm{OC} = a - b$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (a-b)(\cos\theta,\ \sin\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = b(\cos(\theta-\alpha),\ \sin(\theta \text{ [illegible] }))$$

$\theta - \alpha = \dfrac{b-a}{b}\theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$$
$$= (a-b)(\cos\theta \text{ [illegible] } b \left(\text{ [illegible] } b \text{ [illegible] } \frac{b-a}{b}\theta \right)$$

よって $\boldsymbol{x = (a-b)\,c}$ [illegible] $\boldsymbol{\theta + b\cos\frac{b}{}}$ [illegible]

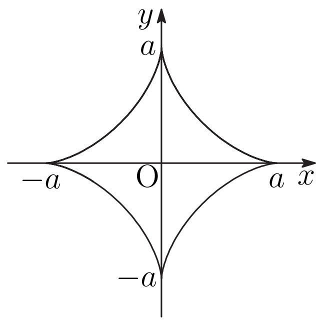
$\boldsymbol{= (a-b)\sin\theta + b\sin\frac{b-}{b}}$ [illegible]

[illegible] $= \frac{1}{4}a$ [illegible] これを (1) の結果に[illegible]ると

$$x = \text{ [illegible] } \cos\theta + \frac{1}{4}a\cos(-3\theta)$$
$$= \text{ [illegible] } (3\cos\theta + c \text{ [illegible] }) = \boldsymbol{a\cos^3\theta}$$
$$\text{ [illegible] } \sin\theta + \frac{1}{}\text{ [illegible] } \theta)$$
$$= \text{ [illegible] } \theta) = \boldsymbol{a\sin^3\theta}$$

解説 (2) [illegible]

$$\text{[illegible]} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

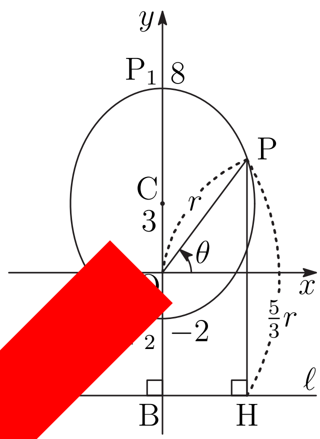


この曲線を[illegible]ロイド (asteroid) または星芒形(せいぼうけい)と[illegible]

1.31 (1) O は，楕円の焦点であるから，右の図において，楕円の離心率 e は

$$e = \frac{\text{CO}}{\text{CP}_2} = \frac{3}{5}$$

楕円の準線を ℓ とすると，楕円上の点 P から準線 ℓ に下した垂線を PH とすると



$$e = \frac{\text{OP}}{\text{PH}}$$

が成り立つ (2 次曲線について成 [illegible]

O から準線 ℓ までの距離 OB を λ とす [illegible] PH を 2 通りに表すと

$$\text{PH} = \frac{5}{3}r, \quad \text{PH} = \lambda + r \ [illegible] = \frac{[illegible]}{5 - 3\sin\theta}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき (P が P_1 にあ [illegible] $= 8$ で [illegible] 16

したがって　$r = \dfrac{16}{5 - 3\sin\theta}$　よって　y [illegible] $\theta =$ [illegible]

補足 2 次 [illegible] 点を極とすると，その方程式 [illegible] きる．

楕 [illegible] $\dfrac{(y-3)^2}{25} = 1$ の準線は [illegible] $\dfrac{16}{3}$

また [illegible] $\dfrac{x^2}{16}$ [illegible] $= 1$ の準線は [illegible] $\dfrac{[illegible]6}{3}$

その [illegible] 程式は [illegible] $\dfrac{16}{5 + 3\text{s}[illegible]}$

[illegible] P([illegible]) における [illegible] $+ \dfrac{(y-3)^2}{25} = 1$ の接線は

$$[illegible] \frac{16\cos\theta}{[illegible] - 3\sin\theta} \cdot [illegible] \frac{[illegible]\theta}{[illegible] 3\sin\theta} - 3\Bigr) \cdot \frac{y-3}{25} = 1$$

よ [illegible] $\boldsymbol{\cos\theta)x + (5\sin\theta - 3)y - 16 = 0}$

補足 楕円 $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}$ [illegible] $\dfrac{[illegible] - \beta)^2}{b^2} = 1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$[illegible] \frac{(x_1 - \alpha)(x - \alpha)}{a^2} + \frac{(y_1 - \beta)(y - \beta)}{b^2} = 1$$

(3) 点 A(0, 6) を通り，l に垂直な直線の方程式は

$$-(5\sin\theta - 3)x + (5\cos\theta)(y - 6) = 0$$

ここで，$a=5\cos\theta$，$b=5\sin\theta-3$ とおくと，l および上式は

$$ax+by=16,\quad -bx+ay=30\cos\theta$$

これら 2 直線の交点を M$(x,\ y)$ とすると

$$(a^2+b^2)x=16a-30b\cos\theta,\quad (a^2+b^2)y=16b+30a\cos\theta$$

このとき

$a^2+b^2=(5$ [illegible] $)^2+(5\sin$ [illegible]

$=2($ [illegible]

$16a-30b\cos\theta=16\cdot5\cos$ [illegible] $3)\cos\theta$

$=10\cos$ [illegible]

$16b+30a\cos\theta=16$ [illegible] $\cos\theta\cdot\cos\theta$

[illegible]

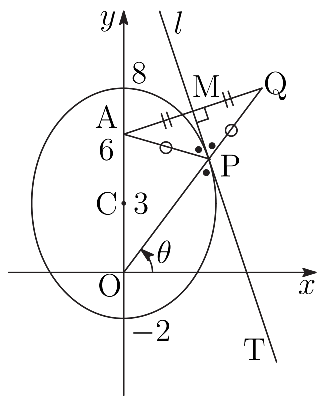
[illegible] $\sin\theta+$ [illegible] -15 [illegible]

$17-1$ [illegible] $\theta\neq0$ であるから　M$(5\cos\theta,$ [illegible] $+3)$

[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}5\cos\theta\\5\sin\theta+3\end{pmatrix}$ [illegible] $=\begin{pmatrix}\text{[illegible]}\\5\sin\theta-3\end{pmatrix}$

[illegible] $\mathrm{Q}=$ [illegible] $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\text{[illegible]}\cos\theta\\5\sin\theta-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\cos\theta\\10\sin\theta\end{pmatrix}$

[illegible] て [illegible] $\cos$ [illegible] $\sin\theta)$



右の図 [illegible] △APM [illegible] QPM であるから

[illegible] ∠A [illegible] ∠ [illegible] AP = [illegible]

[illegible] 焦点である [illegible]

[illegible] PM = ∠OPT

ゆえに　∠ [illegible] = ∠OPT

Q は OP の延 [illegible] 上にあるから

OQ = O [illegible] PQ = OP + AP = 2 × 5 = 10

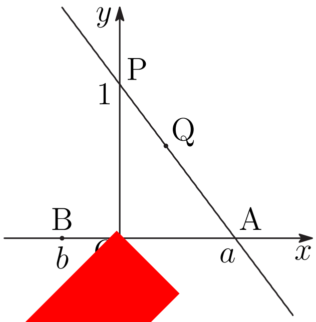
よって　**Q(10 cos θ，10 sin θ)**

解説 (九工大 [情]2010) 3

1.32 (1) 条件から　　$AP \cdot AQ = a(a+1) \cdots$①

$a>0,\ b \leqq 0$ より　$AO = a,\ AB = a-b$

これらを $AP \cdot AQ = AO \cdot AB$ に代入すると



$$a(a+1) = a(a-b)$$

$a \neq 0$ であるから　　$a+1 = a-b$

よって　　$\boldsymbol{b = -1}$

(2) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (0,\ 1) - (a$ [illegible] $a,\ 1)$ [illegible] $P^2 = a^2+1$

上式および①から　$\dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{A\text{[illegible]}}{AP^2}$ [illegible]

仮定より，$\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{AQ}$ は同じ向き [illegible]

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \text{[illegible]}$$

$$= (a,\ 0) + \text{[illegible]}(-a,\ 1) = \text{[illegible]}$$

ゆ [illegible] $y)$ は　$x = \dfrac{a(1-a)}{a^2+1}$，$y$ [illegible]

[illegible] より [illegible] $\theta\ (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ とおく

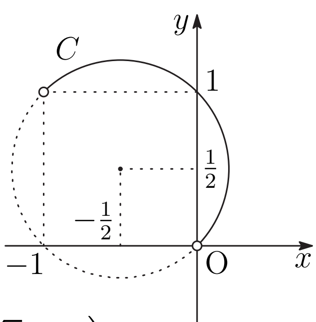
[illegible] $= \sin\theta\cos\theta$ [illegible]

[illegible] $2\theta +$ [illegible] $- \dfrac{1}{2}$ [illegible] $\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{2} \quad \cdots$①

[illegible] $\tan\theta($ [illegible] $\theta) = \sin\theta\cos$ [illegible] $^2\theta$

[illegible] $2\theta - \dfrac{1}{2}$ [illegible] $\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{2} \quad \cdots$②

ゆ [illegible] 跡は O と点 $(-1,\ 1)$ を直径の両端 [illegible] する [illegible] を O から点 $(-1,\ 1)$ まで反時計回りに描い [illegible] (O と $(-1,\ 1)$ を含まない).



よって　中 [illegible] $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}\Big)$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

(3) Q の y 座標 [illegible] 大となる点は，①，② より

$$2\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{のとき} \quad \mathbf{Q}\left(\boldsymbol{-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)$$

このとき，$\theta = \dfrac{3\pi}{8}$ であるから，$a = \tan\dfrac{3\pi}{8} > 0$ より

$$\tan^2\frac{3\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{1+\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2}+1)^2 \quad よって \quad \boldsymbol{a = \sqrt{2}+1}$$

補足 AP·AQ = AO·AB が成り立つから，方べきの定理の逆により，4 点 P，Q，O，B が同一円周上にあり，∠POB = 90° であるから [illegible] を直径とする円であること分かるが，Q の y 座標の最大値は分か[illegible].

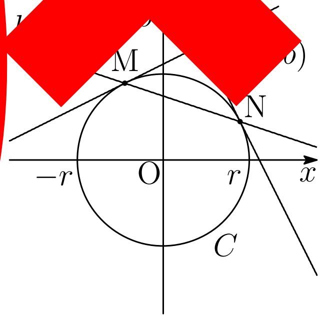
1.33 (1) 直線 OP の方程式は $\quad 2x -$ [illegible] $\cdots①$

直線 MN は P$(t,\ 2)$ を極とする C [illegible]

$$tx + 2y = \text{[illegible]}$$

Q は，①，② の交点であるから [illegible]

$$x = \frac{t}{t^2+4},\quad y = \text{[illegible]} \quad よって \text{[illegible]}$$

> 円 [illegible] $+ y^2 = r^2$ の外部の点 P$(a,$ [illegible]
> [illegible] 2 本の接線の接点を M$(x_1,$ [illegible]
> [illegible] $x_2,\ y$ [illegible] 2 本の接線
>
> [illegible] $+ y$ [illegible] $\quad x_2x + y_2y = r^2$
>
> [illegible] P$(a$ [illegible] 通る [illegible]
>
> [illegible] $+ by_1$ [illegible] $\quad ax_2 + by_2 =$ [illegible]
>
> [illegible] 式か [illegible] $by = r^2$ [illegible] M，N を通る．
> [illegible] のと [illegible] P を**極** [illegible] という．
>
> 
>

(2) (1) [illegible] $2\tan\theta\ (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ とおくと

$$x = \text{[illegible]} = \frac{2\tan\theta}{(2\tan\theta)^2+4} = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$y = \text{[illegible]} = \frac{2}{(2\tan\theta)^2+4} = \frac{1}{2}\cos^2\theta = \frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4}$$

よって，求め[illegible]点 Q の軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16},\ (x,\ y) \neq (0,\ 0)}$$

1.34 (1) C において，$s = c\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$x = \frac{c}{(c\tan\theta)^2 + c^2} = \frac{1}{c(\tan^2\theta + 1)} = \frac{1}{c}\cos^2\theta = \frac{1}{2c}(1 + \cos 2\theta)$$

$$y = \frac{c\tan\theta}{(c\tan\theta)^2 + c^2} = \frac{\tan\theta}{c(\tan^2\theta + 1)} = \frac{1}{c}\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2c}\sin 2\theta$$

上の 2 式から．C の表す円の方程式は，θ の範囲に注[illegible]て

$$\boldsymbol{\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2} \quad \cdots ① \quad \textbf{ただし} \text{ [illegible] } \boldsymbol{) \neq (0,\ 0)}$$

C の x，y，s，c をそれぞれ y，[illegible]に[illegible]たものが D であるから，D の表す円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2 + \left(y - \frac{1}{2d}\right)^2 = \left(\frac{1}{2d}\right)^2}$$

(2) ①，② の辺々を引いて整理[illegible] y [illegible]

③ を ① に代入して整理[illegible] $(c^2 + d^2$[illegible]cx

$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ であるから，上式および ([illegible]，交点[illegible]

$$\boldsymbol{\left(\frac{c}{c^2 + d^2},\ \frac{[illegible]}{c^2 + [illegible]}\right.}$$

([illegible]で求め[illegible]おける C の接線の方程[illegible]

$$\left([illegible]\frac{1}{[illegible]}\right)\left(x - \frac{1}{2c}\right) + \frac{[illegible]}{c^2 + d^2}y = \left(\frac{1}{2c}\right)^2$$

[illegible]れを整[illegible]と [illegible]$\boldsymbol{- d^2)x +}$ [illegible] $\boldsymbol{- c = 0}$

円[illegible]点にお[illegible]線の方程式

> [illegible]$x - a)^2$[illegible]^2 上の[illegible]$q)$ における接線の方程式は
>
> $$\boldsymbol{(p - a)(x}[illegible]\boldsymbol{(q - b)(y - b) = r^2}$$

1.35 (1) 点 $\mathrm{P}(a\cos\theta,$ [illegible] と原点 O に関して対称な点を $\mathrm{P}'(-a\cos\theta, -b\sin\theta)$ とすると，2 点[illegible]は E 上の点であり，E の P，P$'$ における接線をそれぞれ l_1，l_2 とす[illegible]

$$[illegible]\frac{\cos\theta}{a}x + \frac{\sin\theta}{b} = 1, \quad l_2 : \frac{\cos\theta}{a}x + \frac{\sin\theta}{b} = -1$$

よって，$l : \dfrac{\cos\theta}{a}x + \dfrac{\sin\theta}{b}y = k$ が E と異なる 2 点で交わる k の値の範囲は

$$\boldsymbol{-1 < k < 1}$$

(2) P$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ と $l: \dfrac{\cos\theta}{a}x+\dfrac{\sin\theta}{b}y-k=0$ の距離を d とすると

$$d=\frac{\left|\dfrac{\cos\theta}{a}\cdot a\cos\theta+\dfrac{\sin\theta}{b}\cdot b\sin\theta-k\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{\cos\theta}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\sin\theta}{b}\right)^2}}=\boldsymbol{\frac{ab(1-k)}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}}$$

(3) $\left(\dfrac{\cos\theta}{a}x+\dfrac{\sin\theta}{b}y\right)^2+\left(\dfrac{\sin\theta}{a}x-\dfrac{\cos\theta}{b}y\right)^2$ [illegible] $+\dfrac{y^2}{b^2}$

上式に $\dfrac{\cos\theta}{a}x+\dfrac{\sin\theta}{b}y=k\cdots①$, [illegible] a [illegible] 代入すると

$k^2+\Bigl(\dfrac{\sin\theta}{}$ [illegible]

ゆえに $\dfrac{\sin\theta}{a}x-\dfrac{\cos\theta}{b}$ [illegible] $\sqrt{1-k^2}$ [illegible]

①，② [illegible] 解いて

([illegible] $\boldsymbol{\sqrt{1-k^2}\sin\theta),\ b(k\sin\theta}$ [illegible] **$s\,\theta$))** [illegible] **同順)**

([illegible] の結果

QR [illegible] $\sqrt{1-k^2}\sin\theta)^2+$ [illegible] $-k^2\cos\theta)^2$

[illegible] $)(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)$

ゆえに QR [illegible] $-k^2\sqrt{a^2\sin}$ [illegible] $^2\cos^2\theta$

し [illegible] て

$S($ [illegible] QR$\cdot d$

[illegible] $\sqrt{1-k^2}\sqrt{a^2}$ [illegible] $\theta+b^2\cos^2\theta\cdot\dfrac{ab(1-k)}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}$

$=$ [illegible] $k)\sqrt{1-k^2}$

よって，$S(k$ [illegible] によらない．

(5) (4) の結果 [illegible] $S(k)=ab\sqrt{(1+k)(1-k)^3}$

$f(k)=(1+k)(1-k)^3\ (-1<k<1)$ とおくと

$$f'(k)=-2(2k+1)(1-k)^2$$

したがって，$f(k)$ の増減表は

k	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{27}{16}$	$\searrow$	(0)

よって，$S(k)$ は $k=-\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\boldsymbol{3\sqrt{3}}}{[illegible]}\boldsymbol{ab}$

1.36 (1) $f(0)=1$ より $\mathrm{P}_1(1,\ 0)$，$f(\pi)=\dfrac{1}{[illegible]}$ より $\mathrm{P}_3\left(-\dfrac{1}{[illegible]}\right.$ [illegible]

P_1 は C 上にあるから [illegible]

P_3 は C の内部にあるから [illegible]

上の 2 式から $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2}$ [illegible]

ゆえに $\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2<$ [illegible] $\alpha)^2$ よっ[illegible] $<\dfrac{[illegible]}{\boldsymbol{4}}$

(2) $f\Big($[illegible] り $\mathrm{P}_2\left(0,\ \dfrac{5}{8}\right)$，$f'(\theta)=\dfrac{\theta-[illegible]}{\pi^2}$ [illegible] $\dfrac{1}{[illegible]\pi}$

[illegible] $=f'($[illegible] $f(\theta)\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=f'(\theta)$ [illegible] $f(\theta)\cos\theta$ より

$\theta=$ [illegible] き [illegible] $\dfrac{dy}{d\theta}=-\dfrac{1}{2\pi}$，[illegible] $\dfrac{}{dx}$ [illegible] $\dfrac{[illegible]y}{d\theta}\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^{-1}=\dfrac{4}{5\pi}$

[illegible]って，[illegible]程式は [illegible] $=\dfrac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{5\pi}}$[illegible]

[illegible] D [illegible]一つは [illegible] あるから，[illegible]心を $(k,\ 0)$ とする．また，D

[illegible]を通る [illegible] 楕 [illegible] $\dfrac{(x-[illegible]}{}$ [illegible] $\dfrac{}{b^2}=1$ とおく．

[illegible] 通るから [illegible] $\dfrac{}{(1-k)^2}+\dfrac{25}{64b^2}=1\quad\cdots$①

P_2 における [illegible] 線の方程式は $\dfrac{(0-k)(x-k)}{(1-k)^2}+\dfrac{5y}{8b^2}=1$

この接線の傾[illegible] $\dfrac{[illegible]8b^2k}{[illegible](1-k)^2}$ が l の傾きと等しいので

[illegible] $=\dfrac{8b^2k}{5(1-k)^2}$ すなわち $\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{2\pi k}{(1-k)^2}\quad\cdots$②

② を ① に代入し，整理すると

$$\frac{k^2}{(1-k)^2}+\frac{25\pi k}{32(1-k)^2}=1 \quad \text{すなわち} \quad (25\pi+64)k=32$$

ゆえに　　$k = \dfrac{32}{25\pi + 64} < \dfrac{32}{64 + 64} = \dfrac{1}{4}$

よって，(1) の結果により，P_3 は D の内部にある．

補足　頂点 $(2k-1,\ 0)$ により $2k - 1 < -\dfrac{1}{2}$ を示してもよい

2.1 $\overline{z_1}z_2 = x + yi$ とおくと

$$|z_1||z_2| = |z_1||\overline{z_2}| = |z_1\overline{z_2}| = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\geqq \sqrt{x^2}$$
$$\geqq x = \frac{(x+yi) \text{[illegible]}}{2} \text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]} + z_1\overline{z_2}}{\text{[illegible]}}$$

よって　　$|z_1||z_2| \geqq \dfrac{\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}}{2}$

2.2　(1)　$k = \dfrac{\alpha}{\beta}$ とおくと (k は正の実[illegible] $= k\beta$ [illegible]

ゆえに　$|\alpha + \beta| = |k\beta +$ [illegible] $|(k+1)\beta| =$ [illegible] $1)|\beta|$

[illegible] $+ |\beta| = |k\beta| + |\beta| = k|\beta| + |\beta$ [illegible] $+$ [illegible]

[illegible] $\beta| = |\alpha| + |\beta|$

[illegible] $= x +$ [illegible] $\gamma + \overline{\gamma} = 2|\gamma|$ より

[illegible] $x - yi) = 2|\gamma|$　ゆえに　$x = |\gamma|$

[illegible] 0 で[illegible]ので，[illegible] $x^2 + y$ [illegible]　したがって　$x > 0$

$x =$ [illegible] y^2 の[illegible]乗すると　x [illegible] $+ y^2$　ゆえに　$y = 0$

[illegible]，γ は[illegible]

[illegible] $\beta| =$ [illegible] $|\beta|$ の両[illegible]

[illegible] $= (|\alpha| + |\beta|)^2$　整理すると　$\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = 2|\alpha||\beta|$

したがって　[illegible] $+ \overline{\alpha\overline{\beta}} = 2|\alpha\overline{\beta}|$

(2) の結果に[illegible] $\alpha\overline{\beta}$ は正の実数であるから

$$\alpha\overline{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\overline{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot|\beta|^2 > 0$$

よって，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ は正の実数である．

2.3 (1) $\alpha^3-8=(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)$ であるから，$\alpha^2+2\alpha+4=0$ より

$$\alpha^3-8=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\alpha^3=8}$$

(2) (1) の結果から $|\alpha|^3=8$ ゆえに $|\alpha|=2$

$\alpha^2=3\overline{\alpha}+\dfrac{k}{\alpha}$ より $\alpha^3=3|\alpha|^2+k$

これに $\alpha^3=8$，$|\alpha|=2$ を代入すると

$8=3\cdot2^2+$ [illegible] って $\boldsymbol{k}$ [illegible]

(3) (2) の結果より $z^2=3\overline{z}-\dfrac{4}{z}$ であるか [illegible]

$z^3=3|z|^2-4$ ゆ [illegible] $|^2-4|$

i) $3|z|^2-4\geqq0$ すな [illegible] $\geqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ [illegible]

$|z|^3=3|z|^2-4$ ゆえに ([illegible])$(|z|$ [illegible]

$|z|=2$ であるから

[illegible] 2^2-4 ゆえに $(z$ [illegible] $^2+2z+4)=0$

[illegible] を解い [illegible] $-1\pm\sqrt{3}\,i$

[illegible] $|z|^2-$ [illegible] す [illegible] $0\leqq|z|$ [illegible] $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき

$|z|^3$ [illegible] $|^2-4)$ ゆえ [illegible] $|z|-1)(|z|+2)^2=0$

このと [illegible] $|=1$ [illegible] から

[illegible] $^3=3\cdot1^2-$ [illegible] に $(z+1)(z^2-z+1)=0$

これを解 [illegible] $z=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

よって $\boldsymbol{z=}$ [illegible] $\boldsymbol{2,\ -1\pm\sqrt{3}i,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

2.4 z の偏角が 45° [illegible] から，$z=x+xi$ とおくと $(x>0)$

$$|z+i|=|x+(x+1)i|=\sqrt{2x^2+2x+1}$$
$$|z-i|=|x+(x-1)i|=\sqrt{2x^2-2x+1}$$

これらを $|z+i|+|z-i|=\sqrt{6}$ に代入すると

$$\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2-2x+1}=\sqrt{6}$$
$$\sqrt{2x^2+2x+1}=\sqrt{6}-\sqrt{2x^2-2x+1}$$

両辺を 2 乗して整理すると　$\sqrt{6(2x^2-2x+1)}=2x-3$

再び両辺を 2 乗して整理すると　$8x^2=3$

$x>0$ により　$x=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　よって　$\boldsymbol{z} [illegible] \dfrac{\sqrt{\mathbf{6}}}{[illegible]}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})$

解説 $|z+i|+|z-i|=\sqrt{6}$ の表す図形は [illegible] で，長軸が $\sqrt{6}$ の楕円を表し，短軸上の頂点は実軸上にあ [illegible]

$$|a+i|+|a-i|= [illegible] +1=\sqrt{6}$$

これを解いて　$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{[illegible]}}$ [illegible]，長軸 [illegible] 点は [illegible] $\sqrt{6}$ [illegible]

$z=x+$ [illegible] i とおくと，楕円の方程式は [illegible] $\dfrac{2}{3}y^2$ [illegible]

[illegible] $>0)$ により　$x=y=$ [illegible]

2.5 [illegible] $z=($ [illegible] $r\{\cos(-\theta)+i\sin(-$ [illegible]
[illegible] $\mathbf{os}(\boldsymbol{\pi}$ [illegible] $\boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{\theta})\}$

(2) [illegible] $\{r(\cos$ [illegible] $\sin\theta$ [illegible]
$= \dfrac{\mathbf{1}}{[illegible]}$ [illegible] $\mathbf{s}(-\mathbf{2}$ [illegible] $\mathbf{sin}(-\mathbf{2}\boldsymbol{\theta})\}$

[illegible] $=r(\cos$ [illegible] $r=r(\cos$ [illegible] $+i\sin\theta)$
[illegible] $\sin^2\dfrac{\theta}{2}+$ [illegible] $)=2r\sin\dfrac{\theta}{2}\left(-\sin\dfrac{\theta}{2}+i\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$
[illegible] $\mathbf{2}\boldsymbol{r}$ [illegible] $\left\{\mathbf{cos}\left(\dfrac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}+\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)+\boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}\left(\dfrac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}+\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)\right\}$

ここで，$0\leqq$ [illegible] より，$2r\sin\dfrac{\theta}{2}\geqq 0$

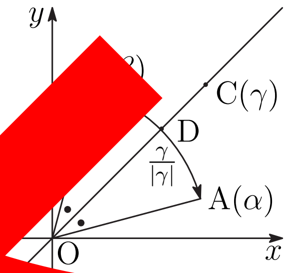
2.6 (1) $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2-\dfrac{\beta}{\alpha}$ [illegible] $=0$ より

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

したがって $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = 1$　ゆえに　$|\beta| = |\alpha|$，$\arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) = \pm\dfrac{\pi}{3}$

よって，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$，$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$ より，$\triangle\mathrm{OAB}$ は正三角形である．

(2) 点 D を $\dfrac{\gamma}{|\gamma|}$ とすると



$$\frac{\gamma}{|\gamma|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

右の図から 2 点 A，B は，点 D を [illegible]
原点 O を中心に $-\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転 [illegible]
ものであるから

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\cos \frac{\pi}{\ } \text{[illegible]} \frac{\ }{6}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\text{[illegible]}\frac{\ }{2}i\right) = \text{[illegible]}\sqrt{2} + \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}\frac{1}{\ }(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{[illegible]}\,i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \text{[illegible]}\mathbf{2} + \frac{\boldsymbol{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{i}$$

[illegible]解説 [illegible]

$$\text{[illegible]}\alpha = \text{c[illegible]} + i\sin\frac{1}{12}\pi = \text{[illegible]}+\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

$$\text{[illegible]}\text{in}\,\frac{5}{1\text{[illegible]}} \text{[illegible]} \sqrt{2}\over 4 + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$$

2.7 (1) [illegible] であるか [illegible] $\boldsymbol{r_1r_2|\sin(\theta_2-\theta_1)|}$

(2) $z_1 =$ [illegible] $(\cos$ [illegible] $\mathrm{n}\,\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ であるから

$$z_1\overline{z_2} + \text{[illegible]}\, r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)$$
$$+ r_1(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= r_1r_2\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$
$$+ r_1r_2\{\cos(\theta_2-\theta_1) + i\sin(\theta_2-\theta_1)\}$$
$$= 2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)$$

したがって，上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned} |z_1|^2|z_2|^2 - \frac{(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)^2}{4} &= {r_1}^2{r_2}^2 - \frac{\{2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)\}^2}{4} \\ &= {r_1}^2{r_2}^2 - {r_1}^2{r_2}^2\cos^2(\theta_2-\theta_1) \\ &= {r_1}^2{r_2}^2\sin^2(\theta_2-\theta_1) \\ &= S^2 \end{aligned}$$

2.8 (1) $P(x)=4x^3+(12-2a)x^2+(9-6a)x+27$ とお[illegible]

$$P(-3)=4(-3)^3+(12\ \text{[illegible]})^2+\ \text{[illegible]}\ (-3)+27=0$$

ゆえに，$P(x)=0$ は $\mathbf{-3}$ を実数解に[illegible]

$$\boldsymbol{P(x)=(x+}\ \text{[illegible]}$$

となる．したがって，$4x^2-$ [illegible] $P(x)=0$ [illegible]虚数解
である．2 次方程式 (∗) の[illegible]につ[illegible]/4 [illegible]

$$(-a)^2-\ \text{[illegible]} < 0 \quad \text{よって}\ \text{[illegible]} < \boldsymbol{a} < \text{[illegible]}$$

(2) 2 次[illegible]の 2 つの虚数解が $r(\cos\theta+$ [illegible] である
[illegible] $<\theta<180^\circ$)，解と係数の[illegible]

$$\text{[illegible]}+i\sin\theta)+r(\cos\theta\ \text{[illegible]}) = -\frac{-2a}{4}$$

$$\text{[illegible]}\sin\theta)\cdot r(\cos\theta-i\sin\theta)=\frac{9}{4}$$

[illegible]理す[illegible] $r\cos$ [illegible] $r^2=\frac{9}{4}$ [illegible] $\boldsymbol{r=\frac{3}{2}}$，$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{a}{6}}$

0° [illegible] 180° [illegible] 0 であるか[illegible]

$$\text{[illegible]}\theta=\sqrt{1\ \text{[illegible]}\left(\frac{a}{6}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{36-a^2}}{6}}$$

(3) 3 [illegible]と[illegible] $\cos\theta+i\sin\theta)$，$\beta=\frac{3}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$，$\gamma=-3$ とおく．

このとき，$-$ [illegible] $\cos\theta$ に注意すると

$$\text{[illegible]}(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)=\gamma-\beta$$

$$3i\sin\theta\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-3-\frac{3}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$-\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}i\sin\theta=-3-\frac{3}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}i\sin\theta$$

しがって　$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\sin\theta = -3-\dfrac{3}{2}\cos\theta$　整理すると　$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2$

ゆえに　$2\sin(\theta-30^\circ)=2$　$0<\theta<180^\circ$ により　$\boldsymbol{\theta = 120^\circ}$

(2) の結果 $\cos\theta=\dfrac{a}{6}$ より　$a=6\cos 120^\circ = \mathbf{-3}$

2.9　(1)　$z(t)=\dfrac{1}{2-2t^2-\sqrt{a}ti}=\dfrac{2-2t^2+\sqrt{a}ti}{(2-2t^2)^2+at^2}=\dfrac{2-2t^2+\sqrt{a}ti}{4t^4+(a\text{[illegible]})t^2+4}$

よって，$z(t)$ の実部は　$\dfrac{\mathbf{2}\text{[illegible]}\mathbf{2t^2}}{\mathbf{4t^4+}\text{[illegible]}\mathbf{)t^2+}\text{[illegible]}}$

虚部は　$\dfrac{\text{[illegible]}}{\mathbf{4t^4+(a-}\text{[illegible]}}$

(2)　$z(t)=\dfrac{1}{2-2t^2-\sqrt{a}ti}$，　$z(2t)=$ [illegible]

$\dfrac{z(2t)}{z(t)}=\dfrac{2-2t^2-\text{[illegible]}}{2(1-4t^2\text{[illegible]}}$ [illegible]

$=\dfrac{8t^4+(a-1\text{[illegible]}+2+\sqrt{a}t(\text{[illegible]})i}{2\{16t^4+(a-8)t^2+\text{[illegible]}}$

[illegible] のとき　$\dfrac{z(2t)}{z(t)}=\dfrac{2(2t^2-1)^2+\sqrt{\text{[illegible]}}}{16t^4-6t\text{[illegible]}}$

$\angle$AO[illegible]角で[illegible]，$\dfrac{z(2t)}{z(t)}$ は純虚[illegible]るから

2[illegible]$)^2=0$，[illegible]$(t^2+1)\neq 0$

$t\geqq$[illegible]意して[illegible]くと　$\boldsymbol{t=}$[illegible]

[illegible]OB が[illegible]あると[illegible]$(2t)$[illegible]数であるから，$(*)$ より次式をみ

[illegible]すればよい[illegible]).

[illegible]$+(a-10)t^2+2=0$，　$\sqrt{a}t(2t^2+1)\neq 0$

第 1 式から t[illegible]あるから，このとき第 2 式をみたす．したがって

$$8t^4+(a-10)t^2+2=0$$

をみたす[illegible]在する a の値の範囲を求めればよい．

ここで，$x=t^2$ とおくと $(x>0)$，2 次方程式

$$8x^2+(a-10)x+2=0 \quad \cdots(**)$$

が正の解をもつような a の値の範囲を求めればよい．

2 次方程式 $(**)$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha\beta = \frac{2}{8} > 0 \quad \text{このとき} \quad \alpha > 0,\ \ \beta > 0$$

ゆえに　　$\alpha + \beta = -\dfrac{a-10}{8} > 0$　すなわち　$a < 10$　$\cdots$ ①

$(**)$ の解は実数解であるから $D \geqq 0$ より

$$(a-10)^2 - 4\cdot 8 \text{ [illegible] } (a-2)(a \text{ [illegible] } 0$$

ゆえに　　$a \leqq 2,\ \ 18 \leqq a$　$\cdots$ ② [illegible]

よって，①，② および $a > 0$ により [illegible]

2.10 $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ である [illegible]

$$z^{4n+1} = z^{4n}z = \text{[illegible]} \cos\frac{\pi}{4} + \text{[illegible]} \Big)\Big\}$$
$$= \text{[illegible]}^{4n}(\cos n\pi + \text{[illegible]} n\pi)(1 \text{[illegible]}$$
$$= 4^n(-1)^n(1+i) = \text{[illegible]})^n \text{[illegible]}$$

2.11 z^3 [illegible] $+1)$ に $z^2 + z + 1 = 0$ [illegible] すると

[illegible] $1 = 0$　ゆえに [illegible]

$z^2 +$ [illegible] $= 0$ を [illegible] $\dfrac{\text{[illegible]}1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

[illegible] $+1$ [illegible] 2 つの [illegible] の解 z，$\overline{z}$ に [illegible]

[illegible] 1　ゆえ [illegible] $-z-1$

[illegible] $+z$ [illegible] より，z [illegible] あるから　$z^2 = \overline{z}$

したが [illegible]

$$(i - z \text{[illegible]})(i - z \text{[illegible]} i - z^n)(i - \overline{z}^n)$$
$$\text{[illegible]} - z^n - \overline{z}^n$$
$$\text{[illegible]} - \left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^n - \left(\cos\frac{2}{3}\pi - i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^n$$
$$= -\left(\cos\frac{2n}{3}\pi + i\sin\frac{2n}{3}\pi\right) - \left(\cos\frac{2n}{3}\pi - i\sin\frac{2n}{3}\pi\right)$$
$$= -2\cos\frac{2n}{3}$$

ゆえに $\qquad \dfrac{1}{(i-z^n)(i-z^{2n})} = -\dfrac{1}{2\cos\frac{2n}{3}\pi}$

よって **自然数 n が 3 の倍数のとき** $\quad \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

自然数 n が 3 の倍数でないとき $\quad \mathbf{1}$

2.12 (1) 実係数の 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解 α，β は互い[illegible]役であるから

$$\beta = \overline{\alpha}$$

上式と解と係数の関係により [illegible] α[illegible] $\cdots(*)$

$\alpha \neq 0$ であるから，$|\alpha| > 0$ より b [illegible]

(1) の結果と $\alpha = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\beta$ によ[illegible]

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\text{[illegible]}\cos\text{[illegible]}\cdots(**)$$

よって $\quad \boldsymbol{\arg(\alpha^2) = \dfrac{\pi}{6} +}$ [illegible] $\boldsymbol{\pi}$ **(k は整数**[illegible]

(2) $b =$ [illegible] $(**)$ より

$$\alpha^2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\text{[illegible]}\right.$$

ゆえ[illegible] $= (\alpha$[illegible]数となる最小の自[illegible] n は

[illegible] すなわち $\quad \boldsymbol{n = 6}$

この[illegible] α^{2n} [illegible] $2^6\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \text{[illegible]}\right)^6 = 2^6\cdot(-1) = \boldsymbol{-64}$

2.13 [illegible] $1 = \cos$[illegible] $i\sin$[illegible]

[illegible]極形式で[illegible]

$$z_k = \text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}0^\circ\times k}{5} + i\sin\frac{360^\circ\times k}{5}$$

$$= \text{[illegible]}\boldsymbol{{}^\circ\times k) + i\sin(72^\circ\times k) \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)}$$

(2) $z^5 - 1 = ($[illegible]$^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$ であるから

$$z = 1 \quad \text{または} \quad z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

(i) $z=1$ のとき $\quad z + \dfrac{1}{z} = 2$

(ii) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ のとき，両辺を $z^2\neq 0$ で割ると

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+z+\frac{1}{z}-1=0$$

$t=z+\dfrac{1}{z}$ とおくと　$t^2+t-1=0$　これを解いて　$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{z+\dfrac{1}{z}=2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$

(3) (1) の結果から　$z_2=\cos 144^\circ +$ [illegible] 144°

したがって　$z_2+\dfrac{1}{z_2}=z_2+\dfrac{\ }{z_2\overline{z_2}}$ [illegible] $\cos 144^\circ<0$

上式および (2) の結果から　z_2+ [illegible]

よって　$\boldsymbol{\cos 144^\circ=}$ [illegible]

2.14 (1) $z=x_1+y_1i$，$w=x_2+y_2$ [illegible] おくと

(a) [illegible] $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$ である [illegible]

$$\overline{z+w}=(x_1+x_2) \ \text{[illegible]}$$
$$=(x_1-y_1i) \ \text{[illegible]} -y_2i)$$
$$=\overline{z}+\overline{w}$$

[illegible] $=($ [illegible] $)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i$ より

$\overline{zw}$ [illegible] $x_2-y_1y_2)$ [illegible] $+x_2y_1)i$　$\cdots$①

[illegible] x_1- [illegible] y_2i より

$\overline{z}\,\overline{w}=($ [illegible] $_2i)$

$=(x_1x_2$ [illegible] $)-(x_1y_2+x_2y_1)i$　$\cdots$②

[illegible] ② [illegible]　$\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$

(2) $z^2-z+1=$ [illegible] いて　$z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(a) よって， [illegible] る α，β は

$$\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},}$$
$$\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}}$$

(b) $\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}=\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned}\alpha^{100}+\beta^{100}&=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{100}+\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{100}\\&=\left(\cos\frac{100}{3}\pi+i\sin\frac{100}{3}\pi\right)+\left(\cos\frac{100}{3}\pi-i\sin\frac{100}{3}\pi\right)\\&=2\cos\frac{100}{3}\pi=2\cos\left(32\pi+\frac{4\pi}{3}\right) \text{[illegible]} \left(-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}\end{aligned}$$

2.15 (1) $z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ より

$$z^5=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)\text{[illegible]}$$

$z^5-1=0$ より　　$(z-1)(z^4$ [illegible]

$z\neq1$ であるから　　z^4 [illegible] $+z+$ [illegible]

(2) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ を [illegible] $\neq0$ で割る [illegible]

[illegible] $+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}=0$　ゆえに [illegible] $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ [illegible]

[illegible] $=z$ [illegible] り [illegible] $t=\mathbf{1}$

(3) [illegible] $\dfrac{2\pi}{5}$ [illegible] $\dfrac{}{5}$ [illegible] $\cos\dfrac{2\pi}{5}-i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ であるから

$$t \text{[illegible]} =2\cos\frac{2\pi}{5}\quad \text{[illegible]}\quad \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}t$$

[illegible] より，[illegible] であ [illegible] 注意 [illegible] $t^2+t=1$ を解くと

$$\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}1+\sqrt5}{2}\quad \text{よ[illegible]}\quad \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}t=\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt5}{4}}$$

(4) 正五角形の一 [illegible] 長さを x とすると，中心角 $\dfrac{2\pi}{5}$，等しい 2 辺の長さが 1 の二等辺三角 [illegible] 余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}x^2&=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos\frac{2\pi}{5}\\&=2-2\cdot\frac{-1+\sqrt5}{4}=\boldsymbol{\frac{5-\sqrt5}{2}}\end{aligned}$$

2.16 (1) z の実部が $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ であるから $\quad \frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \cdots$①

$|z|=1$ より $\quad |z|^2=1 \quad$ ゆえに $\quad z\bar{z}=1 \quad$ すなわち $\quad \bar{z}=\frac{1}{z} \quad \cdots$②

①，② から $\quad z+\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

よって $\quad \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+$ [illegible]

(2) (1) の結果を展開して整理すると

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+ \text{[illegible]}$$

両辺に z^2 を掛けると $\quad \mathbf{1}$ [illegible] $+$ [illegible]

(3) $z^5-1=(z-1)(z^4+z$ [illegible] $z+1)$ で[illegible]ら，[illegible]

$$z^5-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad z^5= \text{[illegible]}$$

[illegible]$(\cos$ [illegible] $\theta)$ とおくと

$$r^5(\cos 5\theta+i\sin \text{[illegible]}$$

[illegible]って [illegible] $2n\pi \quad$ (n は整数)

[illegible]なわ[illegible] $\quad r=$ [illegible] $\frac{2n\pi}{5} \quad \cdots$

[illegible]部 $\frac{\sqrt{5}}{}$ [illegible]ら虚[illegible]あるから，$0\leqq\theta<2\pi$ より

[illegible] $\theta<\frac{\pi}{2}$

上式より，①[illegible]す整数 n は $\quad n=1 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{\theta=\frac{2}{5}\pi}$

2.17 $-2-2\sqrt{3}\,i=4\left(\text{[illegible]}\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=(\sqrt{2})^4\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$ であるから，

整数 n を用いて

$$(z-i)^4=-2-2\sqrt{3}\,i=(\sqrt{2})^4\left\{\cos\left(2n+\frac{4}{3}\right)\pi+i\sin\left(2n+\frac{4}{3}\right)\pi\right\}$$

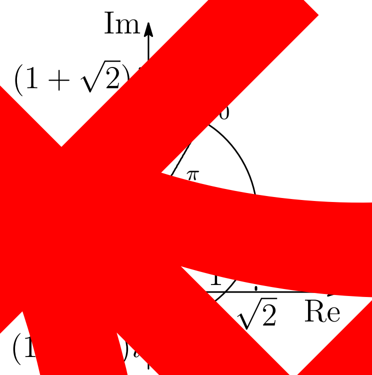
したがって　　$z-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{3}\right)\pi+i\sin\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{3}\right)\pi\right\}$

ゆえに，これらの解は

$$z_n-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{3}\right)\pi+i\sin\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{3}\right)\pi\right\}\quad(n=0,1,2,3)$$

である．よって

$$\boldsymbol{z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2+\sqrt{6}}{2}i,}$$
$$\boldsymbol{z_1=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{2}i,}$$
$$\boldsymbol{z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2-\sqrt{6}}{2}i,}$$
$$\boldsymbol{z_3=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{2-\sqrt{2}}{2}i}$$



2.18　(1)　$r=|z|\neq 0$，$z=r(\cos\theta$ [illegible] $\theta)$ とおく [illegible]

[illegible] $=z^{-1}=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{-}$ [illegible]

[illegible]えに [illegible] $\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r\right.$ [illegible] $\sin\theta$

よ [illegible] $z+\frac{1}{}$ [illegible] $\boldsymbol{+\frac{1}{r}\Big)\cos\theta}$，虚部は $\boldsymbol{\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta}$

[illegible] 自然数 [illegible] る．

[illegible] $+\frac{1}{z}\Big)^2$ [illegible]

[illegible] $\frac{1}{z^{n+2}}=\Big($ [illegible] $+\frac{1}{z^{n+1}}\Big)-\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$

上の [illegible] 式から [illegible] $\frac{1}{z}$ が実数ならば，$z^n+\frac{1}{z^n}$ は実数である．

また，$z+\frac{1}{z}$ [illegible] 数ならば，$z^n+\frac{1}{z^n}$ は，n が奇数のとき純虚数，n が偶数のとき実 [illegible] る．

2.19　(1)　$\frac{\beta}{\alpha}=3+i$， [illegible] $\arg\frac{\beta}{\alpha}$ より

$$|3+i|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10},\quad 3+i=\sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}}i\right)$$

ゆえに　$\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$　$(0^\circ < \theta < 90^\circ)$　$\cdots(*)$

また　$\arg\dfrac{\beta^2}{\alpha^2} = \arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 2\arg\dfrac{\beta}{\alpha} = 2\theta$

3 点 O(0)，P(α^2)，Q(β^2) を頂点とする △POQ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|\alpha|^2|\beta|^2\sin 2\theta$$
$$= |\alpha|^2|\beta|^2 \text{[illegible]} \cos\theta$$
$$= 1^2\cdot(\sqrt{10}\text{[illegible]} = \mathbf{3}$$

(2) $(*)$ より

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{[illegible]} \left(\sqrt{\text{[illegible]}}\right)^2 = \frac{4}{\text{[illegible]}}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \dfrac{4}{\text{[illegible]}} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より　$\cos 4$[illegible] $< \cos 2\theta <$ [illegible]

よ[illegible] $< 2\theta < 45^\circ$

(2[illegible]の結果[illegible] $< 90^\circ < 6\theta$ であるから[illegible] $= 5$ について

$(3$[illegible]$(3+i)\{(3+i)^2\}$[illegible]$+i)(8+6i)^2$

[illegible]$i)\{2(4+3i)\}^2$

[illegible]$+i)(7$[illegible]$= 4(-3+79i)$

cos[illegible]であ[illegible]$\theta > 90^\circ$ とな[illegible]の自然数 n は

2.20 (1) β[illegible]$-1+i\sin\theta$ より

$$\text{[illegible]}\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta} = \sqrt{2(1-\cos\theta)}$$
$$= \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$ であるから　$|\beta| = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$

(2) $\beta = \cos\theta - 1 + i\sin\theta = -2\sin^2\dfrac{\theta}{2} + 2i\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2} + 90^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + 90^\circ\right)\right\}$$

(1) の結果より $2\sin\dfrac{\theta}{2} = |\beta|$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より，$90^\circ < \dfrac{\theta}{2} +$ [illegible] 180° であ [illegible] $\arg\beta = \dfrac{\theta}{2} + 90^\circ$

(3) $\alpha = \cos\theta + 1 + i\sin\theta$

$$= 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

上式および (1) の結果から [illegible] 0° のと [illegible]

$\alpha = \sqrt{3}(\cos 30^\circ +$ [illegible] $\sin 30^\circ)$，　β [illegible] $120^\circ +$ [illegible]

ゆ [illegible] $|= (\sqrt{3})^m$，$\arg(\alpha^m\beta^n) =$ [illegible] $\times n$ [illegible]

[illegible] の虚 [illegible] すると　$I = (\sqrt{3})^m \sin$ [illegible] $\times m + 120^\circ \times n)$

[illegible] のと [illegible] $(\sqrt{3})^m \sin(30^\circ \times$ [illegible] $20^\circ)$　　$(m = 1, 2, 3)$

[illegible] $= 2$ の [illegible] $3)^m \sin(30^\circ \times m + 240^\circ)$　　$(m = 1, 2, 3)$

$n =$ [illegible] き　I [illegible] $)^m \sin($ [illegible] $m + 360^\circ)$　　$(m = 1, 2, 3)$

$I < 0$ [illegible] るのは [illegible] 4 通りで，そ [illegible] の I の値は

[illegible] $(m,$ [illegible] き　I [illegible]

[illegible] $= (2,\ 2)$, [illegible] のとき　$I = -\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

よ [illegible] $= \mathbf{(2, 2)}$，$\mathbf{(3, 1)}$，$\mathbf{(3, 2)}$ のとき，**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}}$ をとる．

2.21 (1) $\alpha = 2(\cos\theta +$ [illegible] $)$ より

$$z_n = \alpha^n \text{[illegible]}^{-1} = \{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n - 2\{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{n-1}$$

$$= 2 \text{[illegible]} \theta + i\sin n\theta) - 2^n\{\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta\}$$

$$= 2^n\{\cos n\theta - \cos(n-1)\theta\} + 2^n i\{\sin n\theta - \sin(n-1)\theta\}$$

$$= -2^{n+1}\sin\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} + 2^{n+1}i\cos\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} \qquad \cdots(*)$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} z_n &= -2^{n+1}\sin\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6} + 2^{n+1}i\cos\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6} \\ &= -2^n\sin\left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 2^n i\cos\left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \boldsymbol{2^n\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi + i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果より，$|z_k| = 2^k$ であ[illegible]

$$\sum_{k=1}^{n}|z_k| = \sum_{k=1}^{n}2^k = \text{[illegible]}$$

$\sum_{k=1}^{n}|z_k| > 500$ のとき　$2(2^n$ [illegible] 251

これを満たす最小の整数[illegible] **8**

(3) $(*)$ よ[illegible]$_{1000} = -2^{1001}\sin\frac{1999}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} +$ [illegible]

[illegible]あるとき，自然数 j を用い[illegible]

[illegible]$\theta = \frac{2j-1}{2}\pi$　ゆえ[illegible]$\frac{2j-1}{1999}\pi$

[illegible]き，0 [illegible]から　$1 \leqq j \leqq 500$

[illegible]って[illegible]る θ の[illegible] **500**

[illegible] arg [illegible] arg [illegible]

[illegible]実数で[illegible]ら，[illegible]$= 18$[illegible]　(m は整数)

[illegible]が[illegible]$= 180° \times$ [illegible]　$\alpha = 45° \times m$

0[illegible]あるから

[illegible]$= 0°$，[illegible]$90°$，$135°$，$180°$，$225°$，$270°$，$315°$

(2) $\arg(z-1)^3 =$ [illegible]$(z-1) = 3\beta$

$(z-1)^3$ が純[illegible]であるから　$\arg(z-1)^3 = 90° \times (2n-1)$　(n は整数)

したがって[illegible]$= 90° \times (2n-1)$　ゆえに　$\beta = 30° \times (2n-1)$

$0° \leqq \beta < 360$[illegible]であるから

$\beta = 30°$，$90°$，$150°$，$210°$，$270°$，$330°$

(3) $z = x + yi$ は $x > 0$，$y > 0$ であるから，(1) の結果より　$\arg z = 45°$
ゆえに，$z = x + xi$ $(x > 0)$ とおける．$z - 1 = (x - 1) + xi$ であるから

$$\begin{aligned}(z-1)^3 &= \{(x-1)+xi\}^3 \\ &= (x-1)^3 - 3(x-1)x^2 + \{3(x-1)^2x - x^3\}i \\ &= (-2x^3+3x-1) + (2x^3-6x^2+3x)i \\ &= -(x-1)(2x^2+2x-1) + x(2x^2 \text{[illegible]} 3)i\end{aligned}$$

$(z-1)^3$ が純虚数であるから　$(x$ [illegible] $1)(2x^2 + 2x$ [illegible]

$x > 0$ に注意して，これを解くと [illegible]

$x = 1$ のとき $z = \sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 4$ [illegible]

$$z^4 = (\sqrt{2}\,)^4(\cos \text{[illegible]} -4$$

$x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ のとき $z = \dfrac{\sqrt{3}}{}$ [illegible] $s\,45° +$ [illegible] 45 [illegible] か [illegible]

$$\text{[illegible]}^4 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right) (\cos 180° + i\,\text{[illegible]}°)\ \text{[illegible]}$$

2.23 (1) [illegible] モア [illegible] 理により

$$\text{[illegible]} = c\text{[illegible]} \sin n\theta, \quad \frac{1}{z^n} = \cos\text{[illegible]} i \sin n\theta \quad \cdots (*)$$

[illegible] の辺々 [illegible] ると

$$\text{[illegible]} + \frac{1}{\text{[illegible]}} \text{[illegible]} s\, n\theta \quad ゆえに \quad \text{[illegible]} n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

[illegible] の辺々 [illegible] と

$$\text{[illegible]} = 2i \sin n\text{[illegible]} に \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) (1) の結果か [illegible]

$$\text{[illegible]} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\text{[illegible]} x = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 1$$

$$\cos 3x = \frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$t = z + \dfrac{1}{z}$ とおくと

$$\cos x = \frac{1}{2}t, \quad \cos 2x = \frac{1}{2}t^2 - 1, \quad \cos 3x = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$$

これらを $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$ に代入すると

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 - 1 - \left(\frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) = 1$$

整理すると　$t^3 - t^2 - 4t + 4 =$ [illegible] えに　$($[illegible]$+2)(t-2) = 0$

これを解いて　$t = 1, -2,\ 2$　した [illegible] $= \dfrac{1}{2},\ -1,\ 1$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　　$\boldsymbol{x = 0,}$ [illegible]

(3) (1) の結果から

$$\sin^2 n\theta = \left\{-\frac{i}{\ }[illegible]\frac{1}{z^n}\right)\right\}^2 [illegible] \frac{1}{4}\Big([illegible] 1$$

$\theta = 2$ [illegible] すると，$z^{18} = 1$ であるから

$$[illegible](z^2 - 1)(z^{16} + z^{14} + \cdots [illegible] 1) = 0$$

[illegible] $\neq 1$ [illegible] $^{16} + z^{14} + \cdots + z^2 +$ [illegible]

[illegible] $z \neq 0$ [illegible] $\displaystyle\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right) = -1$

した [illegible] て　[illegible] $= \displaystyle\sum_{n=1}^{4}\left\{\frac{1}{2}[illegible]^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)\right\}$

$$[illegible]\frac{\ }{4}\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{4} \times (-1) = \frac{9}{4}$$

よって　　si[illegible] $+ \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \dfrac{9}{4}$

参考 (九大 [理]20[illegible]

2.24　(1) 方程式 $x^6 = 1$ [illegible] $\cdot$ ① の解は

$$x = \cos\frac{j}{3}\pi + i\sin\frac{j}{3}\pi \quad (j = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

方程式 ① から

$$(x^2-1)(x^4+x^2+1)=0$$

方程式 $x^4+x^2+1=0$ の解は $x\neq\pm1$ であるから，この方程式の解は

$$x=\cos\frac{j}{3}\pi+i\sin\frac{j}{3}\pi \quad (j=1,2,4,5) \qquad \cdots(*)$$

条件から　$x_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$x_2=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin$ [illegible]

$x_3=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$ [illegible]

$x_4=\cos\frac{5}{3}\pi+i$ [illegible]

(2) (1) の結果から

$$x_1{}^k=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^k=\text{[illegible]}$$

[illegible] て [illegible] $\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}+$ [illegible]

$x_1{}^2=$ [illegible] $i\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+$ [illegible] $\boldsymbol{i}$

[illegible] $=\cos$ [illegible] $\pi=$ [illegible]

$x_1{}^4=$ [illegible] $+\,i\sin\frac{4}{3}\pi=$ [illegible] $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

[illegible] $=\cos$ [illegible] $\boldsymbol{2}-\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

[illegible] $\cos 2\pi+i\sin$ [illegible] $=\boldsymbol{1}$

(3) $(*)$ から，方 [illegible] $+x^2+1=0$ の解について，$x^6=1$ に注意して

$$x^{4n}=(x^6\text{[illegible]}=\left(\cos\frac{j}{3}\pi+i\sin\frac{j}{3}\pi\right)^{-2n}=\cos\frac{2nj}{3}\pi-i\sin\frac{2nj}{3}\pi$$

$$x^{2n}=\left(\cos\frac{j}{3}\pi+i\sin\frac{j}{3}\pi\right)^{2n}=\cos\frac{2nj}{3}\pi+i\sin\frac{2nj}{3}\pi$$

したがって　$x^{4n}+x^{2n}+1=2\cos\frac{2nj}{3}\pi+1$

このとき，$j=1,\ 2,\ 4,\ 5$ であるから $(2=3-1,\ 4=3+1,\ 5=6-1)$

$$x^{4n}+x^{2n}+1=2\cos\frac{2n}{3}\pi+1$$

すなわち　　$x_i{}^{4n}+x_i{}^{2n}+1=2\cos\frac{2n}{3}\pi+1 \quad (i=1,2,3,4)$

よって　$x_i{}^{4n}+x_i{}^{2n}+1=\begin{cases}\mathbf{3} & (\boldsymbol{n\equiv 0}\ (\mathbf{mod\ 3})\ \textbf{のと}\text{[illegible]}) \\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{n\not\equiv 0}\ (\mathbf{mod\ 3})\ \textbf{の}\text{[illegible]})\end{cases} \quad (i=1,2,3,4)$

2.25　$\alpha=(1+\sqrt{3})^6-(1-\sqrt{3})^6$

$=\{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\}^6-\{2($[illegible]$i\sin$[illegible]

$=2^6(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)-2^6(\cos$ [illegible]

$\beta=(1+i)^3$

$=\{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\}^3$

$=2\sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}$[illegible]$+2i$

γ は α(原点) を中心に β を $\pm\frac{[illegible]}{3}$ [illegible] 回転した点 [illegible] るから

$$\gamma=\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right.\right.\text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}\left(\frac{1}{[illegible]}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2+2i)$$

[illegible] $\sqrt{\mathbf{3}}+(\mathbf{1}\mp\sqrt{\mathbf{3}})$ [illegible] **(**[illegible]**号同順)**

[illegible]**6**　(1) [illegible] $2x+$ [illegible] の解 [illegible] $1\pm\sqrt{}$[illegible]　$\cdots(*)$

[illegible]したが [illegible] この [illegible] が実数以外の [illegible] もつとき　$\angle\mathrm{AOB}\neq 180^\circ$

$\angle$[illegible] 180° [illegible] $\alpha\beta<0$ で [illegible] から，解と係数の関係により

[illegible] $\boldsymbol{a<0}$

(2) [illegible] なるとき，[illegible] 数であるから $(a>1)$

こ [illegible] α [illegible] $\sqrt{a-1}\,i$，$\beta=1-\sqrt{a-1}\,i$ とすると，

[illegible] $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\sqrt{a}$，$\mathrm{AB}=2\sqrt{a-1}$

余弦定理 AB [illegible] $\mathrm{A}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}$ により

[illegible] $\overline{a-1}\,)^2=(\sqrt{a})^2+(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{a}\cos 30^\circ$

$$4(a-1)=a+a-2a\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　　$\boldsymbol{a=4(2-\sqrt{3})}$

2.27 (1) $F(x)=x^3-x^2+(k^2-1)x+k^2+1$ について，$F(-1)=0$ であるから，$F(x)$ は $x+1$ で割り切れる．したがって

$$F(x)=(x+1)(x^2-2x+k^2+1)$$

$F(x)=0$ の 2 つの虚数解は，$x+1\neq 0$ であるから

$$x^2-2x+k^2+1=0 \quad ゆえに \quad (x-1)^2+\text{[illegible]}=0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{x=1\pm ki}$

(2) (A) R は $F(x)=0$ の実数解を[illegible]あるか[illegible]$-1)$

P，Q は $F(x)=0$ の虚数解を表[illegible]．$\alpha=1+ki$，$\beta=1-ki$ とおき，P(α)，Q(β) とする．求[illegible] PQ の垂直二等分線上にあるか[illegible]

$$|\gamma-(-1)|^2=|\gamma-\text{[illegible]}(\gamma-1)-\text{[illegible]}|^2$$

したがって　$(\gamma+\text{[illegible]}-1)^2+k$[illegible]れを[illegible]$\frac{\text{[illegible]}}{4}$

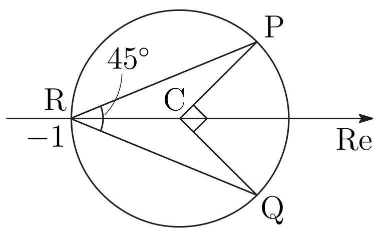
半[illegible]　RC $=|\gamma-(-1)|=\frac{k^2}{4}+1$

[illegible]る円の方程式は　$\left|z\text{[illegible]}\right|=\text{[illegible]}\frac{}{4}+1$

(B) ∠[illegible]き，∠PCQ $=90^\circ$[illegible].

[illegible]C を[illegible]を 90° 回転させたもの

[illegible]あるか[illegible]



$$\text{[illegible]}(\beta-\gamma)$$

$$(1+\text{[illegible]}\left\{(1-ki)\text{[illegible]}\right\}$$

$$\text{[illegible]}\frac{k^2}{\text{[illegible]}}+ki=\text{[illegible]}\frac{}{4}\Big)i$$

[illegible]たが[illegible]$-\frac{k^2}{4}=k$　すなわち　$k^2+4k-4=0$

$k>0$ に[illegible]てこれを解くと　　$\boldsymbol{k=2\sqrt{2}-2}$

2.28 (1) $\beta=4+4i$[illegible]$\beta=4-4i$ であるから

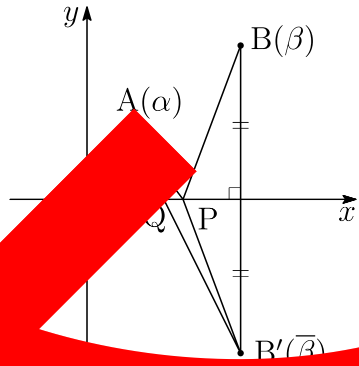
$$\begin{aligned}|\alpha-\overline{\beta}|&=|(1+2i)-(4-4i)|\\&=|-3+6i|\\&=\sqrt{(-3)^2+6^2}=\boldsymbol{3\sqrt{5}}\end{aligned}$$

(2) $|x-\beta|=|\overline{x-\beta}|$ であり，x は実数であるから　$|x-\beta|=|x-\overline{\beta}|$

よって　　$|x-\alpha|+|x-\beta|=|x-\alpha|+|x-\overline{\beta}|$

$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{B}'(\overline{\beta})$，$\mathrm{P}(x)$ とすると

$$|x-\alpha|+|x-\overline{\beta}|=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}'$$



AB′ と x 軸との交点を Q とするとき，
P が Q と異なるときは，△APB′ の辺の長さの関係から

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}'>\mathrm{AB}'$$

また，P が Q と一致するときは，[illegible]

PI[illegible]

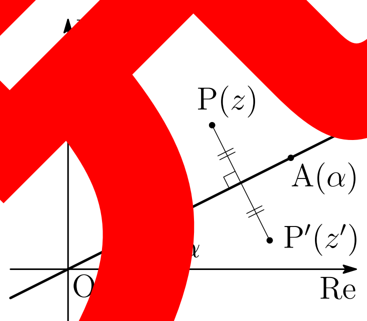
したがって，$|x-\alpha|+|$[illegible]最小にす[illegible]は，[illegible]の交点を P に[illegible]ればよいので，t [illegible]実数とすると

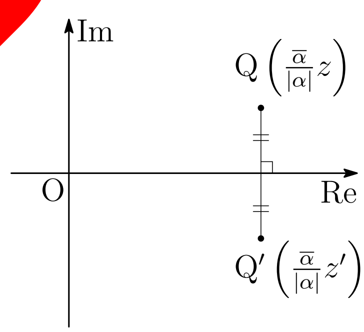
$$\begin{aligned} x &= (1-t)\alpha+t[\text{illegible}] \\ &= (1-t)(1+2[\text{illegible}]4[\text{illegible}]) \\ &= (1+3t)+(2[\text{illegible}] \end{aligned}$$

こ[illegible]，x は[illegible]から　$2-6t=0$　ゆえに　$t=\dfrac{1}{3}$

[illegible]

P(z)[illegible]を O[illegible]に $-\arg\alpha$ だ[illegible]させた点を，それぞれ Q，Q′ と[illegible]





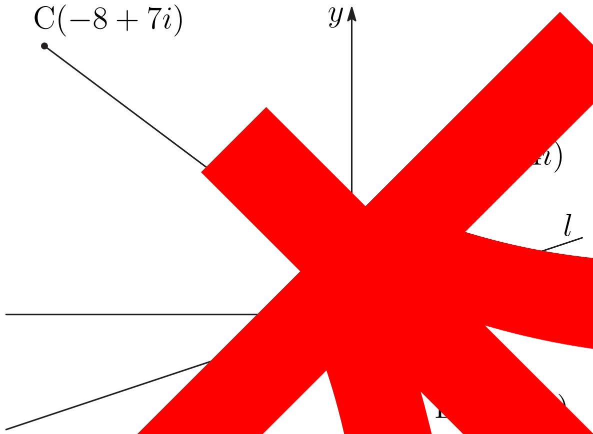
$\mathrm{Q}\left(\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}z\right)$，[illegible]$\left(\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}z'\right)$ は互いに共役な複素数であるから

$$\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}z'=\overline{\left(\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}z\right)}\qquad \text{ゆえに}\qquad z'=\frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\overline{z}$$

(2) (ア) (1) の結果を利用して

$$\beta' = \frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\overline{\beta} = \frac{3+i}{3-i}(2-4i) = \mathbf{4-2}\boldsymbol{i}$$

(イ) $\angle$AQB $=$ $\angle$CQO のとき，3 点 C，Q，B$'$ は一直線上にある．



l 上の点 z は，実数 s ... いて

$$z = s\alpha = s(3+i) = \ldots$$

また，... C 上の点 z は，t を用い...

$$= (1-t)\beta' + t\gamma$$
$$(1-t)(4-2t) + t(-8+7i)$$
$$\ldots - 12t) \ldots - 2)i \quad \cdots ②$$

Q ... l と ... の交点である ... ①，② より

$$3 \ldots = (\ldots + (9 \ldots \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{4}{13},\ t = \frac{10}{39}$$

$$\ldots = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{13}}\mathbf{(3} \ldots$$

2.30 (1) $\alpha = -1+i$, ... $+i$ とすると

$$\gamma - \alpha = (\beta - \alpha)\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\ldots(-1+i) = \{(2+i)-(-1+i)\}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\gamma = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \left(\mathbf{1} \pm \frac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{i}$$

(2) 線分 AB 上の点 P(z) は

$$z = t + i \qquad (-1 \leqq t \leqq 2)$$

とおけるから

$$iz^2 = i(t+i)^2 = i(t^2 - 1 + 2ti) = -2t + (t^2-1)i$$

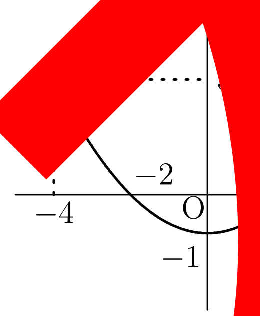
$iz^2 = x + yi$ とおくと

$$x = -2t, \quad y = t^2 - 1 \qquad (-1 \leqq \cdots$$

上の 2 式から t を消去すると

$$y = \frac{x^2}{4} - 1$$

よって，iz^2 を複素数平面上にえが…



2.3… $(\sqrt{3}$ … $(\sqrt{}$ … 2 に $z = x + yi$ … は実数) を代入すると

… $i)(x$ … $)(x - yi) = 2$ 整理すると $\boldsymbol{\sqrt{3}x + y = 1}$

… $+i| \geqq$ … $i|$ に … $+yi$ $(x,\ y$ …) を代入すると

… $(y+1)i| \geqq |$ … $2y-1)i|$

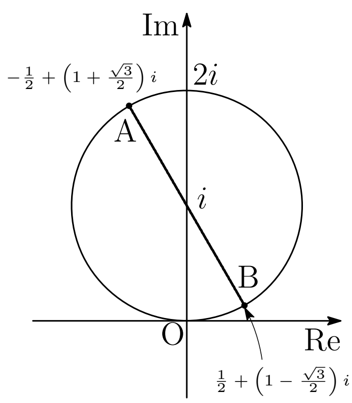
…がって

… $1)^2} \geqq \sqrt{(2x)^2 + (2y-1)^2}$

両辺を平方し…理すると

… $+ y^2 - 2y \leqq 0$

ゆえに … $+ (y-1)^2 \leqq 1$



D は右の図のように 2 点 A$(-\frac{1}{2} + (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i)$,
B$(\frac{1}{2} + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})i)$ を結ぶ線分.

(3) D 上の点 z は (2) の結果から，$z=x+(1-\sqrt{3}x)i$ であるから $(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} k &= |2z-1-2i| = |2\{x+(1-\sqrt{3}x)i\}-1-2i| \\ &= |(2x-1)-2\sqrt{3}xi| \\ &= \sqrt{(2x-1)^2+12x^2} = \sqrt{16x^2-4x+1} \\ &= \sqrt{16\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

よって，$x=-\frac{1}{2}$ のとき最大値 … $= \frac{1}{8}$ の … 小値 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ をとる．

2.32 (1) $w=(1+\sqrt{3}i)z$ より $\frac{w}{z}=1+\sqrt{3}i$ … $\pi)$

ゆえに $\arg\frac{w}{z}=\frac{\pi}{3}$，$\left|\frac{w}{z}\right|=2$ …

A(z)，B(w) とおくと，

△OAB は ∠AOB $=\frac{\pi}{3}$ … OA $=2$ … の直角 …

(2) 2 点 $\sqrt{\ }$ … -3 を通る直線上の点 z は，実 … 用い …

$$z=(1-t)\sqrt{3}i+ \dots$$

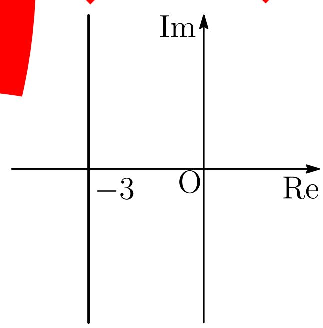
… 表され …

… $(1+$ …

$= (1$ … $)\{(1$ … $i+t(-3)\}$ …

… $(1-$ …

よ … w …



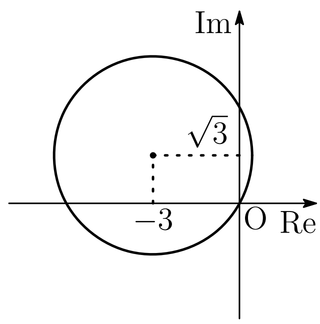
(3) … $\sqrt{3}$ … とする半 … 上にあるから

$$|z-\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$$

$w=(1+\sqrt{3}$ … $)$

$$|1+\sqrt{\ } \dots - \sqrt{3}i| = |1+\sqrt{3}\,i|\sqrt{3}$$

$$|(1+ \dots - (1+\sqrt{3}\,i)\sqrt{3}\,i| = 2\sqrt{3}$$



よって $\boldsymbol{|w+3-\sqrt{3}\,i|=2\sqrt{3}}$

2.33 (1) $$\arg\frac{z_1-1}{z_2-1}=\arg(z_1-1)-\arg(z_2-1)=0$$

ゆえに，3 点 1，z_1，z_2 は同一直線上にある．

よって，2 点 z_1，z_2 を結ぶ直線 l は，点 1 を通る．

(2) $\arg(i-1)=\frac{3}{4}\pi$ より，l の傾きは　-1

l は点 1 を通り，傾き -1 の直線であるから

$$y-0=-1(x-1)\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{y=} \text{[illegible]}$$

(3) z_1，z_2 は l 上の点で，$z_1\neq 1$，z[illegible]あるか[illegible]，z_2 は実数ではない．

したがって，$\frac{z_1}{|z_1|}$，$-\frac{z_2}{|z_2|}$ は，方程[illegible]

$$z^3-1=(z-\text{[illegible]}$$

の虚数解である．それらを[illegible]

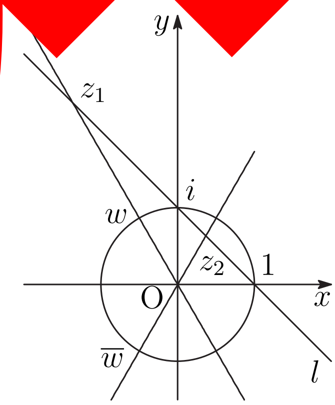
$$w=\text{[illegible]}=\cos\text{[illegible]}\sin\text{[illegible]}$$

$$\overline{w}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\cos\text{[illegible]}\sin\text{[illegible]}$$

[illegible]偏角はそれぞれ第 2 象限，[illegible]

[illegible]の角[illegible]求めた直線は第 3 象限を[illegible]

ないこ[illegible]



[illegible] $\frac{z_2}{|z_2|}$

原点[illegible]の 2 点[illegible]直線は，

$\tan$[illegible]$)=-$[illegible]

$$y=\text{[illegible]}$$

z_1[illegible]の交点であるから

$$\boldsymbol{z_1=}\text{[illegible]}\boldsymbol{3+1}\text{[illegible]}\boldsymbol{+\frac{3+\sqrt{3}}{2}i}$$

2.34 (1) $w-(1+i)=$[illegible]$(1+i)\}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ であるから

$$w\text{[illegible]}i)(1-\cos\alpha-i\sin\alpha)=z(\cos\alpha+i\sin\alpha)\quad\cdots(*)$$

ここで，$a+bi=(1+i)(1-\cos\alpha-i\sin\alpha)$ とおくと

$$a+bi=1-\cos\alpha+\sin\alpha+(1-\cos\alpha-\sin\alpha)i$$

ゆえに　$a = 1-\cos\alpha+\sin\alpha$，$b = 1-\cos\alpha-\sin\alpha$

したがって，$(*)$ および $|z|=1$ から

$$|w-(a+bi)| = |z||\cos\alpha + i\sin\alpha| = 1$$

よって，点 Q(w) は $a+bi$ を中心とし，**半径 1** の円周上を動く．

(2) $b=1$ より　$1 = 1-\cos\alpha-\sin\alpha$　すなわち　$\cos\alpha$ [illegible] α

ゆえに　$\sin\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$\cos\alpha =$ [illegible] $\dfrac{1}{\ }$，　$a = 1$ [illegible] (複号同順)

よって　　$\boldsymbol{a = 1\pm\sqrt{2}}$

2.35 (1) 2 点 A$(k^2\alpha)$，B$(m^2\alpha)$ について，線[illegible]
AB を $k:m$ に外分する点 δ は $(k$[illegible]

$$\gamma = \frac{m\cdot k^2\alpha + k\cdot m\ \text{[illegible]}}{k+\text{[illegible]}} = \text{[illegible]}$$

$$\delta = \frac{-m\cdot k^2\alpha\ \text{[illegible]}\ \alpha}{k-m} = \frac{-km\ \text{[illegible]}\ m)\alpha}{k\ \text{[illegible]}} = \text{[illegible]}$$

(2) m[illegible]$|z-m^2\alpha| \cdots (*)$ より　m^2[illegible]$|z-$[illegible]

[illegible]に [illegible]$k^2\alpha)(\overline{z}-k^2\overline{\alpha}) = k^2(z$[illegible]$)(\overline{z}-m^2\overline{\alpha})$

整理す[illegible]$^2)(|z|^2-k^2m^2|\alpha|$[illegible]

k[illegible]互い[illegible]実数であるから

[illegible]$=k^2$[illegible]$\cdots(**)$ [illegible]て　$\boldsymbol{|z| = km|\alpha|}$

[illegible]z[illegible]と異[illegible]であるから [illegible] $\neq 0$

[illegible] $\left(\dfrac{\gamma-z}{\delta-z}\right)$ [illegible] $\dfrac{\ \text{[illegible]}-\overline{z}}{\overline{\delta}-\overline{z}}$

$$= \frac{(\gamma-z)(\overline{\delta}-\overline{z}) + (\overline{\gamma}-\overline{z})(\delta-z)}{|\delta-z|^2}$$

$$= \frac{\gamma\overline{\delta}+\overline{\gamma}\delta-(\overline{\gamma+\delta})z-(\gamma+\delta)\overline{z}+2|z|^2}{|\delta-z|^2}$$

(1) の結果[illegible]

$$\gamma+\delta = km\alpha + (-km\alpha) = 0,$$
$$\gamma\overline{\delta}+\overline{\gamma}\delta = km\alpha(-km\overline{\alpha}) + km\overline{\alpha}(-km\alpha) = -2k^2m^2|\alpha|^2$$

上の 2 式および (**) から $\qquad \dfrac{\gamma - z}{\delta - z} + \overline{\left(\dfrac{\gamma - z}{\delta - z}\right)} = 0$

よって，$\dfrac{\gamma - z}{\delta - z}$ は純虚数である．

解説 複素数 $z = x + yi$ に対して (x, y は実数)

$$\overline{z} = x - yi, \quad \mathrm{Re}\, z = x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathrm{Im}\, z = y \ \ldots \ (z - \overline{z})$$

をそれぞれ z の共役，実部，虚部 … う．した …

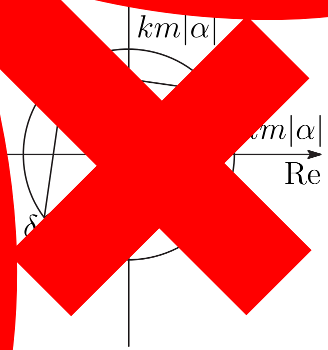
$$z \text{ は実数} \iff z - \ldots$$

$$z \text{ は純虚数} \iff z + \overline{z} = \ldots$$

別解 (1)，(2) の結果から，z は γ と δ を …
両端とする円周上の点である．

したがって $\qquad \arg \dfrac{\gamma - z}{\delta - z} \ldots$

よって，$\dfrac{\gamma - z}{\delta - z}$ は，純虚数 … ある．



2. … $z^3 + \ldots + iz \ldots - 1)(z^2 - i) = \ldots$ えに $\quad z = 1,\ z^2 = i$

… $\frac{\pi}{2} + i \ldots$ $z^2 = i$ について $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

… $2\theta = \frac{\pi}{\ldots}$ … (n は整数) … えに $\quad \theta = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$

… $< 2\pi$ … $\frac{5}{\ldots}\pi$

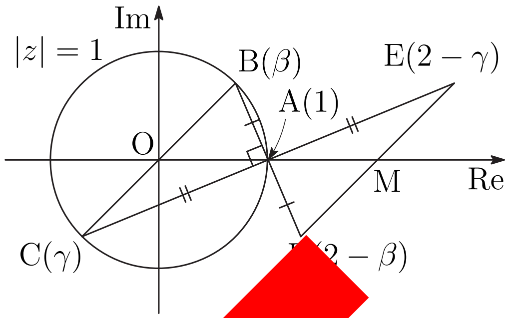
… て … 注意する …

$$\ldots = \cos 0 + i \sin 0 = \mathbf{1}$$

$$\ldots = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\boldsymbol{i}$$

$$\ldots = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} - \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\boldsymbol{i}$$

(2) (1) の結果から



$$\angle \mathrm{AOB}=\frac{\pi}{4},\quad \angle \mathrm{COA}=\frac{3}{4}\pi$$

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ であるから

$$\triangle \mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\triangle \mathrm{COA}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

よって　$\triangle \mathrm{ABC}=\triangle \mathrm{AOB}+\triangle \mathrm{C}$ [illegible] $=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(3) 3 点 A，B，C を通る円は，BC を直 [illegible]
したがって，A に関して D，E は [illegible] 対称である [illegible]

D [illegible]，E [illegible]

このとき，$\angle \mathrm{DAE}=\frac{\pi}{2}$ で [illegible] から，3 点 [illegible] E を [illegible] DE を直
径と [illegible] である．DE の中点 (中心) を M [illegible] ると [illegible] であるか
ら [illegible] た，円の半径 AM は $2-1=$ [illegible]
[illegible] がっ [illegible] 円の方程式は $|z-2|=$ [illegible] り，$|z-2|^2=1$ より

[illegible] -2 [illegible] $=1$　整理すると [illegible] $2z-2\overline{z}+3=0$

[illegible] **2，** [illegible] **，$\boldsymbol{u=3}$** [illegible]

[illegible] $z-\overline{z}$ [illegible] $+1$
[illegible] $=|z|^2$ [illegible] $\overline{(-i)}z+|-$ [illegible]
[illegible] $=$ [illegible]

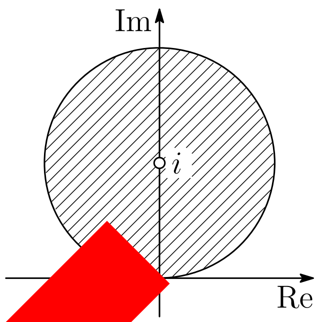
[illegible] で [illegible] ，$|z-i|$ [illegible] は正の実数である．

(2) w [illegible] $\overline{z}+$ [illegible]　$|w-i|=\left|\dfrac{1}{\overline{z}+i}\right|=\dfrac{|\,1\,|}{|\overline{z}+i|}=\dfrac{1}{|z-i|}$

よって，上式 [illegible] (1) の結果から

$$w \text{[illegible]} i+wi+1=|w|^2+(-i)\overline{w}+\overline{(-i)}w+|-i|^2$$
$$=|w-i|^2=\frac{1}{|z-i|^2}=\boldsymbol{\frac{1}{\alpha}}$$

(3) $|z-i| = \dfrac{1}{|w-i|}$ であるから，w が実数 x であるとすると



$$|z-i| = \frac{1}{|x-i|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leqq 1$$

したがって，上式および $z \neq i$ から，点 z は点 i を中心とする半径 1 の円の周，および内部から，点 i を除いた領域.

2.38 $w = \dfrac{1}{z-i}$ より，$zw = i(w-i)$ であ[illegible]

$$|zw| = |i(w-i)| \quad ゆえに, |z| = r [illegible]$$

$r \neq 1$ のとき，① の両辺を平方すると[illegible]

$$r^2|w|^2 = [illegible] - i\overline{w} [illegible]$$

$$(r [illegible] |w|^2 - iw + [illegible] 1$$

$$|w [illegible] \overline{\left(\frac{i}{[illegible] - 1} \right)} w + \frac{i}{r^2-1}\overline{w} + \left| \frac{i}{r^2 - [illegible]} \right. [illegible] \frac{1}{[illegible]} [illegible]^2$$

$$\left| w + \frac{i}{r^2 - [illegible]} \right. [illegible] \frac{[illegible]}{(r^2-1)^2}$$

よって[illegible] **点 $\dfrac{i}{1 [illegible]}$ [illegible]る半径 $\dfrac{r}{|r^2-1|}$ の円周**

r [illegible]のとき[illegible]り [illegible] $w - i|$

[illegible]って [illegible] **と点 [illegible]線分の垂直二[illegible]**

解説 [illegible] $\dfrac{[illegible] w-i|}{|[illegible]}$ [illegible]である[illegible]き，w は 2 点 0，i を $1:r$ に内分する点[illegible]分する点 $\dfrac{[illegible]}{1-r}$ を直径の両端とする円であるから

$$中心は [illegible] \frac{i}{1+r} + \frac{i}{1-r} \right) = \frac{i}{1-r^2}$$

$$半径は [illegible] \frac{i}{1+r} - \frac{i}{1-r} \right| = \frac{r}{|r^2-1|}$$

2.39 (1) $\mathrm{P}(z)$ が，点 [illegible] i を中心とする半径 r の円周上にあるから

$$|z-(1+i)| = r$$

$u = \dfrac{z+(1-i)}{2}$ より，$z = 2u-1+i$ であるから

$$|(2u-1+i)-(1+i)| = r \quad ゆえに \quad \boldsymbol{|u-1| = \frac{r}{2}}$$

よって，$\mathrm{Q}(u)$ は，**点 1 を中心とする半径 $\dfrac{r}{2}$ の円周上を動く．**

(2) $w = \dfrac{4\{z-(1+i)\}}{z-(2+i)} = 4 + \dfrac{4}{z-(2+i)}$ より，$w-4 = \dfrac{4}{z-(2+i)}$

したがって $z-(2+i) = \dfrac{4}{w-4}$ ゆえに $z-(1+i) = \dfrac{w}{w-4}$

$|z-(1+i)| = r$ より，$\left|\dfrac{w}{w-4}\right| = r$ で [illegible]

[illegible] $\overline{w}$

$$(r^2-1)w\overline{w} \text{ [illegible] } (w+\overline{w}) \text{ [illegible] } 6r^2 \text{ [illegible]}$$

$r \neq 1$ より $w\overline{w} - \dfrac{4r^2}{r^2-1}(w+\overline{w}) + \left(\dfrac{4r^2}{r^2-1}\right)^2 = \left(\dfrac{4r^2}{r^2-1}\right)^2 - \dfrac{16r^2}{r^2-1}$

[illegible] $\left|w - \dfrac{4r^2}{r^2-1}\right|^2 = \left(\dfrac{4r}{r^2-1}\right)^2$ すなわち $\boldsymbol{\left|w - \dfrac{4r^2}{r^2-1}\right| = \dfrac{4r}{|r^2-1|}}$

よって，$\mathrm{R}(w)$ は，**点 $\dfrac{4r^2}{r^2-1}$ を中心とする半径 $\dfrac{4r}{|r^2-1|}$ の円周上を動く．**

解説 $\left|\dfrac{w}{w-4}\right| = r$ ($r \neq 1$) より [illegible] 2 点 0, 4 を $r:1$ に内分する点 $\dfrac{4r}{r+1}$ と外分する点 $\dfrac{4r}{r-1}$ を直径の両端とする円周上 [illegible]．

[illegible] $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4r}{r+1} + \dfrac{4r}{r-1}\right) = \dfrac{4r^2}{r^2-1}$

半径 $\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{4r}{r-1} - \dfrac{4r}{r+1}\right| = \dfrac{4r}{|r^2-1|}$

2.40 (1) 方程式の解 z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\cdots$①

とすると $z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$

-1 を極形式で表すと $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$

よって $r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = \cos\pi + i\sin\pi$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4 = 1, \quad 4\theta = \pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ であるから　　$r = 1 \quad \cdots ②$

また　　$\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると，$k = 0, 1, 2, 3$ であるか

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\ \ \ \ \frac{5}{\ }\pi,\ \frac{7}{4}\pi \quad \cdot$$

②，③ を ① に代入すると，求め

$$\boldsymbol{z = \pm\frac{1}{\ }}$$

(2) $|z-\beta| = \sqrt{2}|z-\alpha|$ の両辺を　　　こ

$$|^2 = 2|z$$

$$(z-\beta)\ \ \ z-\overline{\beta}) = 2(z\ \ \ \ \ -\overline{\alpha})$$

両　　　　て整理すると

$$(2\overline{\alpha}-\overline{\beta})z-(2\alpha-\beta)\overline{z}\ \ \ \ \alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$$

$$\{z\ \ \ \ \beta)\}\{\overline{z}-(2\overline{\alpha}-\overline{\beta})\ \ \ \ \alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$$

$$|z-(2\alpha-\beta)|^2 = 2|\alpha-\beta|^2$$

したがっ　　　　$\alpha-\beta)|$　　$\alpha-\beta| \quad \cdots (*)$

この　　　点 z 全　　点を中心とす　　であるから

$$= 0 \qquad\qquad \boldsymbol{\beta = 2\alpha}$$

(3)　　　　　代入すると　　$\sqrt{2}|\alpha| \quad \cdots ④$

ま　　　は　　　1 の解であるから

$$\alpha^4 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha^4| = |-1|$$

したがって　　　$= 1$　すなわち　$|\alpha| = 1$

これを ④　　　すると　　$|z| = \sqrt{2} \quad \cdots ⑤$

w は i と z の中点であるから

$$w = \frac{i+z}{2} \quad \text{ゆえに} \quad z = 2w - i$$

これを ⑤ に代入すると

$$|2w-i|=\sqrt{2} \quad ゆえに \quad \left|w-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，点 w は，**点 $\boldsymbol{\frac{i}{2}}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ の円**を描く．

2.41 (1) $|z+1|=|2z-1|$ の両辺を平方すると $|z+1|^2=|2z$ [illegible]

ゆえに $(z+1)(\overline{z}+1)=(2z-1)(2\overline{z}-1)$ [illegible]

整理すると $z\overline{z}-z-\overline{z}+1$ [illegible]

したがって $|z-1|^2=1$ す[illegible] 1

よって，**1 を中心とする半径 1 の円**で[illegible]

解説 $|z+1|=2|z-\frac{1}{2}|$ であるから $|z$ [illegible]

ゆえに，z は -1，$\frac{1}{2}$ を 2 : 1 に[illegible]点を直径の[illegible]端とする円である (アポロニウスの[illegible]

(2) (1) の結果から，$w=z$ [illegible] $\cos\theta+i\sin$ [illegible]おくと

$$|z^2-4z|^2=|(w+1)^2-4(w+ \text{[illegible]} |w^2 \text{[illegible]}$$
$$=(w^2-2w-3)(\overline{w}^2 \text{[illegible]}$$
$$=-3(w^2+\overline{w}^2)+4(w \text{[illegible]} +1 \text{[illegible]}$$
$$\text{[illegible]} -3(w+\overline{w})^2+4(w \text{[illegible]} +20$$

こ[illegible] $w+\overline{w}$ [illegible] $\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)=2\cos\theta$ であるから

$$|z^2 \text{[illegible]} -3(2\cos \text{[illegible]} +4\cdot 2\cos\theta+20$$
$$\boldsymbol{=-12\cos} \text{[illegible]} \boldsymbol{8\cos\theta+20}$$

[illegible]結果 $|z^2$ [illegible] $-\frac{1}{3}\Big)^2+\frac{64}{3}$

[illegible]は $\cos\theta=$ [illegible] 3 [illegible]き最大となる．

このとき，si[illegible] $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$z=(1+\cos\theta)+i\sin\theta$ であるから，

$|z^2-4z|$ は，[illegible] $\boldsymbol{\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}i}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{8\sqrt{3}}{3}}$ をとる．

2.42 (1) $\dfrac{z-2i}{i(z-2)}$ [illegible]であるから

$$\frac{z-2i}{i(z-2)}=\overline{\left(\frac{z-2i}{i(z-2)}\right)} \quad ゆえに \quad \frac{z-2i}{i(z-2)}=\frac{\overline{z}+2i}{-i(\overline{z}-2)}$$

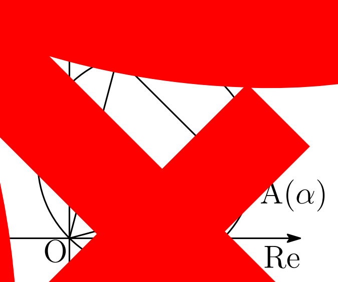
したがって

$$
\begin{aligned}
(z-2i)(\overline{z}-2)+(z-2)(\overline{z}+2i)&=0\\
z\overline{z}+(-1+i)z+(-1-i)\overline{z}&=0\\
|z|^2+\overline{(-1-i)}z+(-1-i)\overline{z}+|-1-i|^2&=|-1-i|^2\\
|z-1-i|^2&=2
\end{aligned}
$$

よって，**中心 $1+i$，半径 $\sqrt{2}$ の円を描く．(ただ** [illegible] **2)**

補足 $\dfrac{z-2i}{i(z-2)}$ が実数であるから，$\dfrac{z-}{z-}$ [illegible] 純虚数 [illegible]，$z-2$ と $z-2i$ は垂直である．よって，z は 2 点 2，$2i$ [illegible] する円周上の点である．

(2) A，B は C を中心に O をそれぞれ $120°$ [illegible] だけ回転させたものであるから



$$(1+i)+(-1-i)(\cos 12 \text{[illegible]} 120 \text{[illegible]}$$

$$=(1+i)+(-1-i)\left(\text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]}3}{2}i\right)$$

$$\text{[illegible]} \frac{3\mp\sqrt{3}}{2}i$$

[illegible] って [illegible] $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ $\boldsymbol{+\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}i}$，$\beta$ [illegible] $\boldsymbol{-\sqrt{3}}$ $\boldsymbol{\dfrac{}{2}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}i}$

[illegible] (1) 1 [illegible] 根は [illegible]

$$x^3= \text{[illegible]} \text{すなわち} \quad (\text{[illegible]} (x^2+x+1)=0$$

の [illegible] このう [illegible] でない解の 1 [illegible] であるから

$$\alpha^2+\alpha \text{[illegible]} に \quad \alpha^2=-\alpha-1$$

α [illegible] $+x+1=0$ の解であるから，解と係数の関係により

$$\text{[illegible]}\alpha+\overline{\alpha}=-1 \quad \text{ゆえに} \quad \overline{\alpha}=-\alpha-1$$

したがって，[illegible] $\overline{\alpha}$．3 点 A(α)，B(β)，C$(\overline{\alpha})$ を頂点とする $\triangle$ABC の重心が $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ で [illegible] ら

$$\frac{\alpha+\overline{\alpha}+\beta}{3}=\frac{-1+\beta}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\beta=\sqrt{3}+1}$$

(2) △ABCの外接円の中心をγとする．$|\alpha-\gamma|=|\overline{\alpha}-\gamma|$ より

$$|\alpha-\gamma|^2=|\overline{\alpha}-\gamma|^2 \quad \text{すなわち} \quad (\alpha-\overline{\alpha})(\gamma-\overline{\gamma})=0$$

αは実数ではないので，$\alpha \neq \overline{\alpha}$．ゆえに$\gamma=\overline{\gamma}$より，$\gamma$は実数である．
また，$|\alpha-\gamma|=|\beta-\gamma|$ より

$$|\alpha-\gamma|^2=|\beta-\gamma|^2$$
$$\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})\gamma=\beta^2-2\beta\gamma$$
$$1-(-1)\gamma \text{ [illegible] } 1)^2 \text{ [illegible] } 1)\gamma$$
$$(3+2\sqrt{3})\gamma= \text{ [illegible]}$$

ゆえに，$\gamma=1$となり，円の半径は [illegible]
よって，求める外接円は　$|z$ [illegible]

(3) $w=\dfrac{1}{z}$ より $z=\dfrac{1}{w}$ を (2) [illegible] 代入 [illegible] $1|$ [illegible]

これを平方すると　$\left|\dfrac{1}{\overline{w}}-\text{[illegible]}\right|=3$　ゆえ [illegible] $w\overline{w}+$ [illegible]

[illegible] $\left(w+\dfrac{1}{2}\right)\left(\overline{w}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ [illegible] $\left|w+\dfrac{1}{2}\right|$ [illegible]

よっ [illegible] は**中** [illegible] **半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の円で** [illegible]

[illegible] 4　(1) [illegible] $\dfrac{1}{1-\text{[illegible]}}$ [illegible] $z=$ [illegible]

$|z|$ [illegible] あるか [illegible] $\text{[illegible]}1\big|=1$　ゆ [illegible] $|w-1|=w$ [illegible]

[illegible] て，[illegible] **を結ぶ線** [illegible] **線**

(2) [illegible] $z=\dfrac{\sqrt{3}\text{[illegible]}}{w}$ [illegible] $\cdots(*)$

$|z|=1$ である [illegible] $\left|\dfrac{\sqrt{3}w-1}{w}\right|=1$　ゆえに　$|\sqrt{3}w-1|^2=|w|^2$ より

$$(\sqrt{3}w-1)(\sqrt{3}\overline{w}-1)=w\overline{w}$$
$$2w\overline{w}-\sqrt{3}(w+\overline{w})+1=0$$
$$w\overline{w}-\frac{\sqrt{3}}{2}(w+\overline{w})+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

したがって　$\left|w-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\dfrac{1}{4}$　すなわち　$\left|w-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

よって，**点 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円**

(3) (2) の結果から，$w-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく

$w=\dfrac{1}{2}(\alpha+\sqrt{3})$ を $(*)$ に代入すると $(\alpha\overline{\alpha}=1)$

$$z=\frac{\sqrt{3}w-1}{w}= \text{[illegible]} \frac{\sqrt{3}\alpha+1}{\alpha+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}\alpha+1)(\overline{\alpha}+\sqrt{3}\text{[illegible]}}{(\alpha+\sqrt{3})(\overline{\alpha}+\text{[illegible]}}$$

$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$，$\overline{\alpha}=\cos$ [illegible] よ [illegible]

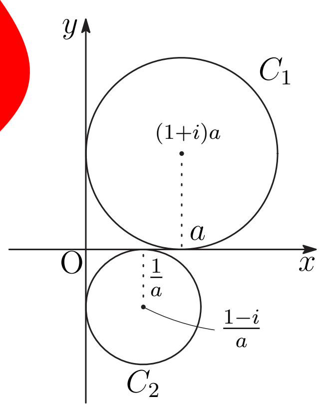
$$z=\frac{3(\cos\theta+\text{[illegible]}+(\cos\theta-\text{[illegible]})+\text{[illegible]}}{\sqrt{3}\{(\cos\theta+\text{[illegible]}\sin\theta)+(\cos\text{[illegible]}\theta)\}+\text{[illegible]}}$$

$$=\frac{4\cos\theta+2i\sin\theta+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cos\theta+4}=\text{[illegible]}$$

[illegible] $<\arg$ [illegible]　$2\cos\theta+\sqrt{3}>0$，[illegible] >0

よ [illegible] $\left|w-\text{[illegible]}\right|$ [illegible]　$0^\circ<\arg\left(w-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)<150^\circ$

[illegible] $+i)a$ [illegible] より



[illegible] $+i)a\,($ [illegible] $)\Big|=a$

[illegible] $i)$ [illegible] $\dfrac{(1-i)z}{2a}$ [illegible]

$\omega=\dfrac{1}{z}$ より　[illegible] $\dfrac{1-i}{2a}\right|=|\omega|$

両辺を平方すると

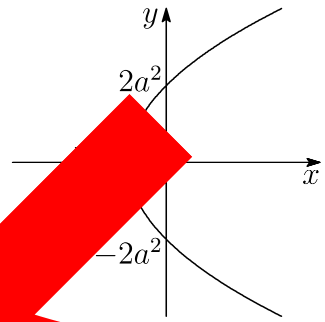
$$2\left(\omega-\text{[illegible]}\right)\left(\overline{\omega}-\frac{1+i}{2a}\right)=\omega\overline{\omega}$$

整理すると　$\omega\overline{\omega}-\dfrac{1+i}{a}\omega-\dfrac{1-i}{a}\overline{\omega}+\dfrac{1}{a^2}=0$　すなわち　$\left|\omega-\dfrac{1-i}{a}\right|=\dfrac{1}{a}$

したがって，C_1，C_2 の位置関係は，上の図のようになる．

よって　　**$a=1$ のとき　1個，$a\neq 1$ のとき　0個**

2.46　(1)　$z=t+ai$ より



$$z^2=(t+ai)^2=(t^2-a^2)+2ati$$

$x=t^2-a^2$，$y=2at$ とおき，2式から t を消去すると

$$x=\frac{y^2}{4a^2}-a^2$$

ゆえに　　**$4a^2(x+a^2)=y^2$**　$\cdots$[illegible]

よって，求める軌跡は右の図のよ[illegible]

(2)　m は ℓ を原点を中心に θ だけ[illegible]た[illegible]ら

$$z(\cos\theta+i\sin\theta[illegible]ai)(\cos\theta[illegible]\theta)$$
$$=[illegible]t\cos\theta-a\sin[illegible](t\sin[illegible]$$

x[illegible]$\sin\theta$，$y=t\sin\theta+a\cos\theta$ と[illegible] t [illegible]ると

$$x\sin\theta-y\cos[illegible]=0 \quad \cdots②$$

i)[illegible]$=0$ の[illegible]

[illegible]は y[illegible]り，①，② の共有点は1個

[illegible]$\sin\theta$[illegible]とき

[illegible]から[illegible]して整理す[illegible]

$$[illegible]y^2[illegible]s\theta)y[illegible]\sin\theta-1)=0 \quad \cdots(*)$$

[illegible]関する2次[illegible]るから，その係数について

$$D/4=4a^4\cos^2\theta+4a^3\sin\theta(a\sin\theta-1)$$
$$=4a^3(a-\sin\theta)$$

$0<a<$[illegible]意して

[illegible]$\leqq\sin\theta<a$ のとき　(*) の実数解は2個
$\sin\theta=a$ のとき　(*) の実数解は1個
$a<\sin\theta\leqq 1$ のとき　(*) の実数解は0個

i), ii) より，①，② の共有点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{-1 \leqq \sin\theta < 0,\ 0 < \sin\theta < a} \ \textbf{のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{\sin\theta = 0,\ a} \ \textbf{のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{a < \sin\theta \leqq 1} & \textbf{0 個} \end{cases}$$

2.47 (1) 2 次方程式 $z^2+tz+t=0\cdots$ ① が異なる 2 つの虚数解をもつとき，$D<0$ であるから

$$t^2-4\cdot1\cdot t<0 \quad \text{これを解いて} \quad [illegible]\ \boldsymbol{4}$$

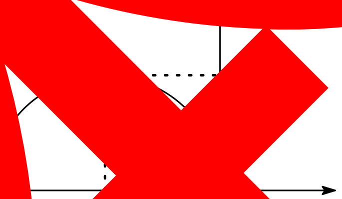
このとき，方程式 ① の解は $\boldsymbol{\dfrac{-t\pm\sqrt{[illegible]}}{[illegible]}}$ [illegible]

(2) $z=z(t)$ とおくと，解と係数の関係[illegible] $-t,\ z\overline{z}=t$
上の 2 式から t を消去すると

$$z\overline{z}+z+\overline{z}=0$$
$$(z+1)(\overline{z}+1)\ [illegible]$$

したがって　$|z+[illegible]$
よって　$|z+[illegible]$

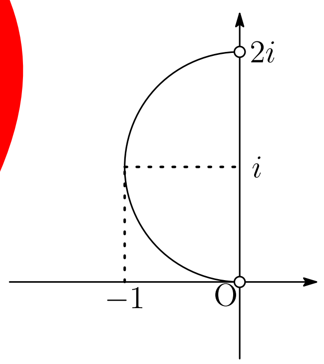
ゆえに[illegible]は，-1 を中心とする半径 1 の[illegible]虚部が正である点である．
[illegible]，[illegible]描く図形 C は，右の図の[illegible]な[illegible]



[illegible]) の結[illegible] $-1+(\cos\theta+i\sin\theta)$ [illegible]と $(0°<\theta<180°)$

$$[illegible]\frac{[illegible]z}{z+[illegible]} [illegible] \frac{[illegible](\cos\theta+i\sin\theta)\}}{[illegible]+i\sin\theta)+1}$$
$$=\frac{[illegible]\cos\theta+[illegible])}{[illegible]\cos\theta+[illegible]}$$
$$[illegible]i\{\cos[illegible](-\theta)\}+i$$
$$=(\cos[illegible]+i\sin[illegible]\{\cos[illegible]\sin(-\theta)\}+i$$
$$=[illegible]270°-\theta)[illegible]-\theta) \qquad (90°<270°-\theta<270°)$$

よ[illegible]図形は，下の図のようになる．



2.48 (1) $z=\frac{1}{4}$ が $(*)$ をみたしているから $\quad \frac{1}{4}+\left|\frac{1}{4}-\sqrt{3}i\right|=k$

よって $\quad k=\frac{1}{4}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{49}{16}}=\mathbf{2}$

(2) α の偏角が 60° であるから，$\alpha=r(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=\frac{r}{2}\left(1+\sqrt{3}\,i\right)$ とおいて $(r>0)$，$(*)$ に代入すると

$$r+\left|\frac{r}{2}\left(1+\sqrt{3}\,i\right)-\sqrt{3}\,i\right|=2$$

$$\left|\frac{r}{2}+\sqrt{3} \text{[illegible]} \right) i\,\Big| = 2 \text{[illegible]} \cdots ②$$

両辺を平方すると $\quad \left(\frac{r}{2}\right)^2+3\left(\frac{r}{2}\right.$ [illegible]

② より，$0<r\leqq 2$ に注意して [illegible]

(3) $\beta-\alpha$ が正の実数であるとき，[illegible] $\beta=$ [illegible]

これを $(*)$ に代入すると

$$\left|x+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|+\left|\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right.\right.\text{[illegible]}\sqrt{3}\,i\Big| \text{[illegible]}$$

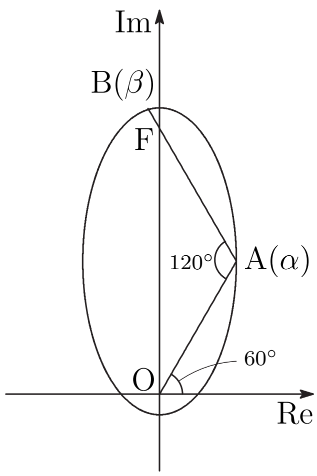
$$\left|x+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|+\Big|\text{[illegible]}\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big|=2$$

$$\sqrt{x^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{x^2+\frac{3}{4}}=2$$

$$\sqrt{x^2+\frac{3}{4}}=1$$

[illegible]は上式[illegible]よって[illegible] $z=\beta$ は $(*)$ をみたさない．

[illegible]と虚[illegible]交点を F[illegible] $=60^\circ$ お[illegible]20° より，[illegible]は $\angle\mathrm{AOF}=$ A[illegible]0°[illegible]辺三角形で，$\mathrm{F}(\sqrt{3}i)$ である．$\mathrm{B}(\beta)$ は直線[illegible]の点であるから，実数 t を用いて $(t>1)$



$$\beta=\alpha+\text{[illegible]}-\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}+\text{[illegible]}\,i+t\left\{\sqrt{3}\,i-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(1-t)+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+t)i$$

β は $(*)$ をみたすから，$t>1$ に注意しながら

$$\left|\frac{1}{2}(1-t)+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+t)i\right|+\left|\left\{\frac{1}{2}(1-t)+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+t)i\right\}-\sqrt{3}\,i\right|=2$$

$$\left|\frac{1}{2}(1-t)+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+t)i\right|+\left|\frac{1}{2}(1-t)+\frac{\sqrt{3}}{2}(-1+t)i\right|=2$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1-t)^2+\frac{3}{4}(1+t)^2}+\sqrt{\frac{1}{4}(1-t)^2+ \cdots t)^2}=2$$

$\sqrt{t}$ [illegible] $+t-1=2$

$$\sqrt{t^2+t+1}=3-t$$

両辺を平方して　$t^2+t+1=9-6t$ [illegible] 8

よって　　$\beta=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{8}{7}\right)+\sqrt{}$ [illegible] $+15\sqrt{3}i$ [illegible]

解説　$|z|+|z-\sqrt{3}i|=2$ より [illegible] 長さが [illegible] 点が [illegible] 楕円である．実際，$|z|+|z-$ [illegible] 2 に $z=x$ [illegible] を代入 [illegible] ると

$$4x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right.$$ [illegible]

[illegible]，上 [illegible] $3x$ の連立方程式を解 [illegible]

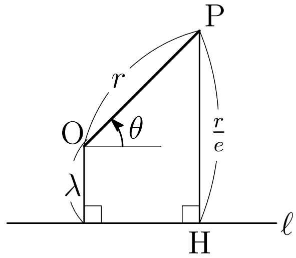
$$\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(-\frac{\ }{14},-\frac{\sqrt{3}}{14}\right)$$

[illegible] って [illegible] $=60$ [illegible] $\alpha=\dfrac{1}{2}+$ [illegible]

また [illegible] 円の離 [illegible]

$$e=\frac{\ }{2}\quad\left(\cdots\frac{\text{焦点間の距離}}{\text{長軸の長さ}}\right)$$

[illegible] すると，楕 [illegible] の点 P から準線 ℓ に [illegible] た垂 [illegible] とすると



$$e=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$$

が成り立つ [illegible] 曲線について成り立つ関係式).
O から準 [illegible] での距離を λ とする.
右図から，PH を 2 通りに表すと

$$\mathrm{PH}=\frac{r}{e},\quad \mathrm{PH}=\lambda+r\sin\theta$$

上の 2 式から　　$r=\dfrac{e\lambda}{1-e\sin\theta}$

問題において，$z=\dfrac{1}{4}$ をみたすとあるので，$\theta=0$ のとき，$r=|z|=\dfrac{1}{4}$，すなわち，$\theta=0$ のとき，$r=\dfrac{1}{4}$ である．したがって，$e\lambda=\dfrac{1}{4}$ を得る．また，$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，楕円の極形式は

$$r=\frac{1}{4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)}$$

ゆえに　$z=$ [illegible] $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\Big)$

これに $\theta=60^\circ$ を代入することによ [illegible] る

さらに，$\theta=240^\circ$ のときの $z=-\dfrac{1}{\ }$ [illegible]

な直線に関して B(β) と対称であ [illegible] ない．

2.49　(1)　$az\bar{z}+\bar{b}z+b\bar{z}+c=0$ $(a,$ [illegible]$)$ より

$a^2z\bar{z}+a$ [illegible] $z)+b\bar{b}=$ [illegible] c

ゆえに　$(az+b)(a\bar{z}+\bar{b})=|b|^2-a$ [illegible]

し [illegible]　$|az+b|^2=|b|^2-ac$

[illegible] $-ac$ [illegible]　$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{\sqrt{|b|^2-\ }}{|a|}$ [illegible]

[illegible]，z は [illegible] **a** [illegible] **$\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$ の円**を描く．

[illegible] $(z-$ [illegible] $)=\bar{d}$ [illegible] $(\bar{z}-\bar{p})$ よ [illegible]

[illegible] $d)z\bar{z}$ [illegible] $+i(\bar{d}q$ [illegible] $i(dp\bar{q}-\bar{d}\bar{p}q)=0$　$\cdots$①

[illegible] $d\neq$ [illegible] き (d は虚 [illegible]

[illegible] $=i(d-\bar{d}),\quad b=i(\bar{d}q-dp),\quad c=i(dp\bar{q}-\bar{d}\bar{p}q)$

とおくと [illegible] は実数であり，① から　　$az\bar{z}+\bar{b}z+b\bar{z}+c=0$

したがっ [illegible]) の結果により

$$\begin{aligned}|b|^2 \ [\text{illegible}] &= b\bar{b}-ac\\ &= i(\bar{d}q-dp)\cdot(-i)(d\bar{q}-\bar{d}\bar{p})-i(d-\bar{d})\cdot i(dp\bar{q}-\bar{d}\bar{p}q)\\ &= |d|^2(|p|^2-p\bar{q}-\bar{p}q+|q|^2)\\ &= |d(p-q)|^2\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}=\left|\frac{d(p-q)}{d-\overline{d}}\right|,\quad -\frac{b}{a}=-\frac{i(\overline{d}q-dp)}{i(d-\overline{d})}=\frac{dp-\overline{d}q}{d-\overline{d}}$$

よって，z は**中心** $\boldsymbol{\dfrac{dp-\overline{d}q}{d-\overline{d}}}$**，半径** $\boldsymbol{\left|\dfrac{d(p-q)}{d-\overline{d}}\right|}$ **の円**を描く．

ii) $d=\overline{d}$ のとき (d は実数)

$d=\overline{d}\neq 0$ より　$(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$ [illegible]

したがって　$\dfrac{z-p}{z-q}=\overline{\left(\dfrac{z-[illegible]}{[illegible]}\right)}$　ゆえ[illegible] q は実数である．

よって，z は **2 点 p，q を通る**[illegible]

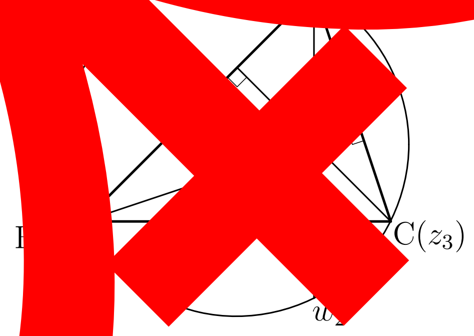
2.50　(1) A(z_1)，B(z_2)，C(z_3) とおく．

点 A を通り，BC に垂直な直線上[illegible]

について，$\dfrac{z-z_1}{z_3-z_2}$ は純虚数で[illegible]，

その直線の方程式は

$$\frac{z-z_1}{z_3[illegible]}+\overline{\left(\frac{z-z_1}{z_3-z_2}\right)}=0\quad\cdots ①$$



[illegible]，$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$

[illegible]ること[illegible]式を計算すると

$$\frac{w_1[illegible]}{[illegible]}+\overline{\left(\frac{w_1-z_1}{[illegible]-z_2}\right)}=\frac{z_2[illegible]}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}\right)}$$

$$=\frac{[illegible]+z_3}{[illegible]_2}+\frac{\overline{z}_2+\overline{z}_3}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}$$

$$=\frac{[illegible]_3}{[illegible]-z_2}+\frac{\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=0$$

[illegible]は直線 ① 上にある．

同様[illegible]して，[illegible]点 B を通り直線 CA に垂直な直線な直線上の点，および点 C を通り直[illegible]に垂直な直線上の点であることを示すことができる．

よって，w_1 [illegible]BC の垂心である．

(2) 円 C の方程[illegible]　$|z|=1$

$w_2=-\overline{z}_1z_2z_3$ [illegible]り，$|w_2|=|\overline{z}_1||z_2||z_3|=1$

したがって，w_2 は円 C 上の点である．また，次式を計算すると

$$\frac{w_2 - z_1}{z_3 - z_2} + \overline{\left(\frac{w_2 - z_1}{z_3 - z_2}\right)} = \frac{-\overline{z}_1 z_2 z_3 - z_1}{z_3 - z_2} + \frac{-z_1 \overline{z}_2 \overline{z}_3 - \overline{z}_1}{\overline{z}_3 - \overline{z}_2}$$

$$= \frac{-\overline{z}_1 z_2 z_3 - z_1}{z_3 - z_2} + \frac{-z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_3} - \overline{z}_1}{\frac{1}{z_{[illegible]}} [illegible] \frac{1}{[illegible]}} = 0$$

よって，w_2 は，直線 ① と円 C の[illegible]点である．

(3) 2 点 B，C を通る直線上の点 z に[illegible] $\frac{z - [illegible]}{[illegible]}$ [illegible]実数であるから，その直線の方程式は

$$\frac{z - [illegible]}{z[illegible]} [illegible] = 0$$

w_1 と w_2 の中点を w とす[illegible] $= \frac{z_1 + [illegible] z_3}{[illegible]2}$

このとき

$$[illegible] \frac{[illegible] - z_2}{[illegible] z_2} - \overline{\left(\frac{w - z_2}{z_3 - z_2}\right)}$$

$$[illegible] \frac{[illegible] z_3 - \overline{z}_1 z_2 z_3}{[illegible] z_2)} - \overline{\left\{\frac{z_1 - [illegible] z_3 - \overline{z}_1 z_2 z_3}{[illegible] - z_2)}\right\}}$$

$$= \frac{z_1 [illegible] \overline{z}_1 z_2 z_3}{[illegible](z_3 [illegible]} - \frac{\overline{z}_1 - \overline{z}_2 + \overline{z}_3 - z_1 \overline{z}_2 \overline{z}_3}{2(\overline{z}_3 - \overline{z}_2)}$$

$$[illegible] \frac{[illegible]1 - z[illegible] \overline{z}_1 z_2 z_3}{[illegible])} - \frac{[illegible] + \frac{1}{z_3} - z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_3}}{[illegible]\left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}\right)} = 0$$

[illegible]て[illegible]w_2 の中点[illegible]BC 上の点である．

解説 3[illegible]，[illegible] C(z_3) について，△ABC の外心 O，垂心 $z_1 + z_2 + z_3$，重心 $\frac{[illegible] + z_2 [illegible]}{3}$[illegible]同一直線上にあることがわかる．この直線を**オイラー線**という．

w_1 と z_1 の中[illegible]と z_3 の中点，z_1 から BC に下ろした垂線の足 w の 3 点を通る円は[illegible] $\frac{[illegible] + z_1}{2}$ と $\frac{z_2 + z_3}{2}$ を直径の両端とする円で，中心は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{w_1 + z_1}{2} + \frac{z_2 + z_3}{2}\right) = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{2}$$

同時に，$\dfrac{w_1+z_2}{2}$ と $\dfrac{z_3+z_1}{2}$，および $\dfrac{w_1+z_3}{2}$ と $\dfrac{z_1+z_2}{2}$ を直径の両端とする円でもある．この方程式は

$$\left|z-\frac{z_1+z_2+z_3}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

であり，この円を **9 点円**という．その中心もオイラー線上にあり，外心と垂心の中点である．また，その半径は外接円の半径の [illegible] ある．

3.1 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1-\dfrac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1-$ [illegible] より [illegible] $+1)^2}>0$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\Big(1\ \text{[illegible]}$$

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\Big(\ \text{[illegible]}$$

y は**単調増加**　ゆえに　$-1<$ [illegible]

$y=1-\dfrac{2}{e^{2x}}$ [illegible] より　$e^{2x}=\dfrac{\ }{1-y}$　ゆえに [illegible] $\log\dfrac{1}{1}$ [illegible]

よって [illegible] 数は　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}}$ [illegible] **1)**

3.2 [illegible] $f(x)+f(y)\quad\cdots(*)$

$(*)$ [illegible] $y=1$ [illegible] ると

[illegible] $=f$ [illegible] $1)$　ゆえ [illegible]　$f(1)=0\quad\cdots①$

$(*)$, [illegible] $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f\Big($ [illegible] $=f(1)=\mathbf{0}$

[illegible] 結果 [illegible] $f\left(\dfrac{\ }{y}\right)$ [illegible] $y\Big)$

[illegible] $f(y)$ である [illegible]

f [illegible] $=f(x)-f(y)\quad\cdots(**)$

$a=\dfrac{m}{n}$ $(m,$ [illegible] 然数) とおくと，$a>1$ より　$m>n$
仮定より，[illegible] の自然数 k に対して，$f(k+1)-f(k)>0$ が成り立つので，この [illegible]

$$\sum_{k=n}^{m-1}\{f(k+1)-f(k)\}>0\quad ゆえに\quad f(m)-f(n)>0$$

(**) より　$f(a)=f\left(\dfrac{m}{n}\right)=f(m)-f(n)>0$

(3) $0<a<b$ から $\dfrac{b}{a}>1$ であるから，(**) および (2) の結果から

$$f(b)-f(a)=f\left(\frac{b}{a}\right)>0 \quad \text{よって} \quad f(a)<f(b)$$

(4) (*)，(**) より

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)-\frac{f(x)+f(y)}{2}=\frac{1}{2}\Big\{ \text{[illegible]} + y\Big) \text{[illegible]} \Big\}+\frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(y)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\Big\{f\Big(\text{[illegible]} x+y\Big)\Big\}$$

$$=\frac{1}{2} \text{[illegible]}$$

ここで　$\dfrac{(x+y)^2}{4xy}-1=$ [illegible] $\geqq 0$　[illegible]

① [illegible] の結果から　$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ [illegible]

3.3 [illegible] $f($[illegible] $4x=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+$ [illegible]

区間 [illegible] にお [illegible] $f(x)\leqq 1$ であ [illegible]

[illegible], 1] は [illegible] て不変である．

[illegible] 間 $[a,$ [illegible] 数 $f($[illegible] して不変 [illegible] とき

[illegible] $f(a)$ [illegible] ゆえに a [illegible] $1-a)$，$4b(1-b)\leqq b$

[illegible] $a<$ [illegible] 注意し [illegible] と　$0<a\leqq\dfrac{3}{4}\leqq b<1 \quad \cdots ①$

[illegible] 次の 2 つの [illegible] を行う．

i) [illegible] $a\leqq$ [illegible] き

$$\frac{1}{2}\in[a,\ b],\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=1\notin[a,\ b]$$

ii) $\dfrac{1}{2}<a\leqq\dfrac{3}{4}$ のとき

区間 $[a,\ b]$ において，関数 $f(x)$ は単調減少であるから

$$f(a)\leqq b,\quad f(b)\geqq a \quad \text{ゆえに} \quad -4a^2\leqq -4a+b,\quad 4b^2\leqq -a+4b$$

上の 2 式の辺々を加えると　$4(b+a)(b-a) \leqq 5(b-a)$

$0<a<b<1$ より，$b-a>0$ であるから　$a+b \leqq \dfrac{5}{4}$

これは，$\dfrac{1}{2} < a$，$\dfrac{3}{4} \leqq b$ に反する．

i)，ii) より，区間 $[a,\ b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではない．

解説 区間 $[a,\ b]$ が出題された関数について不変であれば

$$x_{n+1} = f(x_n),\ a \leqq x_0 \leqq b \ \text{[illegible]}$$

とおくと，$a \leqq x_n \leqq b$ $(n = 0,$ [illegible] となる [illegible] の収束・発散などを調べて反例を示すことは，この関 [illegible] 不可能である．写像

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1-x_n) \ \text{[illegible]}$$

をロジスティック写像 (Logisti [illegible] 複雑な振舞 [illegible] をすることで知られている．

4.1 (1) 数列 $\{a_n\}$ は，初項 $9\cdot10^{-}$ [illegible] 公比 10^{-1}，[illegible] $9\cdot10^{-}$ [illegible] 列の和であるか [illegible]

$$\text{[illegible]} \frac{9\cdot10^{-n-1} - 10^{-1}\times 9\cdot10^{-}\text{[illegible]}}{1-10^{-1}} \text{[illegible]} 10^{-2n}$$

ゆえ [illegible] $= 10^{n}(10^{-n} - 10^{-2n})$ [illegible] $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10^n}}$

$$\boldsymbol{b}\text{[illegible]},\ \boldsymbol{b}\text{[illegible]}\mathbf{9},\ \boldsymbol{b_3} = \text{[illegible]}\mathbf{999}$$

等比 [illegible] 和

[illegible]，公比 [illegible] 等比数列 [illegible] は　$\boldsymbol{S = \dfrac{a - rl}{1 - r}}$

(2) [illegible]

$$s_n = \text{[illegible]}0^{-k} - 10^{-2k})$$

$$\text{[illegible]} - 10^{-1}\cdot10^{-n}}{1-10^{-1}} - \frac{10^{-2} - 10^{-2}\cdot10^{-2n}}{1-10^{-2}}$$

$$\text{[illegible]} - 10^{-n}}{9} - \frac{1-10^{-2n}}{99} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{99}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9\cdot10^n}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{99\cdot10^{2n}}}$$

(3) (2) の結果から　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{s_n} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{99}}$

4.2 $$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} - (\sqrt{2}+1)a_n = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

上の漸化式およびその補助方程式は

$$\begin{cases} a_{n+1} = (\sqrt{2}+1)a_n + 1 & \cdots ① \\ c = (\sqrt{2}+1)c + 1 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② から　$a_{n+1} - c = (\sqrt{2}+1)(a_n - c)$

② を解いて　$c = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって　$a_{n+1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}+1)\Bigl($ [illegible]

数列 $\left\{a_n + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ は，初項 $1 + \dfrac{1}{}$ [illegible] $\sqrt{2}$ [illegible] 列である。

$$a_n + \frac{1}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}+1)^{n-1}\Bigl(\text{[illegible]} \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigr)$$

よっ[illegible] $= \dfrac{(\sqrt{2}+1)^n - 1}{\sqrt{2}}$

[illegible] $+1 >$ [illegible] るか[illegible] $\lim a_n = \infty$

4.3 与[illegible]た漸化[illegible]ら [illegible] $- \dfrac{a_n}{(2c)}$ [illegible] $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

[illegible] 2 [illegible] $\displaystyle\sum^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ [illegible] $\displaystyle\sum_{k=1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1}$ [illegible] $- \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

したがっ[illegible] $(2c)^n - c^n$

$n = 1$ のときも，[illegible]成り立つので　$a_n = (2c)^n - c^n$

$0 < |\,c\,| < \dfrac{1}{2}$ よ[illegible] $|2c| < 1$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2c}{1-2c} - \frac{c}{1-c} = \frac{c}{(1-2c)(1-c)}$$

これが $\dfrac{2}{3}$ に等しいので　　$\dfrac{c}{(1-2c)(1-c)} = \dfrac{2}{3}$

ゆえに　$2(1-2c)(1-c) = 3c$　整理すると　$(c-2)(4c-1) = 0$

$|\,c\,| < \dfrac{1}{2}$ に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{c = \dfrac{1}{4}}$

4.4 (1) 与えられた漸化式から

$a_{n+2} - a_{n+1} = -p(a_{n+1}$ … $a_n)$　ゆえに … $= -pb_n$

$\{b_n\}$ は，初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 2 -$ … の等比数列であるから

$b_n = 1\cdot(-p)^{n-}$ …

(2) (1) の結果から　$a_{n+1} - a_n = ($ …

$n \geqq 2$ のとき　　$a_n =$ … $(-p)^{k-1} =$ … $1-$ … / $1+$ …

上式 … 1 のときも成立するから　$\boldsymbol{a}$ … $\boldsymbol{+p}$

(3) … < 1 … $1 < -p < 0$ であるから … $(-p)^{n-1} = 0$

よって … $\lim\limits_{n\to\infty}$ … $\dfrac{1}{1+p} = \boldsymbol{\dfrac{2+p}{1+p}}$

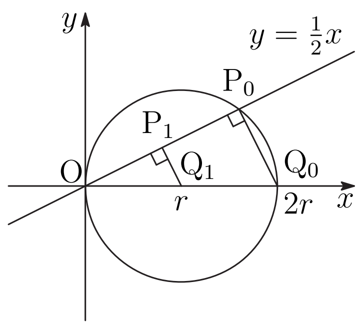
別解 … れた … から

a_n … ${}_{n+1} =$ … pa_n　ゆえに … ${}_1 + pa_n = a_2 + pa_1 = 2 + p$

… a_{n+1} … の差を …

… $= 2 + p -$ (… よって　$a_n = \dfrac{2+p-(-p)^{n-1}}{1+p}$

4.5 $\mathrm{Q}_0(2r,\ 0)$，$\mathrm{Q}_1(r,$ … ，2 以上の自然数 n の自然数 n に対して，… O と点 Q_{n-1} の中点を Q_n とする．この … 原点 O と点 P_n を通り，y 軸に接する円を … すると，C_n は OQ_n を直径とする円 … から，その面積 S_n は



$$S_n = \pi\left(\frac{1}{2}\mathrm{OQ}_n\right)^2 = \pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{2^{n-1}}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{4^n}$$

$\{S_n\}$ は初項が $S_1 = \dfrac{\pi r^2}{4}$，公比が $\dfrac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi r^2}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi r^2}{3}}$$

4.6 (1) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると，$a_5 = 14$，$a_{10} = 29$ より

$$a + 4d = 14, \quad a + 9d = 29 \quad \text{これを解いて} \quad a = 2, \quad d = 3$$

したがって　$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$　すなわち　$\boldsymbol{a_n = 3n - 1}$

(2) (1) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{-a_k} = \sum_{k=1}^{n} 2^{-3k+1} = \cdots$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1-\frac{1}{8}} = \frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right\}$$

(3) (1) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{3n+2}\right) = \boldsymbol{\frac{n}{2(3n+2)}}$$

(4) (2)，(3) の結果から

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-a_k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2^{-a_k} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right\} = \boldsymbol{\frac{2}{7}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

4.7 (1) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 6b_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases} \quad \cdots (*)$

上式の第 1 式から

$$b_n = \frac{1}{6}(a_{n+1} - 2a_n), \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}(a_{n+2} - 2a_{n+1}) \quad \cdots (**)$$

これらを第 2 式に代入すると

$$\frac{1}{6}(a_{n+2} - 2a_{n+1}) = 2a_n + 3 \times \frac{1}{6}(a_{n+1} - 2a_n)$$

整理すると　$a_{n+2}-5a_{n+1}-6a_n=0 \quad \cdots ①$

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \cdots ②$ より

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0 \quad \cdots ③$$

①，③ より　$\alpha+\beta=5,\ \ \alpha\beta=-6$

ゆえに，α，β を解とする 2 次方程式は　x^2-5x-6 [illegible]

よって，α，β は，これを解いて　**-1，6**

(2) $(*)$ の第 1 式から　$a_2=2a_1+$ [illegible] $+6$ [illegible]

(1) の結果を ② に代入すると

$$\begin{cases} a_{n+2}+a_{n+1} \text{ [illegible]} \\ a_{n+2}-6a \text{ [illegible]} \end{cases}$$

したがって　$a_{n+1}+a$ [illegible] $(a_2+a$ [illegible] $\cdot 6$ [illegible]

$a_{n+1}-$ [illegible] $(-1)^{n-1}(a_2$ [illegible] $)=2$ [illegible]

上の [illegible]　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{9\cdot6^{n-1}-2\cdot(-\text{[illegible]}}{7}}$

(3) [illegible] 第 [illegible] (2) の結果を代入すると

$$b_n \text{ [illegible]} (-1)^n \text{ [illegible]} -2\times\frac{9\cdot6^{n-1}-\text{[illegible]}(-1)^{n-1}}{7}\Bigg)=\frac{6^n+(-1)^{n-1}}{7}$$

[illegible] およ [illegible] の結果 [illegible]　$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{9\cdot6\text{[illegible]}-2\cdot(-1)^{n-1}}{\text{[illegible]}(-1)^{n-1}}$

[illegible] lim [illegible] $\dfrac{9-2\left(-\frac{1}{\text{[illegible]}}\right.\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$ [illegible] $\dfrac{9}{6}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

4.8 (1) [illegible] $\tan\theta\neq0$, [illegible] $\neq 0$．2 倍角の公式により

$$\tan 2\text{[illegible]}=\frac{2\tan\theta}{\text{[illegible]}-\tan^2\theta} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{\tan2\theta}=\frac{1}{2\tan\theta}-\frac{1}{2}\tan\theta$$

よって　[illegible] $\theta=\dfrac{1}{2\tan\theta}-\dfrac{1}{\tan2\theta}$

(2) (1) の結果 [illegible] k を自然数とすると

$$\frac{1}{2^k}\tan\theta=\frac{1}{2^k\tan\theta}-\frac{1}{2^{k-1}\tan2\theta}$$

$0 < \dfrac{1}{2^k} < \dfrac{\pi}{4}$ であるから，$\theta = \dfrac{1}{2^k}$ とおくと

$$a_k = \frac{1}{2^k}\tan\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^k\tan\frac{1}{2^k}} - \frac{1}{2^{k-1}\tan\frac{1}{2^{k-1}}}$$

よって
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k\tan\frac{1}{2^k}} - \frac{1}{2^{k-1}\tan\frac{1}{2^{k-1}}}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2^n\tan\frac{1}{2^n}}} - \boldsymbol{\frac{1}{[illegible]1}}$$

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}\Big([illegible]$$

4.9 (1)
$$a_{n+1} = a_n{}^2 + b_n{}^2 \quad [illegible]$$
$$b_{n+1} = 2a_nb_n \quad \cdots②$$

① と [illegible] 辺々を加えると

$$[illegible]_{1} + b_{n+1} = (a_n{}^2 + b_n{}^2) + 2[illegible]b_n)^2$$

[illegible] $= a_n$ [illegible] $c_{n+1} = c_n{}^2$

よ[illegible] $c_n =$ [illegible] $(a_1+b_1)^{2^{n-1}} = \boldsymbol{(a+b)^{2^{n-1}}}$

解説 [illegible] $= c_n{}^2$ [illegible] $\log c$ [illegible] $\log c$ [illegible]

したが[illegible] $2^{n-1}\log c_1$ [illegible] 2^{n-1}

よ[illegible] $= (a+$ [illegible]

[illegible]の結果 [illegible] a_n [illegible] $\cdots③$

[illegible] $b_{n+1} = (a_n{}^2 + b_n{}^2) - 2a_nb_n = (a_n - b_n)^2$

したがって $\quad a_n - b_n = (a-b)^{2^{n-1}} \quad \cdots④$

③，④から
$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2}\left\{(a+b)^{2^{n-1}} + (a-b)^{2^{n-1}}\right\}}$$
$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{2}\left\{(a+b)^{2^{n-1}} - (a-b)^{2^{n-1}}\right\}}$$

(3) (2) の結果から

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{(a+b)^{2^{n-1}}-(a-b)^{2^{n-1}}}{(a+b)^{2^{n-1}}+(a-b)^{2^{n-1}}}=\frac{1-\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}}{1+\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}}$$

$a>b>0$ より　$0<\dfrac{a-b}{a+b}<1$　ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}=0$　$\cdots$⑤

したがって，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ は[illegible]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\text{[illegible]}=\mathbf{1}$$

(4) (2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a+b)^{2^{n-1}}\left\{\text{[illegible]}\right\}$$

⑤に注[illegible]

[illegible]とき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

[illegible]$a+b$[illegible]とき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$

[illegible]のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

[illegible]a_n[illegible]無限級数[illegible]するための必要条件であるから，

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$[illegible]収束するとき，$a+b<1$ が成り立つ．

解説 (長崎大学 20[illegible]

4.10 (1) 与えられた[illegible]から

$$a_3=\frac{a_1+a_2}{2}=\boldsymbol{\frac{s+t}{2}},\qquad a_4=\frac{a_2+a_3}{2}=\frac{t+\frac{s+t}{2}}{2}=\boldsymbol{\frac{s+3t}{4}}$$

$$b_3=\sqrt{b_1b_2}=\boldsymbol{\sqrt{st}},\qquad b_4=\sqrt{b_2b_3}=\sqrt{t\sqrt{st}}=\boldsymbol{\sqrt[4]{st^3}}$$

(2) 与えられた漸化式から

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n) \quad ゆえに \quad c_{n+1}=-\frac{1}{2}c_n$$

$\{c_n\}$ は初項が $c_1=a_2-a_1=t-s$，公比が $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$c_n=c_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\boldsymbol{(t-s)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}}$$ [illegible]

$n \geqq 2$ のとき $\quad a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}$ [illegible] $\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$= s+(t-s)\times$ [illegible]

$=\frac{1}{3}\Big\{1$ [illegible] $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$ [illegible] t

上式は，$n=1$ のときも[illegible]つので

[illegible] $\boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}s+}$ [illegible]

[illegible]$_{+2}=$ [illegible]辺の自然対数をとる

log [illegible] $+\log b_n$ [illegible] ゆえに $\quad d_n=\frac{d_{n+1}+d_n}{2}$

[illegible] $=$ lo[illegible] $\log s$, [illegible]$\log b_2=\log$ [illegible] (2) の結果を利用して

$d_n=$ [illegible]$^{n-2}\Big\}$ [illegible] $3\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\log t$

[illegible] $s^{\frac{1}{3}\{1-(-\frac{1}{2}}$ [illegible] $(-\frac{1}{2})^{n-1}\}$

よって [illegible] $\boldsymbol{b}$ [illegible] $\boldsymbol{\{1-(-\frac{1}{2})^{n-2}\}t^{\frac{2}{3}\{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}\}}}$

(4) (2),(3) の結果[illegible] $\lim_{n\to\infty} a_n=\boldsymbol{\frac{s+2t}{3}}$, $\quad \lim_{n\to\infty} b_n=\boldsymbol{\sqrt[3]{st^2}}$

(5) $\alpha=\lim_{n\to\infty} a$[illegible] $\lim_{n\to\infty} b_n$ とすると，$s>0$，$t>0$ より，$\alpha>0$，$\beta>0$

(4) の結果から $\quad \alpha^3-\beta^3=\frac{1}{27}(s-t)^2(s+8t)$

よって，$t=s$ は $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$ であるための必要十分条件である．

別解 $s>0$，$t>0$ であるから，3 数 s，t，t の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{s+t+t}{3} \geqq \sqrt[3]{stt} \quad \text{すなわち} \quad \frac{s+2t}{3} \geqq \sqrt[3]{st^2}$$

上式において，等号が成立するのは，$s=t$ のときに限る．

したがって $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \quad \Longrightarrow \quad s=t$

また，(4) の結果から，この逆は自明．

よって，$t=s$ は $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ であるための [illegible] 条件である．

補足 $s>0$，$t>0$ に対して，$p>0$，[illegible] $p+$ [illegible] すると

$$ps+q [illegible]$$

が成り立つ (等号が成立するのは [illegible]，q [illegible] 3

$$\frac{1}{3}s+\frac{2}{3}t \geqq [illegible] \text{なわち} [illegible]$$

一般に [illegible] $a_k>0$，$p_k>0$ $(k=1,2,\cdots,n)$，[illegible] p_2+ [illegible] 1 のとき

$$[illegible] + p_2a_2+\cdots+p_na_n \geqq [illegible]$$

[illegible] り立 [illegible] 成り立つのは，$a_1=a$ [illegible] $=a_n$ のとき) [1]．

とく [illegible] $=p$ [illegible] $p_n=\frac{1}{n}$ とすると [illegible] 式が成り立つ．

$$\frac{a_1+ [illegible] \cdots+a_n}{n} [illegible] \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

4. [illegible] $+r^2$ [illegible]

[illegible] 式より，[illegible] 数 n に対して $\quad a_n>0 \quad \cdots ①$

$(*)$ [illegible] $-r=(1-r)\times\frac{a_n-r}{a_n+1} \quad \cdots(**)$

$$[illegible] r=(1+r)\times\frac{a_n+r}{a_n+1}$$

上の 2 式よ [illegible] $\quad \frac{a_{n+1}-r}{a_{n+1}+r}=\frac{1-r}{1+r}\times\frac{a_n-r}{a_n+r}$

ゆえに $\quad \frac{a_n-r}{a_n+r}=\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n-1}\times\frac{a_1-r}{a_1+r}=\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n \quad \cdots ②$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf $\boxed{3}$ を参照

$r>1$ より　　$\dfrac{1-r}{1+r}<0$　$\cdots$③

①，②，③から

n が偶数のとき　$a_n-r>0$　すなわち　$a_n>r$
n が奇数のとき　$a_n-r<0$　すなわち　$a_n<r$

(2) (∗)，(∗∗) より

$$a_{n+2}-r=(1-r)\times\frac{a_{n+1}-r}{a_{n+1}+1}$$

$$=(1-r)\times\frac{\dfrac{(1-r)(a_n-r)}{a_n+1}}{\dfrac{a_n+r^2}{a_n+1}+1}=\boldsymbol{\frac{(1-r)^2(a_n-r)}{2a_n+r^2+1}}$$

(3) (1) の結果から，$a_{2n}>r$．また，(2) の結果から

$$a_{2n+2}-r=\frac{(1-r)^2(a_{2n}-r)}{2a_{2n}+r^2+1}<\frac{(1-r)^2(a_{2n}-r)}{2r+r^2+1}=\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2(a_{2n}-r)$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{a_{2n+2}-r}{a_{2n}-r}<\left(\dfrac{r-1}{r+1}\right)^2}$

(4) (3) の結果から，$\lambda=\left(\dfrac{r-1}{r+1}\right)^2$ とおくと

$$0<\frac{a_4-r}{a_2-r}<\lambda,\quad 0<\frac{a_6-r}{a_4-r}<\lambda,\quad\cdots,\quad 0<\frac{a_{2n}-r}{a_{2n-2}-r}<\lambda$$

これらの辺々を掛けて

$$0<\frac{a_{2n}-r}{a_2-r}<\lambda^{n-1}\quad\text{すなわち}\quad 0<a_{2n}-r<(a_2-r)\lambda^{n-1}$$

$r>1$ より，$0<\lambda<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_2-r)\lambda^{n-1}=0$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}(a_{2n}-r)=0\quad\text{すなわち}\quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_{2n}=r}$$

これと (∗) により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+r^2}{a_n+1}=\frac{r+r^2}{r+1}=\boldsymbol{r}$

解説 $r>1$ であるから，② より

$$\left|\frac{a_n-r}{a_n+r}\right| = \left|\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n\right| = \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^n$$

$0<\dfrac{r-1}{r+1}<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^n=0$

はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-r}{a_n+r}=0$　よって [illegible] $a_n=r$

また，② より，一般項は

$$a_n = \frac{r\,[illegible]\,(1-r)\,[illegible]}{1-[illegible]}$$

であるから，$-1<\dfrac{1-r}{1+r}<0$ [illegible] めることもできる．

また，一般項から　$a_n = \dfrac{2r\left(\frac{1-[illegible]}{1+[illegible]}\right)}{1-\left(\frac{1-[illegible]}{1+[illegible]}\right)}$

[illegible] 数のとき　$a_n-r>0$　す [illegible] $>r$

[illegible] とき　$a_n-r<0$　す [illegible] $a_n<r$

[illegible] (1) (1 [illegible] $\sum_{k=0} r^k$ [illegible] より，$|r|<1$ のとき

$$[illegible]_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = [illegible]\frac{[illegible]\,r^{n+1}}{[illegible]\,r}$$

S_n に [illegible]

[illegible] $\sum kr^{k-1}$ [illegible] $S_n = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-2}$　⋯②

とお [illegible] と，[illegible] $\times r$ より $(r\neq 1)$

$$[illegible]\,S_n = \sum_{k=0}^{n} kr^{k-1} - r\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-2}$$

$$[illegible]-r)S_n = -nr^n + \sum_{k=1}^{n}\{kr^{k-1}-r(k-1)r^{k-2}\}$$

$$= -nr^n + \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = -nr^n + \frac{1-r^n}{1-r}$$

よって　$\boldsymbol{S_n = -\dfrac{nr^n}{1-r} + \dfrac{1-r^n}{(1-r)^2}}$

(2) T_n について

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)r^{k-2} \quad \cdots ③, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)(k-2)r^{k-3} \quad \cdots ④$$

とおくと，③ − ④ × r より，② に注意して ($r \neq 1$)

$$T_n - rT_n = \sum_{k=0}^{n} k(k- \text{[illegible]} - r\sum^{n+1} \text{[illegible]} - 2)r^{k-3}$$

$$(1-r)T_n = -n(n-1)r^{n-1} \text{[illegible]}$$

$$= -n(n-1) \text{[illegible]} (k-1)r^{k-2}$$

$$= -n \text{[illegible]} ^{-1} + 2S \text{[illegible]}$$

$$= -n(n+1)r^{n-1} - \frac{2n \text{[illegible]}}{1- \text{[illegible]}} + \frac{2(1- \text{[illegible]})}{(1- \text{[illegible]})}$$

[illegible] $\boldsymbol{-\dfrac{n(n+1)r^{n-1}}{1-r} - \dfrac{2 \text{[illegible]}}{(1 \text{[illegible]}} + \dfrac{\text{[illegible]} - r^n)}{(1-r)^3}}$

[illegible] $|r|$ [illegible] とき，[illegible] $= 0$，$\lim_{n\to\infty} n(n-1)r$ [illegible] $= 0$ であるから

[illegible] $\lim_{n\to\infty} n($ [illegible] $^{-1} = \lim_{n\to\infty}$ [illegible] $\dfrac{\text{[illegible]} - 1)r^n + 2nr^n}{r} = 0$

上[illegible]によ[illegible]

[illegible] $\left\{-\dfrac{n \text{[illegible]}}{1-r \text{[illegible]}}\right\} = \dfrac{1}{(1-r)^2}$

[illegible] $= \left\{-\dfrac{n(n+1)r^{\text{[illegible]}}}{1-r} - \dfrac{2nr^n}{(1-r)^2} + \dfrac{2(1-r^n)}{(1-r)^3}\right\} = \dfrac{2}{(1-r)^3}$

よって　[illegible] $= r^2\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)r^{k-2} + r\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1}$

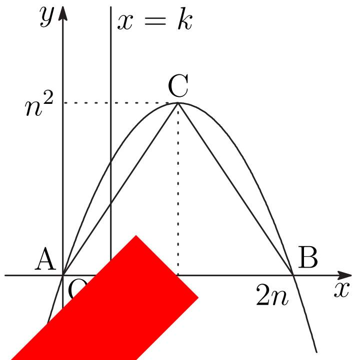
$$= r^2 \times \frac{2}{(1-r)^3} + r \times \frac{1}{(1-r)^2} = \boldsymbol{\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}}$$

4.13 (1) 関数 $y = 2nx - x^2 = -(x-n)^2 + n^2$ のグラフの頂点を C とすると　　C$(n,\ n^2)$

R_n に含まれる直線 $x = k$ (k は整数) 上の格子点の個数は,

$$-(k-n)^2 + n^2 + 1$$

グラフは直線 $x = n$ に関して対称であるから



$$S_n = 2\sum_{k=0}^{n-1}\{-(k-n)^2 \ \text{[illegible]}\ 1$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}(-k^2 + n^2 + \text{[illegible]}$$

$$= 2\left\{-\frac{1}{6}n(n \ \text{[illegible]}\ + 1) \ \text{[illegible]}\right.$$

$$= \boldsymbol{\frac{4}{3}n^3 + \frac{\text{[illegible]}}{3}\ \text{[illegible]}\ 1}$$

(2) 直[illegible]きは n であるから, (1) と同[illegible] (k [illegible]上の[illegible]点の[illegible]$nk + 1$ であるから

$$T_n \ \text{[illegible]}\ nk + 1) + n^2 + 1$$

$$= 2\sum \ \text{[illegible]}\ - 1) + \ \text{[illegible]}^2 + 1$$

$$\text{[illegible]}\ -n + 1) \ \text{[illegible]}\ 1$$

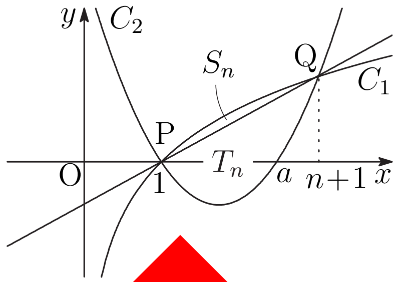
$$= 2\left\{n \times \frac{\text{[illegible]}}{2} \ \text{[illegible]} + (-n+1)n\right\} + n^2 + 1$$

$$\text{[illegible]}\ \boldsymbol{n^3 + 2n + 1}$$

(3) (1), (2) の結[illegible]

$$\lim_{n\to\infty} \text{[illegible]} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3 + 2n + 1}{\dfrac{4}{3}n^3 + \dfrac{5}{3}n + 1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1 + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{3n^2} + \dfrac{1}{n^3}} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

4.14 (1) C_1 と C_2 の交点Qの x 座標が $n+1$ であるから



$$\log(n+1)=(n+1-1)(n+1-a)$$

$n\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{a=n+1-\frac{\log(n+1)}{n}}$$

上式より $\quad a-1=\dfrac{n^2-\log(n+\text{[illegible]}}{n}$

ここで $\quad \displaystyle\int_0^n \frac{t}{t+1}\,dt=\Big[\,t-\log(t$ [illegible] $\log(n+1)>0$

上の2式から $\qquad a-1=\dfrac{n^2-\log(\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$

よって $\qquad \boldsymbol{a>1}$

(2) $S_n=\displaystyle\int_1^{n+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}\{$ [illegible] $1\}\log$ [illegible]

$=\Big[$ [illegible] $g\,x-x\Big]_1^{n+1}-\dfrac{\text{[illegible]}}{2}\log(n+1)=$ [illegible] **log** [illegible]

[illegible] および2点P，Qの x 座標 [illegible]

$T_n=\dfrac{1}{6}\{(n+1)-1$ [illegible] $\boldsymbol{n^3}$ [illegible]

(3) [illegible] 結果な [illegible]

$\dfrac{S_n}{n\log T_n}=\dfrac{\text{[illegible]}g(n+1)-\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}\log\frac{n^3}{6}}=\dfrac{\text{[illegible]}+\frac{1}{n}\big)\log(n+1)-1}{3\log n-\log 6}$

$=\dfrac{(\text{[illegible]}\{\log\text{[illegible]}(1+\frac{1}{n})\big)\}-1}{\text{[illegible]}\log 6}$

$=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)\left\{1+\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\}-\dfrac{1}{\log n}}{3-\dfrac{\log 6}{\log n}}$

よって [illegible] $\dfrac{S_n}{n\log T_n}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}+0\right)(1+0)-0}{3-0}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

4.15 (1) $a_1=1$，$b_1=c_1=d_1=e_1=f_1=0$ であるから

$$
\begin{aligned}
a_2 &= f_1\cdot\frac{1}{2}+b_1\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{0}\\
b_2 &= a_1\cdot\frac{1}{2}+c_1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+0=\mathbf{\frac{1}{2}}\\
c_2 &= b_1\cdot\frac{1}{2}+d_1\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{0}\\
d_2 &= c_1\cdot\frac{1}{2}+e_1\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{0}\\
e_2 &= d_1\cdot\frac{1}{2}+f_1\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{0}\\
f_2 &= d_1\cdot\frac{1}{2}+a_1\cdot\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

(2) (1) の結果から

$$
\begin{aligned}
a_3 &= f_2\cdot\frac{1}{2}+b_2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{1}{2}}\\
b_3 &= a_2\cdot\frac{1}{2}+c_2\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{0}\\
c_3 &= b_2\cdot\frac{1}{2}+d_2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+0=\mathbf{\frac{1}{4}}\\
d_3 &= c_2\cdot\frac{1}{2}+e_2\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{0}\\
e_3 &= d_2\cdot\frac{1}{2}+f_2\cdot\frac{1}{2}=0+\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{1}{4}}\\
f_3 &= e_2\cdot\frac{1}{2}+a_2\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{0}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}+d_{n+1}+f_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n+c_n)+\frac{1}{2}(c_n+e_n)+\frac{1}{2}(e_n+a_n)\\
&= a_n+c_n+e_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}+c_{n+1}+e_{n+1} &= \frac{1}{2}(f_n+b_n)+\frac{1}{2}(b_n+d_n)+\frac{1}{2}(d_n+f_n)\\
&= b_n+d_n+f_n
\end{aligned}
$$

上の 2 式から

$$
\begin{aligned}
b_{n+2}+d_{n+2}+f_{n+2} &= a_{n+1}+c_{n+1}+e_{n+1}\\
&= b_n+d_n+f_n
\end{aligned}
$$

また $\quad b_2+d_2+f_2=\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}=1$

よって n が偶数のとき $\quad \boldsymbol{b_n+d_n+f_n=1}$

(4) $b_1=0,\ f_1=0,\ c_1=0,\ e_1=0$

ゆえに，$n=1$ のとき，$b_n=f_n$，$c_n=e_n$ が成立する．

$n=k$ のとき，$b_k=f_k$，$c_k=e_k$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned}
b_{k+1}-f_{k+1}&=\frac{1}{2}(a_k+c_k)-\frac{1}{2}(e_k+a_k)\\
&=\frac{1}{2}(c_k-e_k)=0\\
c_{k+1}-e_{k+1}&=\frac{1}{2}(\text{[illegible]}+d_k)-\frac{1}{2}(d\text{[illegible]}\\
&=\text{[illegible]})
\end{aligned}$$

上の 2 式から，$n=k+1$ のときも，b [illegible]

よって，すべての時刻 n に対して [illegible] c_n

(5) (3) の結果から　$b_{2m}+d_{2m}$ [illegible] 1 [illegible] f_{2m} [illegible]

上の 2 式から　$2b_{2m}$ [illegible] 1　$\cdots$①

また，[illegible]の結果により

$$\begin{aligned}
b_{n+1}-d_{n+1}&=\frac{1}{2}(a_n+c_n\text{[illegible]}c_n\text{[illegible]})\\
&=\frac{1}{2}(a_n-e_n\text{[illegible]}a_n-c_n)\\
&\text{[illegible]}=\frac{1}{2}(f_n+b_n)-\frac{1}{2}(b_n+d_n)\\
&=\frac{1}{2}(f_n\text{[illegible]}=\frac{1}{2}(b_n-d_n)
\end{aligned}$$

[illegible]式から [illegible] $=\frac{1}{4}(b_n$ [illegible]

[illegible] $-\,d_{2m+2}=$ [illegible] $m)$

した[illegible]て [illegible] $d_{2m}=(b_2-d_2)\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}$　$\cdots$②

①，② から [illegible] $=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}$　よって　$\boldsymbol{\lim_{m\to\infty} d_{2m}=\frac{1}{3}}$

4.16 (1) 与えられた[illegible]式より

$$z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)\ (n=0,1,2,\cdots)\quad\cdots(*)$$

であるから

$$z_2 - z_1 = \alpha(z_1 - z_0) = \alpha = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \quad \cdots ①$$

$$z_3 - z_2 = \alpha(z_2 - z_1) = \alpha^2 = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$$

$$z_4 - z_3 = \alpha(z_3 - z_2) = \alpha^3 = \frac{1}{8}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\text{[illegible]}$$

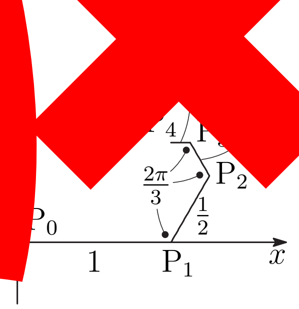
上の第 1 式と第 2 式，および上の [illegible] 式の辺々を加 [illegible]

$$z_3 - z_1 = \frac{1}{8} + \text{[illegible]} \frac{\sqrt{3}}{8}i$$

$z_1 = 1$ であるから，① および上の [illegible]

$$\boldsymbol{z_2 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i}, \quad \text{[illegible]} + \frac{\boldsymbol{3\sqrt{3}}}{\text{[illegible]}}$$

(2) α は大きさが $\frac{1}{2}$，偏角が [illegible] あるから，(∗) よ [illegible] $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ は $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ を $\frac{1}{2}$ に縮 [illegible] け回転させたものである．[illegible] あるから，P_2，P_3，P_4 [illegible] 素数 [illegible] ると，右の図のようにな [illegible]



(3) [illegible]，z_1 [illegible] およ [illegible] り

$$\text{[illegible]}_{+1} - z_n = \alpha^n(\text{[illegible]}) = \boldsymbol{\alpha^n}$$

(4) (3) の結果から，$n \geqq 1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k \quad \text{ゆえに} \quad z_n=\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1} \quad \cdots(**)$$

$(**)$ は $n=0$ についても成り立つ．ここで

$$\alpha^n=\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}\alpha-1&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)-1=-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}z_n&=\frac{\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)}\\&=\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\left(\cos\frac{2n-5}{6}\pi+i\sin\frac{2n-5}{6}\pi\right)\\&\qquad\qquad-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{5}{6}\pi-i\sin\frac{5}{6}\pi\right)\\&=\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\left(\cos\frac{2n-5}{6}\pi+i\sin\frac{2n-5}{6}\pi\right)+1+\frac{1}{\sqrt{3}}i\\&=\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\cos\frac{2n-5}{6}\pi+1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{2n-5}{6}\pi+1\right)i\end{aligned}$$

$z_n = x_n + y_n i$ [illegible]

$$\boldsymbol{x_n=\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\cos\frac{2n-5}{6}\pi+1}$$

$$\boldsymbol{y_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{2n-5}{6}\pi+1\right)}$$

(5) (4) の結果から $\quad |x_n-1|\leqq\dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}, \quad \left|y_n-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right|\leqq\dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}x_n=1, \quad \lim_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

4.17 (1) $w=z$ のとき　$z=\dfrac{3(1-i)z-2i}{z+3(1-i)}$　整理すると　$z^2=-2i$

$$-2i=2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$ であるから

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

とおくと

$$r^2=2,\quad 2\theta=\frac{3}{2}\pi+2n\pi\ (n\ は$$ [illegible]

したがって　$r=\sqrt{2},\ \theta=\dfrac{3}{4}\pi,$ [illegible]

すなわち　$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{\ }\right.$ [illegible]

$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+\right.$ [illegible]

(2) (1) の結果から，$\alpha=-1$ [illegible] $=1-i$ [illegible]か[illegible]

$$w \text{ [illegible] } =\frac{3(1-i)z-2[illegible]}{z+3(1-i)}-(-1+i)$$

$$= \frac{[illegible](1-i)z-2i+(1-i)\{z+[illegible]}{z+3(1-i)} [illegible] \frac{[illegible](1-i)[illegible]}{z+3(1-[illegible])}$$

$$w \text{ [illegible] } \frac{[illegible]-2i}{z[illegible]}-(1-i)$$

$$= [illegible]-(1-i)\{z+3(1-i)\} / [illegible]3(1-[illegible]) =\frac{2(1-i)(z-\beta)}{z+3(1-i)}$$

上の[illegible]から　w [illegible] $\dfrac{2(1-i)}{[illegible](1-i)}\cdot\dfrac{z-[illegible]}{z[illegible]}$ [illegible]えに　$k=\dfrac{2(1-i)}{4(1-i)}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

[illegible]の結果[illegible] $\dfrac{[illegible]_{n+1}[illegible]}{z_{n+1}-\alpha}$ [illegible]　ゆえに　$\dfrac{z_n-\beta}{z_n-\alpha}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{z_1-\beta}{z_1-\alpha}$

z_1 [illegible]であるから

$$\frac{z_n-\beta}{z_n+\beta} \text{ [illegible] } \quad ゆえに\quad z_n=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}\beta=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}(1-i)$$

よって　[illegible] $\boldsymbol{\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1},\quad y_n=-\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}}$

また　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{2^{n-1}}}=\mathbf{1},\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{2^{n-1}}}=\mathbf{-1}$

4.18 (1) $$1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\quad(z\neq 1)\quad\cdots(*)$$

とする．

i) $n=1$ のとき

$$(*)\text{の左辺}=1+z,\quad (*)\text{の右辺}=\frac{1-z^2}{1-z}=\frac{(1+z)(1-z)}{1-z}=1+z$$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

ii) $n=k$ のとき

$1+z+$ [illegible] $+z^k$ [illegible] z

が成り立つと仮定すると

$1+z+z^2+\cdots+z^k+$ [illegible]

[illegible] $z^{k+1}(1-$ [illegible]

$=$ [illegible] z^{k+} [illegible] z

[illegible] $n=k+1$ のときも $(*)$ が成 [illegible]

i) [illegible] べての自然数 n について ([illegible]

(2 [illegible] モア [illegible] 理を利用して

[illegible] $=\sum$ [illegible] $+i\sin\theta)\}^k$

[illegible] $\sum_{k=0}$ r^k [illegible] $+i\sin k$ [illegible] $\sum^{n} r^k\cos k\theta+i\sum_{k=0}^{n} r^k\sin k\theta$

z [illegible] $s\,\theta+$ [illegible] 1 であるか [illegible]

[illegible] z^{n+1} [illegible] z^{n} [illegible] $(1-z)(1$ [illegible] $-z^{n+1}+|z|^2z^n$ / $1-(z+\overline{z})+|z|^2$

[illegible] $r(\cos\theta-i\sin\theta)$ / [illegible] $2r\cos\theta+r^2$

$$-\frac{r^{n+1}\{\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta\}}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

$$+\frac{r^{n+2}(\cos n\theta+i\sin n\theta)}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

$=$ [illegible] $-r\cos\theta-r^{n+1}\cos(n+1)\theta+r^{n+2}\cos n\theta$ / $1-2r\cos\theta+r^2$

$$+\frac{i\{r\sin\theta-r^{n+1}-r^{n+1}\sin(n+1)\theta+r^{n+2}\sin n\theta\}}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ であるから，この両辺の実部を比較して

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} r^k \cos k\theta = \frac{1 - r\cos\theta - r^{n+1}\cos(n+1)\theta + r^{n+2}\cos n\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}}$$

(3) $0 < r < 1$ より

$$|r^{n+1}\cos(n+1)\theta| \leqq r^{n+1}, \quad [illegible]^{n+2}\cos n\theta| \leqq [illegible] \lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

上の諸式および (2) の結果によ[illegible]

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} r^k \cos k\theta} \; [illegible]$$

4.19 (1) $a(x^2 + |x+1| + n - 1) =$ [illegible] $)$ ·

$a = 0$ の場合，方程式 ([illegible] 解 $x = -$ [illegible] つ．

$a \neq 0$ [illegible] 場合，方程式 $(*)$ が実数解をもつ [illegible] 関数

$$y = x^2 + |x+1| + [illegible]$$

[illegible] グラ [illegible] $\sqrt{n}$ [illegible] $(x+1)$ が共有点 [illegible].

関数 [illegible]

$x \geqq -$ [illegible] き [illegible] $x + n$ [illegible] $x + \frac{1}{2}\Big)^2 + n - \frac{1}{4}$

[illegible] 1 の [illegible] $x^2 - x + n$ [illegible] $\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 + n - \frac{9}{4}$

[illegible] $\frac{\sqrt{n}}{a}$ [illegible] $= k(x$ [illegible] ．

[illegible] 線 ② が接 [illegible] の k の値は

i) [illegible] -1 [illegible]，2 式から y を消去して

$$x^2 + [illegible] = k(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + (1-k)x + n - k = 0$$

このと [illegible] 数について

$$-\frac{1-k}{2\cdot 1} \geqq -1, \quad (1-k)^2 - 4\cdot(n-k) = 0$$

これを解いて　$k = 2\sqrt{n} - 1$

ii) $x < -1$ のとき，2 式から y を消去して

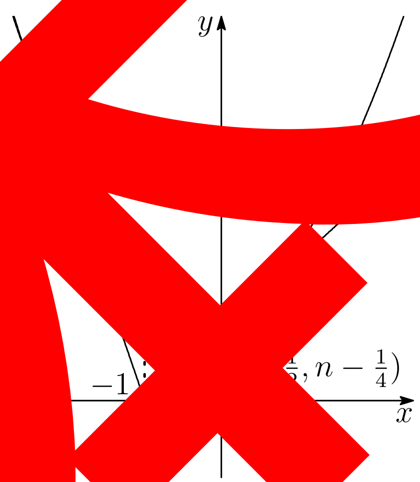
$$x^2 - x + n - 2 = k(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - (k+1)x + n - k - 2 = 0$$

このとき，係数について

$$-\frac{-(k+1)}{2\cdot 1} < -1, \quad \{-(k+1)\}^2 - 4\cdot 1(n-k-2) = 0$$

これを解いて　$k = -2\sqrt{n} - 3$

関数 ① のグラフと直線 ② は，



$$k = -2\sqrt{n} - 3, \ 2\sqrt{n} - 1$$

のとき，右の図のように接する．
したがって，これらが共有点をもつためのkの値の範囲は

$$k \leqq -2\sqrt{n} - 3, \quad 2\sqrt{n} - 1 \leqq k$$

ゆえに，方程式 $(*)$ が実数解をもつとき

$$\frac{\sqrt{n}}{a} \leqq -2\sqrt{n} - 3, \quad 2\sqrt{n} - 1 \leqq \frac{\sqrt{n}}{a}$$

したがって　$-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3} \leqq a < 0, \quad 0 < a \leqq \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$

$a = 0$ のとき，方程式 $(*)$ は実数解をもつので，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}}$$

数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$b_n = -\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}, \quad c_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$$

とおくと

$$b_n = -\frac{1}{2 + \frac{3}{\sqrt{n}}}, \quad c_n = \frac{1}{2 - \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

したがって，$\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ はともに単調減少である．このとき，すべての自然数に対して (1) の結果を満たす a の値の範囲は

$$b_1 \leqq a \leqq \lim_{n\to\infty} c_n \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{-\frac{1}{5} \leqq a \leqq \frac{1}{2}}$$

4.20 (1) 2 次方程式 $x^2+px+q=0\cdots(*)$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-p,\quad \alpha\beta=q$$

ここで
$$\begin{aligned} a_n &= (\alpha^n-1)(\beta^n-1)=(\alpha\beta)^n-(\alpha^n+\beta^n)+1 \\ &= q^n+1-(\alpha^n+\beta^n) \end{aligned}$$

q は整数であるから，$\alpha^n+\beta^n$ が整数のとき，a_n は整数である．

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= -p, \\ \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-p)^2-2q=p^2 \text{[illegible]} \\ \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\text{[illegible]})(-p)\text{[illegible]}(-p)=-p^3+3pq \end{aligned}$$

p，q は整数であるから，上の 3 式 [illegible]

よって，a_1，a_2，a_3 は整数である．

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ より，次の [illegible] る．

i) $|\alpha|-1>0$，$|\beta|-1>0$ [illegible] ち [illegible] >1 のと [illegible]

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{[illegible]} \left|\frac{(\alpha^{n+1}-\text{[illegible]}}{(\alpha^n-\text{[illegible]}-1)}\right| \text{[illegible]}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\alpha-\frac{1}{\alpha^n}\right)\text{[illegible]}\frac{1}{\beta^n}\right)}{\left(1-\frac{1}{\alpha^n}\right)\text{[illegible]}}\right|\text{[illegible]}\beta|$$

[illegible] $|\alpha|$ [illegible] $-1<0$　すなわち [illegible] 1，$|\beta|<1$ のとき

$$\text{[illegible]}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}\text{[illegible]}\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right|=1$$

[illegible] ii) [illegible] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{\text{[illegible]}}}{\text{[illegible]}}\right.$ [illegible] 整数であ [illegible]

[illegible] 条件 [illegible] $-1)($ [illegible] およひ (2) [illegible] から，$(|\alpha|-1)(|\beta|-1)<0$

[illegible] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n\text{[illegible]}}}{\text{[illegible]}}\right|$ [illegible] $\dfrac{\text{[illegible]}}{2}$ [illegible] 要条件である．このとき，α と β

[illegible] 一般性を [illegible] なく

[illegible] 1 [illegible] $\beta|-1<0$　すなわち　$|\alpha|>1$，$|\beta|<1$　$\cdots(**)$

とおける．し [illegible] て

$$\text{[illegible]}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\alpha-\frac{1}{\alpha^n}\right)(\beta^{n+1}-1)}{\left(1-\frac{1}{\alpha^n}\right)(\beta^n-1)}\right|=|\alpha|$$

$|\alpha|>1$ に注意して　$|\alpha|=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

i) $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，α は方程式 $(*)$ の解であるから

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + q = 0$$

整理すると　$(p+2q+3)+(p+1)\sqrt{5} = 0$

$p+2q+3$，$p+1$ は有理数であるから

$$p+2q+3=0, \quad p+1=0 \quad すなわち \quad p=-1, \quad q=-1$$

このとき方程式 $(*)$ の解は，$(**)$ に注意して　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

ii) $\alpha = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，α は方程式 $(*)$ の解であるから

$$\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + p\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + q = 0$$

整理すると　$(-p+2q+3)+(-p+1)\sqrt{5} = 0$

$-p+2q+3$，$-p+1$ は有理数であるから

$$-p+2q+3=0, \quad -p+1=0 \quad すなわち \quad p=1, \quad q=-1$$

このとき方程式 $(*)$ の解は，$(**)$ に注意して　$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

i)，ii) から　$\boldsymbol{(p, q) = (\pm 1, -1)}$

4. (1) $a_n - a_{n-1} = b_n - b_{n-1} + 1$ より

$$a_n - b_n = a_{n-1} - b_{n-1} + 1, \quad a_1 - b_1 = 3 - 1 = 2$$

よって，数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項 2，公差 1 の等差数列であるから

$$a_n - b_n = 2 + (n-1)\cdot 1 = \boldsymbol{n+1} \quad \cdots ①$$

(2) (1) の結果から　$a_n = b_n + n + 1 \quad \cdots ①'$

これを $(a_n + a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) = 2pn + 3 - b_n$ に代入すると

$$(b_{n-1} + n + b_n)(b_n - b_{n-1}) = 2pn + 3 - b_n$$
$$\{b_n + (n+1)\}b_n - (b_{n-1} + n)b_{n-1} = 2pn + 3$$

①′から　　$a_nb_n - a_{n-1}b_{n-1} = 2pn + 3$

ゆえに　　$a_{n+1}b_{n+1} - a_nb_n = 2p(n+1) + 3$

$$= 2pn + (2p+3)$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_nb_n = a_1b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\{2pk + (2p+3)\}$$

$$= 3\cdot 1 + 2p\text{[illegible]}(n-1) + \text{[illegible]})(n-1)$$

$$= pn^2 + (p + \text{[illegible]}$$

$3\cdot 1 = p\cdot 1^2 + (p+3)\cdot 1 - 2p$ なので，[illegible]

したがって　　$\boldsymbol{a_nb_n = pn^2 +}$ [illegible] $\cdots$②

(3)　①′を②に代入して，整理[illegible]

$$b_n{}^2 + (n + \text{[illegible]}b_n - pn^2 - (p\text{[illegible]}n + 2p\text{[illegible]}$$

$p >$ [illegible] に注意して，b_n について解[illegible]

$$\frac{\text{[illegible]}+1) + \sqrt{(n+1)^2 + 4\text{[illegible]}1)(n+2) + 12n}}{2}$$

これ[illegible]に代[illegible]

$$\text{[illegible]}(n+\text{[illegible]}(n+1)^2\text{[illegible]}(n-1)(n+2)+12n$$

上の[illegible]から

$$\text{[illegible]} = \sqrt{(\text{[illegible]}1)(n+2)+12n} \quad \cdots ③$$

$$\lim_{n\to\infty}\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}b_n{}^3}{\text{[illegible]}b_n{}^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+b_n)\{(a_n-b_n)^2 + a_nb_n\}}{(a_n-b_n)\{(a_n-b_n)^2 + 3a_nb_n\}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a_n+b_n}{n}\left\{\left(\dfrac{a_n-b_n}{n}\right)^2 + \dfrac{a_nb_n}{n^2}\right\}}{\dfrac{a_n-b_n}{n}\left\{\left(\dfrac{a_n-b_n}{n}\right)^2 + 3\dfrac{a_nb_n}{n^2}\right\}}$$

ここで，①，②，③より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^2}=p,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{n}=\sqrt{1+4p}$$

であるから

$$f(p)=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^3+{b_n}^3}{{a_n}^3-{b_n}^3}=\frac{(1+p)\sqrt{1+4p}}{1+3p}$$

よって

$$\lim_{p\to 0}\frac{1}{p}\log f(p)=\lim_{p\to\ \dots}\ \frac{1}{\dots}\log\frac{(1+p)\sqrt{1\dots}}{1+\dots}$$

$$=\lim_{p\to 0}\ \dots\ p)^{\frac{1}{2p}}\ \dots$$

$$=\lim\ \dots\ )^3$$

$$\dots\ \frac{\dots e^2}{e^3}=\dots\ \mathbf{0}$$

4.22 (1) $f(x)$ … $-x$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\dots\geqq\dots$$

が成り…等…のは，$x=n\pi$ の… また

$$\dots=-\infty,\qquad \lim_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}-0}f(x)=\infty$$

であ… $f(x)$ … $-\frac{\pi}{2}<x<\ \dots\ \frac{\pi}{2}$ において，単調増加である．

よ…て，… $n\pi+\frac{\pi}{2}$ … $f(x)=0$，すなわち $\tan x=x$

…たす…1つ…

(2) …0 から，$f($… すなわち $\tan x_n=x_n$ をみたす x_n は

$$n\pi<\ \dots\ n\pi+\frac{\pi}{2}\cdots①\quad ゆえに\quad 0<n\pi+\frac{\pi}{2}-x_n<\frac{\pi}{2}$$

$\theta_n=n\pi+\frac{\pi}{2}$ …とおくと，$0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$ より　$\sin\theta_n<\theta_n<\tan\theta_n\cdots②$

また　$\tan\ \dots\ n\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-x_n\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)=\frac{1}{\tan x_n}=\frac{1}{x_n}$

さらに，$\tan\theta_n=\frac{1}{x_n}\cdots③$ の両辺を平方すると

$$\frac{\sin^2\theta_n}{1-\sin^2\theta_n}=\frac{1}{{x_n}^2}\quad ゆえに\quad \sin\theta_n=\frac{1}{\sqrt{{x_n}^2+1}}\cdots④$$

③，④を②に代入すると

$$\frac{1}{\sqrt{{x_n}^2+1}} < \theta_n < \frac{1}{x_n} \quad ゆえに \quad \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_n}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}} < n\theta_n < \frac{1}{\frac{x_n}{n}} \cdots ⑤$$

①より，$\pi < \dfrac{x_n}{n} < \pi\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$ ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \pi \cdots ⑥$

⑤，⑥より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\theta_n = \frac{1}{\pi}$ よって $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} n}$ [illegible] $\boldsymbol{- x_n\Big) = \frac{1}{\pi}}$

4.23 (1) i) 漸化式から，明らかに a_n [illegible]

$a_1 = 1$，$a_2 = \sqrt{2}$ より，$a_2 - a$ [illegible] であるから，

$a_{n+1} - a_n > 0$ であると仮定する [illegible]

$$a_{n+2}{}^2 - a_{n+1}{}^2 = (\sqrt{1+ \text{[illegible]}} = a_{n+1} \text{[illegible]}$$

したがって $a_{n+2} - a$ [illegible]

よって，$\{a_n\}$ は単調 [illegible] 列である．

ii) [illegible] の補助方程式 $c = \sqrt{c+1}$ から

c [illegible] $= 0$ $c > 0$ に注意して [illegible] 解くと $c = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

[illegible] < 0 [illegible] ら，$a_n - c < 0$ で [illegible] と仮定すると

$$\text{[illegible]} c = \text{[illegible]} - c = \frac{1+a_n-c^2}{\text{[illegible]}_n + c} = \frac{a_n - c}{\sqrt{1+a_n}+c} < 0$$

[illegible] って [illegible] < 0

[illegible] って [illegible] に [illegible] $a_n < c$

[illegible] $< a_{n+1} <$ [illegible] $2, \cdots)$

よ [illegible] $\{a$ [illegible] 限な極限値をもつ．

(2) (1)の結果か [illegible] $_{+1} - c| = \dfrac{|a_n - c|}{\sqrt{1+a_n}+c} < \dfrac{1}{c}|a_n - c|$

したがって [illegible] $|a_n - c| < \dfrac{1}{c^{n-1}}|a_1 - c|$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c^{n-1}} = 0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = c = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

別解　(1) の結果から，$\{a_n\}$ は収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$$

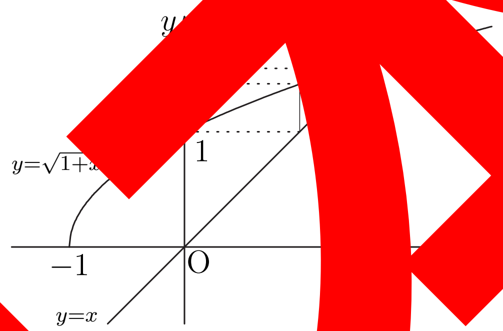
とおくと，$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ より

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_n} \quad \text{すなわち} \quad \alpha = \sqrt{1+\alpha}$$

α は (1) で求めた補助方程式の解であるから

$$\lim_{n\to\infty} = \text{[illegible]} \mathbf{1} + \text{[illegible]}$$

補足　幾何学的には，極限値 α は，$y = \sqrt{1}$[illegible]



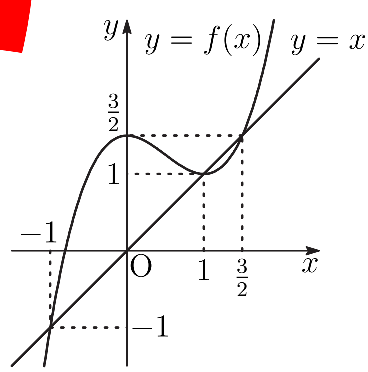
4.2 [illegible] $f(x)$ [illegible] $\frac{3}{2}x$ [illegible] り

[illegible] $f'(x)$ [illegible]

[illegible] $x(x$ [illegible]

$f(x)$ [illegible] 表は [illegible] うになる．

[illegible]	$\cdots$	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible] $x)$	[illegible]	$-$	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	$\searrow$	1	$\nearrow$



$y =$ [illegible] $)$ と [illegible] から y を消去すると

$$x^3 - \text{[illegible]} \frac{3}{2} = x \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) = 0$$

したがっ[illegible] $= f(x)$ と $y = x$ の共有点は　$(-1, -1)$, $(1,\ 1)$, $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

よって，$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフは，右上の図のようになる．

(2)　(1) の結果から，$1 < x < \frac{3}{2}$ のとき　$x > f(x)$

(i) 条件により　$1 < x_0 < \frac{3}{2}$

(ii) $n = k$ のとき，$1 < x_k < \frac{3}{2}$ であると仮定すると

$$x_k > f(x_k) \qquad すなわち \qquad x_k > x_{k+1}$$

また　$x_{k+1} - 1 = f(x_k) - 1$

$= \left(x_k{}^3 - \frac{3}{2}x_k{}^2 + \frac{3}{2}\right) - 1$

$= (x_k$ [illegible] $+ \frac{1}{2}$ [illegible]

したがって　$1 < x_{k+1} < x_k < \frac{3}{2}$ [illegible] $< \frac{3}{}$ [illegible]

よって，$1 < x_n < \frac{3}{2}$ $(n = 0, 1, 2$ [illegible] 次式が成 [illegible]

$$x_n > f(x_n) \quad [illegible] なわち \quad x_n [illegible]$$

(3) (2) の結果から，$\{x_n\}$ は単[illegible]減少で，x_n [illegible] あるか[illegible] x_n が存在し，[illegible] を α $(1 \leqq \alpha \leqq x_0 < \frac{3}{2})$ とすると [illegible] り

$$[illegible]) = \alpha \quad すなわち \quad \alpha^3 [illegible] + \frac{[illegible]}{2} = \alpha$$

これ[illegible]いて [illegible] よって　$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

5 (1) [illegible] $= x^3$ [illegible] 5 よ[illegible] $(x) = 3($[illegible]$)(x - 1)$

したが[illegible] $f(x)$ [illegible] 表は次のよ[illegible]る．

x	[illegible]	[illegible]	$\cdots$	1	[illegible]
[illegible]	$+$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$+$
[illegible]	$\nearrow$	-3	[illegible]	[illegible]	$\nearrow$

よ[illegible] $f($[illegible] はただ 1 つの実数解をもつ．

$$f(2) = -3 < 0, \quad f(3) = 13 > 0$$

$f(x)$ は連続[illegible]から，$f(\alpha) = 0$ となる $2 < \alpha < 3$ が存在する．

(2) 曲線 $y = f($[illegible] 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

この直線と x 軸との交点が $(s,\ 0)$ であるから

$$-f(t)=f'(t)(s-t) \quad \text{ゆえに} \quad s=t-\frac{f(t)}{f'(t)}$$

$s=t-\dfrac{t^3-3t-5}{3t^2-3}=\dfrac{2t^3+5}{3t^2-3}$ であるから

$$s-\alpha=\frac{2t^3+5}{3t^2-3}-\alpha=\frac{2t^3-3\alpha t^2+3\alpha+5}{3t^2-3}$$

$\alpha^3-3\alpha-5=0$ であるから，3 [illegible] $=\alpha^3$ より [illegible]

$$s-\alpha=\frac{2t^3-3\alpha t^2+\alpha \text{ [illegible]}}{3t^2-3} \text{ [illegible]} \alpha) \qquad \cdots(*)$$

$$\frac{s-\alpha}{t-\alpha}-\frac{1}{3}=\frac{(t-\alpha)(2t+\alpha)}{3(t+1)(t-1)} \text{ [illegible]} -1)$$

ここで　$g(t)=t^2-\alpha t$ [illegible] $=\Big(t$ [illegible]

$\alpha<t\leqq 3$ より，最大値 [illegible] $-\alpha^2-3\alpha$ [illegible] $=-($ [illegible] $)<0$

$2<\alpha$ [illegible] $\leqq 3$ より，$(*)$，[illegible] $*)$ および上式 [illegible]

[illegible] $0,\quad \dfrac{s-\alpha}{t-\alpha}-\dfrac{1}{3}<0$　よって [illegible] $\dfrac{1}{3}($ [illegible]

[illegible] の結 [illegible] すると，$s=t_{n+1}$ で [illegible] から

$$\text{[illegible]} \; t_{n+1}-\alpha<\frac{1}{3}(t_n-\alpha)$$

[illegible] $=3$ [illegible] $0<$ [illegible] $<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ [illegible] $\alpha)$

[illegible] $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ [illegible] あるか [illegible] さみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(t_n - \text{[illegible]} \quad \text{[illegible]} \text{って} \quad \lim_{n\to\infty}t_n=\alpha$$

4.26　(1)　漸化 [illegible] から，[illegible] かに　$a_n>0$

$a_1=1$，$a_2=$ [illegible] $=f(1)=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ より，

$a_2>a_1$ であ [illegible]，$a_{n+1}>a_n$ と仮定すると

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{2^{\frac{a_{n+1}}{2}}}{2^{\frac{a_n}{2}}}=2^{\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)}>1$$

したがって　$a_{n+2}>a_{n+1}$

よって，$\{a_n\}$ は単調増加列である．

(2) $a_1 < 2$ であるから，$a_n < 2$ と仮定すると

$$\frac{a_{n+1}}{2} = \frac{2^{\frac{a_n}{2}}}{2} = 2^{\frac{1}{2}(a_n-2)} < 1$$

したがって　$a_{n+1} < 2$

よって，すべての自然数 n に対して　$a_n < 2$

(3) $f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$ は凸関数であるから，$y = f(x)$ と $y = x$ [illegible]の交点は高々 2 個である．$f(x) = x$ より

$$2^{\frac{x}{2}} \ [illegible] \ ①$$

この方程式の両辺を 2 乗および 4 乗 [illegible]

$$2^x = [illegible]$$

よって，方程式 ① の解は [illegible] **2，4** [illegible]

(4) (2)，(3) の結果から　a_n [illegible]
平均値 [illegible] 定理により

$$[illegible] \frac{f(\alpha) - f(a_n)}{\alpha - a_n} = f'(c) \quad (a_n \ [illegible] \quad ②$$

[illegible] みたす [illegible] る．

$f'($ [illegible] $\frac{\log 2}{2}$ [illegible] ら，$f'(x)$ は単調増加関数である．ゆえに

$$[illegible] f'(c) [illegible] = \frac{2^{\frac{\alpha}{2}} \log [illegible]}{2} [illegible] \frac{\alpha \log 2}{2} \quad \cdots ③$$

②，[illegible]

$$\frac{f(\alpha) [illegible]}{[illegible]} < [illegible] \alpha - a_{n+1} < \frac{\alpha \log 2}{2}(\alpha - a_n)$$

(5) α [illegible] 果に代入すると

$$2 - a_{n+1} < \log 2 \cdot (2 - a_n)$$

$2 - a_n > 0$ で [illegible] から　$|2 - a_{n+1}| < \log 2 \cdot |2 - a_n|$

したがって [illegible] $a_n| < (\log 2)^{n-1} |2 - a_1|$

$0 < \log 2 < 1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\log 2)^{n-1} = 0$

よって　　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 2}$

解説 上に有界な単調増加列は収束するから，その極限値を α とすると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$$

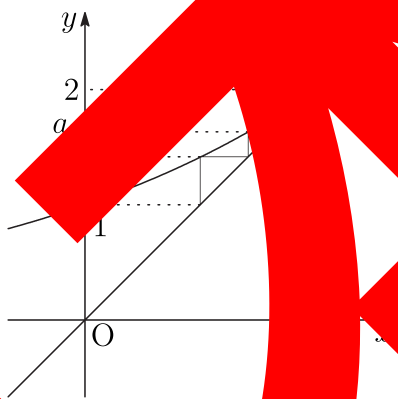
とおくと，$a_{n+1} = 2^{\frac{a_n}{2}}$ より

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{a_n}{2}} \quad ゆえに \quad \alpha = 2^{\frac{\alpha}{2}}$$

これを解いて　$\alpha = 2,\ 4$

また，$a_n < 2$ であるから　$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

幾何学的には，極限値 α は，$y = 2^{\frac{x}{2}}$ と $y = x$ の交点の y 座標である．



4 (1) $0 < a_n < 2 \quad (n = 1, 2, \cdots) \quad \cdots (*)$

[1] $n = 1$ のとき　$a_1 = 1$ であるから　$(*)$ は成立する．

[2] $n = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると，漸化式より

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2} > 0$$

また　$2 - a_{k+1} = 2 - \sqrt{a_k + 2} = \dfrac{2 - a_k}{2 + \sqrt{a_k + 2}} > 0$

よって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する．

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．

(2) (1) の結果から，a_n に対して，$2\cos b_n = a_n$ を満たす b_n $\left(0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}\right)$ が唯一存在する．$a_n = 2\cos b_n$ を $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ に代入すると

$$2\cos b_{n+1} = \sqrt{2\cos b_n + 2} = \sqrt{4\cos^2\frac{b_n}{2}} = 2\cos\frac{b_n}{2}$$

したがって　$\cos b_{n+1} = \cos\dfrac{b_n}{2}$　ゆえに　$b_{n+1} = \dfrac{b_n}{2}$

$a_1 = \sqrt{2}$ より　$\cos b_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$b_1 = \frac{\pi}{4}$

数列 $\{b_n\}$ は，初項が $\frac{\pi}{4}$ で，公比が $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$\boldsymbol{b_n = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)}$$

(3) (2) の結果から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\cos b_n$ [illegible] $s\,0 = \mathbf{2}$

解説 1 漸化式から　$|a_{n+1} - 2| = \frac{|a_n}{2+\sqrt{a_n}}$ [illegible] $2|$

ゆえに　$|a_n - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1$ [illegible] $a_n = 2$

解説 2 $a_n < 2$，$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a}$ [illegible] $n = \frac{(2}{\sqrt{}}$ [illegible] $\frac{(1}{2+a}$ [illegible]

$\{a_n\}$ は上に有界な単調増 [illegible] 列であるから [illegible]，極限 [illegible] すると

[illegible] $= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 2}$　ゆえに　α [illegible] 2

4.28 [illegible] $) =$ [illegible] おくと，$0 < x < \frac{\pi}{2}$ に [illegible]

[illegible] $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x > 0$

[illegible] えに [illegible] は単調 [illegible]，$f(0) =$ [illegible] るから

$0 <$ [illegible] き，$f(x)$ [illegible] よって　$\tan x > x$

[illegible] り，$\tan a$ [illegible] $_2 = \frac{1}{8}$，$\tan a_3 = \frac{1}{18}$ であるから

[illegible] $+ a_2) = \frac{\tan a_1 + \tan a_2}{1 - \tan a_1 \tan a_2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} = \frac{2}{3}$

$\tan(a$ [illegible] $+ a_3) = \frac{\tan(a_1 + a_2) + \tan a_3}{1 - \tan(a_1 + a_2)\tan a_3} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{18}}{1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}} = \frac{3}{4}$

上の結果 [illegible]

$$\tan(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{n}{n+1} \qquad \cdots (*)$$

と推定する．

(i) $n=1$ のとき，$(*)$ は成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき

$$\tan(a_1+a_2+\cdots+a_k)=\frac{k}{k+1}$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
&\tan(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})\\
=&\frac{\tan(a_1+a_2+\cdots+a_k)+\tan a_{k}\text{[illegible]}}{1-\tan(a_1+a_2\text{[illegible]}\cdots+a_k)\tan\text{[illegible]}}\\
=&\frac{\dfrac{k}{k+1}+\dfrac{\text{[illegible]}}{2(k+\text{[illegible]}}}{1-\dfrac{k}{k+1}\cdot\dfrac{1}{2(k+1\text{[illegible]}}}\text{[illegible]}+(k+1)\text{[illegible]}\\
=&\frac{(2k^2+2k+1)\text{[illegible]}}{(2k^2+2k+\text{[illegible]})}
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ [illegible] $(*)$ は成[illegible].

(i)，(ii) より，すべての自[illegible]数 n について[illegible]は成り[illegible]

よ[illegible] **$\text{[illegible]}n(a_1+a_2+\cdots+a_n)=$** [illegible]

(2[illegible]の結果[illegible]

$$\tan(\text{[illegible]}+a\text{[illegible]}+b_n)=\frac{\tan(\text{[illegible]}+\cdots+a_n)+\tan b_n}{1-\tan(a_1+a_2+\cdots+a_n)\tan b_n}$$

$$=\frac{\text{[illegible]}+\dfrac{1}{2n+1}}{1\text{[illegible]}\cdot\dfrac{1}{2n+1}}$$

$$=\frac{\text{[illegible]}2n+1}{\text{[illegible]}+2n+1}=1\quad\cdots①$$

$0 < a_n < \tan a_n$，$0 < b_n < \tan b_n$ であるから，$n > 1$ のとき

$$0 < \sum_{k=1}^{n} a_k + b_n < \sum_{k=1}^{n} \tan a_k + \tan b_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2n+1}$$
$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} + \text{[illegible]}$$
$$= \frac{1}{2} \text{[illegible]} \Bigl(\frac{1}{\text{[illegible]}} \text{[illegible]} \Bigr) + \frac{1}{2n+1}$$
$$= 1 - \frac{1}{2n \text{[illegible]}}$$

$n = 1$ のときも，② が成立する [illegible]

したがって　$0 < a_1 + a_2 + \text{[illegible]} + b_n \text{[illegible]} < \frac{\text{[illegible]}}{2}$

①，② から　　$\boldsymbol{a_1 + a_2 \text{[illegible]} \cdots + a_n + b \text{[illegible]} \frac{\pi}{4}}$

(4)　(3) [illegible]　$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{\pi}{4} - \text{[illegible]}$

[illegible] $b_n <$ [illegible] $\frac{1}{\text{[illegible]}+1}$ であるから　$\lim_{n \to \text{[illegible]}} \text{[illegible]} = 0$

よ[illegible]　$\boldsymbol{\lim_{n \to \text{[illegible]}} \text{[illegible]} + \cdots + a_n) = \frac{\text{[illegible]}}{4}}$

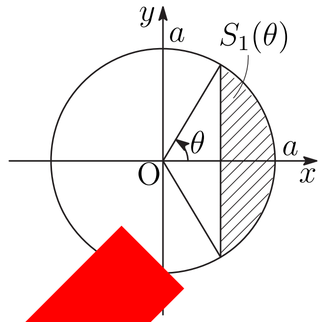
[illegible]9　[illegible] $\sqrt{x^2 + \text{[illegible]}} - \sqrt{x^{\text{[illegible]}}}$ [illegible] $= \lim_{x \to -\infty} \frac{\text{[illegible]} + 1) - (x^2 + 1)}{\sqrt{x \text{[illegible]} + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\text{[illegible]} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$
$$= \text{[illegible]} \frac{x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

4.30　(1)　$x = a\cos$ [illegible] $b\sin t$ より　　$\cos t = \frac{x}{a}$，$\sin t = \frac{y}{b}$

これを $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ に代入して　　$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

(2) $a > 0$，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．$a\cos\theta \leqq x \leqq a$ において，円 $x^2 + y^2 = a^2$，直線 $x = a\cos\theta$ によって囲まれる部分の面積を $S_1(\theta)$ とすると



$$S_1(\theta) = \frac{1}{2}a^2{\cdot}2\theta - \frac{1}{2}a^2\sin 2\theta$$
$$= a^2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$0 \leqq x \leqq a\cos\theta$ において，円 x^2 [illegible] $= a^2$，y [illegible] $x = a\cos\theta$ によって，囲まれる部分の面積を $S_2(\theta$ [illegible]

$$S_2(\theta) = \frac{1}{2}\pi a^2 - S_1(\theta) = \text{[illegible]}$$

C は円 $x^2 + y^2 = a^2$ を x 軸 [illegible] y 軸 [illegible] け拡大 [illegible] のであるから

$$S(\theta) = S_2(\theta) \times \frac{b}{a} = \boldsymbol{ab}\left\{\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} \text{[illegible]}\right) + \frac{\mathbf{1}}{\text{[illegible]}}\right.$$

[illegible] の結果 [illegible] $\dfrac{S(\theta)}{\text{[illegible]} - \theta} = ab\left\{1 + \dfrac{\sin 2\text{[illegible]}}{2(\text{[illegible]})}\right\}$

[illegible] $_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}$ [illegible] $\boldsymbol{ab}$

[illegible] 無限 [illegible]，初 [illegible] 比 $\dfrac{1}{1+e^x}$，0 [illegible] < 1 より，収束して

[illegible] $\dfrac{\mathbf{1} + \boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{e^x}}$

(2) (1) の結果か [illegible] $x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x}$　ゆえに　$\log f(x) = \log(e^x + 1) - x$

$\log f(x) = -$ [illegible] $\log 6$ より　$\log(e^x + 1) - x = -|x| + \log 6$

(i) $x \geqq 0$ [illegible]，$|x| = x$ より

$$\log(e^x + 1) = \log 6 \quad \text{ゆえに} \quad e^x + 1 = 6 \quad \text{すなわち} \quad e^x = 5$$

$x \geqq 0$ に注意して　$x = \log 5$

(ii) $x<0$ のとき，$|x|=-x$ より

$$\log(e^x+1)=2x+\log 6 \quad \text{ゆえに} \quad \log(e^x+1)=\log 6e^{2x}$$

$e^x+1=6e^{2x}$ であるから　$(2e^x-1)(3e^x+1)=0$

$x<0$ に注意して　　$x=\log\dfrac{1}{2}=-\log 2$

(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{x=\log 5,\ -\log 2}$

4.32 (1) $y=-x^2+2x$ と $y=a(x+4)$ か[illegible]を消去する[illegible]

$-x^2+2x=a(x+4)$　すなわ[illegible]$x+4a=0$　$\cdots(*)$

C_1 と ℓ が接するとき，$(*)$ より

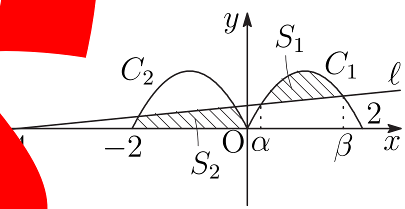
$(a-2)^2-4\cdot1$[illegible]2

上の第1式および第2式[illegible]

[illegible]$=10\pm4\sqrt{6},\quad -2<a<2$　す[illegible]

[illegible]a の値の範囲は　　$\boldsymbol{0\leqq a}$[illegible]**6**

[illegible]程式[illegible]とすると $(\alpha<\beta)$



[illegible]$\beta=$[illegible]$\beta=4a,$

[illegible]$\beta-$[illegible]$\alpha+$[illegible]β

[illegible]$\sqrt{a^2}$[illegible]$+4$

[illegible]がって[illegible]$_1=\int_\alpha$[illegible]$a(x+4)\}\,dx$

$$=-\int_\alpha^\beta\{x\text{[illegible]}(a-2)x+4a\}\,dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}}}$$

(3) $y=-x^2$[illegible]$y=a(x+4)$ から y を消去すると

$-x^2-2x=a(x+4)$　すなわち　$x^2+(a+2)x+4a=0$　$\cdots(**)$

方程式 $(**)$ の解を γ，δ とすると $(\gamma < \delta)$

$$\gamma+\delta=-(a+2),\quad \gamma\delta=4a,$$
$$\delta-\gamma=\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta}=\sqrt{a^2-12a+4}$$

したがって

$$S_2=\int_{-2}^{0}\{-x^2-2x\}\,dx+\int_{\gamma}^{\delta}\{-x^2-2x-\text{[illegible]}\}\,dx$$
$$=-\int_{-2}^{0}x(x+2)\,d\text{[illegible]}\ (x-\gamma)\text{[illegible]}\,dx$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 2^3-\frac{1}{6}(\delta-\gamma)^3=\frac{4}{3}\text{[illegible]}$$

$S_1=S_2$ より　$\frac{1}{6}(a^2-20a+$ [illegible] $+4)^{\frac{3}{2}}$

整理すると　$(a^2-20$ [illegible] $(a^2-$ [illegible] $4)^{\frac{3}{2}}$

ここで，$f(a)=(a^2-20a$ [illegible] $4)^{\frac{3}{2}}+(a^2-$ [illegible] $4)^{\frac{3}{2}}-8$ [illegible]

[illegible] $=8>0$，　$f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{41\sqrt{4}\text{[illegible]}}{1\text{[illegible]}}$ [illegible] $\frac{\text{[illegible]}}{125}$

10 [illegible] $-2\sqrt{6})=\frac{2}{5+2\sqrt{6}}$ [illegible] $5=\frac{1}{5}$

f [illegible] 連続で [illegible] 間値の定理により，$f(a)=0$，すなわち $S_1=S_2$

[illegible] 満たす [illegible] が $0<$ [illegible] 5 の範囲 [illegible] する．

[illegible] $\boldsymbol{=2x}$ [illegible] $\boldsymbol{x+5)}$ [illegible] $\boldsymbol{\mathrm{os}(3x+5)}$

5.2 [illegible] $e^{\cos x}($ [illegible] $=-$ [illegible] $\boldsymbol{x}$

(2) [illegible] $\mathrm{g}\,|\,x\,|)'=$ [illegible] $\boldsymbol{x}$ [illegible]

5.3　(1)　$y=$ [illegible] $\log|x|$

[illegible] $(x)'\log|\,x\,|+x(\log|\,x\,|)'=\boldsymbol{\log|\,x\,|+1}$

(2)　$y=\frac{e^{2x}-\text{[illegible]}}{e^{2x}+\text{[illegible]}}$ [illegible] $-\frac{2}{e^{2x}+1}$ より

$$y'=-2\cdot\frac{-(e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2}=\boldsymbol{\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}}$$

5.4 (1) $y = e^{-x}\cos x$ であるから

$$y' = -e^{-x}\cos x + e^{-x}(-\sin x) = \boldsymbol{-e^{-x}(\sin x + \cos x)}$$

(2) $\boldsymbol{y' = \dfrac{1}{x}\cos(\log|\,x\,|)}$

5.5 (1) $y' = e^{\sin x \cos x}(\sin x \cos x)' = e^{\sin x \cos x}(\cos^2 x - \sin^2 x)$
$= \boldsymbol{e^{\sin x \cos x}\cos 2x}$

別解 $y = e^{\frac{1}{2}\sin 2x}$ より $y' = e^{\frac{1}{2}\sin x}\left(\frac{1}{[illegible]}\right)' = e^{[illegible]}$ [illegible] $2x$

(2) $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+3} - x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{(\sqrt{x^2+3}\,)^2} = \dfrac{3}{\sqrt{(}}$ [illegible]

5.6 (1) $y' = (\sqrt{x}\,)' e^{\sqrt{x}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}}$

(2) $y' = \left(\dfrac{1}{x}\right)'\log|\cos x| + \dfrac{1}{x}$ [illegible] $g\,|\cos x|)'$

[illegible] $\cos x| + \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\dfrac{\log}{}$ [illegible]

5.7 [illegible] $= \dfrac{1-}{1}$ [illegible] -1 より $y' = -\dfrac{2(}{(1}$ [illegible] $= \boldsymbol{-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}}$

(2) $y' =$ [illegible] $n(2x$ [illegible] $+1)\}'$
$= 3\sin^2$ [illegible] $)\cdot 2\,c$ [illegible] $1) =$ [illegible] $\boldsymbol{(2x+1)\cos(2x+1)}$

[illegible] $y =$ [illegible] e^{-x} [illegible] $= e^{-x} - xe^{-x}$ [illegible] $\boldsymbol{x)e^{-x}}$

[illegible] $\log\left(\dfrac{2}{[illegible]\,x}\right) =$ [illegible] $\log(2-\sin x)$ より

[illegible] $\dfrac{\cos x}{[illegible]\sin x} - \dfrac{-[illegible]\,x}{2-\sin x}$

$=\dfrac{[illegible](2-\sin x) + \cos x(2+\sin x)}{(2+\sin x)(2-\sin x)} = \boldsymbol{\dfrac{4\cos x}{4-\sin^2 x}}$

5.9 (1) $y' = \dfrac{(\cos x)[illegible]\sin x) - \cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}$

$= \dfrac{-\sin x(1-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \dfrac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{1-\sin x}}$

(2) $y' = (x+2)'\sqrt{x^2+2x+5} + (x+2)(\sqrt{x^2+2x+5}\,)'$

$$= \sqrt{x^2+2x+5} + (x+2) \times \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$$= \frac{(x^2+2x+5)+(x+2)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \boldsymbol{\frac{2x^2+5x+7}{\sqrt{x^2+2x+5}}}$$

5.10 (1) $t = \cos x$ とおくと，$y = \sin t$ より $\dfrac{dy}{dt} = \cos t$, $\dfrac{dt}{d[illegible]}$ [illegible] $\mathrm{in}\, x$

よって $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \cos t\cdot($[illegible]$\mathrm{n}\, x) = \boldsymbol{-\mathrm{co}}$[illegible]$\boldsymbol{)\cdot\sin x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2e^{2x}(x+1) - e^{2x}\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{\boldsymbol{(2x}[illegible]}{\boldsymbol{(x+}[illegible]}$

5.11 (1) $y' = \dfrac{(x)'\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) - x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$ [illegible]

$$= \frac{1+e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{\boldsymbol{x+}[illegible]\boldsymbol{)e^{\frac{1}{x}}}}{\boldsymbol{x}\left([illegible]\boldsymbol{+e^{\frac{1}{x}}}\right)^{\boldsymbol{2}}}$$

(2) [illegible] $\dfrac{[illegible]+x^2+x}{[illegible]-x} = \log(\sqrt{1+x^2}+x$[illegible]

y' [illegible] $\dfrac{[illegible]^2+x)'}{[illegible]x} = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{1+[illegible]}}[illegible]}{\sqrt{1+x^2}+x} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

[illegible] $(\sin$[illegible]$\cos 2x)$

$= \dfrac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}$[illegible]$) + e^{\frac{3}{2}}$[illegible]$x - 2\sin 2x)$

[illegible] $\dfrac{1}{2}\sin 2x +$ [illegible] $)$,

$y'' = \dfrac{3}{2}e$[illegible] $\sin 2x + \dfrac{7}{2}\cos 2x\Big) + e^{\frac{3}{2}x}(-\cos 2x - 7\sin 2x)$

$= e^{\frac{3}{2}x}$ [illegible] $\sin 2x + \dfrac{17}{4}\cos 2x\Big)$

したがって

$$
\begin{aligned}
4y'' - 12y' + 25y = 4e^{\frac{3}{2}x}&\left(-\frac{31}{4}\sin 2x + \frac{17}{4}\cos 2x\right) \\
&- 12e^{\frac{3}{2}x}\left(-\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{7}{2}\cos 2x\right) \\
&+ 25e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x + [illegible] 2x) \\
= 0
\end{aligned}
$$

補足 (福岡教育大学 2007) 1

5.13 (1) $na_{n+1} - (n+1)a_n = 1$ より $\frac{a_{n+1}}{n+1}$ [illegible]

ゆえに $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n} - $ [illegible]

$b_{n+1} + \frac{1}{n}$ [illegible] $\frac{1}{n}$

$b_1 = \frac{a_1}{1} = 1$ であるから [illegible] $+ \frac{1}{n} = b_1 + $ [illegible]

[illegible] $\frac{a_n}{n} + \frac{1}{n} = 2$ よって $\boldsymbol{a_n} =$ [illegible]

[illegible] x^k [illegible] $\frac{x^n - 1}{x-1}$ の両辺を微[illegible]と

$$
\begin{aligned}
[illegible] \sum [illegible] &= \frac{nx^{n-1}([illegible] 1) - (x^n - 1)}{[illegible] 1)^2} \\
&= \frac{(n-1) [illegible] x^{n-1} + 1}{[illegible] 1)^2}
\end{aligned}
$$

[illegible]に[illegible]て

$$\sum^{n-1} \boldsymbol{kx^k} = \frac{\boldsymbol{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}}{\boldsymbol{(x-1)^2}}$$

(3) $\frac{pc_{n+1}}{n} - \frac{c_n}{n+[illegible]}$ [illegible] $\frac{1}{n+1}$ の両辺に $n(n+1)p^n$ を掛けると

$$p^{n+1}(n+1)c_{n+1} - p^n nc_n = np^n$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\{p^{k+1}(k+1)c_{k+1} - p^k kc_k\} = \sum_{k=1}^{n-1} kp^k$

$c_1=0$ および (2) の結果を上式に適用すると ($p \neq 1$)

$$p^n n c_n = \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p}{(p-1)^2}$$

$p \neq 0$ のとき　$\boldsymbol{c_n = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(p-1)^2 p^{n-1} n}}$

$p=0$ のとき，漸化式より，$c_n=-1$ となり，$c_1=0$ [illegible]るので，このとき，$\{c_n\}$ は存在しない．

5.14 (1) $q=1-p$ とおくと

$$p_2 = pp = \boldsymbol{p^2}$$
$$p_3 = (pq+qp)p = 2p^2q \ [illegible]$$
$$p_4 = (pqq+qpq+q \ [illegible] \ (1-p) \ [illegible]$$

(2) (1) と同様にして

$$p_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_1 pq^{n-2} \times p \ [illegible] \ -1)p^2q^{n-} \ [illegible] \ n-1) \ [illegible] \ {-2}$$

(3) 1 [illegible] $\frac{1-x^N}{1-x}$ の両辺を x で微分 [illegible]

$$\sum_{k=2} [illegible] {}^{k-2} = \frac{-Nx^{N-1}(1 \ [illegible] \ (1-x^N)(-1)}{[illegible])^2}$$

[illegible]に [illegible] $(k-1$ [illegible] $)^2x^{k-2}$ [illegible] ${}^{N-1}\{N(1-x)+x\}$

上 [illegible] $=1$ [illegible] ると

$$[illegible] -1)p^2(1 \ [illegible] \ (1-p)^{N-1}(Np+1-p)$$

(2) [illegible]果が [illegible]

$$[illegible] \ p_k = \boldsymbol{1-(1-p)^{N-1}(Np+1-p)}$$

5.15 (1) $f(x) = \int_0 [illegible] t + \cos t)dt = \Big[e^t \sin t \Big]_0^x = \boldsymbol{e^x \sin x}$

$$g(x) = \int_0^x e^t(\cos t - \sin t)dt = \Big[e^t \cos t \Big]_0^x = \boldsymbol{e^x \cos x - 1}$$

(2) (i) $f(x) = \int_0^x e^t(\sin t + \cos t)dt$ と $g(x) = \int_0^x e^t(\cos t - \sin t)dt$ をそれぞれ x で微分すると

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$$
$$g'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$$

(1) の結果から $e^x \sin x = f(x)$, $e^x \cos x = g(x)$ [illegible] 入すると

$$f'(\text{[illegible]} f(x) + \{g \text{[illegible]}$$
$$g'(\text{[illegible]} (x) \text{[illegible]} (x)$$

これらを $(n-1)$ 回微分すると ([illegible]

$$\boldsymbol{f^{(n)}(x)} \text{[illegible]} \boldsymbol{{}^{-1)}(x)}$$
$$\boldsymbol{g^{(n)}} \text{[illegible]} \boldsymbol{f^{(} \text{[illegible]} {}^{1)}(x)}$$

(ii) (i) の結果から

$$\{f^{(n)}(x)\}^2 + \{g^{(n)}(x)\}^2$$
$$\text{[illegible]}{}^{(n-1)}(x) + g^{(n-1)}(x)\}^2 + \{ \text{[illegible]} g^{(n-1)}(\text{[illegible]}$$
$$\text{[illegible]}{}^{n-1)}(x)\}^2 + \{g^{(n-1)}(x)\} \text{[illegible]}$$

[illegible] って

$$\text{[illegible]} (x) \text{[illegible]} (x)\}^2 \text{[illegible]}{}^{n-1}\left[\{f'(x)\}^2 + \{g'(x)\}^2\right]$$

[illegible]

$$\{f'(\text{[illegible]} \{g \text{[illegible]} (e^x \sin \text{[illegible]} \cos x)^2 + (e^x \cos x - e^x \sin x)$$

[illegible] 2 式より $\{f^{(n)}(x)\}^2 + \{g^{(n)}(x)\}^2 = 2^{n-1} \cdot 2e^{2x} = \boldsymbol{2^n e^{2x}}$

(iii) (ii) の結 [illegible]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2a}}{\{ \text{[illegible]} \}^2 + \{g^{(n)}(a)\}^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2a}}{2^n e^{2a}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \mathbf{1}$$

補足 数学的帰納法により，$n \geqq 1$ のとき，次式が成り立つ．

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n}{4}\pi\right), \quad g^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \cos\left(x + \frac{n}{4}\pi\right)$$

5.16 (1) $x^2+4y^2=5$ を x で微分すると　$2x+8yy'=0$　ゆえに　$y'=-\dfrac{x}{4y}$

$b \neq 0$ のとき，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の傾きは　$-\dfrac{a}{4b}$

したがって，接線の方程式は

$$y-b=-\frac{a}{4b}(x-a) \quad \text{ゆえに} \quad ax+4by=a^2+4b^2$$

$\mathrm{P}(a,\ b)$ は楕円 C 上の点であるから　$a^2+4b^2=$ [illegible]

よって，$\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の[illegible]程式は　a[illegible]$=5 \quad \cdots (*)$

$b=0$，すなわち，点 $(\pm\sqrt{5},\ 0)$[illegible]接線[illegible]式は　$x=\pm\sqrt{5}$

これは，$(*)$ をみたす．

別解 $(x,y)=(x(t),y(t))$ を C 上の正則な[illegible]

$f(t)=\{x(t)\}^2+4\{y(t)\}^2-5$ と[illegible]

$$f'(t) \text{[illegible]} (t) \text{[illegible]} y$$

$f(t)=0$ であるから，f'[illegible]0 より　$x(t$[illegible]$+4y(t$[illegible]

これ[illegible]t_0 を代入すると　$ax'(t_0)+4$[illegible]$=$[illegible]

ベ[illegible]$y'(t_0))$ は曲線の P における[illegible]ベ[illegible]$4b)$

[illegible]の P[illegible]法ベクトルである．よ[illegible]C[illegible]P における[illegible]線の方

[illegible]式は

$$\text{[illegible]}(x-a)\text{[illegible]}=0 \quad \text{整理すると} \quad ax+4by=a^2+4b^2$$

[illegible]$,\ b)$[illegible]C 上の[illegible]るから[illegible]$+4b^2=5$

よっ[illegible]$a,\ b)$[illegible]る接線の方程式[illegible]$ax+4by=5$

T[illegible]$b_1)$，T[illegible]くと，C[illegible]T_2 における接線の方程式は，

[illegible]それ[illegible]

$$a_1x+\text{[illegible]} \quad a_2x+4b_2y=5$$

こ[illegible]は，[illegible]$\dfrac{3}{2}\Big)$ を通るから

$$a_1+6b_1=5, \quad a_2+6b_2=5$$

これから，[illegible]，T_2 を通る直線の方程式は　$\boldsymbol{x+6y=5}$

解説 $x+6y=5$ を[illegible]$\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を**極**とする C の**極線**という．

5.17 (1) 求める点 M の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1-t}{1+t}+1\right) = \frac{1}{1+t},\quad y = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{t}}{1+t} = \frac{\sqrt{t}}{1+t}$$

よって $\quad \mathbf{M}\left(\boldsymbol{\frac{1}{1+t},\ \frac{\sqrt{t}}{1+t}}\right)$

(2) $x = \dfrac{1}{1+t},\ y = \dfrac{\sqrt{t}}{1+t}$ より

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{(1+t)^2},\quad \frac{dy}{dt} = \frac{2\sqrt{\ }}{}\ \text{[illegible]}\ 1-t$$

したがって $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} =$ [illegible] $\dfrac{1}{(1+t)^2}$ [illegible] $2\sqrt{\ }$ [illegible]

よって[illegible]める接線の方程式は

[illegible] $1+t$ [illegible] $\left(x - \dfrac{1}{1+t}\right)$ すなわち [illegible] $\boldsymbol{\frac{}{1-t}x - \frac{\sqrt{\ }}{1-t}}$ $\cdots(*)$

[illegible] (2) [illegible]から

[illegible] $\left.\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{2\sqrt{t}}{1}$[illegible]$- y = 0$

これが[illegible]にかか[illegible]常に成り立[illegible]

[illegible] 0 [illegible] $\left\{\ y =\right.$ [illegible] す[illegible] $x = \dfrac{1}{2},\ y = 0$

[illegible]線の方程式[illegible]を満たす.

よって，定点[illegible] $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2},\ 0\right)}$

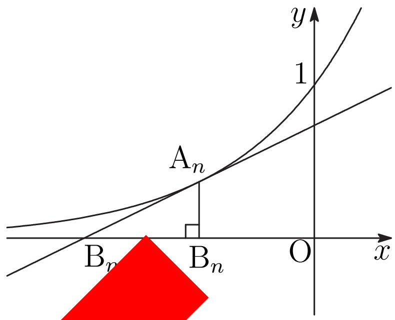
5.18 (1) $y = e^x$ より [illegible] x

C の点 $\mathrm{A}_0($[illegible]における接線の方程式は

$$y - 1 = e^0(x - 0) \quad \text{すなわち} \quad y = x + 1$$

この直線と x 軸との交点の x 座標が b_1 であるから $\quad \boldsymbol{b_1 = -1}$

(2) C の点 $\mathrm{A}_n(b_n,\ e^{b_n})$ ににおける接線の方程式は



$$y - e^{b_n} = e^{b_n}(x - b_n)$$

ゆえに　$y = e^{b_n}(x - b_n + 1)$

この直線と x 軸との交点の x 座標が b_{n+1} であるから

$$b_{n+1} - b_n + 1 = 0$$

ゆえに　$\boldsymbol{b_{n+1} = b_n - 1}$

上式および $b_1 = -1$ から $\{b_n\}$ は [illegible]

$b_n = -1 + (n-1)\cdot(-1) = -$ [illegible]

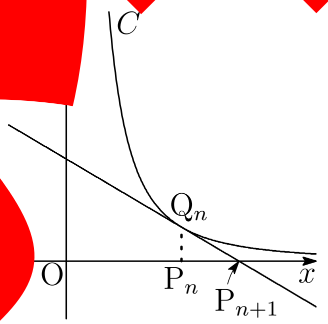
(3) B_0 は原点であるから，(2) の結果は [illegible]

したがって　$S_n = \frac{1}{2}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$ [illegible] e^{-n}　$(n = 0,$ [illegible] $2, \cdots)$

$0 < e^{-1} < 1$ であるから

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-1})^n = \frac{1}{2}\ \text{[illegible]}$$

5.19 (1) [illegible] $(a_n,\ 0)$ [illegible] $\left(a_n,\ \frac{1}{{a_n}^2}\right)$



y [illegible] を微分 [illegible] $-\frac{2}{x^3}$

[illegible] における接線の方程式は [illegible]

$y -$ [illegible] $\frac{2}{}$ [illegible] $(x - a_n)$

[illegible] に　[illegible] $-\frac{2x}{{a_n}^3} +$ [illegible]

この [illegible] の交点の x 座標は $y = 0$ を代入して　$x = \frac{3}{2}a_n$

これが P_{n+1} の [illegible] 標であるから　$a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$

また，$\mathrm{P}_1(a$ [illegible] あるから　$\boldsymbol{a_n = a\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$

(2) $a > 0$ およ [illegible] の結果から

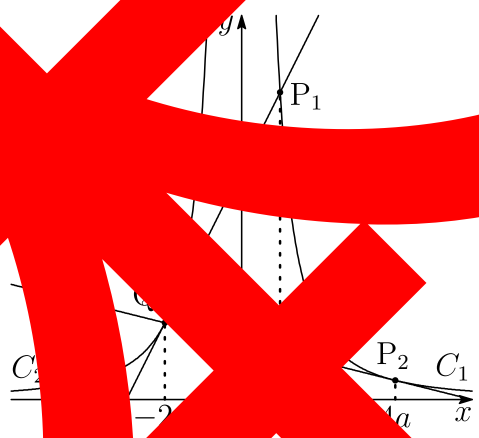
$$S_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \times \frac{1}{{a_n}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a_n - a_n\right) \times \frac{1}{{a_n}^2} = \frac{1}{4a_n} = \frac{1}{4a}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は，初項が $\dfrac{1}{4a}$，公比が $\dfrac{2}{3}$ の無限等比級数である．

公比について $\left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$ であるから，収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1}{4a} \times \frac{1}{1-\dfrac{2}{3}} = \boldsymbol{\frac{3}{4a}}$$

5.20 (1) $y = \dfrac{1}{x^2}$ を微分すると $y' = -$[illegible]



点 Q_1 の座標を $\left(\dfrac{1}{b},\ \dfrac{1}{b^2}\right)$ とすると，[illegible]

点 Q_1 における接線の方程式は

$$y - \frac{1}{b^2} = -\frac{2}{b^3}(x \text{[illegible]}$$

すなわち　$y = -\dfrac{2x}{b^3} +$ [illegible]

この直[illegible]点 $\mathrm{P}_1\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ を通るから [illegible]

[illegible] $+\dfrac{3}{b^2}$　ゆえに　$(b-a)$[illegible]$2a) = 0$

$b \neq$ [illegible]るから[illegible]$2a$　よって，点[illegible]座標は　$\boldsymbol{\left(-2a,\ \frac{1}{4a^2}\right)}$

(2) [illegible]計算[illegible] Q_1[illegible]標 b に対[illegible] P_2 の x 座標は $-2b$ であるから，

[illegible]$_2$ の x [illegible] $4a$ と[illegible]

[illegible]て [illegible]$\dfrac{1}{}$[illegible]$\Big)$

[illegible]に[illegible]$_1 = \left(a, \dfrac{}{a^2}\right)$ [illegible] $\dfrac{1}{4a^2}\Big) = \left(3a, \dfrac{3}{4a^2}\right)$

[illegible] $\left(4a, \dfrac{1}{16a^2}\right) - \left(-2a,\ \dfrac{1}{4a^2}\right) = \left(6a, -\dfrac{3}{16a^2}\right)$

よって，$\triangle \mathrm{P}_1$[illegible]の面積 S_1 は，$a > 0$ に注意して

$$\text{[illegible]} = \frac{1}{2}\left|3a \times \left(-\frac{3}{16a^2}\right) - 6a \times \frac{3}{4a^2}\right| = \boldsymbol{\frac{81}{32a}}$$

(3) P_n の x 座標を a_n とすると $(n = 1, 2, 3, \cdots)$，$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積 S_n は

$$S_n = \frac{81}{32a_n}$$

$\{a_n\}$ は，初項が a，公比 4 の等比数列であるから　$a_n = 4^{n-1}a$

よって　　$S_n = \dfrac{81}{32 \cdot 4^{n-1}a} = \boldsymbol{\dfrac{81}{32a}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は，初項 $\dfrac{1}{32a}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{81}{32a}}{[illegible] - \frac{1}{4}} = \boldsymbol{\frac{27}{8a}}$$

5.21 (1) $f(x) = \log(x^2 - x + 2)$
$(0 \leqq x \leqq 1)$ より

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+2} \quad \cdots ①$$

$f(x)$ の増減表は右のように[illegible]

[illegible]	[illegible]	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
f[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	$\log\frac{7}{4}$	$\nearrow$	$\log 2$

よって　$x = \dfrac{1}{2}$ で**極小値** [illegible] $\boldsymbol{\frac{[illegible]}{4}}$

(2) $g(x)$ [illegible] $^2 - x + 2) - x$ とおくと

$$g'(x[illegible] \frac{[illegible]x-1}{[illegible]+2} - 1 = \frac{-x^2+3x[illegible]}{x^2-x+[illegible]} [illegible] \frac{-[illegible]\frac{3}{2})^2 - \frac{[illegible]}{4}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} < 0$$

ゆえ[illegible](x) は[illegible]少する．

$$g\left(\frac{1}{2}\right) [illegible] \frac{[illegible]}{4} - [illegible]7 - 2\log[illegible] - \frac{1}{2}, \qquad g(1) = \log 2 - 1 < 0$$

[illegible] > 1.9 [illegible]$.7 - 0.5 = 0$

[illegible]って[illegible] $=$ [illegible] $\frac{1}{[illegible]} <$ [illegible]がただ 1 つ存在する．すなわち，

[illegible]式[illegible]$x + 2) =$ [illegible] < 1 の範囲に実数解をただ 1 つもつ．

(3) ① [illegible]し[illegible]

$$f''([illegible] \frac{[illegible]2x-1)'(x^2-x+2) - (2x-1)(x^2-x+2)'}{(x^2-x+2)^2}$$
$$[illegible] \frac{-2x^2+2x+3}{(x^2-x+2)^2} = \frac{2x(1-x)+3}{(x^2-x+2)^2}$$

ゆえに，0 [illegible] $\leqq 1$ において　　$f''(x) > 0$
したがって，$f'(x)$ はこの区間で単調増加である．
よって，最大値は $\boldsymbol{f'(1) = \frac{1}{2}}$，最小値は $\boldsymbol{f'(0) = -\frac{1}{2}}$ である．

(4) 平均値の定理により

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

となる c が $a<c<b$ に存在する．また，(3) の結果から

$$-\frac{1}{2}<f'(c)<\frac{1}{2} \quad ゆえに \quad |f'(c)|<\frac{1}{2}$$

したがって $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| = f'(c) < \dfrac{1}{2}$ 　よって $|$ [illegible] $a)| = \dfrac{1}{2}|b-a|$

5.22 (1) $x \neq 0$ であるから $f(x)=\dfrac{(\log$ [illegible] ると

$$f'(x)=\frac{2\log x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)^2\cdot 1}{x^2} \text{ [illegible]}$$

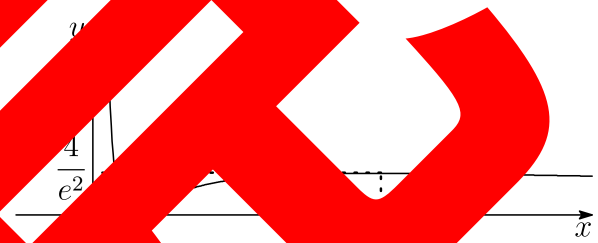
よって，$f(x)$ の増減表は次のよ[illegible]

x	0	$\cdots$	[illegible]	$\cdots$	[illegible]	$\cdots$
$f'(x)$	／	[illegible]	[illegible]	$+$	[illegible]	$-$
$f(x)$	／	↘	極小 0	↗	極[illegible]	↘

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{(\log x)^2}{x}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x}=0$$

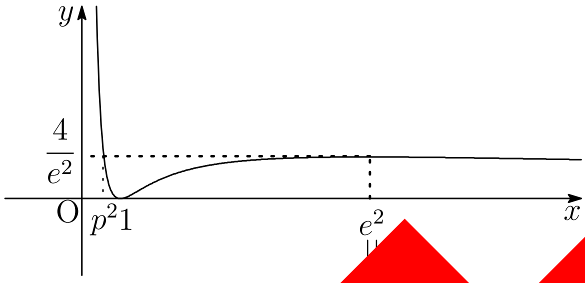
したがって，[illegible]グラフは下の図のようになる．



この[illegible]ラフと[illegible] $= a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する．したがっ[illegible]

$\boldsymbol{a<0}$ **のとき**	**0 個**
$\boldsymbol{a>\frac{4}{e^2},\ a=0}$ **のとき**	**1 個**
$\boldsymbol{a=\frac{4}{e^2}}$ **のとき**	**2 個**
$\boldsymbol{0<a<\frac{4}{e^2}}$ **のとき**	**3 個**

(2) 解が 2 個となるのは $a=\dfrac{4}{e^2}$ のときで，$0<p<q$ であるから p^2，q^2 は下の図ような位置関係になる．



$k=\dfrac{e}{e+1}$ とおくと

$$f(k^2)=\frac{(\log k^2)^2}{k^2}=\left(\frac{2}{\ }\right. \text{[illegible]} \log\frac{\ }{e+1}\Big\{ \text{[illegible]}$$

$$=\frac{4}{e^2}\left\{(e \text{ [illegible]} \frac{\ +1}{e}\right\}^2 \quad \text{[illegible]} ①$$

ここで [illegible] $g(x)=\log x$ を考え，この関数 [illegible] $(e$ [illegible] 可能で，

$$g'(x)=\frac{1}{x}$$

区間 [illegible] て，平均値の定理を [illegible] すると

$$\text{[illegible]} - \log e = \frac{1}{\ } \qquad e<c<e+1$$

を同 [illegible] する．よって

$$\text{[illegible]} < \frac{1}{e}$$

$$\text{[illegible]} (e+1)\log \text{[illegible]} > 1 \qquad \cdots ②$$

$f(p^2)=\dfrac{4}{e^2}$ て [illegible] ら，①，② より　　$f(k^2)>f(p^2)$

グラフから [illegible] $k^2<p^2<1$，$q^2=e^2$

$0<p<q$ [illegible] $\boldsymbol{\dfrac{e}{e+1}<p<1,\ \ q=e}$

5.23 (1) $f(x)=x^3-x^2-x-1$ を微分すると

$$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

よって，$f(x)=0$ の正の解は $x>1$ の範囲に 1 個存在する．

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x_n,\ f(x_n))$ における接線の方程式は

$$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$$

この直線と x 軸の交点が $(x_{n+1},\ 0)$ であるから

$$-f(x_n)=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)$$

よって $\quad x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^3-x_n^2-x_n-1}{3x_n^2-2x_n-1}=\dfrac{2x_n^3-x_n^2+1}{3x_n^2-2x_n-1}$

(3) $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{11}{8}$，$f(2)=1$ より $\left|f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right|>|f(2)|$ であるから

$$\boldsymbol{x_1=2}$$

よって，(2) より

$$x_2=\frac{2x_1^3-x_1^2+1}{3x_1^2-2x_1-1}=\boldsymbol{\frac{13}{7}}$$

$f(x)=x^2-2$ とすると $\quad f'(x)=2x$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x_k,\ f(x_k))$ における接線の方程式は

$$y-f(x_k)=f'(x_k)(x-x_k)$$

この接線と x 軸の共有点の x 座標を x_{k+1} とすると

$$-f(x_k)=f'(x_k)(x_{k+1}-x_k) \quad \text{ゆえに} \quad x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

これに，$f(x_k)=x_k^2-2$，$f'(x_k)=2x_k$ を代入すると

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-2}{2x_k}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{2}{x_k}\right)$$

(2) $x_1 = 2$ および (1) の結果から

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2} = \mathbf{1.500}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} \fallingdotseq \mathbf{1.417}$$

(3) $y_k = \dfrac{x_k - \sqrt{2}}{x_k + \sqrt{2}} \cdots (*)$ および (1) の結果から

$$y_{k+1} = \frac{x_{k+1} - \sqrt{2}}{x_{k+1} + \sqrt{2}} = \text{[illegible]}$$

$$= \frac{x_k{}^2 - 2\sqrt{2}\text{[illegible]}}{x_k{}^2 + \text{[illegible]}} = \text{[illegible]} = y_k{}^2$$

(4) $y_1 = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{\text{[illegible]}\sqrt{2}}$ より，$0 < y_1 < 1$ であるから [illegible] > 0

z [illegible] くと，(3) の結果から

[illegible] $_{k+1} = 2z_k$　ゆえに [illegible] $^{k-1}z_1$

したがって　[illegible] $\log y_1 = \log y_1{}^{2}$ [illegible] すなわち　$\boldsymbol{y_k = y_1{}^{2^{k-1}}}$

[illegible] $y_k =$ [illegible] $=$ [illegible] るから [illegible] より

$$\lim_{k\to\infty} x_k \text{[illegible]}$$

5.25 (1) [illegible] $f_2(x) = x$ [illegible] $-(-2x+2)$ より

$$f(0) \text{[illegible]} < 0, \quad f(2) = \left(2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!}\right) - (-2) = \frac{44}{15} > 0$$

$f(x)$ は区間 [illegible] において連続であるから，中間値の定理により，区間 $[0,\ 2]$ に $f($[illegible] の解が存在する．

(2) $y = f(x)$ 上 [illegible] $(x_n,\ f(x_n))$ における接線の方程式は

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

この直線と x 軸との交点の x 座標が x_{n+1} であるから

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \quad ゆえに \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$f(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ より，$f'(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ であるから

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \dfrac{x_n{}^3}{3!} + \dfrac{x_n{}^5}{5!}}{1 - \dfrac{x^2}{2!} [illegible]} = \frac{\mathbf{240 - 4} [illegible] \mathbf{4x_n{}^5}}{\mathbf{360} [illegible] \mathbf{+ 5x_n{}^4}}$$

(3)　(2) の結果に $x_1 = 1$ を代入すると [illegible]

5.26 n 次関数 $f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots$ [illegible] $\cdots, n-1$ に対して

$$f_n\Big([illegible] = f_n\Big(\frac{1}{k} [illegible] 0$$

が成り立つ [illegible] ロルの定理により

$$f_n'(c_k) = 0, \quad \frac{1}{k+1} < [illegible]$$

[illegible] たす c_k [illegible] のとき，c_k は $n -$ [illegible] 程式

$$f_n'(x) = 0$$

[illegible] あるた [illegible] その解 [illegible] は高々 $n -$ [illegible] である．

[illegible] とが [illegible] -1 個 [illegible]

$$[illegible] \frac{1}{2},\ 1\Big), [illegible] \Big(\frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n}\Big)$$

にそれ [illegible] $(x) = 0$ をみたす重解でない x が存在する．

$f_n(x)$ の最高次の係 [illegible] 注意すると

$$[illegible] = n{\cdot}n!(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_{n-1})$$

$x = c_k$ の前後で [illegible] の符号が変化するので，$f_n(c_k)$ は極値である．

よって，$k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとる．

5.27 (1) $\alpha = \sqrt[3]{a}$ とおくと，$f(x) = x^p - \alpha^3 x^{p-3}$ より

$$g(x) - \alpha = x - \frac{x^p - \alpha^3 x^{p-3}}{px^{p-1} - (p-3)\alpha^3 x^{p-4}} - \alpha$$

$$= x - \alpha - \frac{x(x-\alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)}{px^3 - (p-3)\alpha^3}$$

$$= (x-\alpha) \times \frac{px^3 - (p-3)\alpha^3 - x(x^2 + \alpha x + \alpha^2)}{px^3 - (p-3)\alpha^3}$$

$$= (x-\alpha)^2 \times \frac{(p-1)x^2 + (p-2)\alpha x + (p-3)\alpha^2}{px^3 - (p-3)\alpha^3}$$

よって，次式が成り立ち，$p \geqq 2$, [illegible] 題意をみたす.

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^2 \times \frac{(p - \text{[illegible]}}{\text{[illegible]} - 3)a}$$

(2) (1) の結果に $p = 2$ を代入す[illegible]式が[illegible]題意をみ[illegible]

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \text{[illegible]}) \times \frac{x^2 - \sqrt[3]{a}\text{[illegible]}}{2x^3 + a\text{[illegible]}} \text{[illegible]} - \sqrt[3]{a} \text{[illegible]} \sqrt[3]{a} \text{[illegible]} a$$

(3) [illegible] $\sqrt[3]{a} - g(x) = (\sqrt[3]{a} - x)^3 \times$ [illegible] $+ a$

[illegible]れに [illegible] を代入すると

$$\text{[illegible]}(2) = (\sqrt[3]{9} - 2)^3 \times \frac{\text{[illegible]} + \sqrt[3]{2}}{2{\cdot}2^3 + 9}$$

[illegible] $< \sqrt[3]{9}$ [illegible] より

$$\text{[illegible]} 0 < (\text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]}^2 + \sqrt[3]{2}}{\text{[illegible]} + 9} < \text{[illegible]} 2)^3 \times \frac{2^2 + 2.1}{2{\cdot}2^3 + 9} < \frac{1}{1000}$$

[illegible] $< \sqrt[3]{9} - g($[illegible] ゆえに $g(2) < \sqrt[3]{9} < g(2) + 0.001$

この[illegible]き，[illegible] $x^2 - \dfrac{9}{x}$，$f'(x) = 2x + \dfrac{9}{x^2}$ より

$$\text{[illegible]} = 2^2 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}, \quad f'(2) = 2{\cdot}2 + \frac{9}{2^2} = \frac{25}{4}$$

ゆえに [illegible] $2 - \dfrac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right) \div \dfrac{25}{4} = 2.08$

したがって　　$2.08 < \sqrt[3]{9} < 2.081$

よって，$\sqrt[3]{9}$ の小数第 4 位を切り捨てると　**2.080**

解説 (九大 [理]2002) $\boxed{8}$

5.28 (1) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を微分すると　$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよいので　$\boldsymbol{b^2 - 3ac > 0}$

(2) $f''(x) = 6ax + 2b$

$$x < -\frac{b}{3a} \text{ のとき}\quad f''(x) < 0$$

$$x > -\frac{b}{3a} \text{ のとき}\quad f''(x) > 0$$

ゆえに，$f(x)$ は変曲点をもつ.

$$f\left(-\frac{b}{3a}\right) = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + \text{[illegible]} \left(-\frac{b}{\text{[illegible]}}\right) + d$$

$$= \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{\text{[illegible]}} \text{[illegible]}$$

よって　**変曲点** $\left(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{3}\text{[illegible]}}, \text{[illegible]} - \frac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{3a}} \text{[illegible]}\right)$

5.29 (1) $f(x) = \text{[illegible]}\sqrt{x} - \log x$ を微分すると

$$\text{[illegible]} \frac{1}{\text{[illegible]}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

	[illegible]	(1)	[illegible]	[illegible]	…
f'[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]
f[illegible]	[illegible]		↘	最小[illegible]	[illegible]

したが[illegible] $f(4) = 2(1 - \log 2)$ [illegible] よって　$f(x) > 0$

(2) [illegible] $g(x)$ [illegible] $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{\log\text{[illegible]}}(\sqrt{x} - \log x) = \frac{\sqrt{x}}{\log x} f(x)$

$x > 1$ [illegible] $\frac{\sqrt{x}}{\log\text{[illegible]}}$ [illegible] $f(x) > 0$ であるから

[illegible] 0 [illegible]　$g(x) > \sqrt{x}$

[illegible] $x = \infty$ [illegible] $\boldsymbol{g(x) = \infty}$

(3) g[illegible] であるから，この両辺を微分すると

$$\text{[illegible]}'(x) = (\log x)^{-1} + x\cdot(-1)(\log x)^{-2}\frac{1}{x}$$

$$= (\log x)^{-1} - (\log x)^{-2}$$

$$g''(x) = -(\log x)^{-2}\cdot\frac{1}{x} + 2(\log x)^{-3}\cdot\frac{1}{x}$$

すなわち　$\boldsymbol{g'(x) = \frac{\log x - 1}{(\log x)^2}}$,　$\boldsymbol{g''(x) = \frac{2 - \log x}{x(\log x)^3}}$

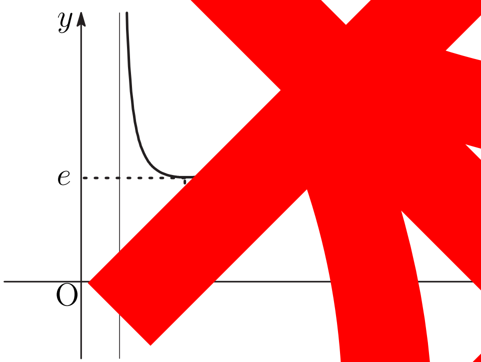
したがって，$g(x)$ の増減および凹凸は次のようになる.

x	(1)	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$g(x)$		$\searrow$	e	$\nearrow$	$\frac{e^2}{2}$	$\nearrow$

$x=e$ のとき極小値 $\boldsymbol{e}$，変曲点 $\left(\boldsymbol{e^2},\ \boldsymbol{\dfrac{e^2}{2}}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to1+0} g(x)=\infty$ であるから，直線 $x=1$ は漸近線

よって，$y=g(x)$ のグラフは次のようになる



5.30 (1) $f(x)=\log x-\sqrt[n]{x}=\log x-x^{\frac{1}{n}}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)x^{\frac{1}{n}-2}$$

よって $\boldsymbol{xf'(x)=1-\dfrac{\sqrt[n]{x}}{n}}$，

$\boldsymbol{x^2f''(x)=-1+\dfrac{n-1}{n^2}\sqrt[n]{x}}$

(2) $x>0$ において $f'(x)>0$ となる x の範囲は，(1) の結果から

$$1-\frac{\sqrt[n]{x}}{n}>0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{0<x<n^n}$$

$x>0$ において $f''(x)<0$ となる x の範囲は，(1) の結果から

$$-1+\frac{n-1}{n^2}\sqrt[n]{x}<0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{0<x<\left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n}$$

(3) $n=\dfrac{n^2}{n}<\dfrac{n^2}{n-1}$ より　$n^n<\left(\dfrac{n^2}{n-1}\right)^n$

したがって，増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	n^n	$\cdots$	$\left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$
y		$\nearrow$	極大	$\searrow$	$f\left(\left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n\right)$	$\searrow$

よって　　$\boldsymbol{x = n^n}$ のとき極大値 $\boldsymbol{n(\log n - 1)}$

変曲点 $\left(\left(\dfrac{\boldsymbol{n^2}}{\boldsymbol{n-1}}\right)^{\boldsymbol{n}}\right.$ [illegible] $\log \dfrac{\boldsymbol{n^2}}{\boldsymbol{n}}$ [illegible] $\left.\boldsymbol{-1}\right)$

(4) (3) の結果から，$a_n = n^n$，$b_n = \left(\dfrac{}{n}\right.$ [illegible] から

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{}\right. \text{[illegible]}$$

$$= \lim \text{[illegible]} \left.\frac{}{-1}\right)^n = \text{[illegible]} \left(1 \text{[illegible]}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \text{[illegible]} + \frac{1}{} \text{[illegible]}$$

$$= e \cdot 1 = \boldsymbol{e}$$

5.31 [illegible] $< x <$ [illegible] $x < 0$ より　$0 < -$ [illegible] $\cdots$ ①

$g(x)$ [illegible] $+ \log$ [illegible]

[illegible] $) = -\dfrac{1}{x^2}$ [illegible] $\dfrac{x-1}{x^2}$

$0 <$ [illegible] において [illegible] $) < 0$ である [illegible] $g(x)$ は単調減少である．

$g(1)$ [illegible] の区間 [illegible] て，$g(x) > 0$ であるから

[illegible] $+ \log x > 0$ [illegible]　$-\log x < \dfrac{1}{x}$　$\cdots$ ②

①，[illegible] より [illegible] $< -\log x < \dfrac{1}{x}$

(2) 微分係数の定 [illegible] より

$$f'(\text{[illegible]} \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 \log|h|}{h} = \lim_{h\to 0} |h|^2 \log|h|$$

(1) の結果から，$0 < |h| < 1$ のとき

$$0 < -\log|h| < \frac{1}{|h|} \quad \text{ゆえに} \quad -|h| < |h|^2 \log|h| < 0$$

$\lim_{h\to 0}(-|h|) = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{h\to 0}|h|^2\log|h| = 0 \quad \text{すなわち} \quad f'(0) = 0$$

(3) $f'(x) = (x^3)'\log|\,x\,| + x^3(\log|\,x\,|)'$

$$= 3x^2\log|\,x\,| + x^3\cdot\frac{1}{x} = \boldsymbol{x^2(3\log|\,x\,|+1)}$$

(4) (2)，(3) の結果から，$f'(x) = 0$ となる x の値は

$$x = [illegible]$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のよ[illegible]

x	$\cdots$	$-e^{-\frac{1}{3}}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$f'(x)$	$+$	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	[illegible]	$\searrow$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\nearrow$

よって　$x = -e^{-\frac{1}{3}}$ のと[illegible] **極大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{3e}}$

[illegible] $e^{-\frac{1}{3}}$ のとき，**極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{3e}}$

5.32 [illegible]明する[illegible]) とする．

[1] [illegible]のとき[illegible]1 であるから

$$[illegible] \int_0^x dt \quad [illegible]えに \quad e^x - 1 > x$$

[illegible]って [illegible] $x + 1 > x$

[illegible]って [illegible] の[illegible] $(*)$ が[illegible]る．

[illegible] $n =$ [illegible]き，$(*)$ が[illegible]定すると

$$[illegible]\, e^t\,dt > \int_0^x \frac{t^{[illegible]}}{k!}\,dt \quad \text{ゆえに} \quad e^x - 1 > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

したがっ[illegible] $e^x > \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + 1 > \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

よって[illegible] $= k+1$ のときも $(*)$ が成立する．

[1]，[2] より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ が成立する．

(2) (1) の結果から，$t>0$ のとき　$e^t > \dfrac{t^n}{n!}$　これに $t=\dfrac{1}{|x|}$ を代入すると

$$e^{\frac{1}{|x|}} > \frac{1}{n!|x|^n} \qquad \text{よって} \qquad e^{-\frac{1}{|x|}} < n!|x|^n$$

(3) (2) の結果から，$x \neq 0$ のとき，$0 < e^{-\frac{1}{|x|}} < n!|x|^n$ であるから

$$\left| \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{|x|}} \right| < n!|x|^{n-3} \quad \text{ゆえに} \quad \left| \frac{f(x)-f(0)}{x} [illegible] \right| [illegible] |x|^{n-3}$$

上式において，$n \geqq 4$ とすると [illegible] $|x|^{n-3}$ [illegible] あるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - [illegible]}{[illegible]}$$

(4) (3) の結果から，$f'(0)=0$．$x \geqq$ [illegible] 増減を [illegible]

$x>0$ のとき，$f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{[illegible]}$

$$f'(x) = -\frac{[illegible]}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}e^{[illegible]} = \frac{1-2[illegible]}{x^4}[illegible]$$

こ [illegible]) の増減表は，右のように [illegible]

$f($ [illegible] 関数であるから

極 [illegible] **0 のとき)**

[illegible] **大値** $\dfrac{4}{[illegible]}$ [illegible] $\dfrac{1}{[illegible]}$ **のとき**$\Big)$

[illegible]	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
[illegible]	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

[illegible]3 [illegible] (x) は [illegible]，x [illegible] 分可能で [illegible] ら，$f(x)$ は $x=-1$，$x=1$ で連続 [illegible]．した [illegible]

$$[illegible] \lim_{x\to -1+0} [illegible] f(- [illegible] \lim_{x\to 1-0} f(x) = f(1)$$

$$[illegible] -a+b-[illegible] \quad a+b+c+d=0 \quad \cdots(*)$$

また [illegible] $+bx^2+cx+d)' = 3ax^2+2bx+c$,

$$[illegible] \frac{1}{x}\Big)' = \frac{1}{x^2}, \quad \left(-\frac{1}{x}+1\right)' = \frac{1}{x^2}$$

$f(x)$ が $x=$ [illegible] よび $x=1$ で微分可能であるから

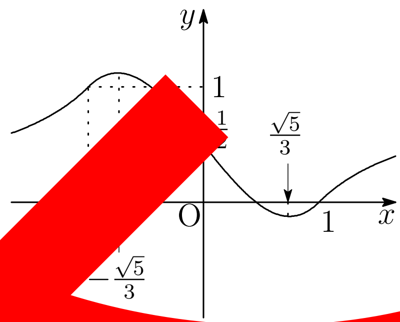
$$\lim_{x\to -1+0}(3ax^2+2bx+c) = \lim_{x\to -1-0} \frac{1}{x^2},$$
$$\lim_{x\to 1-0}(3ax^2+2bx+c) = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x^2}$$

すなわち $\qquad 3a-2b+c=1,\quad 3a+2b+c=1 \quad \cdots(**)$

$(*)$，$(**)$ を解いて $\quad \boldsymbol{a=\frac{3}{4},\ b=0,\ c=-\frac{5}{4},\ d=\frac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{9}{4}x^2-\dfrac{5}{4} & (|\,x\,|\leqq 1)\\[2mm] \dfrac{1}{x^2} & (|\,x\,|\geqq 1)\end{cases}$$



したがって，増減表およびグラ[illegible]形は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt5}{3}$	$\cdots$	[illegible]
$f'(x)$	$+$		$+$	0	[illegible]	[illegible]
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\frac{9+5\sqrt5}{18}$	[illegible]	$\nearrow$

よって，極大値 $f\left(-\frac{\sqrt5}{3}\right)$ [illegible] $\boldsymbol{+5\sqrt5}$ / $\boldsymbol{18}$，[illegible]値 f [illegible] $\boldsymbol{5\sqrt5}$ / $\boldsymbol{18}$

(3) y [illegible] び直線 $y=px+\frac{1}{2}$ $(p\geqq 0)$ [illegible] 関し

[illegible]称で[illegible] 0 における $y=f(x)$ と[illegible]$px+\frac{1}{2}$ の共有点は

[illegible] $px+\frac{1}{2}$，$\quad y=-\frac{[illegible]}{x}+1$

[illegible]解であ[illegible]を消去[illegible]

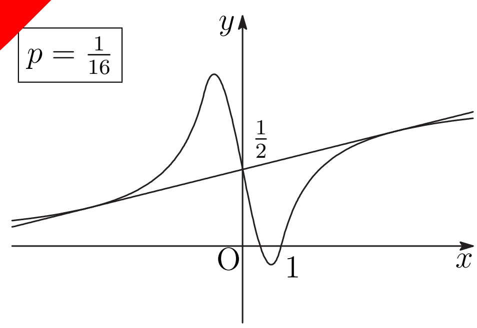
px [illegible] $+1$ 整理す[illegible] $2px^2-x+2=0$

[illegible]に，[illegible]が接す[illegible]

[illegible] $2p\cdot 2=0$

すなわち [illegible]6

よって，グラ[illegible]概形に注意して



$\boldsymbol{p}$ [illegible] **のとき　3個**

$\boldsymbol{0<p<}$ [illegible] $\boldsymbol{16}$ **のとき　5個**

$\boldsymbol{p=\frac{1}{16}}$ **のとき　3個**

$\boldsymbol{\frac{1}{16}<p}$ **のとき　1個**

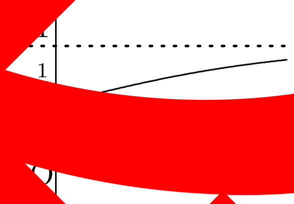
5.34 (1) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}=1-\dfrac{1}{e^x+1}$ より $f'(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{(e^x+1)^2}$ であるから

$$f''(x)=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}+\frac{2e^x}{(e^x+1)^3}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

よって，増減やグラフの凹凸は左下の表のようにな[illegible]

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	変曲点 $\frac{1}{2}$	↗



また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$，li[illegible] $=1$ であ[illegible]ら，[illegible] $y=1$

以上から，この関数のグ[illegible]の概形は，右[illegible]図のよ[illegible]

(2) y [illegible]おいて $(0<y<1)$，x につい[illegible]

[illegible] $=\dfrac{y}{1-y}$ ゆえに [illegible] $\log\dfrac{y}{1-y}$

[illegible] **f** [illegible] $\boldsymbol{(0<x<1)}$

$0<$ [illegible] $\dfrac{1}{n}$ [illegible] であるから，[illegible] $=-\log\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$ により

[illegible] $\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$ [illegible] $2-1)=-\log(n+1)$

[illegible] $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=-\log(n+1-1)=-\log n$

$n\left\{f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+\ }\right.\right.$ [illegible] $\left.\left.f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}=-n\{\log(n+1)-\log n\}=-\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

よって $\lim$ [illegible] $\left\{f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

$$=-\log e=\mathbf{-1}$$

5.35 (1) $$f(x) = x\{x^2 - (2m+1)x + m^2\}$$

2 次方程式 $x^2 - (2m+1)x + m^2 = 0 \cdots$ ① は，$m^2 \neq 0$ であるから，① の解は $x \neq 0$．① の判別式を D とすると，$m > 0$ より

$$D = \{-(2m+1)\}^2 - 4{\cdot}1m^2 = 4m+1 > 0$$

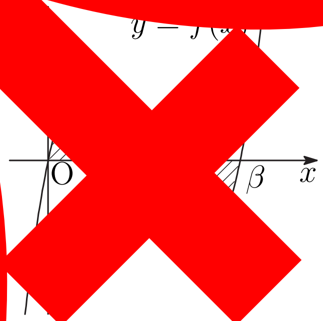
よって，$f(x) = 0$ は，0 以外に相異なる 2 つの実数解を[illegible]つ．

(2) α，β は ① の解であるから，解と係数の関係によ[illegible]

$$\boldsymbol{\alpha + \beta = 2} \text{[illegible]}$$

$m > 0$ より，$\alpha + \beta > 0$，$\alpha\beta > 0$ であ[illegible]ともに正である．

(3) 3 次関数のグラフは変曲点に関し[illegible]から，3 次関数のグラフと変曲[illegible]よって囲まれた 2 つの部分[illegible]等しい[illegible]のことから，右の図の 2 [illegible]線部分の面[illegible]等しい[illegible]き，点 $(\alpha,\ 0)$ は変曲点であるか[illegible]



$$\text{[illegible]}) = 0, \quad \beta = 2\alpha \quad \cdots(*)$$

[illegible]立[illegible]

[illegible]$(x) =$ [illegible]$^2 + m^2x$ より　$f''($[illegible]$x - 2(2m+1)$

[illegible]り　[illegible]　$\beta = \dfrac{2(2m+1)}{3}$　$\cdots(**)$

$(**)$ を[illegible]m^2 に[illegible]ると　$\dfrac{2(2\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}^2 = m^2$

[illegible]より[illegible]$\dfrac{\text{[illegible]}}{3}$[illegible]$m$[illegible]　$\boldsymbol{m = 4 + 3\sqrt{2}}$

[illegible]入して　[illegible]$\boldsymbol{+ 2\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{\beta = 6 + 4\sqrt{2}}$

解説 3 次[illegible]数 C : [illegible]$x)$ と直線によって囲まれた 2 つの部分の面積が等しいとき，その直[illegible]$'$ の変曲点を通る．なぜなら，変曲点を通らない直線 l と C によって[illegible]れた 2 つの部分の面積が等しいと仮定すると，変曲点を通り l に平行[illegible]線 l' によってもその 2 つの部分の面積が等しくなり，矛盾を生じる[illegible]

5.36 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおくと

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b, \qquad f'''(x) = 6a$$

$f''(p)=0$，すなわち $p=-\dfrac{b}{3a}$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+a(x-p)^3 \\ &= f(p)+f'(p)(x-p)+a(x-p)^3 \end{aligned}$$

このとき
$$\begin{aligned} f(p+k) &= f(p)+f'(p)k+ak^3 \\ f(p-k) &= f(p)-f'(p)k-ak^3 \end{aligned}$$

任意の実数 k について 2 点 $(p+k,\ f(p$ [illegible] $(p-k,\ f$ [illegible] の中点が $(p,\ f(p))$ であるから，3 次関数 $y=f(x)$ は，ク [illegible] 点 [illegible] に関して対称である．

補足 (分大 [医]2011) [7]

5.37 (1) 求める点の座標を $(x,\ y)$ とする [illegible]

よって，求める点の座標は [illegible] $-X$ [illegible]

(2) $f(x)=x^3+ax^2+bx+$ [illegible] と，任意 [illegible] 数 p に [illegible]

$$f($$ [illegible] $$= f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{1}{2}f''(p)$$ [illegible] $$)^2+($$ [illegible] $\cdots$①

[illegible] の点 $(p,\ f(p))$ に関して y [illegible] なグラ [illegible]

$2f($ [illegible] $p-x)$ ゆえに $y=$ [illegible] $-f(2p-x)$ $\cdots$②

② [illegible] は [illegible]

$y=2$ [illegible] $\{f(p$ [illegible] $)(2p-$ [illegible] $p)$

$+\dfrac{1}{2}f''(p$ [illegible] $x-p)^2+(2p-x-p)^3\}$

$=f($ [illegible] $-\dfrac{1}{2}f''$ [illegible] $p)^2+(x-p)^3$ $\cdots$③

[illegible] わち $p=$ [illegible] と，①，③は一致する．

し [illegible] て [illegible] 変曲点に関して対称である．

(3) 直線 $mx+n$ [illegible] の方向ベクトル $\vec{d}$，法線ベクトル $\vec{n}$ を

$$\vec{d}=\begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix},\quad \vec{n}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

とする．[illegible] t を用いて

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = s\vec{d}+t\vec{n} = s\begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ns+mt \\ -ms+nt \end{pmatrix}$$

とすると　　$s=\dfrac{nX-mY}{m^2+n^2}$，$t=\dfrac{mX+nY}{m^2+n^2}$

したがって，直線 $mx+ny=0$ に関して点 $(X,\ Y)$ と対称な点は

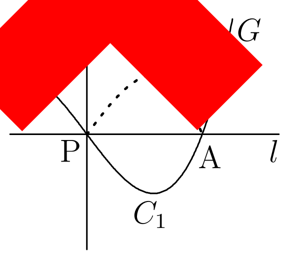
$$s\vec{d}-t\vec{n}=\frac{nX-mY}{m^2+n^2}\begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix}-\frac{mX+nY}{m^2+n^2}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{m^2+n^2}\begin{pmatrix} -(m^2-n^2)X-2mn[illegible] \\ -2mnX+(m^2-[illegible] \end{pmatrix}$$

よって　$\left(\boldsymbol{\dfrac{-(m^2-n^2)X-[illegible]}{m^2+n^2}}, \boldsymbol{\dfrac{-2[illegible](m^2-n^2)Y}{[illegible]n^2+n^2}}\right)$

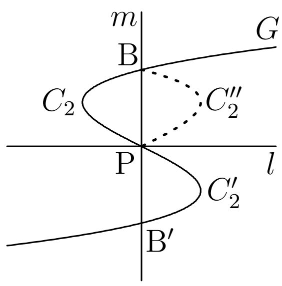
(4) G がある直線 l に関して対称であると[illegible]が l 上にないと仮定すると，P と l に関して対称な変[illegible]点が存在することなる．このこ[illegible]のグラフであることに反する．したがって，P は l [illegible]る．

P を通り，l に垂直な直線[illegible]する．[illegible]に関[illegible]から，G と l，m の位置関係について次のように[illegible]

i) [illegible]以外に l と共有点 A をもつと仮[illegible] A までの G の曲線部分を C[illegible]と，[illegible]に関して対称な曲線部分[illegible]あり，[illegible] C_1' によるループ (loo[illegible]これは[illegible]関数であることに[illegible]．

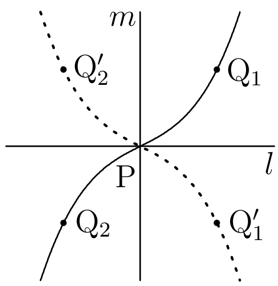


[illegible] G が [illegible]に m [illegible]点 B をも[illegible]仮定すると[illegible]から P [illegible] G の曲線[illegible] C_2 と[illegible]と，C[illegible]関して対称な曲[illegible]分 C_2' [illegible]あり，[illegible]に関して[illegible] C_2'' がある[illegible]よび C_2[illegible]でき，こ[illegible]次関数で[illegible]反する．



したがって，[illegible]により，G と l，m との共有点は P に限る．

G 上に P と異[illegible]点 Q_1 をとり，Q_1 と P に関して対称な点を[illegible]し，2 点 Q_1，Q_2 と l に関して対称な点[illegible]ぞれ Q_1'，Q_2' とする．このとき，これ[illegible]点を結ぶ曲線部分は，P において自己交差 (Self-Intersection) し，G が 3 次関数であることに反する．



よって，題意は成立する．

補足 3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を $x=p$ でテイラー展開を行うと

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+a(x-p)^3$$

であり，$f''(p)=0$，すなわち $p=-\dfrac{b}{3a}$ とすると，曲線 $y=f(x)$ は

$$y=f(p)+f'(p)(x-p)+a(x-p)^3$$

となり，変曲点 $(p,\ f(p))$ に関し[illegible]称である．[illegible] (4) の結果から，
3次関数のグラフは，どんな直[illegible]ても[illegible]はない．

5.38 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{-\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\ [illegible]}{[illegible]\cos^2 x}$$

$$=\frac{-\sin x(1+[illegible]+\sin x\cos[illegible]}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{[illegible]}{(1+[illegible]}$$

$f(x)$ の[illegible]のようになる．

x	[illegible]	0	$\cdots$	π	$\cdots$	[illegible]
$f'(x)$	[illegible]	0	$-$	0	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0	[illegible]	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	[illegible]

よ[illegible] $x=$[illegible]き最大[illegible]$\mathbf{2}$，$x=$[illegible]き最小値 $-\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$

5.[illegible] s[illegible]$+1+$[illegible]とおくと[illegible]ンの公式により

$$[illegible]\mathrm{BC}=\sqrt{s([illegible])(s-2x)}$$

$$=\sqrt{(1+x)x\cdot x(1-x)}=x\sqrt{(1+x)(1-x)}$$

$\triangle\mathrm{ABC}=rs$ [illegible]諸式を代入すると

$$x\sqrt{[illegible])(1-x)}=r(1+x)\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{r=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

(2) (1) の結果から，$f(x)=r^2$ とおくと $(0<x<1)$

$$f(x)=\frac{x^2(1-x)}{1+x}=-x^2+2x-2+\frac{2}{x+1}$$

ゆえに　$f'(x) = -2x + 2 - \dfrac{2}{(x+1)^2} = -\dfrac{2x(x^2+x-1)}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

したがって，$0 < x < 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	[illegible]
$f(x)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	[illegible]

$f(x)$ が最大となるとき，r は最[illegible]る．

よって，求める x の値は　$\boldsymbol{x = -}$[illegible]

5.40　(1)　$y = \sqrt{x^2-1}$ を微分すると　$y' =$ [illegible]

点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の方[illegible]

$$y - b = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}(x \text{[illegible]}　ゆえに　y \text{[illegible]} \frac{a}{\text{[illegible]}^2-1} \text{[illegible]} + b$$

この直[illegible] y 軸との交点 Q の y 座標は，x [illegible]を代[illegible]

$$y = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}} \text{[illegible]}$$

[illegible]$(a,\ b)$[illegible]$^2-1$ 上の点である[illegible]

[illegible]1　ゆえに　$a^2 = b^2+1$

[illegible]たがっ[illegible]の y 座[illegible]　$y = -\dfrac{b^2 \text{[illegible]} 1}{\text{[illegible]}} + b = -\dfrac{1}{b}$

よ[illegible]点 Q の[illegible]$\boldsymbol{\left(0, -\dfrac{1}{b}\right)}$

[illegible]$\sqrt{x^2}$[illegible]，双曲[illegible]上の点 P における接線の方程式は

[illegible]1　この直線[illegible]軸の交点 Q の座標は　$\left(0, -\dfrac{1}{b}\right)$

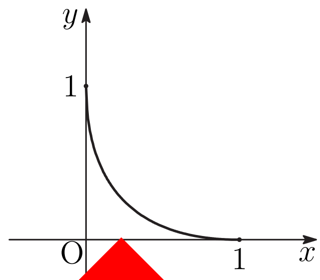
(2)　$\mathrm{P}(\sqrt{b^2+1},\ b$[illegible]$0, -\dfrac{1}{b}\Big)$ より

$$\text{[illegible]}Q^2 = b^2 + 1 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = 2b^2 + \frac{1}{b^2} + 3$$

相加平均・相乗平均の関係により　$2b^2 + \dfrac{1}{b^2} \geqq 2\sqrt{2b^2 \cdot \dfrac{1}{b^2}} = 2\sqrt{2}$

したがって　$\mathrm{PQ}^2 \geqq 3 + 2\sqrt{2}$　よって，求める最小値は　$\boldsymbol{3 + 2\sqrt{2}}$

5.41 (1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ より　$y=x-2\sqrt{x}+1$



ゆえに　$y'=1-\frac{1}{\sqrt{x}},\quad y''=\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$0<x<1$ において,

$$y'<0,\quad y''>0$$

よって, C は下に凸のグラフで, 右のようになる.

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ を x で微分すると [illegible]

$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}y'=$ [illegible] $=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は [illegible]

$y-b=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(x-$ [illegible] に [illegible] $\sqrt{a}+\sqrt{}$ [illegible]

$(a,\ b)$ は C 上の点である [illegible] 接線 l の方 [illegible] は

$\frac{x}{\sqrt{a}}+\frac{y}{1-\sqrt{a}}$ [illegible]

[illegible] $\boldsymbol{\sqrt{a}}$, y 切片 $\boldsymbol{1-\sqrt{a}}$

[illegible] 立体の [illegible] と　$V=\frac{1}{3}\pi(1$ [illegible] $\sqrt{a}$

こ [illegible] $t=$ [illegible] $<t<1)$

V [illegible] $(1-t)^2t$ [illegible] $^3-2t^2+t)$

ゆ [illegible] $\frac{dV}{}$ [illegible] $t+1)=$ [illegible] $)(3t-1)$

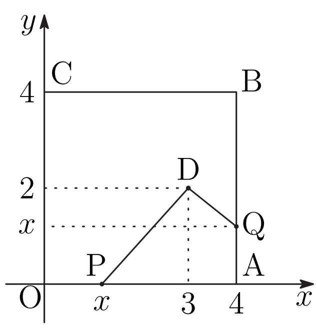
[illegible] が [illegible] の増減 [illegible] る.

[illegible]	(0)	$\cdots$	[illegible]	$\cdots$	(1)
[illegible]		$+$	0	$-$	
[illegible]		↗	極大	↘	

よって　$t=$ [illegible] なわち　$a=\frac{1}{9}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{4}{81}\pi}$ をとる.

5.42 (1) $f(x)=\frac{\mathrm{O}}{4}$ [illegible] $\frac{\mathrm{D}}{1}$

$=\boldsymbol{\frac{x}{4}+\sqrt{(x-3)^2+4}}$



(2) (1) の結果を微分すると

$$f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2+4}} \qquad \cdots ①$$

$f'(x)=0$ となるのは $\quad \dfrac{3-x}{\sqrt{(x-3)^2+4}}=\dfrac{1}{4} \quad \cdots ②$

② の両辺を平方して整理すると

$16(3-x)^2=(x-3)^2+4$ ゆえに 1[illegible] $=4$

② より，$3-x>0$ であるから[illegible]

$3-x=\dfrac{2}{\sqrt{15}}$ よっ[illegible] **2**

(3) ① を微分すると

$$f''(x)=\frac{\sqrt{(x[illegible]}\ [illegible]4-(x[illegible]\sqrt{(x[illegible]}}{(x-3[illegible]}$$

$$=\frac{4}{\{(x-3)^2+4\}^{\frac{3}{2}}}>0$$

[illegible]で求[illegible]すると $\alpha=3-$[illegible] $\cdots ③$

[illegible]	[illegible]	$\cdots$	α	$\cdots$	4
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	[illegible]	
[illegible](x)	[illegible]	$+$	$+$	[illegible]	
$f(x)$	[illegible]	$\searrow$	極小	[illegible]	[illegible]$+\sqrt{5}$

[illegible]って [illegible]

[illegible]り [illegible]$\alpha-3)^2+$[illegible] $\cdots ④$

③[illegible] $=f(\alpha)=\dfrac{[illegible]}{4}+\sqrt{(\alpha-3)^2+4}$

$=\dfrac{\alpha}{4}+4(3-\alpha)=12-\dfrac{15}{4}\alpha$

$=12-\dfrac{15}{4}\left(3-\dfrac{2}{\sqrt{15}}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}}$

(4) (1) の図から

$$g(x)=\frac{\mathrm{OA}+\mathrm{AQ}}{4}+\frac{\mathrm{QD}}{1}=\frac{4+x}{4}+\sqrt{(x-2)^2+1}$$

このとき，$g'(x)$，$g''(x)$ は，(2)，(3) と同様に

$$g'(x)=\frac{1}{4}+\frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1}},\quad g''(x)=\frac{1}{\{(x-2)^2+1\}^{\frac{3}{2}}}$$

$g'(\beta)=0$ をみたす β $(0<\beta<4)$ は $\dfrac{2-\beta}{\sqrt{(\beta-2)^2+1}}=\dfrac{1}{4}$ $\cdots$④

④ の両辺を平方して整理すると

$$16(2-\beta)^2=(\beta-2)^2+1 \quad 15(2-\beta \text{[illegible]}$$

④ より，$2-\beta>0$ であるから

$$2-\beta=\frac{1}{\sqrt{15}} \quad \text{よ [illegible]} \quad \cdots ⑤$$

x	0	$\cdots$	β [illegible]	[illegible]
$g'(x)$		$-$	[illegible]	[illegible]
$g''(x)$		$+$	[illegible]	[illegible]
$g(x)$	$1+\sqrt{5}$	[illegible]	小	[illegible]

したがって　$T_2=g($[illegible]

④ より [illegible] $\sqrt{(\beta-2)^2+1}=4(2-\beta)$ [illegible]

⑤ [illegible] $T_2=g(\beta)=\dfrac{4+\beta}{4}+\sqrt{(}$[illegible]

$=\dfrac{4+\beta}{4}+4(2$ [illegible] $=9-\dfrac{15}{4}\beta$

$=9-\dfrac{15}{4}\left(2\ \text{[illegible]}\ \sqrt{15}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}}$

[illegible]えに [illegible] $-T_2$ [illegible] $\dfrac{\sqrt{15}}{2}\Big)$ [illegible] $\dfrac{\sqrt{15}}{4}\Big)=\dfrac{\sqrt{15}-3}{4}>0$

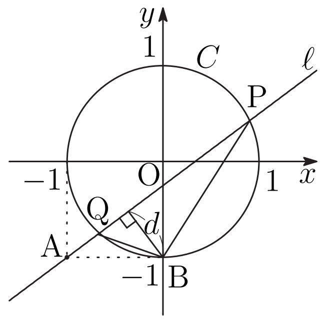
よ [illegible] $\boldsymbol{T_1}$ [illegible]

5.43 [illegible] 点 A [illegible] 1) を [illegible] き [illegible] 線であるから

[illegible] $1=k(x+$ [illegible] わち　$\boldsymbol{y=kx+k-1}$

(2) (1) [illegible] 果か [illegible] Q は連立方程式

$$\begin{cases} \text{[illegible]} = 1-k & \cdots ① \\ \text{[illegible]}^2 = 1 & \end{cases}$$



の解であ [illegible] 2 式を等式

$$(kx-y)^2+(x+ky)^2=(k^2+1)(x^2+y^2)$$

に代入すると

$$(1-k)^2+(x+ky)^2=k^2+1 \quad \text{ゆえに} \quad (x+ky)^2=2k$$

ℓ と C が異なる 2 点で交わるとき，右上の図より $k>0$ であるから

$$x+ky=\pm\sqrt{2k} \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$x=\dfrac{k(1-k)\pm\sqrt{2k}}{k^2+1}$，$y=\dfrac{k-1\pm k\sqrt{2k}}{k^2+[illegible]}$　(複号同順)

P，Q の位置関係に注意して

$$\mathbf{P}\left(\frac{\boldsymbol{k(1-k)+}[illegible]}{\boldsymbol{k^2+1}},\ [illegible]\boldsymbol{-1+}[illegible]\right),$$

$$\mathbf{Q}\left(\frac{\boldsymbol{k(1-k)-\sqrt{2k}}}{\boldsymbol{k^2+1}},\ [illegible]\right)$$

(3)　(2) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{2}{[illegible]}(\,[illegible],\ k)$

した[illegible]て　$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\dfrac{2\sqrt{[illegible]k}}{k^2+1}\sqrt{1+k^2}=[illegible]$

[illegible]線 $\ell : kx-y+k-1=0$ [illegible] >0 に[illegible]して

$$[illegible]=\frac{|k\cdot 0-1+k-1|}{\sqrt{k^2+1}}[illegible]\frac{k}{[illegible]^2+1}$$

[illegible]の面[illegible]と[illegible]

$$[illegible]=\frac{1}{2}|[illegible]=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{[illegible]}}{\sqrt{k^2[illegible]}}[illegible]\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{2}k^{\frac{3}{2}}}}{\boldsymbol{k^2+1}}$$

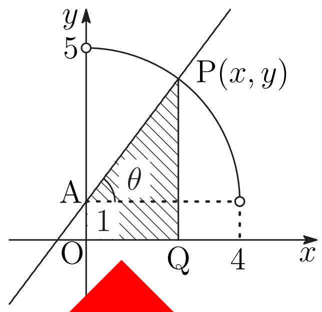
([illegible]) [illegible]の結[illegible]　$\dfrac{dS}{dk}=[illegible]$

し[illegible]て[illegible]における S の増減表は，次のようになる．

[illegible])	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
[illegible]	$+$	0	$-$
[illegible]	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，[illegible] k の値は　$\boldsymbol{k=\sqrt{3}}$

5.44　(1)　$\mathbf{P}(\boldsymbol{4\cos\theta,\ 4\sin\theta+1})$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$



(2) $S = \frac{1}{2}(\mathrm{OA} + \mathrm{PQ}) \times \mathrm{OQ}$

$= \frac{1}{2}\{1 + (4\sin\theta + 1)\} \times 4\cos\theta$

$= \boldsymbol{4\cos\theta(2\sin\theta + 1)}$

(3) $\frac{dS}{d\theta} = -4\sin\theta(2\sin\theta + 1) + 4\cos\theta \cdot 2\cos\theta$

$= -8\sin^2\theta - 4\sin\theta + 8(1 - \sin^2\theta)$

$= -4(4\sin^2\theta + \sin\theta - 2)$

$\frac{d^2S}{d\theta^2} = -4(4\sin 2\theta + \cos\theta)$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において，$\frac{d^2S}{d\theta^2} < 0$ であ[illegible]

$$\frac{dS}{d\theta} = 0 \quad \text{すな[illegible]} \ \boldsymbol{\sqrt{33}}$$

をみたす θ のとき S は最[illegible]る．

(4) 直線 A[illegible]と x 軸との交点を[illegible]とすると　([illegible] $\frac{1}{\tan\theta}$ [illegible]

△R[illegible]軸のまわりに 1 回転させた立[illegible]積[illegible]

$$\frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \times \frac{1}{\tan\theta} = \text{[illegible]}$$

△RA[illegible]△RP[illegible]比は $1 : (4\sin\theta$ [illegible]あるから

$$= \text{[illegible]}(4\sin\theta + 1)^3 - 1^3\}$$

$$\text{[illegible]}\boldsymbol{\cos\theta(16\sin\text{[illegible]}12\sin\theta + 3)}$$

[illegible]結果か[illegible]

$\text{[illegible]}\theta(16\sin^2\text{[illegible]} + 3) + \cos\theta(32\sin\theta\cos\theta + 12\cos\theta)\}$

$\frac{\text{[illegible]}}{3}\{\text{[illegible]}16\sin^2\theta + 12\sin\theta + 3) + (1 - \sin^2\theta)(32\sin\theta + 12)\}$

$= -\frac{4\pi}{3}(4\text{[illegible]} - 3)(12\sin^2\theta + 15\sin\theta + 4)$

ここで，si[illegible]4 $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$0 < \theta < \alpha \text{ のとき } \frac{dV}{d\theta} > 0, \qquad \alpha < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \frac{dV}{d\theta} < 0$$

よって　V は $\sin\theta = \frac{3}{4}$ で最大となる．

5.45 (1) $\mathrm{Q}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{P}_1(p,\ p)$，$\mathrm{Q}_1(p,\ 0)$ より　$\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1 = 1-p$，$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 = p$ であるから

$$S_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1 \times \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}(1-p)p}$$

(2) 2 点 $\mathrm{Q}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{P}_1(p,\ p)$ を通る直線の傾きは　$\dfrac{p}{p-1}$

点 $\mathrm{Q}_{n-1}(q,\ 0)$ を通り，これに平行な直線は　$y = \dfrac{p}{p\ [illegible]}\ [illegible]\ q)$

この直線と直線 $y = x$ との交点 $([illegible]\ pq)$ が P_n で [illegible]，

Q_n の x 座標は　　$\boldsymbol{pq}$

(3) (2) の結果から，$\mathrm{Q}_{n-1}(p^{n-1},\ 0)$，$\mathrm{Q}_n($ [illegible] の座標から，$\mathrm{P}_n(p^n,\ p^n)$

$\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n = p^{n-1} - p^n$，$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n = p^n$ で [illegible]

$$S_n = \frac{1}{2}\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n \times \mathrm{P}_n\mathrm{Q}\ [illegible]\ \boldsymbol{1-p)p^{2}}\ [illegible]$$

(4) (3) の結果から

$$[illegible] = \frac{1}{2}\{(2n-1)p^{2n-2} - 2np^{2n-1}\}\ [illegible]\ 2n\ [illegible]$$

[illegible] に，[illegible] $\dfrac{\ [illegible]\ n-1}{\ [illegible]\ }$ のとき $\dfrac{dS_n}{dp} > 0$，[illegible] $\dfrac{\ [illegible]\ 1}{\ [illegible]\ }$ のとき $\dfrac{dS_n}{dp} < 0$

[illegible] $\boldsymbol{p =}$ [illegible] $\boldsymbol{n}$ [illegible] き，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4n}\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1}}$ をとる．

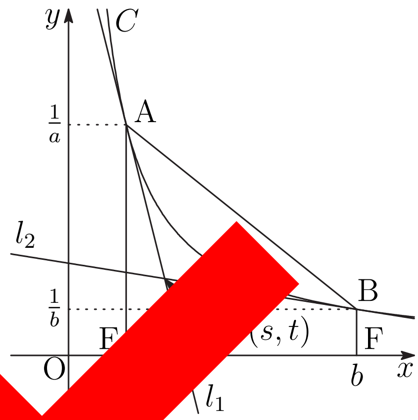
(4) で [illegible] S_n [illegible] $= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2n-\ [illegible]}{2n}\right)^{[illegible]\,1}$ であるから

$$[illegible]\ \lim_{n\to\infty} nS_n\ [illegible]\ \left(\frac{\ [illegible]\ 1}{2n}\right)^{2n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4\left(\dfrac{2n}{2n-1}\right)^{2n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}} = \boldsymbol{\frac{1}{4e}}$$

5.46 (1) $y = \frac{1}{x}$ を微分すると $y' = -\frac{1}{x^2}$



$\mathrm{A}\left(a,\ \frac{1}{a}\right)$ における接線 l_1 の方程式は

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a)$$

ゆえに $\quad y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$

これが，$\mathrm{P}(s,\ t)$ を通るから

$$t = -\frac{1}{a^2}s + \frac{2}{a}$$

上式を a について，整理すると [illegible]

$\mathrm{B}\left(b,\ \frac{1}{b}\right)$ についても同様にして [illegible]

上の 2 式から，a，b は λ に関[illegible]

$$[illegible]\lambda + s = 0 \quad [illegible]*)$$

の解[illegible]から $(a<b)$，$t>0$，$st<1$ に[illegible]て

$$[illegible] = \boldsymbol{\frac{1-\sqrt{1-st}}{t}}, \quad \boldsymbol{b} = [illegible]\boldsymbol{st} / \boldsymbol{t}$$

方程[illegible]の解[illegible]関係および (1) の[illegible]から

$$[illegible] = \frac{2}{[illegible]}, \quad [illegible]\frac{s}{t}, \quad [illegible]\frac{2\sqrt{1-st}}{t} \quad \cdots(**)$$

台形[illegible]の面[illegible]式により

$$[illegible]\frac{1}{2}(\mathrm{AF} + [illegible]a + \frac{1}{b}\right)(b-a)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{ab}(b-a)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{t}\cdot\frac{t}{s}\cdot\frac{2\sqrt{1-st}}{t}$$
$$= \frac{2\sqrt{1-st}}{st} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{1-u}}{u}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \left(a - s,\ \dfrac{1}{a} - t\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \left(b - s,\ \dfrac{1}{b} - t\right)$ であるから $(a < b)$,
$(**)$ および $u = st < 1$ により

$$\triangle\mathrm{PAB} = \frac{1}{2}\left|(a-s)\left(\frac{1}{b} - t\right) - (b-s)\left(\frac{1}{a} - t\right)\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|s\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + t(b-a) - \left(\frac{b}{a} \text{[illegible]}\right)\right|$$
$$= \frac{1}{2}(b-a)\left|\frac{s}{\text{[illegible]}} + t - \frac{a+b}{ab}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{1-\text{[illegible]}}}{t}\text{[illegible]}$$
$$= 2\sqrt{1-st}\,\left|1 \text{[illegible]}\right|$$
$$= 2\sqrt{1\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\frac{1}{u}\text{[illegible]}\boldsymbol{u}$$

(4) (3) の結[illegible]から $\quad S(u) = \dfrac{\text{[illegible]}(1-u)^{\frac{3}{2}}}{u}$

[illegible]と $\quad S'(u) = -\dfrac{(u+2)\sqrt{1\text{[illegible]}}}{u^2}$

[illegible]がっ[illegible]< 1 において $\quad S'(u)$ [illegible]

よって[illegible]$u)$ は[illegible]$< u < 1$ で減少す[illegible]

(5) [illegible]，P([illegible] $\dfrac{s}{3} + t = 1 \quad (0 < t < 1)$

[illegible]わち[illegible]$= 3 -$[illegible]$t < 1)$

ゆえ[illegible]$= st$[illegible]$t)t = -3\left(t - \text{[illegible]}\right) + \dfrac{3}{4}$

[illegible]がって[illegible]，s[illegible]$\dfrac{1}{\text{[illegible]}}$[illegible]最大値 $\dfrac{3}{4}$ をとる．

[illegible]ら，$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{3}{2}},\ \boldsymbol{\frac{1}{2}}\right)$[illegible] △PAB は最小となり，最小値は

$$S\left(\frac{3}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

補足 $s > 0$, $t >$[illegible]るから相加平均・相乗平均の関係により

$$\text{[illegible]} = \frac{s}{3} + t \geqq 2\sqrt{\frac{s}{3}\cdot t} = 2\sqrt{\frac{u}{3}} \quad \text{よって} \quad u \leqq \frac{3}{4}$$

等号が成立するのは $\quad \dfrac{s}{3} = t \quad$ すなわち $\quad s = \dfrac{3}{2},\ t = \dfrac{1}{2}$

5.47 (1) (i) $f(x)=x^2+\log x-a\ (x>0)$ とおくと $f'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$

ゆえに，$f(x)$ は単調増加．

また $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$， $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

よって，$f(x)=0$ を満たす x がただ 1 つ存在する．

(ii) (i) の結果から，$f(x)=0$ を満たすただ 1 つの x を[illegible]すると

$f(b)$ [illegible] 0 $\cdots$①

$g(x)=\log x$，$d(x)=\mathrm{AX}^2=$ [illegible] とおくと

$\dfrac{1}{2}d'(x)=x+\{g($ [illegible]

$=x$ [illegible]

AX の長さが最短に[illegible] $d(x)$ は[illegible]なる[illegible]

$d'(x)=0$ すなわ[illegible]$x)=$ [illegible]

[illegible]式を満たす点は $\mathrm{B}(b,\ \log b$ [illegible]

[illegible](ii) [illegible] $d'(b)=0$ であるから[illegible]より

$b+\{g(b)-a\}g'(b)=0$

$y=$ [illegible] B に[illegible]ベク[illegible] $\vec{v}=(1,\ g'(b))$ とおくと

[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{v}=b+\{$[illegible]$a\}g'(b)$

したが[illegible] A[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\vec{v}$

[illegible]分 AB は，[illegible]曲線の接線 l と直交する．

(2) ① [illegible]$g\,b-a=0$ $\cdots$③

$\mathrm{AB}^2=6$ であ[illegible] $b^2+(\log b-a)^2=6$ $\cdots$④

③，④ から [illegible]$b^4=6$ ゆえに $(b^2+3)(b^2-2)=0$

すなわち [illegible]2 これを ③ に代入して $\boldsymbol{a=2+\dfrac{1}{2}\log 2}$

5.48 (1) $x=(v_0\cos\alpha)t$，$y=(v_0\sin\alpha)t-\dfrac{1}{2}gt^2$ から t を消去すると

$$
\begin{aligned}
y &= (\tan\alpha)x - \frac{gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}\\
&= (\tan\alpha)x\left(1-\frac{gx}{2{v_0}^2\sin\alpha\cos\alpha}\right)\\
&= (\tan\alpha)x\left(1-\frac{gx}{{v_0}^2\sin 2\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

$x=l$ のとき $y=0$ であるから

$$1-\frac{gl}{{v_0}^2\sin 2\alpha}=0 \quad \text{よ} \ldots \ {}^{2}\boldsymbol{\sin 2\alpha}$$

(2) (1) の結果から

$$y=(\tan \ldots \frac{x}{l}\Big) = \ldots \frac{\alpha)}{} x \ldots$$

よって … $S=\dfrac{\tan\alpha}{6l}(l-0)^3=\dfrac{\tan\alpha}{6}l \ldots$

… 果を代入すると

$$\ldots = \ldots \left(\frac{{v_0}^2\sin 2\alpha}{g}\right)^2 = \frac{\tan \ldots {}^{4}\cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{6 \ldots g^2}$$

$$\ldots \frac{}{\boldsymbol{3g^2}}\ \boldsymbol{\sin} \ldots \boldsymbol{\alpha}$$

… $f(\alpha)$ … $\alpha\cos$ … $\alpha<90^\circ)$ とお …

$$\ldots 3\sin \ldots$$

$$= \sin^2\alpha(3 \ldots \alpha) = \sin^2\alpha(4\cos^2\alpha-1)$$

した … て，… の増減表は次のようになる．

α	(0°)	$\cdots$	60°	$\cdots$	(90°)
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow$	

よって，S の最大値は $\quad \dfrac{2{v_0}^4}{3g^2}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{16}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}{v_0}^4}{8g^2}}$

5.49 (1) $E : \dfrac{x^2}{8} + y^2 = 1$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は $\qquad \dfrac{ax}{8} + by = 1$

この接線の x 切片，y 切片はそれぞれ，$\dfrac{8}{a}$，$\dfrac{1}{b}$ であるから

$$f(a) = \frac{8}{a} + \frac{1}{b} \quad \cdots ①$$

点 $(a,\ b)$ は E 上の点であるから，$a > 0$，$b > 0$ に注意 [illegible]

$$\frac{a^2}{8} + b^2 = 1 \quad \cdots ② \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{\sqrt{8 - a^2}}{2\sqrt{[illegible]}} \quad [illegible]\ a < 2\sqrt{2})$$

これを ① に代入して $\qquad \boldsymbol{f(a) =}$ [illegible]

(2) ① は，a の関数であるから，その [illegible]

$$f' [illegible] \frac{[illegible]}{a^2} [illegible] \quad ③$$

$$[illegible]) = \frac{16}{a^3} + \frac{2[illegible]}{[illegible]} [illegible] \frac{b''}{b^2} [illegible]$$

② [illegible] すると $\quad \dfrac{a}{4} + 2bb' = 0 \quad \cdots$ [illegible] $=$ [illegible] $\cdots ⑤'$

[illegible] ③ [illegible] ると

$$[illegible] (a) [illegible] + \frac{a}{8b^3} = \frac{(a - 4b) [illegible] ab + 16b^2)}{[illegible]} \quad \cdots ③'$$

[illegible] a に [illegible] 微分 [illegible] $\quad \dfrac{1}{4} +$ [illegible] $^2 + 2bb'' = 0$

⑤′ [illegible] に代 [illegible] ついて解く [illegible] $= -\dfrac{1}{4b} - \dfrac{a^2}{64b^3} \quad \cdots ⑥$

⑥ を [illegible] 入し [illegible]

$$f''([illegible] \frac{[illegible]}{a^3} + \frac{1}{4b^3} + \frac{3a^2}{64a^5} \quad \cdots ④'$$

$a > 0$，$b > 0$ [illegible] から，常に $\quad f''(a) > 0$

ゆえに，$f'(a$ [illegible] となるとき，$f(a)$ は極小かつ最小である．

③′ より，f [illegible] 0 となるとき $\qquad a = 4b \quad \cdots ⑦$

②，⑦ を $a > 0$ に注意して解いて $\qquad \boldsymbol{a = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$

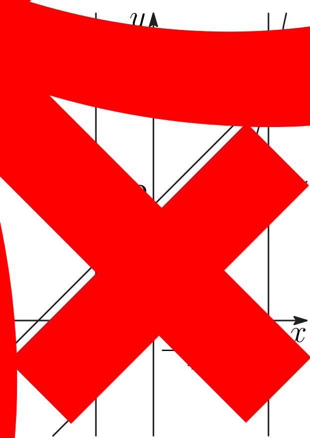
5.50 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+k$，$x=-1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積を $S(k)$ とする．放物線 $y=x^2$ と，直線 $x=-1$，$x=2$ は，それぞれ $(-1,\ 1)$，$(2,\ 4)$ で交わり，直線 $y=x+k$ は，$k=2$ のとき，これらの 2 点を通る．また，放物線 $y=x^2\cdots$① と直線 $y=x+k\cdots$② の方程式から y を消去して

$$x^2=x+k \quad ゆえに \quad x^2-x-k=0 \quad \cdots(*)$$

放物線 ① と直線 ② が接するとき

$D=(-1)^2-4\cdot1(-k)$ [illegible] すなわ[illegible] $\frac{1}{4}$

右の図から



$$S(2)=\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}dx$$

$=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x$ [illegible] $\frac{27}{6}=$ [illegible]

$S\left(-\frac{1}{4}\right)$ [illegible] $3\left\{2-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}-S(2)=\frac{9}{4}$

$k>2$ [illegible] $)=S(2)+3(k-2)$

[illegible] $\frac{}{4}$ のと [illegible] $\left(-\frac{1}{4}\right)+3\left(-\frac{1}{4}-\right.$ [illegible]

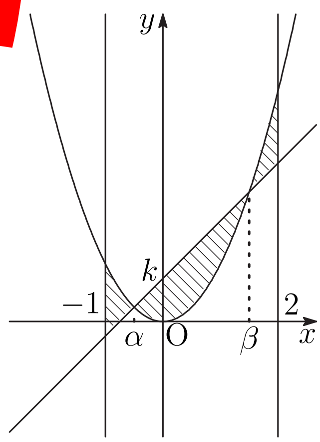
[illegible]たが [illegible] $S(k)$ [illegible] $-\frac{1}{4}\leqq k\leqq 2$ にお

い [illegible] ればよ [illegible] のと [illegible] 物線 ① [illegible] 線 ②

[illegible] 点の [illegible] を α，[illegible] $\leqq\alpha\leqq\beta\leqq$ [illegible] す

[illegible] と，方 [illegible] (∗) の解 [illegible] の関係により

[illegible] $\alpha+\beta$ [illegible] $\alpha\beta=$ [illegible]



右の [illegible]

$S(k)=$ [illegible] $^2-(x+k)|dx$

ここで，関数 x^2 [illegible] x の原始関数の 1 つを $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-kx$ とおくと

$$\begin{aligned}S(k)&=\Big[F(x)\Big]_{-1}^{\alpha}-\Big[F(x)\Big]_{\alpha}^{\beta}+\Big[F(x)\Big]_{\beta}^{2}\\&=-2\{F(\beta)-F(\alpha)\}+F(2)-F(-1)\end{aligned}$$

$$F(2) - F(-1) = \left(\frac{2}{3} - 2k\right) - \left(-\frac{5}{6} + k\right) = \frac{3}{2} - 3k$$

$(**)$ より　　$x^2 - x - k = (x - \alpha)(x - \beta)$

$$\beta - \alpha = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{1+4k}$$

また　　$F(\beta) - F(\alpha) = \Big[\ F(x)\ \Big]_\alpha^\beta = \displaystyle\int_\alpha^\beta (x^2 - x - k)dx$

$= \displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)($ [illegible] $)dx$

$= -\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 =$ [illegible]

ゆえに　　$S(k) = \dfrac{1}{3}(1+4k)^{\frac{3}{2}} + \dfrac{3}{2} -$ [illegible]

$S'(k) = 2\sqrt{1+4k} -$ [illegible]

したがって，$S(k)$ の増減表は[illegible]ようにな[illegible]

[illegible]	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{16}$	$\cdots$	2
[illegible]	[illegible]	$-$	0	$+$	
$S(k)$	[illegible]	[illegible]	$\frac{27}{16}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$

[illegible]て [illegible]$\dfrac{\mathbf{[illegible]}}{\mathbf{16}}$ [illegible]小値 $\dfrac{\mathbf{27}}{\mathbf{16}}$

[illegible] (1) [illegible]形の成[illegible]によ[illegible]

[illegible] $> c,\quad b + c$ [illegible] $c + a > b$

[illegible] $c = 1$ [illegible] $a - b$ を[illegible]式に代入すると

[illegible] a [illegible] $-a-b,$ [illegible] $b) > a,\quad (1-a-b) + a > b$

し[illegible]て　　$a + b > \dfrac{[illegible]}{2},\quad a < \dfrac{1}{2},\quad b < \dfrac{1}{2}$

$9ab = 1$ より，[illegible]$\dfrac{1}{9a}$ であるから

$$a + \text{[illegible]} \frac{1}{2} \quad \cdots①,\quad a < \frac{1}{2} \quad \cdots②,\quad \frac{1}{9a} < \frac{1}{2} \quad \cdots③$$

ここで，$a > 0$ であるから，相加・相乗平均の関係により

$$a + \frac{1}{9a} \geqq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{9a}} = \frac{2}{3}$$

ゆえに，$a>0$ について，① は成立する．

③ を解くと　$a>\frac{2}{9}$　よって，これと ② から　$\boldsymbol{\frac{2}{9}<a<\frac{1}{2}}$

(2) 余弦定理により　$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$c=1-a-b$，$ab=\frac{1}{9}$，$b=\frac{1}{9a}$ であるから

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-(1-[illegible]-b)^2}{2a[illegible]}=\frac{2a+[illegible]-1}{[illegible]}$$

$$=\frac{2a+2b-2\cdot\frac{1}{9}[illegible]}{2\cdot\frac{1}{9}}[illegible]\frac{11}{2}$$

$$=9\left(a+\frac{1}{9a}\right)-\frac{11}{[illegible]}$$

ここで，$f(a)=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{[illegible]}$ [illegible] $a<$ [illegible]と[illegible]

$f'(a)$[illegible]$9-\frac{1}{a^2}$

[illegible]$+1)(3a-1)$ / a^2

a	[illegible]	$\cdots$	[illegible]	[illegible]
$f'(a)$	[illegible]	$-$	[illegible]	[illegible]
$f(a)$	[illegible]	[illegible]	$\nearrow$	[illegible]

[illegible]って[illegible] **<1**

(1) P[illegible]$\sin\theta$[illegible]$\sqrt{(\cos\theta+l)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{2l\cos\theta+l^2+1}$

[illegible]て[illegible]$)=$ **[illegible]$+2\sqrt{2}$[illegible]$+l^2+1$**

[illegible]$g($[illegible]$2l\cos$[illegible]とおくと　[illegible]$-\frac{l\sin\theta}{g(\theta)}$

$=2\sin$[illegible]$g(\theta)$[illegible]る

$$[illegible]=2\cos\theta-\frac{[illegible]}{g(\theta)}=\frac{2}{g(\theta)}\{g(\theta)\cos\theta-l\sin\theta\}$$

$$[illegible]\frac{2\{(2l\cos\theta+l^2+1)\cos^2\theta-l^2\sin^2\theta\}}{g(\theta)\{g(\theta)\cos\theta+l\sin\theta\}}$$

$$[illegible]\frac{2\{l^2(2\cos^2\theta-1)+2l\cos^3\theta+\cos^2\theta\}}{g(\theta)\{g(\theta)\cos\theta+l\sin\theta\}}$$

$$=\frac{2(l+\cos\theta)\{l(2\cos^2\theta-1)+\cos\theta\}}{g(\theta)\{g(\theta)\cos\theta+l\sin\theta\}}$$

$0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より　$\frac{l+\cos\theta}{g(\theta)\{g(\theta)\cos\theta+l\sin\theta\}}>0$

ここで，$h(\theta)=l(2\cos^2\theta-1)+\cos\theta$ とおくと

$$h'(\theta)=-\sin\theta(4l\cos\theta+1)<0$$

ゆえに，$h(\theta)$ は単調減少で，$h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-l$ であるから

$$h(\alpha)=0 \quad \left(\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

をみたす α が唯一存在する．

$$l(2\cos^2\alpha-1)+\cos\alpha=0 \quad す\ [illegible] = \frac{-1+\sqrt{8l^2+1}}{4l}$$

$f'(\theta)$ と $h(\theta)$ の符号は一致するか [illegible]

θ	$($[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$f'(\theta)$	[illegible]	$+$	[illegible]	$-$
$f($[illegible]	[illegible]	$\nearrow$	極 [illegible]	$\searrow$

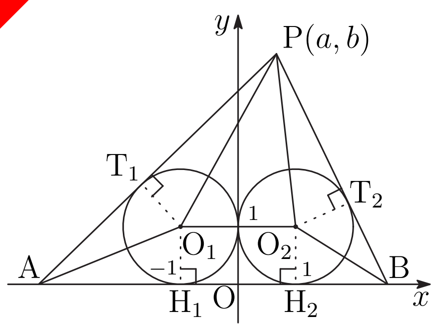
よって [illegible] (θ) の最大値は

$$[illegible]\ \alpha+2\sqrt{2l\cos\alpha+l^2+1}$$

$$[illegible]\cos^2\alpha+2\sqrt{2l\cos\alpha+}\ [illegible]$$

$$=\frac{1}{2[illegible]}\ [illegible]\ \boldsymbol{2+2\sqrt{8l^2+1}}\ [illegible]\ \boldsymbol{l^2+2+2\sqrt{8l^2+1}}$$

[illegible]3 (1) [illegible] C_2 の [illegible] をそれ [illegible] O_1，O_2 [illegible] O_1 から PA，AB にそれぞれ垂線 O_1 [illegible] O_1H_1 [illegible]．また，O_2 [illegible] B，AB にそれぞれ垂線 O_2T_2，O_2 [illegible] 引く．[illegible] 面積につい [illegible]



$$[illegible]\mathrm{AB}=\frac{[illegible]}{2}$$

$$[illegible]\mathrm{O_2}=b-1$$

$$台形\ \mathrm{O}[illegible]=\frac{1}{2}(2+\mathrm{AB})$$

$$\triangle[illegible]=\frac{1}{2}\mathrm{PA}$$

$$[illegible]\mathrm{B}=\frac{1}{2}\mathrm{PB}$$

$\triangle\mathrm{PAB}=\triangle\mathrm{PO_1O_2}+$ 台形 $\mathrm{O_1ABO_2}+\triangle\mathrm{O_1PA}+\triangle\mathrm{O_1PB}$ であるから

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot b=b-1+\frac{1}{2}(2+\mathrm{AB})+\frac{1}{2}\mathrm{PA}+\frac{1}{2}\mathrm{PB}$$

整理すると　$(b-1)\mathrm{AB} = \mathrm{PA}+\mathrm{PB}+2b \quad \cdots ①$

また　$\mathrm{PA}+\mathrm{PB} = (\mathrm{PT_1}+\mathrm{PT_2}) + (\mathrm{AT_1}+\mathrm{BT_2}) \quad \cdots ②$

$\mathrm{AT_1}+\mathrm{BT_2} = \mathrm{AH_1}+\mathrm{BH_2} = \mathrm{AB}-2 \quad \cdots ③$

①，②，③ より

$$(b-2)\mathrm{AB} = \mathrm{PT_1}+\mathrm{PT_2}+2(b-1) \quad \cdots (*)$$

$b>2$ であるから，$\mathrm{PT_1}+\mathrm{PT_2}$ が最小のとき，AB は最小となる．

$$\begin{aligned}\mathrm{PT_1}+\mathrm{PT_2} &= \sqrt{\mathrm{O_1P}^2-\mathrm{O_1T_1}^2}+\sqrt{\mathrm{O_2P}^2-\mathrm{O_2T_2}^2}\\ &= \sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2-1^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2-1^2}\\ &= \sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}+\sqrt{(a-1)^2+b(b-2)}\end{aligned}$$

b は $a>2$ の定数であるから，$\mathrm{PT_1}+\mathrm{PT_2}=f(a)$ とおくと

$$\begin{aligned}f(a) &= \sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}+\sqrt{(a-1)^2+b(b-2)}\\ f'(a) &= \frac{a+1}{\sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}}+\frac{a-1}{\sqrt{(a-1)^2+b(b-2)}}\\ f''(a) &= \frac{b(b-2)}{\{(a+1)^2+b(b-2)\}^{\frac{3}{2}}}+\frac{b(b-2)}{\{(a-1)^2+b(b-2)\}^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$f''(a)>0$ であるから，$f'(a)$ は単調増加で，また $f'(0)=0$ より

$a<0$ のとき $f'(a)<0$,　$a>0$ のとき $f'(a)>0$

したがって，$f(a)$ の増減表は，次のようになる．

a	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	$\searrow$	$2(b-1)$	$\nearrow$

$(*)$ より，$a=0$ のとき，AB は最小値 $\dfrac{4(b-1)}{b-2}$ をとる．

(2) △PAB が最小となるのは，AB が最小のときである．
したがって，(1) の結果から

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PAB} &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot b = \frac{1}{2}\cdot\frac{4(b-1)}{b-2}\cdot b = \frac{2b(b-1)}{b-2}\\ &= 2\left(b-2+\frac{2}{b-2}+3\right) \quad \cdots ④\end{aligned}$$

$b-2>0$，$\dfrac{2}{b-2}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$b-2+\frac{2}{b-2} \geqq 2\sqrt{(b-2)\times\frac{2}{b-2}} = 2\sqrt{2} \quad \cdots ⑤$$

④，⑤ より　　$\triangle\mathrm{PAB} \geqq 2(2\sqrt{2}+3)$

(等号が成り立つのは　$b-2=\dfrac{2}{b-2}$　すなわち　$b=$ [illegible] $\sqrt{2}$ のとき)

よって，求める最小値は　$\mathbf{2(2\sqrt{2}+3)}$

5.54　(1)　$f(x)=2x^2+(1-a^2)\log(x+1)$ [illegible]する

$$f'(x)=4x+\frac{1-a^2}{x+1}=\frac{4x\ [illegible]}{[illegible]}$$
$$=\frac{(2x+1)^2-\ [illegible]}{x+1\ [illegible]}\ [illegible]\ x+1-a)$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=$ [illegible] $\dfrac{[illegible]1}{2}$，$\dfrac{a-[illegible]}{2}$

$a>$ [illegible] から　　$-\dfrac{a+1}{2}<\dfrac{a-1}{2}$

[illegible] 0 が異なる 2 つの実数解 [illegible] とき，$a>0$ に [illegible] 意して

[illegible] $\dfrac{[illegible]+1}{[illegible]}>-1$　ゆえに [illegible] $\boldsymbol{a<1}$

(2) [illegible] 結果 [illegible] $<$ [illegible] ときの $f(x)$ の増減表は，次ようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{a+1}{2}$	$\cdots$	$\frac{a-1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	極小値	$\nearrow$

極大値は [illegible] $\left(-\dfrac{a+1}{2}\right)=2\left(-\dfrac{a+1}{2}\right)^2+(1-a^2)\log\left(-\dfrac{a+1}{2}+1\right)$

$$=\frac{\boldsymbol{(a+1)^2}}{\mathbf{2}}+\boldsymbol{(1-a^2)\log\frac{1-a}{2}}$$

極小値は [illegible] $\left(\dfrac{a-1}{2}\right)=2\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2+(1-a^2)\log\left(\dfrac{a-1}{2}+1\right)$

$$=\frac{\boldsymbol{(a-1)^2}}{\mathbf{2}}+\boldsymbol{(1-a^2)\log\frac{1+a}{2}}$$

(3) $g(a) = f\left(\dfrac{a-1}{2}\right)$ とおくと

$$g'(a) = a - 1 - 2a\log\log\frac{1+a}{2} + (1-a^2)\times\frac{1}{1+a} = -2a\log\frac{1+a}{2}$$

$0 < a < 1$ より $g'(a) > 0$ であるから，$g(a)$ は単調増加.

$0 < a < 1$ において　$g(a) > g(0) = \dfrac{1}{2} + \log\dfrac{1}{2} = \dfrac{1-2[illegible]}{[illegible]}$

よって，極小値 $f\left(\dfrac{a-1}{2}\right)$ は [illegible] $2\log 2$ [illegible] よ[illegible].

5.55 (1) $f(x) = \log_e x - c(x-1)$ を微分する[illegible]

$$f'(x) = \frac{1}{x} - c = \frac{1-cx}{x}$$

[illegible]

右の増減表により　$\boldsymbol{x = \frac{1}{[illegible]}}$ [illegible] 最大値 [illegible] $\boldsymbol{c}$

(2) (1) の結果から　$m = -\mathrm{lo}[illegible] - 1 + c$　$(c$ [illegible]

これ[illegible]すると

$[illegible] \frac{1}{[illegible]} + 1 = \frac{c-1}{c}$

[illegible]

右の[illegible]から[illegible]

(3) [illegible]の x [illegible]て，[illegible] 0 が成り立つとき，

[illegible](x) の最[illegible] m が[illegible]であるか[illegible]の結果から

[illegible] $= 0$　すな[illegible] $\boldsymbol{c = 1}$

[illegible] 1 の[illegible]べての[illegible]して

$$\log_a [illegible] b(x-1) \leqq 0$$

が成り立つと[illegible]

$\dfrac{\log_e x}{\log_e a} [illegible] 1) \leqq 0$　ゆえに　$\log_e x - (b\log_e a)\cdot(x-1) \leqq 0$

$c = b\log_e[illegible]$ と，上の第 2 式は　　$f(x) \leqq 0$

これがすべての x に対して成り立つとき，(3) の結果から

$$\boldsymbol{b\log a = 1}$$

5.56 (1) $a=3$ のとき　$f(x)=3x-2\cdot3\sin x\cos x=3x-3\sin 2x$

$f(x)$ を微分すると　$f'(x)=3-6\cos 2x$

ゆえに，$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の増減表および極値は次のようなる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	[illegible]
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{\pi-3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	[illegible]

$x=\frac{\pi}{6}$ のとき**極小値** $\boldsymbol{\frac{\pi-3\sqrt{3}}{2}}$，[illegible] $\frac{5}{6}\pi$ のとき [illegible] $\boldsymbol{\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{2}}$

(2) $a=1$ のとき　$f(x)=3x-\sin 2x$

$f(x)$ を微分すると　$f'(x)=3-2\cos$ [illegible]

$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は単調 [illegible]

$x\geqq0$ において　$f(x)\geqq f(0)$ [illegible]

(3) $f(x)=3x-a\sin 2x$ を微分 [illegible] $f'(x$ [illegible]

(i) $0<\frac{2a}{3}\leqq1$　すなわ [illegible] $<a\leqq\frac{3}{2}$ の [illegible]

$$f'(x)=3\left(1-\frac{2a}{3}\cos 2x\right) \text{[illegible]} \geqq 0$$

$f(0$ [illegible] から　$x\geqq0$ において [illegible] $)\geqq0$

(ii) [illegible] $\frac{\ }{2a}<$ [illegible] $a>\frac{3}{2}$ のとき

[illegible] $=2a\Big($ [illegible] $\cos 2x\Big)$ よ [illegible] $\cos 2\alpha=\frac{3}{2a}$　$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$

[illegible] みたす [illegible] この [illegible] $<x<\alpha$ で $f(x)$ は単調減少で

あり [illegible] $=0$ で [illegible] <0

[illegible] おいて $f(x)$ [illegible] が成り立つ a の値の範囲は　$\boldsymbol{0<a\leqq\frac{3}{2}}$

(4) $g(x)$ [illegible] $2x-$ [illegible]，$g(0)=0$ であるから

$$\text{[illegible]} x)\geqq0 \quad すなわち \quad 3x-\frac{3b}{2}\sin 2x\geqq0$$

を満たせ [illegible] ので，(3) の結果から

$$0<\frac{3b}{2}\leqq\frac{3}{2} \quad よって \quad \boldsymbol{0<b\leqq1}$$

5.57 (1) $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\dfrac{2}{\pi} - x}$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{(\sin x - x\cos x)'\left(\dfrac{2}{\pi} - \cos x\right) - (\sin x - x\cos x)\left(\dfrac{2}{\pi} - \cos x\right)'}{\left(\dfrac{2}{\pi} - \cos x\right)^2}$$

$$= \frac{x\sin x\left(\dfrac{2}{\pi} - \cos x\right) - (\sin x - x\cos x)\sin x}{\left(\dfrac{2}{\pi} - \cos x\right)^2}$$ [illegible] $\dfrac{\boldsymbol{\left(\frac{2}{\pi}x - \sin x\right)\sin x}}{\boldsymbol{\left(\frac{2}{\pi} - \cos x\right)^2}}$

(2) $\alpha(x) = \dfrac{2}{\pi}x - \sin x$ とおくと　[illegible]

$\alpha'(x) = \dfrac{2}{\pi} - \cos x$ であるか[illegible] $x <$ [illegible] $) > 0$

したがって，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ [illegible] $\alpha(x) >$ [illegible]

上式[illegible](1) の結果から，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ の[illegible] f'[illegible]

(3) [illegible]結果[illegible] $f'(x)$ は，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ にお[illegible]単[illegible]増加である[illegible]ら

[illegible] π のとき　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ [illegible] $x) < f(\pi)$

[illegible]で[illegible] $\left(\dfrac{\pi}{2}\right.$ [illegible] $f(\pi)$ [illegible] $\dfrac{\pi}{\text{[illegible]} + 1} < \dfrac{\pi}{1} = \pi$

よ[illegible] $< \pi$ のとき [illegible] $f(x) < \pi$

[illegible] $= \Big($[illegible]$\cos x\Big)\{g($[illegible]おくと

[illegible] $\left(\dfrac{2}{\pi} - \cos x\right)\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{4}\right) - (\sin x - x\cos x)$

[illegible] $\dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\cos x - \sin x + \dfrac{1}{2}$

[illegible] $= -\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{\pi}$

$\beta''(x) = -\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\cos x$

また　$\beta\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,\ \beta'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\pi},\ \beta''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

上の結果から，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ において

$$\beta''(x) > 0 \text{ により} \qquad \beta'(x) > \beta'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} > 0$$

$$\beta'(x) > 0 \text{ により} \qquad \beta(x) > \beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

したがって，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ のとき，$\beta(x) > 0$ より

$$\left(\frac{2}{\pi} - \cos x\right)\left(\frac{1}{2}x \text{[illegible]}\right) - (\sin x \text{[illegible]}) > 0$$

このとき，$\dfrac{2}{\pi} - \cos x > 0$ であるから [illegible]

$$\frac{\sin x - \text{[illegible]}}{2 \text{[illegible]}}$$

よって，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ のと[illegible]$(x) < g(x)$ [illegible]

5.58 (1) $x >$ [illegible] $1 + x > 1$ であるから $\log($[illegible]$) >$ [illegible]

[illegible]$\Big)$ $- \log(1+x)$ とすると [illegible]

$$\text{[illegible]} = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{1+x} \text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]}(2-x)}{3(1+x)}$$

[illegible]$)$ の 0 [illegible] 3 にお[illegible]増減表は[illegible]のようになる．

x	[illegible]	[illegible]	1	$\cdots$	[illegible]
$f'(x)$	[illegible]	[illegible]	0	$-$	[illegible]
[illegible]	0	$\nearrow$	[illegible]	[illegible]	$\dfrac{\text{[illegible]}4\log 2}{2}$

$\log$[illegible]0[illegible]$\dfrac{\text{[illegible]} - 4\log 2}{2} > 0$ であるから，$0 < x \leqq 3$ において

$$f(x) \text{[illegible]} \text{すなわち} \quad \log(1+x) < x - \frac{1}{6}x^2 \quad \cdots ②$$

①，② より[illegible] $x \leqq 3$ のとき $\quad 0 < \log(1+x) < x - \dfrac{1}{6}x^2 \quad \cdots ③$

したがって $\quad 0 < x < 3$ のとき $\quad 0 < \log(1+x) < x - \dfrac{1}{6}x^2$

(2) $0 < a_n < \dfrac{6}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を (A) とする．

[1] $n=1$ のとき，$0<a_1=a<3$ より

$$0<a_1<\frac{6}{1+1}$$

であるから (A) が成り立つ．

[2] $n=k$ のとき，(A) が成り立つ，すなわち

$$0<a_k<\frac{6}{k+1}$$

が成り立つと仮定すると

$$1<1+a_k<1 \text{ [illegible]}$$

対数をとると　$\log 1<\log(1$ [illegible] $+1)$

ゆえに　　$0<a$ [illegible] $\left(1+\right.$ [illegible] $\left.\right)$

$0<\frac{6}{\text{[illegible]}+1}\leqq 3$ であるから，③ より

[illegible] $\left(1+\frac{6}{k+1}\right)<\frac{6}{k+1}-$ [illegible] $1)$ [illegible] $=\frac{6k}{(k+1)^2}$

$<\frac{6k}{k^2+2k}$ [illegible] $\frac{6}{\text{[illegible]}1)+1}$ $\cdots$⑤

[illegible]，⑤ [illegible]

$$\text{[illegible]}\ 0<a_{k+1}<\frac{6}{\text{[illegible]}1)+1}$$

[illegible] がって [illegible] 1 のときも [illegible] 成り立つ．

[illegible]，[2] [illegible] べて [illegible] て (A) が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n+1}=0$$

であるから，[illegible] うちの原理を (A) に適用して

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

5.59 (1) $\cos\theta-\sin$ [illegible] $\sin\theta\cos\theta\quad(0<\theta<\pi)\qquad\cdots(*)$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta\neq 0$ であるから　$a=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}$

$f(\theta) = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\cos\theta}$ とおくと

$$f'(\theta) = -\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f'(\theta) < 0$ であるから，$f(\theta)$ は単調減少．

$$\lim_{\theta\to+0} f(\theta) = \infty, \quad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} f(\theta) = -$$

よって，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において，a をみた　ただ 1 つ存在する．

(2)　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ は，$(*)$ の解ではない．$\dfrac{\pi}{2} <$

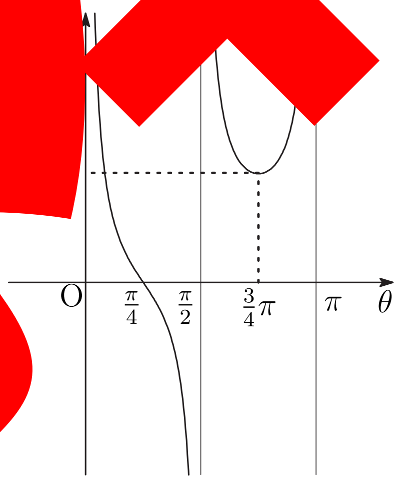
$$f'(\theta) = -\frac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}\sin\left(\quad\right)\left(1 - \quad\theta\right)}{\quad^2\theta\cos^2\theta}$$

$f(\theta)$　表は次のようなる．

		$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(π)
(θ)			0	$+$	
$f(\theta)$			$\sqrt{2}$	$\nearrow$	

$f(\theta)$　$f(\theta) = \infty$



　および　結果　$= f(\theta)$ の
ラフ　ように
y　)と　点の個数
　解の　ある

$2\sqrt{2}$**のとき**
$=$　**とき**　　**2 個**
$2\sqrt{2} <$　**とき**　　**3 個**

5.60　(1)　$f(x) = \log x$　の対数をとると

$$\log f(x) = \log x^x = x\log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log x + 1 \quad ゆえに \quad f'(x) = x^x(\log x + 1)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$

よって　$x=e^{-1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{e^{-\frac{1}{e}}}$ をとる．

(2) $y=x^x$ 上の点 $(t,\ t^t)$ における接線の方程式は $(t>0)$

$$y-t^t=t^t(\log \text{[illegible]} 1)(x-t)$$

これが原点を通るから

$-t^t=t^t(\log t+1)$　ゆえに [illegible]

ここで，$g(t)=\log t+1-\frac{1}{t}$ [illegible] 1 [illegible] >0

$g(t)$ は単調増加であるか[illegible] $=0$ を[illegible] t は[illegible]る．

また，$g(1)=0$ であるか[illegible] $(**)$ をみた[illegible] t [illegible]

これ[illegible]代入して　$\boldsymbol{y=x}$

補足 [illegible]ことから，$h(t)=t\log t+$[illegible] $h'(t)$ [illegible] $g\,t+2$

[illegible]がっ[illegible]増減表は次のように[illegible]

[illegible]	[illegible]	$\cdots$	e^{-}[illegible]	$\cdots$
[illegible]		$-$	0	$+$
$h(t)$		$\searrow$	[illegible] 1	$\nearrow$

また[illegible] $h(t)$ [illegible] $\lim h(t)=\infty$ [illegible]

[illegible]って，[illegible]すのは[illegible]だ1つである．

[illegible]し，[illegible] $\log t=0$ [illegible]る．(長崎大学 2007) $\boxed{5}$

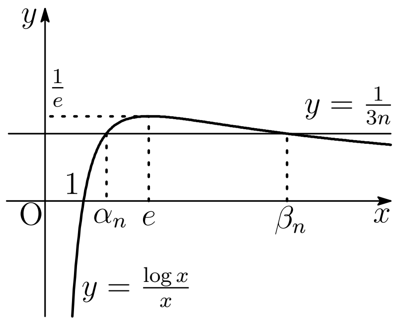
5.61 (1) $f($[illegible] x [illegible]くと　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ のと[illegible] $=e$

よって，増減[illegible]のようになる．

x	[illegible]	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'($[illegible]		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$



$\frac{1}{3n} \leqq \frac{1}{3} < \frac{1}{e}$ であるから，上のグラフより，方程式 $\frac{\log x}{x} = \frac{1}{3n}$ は $x > 0$ の範囲にちょうど2つ実数解をもつ．

(2) $n \geqq 1$ より $\quad e^{\frac{1}{n}} \leqq e \leqq ne \quad \cdots ①$

$f(e^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}} \geqq \frac{1}{ne} > \frac{1}{3n} > 0$ であるから

$0 < \frac{1}{3n} < f(e^{\frac{1}{n}})$ ゆえに $f(1) < f(\alpha_n) <$ [illegible] $\cdots ②$

$f(ne) = \frac{\log ne}{ne} > \frac{\log e}{3n} = \frac{1}{3n}$ [illegible]ら

$f(ne) > \frac{1}{3n}$ ゆえ[illegible] $\cdots ③$

$f(x)$ は，$0 < x < e$ において単調[illegible]
あるから，①，②，③により

$$1 \text{[illegible]} e^{\frac{1}{n}}, \text{[illegible]} \beta_n$$

また，[illegible] $e^{\frac{1}{n}} = 1$ である[illegible]，はさみう[illegible]原理によ[illegible]

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \text{[illegible]}$$

5.62 [illegible] $= ($[illegible]$- a^2)e^{-x}$ を微分する[illegible]$x) = -(x+a)(x-a)e^{-x}$
$a > 0$ [illegible] $f($[illegible]減表は次のようにな[illegible]

x	[illegible]	[illegible]a	$\cdots$	a	$\cdots$
[illegible]	$-$	[illegible]	[illegible]	0	$-$
[illegible]$)$	[illegible]	極小 [illegible]$(a-1)e^a$	$\nearrow$	極大 [illegible]$+1)e^{-a}$	$\searrow$

[illegible]，極[illegible]a[illegible] 極[illegible]$a-1)e^a$ をとる．

[illegible]おいて，[illegible]ると $\quad g'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$
x[illegible] $g'(x) < 0$ [illegible]から，$x \geqq 3$ において $g(x)$ は単調減少．
した[illegible]って，[illegible]のとき，$g(x) \leqq g(3)$ であるから

$$x \geqq 3 \text{ のとき} \quad x^3e^{-x} \leqq 27e^{-3}$$

が成り立つ[illegible]とき $\quad 0 < x^2e^{-x} \leqq \frac{27e^{-3}}{x}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{27e^{\text{[illegible]}}}{x} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = 0}$$

(3) $y=x^2+2x+2$ のグラフと $y=ke^x+a^2$ の共有点の個数は，方程式

$$x^2+2x+2=ke^2+a^2 \quad すなわち \quad (x^2+2x+2-a^2)e^{-x}=k$$

の解の個数であり，これは，$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフの共有点の個数である．ここで，(2) の結果により

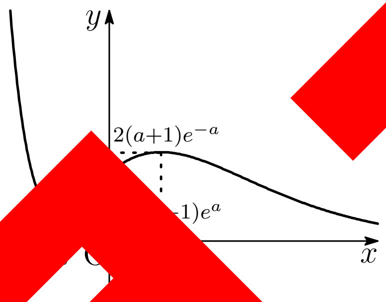
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2-[illegible]}{[illegible]}\right)[illegible]^2e^{-x}=0$$

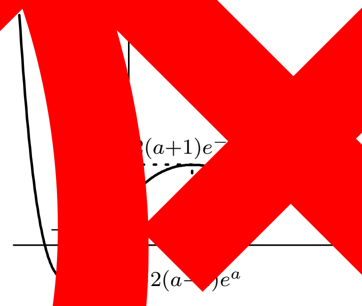
よって，上式および (1)，(2) の[illegible]より，求め[illegible]の範囲は

i) $\boldsymbol{0<a\leqq 1}$ **のとき**　$\boldsymbol{-2(a}$ [illegible] $\boldsymbol{a+1)e^{-a}}$

ii) $\boldsymbol{1<a}$ **のとき**　$\boldsymbol{0<k<2}$ [illegible]

i) $0<a\leqq 1$ のとき





(1) f[illegible] $\frac{[illegible]g\,x}{x}$ [illegible] $f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$

[illegible]) の増[illegible]は，次[illegible]になる．

x	[illegible]	[illegible]	e	$\cdots$
$f'(x)$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$-$
[illegible]	[illegible]	$\nearrow$	[illegible]	[illegible]

[illegible]について

$$f(a)+f[illegible]f(c)\leqq 3f(e)=\frac{3}{e}<\frac{3}{2.7}<2\times 0.6<2\log 2=\log 4$$

したがって [illegible] $\frac{[illegible]a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}<\log 4$

(2) a，b，c，[illegible]然数であるから

$$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc} \quad \cdots(*)$$

の両辺の自然対数をとると

$$bc\log a + ca\log b + ab\log c = abc\log d$$

ゆえに　$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}=\log d$

$d \geqq 3$ であるから，上式および (1) の結果から　$\boldsymbol{d=3}$

(1) の増減表から $f(1)<f(2)$，$f(3)>f(4)>f(5)>$ [illegible]

また　$f(2)=\dfrac{\log 2}{2}=\dfrac{3\log 2}{6}=\dfrac{\log 8}{[illegible]}$,

$f(3)=\dfrac{\log 3}{3}=\dfrac{2\log 3}{6}=$ [illegible]

ゆえに　$f(1)<f(2)<f(3)>f(4$ [illegible]

$\dfrac{\log a}{a}\leqq\dfrac{\log 3}{3}$, [illegible] $\dfrac{[illegible]}{3}$

したがって　$\dfrac{\log a}{a}$ [illegible] $\dfrac{\log c}{c} \leqq$ [illegible]

上式に[illegible]いて，等号が成り立つ a，b，c を[illegible]ればよ[illegible]

よ[illegible] $= \boldsymbol{b=c=3}$

5.64 (1) f[illegible]$^{n-1}\log x + x^n\cdot\dfrac{1}{x} = x^{n-}$[illegible]$x+1)$

[illegible]$) = $[illegible]$^{n-2}(n\log x+1)$ [illegible] $\dfrac{n}{x}$

[illegible]$1)\log x+(2n-1)\}$

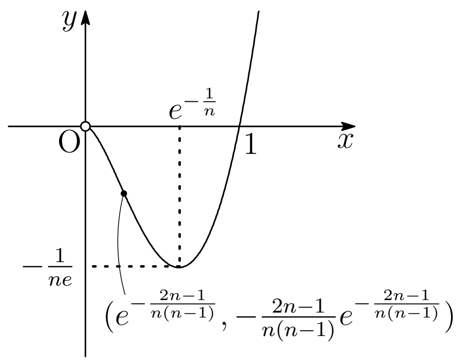
[illegible]たがっ[illegible]数 y [illegible]の増減[illegible]グラフは次のようになる．

x	[illegible]	$\cdots$	$e^{-\frac{2n-1}{n(n-1)}}$	[illegible]	$e^{-\frac{1}{n}}$	$\cdots$
f'[illegible]	[illegible]	[illegible]	$-$	[illegible]	0	$+$
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$+$	$+$	$+$
[illegible]		↘	[illegible]点	↘	極小	↗

こ[illegible]

$\displaystyle\lim_{x\to+0} f_n(x)$ [illegible]$_{+0}\, x^n\log x = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f_n(x$[illegible]$_{\to\infty}\, x^n\log x=\infty$



補足 まず，$0<x\leqq 1$ のとき，$-\dfrac{2}{\sqrt{x}}<\log x$ を示す．

$g(x)=\log x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(0<x\leqq 1)$ とおくと

$$0<x<1 \text{ のとき}\quad g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}<0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(1)=2$ であるから

$g(x)>0$ [illegible] $\log x+$ [illegible]

よって　$0<x<1$ のとき　$-$[illegible]

したがって　$0<x<1$ のとき [illegible] 0

$\lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x})=0$ であるか[illegible]みう[illegible]理[illegible] lim [illegible] $=0$

よって，$n\geqq 1$ のとき [illegible] $\log x=$ [illegible] $\cdot x\log$ [illegible]

(2) (1) [illegible]ら　$L_n=f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n$ [illegible]

[illegible]って [illegible] $=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)e}$

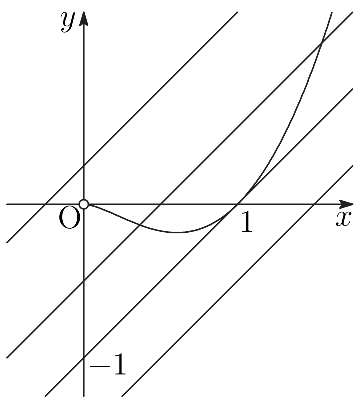
[illegible] $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=-\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{e}}$

[illegible](1) の[illegible]ら　f[illegible]0，$f_n'(1)=$ [illegible]

求[illegible]直線は[illegible]通り，傾[illegible]直線であるから

$y-0=$ [illegible]わち　$\boldsymbol{y=x-1}$

(4) x[illegible]$>0)$ の解の個数は，
$y=f_n(x)$ と[illegible]$+k$ の共有点の個数
であるから，[illegible]結果に注意して



$k<-$[illegible]き　なし
$k=$[illegible]$\leqq k$ のとき　1個
$-1<k<0$ のとき　2個

5.65 (1) $f(x) = nx - 1 + (1-x)^n$ より　　$f'(x) = n\{1 - (1-x)^{n-1}\}$

(i) n が偶数のとき

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0$

増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$x = 0$ で**極小値 0**

(ii) n が奇数のとき

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0,\ 2$

増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	[illegible]	[illegible]	2	$\cdots$
$f'(x)$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	$-$
$f(x)$	[illegible]	[illegible]	$\nearrow$	$2n-2$	$\searrow$

$x = 0$ で**極小値 0**,

$x = 2$ で**極大値 $2n-2$**

(2) (i) 曲線 $y = e^x$ 上の点 $(0,\ 1)$ におけ[illegible]式は　$y = x + 1$

曲線 $y = e^x$ は下に凸であるから[illegible]

① の x を $-x$ に置き換えると[illegible]

$x \geqq -1$ のとき，$(1+x)e$[illegible]ると

$$1 + [illegible] x^2)e^x \quad [illegible] 1)$$

① [illegible]よび ③ から　$(1 - x^2)e^x \leqq 1 +$ [illegible]　$(x$ [illegible]

(ii) [illegible] $\frac{x}{}$ に置き換えると

$$[illegible] \frac{x}{n} + 1 \quad ゆえに \quad e^x [illegible] \frac{x}{n}\Bigr)^n \quad \cdots ④$$

$$[illegible] \leqq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (x \geqq -n) \quad \cdots (*)$$

を示[illegible]ないが[illegible] n のとき[illegible]であるから，$-n \leqq x < n$ の場[illegible]いて[illegible]す．

[illegible] $\leqq x$ [illegible] $\leqq \frac{x}{n} < 1$ [illegible]から，③ より

$$1 + [illegible] 1 - \frac{x^2}{n^2}\Bigr) e [illegible] \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geqq \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n e^x \quad \cdots ⑤$$

ここで，[illegible]結果から，$f\left(\dfrac{x^2}{n^2}\right) \geqq 0$ であるから

$$n \cdot \frac{x^2}{n^2} - 1 [illegible] - \frac{x^2}{n^2}\Bigr)^n \geqq 0 \quad ゆえに \quad \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geqq 1 - \frac{x^2}{n} \quad \cdots ⑥$$

したが[illegible] ⑤，⑥ より $(*)$ が成り立つ．よって，④，$(*)$ より，次式が成り立つ．

$$0 \leqq e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqq \frac{x^2}{n} e^x \quad (x \geqq -n)$$

5.66 $x^3+y^3=1$ ($x \geqq 0,\ y \geqq 0$) より，$(x,\ y)$ を θ の正則な関数として表すことができる．$x^3+y^3=1\cdots$① の両辺を θ で微分すると

$$3x^2\frac{dx}{d\theta}+3y^2\frac{dy}{d\theta}=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x^2,\ y^2)\cdot\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)=0 \quad \cdots(*)$$

$\left(\dfrac{dx}{d\theta},\ \dfrac{dy}{d\theta}\right)$ は曲線①の接ベクトルであるから

$$(x^2,\ y^2)$$

は曲線①の法ベクトルである．

また，a^2x+b^2y は θ の関数であるから，[illegible]とおくと

$$f'(\theta)=a^2\frac{dx}{d\theta}+b^2\frac{dy}{d\theta} \ [illegible]$$

$f(\theta)$ が極値をとるとき，$f'(\theta)$ [illegible]るから

$$(a^2,\ b^2)\cdot\left(\frac{d[illegible]}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)=0 \quad [illegible]**)$$

この[illegible]より，$(x^2,\ y^2)//(a^2,\ b^2)$ で[illegible]$\lambda>0$ を[illegible]て

$$[illegible])^2(a^2,\ b^2) \quad \text{ゆえに} \quad [illegible]a,\ y=\lambda b$$

[illegible]とおけ[illegible]れを[illegible]と

$$[illegible])^3+ [illegible] 1 \quad \text{ゆえ} [illegible] =(a^3+b^3)^{-\frac{1}{3}}$$

[illegible]のとき[illegible]$+b^2$[illegible]$+b^2(\lambda b)=$[illegible]$b^3)=(a^3+b^3)^{\frac{2}{3}}$

$(x$[illegible]$(1,\ 0)$[illegible]$y=a^2$

[illegible]$0,\ 1)$ のとき[illegible]$+b^2y=b^2$

ここで，$b \geqq a>$[illegible] $a^2 \leqq b^2=(b^3)^{\frac{2}{3}}<(a^3+b^3)^{\frac{2}{3}}$

よって $\boldsymbol{a}$[illegible]$\boldsymbol{x+b^2y} \leqq \boldsymbol{\sqrt[3]{(a^3+b^3)^2}}$

補足 $(x,\ y)$ を θ[illegible]として，例えば $x=\cos^{\frac{2}{3}}\theta$，$y=\sin^{\frac{2}{3}}\theta$ とすればよい．

5.67 (1) $f(x)=x-1-\log x$ とおくと $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって　$f(x) \geqq 0$　すなわち　$x - 1 - \log x \geqq 0$

よって　　$\log x \leqq x - 1$

(2) (ギブスの不等式 (Gibbs' inequality))

(1) の結果から

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{q_i}{p_i} \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i \Bigl([illegible] q_i - p_i) = 0$$

よって　$\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$ [illegible]

また，① の等号が成立す[illegible]

$$\frac{q_i}{p_i} = 1 \quad \text{すなわち} \quad p_i = q_i \ [illegible] 1, 2, \cdot [illegible]$$

(3[illegible] $\sum_{i=1} p_i$ [illegible] と

$$\sum [illegible] = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{q_i}{c} \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{q_i}{c} - 1 \right) = 0$$

した[illegible] $\sum p_i \log q_i$ [illegible]

[illegible]，② の[illegible]成立[illegible]は

[illegible]1　すなわ[illegible] $= c = \dfrac{1}{n}$　$(i = 1, 2, \cdots, n)$

このとき，①[illegible]から　$\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqq \log \dfrac{1}{n} \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i$

よって，F[illegible] $= \dfrac{1}{n}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\log \dfrac{1}{n}}$ をとる．

(4) $g(x) = x \log x$ とおくと　$g'(x) = 1 + \log x$

$g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

したがって

$$G=\sum_{i=1}^{n} a_i \log a_i=\sum_{i=1}^{n} g(a_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{n}{e}$$

よって $$G \geqq -\frac{n}{e}$$

上式において，等号が成立する [illegible]

$$a_1=a_2=\cdots$$ [illegible]

のときである．よって，求める [illegible]

6.1 (1) $\displaystyle\int x\cos x\,dx=\int x(\sin x)'\,dx = x\sin x-\int$ [illegible] $\sin x\,dx$

$=\boldsymbol{x\sin x+\cos x+C}$ **($\boldsymbol{C}$ は積分定数)**

(2) $x\cos x$ の原始関数の 1 つを $F(x)=x\sin x+\cos x$ とする．

(i) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=\int_0^x t\cos t\,dt$$

$$=\Big[F(t)\Big]_0^x=F(x)-F(0)=x\sin x+\cos x-1$$

(ii) $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(-t\cos t)\,dt$$

$$=\Big[F(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-F(t)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{x}=-F(x)+2F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)$$

$$=-(x\sin x+\cos x)+2\cdot\frac{\pi}{2}-1$$

$$=-x\sin x-\cos x+\pi-1$$

よって $$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x\sin x+\cos x-1 & \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right) \\ -x\sin x-\cos x+\pi-1 & \left(\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right)\end{cases}}$$

6.2 (1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx = \Big[\,(x-1)e^x\,\Big]_0^1 = \mathbf{1}$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx = \Big[\,\sin x - x\cos x\,\Big]_0^\pi = \boldsymbol{\pi}$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \Big[\,\frac{1}{2}\log(1+x^2)\,\Big]_0^1 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{log\,2}$

(4) $x = \tan\theta$ とおくと $\displaystyle\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos}$ [illegible]

x	$0 \longrightarrow$ [illegible]
[illegible]	0 [illegible]

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}\ \pi$$

6.3 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{1}{\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}\ +1\Big)$ [illegible]

$\displaystyle = \frac{1}{2}\Big[\,\log\Big|\,\text{[illegible]}\,\frac{1}{x+1}\Big|\,\Big]_0^{\frac{1}{2}} = -$ [illegible] $\mathbf{3}$

(2) [illegible] x [illegible] $\displaystyle\int^e (\log x)(\log x)'\,dx = \Big[\,\frac{1}{2}($ [illegible] $\Big]_1$ [illegible] $\mathbf{2}$

[illegible] $\displaystyle\int^\pi$ [illegible] $dx =$ [illegible] $^2 x)\sin x\,dx = \Big[$ [illegible] $\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\,\Big]_0^\pi = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$

[illegible] $\displaystyle\int_0$ x c [illegible] $= \int^{\frac{\pi}{2}}$ [illegible] $x)'\,dx$

[illegible] $\frac{\pi}{2}$ [illegible] $\displaystyle -\int^{\frac{\pi}{2}}$ [illegible]

[illegible] π [illegible] $+ \Big[\,\cos$ [illegible] $\Big]_0$ [illegible] $\mathbf{2} - \mathbf{1}$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}$ [illegible] $\displaystyle\int_1^2 \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\Big)\,dx$

[illegible] $\displaystyle\Big[\,\log\frac{x}{x+1}\,\Big]_1^2 = \mathbf{log}\,\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$

(3) $$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$
$$= \Big[\, x-\log(1+e^x)\,\Big]_0^1$$
$$= 1-\log\frac{1+e}{2} = \boldsymbol{\log\frac{2e}{1+e}}$$

別解 $t=e^x$ とおくと $\quad \dfrac{dt}{dx}=e^x=t,$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow$ [illegible]

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{1+t} \text{ [illegible] } = \log\frac{2e}{e+1}$$

(4) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 5 \text{ [illegible]}$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{\text{[illegible]}} \text{ [illegible] } \sin \text{ [illegible]}$$

6.5 (1) $$\int_0^2 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2)'e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\Big[\, e^{x^2}\,\Big]_0^2 \text{ [illegible] } \boldsymbol{e^4 -} \text{ [illegible]}$$

(2) $$\text{[illegible] } \frac{1}{\text{[illegible]}}\int_0^1 \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right) \text{[illegible]}$$
$$\text{[illegible] } \left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Big]_0^1 = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \text{ [illegible]}$$

(3) $$\text{[illegible] } f(x) \text{ [illegible] } \int_0 \text{ sin [illegible] } \int_\pi^{2\pi} (\text{[illegible]})\,dx$$
$$= \text{[illegible] } \Big]^\pi - \frac{1}{2}\Big[\,(x \text{ [illegible] } \Big]_\pi = \boldsymbol{2-\frac{1}{2}\pi^2}$$

(4) $$\text{[illegible] } dx = \frac{1}{2}\int_0 \text{ [illegible] } \log(x^2+1)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\,(x^2+1)\log(x^2+1)\,\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 2x\,dx$$
$$= \log 2 - \frac{1}{2}\Big[\, x^2\,\Big]_0^1 = \boldsymbol{\log 2 - \frac{1}{2}}$$

6.6 (1) $$\int_{\log\pi}^{\log(2\pi)} e^x \sin(e^x)\,dx = \int_{\log\pi}^{\log(2\pi)} (e^x)'\sin(e^x)\,dx$$
$$= \Big[\, -\cos(e^x)\,\Big]_{\log\pi}^{\log(2\pi)} = \boldsymbol{-2}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}(x+1)\,dx = \left[\, e^{2x}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\,\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{3}{4}e^2-\frac{1}{4}}$

解説 $\displaystyle\int e^{kx}f(x)\,dx = \frac{e^{kx}}{k}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{k}+\frac{f''(x)}{k^2}-\frac{f'''(x)}{k^3}+\cdots\right\}+C$

(3) $\sin x\cos 4x = \dfrac{1}{2}(\sin 5x-\sin 3x)$ より

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x\cos 4x\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^\pi(\sin 5x-\sin 3x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 5x}{5}+\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^\pi = \boldsymbol{-\frac{2}{15}}\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x+2}$ より

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}\,dx &= \int_{-1}^0\left(\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x+2}\right)dx\\ &= \left[\,2\log(x+3)-\log(x+2)\,\right]_{-1}^0\\ &= 2\log 3-3\log 2 = \boldsymbol{\log\frac{9}{8}}\end{aligned}$$

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\tan(x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\frac{(\cos x^2)'}{\cos x^2}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\left[\,\log\cos x^2\,\right]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}\log 2}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} xe^{3x}\,dx = \left[\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\right)e^{3x}\right]_0^{\frac{1}{3}}$

(3) $\displaystyle\int_e^{e^e}\frac{1}{x\log x}\,dx = \int_e^{e^e}\frac{(\log x)'}{\log x}\,dx = \left[\,\log(\log x)\,\right]_e^{e^e} = \boldsymbol{1}$

(4) $\displaystyle\int_2^3\frac{x^2+1}{x(x+1)}\,dx = \int_2^3\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}\right)dx$

$$\begin{aligned}&= \left[\,x+\log x-2\log(x+1)\,\right]_2^3\\ &= 1+\log 3-\log 2-2\log 4+2\log 3\\ &= \boldsymbol{1+3\log 3-5\log 2}\end{aligned}$$

6.8 (1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2}$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ \log(x^2-2x+2)\ \Big]_1^2 = \mathbf{\frac{1}{2}\log 2}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{4x}}{e^{2x}+2}dx = \int_0^1 \frac{e^{2x}(e^{2x}+2)-2e^{2x}}{e^{2x}+2}dx$

$$= \int_0^1 \left\{ e^{2x} - \frac{(e^{2x}+2)'}{e^{2x}+2} \right\} dx = \Big[\ \frac{1}{2}e^{2x} \text{[illegible]} + 2)\ \Big]_0^1$$

$$= \mathbf{\frac{1}{2}(e^2-1) - \text{[illegible]} 2) \text{[illegible]}}$$

(3) $\displaystyle\int_1^e x\log\sqrt{x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{2}x\log x\,dx =$ [illegible]

$$= \Big[\ \frac{1}{4}x^2\log x\ \Big]_1^e \text{[illegible]}$$

$$= \frac{1}{4}e^2 - \text{[illegible]} = \frac{1}{4}e^2 \text{[illegible]} x^2 \Big]_1 \text{[illegible]}$$

(4) $\cos^2 x$ [illegible] $= \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\sin 3x$

$$= \text{[illegible]} \sin 3x + \frac{1}{2}\sin 3x\cos 2x$$

$$\text{[illegible]} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin 5x + \sin \text{[illegible]}$$

[illegible]って [illegible] $\sin 5x =$ [illegible] $\sin 3x + \dfrac{1}{4}\sin x$

よっ[illegible](与式)[illegible] $\left(\dfrac{1}{2}\sin 3x + \text{[illegible]}\right) dx$

$$= \Big[\ \text{[illegible]}\ \Big]_0^{\text{[illegible]}} = \mathbf{\frac{11}{24}}$$

6.9 (1) $\displaystyle\int_0$ [illegible] $+1$ [illegible] $\displaystyle\int^1 \left(x-1+\frac{1}{2x+1}\right) dx$

$$\text{[illegible]} \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\log(2x+1)\ \Big]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{2}(\log 3 - 1)}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\cos$ [illegible] $= \Big[\ \dfrac{1}{2}\sin(x^2)\ \Big]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

(3) $t = x^2+1$ とおくと

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 2$

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

$$\int_0^1 x^3 \log(x^2+1)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \log(x^2+1)\,2x dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2}(t-1)\log t\,dt = \int_1^2 \left(\frac{t^2}{[illegible]} - \frac{t}{2}\right)' \log t\,dt$$

$$= \left[\left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right)\log t\right]_1^2 - [illegible] - \frac{t}{2}\right)\frac{1}{t}\,dt$$

$$= 0 - \left[\frac{[illegible]}{8} [illegible]\right]^2 [illegible]$$

(4) $|e^{\cos x}\sin x|$ は偶関数であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi} |e^{\cos x}\sin x|\,dx = 2\int_0^{\pi} |e^{\cos [illegible]} [illegible] \sin x\,dx$$

$$= -2 [illegible] (\cos x)'\,d [illegible] 2\left[e [illegible]\right] [illegible] - \boldsymbol{e^{-1}})$$

6.10 (1) $\displaystyle\int_1^2 [illegible] = \int_1^2 \frac{(e^x - e^{-x})'}{e^x - e^{-x}}\,dx = \left[[illegible] \right]_1^2$

$$[illegible] \left|\frac{e^2 - e^{-2}}{[illegible] - e^{-1}}\right| = \log\left|\frac{(e [illegible])(e - e^{-1})}{[illegible] e^{-1}}\right|$$

$$[illegible] \boldsymbol{\frac{1}{[illegible]}}\Big)$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} [illegible] \sin(5 [illegible] = \frac{1}{[illegible]}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x [illegible] 8x)\,dx$

$$[illegible] \frac{[illegible]}{8}\sin 8x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{32}}$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{[illegible]}{[illegible] + 3x [illegible]} [illegible] = \int_0^1 \left(x + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{x+2}\right) dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2\log|x+1| - 4\log|x+2|\right]_0^1$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2} + \log\frac{64}{81}}$$

(4) $t = x^3$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = 3x^2$

x と t の対応は右のようになる．

x	$1 \to 2$
t	$1 \to 8$

したがって $\quad \displaystyle\int_1^2 x^5 e^{x^3}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{3}x^3 e^{x^3}\cdot 3x^2 dx$

$$= \int_1^8 \frac{1}{3}te^t\,dx = \left[\,\frac{1}{3}(t-1)e^t\,\right]_1^8 = \boldsymbol{\frac{7}{3}e^8}$$

6.11 (1) $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

$\left|\dfrac{1}{2}\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\dfrac{1}{2}\sin 2x\right|$ であるから，$\left|\dfrac{1}{2}\sin 2\right.$ [illegible] 期は $\dfrac{\pi}{2}$

よって $\quad \displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x\cos x|\,dx = \int_0$ [illegible] dx [illegible] $\cos 2x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{1}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3+2x^2-3}{x^2-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\Big(x+2+$ [illegible]

$= \Big[\,\dfrac{1}{2}x^2$ [illegible] $\log$ [illegible] $\mathbf{9}$ [illegible] $\mathbf{+\log\,3}$ [illegible]

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ で $x = 2$ [illegible] とおくと [illegible] $\cos\theta$

[illegible] $\displaystyle\int^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{}{\sqrt{4-}}$ [illegible] θ [illegible] $d\theta$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta =$ [illegible] $= \dfrac{\pi}{6}$

[illegible] $\dfrac{3}{4-}$ [illegible] $\sin\theta$ とおくと

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

[illegible] $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$

[illegible] が [illegible] $\sqrt{\dfrac{3}{4-3x}}$ [illegible] $\sqrt{\dfrac{3}{4-4\sin^2\theta}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\,d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$$

よって [illegible] $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \sqrt{\dfrac{3}{4-3x^2}}\Bigg)\,dx = \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

(4) $\displaystyle\int_1^2 x^3\log x\,dx = \int_1^2\left(\frac{x^4}{4}\right)'\log x\,dx = \left[\,\frac{x^4}{4}\log x\,\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$$= 4\log 2 - \left[\,\frac{x^4}{16}\,\right]_1^2 = \mathbf{4\log 2 - \frac{15}{16}}$$

6.12 (1) $\displaystyle\int_0^2 |\,x^2-2\,|\,dx = -\int_0^{\log 2}(e^x-2)\,dx + \int_{\log 2}^2 (e^x-2)\,dx$

$$= -\Big[\ e^x - 2x\ \Big]_0^{\log 2} + \Big[\ e^x - 2x\ \Big]_{\log 2}^2$$

$$= (e^0 - 2{\cdot}0) + (e^2 - 2{\cdot}2) - 2(e^{\log 2} - 2\log 2)$$

$$= \boldsymbol{e^2 + 4\log 2 - 7}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin^2(2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x\cos 4x\right)dx$

$$= \left[\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x\sin 4x - \frac{1}{32}\cos 4x\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{36}\pi^2 + \frac{\sqrt{3}}{48}\pi + \frac{3}{64}}$$

(3) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx = \int_1^e (1+\log x)^{\frac{1}{2}}(\log x)'\,dx$

$$= \left[\ \frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}}\ \right]_1^e = \boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}}$$

(4) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x^3+x^2-2x+2}{x^4+x^2-2}\,dx = \int_2^4 \frac{2x(x^2-1)+(x^2+2)}{(x^2-1)(x^2+2)}\,dx$

$$= \int_2^4\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{x^2-1}\right)dx$$

$$= \left[\ \log(x^2+2) + \frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}\ \right]_2^4$$

$$= \boldsymbol{2\log 3 - \frac{1}{2}\log 5}$$

6.13 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x|\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin 2x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$

$$= \left[\ \frac{1}{2}\cos 2x\ \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \left[\ -\frac{1}{2}\cos 2x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{2}$$

6.14 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)dx$

$$= \left[\ \sin x - \frac{x}{2}\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\ \frac{x}{2} - \sin x\ \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boldsymbol{\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}}$$

6.15 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx = \left[\ \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}$

6.16 $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \Big[-\log\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \mathbf{\frac{1}{2}\log 2}$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \Big[\tan x - x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \mathbf{1 - \frac{\pi}{4}}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \tan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \tan x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)' \tan x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \left[\frac{1}{2} \tan^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \text{[illegible]} \mathbf{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2}$$

6.17 (1) $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ より

$$\boldsymbol{f'(x) = -\sin x + x} \text{[illegible]}$$

(2) $x \geqq 0$ のとき，$f''(x) \geqq 0$，$f'($[illegible]

$x \geqq 0$ のとき [illegible] $\geqq f'(0)$ [illegible]ち

ゆえに [illegible] $\geqq 0$ のとき，$f'(x) \geqq 0$，$f(0) =$ [illegible]あるた[illegible]

[illegible] 0 のとき　$f(x) \geqq f(0)$ [illegible] $) \geqq 0$

$$\int^1 \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{\text{[illegible]}} \right. \text{[illegible]}$$

$$= \text{[illegible]} x + \frac{x^3}{\text{[illegible]}} \Big]^1 = \sin 1 - \frac{5}{6}$$

(2) の[illegible]ら，[illegible]とき，$f(x) \geqq$ [illegible]あるから

$$\int^1 \text{[illegible]} \geqq 0$$

[illegible] $- \dfrac{5}{6} \geqq 0$　よって　$\sin 1 \geqq \dfrac{5}{6}$

6.18 (1) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x\text{[illegible]}}$

$$f'(x) = \frac{(1 + x^2) - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(1 + x^2)^2 - (1 - x^2) \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$$

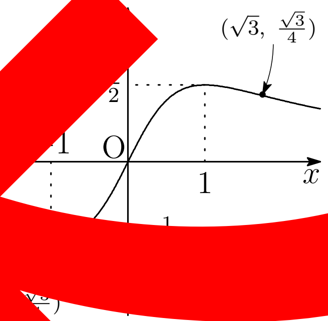
したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	極小 $-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	極大 $\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘

極大値 $f(1)=\mathbf{\frac{1}{2}}$，極小値 $f(-1)=\mathbf{-\frac{1}{2}}$，

変曲点は $\left(\pm\sqrt{3},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ **(複[illegible]順)**

グラフの概形は，右のようになる．



(2) $S(a)=\int_0^a f(x)\,dx=\Big[\frac{1}{2}$ [illegible] $\Big]_0^a$ [illegible]

$S(2a)$ [illegible] $S(a)$ より　$\frac{1}{2}\log(1+4a^2)=$ [illegible] $(1+$ [illegible]

ゆ[illegible]$+4a^2)=\log(1+a^2)^2$　し[illegible]$4a^2$ [illegible]$)^2$

[illegible]する[illegible]$-2)=0$　$a>0$ であ[illegible]　$\boldsymbol{a=\sqrt{2}}$

6.1[illegible] $f(x)$ [illegible] $|\sqrt{1-}$ [illegible]て

[illegible]$)=$ [illegible] $-(-x)^2$ [illegible] $|x|\sqrt{1-x^2}=f(x)$

した[illegible]，$f(x)$ [illegible]数である．

x [illegible]おい[illegible]$\sqrt{1-x^2}$ [illegible]ら

$f'(x)=\sqrt{1}$ [illegible] $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x)$ [illegible]増減[illegible]のようになる．

x	[illegible]	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	[illegible]	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

よって　$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　**最大値** $\mathbf{\frac{1}{2}}$

$x=0,\ \pm1$ のとき　**最小値 0**

(2) $f(x)$ は偶関数であるから

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$= 2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$= \left[\,-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\right]_0^1 = \text{[illegible]}$$

6.20 (1) $f(x) = |e^x - 1|$ とおくと

$$f(x) = \begin{cases} e^x - \text{[illegible]} \\ -(e^x \text{[illegible]} \end{cases}$$

$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき，$a \leqq 0 \leqq$ [illegible]

$$I(a) = \int_a^{a+1} f(x \text{[illegible]} \int_a^0 (e^x - \text{[illegible]} + \int_0 \text{[illegible]}$$
$$= -\Big[\,e^x - x\,\Big]_a^0 + \Big[\,e^x - x\,\Big]_0^a \text{[illegible]}$$
$$\text{[illegible]} - a) + (e^{a+1} - a - 1) - \text{[illegible]}$$
$$\text{[illegible]}\boldsymbol{{}^{a+1} - 2a - 3}$$

(2) a [illegible]のとき [illegible] < 0 であるから

$$I(a) \text{[illegible]} f(x)\,dx \text{[illegible]} \int^{a+1} (e^x - 1)\,dx$$
$$\text{[illegible]} x - x\,\Big]^{a+1} \text{[illegible]} - e^{a+1} + 1$$

[illegible] $< a < a +$ [illegible]から

$$\text{[illegible]} a) = \int_a^{a+1} f(x)\,dx = \int_a^{a+1} (e^x - 1)\,dx$$
$$= \Big[\,e^x - x\,\Big]_a^{a+1} = -e^a + e^{a+1} - 1$$

$a < -1$ の[illegible] $I'(a) = e^a - e^{a+1} = e^a(1-e) < 0$

$0 < a$ のとき　$I'(a) = -e^a + e^{a+1} = e^a(e-1) > 0$

$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき　$I'(a) = e^a + e^{a+1} - 2 = (e+1)\left(e^a - \frac{2}{e+1}\right)$

ここで　$\dfrac{2}{e+1} - \dfrac{1}{e} = \dfrac{e-1}{e(e+1)} > 0,\quad 1 - \dfrac{2}{e+1} = \dfrac{e-1}{e+1} > 0$

ゆえに　$\dfrac{1}{e} < \dfrac{2}{e+1} < 1$　すなわち　$-1 < \log\dfrac{2}{e+1} < 0$

したがって　$-1 < a < \log\dfrac{2}{e+1}$ のとき　$I'(a) < 0$

$\log\dfrac{2}{e+1} < a < 0$ のとき　$I'(a) > 0$ [illegible]

よって，$I(a)$ を最小にする a の [illegible]　$\boldsymbol{a =}$ [illegible]

6.21 $f(x) = (ax + b\cos x)\sin x = ax\sin x + \dfrac{b}{2}$ [illegible]

$f'(x) = a\sin x +$ [illegible]

$f'(0) = 2$ より　$\boldsymbol{b = 2}$

このとき，$f(x) = ax\sin x +$ [illegible] となるから

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax\sin x + \text{si}$ [illegible] x

$= \Big[-ax\cos x + a\,\text{si}$ [illegible] $\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

[illegible] $a + 1$

$\displaystyle\int^{\frac{\pi}{2}}$ [illegible] $dx =$ [illegible] るから

[illegible]　これを解 [illegible]　$\boldsymbol{a = 3}$

6.22 0 [illegible] $\beta \leqq$ [illegible] るから

$S(t)$ [illegible] $|\sin x - \sin t|\,dx$

[illegible] $\sin t - \sin x)\,dx + \displaystyle\int_t^{\beta} (\sin x - \sin t)\,dx$

[illegible] $x\sin t + \cos x\Big]_{\alpha}^{t} + \Big[-\cos x - x\sin t\Big]_t^{\beta}$

$= 2(t\sin t + \cos t) - (\alpha + \beta)\sin t - \cos\alpha - \cos\beta$

これを微分すると　$S'(t) = (2t - \alpha - \beta)\cos t$

したがって，$S(t)$ の増減表は次のようになる．

t	α	$\cdots$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\cdots$	β
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		↘	極小	↗	

よって，$S(t)$ を最小にする t の値は　$\boldsymbol{t = \dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

6.23　(1)　$f(x) = x^2e^{-\frac{x}{a}}$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-\frac{x}{a}} + x^2\left(-\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right) \\ &= -\frac{x}{a}(x-2a)e^{-\frac{x}{a}} \end{aligned}$$

x	$\cdots$	[illegible]	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
[illegible]	[illegible]	[illegible]	$+$	0	$-$
[illegible]	[illegible]	[illegible]小	↗	極大	↘

$a > 0$ であるから，増減表は，[illegible]

よって　　$\boldsymbol{c = 2a}$

(2)　(1) の結果から

$$\begin{aligned} \int_0^c f(x)\,dx &= \int_0^{2a} x^2e^{-\frac{x}{a}}\,d[illegible] \\ &= -a\Big[\,(x^2+2[illegible]a^2)e^{-\frac{x}{a}}\Big]_0^{2a} \\ &= \boldsymbol{2a^3\left(1-\frac{[illegible]}{e^2}\right)} \end{aligned}$$

解[illegible]分積[illegible]より，[illegible]得られる．

$$[illegible]e^{kx}f([illegible]x)-\frac{f'([illegible]}{}[illegible]\frac{[illegible](x)}{k^2}-\frac{f'''(x)}{k^3}+\cdots\Big\}+C$$

[illegible] $= -\dfrac{1}{a}$，$f(x$[illegible]とすると

$$[illegible]^2e^{-\frac{x}{a}}\,dx = -ae^{-x}(x^2+2ax+2a^2)+C$$

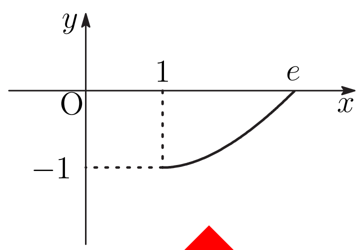
6.24　(1)　$f(x) = x\log$[illegible]を微分すると

$$f'(x) = \log x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \boldsymbol{\log x}$$

(2) (1) の結果から　$f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$

$f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	1	$\cdots$	e
$f'(x)$		$+$	
$f''(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0



よって，$y = f(x)$ のグラフは，右　図のようにな

(3) $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e (x \log x$

$= \Bigg[\dfrac{1}{2}x^2 \log x - \dfrac{3}{}$

6.25 (1) $f(x) = (ax+b)e^x$ より　$f'(x$

$f(x)$ は $x = 2$ で極小値 $-\dfrac{1}{}$　るから，　$=$　f'　より

$(2a+b)e^2 = -\dfrac{1}{3}e^2$，　(　$)e^2 =$

$+ b = -\dfrac{1}{3}$，$3a + b = 0$　解　$a = \dfrac{}{3}$　$= -1$

このと　$\left(\dfrac{1}{3}x - 1\right)e^x$，$f'(x)$　$x - \dfrac{2}{3}\Big) e^x$

f　増減表　なり，

をみ

よっ　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{}}$　$\boldsymbol{-1}$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$= \Bigg(\dfrac{1}{}$　$\Big) e^x$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{3}x - 1\right)e^x\,dx$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right)e^x \right]_0^4 = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

6.26 (1) $\displaystyle\int t^2 e^t\,dt =$　$\boldsymbol{2t + 2)e^t + C}$　**(C は積分定数)**

解説 k を定数とすると

$$\int f(t)e^{kt}dt = \frac{1}{k}\left\{ f(t) - \frac{f'(t)}{k} + \frac{f''(t)}{k^2} - \cdots \right\} e^{kt} + C$$

(2) (1) の結果を用いて

$$\begin{aligned}
F(x) &= -x + \int_0^x (xt - t^2)e^t\,dt \\
&= -x + x\int_0^x te^t\,dx - \int_0^x t^2e^t\,dt \\
&= -x + x\Big[\,(t-1)e^t\,\Big]_0^x - \Big[\,(t^2 - 2t + 2)\text{[illegible]}\Big]_0^x \\
&= -x + x\{(x-1)e^x + 1\} - \{(x^2 \text{[illegible]} - 2\} \\
&= (x-2)e^x + 2\text{[illegible]}
\end{aligned}$$

$F(x)$ を微分すると，$F'(x) = (x -$ [illegible]

ゆえに，$F(x)$ の増減表は，次のよう[illegible]

x	0	$\cdots$	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$F'(x)$		$-$	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$F(x)$	0	$\searrow$	[illegible] $+2$	$\nearrow$	[illegible]

よって，$\boldsymbol{x = 1}$ **のとき最**[illegible] $\boldsymbol{-e+2}$

6.27 (1) $\cos^2$[illegible] $\dfrac{1}{\text{[illegible]}n^2 x}$ であるから

$$\cos\text{[illegible]} - 1 = 2 \times \frac{1}{1+\tan^2 x\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}\ \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \boldsymbol{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

[illegible] x を[illegible]すると $\dfrac{dt}{\text{[illegible]}} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

よって[illegible] $\dfrac{\text{[illegible]}}{dt} = \text{[illegible]}\cos^2 x = \dfrac{\text{[illegible]}}{1+\text{[illegible]}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{1+t^2}}$

[illegible] $\tan$ [illegible]と，(1)[illegible]

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\int_0^{\text{[illegible]}} \text{[illegible]}\frac{x}{\text{[illegible]}2x}\text{[illegible]} = \int_0^1 \frac{t}{2 - \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{t}{1+3t^2}\,dt$$

$$= \left[\,\frac{1}{6}\log(1+3t^2)\,\right]_0^1 = \frac{1}{6}\log 4 = \boldsymbol{\frac{1}{3}\log 2}$$

(3) 与えられた関数の x と y を入れ替えると

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$$

$e^y > 0$ に注意してこれを解くと　$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$

よって，求める逆関数は　$\boldsymbol{y = \log(x + \sqrt{x^2+1})}$

(4) $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ より　$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 + 1} = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \sqrt{x^2+1}$$

上式および (3) の結果により

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int dt = t \ \text{[illegible]}$$

$$= \boldsymbol{\log(x + \sqrt{x^{2}}} \ \text{[illegible]} \ \textbf{は積分定数)}$$

6.28 (1) $0 < a < 1$ のとき，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に [illegible] である [illegible]

$$f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{co[illegible]} = \Big[\ \frac{1}{a}\text{s[illegible]}\ \Big]_0 \ \text{[illegible]} \ \boldsymbol{\pi a}$$

(2) (1) の結果を利用すると

$$f(a) = \lim_{a \to +0} \frac{1}{a} \sin\frac{\pi a}{2} = \text{[illegible]} \frac{\pi a}{2} \ \text{[illegible]} \ \frac{}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

(3) $f($[illegible]$\int_0$ $|$co[illegible] ついて，$t = nx$ とおくと

[illegible] dx $= n$ [illegible]

x	$0 \longrightarrow$ [illegible]
t	$0 \longrightarrow$ [illegible]

よって [illegible] $n)$ [illegible] $\int^{\frac{n}{2}\pi}$ $|$c[illegible] $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{2}\pi}^{\frac{k}{2}\pi} |\cos t|\, dt$

k [illegible] ついて，$\displaystyle\int_{\frac{k-1}{2}\pi} |\cos t|\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\, dt$ であるから

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\, dt$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Big[\ \sin t\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{n}\cdot n = \mathbf{1}$$

6.29 (1) $\displaystyle\int_0^{\log 7} f(x)\,dx = \int_0^{\log 7} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

$$= \Big[\log(1+e^x)\Big]_0^{\log 7} = \log 8 - \log 2 = \mathbf{2\log 2}$$

(2) $(1+e^x)f(x) = e^x$ であるから，この両辺を微分すると

$$e^x f(x) + (1+e^x)f'(x) = e^x$$

上式の両辺を $1+e^x$ で割ると

$$\frac{e^x}{1+e^x}f(x) + f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad [illegible]\}^2 + f'(x) = f(x)$$

$f'(x) = f(x) - \{f(x)\}^2$ であるか[illegible]

(3) $$f(0) = \frac{1}{2},\quad f(\log 7) = \frac{7}{8}$$

(1)，(2) の結果を利用す[illegible]

$$\int_0^{\log 7}\{f(x)\}^2\,dx = \int_0^{\log 7} f(x)\,dx - \int_0^{\log 7} f'(x)\,dx$$

$$= 2\log 2 - \Big[f(x)\Big]_0^{\log 7}$$

$$= 2\log 2 - \left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right) = \mathbf{2\log 2 - \frac{3}{8}}$$

[illegible]の結[illegible]，$\{f(x)\}^3 = \{f(x)\}^2 - f(x)f'(x)$ であるから

$$\int_0^{\log 7}\{f(x)\}^3\,dx = \int_0^{\log 7}\{f(x)\}^2\,dx - \int_0^{\log 7} f(x)f'(x)\,dx$$

$$= 2\log 2 - \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\Big[\{f(x)\}^2\Big]_0^{\log 7}$$

$$= 2\log 2 - \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \mathbf{2\log 2 - \frac{81}{128}}$$

6.30 (1) 証明する[illegible]を (A) とする．

$x = 0$ のとき，(A) は自明であるので，$x > 0$ について，(A) が成り立つことを示す．

［1］ $0 \leqq t \leqq x$ とすると，$e^t \geqq 1$ であるから

$$\int_0^x e^t\,dt > \int_0^x dt \quad ゆえに \quad e^x - 1 > x$$

したがって　　$e^x > x$

よって，$n = 1$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］ $n = k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると

$$\int_0^x e^t\,dt > \int_0^x \frac{t^k}{k[illegible]} \quad ゆえに \quad e^{[illegible]} \frac{[illegible]^{k+1}}{(k+1)!}$$

したがって　　$e^x > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

よって，$n = k+1$ のときも [illegible]

［1］，［2］から，すべての自[illegible]成り立つ．

補足 上の証明において，実際[illegible]1 のと[illegible] $>$ [illegible]式 [illegible]

$x > 0$ のとき，次式が成[illegible]ことが，上[illegible]様にし[illegible]．

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + [illegible] \frac{x^n}{[illegible]}$$

(2[illegible]の結果[illegible] > 0 のとき　$e^x > \dfrac{x^3}{3!}$

ゆ[illegible]$^{-x} < \dfrac{6}{x}$

[illegible] $\dfrac{6}{x}$ = [illegible]るか[illegible]さみうち[illegible]理により

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{[illegible]}$$

([illegible] xe^{-x} [illegible]すると [illegible]^{x}

[illegible]点 $(a,\ ae^{-[illegible]})$ [illegible]ける接線の方程式は

$$y - ae^{-a} [illegible] a)e^{-a}(x-a) \quad すなわち \quad y = e^{-a}\{(1-a)x + a^2\}$$

P の座標は，[illegible]に $y = 0$ を代入して　　$\left(\dfrac{a^2}{a-1},\ 0\right)$

曲線 $y = x$[illegible]点 $(a,\ ae^{-a})$ における法線の方程式は

$$y - ae^{-a} = \frac{e^a}{a-1}(x-a) \quad すなわち \quad y = \frac{e^a}{a-1}(x-a) + ae^{-a}$$

Q の座標は，これに $y = 0$ を代入して　　$(a - a(a-1)e^{-2a},\ 0)$

P，Q の x 座標を，それぞれ x_p，x_q とすると

$$x_p - x_q = \frac{a^2}{a-1} - \{a - a(a-1)e^{-2a}\}$$
$$= 1 + \frac{1}{a-1} + a(a-1)e^{-2a}$$
$$= 1 + \frac{1}{a-1} + \left(1 - \frac{1}{a}\right)\cdot a^2e^{-a}\cdot \ldots$$

$l(a) = |x_p - x_q|$ であることと，(2) の結果から … $= 0$ であること
に注意して

$$\lim_{a\to\infty} \ldots$$

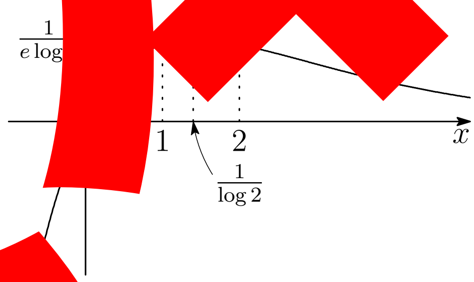
6.31 (1) $f(x) = x\,2^{-x}$ を微分すると

$$f'(x) = 2^{-x} - \ldots \log 2 \ldots \log 2)$$

$f'(x) = 0$ とすると x …

$f(x)$ の増減は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$		0	$-$
$f(x)$		極大	$\searrow$



… $\lim_{x\to-\infty}$ …

… $(x) = 0$ …

$f($…$)$ … $(t+1)$ … $t\,2^{-t} = (t$ … $^{t+1)}$ ゆえに $t = 1$

… $t < 1$ … $g($… すなわち $g(t) = t\,2^{-t}$

… とき $g(t) =$ … すなわち $g(t) = (t+1)\,2^{-(t+1)}$

よって … $\boldsymbol{g}$ … $\begin{cases} \boldsymbol{t\,2^{-t}} & \boldsymbol{(t < 1)} \\ \boldsymbol{(t+1)\,2^{-(t+1)}} & \boldsymbol{(t \geqq 1)} \end{cases}$

(2) (1) の結果から

$$\int_0^2 g(t)\,dt = \int_0^1 t\,2^{-t}\,dt + \int_1^2 (t+1)\,2^{-(t+1)}\,dt$$

$$= \int_0^1 t\,2^{-t}\,dt + \int_2^3 t\,2^{-t}\,dt$$

$$= \left[-\frac{t\,2^{-t}}{\log 2} - \frac{2^{-t}}{(\log 2)^2}\right]_0^1 + \left[-\frac{t\,2^{-t}}{\log 2} - \text{[illegible]}\right]_2^3$$

$$= \left\{-\frac{1}{2\log 2} + \text{[illegible]}\right\} + \left\{\text{[illegible]}\,\frac{1}{8(\log 2)^2}\right\}$$

$$= -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8\log 2}} + \text{[illegible]}$$

6.32 (1) $f(t) = \alpha$ より，$\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = \alpha$ であ[illegible]

$$e^t = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}わち\ \text{[illegible]}$$

条件により，$\alpha > 1$ であ[illegible]

$$\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} > 1$$

$$\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} = \frac{\text{[illegible]}}{\alpha + \text{[illegible]}}$$

[illegible]って[illegible]満たす正の解 T は [illegible]$\mathbf{og(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\,)}$

(2) x[illegible]$) = \dfrac{e^t}{\text{[illegible]}}$ [illegible] $\dfrac{dx}{\text{[illegible]}} = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

x	$1 \longrightarrow \alpha$
t	$0 \longrightarrow T$

また[illegible](t) よ[illegible]$= \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ で[illegible]から

$$\text{[illegible]}\, y\, d\text{[illegible]} \int^T \left(\frac{e^t}{\text{[illegible]}}\right)\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) dt$$

$$\text{[illegible]}\int_0^T (e^{2t} + e\text{[illegible]}2)dt$$

$$= \text{[illegible]}\,e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - 2t\,\Big]_0^T = \frac{1}{8}(e^{2T} - e^{-2T}) - \frac{1}{2}T$$

ここで，(1)[illegible]から

$$\text{[illegible]} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}, \quad e^{-T} = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$$

$$e^{2T} - e^{-2T} = (e^T + e^{-T})(e^T - e^{-T})$$

$$= 2\alpha\cdot 2\sqrt{\alpha^2 - 1} = 4\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1}$$

よって　$I = \frac{1}{2}\{\alpha\sqrt{\alpha^2-1} - \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\,)\}$

別解 (1) の結果から，$0 \leqq t \leqq T$ のとき，$y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} > 0$

また　$x^2 - y^2 = \left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = 1$　ゆえに　$y = \sqrt{x^2-1}$

ここで　$\{\log(x + \sqrt{x^2-1}\,)\}' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(x\sqrt{x^2-1}\,)' = \sqrt{x^2}$ [illegible] $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2}}$ [illegible] $-1 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

したがって　$\{x\sqrt{x^2-1} - \log(x +$ [illegible] $\sqrt{x^2-1}$

よって　$I = \displaystyle\int_1^\alpha y\,dx = \int_1^\alpha \sqrt{}$ [illegible]

$= \dfrac{1}{2}\Big[\, x\sqrt{x^2}$ [illegible] $g(x + \sqrt{}$ [illegible] $1)\Big]_1$ [illegible]

$= \dfrac{1}{2}\{\alpha\sqrt{\alpha^2 -}$ [illegible] $- \log(\alpha + \sqrt{}$ [illegible] $)\}$

6.33 ([illegible] ty と [illegible] $x = tdy$

x と y [illegible] は [illegible] になる．

x	[illegible] $\to t$
y	[illegible] $\to 1$

[illegible] $f($ [illegible] $\displaystyle\int_1$ [illegible] $\frac{1}{x}$ [illegible] $\displaystyle\int_{t^{-1}}^1 \frac{\log ty}{}$ [illegible] $tdy = \displaystyle\int_{t^{-1}}^1 \frac{\log ty}{y+1}dy$

$=$ [illegible] $\dfrac{1}{\ +1}dy + \displaystyle\int$ [illegible] $\dfrac{y}{\ 1}dy$

[illegible] $\frac{}{1}$ の原 [illegible] 数を $F($ [illegible]

$$\int_{t^{-1}}^1 \frac{\log y}{y+1}dy = F(1) - F(t^{-1})$$

$F'(y) = \dfrac{\log y}{y+}$ [illegible] るから

$$\frac{d}{dt}\int_{t^{-1}} \frac{\log y}{y+1}dy = \frac{d}{dt}\{F(1) - F(t^{-1})\} = -F'(t^{-1})\cdot(t^{-1})'$$

$$= -\frac{\log t^{-1}}{t^{-1}+1}\cdot(-t^{-2}) = -\frac{\log t}{t(t+1)}$$

(3) $$\int_{t^{-1}}^{1}\frac{1}{y+1}dy = \Big[\ \log(y+1)\ \Big]_{t^{-1}}^{1} = \log\frac{2}{t^{-1}+1} = \log\frac{2t}{t+1}$$

また $$\frac{d}{dt}\int_{t^{-1}}^{1}\frac{1}{y+1}dy = \frac{d}{dt}\Big[\ \log(y+1)\ \Big]_{t^{-1}}^{1}$$
$$= \frac{d}{dt}\log\frac{2}{t^{-1}+1} = \frac{d}{dt}\{\log 2 - \log(t^{-1}+1)\}$$
$$= -\frac{1}{t^{-1}+1}(t^{-1})' = -\frac{1}{t^{-1}+1}\text{[illegible]}\Big) = \frac{1}{t(t+1)}$$

(2) および上の結果を利用して[illegible]と

$$f'(t) = \frac{1}{t}\int_{t^{-1}}^{1}\frac{1}{y+1}dy + \log t\Big\{\text{[illegible]}\Big\} \ \text{[illegible]}\ \frac{d}{}\int^{1}\log y\ \text{[illegible]}$$
$$= \frac{1}{t}\log\frac{2t}{t+1} + \log t \times \text{[illegible]}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{t}\log\frac{2t}{t+1}}\ \text{[illegible]}$$

(4) $t > 0$ [illegible] (3) の結果から

t [illegible] 1 すなわち $0 < t < 1$ の[illegible] $f'(t) < 0$

[illegible]わち $1 < t$ の[illegible] $f'(t) > 0$

[illegible]て，[illegible]は，次のようになる．

t	(0)	[illegible]	[illegible]	$\cdots$
$f'(t)$	[illegible]	[illegible]	0	$+$
$f(t)$	[illegible]	[illegible]	0	$\nearrow$

[illegible]て[illegible]とき極[illegible]

6.34 (1) [illegible]$-x)^3x^n$ を[illegible]すると
$$\text{[illegible]}) = 3(1-x)^2(-1)\cdot x^n + (1-x)^3\cdot nx^{n-1}$$
$$= (1-x)^2x^{n-1}\{n-(n+3)x\}$$

n が奇数の[illegible]

x	[illegible]	0	$\cdots$	$\frac{n}{n+3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	極大 $\frac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}$	$\searrow$	0	$\searrow$

n が偶数のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{n}{n+3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\frac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}$	$\searrow$	0	$\searrow$

n が奇数のとき　$x = \dfrac{n}{n+3}$ で**極大値** $\boldsymbol{\dfrac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}}$

n が偶数のとき　$x = 0$ で**極小値** [illegible]

$x = \dfrac{n}{n+3}$ で [illegible] $\boldsymbol{27n}$ [illegible]

(2)

$$a_n = \int_0^1 (1-x)^3 x^n \, dx$$

$$= \int_0^1 (x^n - 3x^{n+} \text{[illegible]} {}^2 - x^{n} \text{[illegible]}$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{3}{n+2}x^{n+2} + \text{[illegible]} {}^{n+3} - \text{[illegible]} \right]^1$$

$$\text{[illegible]} - \boldsymbol{\frac{3}{n+2}} + \boldsymbol{\frac{3}{n+3}} - \text{[illegible]}$$

[illegible]

$$= \frac{1}{n \text{[illegible]}} \text{[illegible]} \frac{3}{\text{[illegible]} 3} - \frac{1}{\text{[illegible]}}$$

$$\text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]}}{n+1} \text{[illegible]} \Big) - 2\left(\frac{1}{n+2} \text{[illegible]} \frac{1}{\text{[illegible]} 3}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$$

[illegible]るから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\text{[illegible]}}{n+1} \text{[illegible]} \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{12}}$

6.35 (1) $g(t)=t^6+2t^3-3$ とし，この関数の原始関数を $G(t)$ とすると

$$f(x)=\int_{p-x}^{p} g(t)dt=\Big[\,G(t)\,\Big]_{p-x}^{p}$$
$$=G(p)-G(p-x)\quad\cdots①$$

① を x について微分すると

$$f'(x)=0-G'(p-x)\cdot(p-x)' \text{[illegible]}$$
$$=-\text{[illegible]}\cdot(-1)$$
$$=g(p\text{[illegible]}$$
$$=(p-x)^6\text{[illegible]}$$
$$=\{(p-\text{[illegible]}$$

よって $f'(x)$ が最小となるの[illegible]

$(p-x)^3+1=0$ [illegible]ち　$x=$ [illegible]

のとき[illegible]ある.

(2) ①[illegible]1 を代入すると　$f(p+1)$ [illegible]1)

[illegible]り f[illegible]が最小となるのは $G(p)$ が[illegible]とな[illegible]ときである[illegible]ら

$$\text{[illegible]})=g(p)=p^6+2\text{[illegible]}$$
$$\text{[illegible]}(p^3-1)(p^3+3)$$
$$\text{[illegible]}-1)(p^2\text{[illegible]}+1)(p^3+3)$$

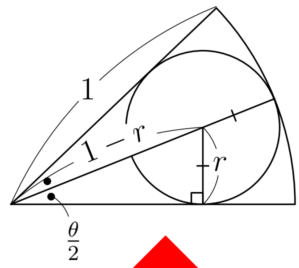
$G(p$[illegible] 0 に[illegible]減表は，次の[illegible]となる.

p	[illegible]			$\cdots$
[illegible]	[illegible]	$-$	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	$\searrow$	極[illegible]	[illegible]

よ[illegible]$p=1$[illegible]最小となり，求める最小値は ② から

$$G\text{[illegible]}G(-1)=\int_{-1}^{1} g(t)\,dt=\int_{-1}^{1}(t^6+2t^3-3)\,dt$$
$$=2\int_{0}^{1}(t^6-3)\,dt$$
$$=2\left[\,\frac{t^7}{7}-3t\,\right]_0^1=-\boldsymbol{\frac{40}{7}}$$

6.36 (1) $r=f(\theta)$ とおくと，右の図から



$$(1-r)\sin\frac{\theta}{2}=r \quad \cdots ①$$

ゆえに $$r=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$$

よって $$\boldsymbol{f(\theta)=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}}$$

(2) $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから $\sin$ [illegible] $\cos\frac{\theta}{2}$ [illegible]

また，$r>0$ であるから，① より [illegible]

① の両辺を θ で微分すると

$$-[illegible]\ \frac{1}{2}([illegible]$$

ゆえに $$\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)[illegible]=\frac{1}{2}(1-r)\,\mathrm{c}[illegible] \quad \cdots ②$$

② [illegible] $+\sin\frac{\theta}{2}>0$，$1-r>0$，c[illegible] るから [illegible] 0

[illegible] に，[illegible] θ で微分すると

$$[illegible]\frac{1}{2}r'\,\mathrm{c}[illegible]\sin\frac{\theta}{2}\Big)\,r''=-\frac{1}{2}r'\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}(1-r)\sin\frac{\theta}{2}$$

ゆえに $$\Big(1[illegible]\Big)\,r''=-\left\{r[illegible]+\frac{1}{4}(1-r)\sin\frac{\theta}{2}\right\}$$

[illegible] において [illegible] 0，[illegible] 0，$\sin$ [illegible]，$\cos\frac{\theta}{2}>0$ であるから $r''<0$

[illegible] $0<\frac{\theta}{2}<\frac{[illegible]}{2}$ [illegible] $r'>0$，$r''<0$

よ [illegible] π の範囲で，$f(\theta)$ は単調増加，$f'(\theta)$ は単調減少．

補足 $f'(\theta)=\frac{[illegible]\frac{\theta}{2}}{[illegible]\sin\frac{\theta}{2})^2}>0$，$f''(\theta)=\frac{\sin\frac{\theta}{2}-2}{4\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}<0$

(3) $x = \dfrac{\theta}{2}$ とおくと $\dfrac{d\theta}{dx} = 2$

θ	$\frac{\pi}{3} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
x	$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,d\text{[illegible]}$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x + \sin x - 1}{\text{[illegible]}\cos^2 x}\text{[illegible]}$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 \text{[illegible]}\right) dx$$

$$= 2\Big[\, x + \text{[illegible]}$$

$$= \text{[illegible]} + \boldsymbol{2\sqrt{2}} \text{[illegible]}$$

6.37 (1) 円 x^2 [illegible] $-1)^2 = 1$ の中心 $(1,\ 0)$ を C と[illegible]

[illegible] $\left(\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta - \text{[illegible]}\right)\right.$ [illegible] $, -\cos\theta)$

したが[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{O}\text{[illegible]}} + \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = (0,\ 1) + ($[illegible]$-\cos\theta) = (\sin\theta,\ 1-\cos\theta)$

[illegible] **Q**[illegible]**,** [illegible]$\boldsymbol{s\,\theta)}$

[illegible]P $=$ Q[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ [illegible]は，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ を[illegible]け回転させたものであるから

[illegible] $=$ Q[illegible] $\text{[illegible]}\pi\Big),\ -\text{co[illegible]}\,\text{[illegible]}2\Big)\Big) = \theta(-\cos\theta, -\sin\theta)$

[illegible]が[illegible]P $= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} +$ [illegible]

$$= (\sin\theta,\ 1-\cos\theta) + \theta(-\cos\theta, -\sin\theta)$$

$$\text{[illegible]}(\sin\theta - \theta\cos\theta,\ 1-\cos\theta-\theta\sin\theta)$$

よって **P**[illegible] $\boldsymbol{-\ \theta\cos\theta,\ 1-\cos\theta-\theta\sin\theta)}$

(3) (2) の結果か[illegible]$(\theta) = 1-\cos\theta-\theta\sin\theta$ であるから

$$f'(\theta) = \sin\theta - \sin\theta - \theta\cos\theta = -\theta\cos\theta$$

したがって，$f(\theta)$ の増減表は

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	0	$\searrow$	$1-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	2

よって，$\theta=\pi$ のとき**最大値 2**，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$のとき **最小値 $\mathbf{1-\dfrac{\pi}{2}}$**

(4) (2) の結果により

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos\theta-\theta\sin\theta) \text{[illegible]}$$

$$= \Big[\,\theta - \text{[illegible]} \Big]^{\frac{\pi}{2}} + \text{[illegible]} \theta)'\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 + \Big[\text{[illegible]}$$

$$= \frac{\pi}{\text{[illegible]}} \text{[illegible]} \sin \text{[illegible]}$$

6.38 (1)

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \int_1 \text{[illegible]} (3t-4x)t\,\mathrm{lo}\text{[illegible]}$$

$$= \frac{1}{2}x + 3\int_1^{2x} t^2\log t\,dt - \text{[illegible]} \int^{2x} \text{[illegible]} dt$$

[illegible]を微[illegible]

$$\text{[illegible]}) = \text{[illegible]})^2\log 2x - 4\int_1^{2\text{[illegible]}} \text{[illegible]} t\,dt - 4x\cdot 2\cdot 2x\log 2x$$

$$\text{[illegible]} 2 + 8x^2 \text{[illegible]} - 4\int_1^{2x} \text{[illegible]} t\,dt \quad \cdots ②$$

こ[illegible]

$$\int^{2x} \text{[illegible]} \frac{1}{2}\int_1^{2x} (t^2)' \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]} \Big]_1 - \frac{1}{2}\int_1^{2x} t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}(2x)^2\log 2x - \frac{1}{4}\Big[\, t^2 \,\Big]_1^{2x}$$

$$= 2x^2\log 2x - x^2 + \frac{1}{4} \quad \cdots ③$$

③ を ② に[illegible]ると

$$\text{[illegible]}(x) = \frac{1}{2} + 8x^2\log 2x - 4\left(2x^2\log 2x - x^2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$= 4x^2 - \frac{1}{2} \quad \cdots ④$$

$f'(x)=0$ のとき　$4x^2-\dfrac{1}{2}=0$　$x>0$ に注意して　$\boldsymbol{x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

(2) ④ を積分すると　$f(x)=\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{x}{2}+C$　(C は積分定数)

① より，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$ であるから，上式に $x=\dfrac{1}{2}$ を代入すると

$\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{4}+C=\dfrac{1}{4}$　ゆえに　$C=$ [illegible]　よって　[illegible] $x^3-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}$

増減表は右のようになるから

$x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき**極小値** $\boldsymbol{\dfrac{4-\sqrt{2}}{12}}$

[illegible]	[illegible]	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\cdots$
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

解説 関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを [illegible]

$$\int_a^{g(x)} f(t)\,[illegible]\Big[F(t)\Big]_a^{g(x)}[illegible](x))$$

これ [illegible] 分すると

$$[illegible]\int^{g(x)} f(t)\,dt=F'(g(x))g'[illegible]f(g(x))g'(x)$$

本 [illegible]

$$\frac{d}{dx}[illegible]\,dt=f(2[illegible](2x)'=2f(2x)$$

[illegible] $\displaystyle\int^{\pi}$ [illegible] $x\,dx=$ [illegible] $x\,dx=2\displaystyle\int$ [illegible] $\cos x)'\,dx$

$=2\Big[-x\cos$ [illegible] $-\cos x)\,dx$

$+2\Big[\sin x\Big]_0 = \boldsymbol{2\pi}$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\sin$ [illegible] $=2\displaystyle\int_0^{\pi}\sin 2x\sin 3x\,dx$

$=\displaystyle\int_0^{\pi}(-\cos 5x+\cos x)\,dx$

$=\left[-\dfrac{1}{5}\sin 5x+\sin x\right]_0^{\pi}=\mathbf{0}$

(3) $m = n$ のとき

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 2\int_0^{\pi} \sin^2 mx\,dx \\
&= \int_0^{\pi} (1 - \cos 2mx)\,dx \\
&= \left[x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\pi}
\end{aligned}
$$

$m \neq n$ のとき

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 2\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \{-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^{\pi} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

(4) (3) の結果を利用すると

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{2013}\sin kx\right)^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m=1}^{2013}\sin mx\right)\left(\sum_{n=1}^{2013}\sin nx\right)dx \\
&= \sum_{m=1}^{2013}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\,dx \\
&= \sum_{m=1}^{2013}\pi = \boldsymbol{2013\pi}
\end{aligned}
$$

6. 与式から $\sin x - \sqrt{3}\cos x < 0$

左辺の三角関数を合成して

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < 0$$

よって $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < 0 \quad \cdots ①$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ より

$$-\frac{4}{3}\pi \leqq x - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{2}{3}\pi$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$-\pi < x - \frac{\pi}{3} < 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{-\frac{2}{3}\pi < x < \frac{\pi}{3}}$$

(2) (1) の結果から

$$-\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{\pi}{6} \text{ において} \quad \sqrt{3}\cos x - \sin x > 0$$

ゆえに

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\, dx \quad \cdots ②$$

ここで

$$4\sin x = a(\sqrt{3}\cos x - \sin x) + b(\sqrt{3}\cos x - \sin x)'$$

をみたす定数 a，b を求める．上式の[illegible]

$$4\sin x = a(\sqrt{3}\cos x - \sin x) + b(-\sqrt{3}\sin x - \cos x)$$
$$= (-a - \sqrt{3}b)\sin x + (\sqrt{3}a - b)\cos x$$

係数を比較して　$4 = -a - \sqrt{3}b$，$0 = \sqrt{3}a - b$

これを解いて　$a = -1$，$b = -\sqrt{3}$

ゆえに　$\dfrac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} = -1 - \sqrt{3} \times \dfrac{(\sqrt{3}\cos x - \sin x)'}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}$

したがって

$$-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\, dx$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \left\{ -1 - \sqrt{3} \times \frac{(\sqrt{3}\cos x - \sin x)'}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right\} dx$$

$$= \Big[x + \sqrt{3}\log|\sqrt{3}\cos x - \sin x| \Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} = \frac{\pi}{3} \quad \cdots ③$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left\{ -1 - \sqrt{3} \times \frac{(\sqrt{3}\cos x - \sin x)'}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right\} dx$$

$$= \Big[-x - \sqrt{3}\log|\sqrt{3}\cos x - \sin x| \Big]_{0}^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3 \quad \cdots ④$$

③，④ を ② に代入して　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx = \boldsymbol{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3}$

別解 (1) の結果から

$$-\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{\pi}{6} \text{ において} \quad \sqrt{3}\cos x - \sin x > 0$$

ゆえに

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\,dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{2\sin x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}\,dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}\,dx \end{aligned}$$

ここで，$t = x - \dfrac{\pi}{3}$ とおくと $\quad \dfrac{dt}{dx} = 1$

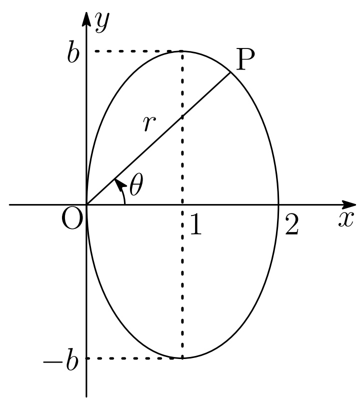
x	$-\frac{\pi}{3} \to 0 \to \frac{\pi}{6}$
t	$-\frac{2}{3}\pi \to -\frac{\pi}{3} \to -\frac{\pi}{6}$

$$2\sin x = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \sin t + \sqrt{3}\cos t$$

したがって

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{-\frac{\pi}{3}} \left(1 + \sqrt{3}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \left(1 + \sqrt{3}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt \\ &= \Big[t + \sqrt{3}\log|\sin t|\Big]_{-\frac{2}{3}\pi}^{-\frac{\pi}{3}} - \Big[t + \sqrt{3}\log|\sin t|\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\log\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3} \end{aligned}$$

6.41 $(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を代入すると



$$(r\cos\theta - 1)^2 + \frac{(r\sin\theta)^2}{b^2} = 1$$

$$r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2} = 0$$

$$r\left\{r\left(b^2\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) - 2b^2\cos\theta\right\} = 0$$

したがって

$$r = 0 \quad \text{または} \quad r = \frac{2b^2\cos\theta}{b^2\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

上式の第 2 式は，$\cos\theta = 0$ のとき $r = 0$ であるから，E を表す極方程式を次のように定めてよい．

$$\boldsymbol{f(\theta) = \frac{2b^2\cos\theta}{b^2\cos^2\theta + \sin^2\theta}}$$

(2) (1) より，E は，一般性を失うことなく，次のように定めることができる．

$$f(\theta) = \frac{2b^2\cos\theta}{(b^2-1)\,[illegible]\,\theta + 1} \quad \left(-\frac{\pi}{[illegible]}\ [illegible]\ \frac{[illegible]}{2}\right)$$

$f(\theta)$ の最大値について，次の 3 [illegible] 分 [illegible]

i) $b^2 - 1 < 0$ のとき

$$b^2 \leqq (b^2-1)\cos^2\theta\ [illegible]$$

$\theta = 0$ で $(b^2-1)\cos^2\theta$ [illegible] $2b$ [illegible] るから [illegible] は，点 $(2,\ 0)$ で最大値を [illegible] れは条件 [illegible] する [illegible]

ii) $b^2 - 1 = 0$ のとき　f [illegible] $= 2\cos\theta$

[illegible] すなわち点 $(2,\ 0)$ で $f(\theta)$ は最大 [illegible] ， [illegible] する．

[illegible] のとき，$f(\theta)$ は，$\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$ [illegible] る．u [illegible] とおくと，[illegible] 以外で最大値をもつの [illegible] $< u < 1$ の範囲 [illegible]，次式が [illegible] めの条件を求めれ [illegible]

$$f(\theta)\ [illegible]\ \theta\ [illegible] + 1 = \frac{2b^2u}{[illegible] - 1)u^2 + 1} = \frac{2b^2}{(b^2-1)u + \dfrac{1}{u}}$$

[illegible] $= (b^2$ [illegible] とおくと，[illegible] $0 < u < 1$ で最小値もつため [illegible] 条件 [illegible] れば [illegible]

$$[illegible]^2 - 1 - \frac{1}{u^2}\ [illegible]\ \frac{[illegible]}{u^2}\left(u + \frac{1}{\sqrt{b^2-1}}\right)\left(u - \frac{1}{\sqrt{b^2-1}}\right)$$

$g(u)$ の増 [illegible] 右のように，b は次式を [illegible] ばよい．

u	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{b^2-1}}$	$\cdots$	1
$g'(u)$		$-$	0	$+$	
$g(u)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$[illegible]\ \frac{1}{[illegible]\,b^2 - 1} < 1$$

$b > 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{b > \sqrt{2}}$

(3) (2) の結果より　$\cos\theta_0 = \dfrac{1}{\sqrt{b^2-1}}$

また，$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\theta_0 = \sqrt{\frac{b^2-2}{b^2-1}}$

$$\int_0^{\theta_0} f(\theta)\,d\theta = \int_0^{\theta_0} \frac{2b^2\cos\theta}{b^2-(b^2-1)\sin^2\theta}\,d\theta$$

$t = \sqrt{b^2-1}\sin\theta$ とすると　$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{b^2-1}\cos\theta$

θ	$\longrightarrow$ θ_0
	$\to$ $\sqrt{b^2-2}$

θ と t の対応は，右のようになる．よって

$$\int_0^{\theta_0} f(\theta)d\theta = \frac{}{\sqrt{b^2-}} \cdots \int^{\sqrt{b^2-2}} \cdots \frac{}{t^2}\,dt$$

$$= \frac{b}{\sqrt{b^2-}} \cdots$$

$$= \cdots \Big[\,\mathrm{l} \cdots \Big]^{\sqrt{b^2-2}} \cdots$$

$$\boldsymbol{\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\log \cdots \frac{\sqrt{b^2} \cdots}{\sqrt{b^2-} \cdots}}$$

6.42　(1) 漸

$$\int^x t f_0(t)\,dt = 1 - \int \cdots$$

$$= 1 - \cdots {}_1(t)\,dt = \cdots \int^x t\left(1-\frac{1}{2}t^2\right)dt$$

$$\cdots + \boldsymbol{\frac{1}{8}x^4}$$

$$= 1 - \int_0 \cdots - \int_0^x t\left(1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{8}t^4\right)dt$$

$$\boldsymbol{\cdots - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6}$$

(2) (1) の結果か

$$\cdots{}_n(x) - f_{n-1}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{x^{2n}}{n!} \qquad \cdots(*)$$

と推測し，これを数学的帰納法により証明する．

[1]　$n=1$ のとき，(1) の結果から $(*)$ が成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つ，すなわち

$$f_k(x)-f_{k-1}(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)^k\cdot\frac{x^{2k}}{k!}$$

であると仮定すると

$$f_{k+1}(x)-f_k(x)=1-\int_0^x tf_k(t)\,dt-\left(1-\int_0^x [illegible]_{k-1}(t)\,dt\right)$$

$$=-\int_0^x [illegible] f_k(t)-f_{k-1} [illegible]$$

$$=-\int_0 [illegible]$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+} [illegible]$$

したがって，$n=k+1$ [illegible] $(*)$ [illegible]

［1］，［2］から，$n\geqq 1$ [illegible] 自然数 n [illegible] いて，[illegible].

(3) (1) の結果より

$$f_1(1)=\frac{1}{2},\ f_2(1)= [illegible] 48$$

[illegible] たが [illegible] 2，3 のとき

$$\frac{1}{2}\leqq f_n(1)\leqq\frac{[illegible]}{8}\qquad\cdots(**)$$

[illegible] り立 [illegible]

$(*)$ よ [illegible] $\geqq 4$ の [illegible]

$$[illegible]_n(1 [illegible] (1)| [illegible] \frac{1}{n!}\leqq\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{k=4}^{n}|f_k [illegible] f_{k-1}(1)|\leqq\frac{1}{4!}\sum_{k=4}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{4!}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$<\frac{1}{192}$$

ここで

$$\sum_{k=4}^{n}|f_k(1)-f_{k-1}(1)|\geqq\left|\sum_{k=4}^{n}(f_k(1)-f_{k-1}(1))\right|=|f_n(1)-f_3(1)|$$

上の 2 式から　　$|f_n(1)-f_3(1)|<\dfrac{1}{192}$

したがって，$n \geqq 4$ のとき

$$f_3(1)-\frac{1}{192}<f_n(1)<f_3(1)+\frac{1}{192}$$
$$\frac{29}{48}-\frac{1}{192}<f_n(1)<\frac{29}{48}+\frac{1}{192}$$
$$\frac{1}{2}<\frac{115}{192}<f_n(1)<\frac{117}{192}<\ \text{[illegible]}$$

よって，$n \geqq 1$ のとき，$(**)$ が[illegible]

6.43　(1)　$f(x)=\displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\ \Bigl(0 \leqq$ [illegible]

$$f'(x)=\log_4\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{\text{[illegible]}}\right.\right.\ \text{[illegible]}\ (1+\tan\ \text{[illegible]})'$$
$$=-\log_4\left\{1+\ \text{[illegible]}\ x)\right\}-\ \text{[illegible]}$$
$$=-\log_4\left\{1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right\}\ \text{[illegible]}\ (1+\ \text{[illegible]}$$
$$\text{[illegible]}\ \frac{2}{1+\tan x}-\log_4(1+\text{ta[illegible]}$$
$$\text{[illegible]}\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

(2) [illegible] $8\Bigr)=$ [illegible] $\log_4(1+$ [illegible] $)\,dt=0$

上式[illegible] (1) [illegible]

$$f(x)=\ \text{[illegible]}\ (t)\,dt$$
$$=0+\int_{\frac{\pi}{8}}\text{[illegible]}\left(-\frac{1}{2}\right)dt=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$$

よって　　f [illegible] $\dfrac{1}{2}\left(0-\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{16}}$

(3)　(2) の結果[illegible] $a_1=f(0)=\dfrac{\pi}{16}$，$a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{\pi}{16}$

ゆえに　$a_{n+1} - \frac{\pi}{24} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{\pi}{24}\right)$

数列 $\left\{a_n - \frac{\pi}{24}\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{\pi}{24}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n - \frac{\pi}{24} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1 - \frac{\pi}{24}\right)$$

よって　$a_n = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{48}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{24}\left\{1 - \left(\right.\right.}$ [illegible]

6.44　(1) x の値に対して，次式を満たす [illegible] $< \theta <$ [illegible] る.

$$\sin\theta = \text{[illegible]}$$

このとき，$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2x^2}}$ で [illegible]

$$\sin t - a \text{ [illegible] } \sqrt{1+ \text{[illegible]}} \sin \text{[illegible]}$$

したがって

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin t - ax \text{ [illegible] } t\right.$$

$$= \sqrt{1+a^2x^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{[illegible]} - \theta)|\,dt$$

i) [illegible] のとき [illegible] $< \frac{\pi}{2}$ であるから

$$f \text{ [illegible] } \sqrt{1+ \text{[illegible]}} \left\{\int_0^\theta \{- \text{[illegible]} \theta)\}\,dt + \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \sin(t-\theta)\,dt\right\}$$

$$\text{[illegible]} \left\{\Big[\cos(t \text{ [illegible] }\Big]_0 + \Big[-\cos(t-\theta)\Big]_\theta^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$\sqrt{1+a^2 \text{[illegible]}} \cos\theta)$$

$$\sqrt{1+a^2x^2} \text{ [illegible] } 1$$

ii) $x < 0$ の [illegible] $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ であるから

$$f(x) = \sqrt{1+a^2x^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t-\theta)\,dt$$

$$= \sqrt{1+a^2x^2}\Big[-\cos(t-\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sqrt{1+a^2x^2}\,(-\sin\theta + \cos\theta)$$

$$= -ax + 1$$

i), ii) より $\quad \boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{1+a^2x^2} - ax - 1 & (x \geqq 0) \\ -ax + 1 & (x < 0) \end{cases}}$

(2) $x < 0$ で $f(x)$ は単調減少.

$x \geqq 0$ のとき

$$f'(x) = \frac{2a^2x}{\sqrt{1+a^2x^2}} - a = \frac{a(2ax - \sqrt{1+a^2x^2})}{\sqrt{1+a^2 [illegible]}}$$

$$= \frac{a(3a^2x^2 - 1)}{\sqrt{1+a^2x^2} [illegible] \sqrt{1+ [illegible]}}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次[illegible]

x	$\cdots$	0	$\cdots$	[illegible]	[illegible]
$f'(x)$	$-$		$-$	[illegible]	[illegible]
$f(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$	[illegible]-1	[illegible]

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{\sqrt{3}a}}$ のとき[illegible]**小値** $\boldsymbol{\sqrt{3} -}$ [illegible]る.

別解 x [illegible]て，$f(x)$ は単調減少であるか[illegible]の最

[illegible]い. (1) により

$$[illegible] + a^2x^2} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad [illegible] \tan\theta$$

[illegible]，$g(\theta)$ [illegible](x) [illegible]

$$[illegible] \frac{[illegible]}{\cos\theta} - \tan\theta \quad [illegible] \left(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$[illegible](\theta) [illegible] \frac{[illegible]\theta - 1}{[illegible]}$$

[illegible]) の増減表[illegible]ようになる.

θ	[illegible]	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$	[illegible]	$-$	0	$+$	
$g(\theta)$	[illegible]	$\searrow$	極小 $\sqrt{3}-1$	$\nearrow$	

また，ax [illegible]θ により，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}a}$

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{\sqrt{3}a}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\sqrt{3} - 1}$ をとる.

6.45 (1)

$$f(x)=\int_0^1 e^{|t-x|}dt$$

i) $x \leqq 0$ のとき

$$f(x)=\int_0^1 e^{t-x}\,dt=\Big[\,e^{t-x}\,\Big]_0^1=e^{1-x}-e^{-x}$$

ii) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$f(x)=\int_0^x e^{-t+x}\,dt+ [illegible] dx=\Big[[illegible] \Big]_0+\Big[\,e^{t-x}\,\Big]_x^1$$
$$=e^x+e^{1-x}-2$$

iii) $1 \leqq x$ のとき

$$f(x)=\int_0^1 e [illegible] \Big[[illegible] \Big]_0 [illegible] -e^{x-1}$$

よっ[illegible] $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} e^{1} [illegible] -e^{-x} & ([illegible]) \\ e^{x}+e^{1-x}-2 & ([illegible] \leqq [illegible] \\ e^{x}-e^{x-1} & ([illegible] \end{cases}}$

([illegible] $x <$ [illegible] $f'(x)=e^x-e^{1-x}=e^{1}$ [illegible] $^{-1}-1)$

した[illegible]，$f($[illegible]減表は次のように[illegible]

x	[illegible]	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	[illegible]	0	[illegible]	
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

[illegible] x [illegible] $\boldsymbol{2(e^{\frac{1}{2}}}$ [illegible]

6.46 (1)

$$[illegible] =\cos\theta,\quad b=\sin\theta\quad \left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\, a\sin x - b\cos x \,|\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos\theta\sin x - \sin\theta\cos x|\, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x-\theta)|\, dx$$
$$= -\int_0^{\theta} \sin(x-\theta) + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-\theta)\, dx$$
$$= \Big[\ \cos(x-\theta)\ \Big]_0^{\theta} - \Big[\ \text{[illegible]}\ \theta)\ \Big]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 2 - \cos\theta - \sin\theta \quad \cdots ①$$
$$= \boldsymbol{2 - a - b}$$

(2) ① から

$$S \text{ [illegible] } \sqrt{2}\sin\left(\text{[illegible]} \right)$$

よって [illegible] $= 0,\ \dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{(a,\ b) =}$ [illegible] $\boldsymbol{, (0,}$ [illegible] 最大値 **1**

[illegible] すなわち　$\boldsymbol{a = b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ [illegible] 値 **2**

6.47 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x$ [illegible] dx [illegible] $\left(-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)' dx$

[illegible] $\Big[\ -$ [illegible] $\Big]_{-\pi}^{\pi} - \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right) dx$

[illegible] $\dfrac{1}{4}\sin 2x\ \Big]_{-\pi}^{\pi}$ [illegible]

[illegible] n のと [illegible]

$\displaystyle\int_{-\pi}$ [illegible] $dx = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}$ [illegible] $n-n)x - \cos(m+n)\}dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\ \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x - \frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\ \right]_{-\pi}^{\pi} = \mathbf{0}$$

$m = n$ のと [illegible]

$$\int_{-\pi} \sin^2 mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2mx)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\ \right]_{-\pi}^{\pi} = \boldsymbol{\pi}$$

(3)
$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} x\,(-\cos x)'\,dx$$
$$= \Big[-x\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos x)\,dx$$
$$= 2\pi + \Big[\sin x\Big]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

上式および，(1)，(2) の結果を用いて

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a\sin x - b\sin 2x)^2 \text{ [illegible]}$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx + a^2\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx + \text{ [illegible] } dx$$
$$- 2a\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx - 2b \text{ [illegible] } \int_{-\pi}$$
$$= \frac{2}{3}\pi^3 + a^2\pi + b^2\pi - 2a \text{ [illegible] } (-\pi \text{ [illegible] } b$$
$$= \pi a^2 - 4\pi a + \pi b^2 + \text{ [illegible] } \frac{2}{3}\pi^3$$
$$= \text{[illegible]} 2)^2 + \pi(b+1)^2 + \frac{2}{3}\pi^3 - 5\pi$$

[illegible]て [illegible] $= -1$ のとき最小値 $\frac{2}{3}$ [illegible] 5π

(琉球 [illegible] 011)

[illegible] (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ d [illegible] 2

$$I_1 = \text{[illegible]} n^2 x\,d \text{ [illegible] } (1-\cos 2x) \text{ [illegible] } \frac{1}{2}\Big[x - \frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

[illegible] 以上 [illegible] のと [illegible]

$$\text{[illegible]} in^{2n} x\,dx = \text{ [illegible] } \sin^{2n-1} x(\cos x)'$$
$$= \text{[illegible]} x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x\cos^2 x\,dx$$
$$= \text{[illegible]} 1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx$$
$$\text{[illegible]} - 1)I_{n-1} - (2n-1)I_n$$

したがって　$2nI_n = (2n-1)I_{n-1}$　よって　$\boldsymbol{I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1}}$

(3) (2) の結果から

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0 \\
&= \frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{(2n)^2(2n-2)^2\cdots4^2\cdot2^2}I_0 \\
&= \boldsymbol{\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

6.49 (1) $I_n = \int_0^\pi \sin^n(\alpha+x)\,dx$ とおく

$I_n = \int_0^\pi \sin^{n-1}(\alpha+x)\{-\cos(\alpha+$

$= \Big[\sin^{n-1}(\alpha+x)\{-\cos($

$- \int_0^\pi (n -$ $(\alpha+x$ $+$ dx

$=$ $(-1)^n \sin\alpha^{n-1}\cos\alpha + \sin^{n-1}\alpha\,c$

$+ (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2}(\alpha+x)$ $)\}\,d$

$= ($ $-(n-1)I_n$

し　　て　　$\frac{1}{}I_{n-2}$

って　$\int_0$ si　$x)\,dx =$ $\int^\pi \sin^{n-2}(\alpha+x)\,dx$

$\frac{a}{\sqrt{}}$　$\frac{b}{^2+}$　と

$a\sin x +$　$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+x)$

した　って　$(a\sin x + b\cos x)^6\,dx = (a^2+b^2)^3 I_6$

(1) の結果か

I　$,\quad \frac{I_4}{I_2} = \frac{3}{4},\quad \frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{2}$　ゆえに　$I_6 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0$

よって　$\displaystyle\int_0^{\pi}(a\sin x + b\cos x)^6\,dx = (a^2+b^2)^3 I_6$

$$= (a^2+b^2)^3\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0$$

$$= \frac{5}{16}(a^2+b^2)^3\int_0^{\pi}dx$$

$$= \boldsymbol{\frac{5}{16}(a^2+b^2)^3}\ \text{[illegible]}$$

6.50　(1) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta\,d\theta = \Big[-\log\cos$ [illegible] $-\log\frac{1}{\ \ }$ [illegible] $\mathbf{og\ 2}$

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta + \text{[illegible]}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n \text{[illegible]}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{[illegible]} \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \text{ [illegible] } \tan \text{[illegible]}$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \text{[illegible]}$$

([illegible] $\theta \leqq \frac{\pi}{\ }$ [illegible] $0 \leqq \tan\theta \leqq 1$ であ [illegible]

[illegible] $\tan^n\theta$ [illegible] ゆえに　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta \geqq \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+1}\theta\,d\theta$

[illegible]って [illegible] $\geqq I_n$ [illegible] $= 1, 2, 3, \cdots$

[illegible] $_n + I$ [illegible] $I_n \geqq I_{n+}$ [illegible] より

[illegible] $\geqq I_n + I_{n+2}$ [illegible] 1　ゆえに　$I_n \geqq \dfrac{1}{2(n+1)}$

次に，$I_{n-2} +$ [illegible] $\dfrac{1}{n-1}$，$I_{n-2} \geqq I_{n-1} \geqq I_n$ より

[illegible] $I_{n-2} + I_n = \dfrac{1}{n-1}$　ゆえに　$I_n \leqq \dfrac{1}{2(n-1)}$

したがって　$\dfrac{1}{2(n+1)} \leqq I_n \leqq \dfrac{1}{2(n-1)}$

$$\frac{n}{2(n+1)} \leqq nI_n \leqq \frac{n}{2(n-1)}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n-1)}=\frac{1}{2}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{2}}$$

別解 $I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$ より $nI_n+\dfrac{n}{n+2}\cdot(n+2)I_{n+2}=\dfrac{n}{n}$ [illegible]

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n=\lim_{n\to\infty}(n+2)I_{n+2}=\alpha$ とおくと，$n\longrightarrow$ [illegible]

$\alpha+1\cdot\alpha=$ [illegible] て [illegible]

6.51 (1) $f(x)=x^ne^{1-x}$ を微分すると $f'(x)=$ [illegible]

$0<x<1$ において，$f'(x)>0$ で [illegible]

$f(0)<f(x)<$ [illegible] よ [illegible] $)<1$

(2) $I_1=\displaystyle\int_0^1 xe^{1-x}\,dx=$ [illegible] $\displaystyle\int_0^1 x(e^{1-x})'$ [illegible]

[illegible] $\Big[xe^{1-x}\Big]_0^1+\displaystyle\int_0^1 e^{1-x}\,dx$

[illegible] $e^{1-x}\Big]_0^1=\boldsymbol{e-2}$

I_{n+1} [illegible] x^{n+} [illegible] $=-\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}(e^{1-x})'\,dx$

$=-\Big[$ [illegible] $\Big]_0^1+\displaystyle\int_0^1(n$ [illegible] $e^{1-x}\,dx$

[illegible] $+(n$ [illegible]

[illegible] $\boldsymbol{(n+1)I}$ [illegible]

(3) I_{n+1} [illegible] $(n+$ [illegible] 1 の両辺を $(n+1)!$ で割ると

$\dfrac{I_{n+}}{(n+}$ [illegible] $\dfrac{I_n}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$ ゆえに $a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{(n+1)!}$

$n\geqq 2$ のと [illegible] $_1-a_n=\dfrac{1}{n!}$ であるから

$$\sum_{k=2}^{n}(a_{k-1}-a_k)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\quad \text{よって}\quad a_1-a_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$$

(4) (3) の結果から　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + a_1 - a_n$

また　$a_1 = \dfrac{I_1}{1!} = e - 2$

$0 < f(x) < 1$ および $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ から　$0 < I_n < 1$

ゆえに　$0 < a_n < \dfrac{1}{n!}$　したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = 1 + (e-2) - \ldots e - 1$

6.52 (1) 与えられた関数列により

$$f_2(x) = re^{-2rx} \int_0^x f_1(t)e^{2rt}\,d\ldots$$

$$= e^{-2rx}\Big[\, e^{rt} \,\Big]^x \ldots$$

$$f_3(x) = 2re^{-3rx} \ldots e^{3rt}\,dt = \ldots \int_0 \ldots$$

$$= e^{-3rx}\Big[\, e^{2rt} - 2e^{rt} \,\Big]_0^x = e\ldots$$

$$\ldots \boldsymbol{e^{-3rx}(e^{rx}-1)^2}$$

…) の結…

$$\ldots e^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-1} \quad \cdots \text{(A)}$$

…測す…

[1] n … とき … $= e^{-rx}(e^{rx} - \ldots e^{-rx}$

…て，n … (A) が成…

… $= k$ の … (A) … 立つ … ち

$$\ldots (e^{rx}-1)^{k-1}$$

…る … すると

$$f_k\ldots = kre^{-(k+1)rx} \int_0^x f_k(t)e^{(k+1)rt}\,dt$$

$$= kre^{-(k+1)rx} \int_0^x (e^{rx}-1)^{k-1}e^{rt}\,dt$$

$$= e^{-(k+1)rx} \int_0^x k(e^{rt}-1)^{k-1}(e^{rt}-1)'\,dt$$

$$= e^{-(k+1)rx}\Big[\, (e^{rt}-1)^k \,\Big]_0^x = e^{-(k+1)rx}(e^{rx}-1)^k$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ.

[1]，[2] から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ.

(3) $f_n(x)=e^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-1}$ $(n \geqq 3)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -nre^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-1} + e^{-nrx}\cdot(n-1)(e^{rx}-1)^{n-2}\cdot re^{rx} \\ &= re^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-2}\{-n(e^{rx}-1)+(n-1)e^{rx}\} \\ &= re^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-2}(n-e^{rx}) \end{aligned}$$

$x>0$ のとき，$f_n'(x)=0$ とする[illegible]

$n-e^{rx}=0$ す[illegible] $\log n$

したがって，$f_n(x)$ の増減表は

x	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$f_n'(x)$	[illegible]	$+$	[illegible]	[illegible]
$f_n(x)$	[illegible]	$\nearrow$	[illegible]	$\searrow$

よ[illegible] $\frac{1}{r}\log n$ で極大値 $\frac{(n-1)^n}{n^n}$ [illegible]

6.53 [illegible] $= \int_1^{\sqrt{e}}$ [illegible] $\Big[x(\log x-1)\Big]_1^{\sqrt{e}} =$ [illegible] $\frac{\sqrt{e}}{2}$

(2) I[illegible] $\int_1^{\sqrt{e}}$ ([illegible]

[illegible] $\log x)^n$ [illegible] $-\int_1^{\sqrt{e}} x\{(\log$ [illegible] $\}'\,dx$

$= \sqrt{e}$ [illegible] $)^{n}$ [illegible] $x)^n\,dx = \sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (n+1)I_n$

(3) [illegible]

$$I_n \text{ [illegible] })^{n-1}n! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\frac{n!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m \quad \cdots(*)$$

とおく.

［1］ $n=1$ を $(*)$ に代入すると

$$I_1 = (-1)^{1-1}1! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{1}(-1)^{1-m}\frac{1!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$
$$= 1 + \sqrt{e}\left\{(-1)^{1-0}\frac{1!}{0!}\left(\frac{1}{2}\right)^0 + (-1)^{1-1}\frac{1!}{1!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\right\}$$
$$= 1 + \sqrt{e}\left(-1+\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{e}}{2}$$

よって，(1) の結果から，[illegible]とき，[illegible]り立つ．

［2］ $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つ[illegible](2) の結果から

$$I_{k+1} = \sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - (k+1)I_{k} \text{[illegible]}$$
$$= \sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - (k \text{[illegible]} -1) \text{[illegible]} (-1)^{k-m} \text{[illegible]} \left(\frac{1}{2}\right)^m \Big\}$$
$$= \sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + (-1)^k(k+1)! + \text{[illegible]} \sum_{m=0}^{k}(-1) \text{[illegible]} 1)! \text{[illegible]} \left(\frac{1}{2}\right)^m$$
$$\text{[illegible]}^k(k+1)! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{k+1}(-1)^{k+} \text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]}}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

よ[illegible] n [illegible]のときも，$(*)$ が[illegible]つ．

［1］［2］よ[illegible]自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

[illegible]説 (2[illegible]られた[illegible]式から

$$\text{[illegible]} (m+1)I_m \text{[illegible]} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

両[illegible] $\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}1)!}$ を掛[illegible]

$$\frac{I_{\text{[illegible]}}}{(-1)^{m+1}\text{[illegible]})!} - \frac{I_m}{(-1)^m m!} = \frac{\sqrt{e}}{(-1)^{m+1}(m+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

したがって

$$\sum_{m=1}^{n-1}\left\{\frac{I_{\text{[illegible]}}}{(-1)^{m\text{[illegible]}}(\text{[illegible]}+1)!} - \frac{I_m}{(-1)^m m!}\right\} = \sqrt{e}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{(-1)^{m+1}(m+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$
$$\frac{I_n}{(-1)^n n!} - \frac{I_1}{(-1)^1 1!} = \sqrt{e}\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{(-1)^m m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

(1) の結果から，$I_1 = 1 - \dfrac{\sqrt{e}}{2} = 1 - \sqrt{e}\displaystyle\sum_{m=0}^{1} \frac{1}{(-1)^m m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$ であるから

$$\frac{I_n}{(-1)^n n!} = -1 + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(-1)^m m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

両辺に $(-1)^n n!$ を掛けると

$$I_n = (-1)^{n-1} n! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m}\frac{n!}{m!} \text{[illegible]}$$

6.54 (1) $f_m(x) = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ x^m & (m \geqq 1) \end{cases}$ より [illegible]

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f_0(1-x) f_n(1+x)\,dx = \text{[illegible]}$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\right]_{-1}^{1} \text{[illegible]} \boldsymbol{\text{[illegible]}+1}$$

$$a_1 = \int_{-1}^{1} f_1(1-x) f_{n-1}(1+x)\,dx = \int_{-1}^{1} \text{[illegible]} (1+x \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]} (1+x)\}(1+x)^{n-1}\,dx = \int \text{[illegible]} - (1 \text{[illegible]} dx$$

$$= \left[\text{[illegible]} \frac{1}{\text{[illegible]}+1}(1+x)^{n+1}\right]^{1} \text{[illegible]} - \frac{2^{n+1}}{n+1} = \boldsymbol{\frac{2^{n+1}}{n(n+1)}}$$

(2) [illegible] $) = \{$ [illegible] $(m$ [illegible] $) \ (m =$ [illegible] $2, \cdots, n)$

(i) [illegible] n の [illegible]

$$a_k = \text{[illegible]} (1 \text{[illegible]} (1 + \text{[illegible]} \int_{-1}^{1} (1-x)^k (1+x)^{n-k}$$

$$\text{[illegible]} - x)^k \left\{ \frac{\text{[illegible]}}{n-k+1} \right\}' dx$$

$$= \left[\text{[illegible]})^k \frac{(1+x)^{n-k+1}}{n-k+1} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \{(1-x)^k\}' \frac{(1+x)^{n-k+1}}{n-k+1} dx$$

$$= \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}+1} \int_{-1}^{1} (1-x)^{k-1}(1+x)^{n-(k-1)} dx$$

$$= \frac{k}{n-k+1} \int_{-1}^{1} f_{k-1}(1-x) f_{n-(k-1)}(1+x)\,dx$$

$$= \frac{k}{n-k+1} a_{k-1} \qquad \cdots (*)$$

(ii) $k=n$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^{1} f_n(1-x)f_0(1+x) = \int_{-1}^{1}(1-x)^n\cdot 1\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)'\,dx \\
&= \Big[\,(1-x)^n(1+x)\,\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\{(1-x)^{n} \text{[illegible]} +x)\,dx \\
&= n\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-1} \text{[illegible]} x)\,dx \\
&= n\int_{-1}^{1} f_{n-1}(1-x) \text{[illegible]} \\
&= na_{n-1}
\end{aligned}
$$

上式より，$(*)$ は，$k=n$ のと[illegible]

よって，$k \geqq 1$ のとき

$$\boldsymbol{a_k = \frac{k}{n-k+\text{[illegible]}}}$$

(3) [illegible]) [illegible]ら，$k \geqq 0$ のとき $a_k > 0$ [illegible]

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{k}{n-\text{[illegible]}}$$

[illegible]がって [illegible]

$$
\begin{aligned}
\frac{a_k}{a_{k-1}} &= \frac{k}{\text{[illegible]}\,k+1} \\
\text{[illegible]} &= \frac{k-1}{\text{[illegible]}-k+2} \\
&\ \ \vdots \\
\frac{a_2}{a_1} &= \frac{\text{[illegible]}}{n-\text{[illegible]}} \\
\frac{a_1}{a_0} &= \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

上の諸式の辺[illegible]掛け合わせると　$\dfrac{a_k}{a_0} = \dfrac{k!}{{}_n\mathrm{P}_k}$

ここで，[illegible]P_k / $k!$ であるから　$\dfrac{a_k}{a_0} = \dfrac{1}{{}_n\mathrm{C}_k}$

上式に (1) の結果を代入すると　$a_k = \dfrac{a_0}{{}_n\mathrm{C}_k} = \boldsymbol{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)_n\mathrm{C}_k}}$

(4) (3) の結果より，$\dfrac{1}{a_k} = \dfrac{(n+1)_n\mathrm{C}_k}{2^{n+1}}$ であるから

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times 2^n = \boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$$

6.55 (1) $I_0 = \dfrac{(-1)^0}{0!} \displaystyle\int_0^2 x^0 e^x\,dx = \int_0^2 e^x\,dx = \Big[\, e^x \,\Big]_0^2 = \boldsymbol{e^2 -}$ [illegible]

$$I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^2 x^n e^x\,dx = \text{[illegible]} \int_0^2 x^n \text{[illegible]}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \Big[\, x^n e^x \,\Big]_0^2 - \frac{(-1)^n}{n!} \text{[illegible]}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \cdot 2^n e^2 + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-\text{[illegible]}} \text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]}}{n!} + I_{n-1}$$

ゆえに $\quad \boldsymbol{I_n - I_{n-1} =}$ [illegible] $\boldsymbol{\dfrac{2^n e^2}{n!}}$ [illegible]

した[illegible] $\quad I_3 = I_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^n 2^n e^2}{n!}$

$$= (e^2 - 1) + \frac{-2e^2}{1!} + \frac{4\text{[illegible]}}{2\text{[illegible]}} \text{[illegible]} \frac{8e\text{[illegible]}}{3!} = \boldsymbol{-\frac{1}{3}e^2 - 1}$$

[illegible] $0 \leqq$ [illegible] にお[illegible] $\leqq x^n e^2$ であるか[illegible] $(n = 1, 2, \cdots)$

[illegible] $\displaystyle\int_0 x^n$ [illegible] $\leqq \dfrac{1}{n!}$ [illegible] $dx =$ [illegible] $\dfrac{e^2}{\text{[illegible]}} \Big[\, x^{n+1} \,\Big]_0^2 = \dfrac{e^2 2^{n+1}}{(n+1)!} \quad \cdots ①$

n [illegible] とき [illegible] $\dfrac{2 \cdot 2}{\text{[illegible]}} \times \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{4}$ [illegible] $\leqq 2 \times \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdots \dfrac{2}{3} = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \cdots ②$

[illegible]1 の[illegible]は等号が[illegible]，② は $n \geqq 1$ について成り立つ．

①, [illegible]より [illegible] $\displaystyle\int_0^2 x^n e^x\,dx \leqq 2e^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$

(3) $(*)$ より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ [illegible] $_{k-1}) = e^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ 　ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{I_n - I_0}{e^2}$

したがっ[illegible] $\displaystyle\sum_{k=0} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} = 1 + \frac{I_n - I_0}{e^2} = \frac{I_n}{e^2} + \frac{1}{e^2} \quad \cdots ③$

(2) の結果から $\qquad |I_n| \leqq 2e^2 \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$

よって，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$　⋯④

③，④により　$\displaystyle \boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{1}{e^2}}$

6.56　(1)　$f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x+2}}$ より

$$f'(x) = \frac{(3x)'\sqrt{x+2} - 3x(\sqrt{x+2}\,)'}{(\sqrt{x+} \text{[illegible]}} = \frac{3\sqrt{\text{[illegible]}} \; \frac{3x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{6(x+2) - 3x}{2(x+2)\sqrt{x+2}} = \text{[illegible]}$$

(2)　$f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{3(x+2)-6}{\sqrt{x+2}}$ [illegible] より

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx \text{ [illegible] } (x+2)^{\frac{3}{2}} - \text{[illegible]} 2)^{\frac{1}{2}} \Big]$$

(3)　[illegible] $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+t)g(t)\,dt = 3x^2 + x$ [illegible] $\displaystyle\int_{-1}^{1} tg(t)$ [illegible]

[illegible] って [illegible] $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$

[illegible] て [illegible] $dt = \displaystyle\int_{-1}^{1}(3t^2 + bt + c)\,dt$

[illegible] $\dfrac{1}{2}bt^2 + ct \Big]$ [illegible] $c + 2,$

[illegible] $= \displaystyle\int_{-1}$ [illegible] $+ bt^2 + ct)\,dt$

$= \left[\dfrac{3}{4}t^4 + \dfrac{\text{[illegible]}}{3} \text{[illegible]} + \dfrac{1}{2}ct^2\right]_{-1}^{1} = \dfrac{2}{3}b$

ゆえに　$b =$ [illegible]　$c = \dfrac{2}{3}b$　これを解いて　$\boldsymbol{b = -6,\ \ c = -4}$

6.57　(1)　与えられた [illegible]　$f(x) = 2\cos x - a\sin x\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dx$

$k=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ とおくと，$f(x)=2\cos x-ak\sin x$ より

$$k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x-ak\sin x)\,dx$$
$$=\Big[\,2\sin x+ak\cos x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2-ak$$

$a>0$ に注意して，$k=2-ak$ を k について解く[illegible] $\frac{2}{a+1}$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=2\cos x-}$ [illegible] $\boldsymbol{x}$

(2) (1) の結果から

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx=\int_0^{\pi}\Big(2\sin$$ [illegible] $x\Big)\,dx$

$$=\int_0^{\pi}$$ [illegible] $-\frac{a}{a+}$[illegible] [illegible] $+1$

条件に[illegible]り　　$-\frac{\pi a}{a+1}=$ [illegible] $\frac{}{2}$　　これを[illegible]

(3) (ア[illegible]結果から　　$f(x)=-\sin$ [illegible]

[illegible]$\cos\alpha$ [illegible]$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt5}$ を満たす α [illegible] $<$ [illegible]) を用いると

$$f(x)=-\sqrt5\,s$$[illegible]$\alpha)$

[illegible]って[illegible]値 f[illegible]　最小値 $\boldsymbol{f(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sqrt5}$

[illegible] (ア) [illegible]果を用[illegible]

$\int_0$ [illegible] $|f$ [illegible] $\sqrt5\int_0^{\alpha}\sin($[illegible]$dx+\sqrt5\int_{\alpha}^{\pi}\sin(x-\alpha)dx$

$=$ [illegible] $\Big]_0^{\alpha}-\sqrt5\Big[\,\cos(x-\alpha)\,\Big]_{\alpha}^{\pi}$

$=\sqrt5\,(1$ [illegible] $\cos\alpha)-\sqrt5\,(-\cos\alpha-1)$

$=\boldsymbol{2\sqrt5}$

6.58　(1) $k=\int_0^2 f(t)$ [illegible]くと，$f(x)=3x^2+2kx+k$ であるから

$$k=\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2(3t^2+2kt+k)\,dt$$
$$=\Big[\,t^3+kt^2+kt\,\Big]_0^2=6k+8$$

これを解いて　$k=-\frac{8}{5}$　　よって　$\boldsymbol{f(x)=3x^2-\frac{16}{5}x-\frac{8}{5}}$

(2)　　$(x\log x-x)'=\log x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\boldsymbol{\log x}$

$$\left(\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\right)'=x\log x+\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{x}{2}=\boldsymbol{x\log x}$$

(3)　(1) の結果から，$3x^2-f(x)=\frac{16}{5}x+\frac{8}{5}$ であるか[illegible]の結果より

$$\int_1^2\{3x^2-f(x)\}\log x\,dx=\frac{16}{5}\int_1 [illegible] \int_1^2\log x\,dx$$

$=\frac{16}{5}\Big[\frac{x^2}{}$ [illegible]

$=$ [illegible] $\log$ [illegible] $\log 2-1)$

[illegible] $\boldsymbol{\frac{}{5}\log 2-}$ [illegible]

6.59　(1)　$\int_0^{2}$ [illegible] $y)\,dy=\int_0^{2\pi}f(y)(\sin x\,\mathrm{c}$ [illegible] $y)\,dy$

$=\sin x\int_0^{2\pi}f(y)\,\mathrm{c}$ [illegible] $-\cos x\int_0^{2\pi}f(y)\sin y\,dy$

$\int_0^{2}$ [illegible] $y)\cos$ [illegible] $y)\sin y\,dy$ は定数であるから

$=\int^{2\pi}$ [illegible] $\mathrm{os}\,y\,dy,$　　b [illegible] $-\int_0^{2\pi}f(y)\sin y\,dy$

[illegible]くと[illegible]は

$$f(x)=\mathrm{co}\ [illegible]\ \sin x+(b-1)\cos x$$
$$=a\sin x+b\cos x$$

(2) (1) の結果から

$$a = \int_0^{2\pi} (a\sin y + b\cos y)\cos y\, dy$$
$$= \int_0^{2\pi} (a\sin y\cos y + b\cos^2 y)\, dy$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2}\sin 2y + b\cdot\frac{1+\cos 2y}{2}\right) dy$$
$$= \left[-\frac{a}{4}\cos 2y + \text{[illegible]} \left(y + \frac{1}{2}\sin \text{[illegible]} \right) \right]_0^{\text{[illegible]}} = \pi b$$

$$b - 1 = -\int_0^{2\pi} (a\sin y + \text{[illegible]}$$
$$= -\int_0^{2\pi} (a\sin^2 \text{[illegible]}$$
$$= -\int_0^{2\pi} \left(\text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]} 2y}{2} \text{[illegible]} \right.$$
$$= -\left[\frac{a}{2}\left(\text{[illegible]} - \frac{1}{2}\sin 2y \right) - \text{[illegible]} 2y \right] \text{[illegible]}$$

[illegible] $= \pi b,\ b-1 = \pi a$　これを解[illegible] $\dfrac{\text{[illegible]}}{\pi^2+1},$ [illegible] $\dfrac{1}{\pi^2+1}$

よって [illegible] $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{\text{[illegible]}+1}\sin x + \dfrac{1}{\pi^2 \text{[illegible]}} \text{[illegible]}s\, x}$

[illegible] (1) [illegible] $\int$ [illegible] $= x\log 2$ [illegible] $- x \quad \cdots (*)$

$(*)$ の [illegible] を微分 [illegible]

[illegible] $f($ [illegible] $2x +$ [illegible] $-1 = \boldsymbol{\log 2x}$

(2) [illegible] 入すると [illegible] $g\,2a - a = a(\log 2a - 1)$

$a >$ [illegible] である [illegible] $\log 2a = 1$　よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{e}{2}}$

6.61 (1) $F(x) = \int_x^{2x}$ [illegible] $\Big[e^t \Big]_x^{2x} = e^{2x} - e^x$

ゆえに [illegible] $\boldsymbol{= e^2 - e}$　　また　$\boldsymbol{F'(x) = 2e^{2x} - e^x}$

(2)
$$\begin{cases} f(x) + \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt = 2\sin x - 3 & \cdots ① \\ f'(x)g(x) = \cos^2 x & \cdots ② \end{cases}$$

① の両辺を微分すると

$$f'(x)+g(x)=2\cos x \quad \text{ゆえに} \quad f'(x)=2\cos x-g(x)$$

上の第 2 式を ② に代入すると

$$\{2\cos x-g(x)\}g(x)=\cos^2 x \quad \text{整理すると} \quad \{g(x)-\cos x\}^2=0$$

よって　$\boldsymbol{g(x)=\cos x}$　これを ① に代入する[illegible]

$$f(x)+\int_0^x [illegible] = 2\,\mathrm{si}[illegible]$$

$$f(x)+\Big[\ \sin t\ [illegible]$$

したがって　$\boldsymbol{f(x)=\sin x-}$ [illegible]

6.62　(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(f'(t)-\cos t)\,dt$ は定数[illegible]から，[illegible](t)[illegible]dt[illegible]くと

$$g(x)=\sin x+k \quad \cdots ①$$

$$f(x)=\int_0^x (g(t)+t\cos t) [illegible]$$

$$=\int_0^x (\sin t+k+t [illegible] t+\sin x$$

$$[illegible]\sin t+kt\Big]_0^x+\sin x$$

$$[illegible]+1)\sin [illegible] \quad \cdots ②$$

し[illegible]て，② [illegible]

$$[illegible]=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [illegible] = \Big[\ f(t)-\sin t\ \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$[illegible]\Big[\ \{(t+1)\sin t+kt\}-\sin t\ \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$[illegible]\Big[\ t\sin t+kt\ \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=k\pi$$

ゆえに [illegible]0

よって，①，② より

$$\boldsymbol{f(x)=(x+1)\sin x, \quad g(x)=\sin x}$$

(2) (1) の結果から

$$\int_0^{\pi} \{f(x)-g(x)\}^2\,dx = \int_0^{\pi} x^2\sin^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\sin 2x - \frac{1}{2}x\,\text{co[illegible]} + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi^3}{6}} - \boldsymbol{\pi}\text{[illegible]}$$

6.63 (1) $t = x - u$ とおくと

$dt = -du$

t	$0 \longrightarrow x$
u	$x \longrightarrow$ [illegible]

$$\int_0^x h(t)g(x\text{[illegible]} = \int_x \text{[illegible]}\,(u)$$

$$= \int_0^x h(\text{[illegible]})g(u)\,d\text{[illegible]}$$

$$= \int_0^x h(\text{[illegible]}$$

(2) (1) [illegible]

[illegible] $g(x-t) = \int$ [illegible] $(x-t)g(t)\,dt$

し[illegible]て

[illegible] $\int^x (x-t)$ [illegible]

$$= \frac{x}{2} + \text{[illegible]} - \int_0^x tg(t)\,dt \qquad \cdots ①$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x g(t)\,dt + xg(x) - xg(x)$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x g(t)\,dt \qquad \cdots ②$$

$$= g(x) \qquad \cdots ③$$

$f''(x) = \cos x$ より，③ から　$\boldsymbol{g(x) = \cos x}$

また，①，② より，$f(0)=0$，$f'(0)=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$f'(x)=f'(0)+\int_0^x f''(t)\,dt=\frac{1}{2}+\int_0^x \cos t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}+\sin x$$
$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=\int_0^x \left(\frac{1}{2} \text{[illegible]}\right)dt$$
$$=\left[\frac{t}{2}-\text{co[illegible]}\right]^x \text{[illegible]} = \boldsymbol{\frac{x}{2}-\text{[illegible]}}$$

（イ）（ア）の結果から，$f(x)$ の増減[illegible]

x	0	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	[illegible]
$f'(x)$		$+$	[illegible]	[illegible]
$f(x)$	0	$\nearrow$	[illegible]	$\searrow$ [illegible]

ここで

$$f\left(\frac{7}{6}\pi\right)-f(2\pi)=\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{\sqrt{\text{[illegible]}}}{2}\text{[illegible]}\right)-\text{[illegible]}$$
$$=\frac{6\sqrt{3}+12\text{[illegible]}}{6}$$
$$>\frac{6\times 1.7+\text{[illegible]}6\times 3.2}{6}=\frac{6.2}{6}>0$$

よっ[illegible] $\boldsymbol{M=}$ [illegible] $\boldsymbol{\frac{7\pi}{12}+}$ [illegible] $\boldsymbol{=\frac{7\pi}{6}}$

（ウ[illegible]）の結[illegible]$)-\dfrac{x}{2}=1$[illegible] であるから

$$\text{[illegible]}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)\text{[illegible]}\int_0 \text{[illegible]} (1-\cos x)^2\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{7}{6}\pi}(1-2\cos x+\cos^2 x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{7}{6}\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$=\left[\frac{3}{2}x-2\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{7}{6}\pi}$$
$$=\boldsymbol{\frac{7\pi}{4}+1+\frac{\sqrt{3}}{8}}$$

6.64 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{100}\frac{1}{n}$

$$< \frac{3}{2} + \sum_{n=3}^{100}\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x} = \frac{3}{2} + \int_{2}^{100}\frac{dx}{x}$$

(2) (1) の結果および $\log 2 = 0.693$，$\log 5 = 1.609$ から

$$\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n} < \frac{3}{2} + \Big[\log \text{[illegible]}\Big]_{2}^{100} = \frac{3}{2} + \text{[illegible]}$$

$$= \frac{3}{2} + \log 2\ \text{[illegible]},$$

$$\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{100}\int_{n}^{n+1}\frac{dx}{\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}$$

$$= \int^{101}\text{[illegible]}\log 1\text{[illegible]}$$

$$> \text{[illegible]} = 2(\log 2\ \text{[illegible]}\ 5) = \text{[illegible]}$$

よって[illegible]める整数は　**5**

補足 [illegible] $= 1$ [illegible] $\displaystyle + \frac{1}{100} + \sum_{n=4}^{99}\frac{1}{n}$

$$\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}3}{300} + \text{[illegible]}\frac{dx}{\text{[illegible]}} = \frac{553}{300} + \int_{4}^{\text{[illegible]}}\frac{\text{[illegible]}}{x} = \frac{553}{300} + 2\log 5 > 5$$

$$I_1 = \text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]} + x}\,dx = \int_0^{\text{[illegible]}}\Big(\text{[illegible]}\frac{1}{1+x}\Big)\,dx$$

$$= \Big[\text{[illegible]}(1 + \text{[illegible]}\ \mathbf{1 - \log 2},$$

$$\text{[illegible]} = \int_0^1\frac{x^{\text{[illegible]}}}{1+x}\,dx + \int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

$$\text{[illegible]}\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{n+1}}$$

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ [illegible] $\displaystyle\frac{x^n}{2} \leqq \frac{x^n}{1+x} \leqq x^n$ であるから

$$\int_0^1\frac{x^n}{2}\,dx \leqq \int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx \leqq \int_0^1 x^n\,dx \quad \text{よって} \quad \frac{1}{2(n+1)} \leqq I_n \leqq \frac{1}{n+1}$$

(3) $I_k + I_{k+1} = \dfrac{1}{k+1}$ より，$-(-1)^{k-1}I_k + (-1)^k I_{k+1} = \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ であるから，
$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\{-(-1)^{k-1}I_k + (-1)^k I_{k+1}\} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$-I_1 + (-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

上式に (1) の結果を代入すると

$$-(1-\log 2) + (-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

したがって　$\log 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = (-1)^{n}I_n$

(2) の結果から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ であるから

$$\log 2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

6.6 (1) 導関数の定義により

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h) + f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x),\quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

また，微分可能ならば連続であるから　$\displaystyle\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$

よって　$\boldsymbol{\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$

(2) $\boldsymbol{y' = 2ax(1+x^2)^{a-1}}$

(3) $y = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ であるから，(1)，(2) の結果から

$$y' = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + x\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

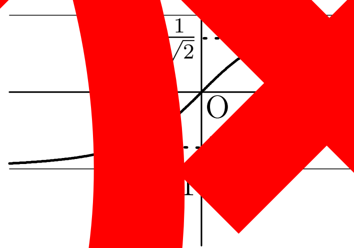
$$y'' = 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} = -3x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{t\to\infty} \text{[illegible]} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = -1$$

よって，関数 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ の増減，[illegible]
は概形は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$
y''	$+$	0	$-$
[illegible]	$\nearrow$	0	$\nearrow$



[illegible] 1，$y = -1$

$f(x) = $ [illegible] と，(3) の結果か[illegible] は単調増加であるから，
k [illegible] 数と [illegible]

$$\text{[illegible]}\ f(k) \ \text{[illegible]}\ dx > 0 \qquad \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx < f(k)$$

[illegible] について [illegible] まで加 [illegible]

$$\text{[illegible]} < \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

このとき [illegible] $x)\,dx = \Big[\sqrt{1+x^2}\Big]_0^n = \sqrt{1+n^2} - 1$

よって [illegible] $- 1 < \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}} + \dfrac{3}{\sqrt{10}} + \cdots + \dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

6.67 (1) $x > 0$ のと [illegible] $\displaystyle\int_0^x (1-\cos t)\,dt > 0$ ゆえに $x - \sin x > 0$

さらに $\displaystyle\int_0^x (t-\sin t)\,dt > 0$ ゆえに $\dfrac{x^2}{2!} + \cos x - 1 > 0$

よって　$1-\frac{x^2}{2}<\cos x$

(2) (1) の結果から，$x>0$ のとき

$$\int_0^x\left(\cos t+\frac{t^2}{2!}-1\right)dt>0 \quad ゆえに \quad \sin x+\frac{x^3}{3!}-x>0$$

さらに　$\int_0^x\left(\sin t+\frac{t^3}{3!}-t\right)dt>0$　ゆえに　$-\cos$ [illegible] $+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^2}{2!}>0$

よって　$\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\ [illegible]}$

(3) (1)，(2) の結果から，$x>0$ のと [illegible]

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos\ [illegible]$$

このとき，$\cos\theta=\frac{4}{5}$ であるた [illegible]

$$1\ [illegible] <\frac{4}{5}<1-\ [illegible]\ \frac{\theta^4}{24}$$

し [illegible] $\begin{cases}\theta^2>\frac{2}{5} & \cdot \\ 5\theta^4-60\theta^2+24>0 & \cdot\end{cases}$

[illegible] $<\frac{\pi}{4}$ [illegible]，$\theta^2<1$ に注意し [illegible] 解くと

[illegible] $<\frac{30-2\sqrt{195}}{5}$　$\cdots②'$

[illegible] $30-$ [illegible] <30 [illegible] 95 に注 [illegible] て，①，②′ により

[illegible] $\frac{2}{\ }<\theta^2<\frac{30\ [illegible]\ 195}{\ }$

6.68 ([illegible] $x-$ [illegible] $=\int_0^x(x$ [illegible] $\left[(x-t)e^t\right]_0^x-\int_0^x(x-t)'e^t\,dt$

[illegible] $x+\int_0^x e^t\,dt=-x+\left[e^t\right]_0^x=-x+e^x-1$

よって　e^x [illegible] $x+\int_0^x(x-t)e^t\,dt$

(2) すべての自 [illegible] について，等式

$$e^x=1+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}x^p+\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^ne^t\,dt \quad\cdots(*)$$

とおく．

(i) $n=1$ のとき，(1) の結果から，$(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt = -\frac{1}{(n+1)!}\int_0^x \{(x-t)^{n+1}\}' e^t\,dt$$

$$= -\frac{1}{(n+1)!}\Big[\ (x-t)^{n+1}e^t\ \Big]^x \text{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\int \text{[illegible]}^{+1}(e^t)'\,dt$$

$$= \frac{x\text{[illegible]}}{(n+1\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}\ \frac{1}{\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}(x-t)^n e^t\,dt \quad \cdots(**)$$

$(*)$，$(**)$ より

$$e^x = 1+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}x^p\ \text{[illegible]}\ 1)!\ \text{[illegible]}\ \int^x\ \text{[illegible]}(x-t)^n e^t\ \text{[illegible]}$$

$$= 1+\sum_{p=1}^{n+1}\frac{\text{[illegible]}}{p!}\ \text{[illegible]} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0\ \text{[illegible]}\ t)^n e^t\ \text{[illegible]}$$

[illegible] $n=k+1$ のときも $(*)$ が成[illegible]

(ii) [illegible]ての自然数 n に対して[illegible]が成り立つ．

[illegible] $0 \leqq$ [illegible]におい[illegible]$t)e^t>0$ である[illegible] $\displaystyle\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt>0$

[illegible]，$(*)$ [illegible]す[illegible]自然数 n に対して，次式が成り立つ．

$$e^x > 1+\ \text{[illegible]}^p$$

6.69 (1) [illegible] $\dfrac{\text{[illegible]}^{-x}+x^n(\text{[illegible]}}{n!}$

$$\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{(n-\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}\ \frac{x^n e^{-x}}{n!} = \boldsymbol{f_{n-1}(x) - f_n(x)}$$

(2) $f_0(x)=e^{-x}$ [illegible] $f_0'(x) = -e^{-x} = -f_0(x)$

上式と (1) の結果を利用して

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} f_k'(x) &= f_0'(x) + \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \\ &= -f_0(x) + \sum_{k=1}^{n}\{f_{k-1}(x) - f_k(x)\} \\ &= -f_0(x) + \{f_0(x) - f_n(x)\} \\ &= -f_n(x) = \boldsymbol{-\frac{x^n e^{-x}}{n!}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果より $f_n(x) = -\sum_{k=0}^{n} f_k'(x)$ [illegible]

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = [illegible] \sum_{k=0} [illegible]$$

$$= -\sum_{k=0}^{n}\Big[f [illegible] \Big]_0^1$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} f_k([illegible]$$

$f_n(1)$ [illegible], f [illegible] $(n \geqq 1)$, $f_0(0) =$ [illegible] るから

[illegible] $f_n(x)$ [illegible] $\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k!}$ [illegible] $= \boldsymbol{-\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + 1}$

[illegible] $\leqq 1$ に [illegible] 0 であ [illegible] $\int_0^1 f_n(x)\,dx > 0$

[illegible] 結果から [illegible] e [illegible] $\frac{1}{k!} + 1 > 0$ ゆえに $e > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

6.70 (1) $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}\,dx = \Big[[illegible] \Big]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} = \boldsymbol{\log 2}$

(2) $t > 0$ のとき

$1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} > 0$ ゆえに $\frac{1}{1+t} < 1$

$(1+t)(1-t) = 1 - t^2 < 1$ ゆえに $1 - t < \frac{1}{1+t}$

したがって，$t>0$ のとき　　$1-t<\dfrac{1}{1+t}<1$

$x>0$ のとき　　$\displaystyle\int_0^x (1-t)\,dt<\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt<\int_0^x dt$

よって，$x>0$ のとき　　$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$

(3)　(2) の結果から，$x>0$ のとき　$\dfrac{x(4-x)}{2}<x+\log(1+x)<2x$

とくに，$0<x<4$ のとき　$\dfrac{1}{2x}<\dfrac{1}{x+\log(1+x)}<\dfrac{2}{x(4-x)}$

自然数 n について，$0<\dfrac{1}{n}<\dfrac{2}{n}<4$ [illegible]

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x}\,dx<\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x+\log(1+x)}\,dx<\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{2}{x(4-x)}\,dx \quad \cdots(*)$$

(1) の結果に注意して

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{2}\log 2$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{2}{x(4-x)}\,dx&=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x}\,dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x-4}\,dx\\&=\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\Big[\log(4-x)\Big]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\\&=\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{4-\frac{1}{n}}{4-\frac{2}{n}}\end{aligned}$$

$\log\dfrac{4-\frac{1}{n}}{4-\frac{2}{n}}$ [illegible] て，(*) においてはさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x+\log(1+x)}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$$

6.71　(1)　$f(x)=\log x$ より　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ \log t)$ における接線の方程式は

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)\quad ゆえに\quad y=\frac{x}{t}\log t-1$$

したがって　$g(x)=\dfrac{x}{t}+\log t-1 \quad\cdots①$

$h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと $(x > 0)$

$$h(x) = \log x - \left(\frac{x}{t} + \log t - 1\right)$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{t} = \frac{t-x}{tx}$$

x	(0)	$\cdots$	t	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	0	$-$
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$

$h(x)$ の増減は，右のようになる．ゆえに　$h(x) \leqq 0 \quad (x > 0)$

よって，$x > 0$ のとき，$f(x) - g(x) \leqq 0$ が成り立つ．

(2) $f(x) = \log x$ および ① から，$t > \frac{1}{2}$ のとき

$$\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \log x\,dx = \Big[\cdots$$
$$= \left(\boldsymbol{t+\frac{1}{2}}\right)\boldsymbol{\log}\left(\boldsymbol{t} \cdots\right.$$

$$\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} g(x)\,dx = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{t} \cdots 1\right) dx \cdots 1) \cdots \boldsymbol{\log t}$$

(3) (1) の結果から，$f(x) \leqq g(x)$ において等号…立つ…のときに限る…，自然数 k に対して

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(x)\,dx < \int_{k-\cdots}^{k\cdots} \cdots dx$$

が成…．ま…結果から

$$\sum^{n} \cdots f(\cdots \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - n$$
$$\cdots \log\sqrt{2}\left(\cdots\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$
$$\cdots g(x)\,dx \cdots = \log n!$$

よって　$\cdots\left(\boldsymbol{n + \frac{1}{2}}\right)^{\boldsymbol{n+\frac{1}{2}}} \boldsymbol{e^{-n} < n!}$

6.72 (1) $y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ を微分すると　$y' = -\dfrac{\log x + 2x}{x^2(\log x)^3}$

したがって，$x > 1$ において　　$y' < 0$

よって，$y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において，単調減少．

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int \frac{(\log x)'}{(\log x)^2}\,dx = \boldsymbol{-\frac{1}{\log x} + C}$ 　**(C は積分定数)**

別解 $t=\log x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$ であるから

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}+C = -\frac{1}{\log x}+C$$

(3) (1)，(2) の結果から，n が 3 以上の整数であるとき

$\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k}^{k}$ [illegible] $\dfrac{1}{\ \ k)^2}\,dx$

$\displaystyle< \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k}$ [illegible]

$= \Big[-$ [illegible] $< \dfrac{1}{\log}$ [illegible]

6.73 (1) $I = \displaystyle\int_0^1$ [illegible] $a^{1-t}b^t\,dt = a\int_0^1$ [illegible] $\left(\dfrac{b}{a}\right)\ dt$

[illegible] $\left(\dfrac{b}{a}\right)^t\Big]_0^1 = \dfrac{a}{\log\frac{b}{a}}\left(\dfrac{b}{a}-1\right) =$ [illegible] $\boldsymbol{a}$

$\big(a^{\frac{1-t}{2}}b$ [illegible] $0\cdots(*)$ であるか [illegible]

[illegible] $+\,a^tb^{1-t} \geqq 0$

[illegible]すなわち [illegible] $a^{1-t}b^t$ [illegible] $\geqq 2\sqrt{a}$ [illegible] $(**)$

$0<$ [illegible] より [illegible] いて，等号が [illegible] するとき

[illegible] $a^{\frac{1-t}{2}}b$ [illegible] $\frac{t}{2}$ [illegible]

[illegible] $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}-t}$ [illegible] $=$ [illegible] すなわち　$t=\dfrac{1}{2}$

$I=\displaystyle\int_0$ [illegible] $a^{1-t}b$ [illegible] $u=1-t$ とおくと　$\dfrac{dt}{du}=-1$，

t	0	$\longrightarrow$	1
u	1	$\longrightarrow$	0

したがって [illegible] $\displaystyle\int_1^0 a^ub^{1-u}\,(-du) = \int_0^1 a^ub^{1-u}\,du = \int_0^1 a^tb^{1-t}\,dt$

$(**)$ において，等号が成立するのは，$t=\dfrac{1}{2}$ のときに限るので

$$\int_0^1 (a^{1-t}b^t + a^tb^{1-t})\,dt > \int_0^1 2\sqrt{ab}\,dt$$

したがって　$I+I>2\sqrt{ab}\Big[\,t\,\Big]_0^1$　よって　$I>\sqrt{ab}$

(3) $f(u)=u^t$ とおくと，$f'(u)=tu^{t-1}$．平均値の定理により

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)\quad(1<c<x)$$

を満たす c が存在する．$0<t<1$ より　$f'(c)=tc^{t}$ [illegible] $t\cdot1^{t-1}=t$

したがって　$\frac{x^t-1}{x-1}<t$　よ[illegible]て　$x^t<1$ [illegible] $1)$

(4) $0<a<b$ より，$x=\frac{b}{a}>1$ とお[illegible] $b)^t$ [illegible] $t\left(\frac{b}{a}-1\right)$ であるから

$$I=a\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^t dt<a\int_0^1 \text{[illegible]}$$

6.74 (1) $0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，$\tan^2 x$ [illegible] るか

$\int_0^x \tan^2 t\,dt>$ [illegible] ゆえに　ta[illegible] $x>0$

① [illegible]

[illegible] $t)\,dx>0$　ゆえに [illegible] $\cos x)-\frac{1}{2}x^2>0$

し[illegible]て [illegible] $+\frac{1}{2}x^2<0$

([illegible] の結[illegible]，log([illegible] $<-\frac{1}{2}x^2$ [illegible] から

[illegible] $x)\,dx<$ [illegible] $\frac{1}{2}x^2\Big)\,dx$

[illegible] $\Big[-\frac{1}{6}x^3\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi^3}{162}$

また　$\int_0^{\frac{\pi}{3}}$ [illegible] $x)\,dx=\Big[x\log(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\{\log(\cos x)\}'\,dx$

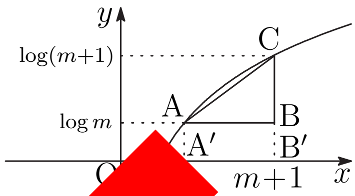
$$=-\frac{\pi}{3}\log 2+\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\tan x\,dx$$

① より，0 [illegible] $<\frac{\pi}{2}$ のとき，$\tan x>x$ であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\tan x\,dx>\int_0^{\frac{\pi}{3}}x^2\,dx=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^3}{81}$$

上の諸式から　$-\frac{\pi}{3}\log 2+\frac{\pi^3}{81}<\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log(\cos x)\,dx<-\frac{\pi^3}{162}$

6.75 (1) $\boldsymbol{y'=\frac{1}{x},\ \ y''=-\frac{1}{x^2}}$



(2) (右図により)

$$\boldsymbol{S_m=\frac{1}{2}\{\log(m+1)-\log m\}}$$

(3) 右の図のように，2点A，Bから[illegible]線AA′，BB′を引くと，
台形AA′B′Cの面積が $\log m+S_m$ で[illegible]から

$$\log m+S_m<\int_m^{m+1}\ [illegible]$$

ゆえに　$\log m+S_m-$ [illegible] $x\,dx$ [illegible]

よって　$f(m)<0$

(4) (2[illegible] $\sum_{m=1}^{n-1}S_m=\frac{1}{2}\log n$

$\sum_{m=1}$ $f($[illegible]ら，上式および(3[illegible]果から

[illegible] $+S_m-\int^{m+1}\log x\,dx\Big)<0$

[illegible] $+\frac{1}{2}\log n$ [illegible] $g\,x\,dx<0$

$\sum_{m=1}^{n-1}\log m$ [illegible] $-x\Big]_1^n-\frac{1}{2}\log n$

よっ[illegible] $\log$ [illegible] $\log 2+\cdots+\log(n-1)<n\log n-n+1-\frac{1}{2}\log n$

(5) (4)の結果か[illegible]

$$\log 1+\ [illegible]\ \cdots+\log(n-1)+\log n<1+\frac{1}{2}\log n+n(\log n-1)$$

ゆえに　$\log n!<\log e+\log\sqrt{n}+\log\left(\frac{n}{e}\right)^n$

したがって　$\log n!<\log e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$　よって　$n!<e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

6.76 (1) $\displaystyle\int_1^n x\log x\,dx=\int_1^n\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx=\left[\,\frac{x^2}{2}\log x\,\right]_1^n-\int_1^n\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$$=\frac{1}{2}n^2\log n-\left[\,\frac{x^2}{4}\,\right]_1^n=\boldsymbol{\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)}$$

(2) $f(x)=x\log x$ とおくと　$f'(x)=\log x+1$

$x\geqq 1$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$$\int_1^n x\log x\,dx=\sum_{k=\text{[illegible]}}^{n}\int^{k}\text{[illegible]}\,x\log x\text{[illegible]}$$

$$<\sum_{k=2}^{n}k\,\text{l[illegible]}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k\log k=\sum^{n-\text{[illegible]}}\text{[illegible]}$$

$$\sum_{k=1}\int_k^{k+1}x\,\text{[illegible]}\,dx+\text{[illegible]}$$

$$=\int_1^n x\log x\,\text{[illegible]}$$

[illegible]の2[illegible] $\displaystyle\int^n x\log x\,dx<\sum_{k=1}^{n}k\,\text{lo[illegible]}\int_1^n x\log x\,dx+n\log n$

[illegible](1) の[illegible]と

$$\frac{1}{2}n^2\text{[illegible]}-\frac{1}{4}(\text{[illegible]}<\sum_{k=1}^{n}k\log k\text{[illegible]}\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)+n\log n$$

[illegible]の結果

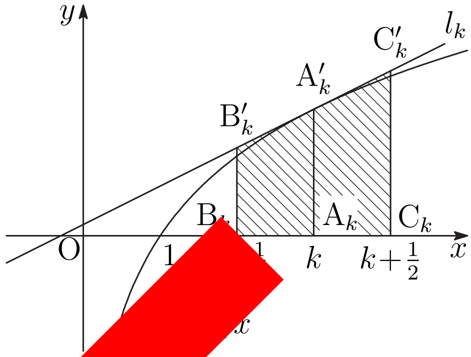
$$\text{[illegible]}-1\text{[illegible]}2\text{[illegible]}g\,n<\frac{\text{[illegible]}}{n^2\log n}\sum_{k=1}\log k^k<\frac{1}{2}-\frac{n^2-1}{4n^2\log n}+\frac{1}{n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n\text{[illegible]}}{4\text{[illegible]}n}\right)=\frac{1}{2}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n^2-1}{4n^2\log n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$ であるから，

はさみうち[illegible]理より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\log n}\sum_{k=1}^{n}\log k^k=\frac{1}{2}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{(1^2{\cdot}2^2{\cdot}3^3\cdots n^n)^{\frac{1}{n^2\log n}}\right\}=\boldsymbol{\sqrt{e}}$

6.77 (1) $y=\log x$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{x}$



$\mathrm{A}'_k(k,\ \log k)$ における接線 l は

$$y=\frac{1}{k}(x-k)+\log k$$

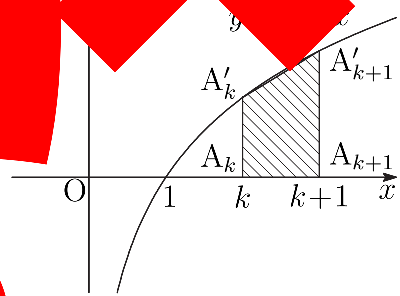
l_k 上の 2 点 B'_k，C'_k における y 座標は，それぞれ $\log k-\dfrac{1}{2k}$，$\log k+\dfrac{1}{2k}$ であるから，四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}'_k\mathrm{B}'_k$ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1\left\{\left(\log k-\frac{1}{2k}\right) \cdots \right\}=\boldsymbol{\log k}$$

(2)(ア) $k\geqq 2$ のとき，x 軸と 2 直線 x … で囲まれた部分の面積は … 面積より小さいから

$$\boldsymbol{\int_{k-\frac12} \log x\,dx} \cdots \boldsymbol{\log k}$$

(イ) … き，右の図の 4 点 A_k，A_{k+1} … 頂点とする台形の面積



… $\log(k+1)$ …

…，x 軸 … 直線 … $x=k+1$ および … $=\log$ … まれた部 … 積 … さい

$$\boldsymbol{\cdots +1)} \cdots < \cdots \boldsymbol{\log x\,dx}$$

(3) … $\displaystyle\int_{k-\frac12}^{k+\frac12}\log$ … $\displaystyle\sum_{k=2}\log k$ であるから

$$\int_{\frac32}^{n+\frac12}\log x\,dx<\log(n!)$$

$$\int_{\frac32}^{n}\log x\,dx+\int_{n}^{n+\frac12}\log x\,dx<\log(n!)$$

$\displaystyle\int_{n}^{n+\frac12}\log n\,dx<\int_{n}^{n+\frac12}\log x\,dx$ であるから，$\dfrac{1}{2}\log n<\displaystyle\int_{n}^{n+\frac12}\log x\,dx$ より

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x\,dx + \frac{1}{2}\log n < \log(n!)$$

したがって　$\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x\,dx < \log(n!) - \frac{1}{2}\log n \quad \cdots ①$

(2)(イ) から，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\log k + \log(k+1)}{2} < \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k}^{k+1} \log x\,dx$ であるから

$$\log(n!) - \frac{1}{2}\log n < \int_{1}^{n} \log x\,dx \ [illegible]$$

①，② より　$\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x\,dx < \log($ [illegible] $\log x\,dx$

(4)　$\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x\,dx = \Big[\, x\log x - x$ [illegible]

$\displaystyle\int_{1}^{n} \log x\,dx = \Big[\, x\log$ [illegible] $\Big]_{1} =$ [illegible]

上の 2 式を (3) の結果に[illegible]ると

[illegible] $n - n + \frac{3}{2}\left(1 - \log\frac{3}{2}\right) < \log$ [illegible] $\frac{1}{2}$ [illegible] $n + 1$

[illegible] $\frac{1}{2}\Big)$ [illegible] $+ \frac{3}{2}\left(1 - \log\frac{3}{2}\right) < \log$ [illegible] $\left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + 1$

よって[illegible] $U_n <$ [illegible] $< V_n$

(1) [illegible] $t - 1$ [illegible]とおくと

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
[illegible])	／	$-$	0	$+$
[illegible]	／	↘	0	↗

$h'($[illegible] $\frac{1}{t}$ [illegible]

h'[illegible]とす[illegible]

[illegible]の増減[illegible]右の[illegible] $h(t) \geqq 0$．$t = \dfrac{y}{x}$ のとき

[illegible] $\log\dfrac{y}{x} \geqq 0$ [illegible] $x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$

また，等号が[illegible]つのは，$\dfrac{y}{x} = 1$，すなわち，$x = y$ のときに限る．

(2) 閉区間 $[a,\ b]$ [illegible] $) > 0$，$g(x) > 0$ であるから，(1) の結果より

[illegible] $\log f(x) - f(x)\log g(x) - f(x) + g(x) \geqq 0$

したがって

$$\int_{a}^{b} \{f(x)\log f(x) - f(x)\log g(x) - f(x) + g(x)\}\,dx \geqq 0$$

条件より，$\int_a^b \{-f(x)+g(x)\}\,dx = 0$ を上式に代入すると

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つ．

別解 閉区間 $[a,\ b]$ で $f(x)>0$，$g(x)>0$ であるから，$t=$ [illegible] とおくと，

$h(t)\geqq 0$ より

$\dfrac{g(x)}{f(x)} - 1 - \log\dfrac{g(x)}{f(x)} \geqq 0$ ゆ [illegible] $\leqq g(x)-f(x)$

したがって $\int_a^b f(x)\log\dfrac{g(x)}{f(}$ [illegible]

よって $\int_a^b f(x)$ [illegible] $x \geqq \int_a$ [illegible] log [illegible]

(3) $g(x)=$ [illegible] とおくと，条件 [illegible] ら

[illegible] $g(x)\,dx = \int_a^b M\,dx = M($ [illegible] $(x)\,dx$

[illegible] たが [illegible] M を (2) の結果に適 [illegible] と

$\int_a$ $f($ [illegible] $\geqq \int_a^b f(x)\log M$ [illegible]

[illegible] $= \log M$ [illegible] $\int_a$ [illegible] $dx = M(b-a)\log M$

[illegible] 両辺を [illegible] ると

[illegible] $\dfrac{1}{b-a}\int_a$ [illegible] $(x)\,dx \geqq M\log M$

が [illegible] 立つ．

解説 (九大 [理]200 [illegible]

6.79 (1) $a_{n+1} =$ [illegible] $a_k e^x\,dx = \sum_{k=1}^{n} a_k\Big[\,e^x\,\Big]_0^k = \sum_{k=1}^{n} a_k(e^k-1) \qquad \cdots(*)$

ゆえに $a_2 = a_1(e-1) = \dfrac{e}{e-1}(e-1) = \boldsymbol{e}$

$$a_3 = a_1(e-1) + a_2(e^2-1) = e + e(e^2-1) = \boldsymbol{e^3}$$

(2) (∗) より，$n \geqq 3$ のとき

$$a_n - a_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k(e^k - 1) - \sum_{k=1}^{n-2} a_k(e^k - 1)$$
$$= a_{n-1}(e^{n-1} - 1)$$

整理すると　$a_n = e^{n-1}a_{n-1}$　ゆえに　$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = e^{n-1}$ [illegible]

$n \geqq 3$ のとき　$a_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \dfrac{a_{n-1}}{a_{n\text{[illegible]}}}$ [illegible] $\dfrac{a_3}{a_2} \cdot a_2$

$= e^{n-1} \cdot e^{n-\text{[illegible]}}$

$= e^{(n-1)+(n-2)\text{[illegible]}}$ [illegible] 1)

上式は，$n = 2$ のときも成り立つの [illegible]

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{e}{e-1},}\quad \boldsymbol{a}\text{[illegible]}$$

(3) (2) の結果から

$$\frac{\log \text{[illegible]}}{n^2} = \frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n^2} \text{[illegible]} \frac{1}{2n}\text{[illegible]}$$

[illegible] $\boldsymbol{\dfrac{\log a_n}{n^2} = \dfrac{1}{2}}$

6.80 [illegible] $= $ [illegible] $\dfrac{1}{\text{[illegible]})^2}\,dt = \left[-\dfrac{1}{t+\text{[illegible]}}\right]_0$ [illegible] $\dfrac{1}{\text{[illegible]}a} - \dfrac{1}{x+a}$

[illegible] て [illegible] $= $ [illegible] $= \boldsymbol{\dfrac{1}{a}}$

$a \neq$ [illegible] $\dfrac{1}{\text{[illegible]}a}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{1}{t+\text{[illegible]}} \text{[illegible]} \frac{1}{\text{[illegible]}+b}\right) dt$

$= \dfrac{\text{[illegible]}}{b-\text{[illegible]}}$ [illegible] $\text{[illegible]}| - \log|t+b| \Big]_0^x$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\log\left|\frac{x+a}{x+b}\right| - \log\frac{a}{b}\right)$$

ゆえに　$\text{[illegible]} = \text{[illegible]} \lim_{\text{[illegible]}\to+\infty} g(x) = \dfrac{1}{b-a}\lim_{x\to+\infty}\left(\log\dfrac{1+\dfrac{a}{x}}{1+\dfrac{b}{x}} + \log\dfrac{b}{a}\right)$

$$\text{[illegible]} \boldsymbol{\frac{1}{b-a}\log\frac{b}{a}}$$

(2) (1) の結果から $\displaystyle\lim_{b\to a} B = \lim_{b\to a}\frac{\log b-\log a}{b-a}$

ここで，$h(x)=\log x$ とおくと $\displaystyle\lim_{b\to a}B = h'(a)$

$h'(x)=\dfrac{1}{x}$ であるから $\displaystyle\lim_{b\to a} B = \boldsymbol{\frac{1}{a}}$

6.81 (1) $y=1-x^2$ を微分すると $y'=-2x$

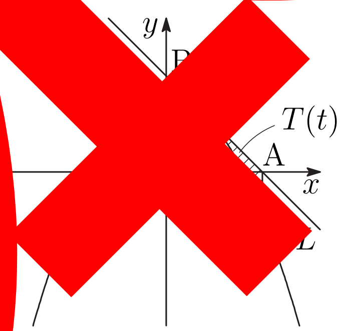
したがって，L は点 $(t,\ 1-t^2)$ を通り傾き $-2t$ の[illegible]るから

$$y-(1-t^2) = -2t(x- \text{[illegible]}$$ [illegible]わち $\boldsymbol{[illegible]tx+t^2+1}$

L と x 軸との接点の x 座標は $(0<$ [illegible]

$$-2tx+t^2+1=0 \text{ [illegible]}$$

(2) (1) の結果から



$$S(t) = \int_0^t \{(-2tx+ \text{[illegible]} (1-x^2)\text{[illegible]}$$

[illegible] $(x-t)^2\,dt$

$= $ [illegible] $)^3\Big]_0^t = \dfrac{1}{3}t^3$

[illegible] $(t) =$ [illegible] $dx = \left[\dfrac{1}{3}(x-t)^3\right]_t^{\frac{t^2+1}{2t}} = \dfrac{1}{24}\left(\dfrac{1}{t}-t\right)^3$

したた[illegible] S[illegible] $= \dfrac{1}{3}t^3\cdot\dfrac{1}{24}$ [illegible] $)^3 = \dfrac{1}{72}(1-t^2)^3$

[illegible] $(t)\cdot T$ [illegible] $)^3 = \boldsymbol{\dfrac{1}{72}}$

(3) [illegible] $S'(t)=t^2,\ T'(t) = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{t}-t\right)^2\left(-\dfrac{1}{t^2}-1\right)$

$S(t)+T(t)$ は[illegible]で最小となるので，$S'(a)+T'(a)=0$ より

$$\text{[illegible]}\ \frac{1}{8}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2\left(-\frac{1}{a^2}-1\right)=0$$

$$\text{[illegible]}\,a^3-\frac{1}{24}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2\left(\frac{1}{a}+a\right)=0$$

$$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{24}\left(\frac{1}{a}-a\right)^3=\frac{a}{12}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2$$

$0 < a < 1$ であるから　$S(a) - T(a) = \dfrac{a}{12}\left(\dfrac{1}{a} - a\right)^2 > 0$

よって　　$S(a) > T(a)$

6.82　(1) $f(x) = px^2$，$g(x) = -q(x-1)^2 + 1$ とおくと

$$f'(x) = 2px, \quad g'(x) = -2q(x-1)$$

C_1 と C_2 の接点の x 座標を t とすると　　$f(t) =$ [illegible] $(t) = g'(t)$

したがって　　$pt^2 = -q(t-1$ [illegible] $2pt =$ [illegible] $1)$

第 1 式から　　$(p+q)t^2 - 2qt = 1$ [illegible]

第 2 式から　　$(p+q)t = q$　$\cdots$ ② [illegible]

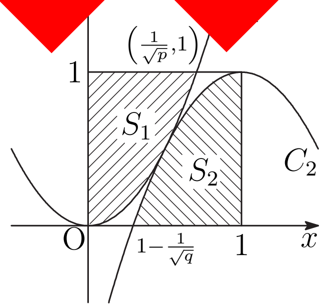
① $\times (p+q)$ より　　$\{(p+q)t$ [illegible] $q)(1-q)$

② をこれに代入して　　[illegible] $= (p$ [illegible]

整理すると　　$p + q = pq$ [illegible] よって　　[illegible] $= \mathbf{1}$

(2) [illegible] 点の x 座標は　$x = 0,\ \dfrac{1}{\sqrt{\ }}$ [illegible]

[illegible] $_2$ と [illegible] 座標は　$x = 1 -$ [illegible]



[illegible] って [illegible] $= \displaystyle\int$ [illegible] $x^2)\,dx$

[illegible] $\dfrac{1}{\ }px^3\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}} =$ [illegible]

[illegible] $= \displaystyle\int_{1-\frac{1}{\sqrt{q}}}^{1}$ [illegible] $+1\}\,dx$

[illegible] $\left[-\dfrac{q}{3}(x-1)^3 + x\right]_{1-\frac{1}{\sqrt{q}}}^{1} = \dfrac{2}{3\sqrt{q}}$

[illegible] $S_1 + S_2 = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{p}} + \dfrac{1}{\sqrt{q}}\right)$　$\cdots(*)$

上式およ [illegible] の結果から

$$S = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{\frac{1}{q}}\right) = \boldsymbol{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{1 - \frac{1}{p}}\right)}$$

(3) (2) の結果から　$\lim_{p\to\infty} S = \lim_{p\to\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\sqrt{1-\frac{1}{p}}\right) = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(4) (1) の結果から

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^2=2$$

$\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{q}}$ は，上式より，$p=q=2$ のとき，最大値 [illegible] とる．

(∗) より，S は，$\boldsymbol{p=2}$ のとき最 [illegible] $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ [illegible]

6.83 (1) $f_n(x)=x^2-\frac{n}{n+1}x^{2+\frac{2}{n}}$，$f_n(x)=0$ [illegible]

$x>0$ のとき　$x^{\frac{2}{n}}=\frac{n+1}{n}$ [illegible] $)^{\frac{n}{2}}$

(2) $x_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

$$[illegible] \int^{x_n} f_n(x)\,dx=\int_0^{x_n}\left(x^2 - [illegible]\right)dx$$

$$[illegible] \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{3n+2}x^{3+ [illegible]}$$

$$[illegible] \frac{3n^2}{[illegible]+1)(3n+2)}x_n^{\frac{2}{n}}\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{[illegible]}\left([illegible]\right)^{\frac{3}{2}n}\left\{1-\frac{[illegible]^2}{(n [illegible] 3n+2)}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\}$$

$$\boldsymbol{\frac{[illegible](n+ [illegible]}{3(3n+ [illegible]}}$$

(3) (2) [illegible]

$$[illegible] = n\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{2}{3(3n+2)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{2}n}$$

$$=\frac{2n}{3(3n+2)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$$

$$=\frac{2}{3\left(3+\frac{2}{n}\right)}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)=3,\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \text{ であるから}$$

$$\lim_{n\to\infty} nx_nS_n=\boldsymbol{\frac{2}{9}e^2}$$

6.84 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+\frac{1}{x}}=\mathbf{0}$, 同様に $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\mathbf{0}$

$f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ を微分すると $f'(x)=-\dfrac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f(x)$ の増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

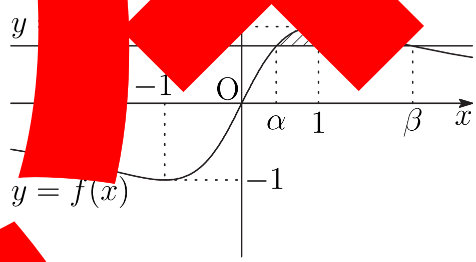
よって　$x=1$ のとき　**極大値 1**

$x=-1$ のとき　**極小値 -1**

(2) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ と $y=2^{-n}$ の共有点の x 座標は

$$\frac{2x}{x^2+1}=2^{-n} \quad x^2-2^{n+1}x+1=0 \quad \cdots\cdots (*)$$

方程式 $(*)$ の解を α, β とすると $(\alpha<\beta)$



$$S_n=\int_\alpha^\beta \frac{2x}{x^2+1}\,dx-2^{-n}(\beta-\alpha)$$

$$=\Big[\log(x^2+1)\Big]_\alpha^\beta-2^{-n}(\beta-\alpha)$$

$$=\log\frac{\beta^2+1}{\alpha^2+1}-2^{-n}(\beta-\alpha)$$

$(*)$ を解くと　$\alpha=2^n-\sqrt{4^n-1}$,　$\beta=2^n+\sqrt{4^n-1}$,　$\beta-\alpha=2\sqrt{4^n-1}$

また，α, β は $(*)$ の解であるから

$$\alpha^2+1=2^{n+1}\alpha,\quad \beta^2+1=2^{n+1}\beta,\quad \alpha\beta=1$$

$$\frac{\beta^2+1}{\alpha^2+1}=\frac{2^{n+1}\beta}{2^{n+1}\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta^2}{\alpha\beta}=\beta^2$$

上の諸式から　$S_n=\log\beta^2-2^{-n}\cdot 2\sqrt{4^n-1}$

$$=\boldsymbol{2\log(2^n+\sqrt{4^n-1})-2^{1-n}\sqrt{4^n-1}}$$

(3) (2) の結果から

$$S_{n+1}-S_n=2\log\frac{2^{n+1}+\sqrt{4^{n+1}-1}}{2^n+\sqrt{4^n-1}}-2^{-n}\sqrt{4^{n+1}-1}+2^{1-n}\sqrt{4^n-1}$$

$$=2\log\frac{2+\sqrt{4-4^{-n}}}{1+\sqrt{1-4^{-n}}}-\sqrt{4-4^{-n}}+2\sqrt{1-4^{-n}}$$

このとき，$\lim_{n\to\infty} 4^{-n} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}-S_n) = 2\log\frac{2+\sqrt{4}}{1+\sqrt{1}} - \sqrt{4} + 2\sqrt{1} = \mathbf{2\log 2}$$

6.85 (1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(1-\frac{x}{\sqrt{10-x^2}}\right)dx = \left[\,x+\sqrt{10-x^2}\,\right]_0^1 = \mathbf{4-\sqrt{10}}$

(2) $\displaystyle a_n = \int_0^n g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} \text{[illegible]}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \text{[illegible]} \left(\frac{2}{3}\right)^k f(x-k)\,dx$

$x-k=t$ とおくと，(1) の結果か[illegible]

$$\int_k^{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k f(x-k)\,dx = \text{[illegible]}$$

したがって

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1}(4-\sqrt{10})\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$= \text{[illegible]} -\sqrt{10}) \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3(4 \text{[illegible]} 0)\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

よっ[illegible] $\lim_{n\to\infty}$ [illegible] $\mathbf{(4-\sqrt{10})}$

(1) [illegible] $s\,nx$ [illegible] $|\cos$ [illegible] 偶関数であるから

$$\text{[illegible]}\,x\,|\cos nx\,dx = \text{[illegible]} \int_0^\pi x\cos nx\,dx$$

$$\text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]}}{2n}\int_0 \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]} \frac{1}{n}\left[\,x\sin nx\,\right]_0 \text{[illegible]} \frac{1}{2n}\int_0^\pi \sin nx\,dx$$

$$\text{[illegible]} \left[\,\cos nx\,\right]_0^\pi = \mathbf{\frac{1-(-1)^n}{2n^2}}$$

$$b_1 \text{[illegible]} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\cos x\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin x\cos x\,dx$$

$$\text{[illegible]}\frac{1}{4}\int_0^\pi \sin 2x\,dx = \frac{1}{8}\left[\,\cos 2x\,\right]_0^\pi = \mathbf{0}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx \, dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} \{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\} dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}-1}{4(n+1)} - \frac{(-1)^{n-1}-1}{4(n-1)}$$

$$= \frac{1+(-1)^n}{4}\left(-\frac{1}{n+1} \text{[illegible]}\right) \text{[illegible]} \boldsymbol{+(-1)^n} \text{[illegible]}$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{a_{2n+1}}{b_{2n}} = \frac{1-(\text{[illegible]}}{2\text{[illegible]}} \text{[illegible]} \frac{2\{(\text{[illegible]}}{1+\text{[illegible]}} \text{[illegible]} - 1 \text{[illegible]}$$

ここで $\frac{2n+1}{2n+3} - \frac{2n-\text{[illegible]}}{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)(2\text{[illegible]}} \text{[illegible]} > 0$

[illegible] $\left\{\text{[illegible]}\right\}_{2n}$ [illegible] 増加列であるから $\sum_{n=\text{[illegible]}}^{\infty} \text{[illegible]} > \sum_{n=1}^{\text{[illegible]}} \frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} \text{[illegible]} 3$

よ[illegible] $\sum_{n=\text{[illegible]}} \frac{a_2\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$ [illegible] する.

[illegible] $f_1(x)$ [illegible] $+ 2\int$ [illegible] $(x)\, dx$, $f_0(x)$ [illegible] x より

$$\text{[illegible]}(x) = f_1 \text{[illegible]} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x f_0(x)\, dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x \, dx$$

$$= 2\Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}$$

(2) [illegible] $) = \sin x + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x f_n(x)\, dx$

$$f_n(x) = \sin x + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x f_{n-1}(x)\, dx$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\{f_n(x) - f_{n-1}(x)\}\,dx$$

したがって　　$g_{n+1}(x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} xg_n(x)\,dx$

上式および (1) の結果から，$g_n(x)$ は定数関数であるた

$$g_{n+1}(x) = g_n(x)\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \quad = g_n(x)\Big[\quad \frac{}{16}g_n(x)$$

よって　　$g_n(x) = g_1(x)\left(\dfrac{\pi^2}{16}\right)^{n-} \quad =$

(3)　　$a_n = f_n(x) - \sin x = f_n($

$$= \sum_{k=1}^{n}\{f_k(x) - f \quad = \sum_{k=1}^{n} \quad = \quad \left(\frac{\pi^2}{}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{c}{1 - \frac{\pi^2}{16}}\left\{1 - \left(\frac{}{16}\right)^n\right\} = \frac{\sqrt{2}}{1} \quad \left\{1 \right.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left\{1 - \left(\frac{\pi^2}{16}\right)^n\right\}$$

この　$0 <$　$\pi)^2 < 1$ であるか　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{\pi + 4}}$

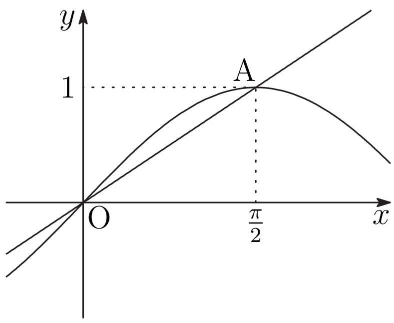
(1)　$= \sin$　ると　$x) = -\sin x$

ゆえに　$x < \frac{\pi}{}$　いて　$f''(x)$

$= f($　$0),\ $A　$)$

る直　$= g(x)$

$$x) = \frac{2}{\pi}x$$



曲線 $y = f(x$　$< x < \dfrac{\pi}{2}$ において上に凸であるから

$x) < f(x)$　　すなわち　　$\dfrac{2}{\pi}x < \sin x$

(2)　(1) の結果か　，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$-r^2\sin x < -\frac{2r^2}{\pi}x \quad ゆえに \quad 0 < e^{-r^2\sin x} < e^{-\frac{2r^2}{\pi}x}$$

したがって　　$0 < \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2 \sin x}\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2r^2}{\pi}x}\,dx$

ここで　　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2r^2}{\pi}x}\,dx = \left[-\frac{\pi}{2r^2}e^{-\frac{2r^2}{\pi}x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2r^2}\left(1-e^{-r^2}\right)$

上の2式から，$r > 0$ のとき

$$0 < r\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2 \sin x}\,dx < \frac{\pi}{2r}(1-e^{-\text{[illegible]}}$$

$\displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{\pi}{2r}(1-e^{-r^2}) = 0$ であるか[illegible]さみう[illegible]により

$$\lim_{r\to\infty} r\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\text{[illegible]}}$$

6.89　(1)　$y = e^{-x}$ より　$y' = -e^{-x}$

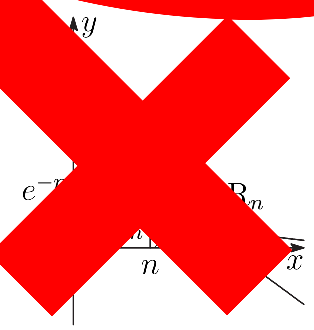
曲線 $y = e^{-x}$ の $\mathrm{P}_n(n,\ e^{-n})$ [illegible]接線[illegible]

$$y - e^{-n} = -e\text{[illegible]}n)$$

ゆえに[illegible]　$y = -e^{-n}(x-n-1)$

こ[illegible]軸の交点の x 座標 a_n は

[illegible]$= \boldsymbol{n+1}$



(1) の[illegible]ら[illegible]$= a_n - n = 1$，P[illegible]e^{-n}

[illegible]$\triangle$[illegible]$\mathrm{R}_n\cdot\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{-n} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}e^{-n}}$

(2) の結[illegible]ら

[illegible]$^{n+1}$ $e^{-x}\,d$[illegible]$\dfrac{\text{[illegible]}}{2}e^{-k}$

$= \Big[$[illegible]$\Big]_1 - \dfrac{1}{2}e^{-1}\times\dfrac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$

$= -e^{-n-1} + \dfrac{1}{e} - \dfrac{1-e^{-n}}{2(e-1)}$

よって　[illegible]$= \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{2(e-1)} = \boldsymbol{\dfrac{e-2}{2e(e-1)}}$

6.90　(1)　$t = e^x$，$g(t)$[illegible]$f(x)$ とおくと

$$g(t) = \frac{1}{1+\frac{t}{e}} + \frac{1}{1+\frac{1}{et}} - 1 = \frac{e}{t+e} + \left(\frac{et}{et+1} - 1\right) = \frac{e}{t+e} - \frac{1}{et+1}$$

したがって

$$g'(t) = -\frac{e}{(t+e)^2} + \frac{e}{(et+1)^2} = \frac{e\{(t+e)^2 - (et+1)^2\}}{(t+e)^2(et+1)^2}$$
$$= \frac{e(t+e+et+1)(t+e-et-1)}{(t+e)^2(et+1)^2}$$
$$= \frac{e(1+e)(1-e)(t+1)(t-1)}{(t+e)^2(et+1)^2}$$

$t > 0$ であるから，$g(t)$ の増減表[illegible]のようにな[illegible]

t	(0)	[illegible]	1	[illegible]
$g'(t)$		[illegible]	[illegible]	[illegible]
$g(t)$		[illegible]	[illegible]	[illegible]

よって，$t = 1$，すなわち，$\boldsymbol{x} =$ [illegible]なる．

(2) $\quad f(x) = \left(\frac{1}{1+e^{x-1}} - \right.$ [illegible] $\frac{1}{[illegible] + e^{-x-[illegible]}}$ [illegible]

$$= -\frac{e^{x-1}}{e^{x-1}+1} + \frac{[illegible]^{+1}}{e^{x+1}+1} = \Big\{\mathrm{lo}\,[illegible]\ \frac{[illegible]^{+1}+1}{[illegible]^{1}+[illegible]}$$

[illegible])が偶関数であることから

$$[illegible]\,dx = 2\left[\ \log\left(\frac{e^{x+1}[illegible]}{e^{x-}[illegible]}\right)\right]_0^a$$

$$[illegible] - 2\log\frac{e+1}{e^{-1}[illegible]1} = \mathbf{2\log\frac{e^{a+1}+1}{e^{a-1}+1} - 2}$$

[illegible] $\frac{[illegible]^{1}+1}{[illegible]1} = \lim_{a\to[illegible]} \frac{[illegible]^{-a}}{[illegible]^{-a}} = e^2$

[illegible]て，[illegible]よび (2) [illegible] $\lim_{a\to\infty} I(a) = 2\log e^2 - 2 = \mathbf{2}$

6.91 (1) $g($[illegible]$g\,x$[illegible]とおくと $\quad g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$

したがって，[illegible]の増減表は次のようになる．

[illegible]	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
[illegible]		$-$	0	$+$
[illegible]$x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

ゆえに $\quad g(x) \geqq 1 > 0 \quad$ よって $\quad \log x + \frac{1}{x} > 0$

(2) (1) の結果から $\quad -\dfrac{1}{x} < \log x$

また，$0 < x < 1$ のとき $\quad -\dfrac{1}{x} < \log x < 0 \quad$ ゆえに $\quad -x^{n-1} < x^n \log x < 0$

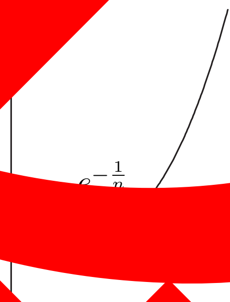
n は 2 以上の自然数であるから $\quad \displaystyle\lim_{x\to+0}(-x^{n-1}) = 0$

よって，はさみうちの原理により $\quad \displaystyle\lim_{x\to+0} x^n \log x = 0$

(3) $f(x) = x^n \log x$ を微分すると

$f'(x) = x^{n-1}(n\log$ …

したがって，$f(x)$ の増減表は次の…



x	(0)	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	
$f(x)$		$\searrow$	$-$	

よって，グラフの概形は…のように…最小…$= -\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{ne}}$

(4) (3) の…から，$c_n = e^{-\frac{1}{n}}$ であるから

$$\int_{c_n}^{1} x^n \log x\,dx = \frac{1}{n+1} \cdots \log x\,dx$$

$$\cdots \log x \cdots 1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \cdots$$

$$\cdots \frac{1}{n(} \cdots \frac{n+1}{n} - \frac{1}{\cdots)^2}(1 - e^{-\frac{n+1}{n}})$$

ゆえ… $n^2 I_n$ … $e^{-\frac{n+1}{n}} - \dfrac{n}{(n} \cdots - e^{-\frac{n+1}{n}})$

…で … $\dfrac{n}{n+1}$ … $1)^2 = 1, \quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n+1}{n}} = e^{-1}$

よ… $I_n = e^{-1} - (1 - e^{-1}) = \mathbf{2e^{-1} - 1}$

6.92 (1) $f(x) = x - e$ … 微分すると $\quad f'(x) = 1 - e^{x-1}$

$f(x)$ の増減表…

…	$\cdots$	1	$\cdots$
…(x)	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

よって，方程式 $f(x) = 0$ の解は $\quad \boldsymbol{x = 1}$

(2) 曲線 $y = 2x^2 \log x$ と曲線 $y = kx^2 - k$ $(k > 0)$ の接点の座標を $\alpha > 0$ とする．$g(x) = 2x^2 \log x - k(x^2 - 1)$ とおくと

$$g'(x) = 4x \log x + 2x - 2kx = 2x(2 \log x + 1 - k)$$

このとき，$g(\alpha) = 0$，$g'(\alpha) = 0$ であるから

$$2\alpha^2 \log \alpha - k(\alpha^2 - 1) = 0, \quad 2 \log \alpha + 1 - k = [illegible] \cdots (*)$$

上の 2 式から k を消去すると

$$2\alpha^2 \log \alpha - (2 [illegible]) ([illegible] = 0$$

整理すると　$2 \log \alpha - \alpha^2 + 1 = 0$　ゆ [illegible]

したがって　$\alpha^2 = e^{\alpha^2 - 1}$　(1) の [illegible]

$\alpha > 0$ であるから　$\alpha = 1$　[illegible] $(*)$ [illegible] $\boldsymbol{k = 1}$

(3) (2) の結果により

$$\int^{1} (2x^2 \log x - x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{2}{3} [illegible] x - [illegible] \right] [illegible]$$

$$= \frac{4}{9} + [illegible] \frac{[illegible] \log [illegible]}{n} + \frac{5}{9n^3} - \frac{1}{n}$$

こ [illegible]，$\lim\limits_{n [illegible]}$ [illegible] であるから

$$[illegible] \int_{\frac{1}{n}} (2x^2 \log x [illegible] 1)\, dx = \boldsymbol{\frac{4}{9}}$$

6.93 [illegible] $x < \frac{1}{[illegible]}$ [illegible] と，$f(x$ [illegible] $\left(\frac{1}{[illegible]} \right)$ であるから

$$f [illegible] e^{-x} \left(x - \frac{3}{2} \right) < 0, \quad f''(x) = \left(\frac{5}{2} - x \right) > 0$$

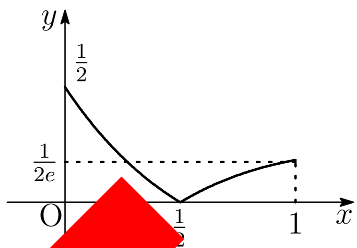
$\frac{1}{2} < x < 1$ の [illegible] $f(x) = e^{-x} \left(x - \frac{1}{2} \right)$ であるから

$$f [illegible] = e^{-x} \left(\frac{3}{2} - x \right) > 0, \quad f''(x) = \left(x - \frac{5}{2} \right) < 0$$

$$f(0) = \frac{1}{2}, \ f\left(\frac{1}{2} \right) = 0, \ f(1) = \frac{1}{2e}$$

したがって，$f(x)$ の増減表およびグラフの概形は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f''(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	極小 0	↗	$\frac{1}{2e}$



(2) $$a_1 = \int_0^1 e^{-x}\left|x-[x]-\text{[illegible]}\right.\ \text{[illegible]}\ \int_0^1 e\ \text{[illegible]}\ \left.\tfrac{\text{[illegible]}}{2}\right|dx$$

ここで，$e^{-x}\left(\dfrac{1}{2}-x\right)$ の原始関数の 1 [illegible]

$$a_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x}\left(\frac{1}{\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}\ x\right)dx$$

$$= \Big[\,F(x\text{[illegible]}\ \text{[illegible]}\Big[\,F(x)\,\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= 2F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)-F(1)\ \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}\,{}^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}e^{-1}=\frac{\mathbf{4}\sqrt{\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$$

(3) [illegible] $a_n +$ [illegible] であるから

$$\int_n^{\text{[illegible]}} f\ \text{[illegible]} = \int_n^{n+1} e^{-x}\left|\text{[illegible]}\right]-\frac{1}{2}\left|dx\right.$$

$$\text{[illegible]}\ e^{-(t}\ \text{[illegible]}\ n)-[\,t+n\,]-\frac{1}{2}\left|dt\right.$$

$$= e\ \text{[illegible]}\int_0\ \text{[illegible]}\ e^{-t}\left|t-\frac{1}{2}\right|dt = e^{-n}a_1$$

$a_{n+1} = a_n +$ [illegible] より，$n \geqq 2$ のとき

$$\text{[illegible]}\ a_1 + a_1e^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}(e^{-1})^{k-1}$$

$$= a_1 + a_1e^{-1}\times\frac{1-(e^{-1})^{n-1}}{1-e^{-1}} = \frac{a_1(1-e^{-n})}{1-e^{-1}}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{a_1(1-e^{-n})}{1-e^{-1}}}$

$\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \times \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{4\sqrt{e}-e-3}{2e} \times \frac{1}{1-e^{-1}} = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{e}-e-3}{2(e-1)}}$$

6.94 (1) $0 < x < 1$ のとき

$$0 < \int_0^x e^t\,dt < \int_0^x 6\,d\text{[illegible]} \quad e^x - 1 < 6x$$

これから

$$0 < \int_0^x (e^t-1)dt < \int^x \text{[illegible]} \quad 1 - x < \text{[illegible]}$$

さらに

$$0 < \text{[illegible]}{}^t - 1 - t)dt < \int_0 3t^2\,dt \quad \text{ゆえ[illegible]} < e^x \text{[illegible]} {}^2 < x^3$$

[illegible]，[illegible] 1 において，$0 < f(x) <$ [illegible] 成[illegible]つ.

[illegible] > 1 の[illegible] < 1 であるから，上[illegible]り

$$0 \text{[illegible]} \left(\frac{1}{n}\right)^3 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$\lim$ [illegible] であ[illegible] はさみうちの[illegible]により $\lim_{n\to\infty} n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

[illegible] $g(x)\,d$[illegible] $e^x\,dx$ [illegible] $\Big]^1$ [illegible] 1， $K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \times \frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$

$$\int_0 \text{[illegible]} x - K_n = (e-1)\left\{1 - \frac{1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}\right\}$$

$$= (e-1) \times \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}\left\{n(e^{\frac{1}{n}}-1) - 1\right\}$$

$f\left(\frac{1}{n}\right) =$ [illegible] $1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$ より，$n(e^{\frac{1}{n}}-1) - 1 = nf\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n}$ から

$$n\left\{\int_0^1 g(x)\,dx - K_n\right\} = (e-1) \times \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1} \times \left\{n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\right\}$$

よって，求める最大の自然数 k は $\boldsymbol{k=1}$ であり，そのときの極限値は

$$\lim_{n\to\infty} n\left|\int_0^1 g(x)\,dx - K_n\right| = (e-1)\times 1\times\left(0+\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{e-1}{2}}$$

6.95 (1) $f(x)=ax-\log(x+\sqrt{x^2-1})$ を微分すると

$$f'(x) = a - \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = a - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\text{[illegible]}-1}{\text{[illegible]}x^2-1}$$

$$= \frac{a^2x^2-(a^2\text{[illegible]}}{\sqrt{x^2-1}(a\sqrt{x^2-\text{[illegible]}}}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次の[illegible]

x	(1)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	[illegible]	$+$
$f(x)$		$\searrow$	[illegible]	$\nearrow$

よって[illegible] $\boldsymbol{h(a)=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}}$

(2) [illegible] $\sqrt{x^2-1}) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

[illegible] $(h(a)$ [illegible] $\sqrt{\dfrac{a^2+1}{a^2}-1} = \dfrac{1}{a}$

[illegible] $) = a$ [illegible] $\log\{h$ [illegible] $\sqrt{(h(a)}$ [illegible] を微分すると

[illegible] $) + ah'(a)$ [illegible] $\dfrac{1}{\sqrt{(h(a))^2-1}}\cdot h'(a)$

$=$ [illegible] $ah'(a) = h(a)$

よ[illegible] (a) の原始関数である.

(3) (2) の結果から

$$I_n = \int_n^{n+1} h(a)\,da = \Big[\, F(a) \,\Big]_n^{n+1} = F(n+1) - F(n)$$

$$= (n+1)h(n+1) - \log(h(n+1) + \sqrt{(h(n+1))^2-1})$$

$$- nh(n) + \log(h(n) + \sqrt{(h(n))^2-1})$$

$$= (n+1)\cdot\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}}{n+1} - \log\left(\frac{\sqrt{(n+1)^2 \text{[illegible]}}}{n+\text{[illegible]}} \text{[illegible]} \frac{1}{n+1}\right)$$

$$- n\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} + \text{[illegible]} \sqrt{n^2+1} \text{[illegible]}$$

$$= \boldsymbol{\sqrt{(n+1)^2+1} - \sqrt{n^2} \text{[illegible]}}$$

$$\boldsymbol{- \log \frac{\sqrt{(n+1)^2 \text{[illegible]}}}{n \text{[illegible]}} \text{[illegible]} n}$$

ここで

$$\sqrt{(n+1)^2+1} - \text{[illegible]} 1 = \frac{\text{[illegible]} n + \text{[illegible]}}{\sqrt{(n \text{[illegible]} + 1 + \text{[illegible]}}}$$

$$= \frac{\text{[illegible]} 2 \text{[illegible]}}{\sqrt{\left(1 \text{[illegible]}\right.} \text{[illegible]} + \frac{\text{[illegible]}}{n^2} + \sqrt{1 + \frac{\text{[illegible]}}{n^2}}}$$

した[illegible]

$$I_n = \frac{\text{[illegible]}}{\sqrt{\left(1 + \text{[illegible]}\right.} \text{[illegible]} \frac{1}{n^2} + \sqrt{1 + \text{[illegible]}}}$$

$$\text{[illegible]} \log\left(\sqrt{1 \text{[illegible]}} \text{[illegible]} n+1\right) + \log\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n}\right)$$

よ[illegible] $= \dfrac{2}{1+1} - \log 1 + \log 1 = \mathbf{1}$

6.96 (1) $\boldsymbol{f(x) = \sin 2}$[illegible] $\boldsymbol{f(x) = \cos 2\pi x}$ など

(2) $F(x) = \int_0^x$ [illegible] および $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ より

$$\text{[illegible]} 1) = \int_0^{x+1} f(y)\,dy$$

$$= \int_0^1 f(y)dy + \int_1^{x+1} f(y)\,dy = \int_1^{x+1} f(y)\,dy$$

$y = t+1$ とおくと　$dy = dt$

y	$1 \longrightarrow x+1$
t	$0 \longrightarrow \quad x$

したがって

$$F(x+1) = \int_1^{x+1} f(y)\,dy = \int_0^x f(t+1)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt = F(x)$$

よって，$F(x)$ は周期 1 の周期関数である．

(3) $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(y)\,dy$ であるから　$\dfrac{d}{[illegible]}F(t) = f(t)$

$t = nx$ とすると，$\dfrac{dt}{dx} = n$ より

$$\frac{d}{dx}F(t) = \left\{\frac{d}{dt}F(t)\right\}\frac{dt}{dx} = f(t)n \text{ [illegible]}$$

(4) (3) の結果から

$$a_n = \int_0 \text{[illegible]} x)\,dx = \frac{1}{n}\int \text{[illegible]} F(nx)\}\text{[illegible]}$$

$$= \frac{1}{n}\Big[\,xF(nx)\,\Big]_0^1 - \frac{1}{n}\int \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}\frac{1}{n}F(n) - \frac{1}{n}\int_0^1 F(n\text{[illegible]} \quad \cdots ①$$

[illegible]結果か[illegible]$(n$[illegible]$) = \displaystyle\int_0^1 f(y)\,dy = 0 \quad \cdots ②$

$t = n$[illegible]と[illegible]

x	[illegible]
t	0 [illegible]

[illegible]って

$$\text{[illegible]}nx)\,dx = \text{[illegible]}\,dt = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} F(t)\,dt \quad \cdots ③$$

さらに，$t =$ [illegible]$- 1$ とおくと　$dt = du$

t	$k-1 \longrightarrow k$
u	$0 \quad \longrightarrow 1$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\text{[illegible]}(t)\,dt = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 F(u+k-1)\,du$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 F(u)\,du = \frac{1}{n}\int_0^1 F(u)\,du \quad \cdots ④$$

③，④より　$\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 F(nx)\,dx = \dfrac{1}{n}\int_0^1 F(u)\,du$

上式および②を①に代入すると　　$a_n = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 F(u)\,du$

このとき，$\displaystyle\int_0^1 F(u)\,du$ は定数であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

別解　　$a_n = \displaystyle\int_0^1 xf(nx)\,dx$

上式について，$y = nx$ とおく[illegible] $\dfrac{dy}{n}$ [illegible] $\longrightarrow 1$ [illegible] $\longrightarrow n$

$$a_n = \frac{1}{n^2}\int_0^n yf(y)\,dy \text{ [illegible]}$$

さらに，$y = u + k - 1$ とお[illegible] $dy =$ [illegible] $\longrightarrow k$ [illegible] u [illegible]

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 (u+k-1)f(u \text{ [illegible] } 1)$$

$$\text{[illegible]} \sum^{n} \int_0^1 (u+k-1)f(u \text{ [illegible]}$$

$$\text{[illegible]} \int^1 uf(u)\,du + (k-1)\int_0^1 f(u)\,du\Big\}$$

$$= \frac{1}{\text{[illegible]}} \text{ [illegible] } uf(u)\,du \text{ [illegible] } -1)\int_0^1 f(u)\,du\Big\}$$

$$\text{[illegible]} \int_0 \text{ [illegible] } du$$

[illegible]$f(u)\,du$ は定[illegible]るから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

6.97　(1)　$f(x) = e^{-x}(a$ [illegible] $+ b\cos px)$ であるから

$$f'(x) = \text{[illegible]}(a\sin px + b\cos px) + e^{-x}(ap\cos px - bp\sin px)$$

$$\text{[illegible]}\{-(a+bp)\sin px + (ap-b)\cos px\}$$

これが $f(x)$ [illegible] $e^{-x}\sin px$ となるので

$$e^{-x}\{-(a+bp)\sin px + (ap-b)\cos px\} = e^{-x}\sin px$$

ゆえに　　$e^{-x}\{-(a+bp+1)\sin px + (ap-b)\cos px\} = 0$

すべての x に対して，上式は成立するので，$x=0,\ \dfrac{\pi}{2p}$ を代入すると

$$ap-b=0,\quad a+bp+1=0$$

よって　　$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{1+p^2},\quad b=-\dfrac{p}{1+p^2}}$

別解　$e^{-x}\sin px,\ \ e^{-x}\cos px$ を微分すると

$$(e^{-x}\sin px)'=-e^{-x}\sin px+e^{-x}\cdot p\,\mathrm{co}\text{[illegible]}$$
$$=-e^{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\sin px+pe^{-x}\text{[illegible]}$$

$$(e^{-x}\cos px)'=-e\text{[illegible]}p\sin px)$$
$$=-pe^{-}\text{[illegible]}$$

上の 2 式から

$$\begin{pmatrix}(e^{-x}\sin px)'\\(e^{-x}\cos px)'\end{pmatrix}\ \text{[illegible]}\ -p\ \text{[illegible]}\ \sin px\ \text{[illegible]}\ x$$

2 次の正方行列 $\begin{pmatrix}-1 & p\\ -p & -1\end{pmatrix}$ は正則であ[illegible]，$\Big($[illegible] を上式の[illegible]らかけると

$$\text{[illegible]}\begin{pmatrix}-1 & -p\\ \text{[illegible]} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(e^{-x}\sin p\text{[illegible]}\\(e^{-x}\cos p\text{[illegible]}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{[illegible]}{}^{x}\sin px\\ e^{-x}\cos px\end{pmatrix}$$

上式[illegible]1) 成分[illegible]

$$\text{[illegible]}\frac{1}{1+\text{[illegible]}}\text{[illegible]}px-\frac{p}{\text{[illegible]}}e^{-x}\cos px\Big)'=e^{-x}\sin px$$

よ[illegible]　$\boldsymbol{a}$ [illegible]$\boldsymbol{{}_2},\quad \boldsymbol{b=-}$[illegible]

[illegible]とお[illegible]$(t\neq 0)$，

$$\text{[illegible]}\frac{t^2}{\text{[illegible]}^2+1}e^{-x}\sin\frac{x}{t}-\frac{t}{t^2+1}e^{-x}\cos\frac{x}{t}\Big)'=e^{-x}\sin\frac{x}{t}$$

したがって

$$S(\text{[illegible]}\int_0^{t^2}e^{-x}\sin\frac{x}{t}\,dx$$
$$\text{[illegible]}\left[-\frac{t^2}{t^2+1}e^{-x}\sin\frac{x}{t}-\frac{t}{t^2+1}e^{-x}\cos\frac{x}{t}\right]_0^{t^2}$$
$$\boldsymbol{=-\frac{t^2}{t^2+1}e^{-t^2}\sin t+\frac{t}{t^2+1}\left(1-e^{-t^2}\cos t\right)}$$

(3) (2) の結果から

$$\frac{S(t)}{t^3} = -\frac{e^{-t^2}}{t^2+1} \times \frac{\sin t}{t} + \frac{1}{t^2+1} \times \frac{1-e^{-t^2}\cos t}{t^2}$$

$$= -\frac{e^{-t^2}}{t^2+1} \times \frac{\sin t}{t} + \frac{1}{t^2+1}\left\{\frac{1-e^{-t^2}}{t^2} + \frac{e^{-t^2}(1-\cos t)}{t^2}\right\}$$

$$= -\frac{e^{-t^2}}{t^2+1} \times \frac{\sin t}{t} + \frac{1}{t^2+1}\left\{\frac{e^{-t^2}-1}{-t^2} + e^{-}\text{[illegible]} - \cos t \over t^2\right\}$$

ここで　$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1,\quad \lim_{t\to 0}$ [illegible] $= 1$

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{1+}$ [illegible]

よって　$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3} = -1 \times$ [illegible]

6.98 (1) $a_{n+1} -$ [illegible] $\displaystyle = \int_0^{(n+1)\pi} e^{-rx}|$ [illegible] $x|\,dx - \int_0^{n}$ [illegible] $\sin x|\,d$ [illegible]

$\displaystyle\int^{(n+1)\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx$

[illegible] $= x$ [illegible] $\dfrac{dx}{dt} = 1,$

x	n [illegible]	$(n+1)\pi$
t	[illegible]	π

a_{n+1} [illegible] $\displaystyle\int_0$ [illegible] $|\sin(t$ [illegible] $)|\,dt$

[illegible] $e^{-rt}\sin t\,dt$ [illegible] $^{n\pi}a_1$

[illegible] e^{-rn} [illegible] $\left[\ \text{[illegible]} + \cos t)\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\dfrac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}e^{-nr\pi}}$

(2) a_{n+} [illegible] $_n =$ [illegible] $_1$，$a_1 = \dfrac{e^{\text{[illegible]}}+1}{r^2+1}$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+}\text{[illegible]} = a_1\sum_{k=1}^{n-1}e^{-rk\pi}$$

$$a_n = a_1\sum_{k=0}^{n-1}e^{-rk\pi} = a_1 \times \frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}}$$

$$= \frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1} \times \frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}} = \frac{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$a_n = \frac{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}$$

(3) $r>0$ より，$\lim_{n\to\infty} e^{-rn\pi}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+e^{-r\pi}}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}$$

(4) $rf(r) = \dfrac{r(1+e^{-r\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})} = \dfrac{1 [illegible]}{([illegible]} \times \dfrac{-[illegible]}{e [illegible]}$ [illegible] あるから

$$\lim_{r\to+0} rf(r) = [illegible]$$

6.99 (1) $f(x)=2\sqrt{x}-\log x$ とおくと [illegible] $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

したがって　$x \geqq 1$ のと [illegible] $) \geqq 0$

$x>1$ で $f(x)$ は単調増加で [illegible] $f(1)=2>$ [illegible] るから

[illegible] $\geqq 1$ のとき　$f(x)>0$　ゆ [illegible] $\sqrt{x}$

(2) [illegible] の結果 [illegible] 然数 n に対して

0 [illegible] $(n+$ [illegible] $+1$　ゆえに　[illegible] $(n+1)^{\frac{1}{n}} < 2\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$

[illegible] $2\sqrt{\dfrac{1}{[illegible]}}$ [illegible] $\dfrac{}{n^2} = 0$ [illegible] から，[illegible] うちの原理により

li [illegible] $\frac{1}{n} = 0$　よ [illegible] $\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} = \mathbf{1}$

(3) [illegible] き，$2+\dfrac{[illegible]}{\pi}$ [illegible] $x<3$ であるから

$$\int_0 [illegible] \frac{2}{\pi}x\Big)^n dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\sin x)^n\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^n\,dx$$

ゆえに [illegible] $+\dfrac{2}{\pi}x\Big)^n dx = \left[\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{\pi}{2}\left(2+\dfrac{2}{\pi}x\right)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \frac{3^n}{n+1}\cdot\frac{3\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^n\,dx = 3^n\cdot\frac{\pi}{2}$$

したがって

$$\frac{3}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}^{\frac{1}{n}} < \left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin x)^n\,dx\right\}^{\frac{1}{n}} < 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(2) の結果により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}^{\frac{1}{n}} = 3$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ [illegible] 3

よって，はさみうちの原理によ[illegible]

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+ \text{[illegible]}$$

6.100 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ とおくと，$f($[illegible]

$$\text{[illegible]}\ \frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \text{[illegible]}$$

f [illegible]単調増[illegible]ら，区間 $k-1 \leqq x \leqq$ [illegible]いて $(1 \leqq k \leqq n)$

$$\text{[illegible]} < \int_{k-1}^{k} f(k)\,dx < \int_{k-1}^{k}\ \text{[illegible]}\ dx$$

[illegible]がって [illegible] $dx < f(k) <$ [illegible]

[illegible]につい[illegible]加え[illegible]

$$\int_0^n f(x)\ \text{[illegible]} \sum_{k=1}^{n} f(k) < n$$

このとき $\displaystyle\int_0^n$ [illegible] $= \Big[\sqrt{x^2+1}\Big]_0^n = \sqrt{n^2+1}-1$

したがって [illegible] $1-1 < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) < n$

ゆえに $\displaystyle\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) < 1$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{n}\right)=1$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k)=1 \quad すなわち \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)=\mathbf{1}$$

解説 $a_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ とおくと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a[illegible]+\cdots+a_n}{[illegible]}=1$

> $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ のとき [illegible] $\dfrac{a_1+a_2+[illegible]}{[illegible]}=\alpha$

6.101 (1) $I_1=\displaystyle\int_0^{\sqrt3}\frac{1}{1+x}\,dx=\Big[\log(1+x)\Big]$ [illegible]

(2) $I_2=\displaystyle\int_0^{\sqrt3}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ において [illegible] an [illegible]

x	$0 \longrightarrow$ [illegible]
[illegible]	0 [illegible]

$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{[illegible]\theta}$ であるから [illegible] $=\displaystyle\int_0^{\sqrt3}\frac{[illegible]}{1+\mathrm{t}[illegible]}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$ [illegible] $=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$

(3) ま [illegible] <1 のとき

[illegible] $-k)=\dfrac{k^2}{1+k}\geqq 0,$ [illegible] $k=\dfrac{k}{1+k}\geqq 0$

よ [illegible] $1-k$ [illegible] 1 (等号が成り立つのは，$k=0$ のとき)

[illegible] たが [illegible] $\displaystyle\int_0$ $(1$ [illegible] $<\displaystyle\int_0^1\frac{[illegible]}{1[illegible]}$ [illegible] $dx<\displaystyle\int_0^1dx$

[illegible] $<\displaystyle\int_0^1$ [illegible] $dx<1 \quad \cdots①$

[illegible] き $\quad 0<$ [illegible] $\dfrac{[illegible]}{1[illegible]k}$

したがって [illegible] $\displaystyle\int^{\sqrt3}\frac{1}{1+x^n}\,dx<\int_1^{\sqrt3}\frac{1}{x^n}dx$

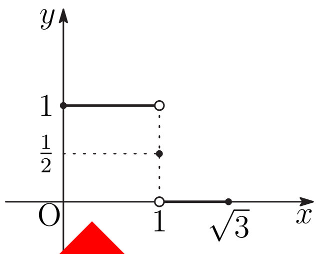
[illegible] $\displaystyle\int_1^{\sqrt3}\frac{1}{1+x^n}\,dx<\frac{1}{n-1}\left\{1-\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^{n-1}\right\} \quad \cdots②$

①，② より，[illegible] さみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,dx+\lim_{n\to\infty}\int_1^{\sqrt3}\frac{1}{1+x^n}\,dx=1+0=\mathbf{1}$$

解説 $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$ $(0 \leqq x \leqq \sqrt{3})$ に対して，

$f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とすると，$y = f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．



これから，明らかに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 1$

また，次の 2 式を示せばよいことが分かる．

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx = 1\ [illegible]\ \lim_{n\to\infty}\int [illegible] \frac{[illegible]}{[illegible]+x^n}\,dx = 0$$

(以上の説明でも部分点は貰える)

6.102 (1)

$$a_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\cos k\pi$$
$$= -\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) + [illegible] \frac{1}{4} + [illegible]$$
$$[illegible]\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) + [illegible] \cdots + \frac{[illegible]}{2n}\Big)$$
$$[illegible] \sum_{[illegible]1}^{n}\frac{1}{k} = -\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{[illegible]}$$

(2) [illegible]の結果[illegible]

$$[illegible] \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k[illegible]}^{2n} [illegible]$$
$$= [illegible] \Big[\log x\Big]_1^2 = \mathbf{-\log 2}$$

(3)

$$b_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k}\cos\frac{2k\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots \text{[illegible]}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3 \text{[illegible]}}\right) \text{[illegible]} \frac{1}{\text{[illegible]}}\left(1+\frac{1}{\text{[illegible]}} \text{[illegible]} \frac{1}{n}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = -\frac{1}{2}\sum_{k=n+ \text{[illegible]}} \text{[illegible]}$$

よって $\displaystyle \lim_{n\to\infty} b_n = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\text{[illegible]}} \text{[illegible]} \frac{k}{n}$

$$= -\frac{\text{[illegible]}}{2}\int \text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]}}{x} = -\frac{1}{2}\Big[\ \text{[illegible]}\ \Big]^{3} = - \text{[illegible]}$$

6.103 (1) $f(x)$ [illegible]

$$v(\text{[illegible]}) \text{[illegible]} \int^{x} \text{[illegible]} e^{t}(x-t)\,dt = \Big[\ e^{t}(x- \text{[illegible]}\ \Big]_0^{x} = \boldsymbol{e^x - x - 1}$$

(2) $v($[illegible]$\displaystyle\int_0 e^t$ [illegible] いて，$u = x-t$ とおくと

t	$0 \longrightarrow x$
u	$x \longrightarrow 0$

[illegible] $= -du$

$$= \int^{0} \text{[illegible]} (u)\,(- \text{[illegible]} \int \text{[illegible]} (u)\,du$$ を微分すると

$$\text{[illegible]}\ e^x\int_0^x e^{-u}f(u) + e^x\cdot e^{-x}f(x) = v(x)+f(x)$$

$v(x)+f(x) =$ [illegible] より，$v'(x) = \sin^4 x$ であるから

$$v(x) = \text{[illegible]}\, x\,dx = -\int \sin^3 x(\cos x)'\,dx$$

$$= -\sin^3 x\cos x + \int 3\sin^2 x\cos x\cdot\cos x\,dx$$

$$= -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x\,dx - 3\int \sin^4 x\,dx$$

したがって

$$\begin{aligned} v(x) = \sin^4 x\,dx &= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx \\ &= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx \\ &= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\sin \text{[illegible]} + C \end{aligned}$$

$v(0) = 0$ であるから　$\boldsymbol{v(x) = -}$ [illegible] $\boldsymbol{\sin^3 x \cos x}$ [illegible] $\boldsymbol{-\frac{3}{16}\sin 2x}$

(3)　(2) の結果から

$$f(x) = \sin^4 x - v(x) = \sin^4 x + \text{[illegible]}$$

ゆえに　$\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sin x}{x}\Bigl(\sin$ [illegible] $\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{\sin 2x}{\text{[illegible]}}$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1($ [illegible] $) - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\cdot$ [illegible]

6.104　(1)　$t >$ [illegible] $e^t - 1 > 0$ であるから，$x >$ [illegible]

[illegible] $-1)\,dt > 0$　ゆえに [illegible] $1 - x > 0$

上 [illegible] $e^x >$ [illegible] えに　$e^x > x$　$\cdots$ ①

[illegible] 然数 [illegible] して [illegible] のとき [illegible] $\dfrac{x^m}{m!}$ である」を $(*)$ とする．

i) [illegible] のとき [illegible] り $(*)$ が成り [illegible]

[illegible] $= k$ の [illegible] 成り立つ [illegible] ると，$t > 0$ に対して

[illegible] $\dfrac{\text{[illegible]}}{k!} > 0$

$x > 0$ よ [illegible] $\left(e^t - \dfrac{t^k}{k!}\right) dt > 0$　ゆえに　$e^x - 1 - \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!} > 0$

上式から [illegible] $> 1 + \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$　ゆえに　$e^x > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

よって [illegible] $= k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

i)，ii) より，$(*)$ が成り立つ．

補足　$x > 0$ に対して，$e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^m}{m!}$ が成り立つ．

(2) (1) の結果から，$m=n+1$ とすると，$x>0$ のとき

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \frac{x^n}{e^x} < \frac{(n+1)!}{x}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)!}{x}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

(3) $f(x)=x^{n-1}$ とおくと

$$f^{(j)}(x) = \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!}\text{[illegible]}$$

$$f^{(n-1)}(x) = (n-1)!\text{[illegible]}$$

したがって，$1 \leqq j \leqq n-$ [illegible] $f^{(j)}($[illegible] で [illegible]

$$\Gamma_K(n) = \int_0^K x^{n\text{[illegible]}}\,dx$$

$$= \left[-e^{-x}\sum_{j=0}^{n-2} f^{(j)}(x) - (n \text{[illegible]}\right.$$

$$\text{[illegible]}\sum^{n-2} f^{(j)}(K) - (n - \text{[illegible]} + (n-1)!$$

$$= \sum \text{[illegible]})! \text{[illegible]} \cdot \frac{K^{n\text{[illegible]}-1}}{\text{[illegible]}} - \frac{(n-1)!}{e^K} + (n-1)!$$

[illegible]結果か[illegible] $\displaystyle\lim_{K\to\infty}$ [illegible] $=0$ [illegible] $\displaystyle\lim_{K\to\infty}\frac{(n-1)!}{e^K}=0$ であるから

$$\lim_{K\to\infty}\text{[illegible]} = \boldsymbol{(n-1)!}$$

解説 部分[illegible]分法に[illegible]次式が得られる．

$$\int e^{kx}f(\text{[illegible]} = \frac{e^{kx}}{k}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\} + C$$

本題は，[illegible]おいて $k=-1$ であるから，次の結果を利用する．

$$\int e^{-x}f(x)\,dx = -e^{-x}\{f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+\cdots\} + C$$

6.105 $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+k}{n^4}\right)^{\frac{1}{3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n}$

$$= \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{3}}\,dx = \left[\ \frac{3}{4}(1+x)^{\frac{4}{3}}\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{3}{4}}$$

6.106 $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$$= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\ 1 \ldots (1+x^2)\ \right]_0^1 \ldots$$ [illegible]

6.107 $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\right.$ [illegible]

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum \ldots$$ [illegible] x^2

$x=\tan\theta$ とおくと　　$dx =$ [illegible]

x と θ の対応[illegible]右のようになる.

0 [illegible]	
$0 \longrightarrow$ [illegible]	

よっ[illegible] $\displaystyle \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta}$ [illegible] $\cos^2\theta$ [illegible]

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \Big[\ \ldots\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

[illegible]8 [illegible] $\log$ (2 [illegible] $\displaystyle \sum_{k=1}^{}\log\Big($ [illegible] $k\Big)$

[illegible] $\log$ [illegible] $\displaystyle \lim$ [illegible] $\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$$= \int_0^1 \log(1+x)\,dx$$

$$= \Big[\ (1+x)\log(1+x) - x\ \Big]_0^1$$

$$= \boldsymbol{2\log 2 - 1}$$

6.109 (1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)=\int_0^1\log\left(1+\frac{x}{3}\right)dx$

$$=\int_0^1 3\left(1+\frac{x}{3}\right)'\log\left(1+\frac{x}{3}\right)dx$$

$$=\left[\,3\left(1+\frac{x}{3}\right)\log\left(1+\frac{x}{3}\right)\,\right]_0^1-\int_0^1 dx$$

$$=\boldsymbol{4\log\frac{4}{3}-1}$$

(2) $\displaystyle a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(}$ [illegible] くと [illegible]

$$\frac{a_n}{3}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{3n}\right)\Big(} \text{[illegible]}$$

(1) の結果から $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\log$ [illegible] $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ [illegible]

$$=4\log\frac{4}{3}-\text{[illegible]}\log\frac{256}{81}\text{[illegible]}$$

[illegible] $\displaystyle \lim_{n\to\infty}a_n=3\times\frac{256}{81e}=\frac{256}{27e}$

よって [illegible] $(3n+1)(3n+2)\cdots($ [illegible] $\boldsymbol{\dfrac{256}{27e}}$

[illegible] (1) $\displaystyle \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(}{}$ [illegible] $\displaystyle \frac{(}{2}$ [illegible] $\displaystyle \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}f($ [illegible] $)h+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}f(x_{j+1})h$

$\displaystyle \sum_{j=0}f(x$ [illegible] $f(x_j)h=\frac{1}{}$ [illegible] $\displaystyle \frac{1}{2}\boldsymbol{B_n}$

(2) $f(x)=x^2$, $h=\dfrac{1-0}{n}=\dfrac{1}{n}$, $x_j=0+j\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{j}{n}$ より

$$A_n=\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)h=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1}j^2$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)=\boldsymbol{\frac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1)},$$

$$B_n=\sum_{j=1}^{n}f(x_j)h=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum^{n}\text{[illegible]}$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n\text{[illegible]}\ \boldsymbol{1}\text{[illegible]}\boldsymbol{1)(2n+1)},$$

$$T_n=A_n+B_n$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6n^2}(n-1)(2n\text{[illegible]})(2n\text{[illegible]}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6n^2}(2n^2+}\text{[illegible]}$$

(3) 真の値[illegible]は　$S=\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=$[illegible]

[illegible]相対誤差は

[illegible] $|3T_n-1|=\left|3\cdot\dfrac{1}{6n^2}\text{[illegible]}1)-1\right|=\dfrac{1}{2n^2}$

[illegible]対誤差[illegible]01[illegible]るから

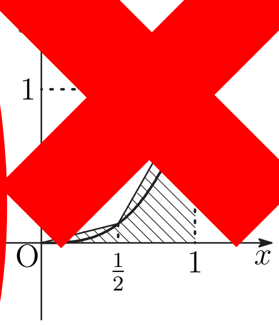
[illegible] $\leqq 0.01$　ゆ[illegible] $n^2\geqq 50$

[illegible]みたす[illegible] $\boldsymbol{n}$ [illegible]

6.111 (1) $y_k = {x_k}^3$ とすると

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(y_{k-1}+y_k) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}y_{k-1} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}y_k \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}y_k + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}y_k \\
&= \frac{1}{2n}y_0 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}y_k + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}y_k + \frac{1}{2}\text{[illegible]} \\
&= \frac{1}{2n}y_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}y_k + \text{[illegible]} \\
&= \frac{1}{2n}{x_0}^3 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}{x_k}^3 \text{[illegible]}
\end{aligned}
$$

(2) I_2 は右の図の斜線部分の面[illegible]す.



(3) [illegible] $\frac{}{n}$ であ[illegible], [illegible](1) の結果に代入すると

$$
\begin{aligned}
\text{[illegible]} \sum^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^3 + \frac{1}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\sum_{k=1}^{n-1}k^3 + \frac{1}{2n} \\
= \frac{1}{n^4}\text{[illegible]}\frac{1}{2n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2}
\end{aligned}
$$

また[illegible] I [illegible] $x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

よって $\boldsymbol{I}$ [illegible] $= \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{4n^2}}$

6.112 (1) $x = \tan\theta$ [illegible]と $dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる.

x	$0 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって　$$I_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$$

(2) I_1 に部分積分法を用いると

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{3}} (x)' \frac{1}{x^2+1} dx$$
$$= \left[\ \frac{x}{x^2+1}\ \right]_0^{\sqrt{3}} [illegible] \Big\{ [illegible] \Big\} dx$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2\int_0^{\sqrt{3}} [illegible]$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2\int [illegible]$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + [illegible] \int_0 \frac{dx}{x^2+1} [illegible]$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2(I_1 - I_2)$$

よって [illegible] $\frac{\sqrt{3}}{8} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}}$

(3) [illegible] $\sqrt{x^2}$ [illegible]

$$[illegible]\ 1 + \frac{1}{[illegible]} [illegible] = \frac{\sqrt{x}[illegible]}{\sqrt{x}[illegible]} [illegible] = \frac{t}{\sqrt{x^2+1}} \quad \cdots ②$$

[illegible]がって [illegible]

$$[illegible] = \int \frac{[illegible]}{t} [illegible] \log|t| + C$$
$$= \boldsymbol{\log(x + \sqrt{x^2+1}) + C} \quad (C \text{ は積分定数})$$

(4) ① より　$y =$ [illegible]　ゆえに　$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{t}$

上式および [illegible] より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{\sqrt{x^2+1}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

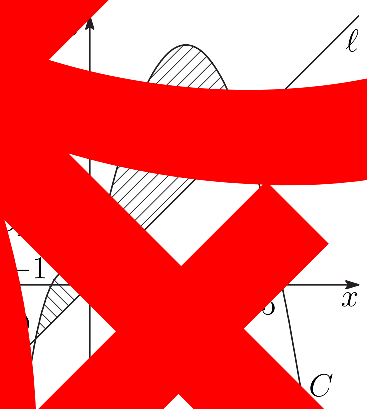
(5) 求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \Big[\ \log(x+\sqrt{x^2+1})\ \Big]^1 \text{[illegible]} + \sqrt{2})$$

7.1 (1) 直線 $y=ax$ を ℓ とする．



$x>0$ のとき，C と ℓ の共有点の x [illegible]

$x(5-x)=ax$ ゆえに $x(x-5+$ [illegible]

よって，点 P の x 座標は x [illegible]

$x<0$ のとき，C と ℓ の共[illegible]座標は[illegible]

$x(x^2-1)=ax$ ゆえに x[illegible]$-a-1)=0$

よ[illegible]の x 座標は $x=-\sqrt{a+1}$

[illegible]それ[illegible]座標の符号から 5[illegible]$0,$ [illegible]$\sqrt{a+1}<0$

これを[illegible] $\boldsymbol{< a < 5}$

(2) [illegible] $= \int^{5-}$[illegible]$\,dx$

[illegible] $\int_0^{5-a}$ [illegible] $+a)\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{6}(}$[illegible]$\boldsymbol{)^3}$

(3) [illegible] $=$ [illegible] $(x^3-x$ [illegible] $\int_{-\sqrt{a+1}}\{x^3-(a+1)x\}\,dx$

$= \Big[\ $[illegible]$\ (a+1)x^2\ \Big]_{-\sqrt{a+1}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(a+1)^2}$

(4) $S(a)=S_1(a)$[illegible]$)$ より，(2)，(3) の結果から

$$\text{[illegible]}\ \frac{1}{6}(5-a)^3+\frac{1}{4}(a+1)^2$$

$$S'(a) = -\frac{1}{2}(5-a)^2+\frac{1}{2}(a+1) = -\frac{1}{2}(a-3)(a-8)$$

$-1<a<5$ における $S(a)$ の増減表は次のようになる．

a	(-1)	$\cdots$	3	$\cdots$	(5)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	$\frac{16}{3}$	$\nearrow$	

よって，$S(a)$ の最小値は　$S(3) = \mathbf{\dfrac{16}{3}}$

7.2　(1)　$(x) = x^4 + 2ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d$ より

$$f'(x) = 4x^3 \text{[illegible]} 6ax^2 + 12bx \text{[illegible]}$$
$$f''(x) = 1\text{[illegible]}ax + \text{[illegible]}$$

(い) より $x = \alpha,\ \beta$ は $f''(x) = 0$ の解[illegible]係数の関係により

$$\left(1 + \sqrt{\frac{5}{6}}\right) + \left(1 - \sqrt{\frac{5}{6}}\right) = \text{[illegible]} \left(1 - \sqrt{\frac{[illegible]}{6}}\right) = \frac{[illegible]}{12}$$

ゆえに　$a = -2,\ b = \dfrac{1}{6}$[illegible]，$f'(1) =$ [illegible]るから

$$4 - 12 + 2 + 4c = 0 \quad \text{これ[illegible]て} \quad \text{[illegible]}\frac{[illegible]}{2}$$

[illegible]がって[illegible]$= x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x +$[illegible]らに $f(2) = 0$ であるから

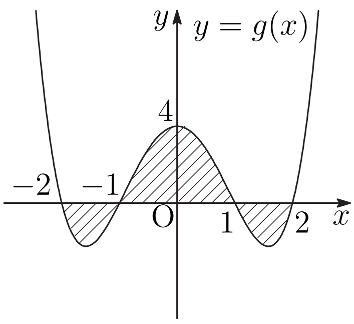
$$16 \text{[illegible]} + 12 + d = 0 \quad \text{こ[illegible]解いて} \quad d = 0$$

[illegible]の結果[illegible]　$\boldsymbol{a =}$ [illegible] $\boldsymbol{b = \dfrac{1}{6}}$[illegible]$\boldsymbol{\dfrac{3}{2}},\ \boldsymbol{d = 0}$

$y =$ [illegible] $y = f$[illegible]軸方向に -1[illegible]平行移動したものであるから

$$f\text{[illegible]}$$
$$= (x + \text{[illegible]}) + (x+1)^2 + 6(x+1)$$
$$\boldsymbol{= x^4 - 5x}\text{[illegible]}$$

(3)　x 軸と C で囲[illegible]た図形の面積は，x 軸と $y = g(x)$ のグ[illegible]で囲まれた図形の面積に等しい．



$$g(x) = \text{[illegible]}5x^2 + 4$$
$$= (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$

であるから，求める面積 S は

$$\frac{S}{2}=\int_0^2 |g(x)|\,dx=\int_0^1 (x^4-5x^2+4)dx-\int_1^2 (x^4-5x^2+4)dx$$

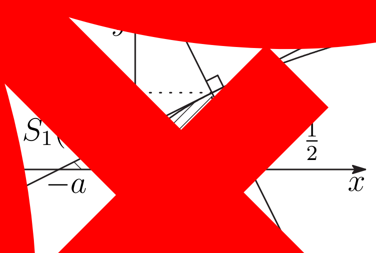
x^4-5x^2+4 の原始関数の 1 つを $G(x)=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{5}{3}x^3+4x$ とおくと

$$\frac{S}{2}=2G(1)-G(0)-G(2)$$

このとき　$G(1)=\dfrac{38}{15}$，$G(0)=$ [illegible] $(2)=\dfrac{16}{1}$[illegible]

したがって　　$\dfrac{S}{2}=4$　　よって [illegible]

7.3　(1) $y=\sqrt{x}$ より　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$



曲線上の点 $(a,\ \sqrt{a})$ におけ [illegible] 方程 [illegible]

$$y-\sqrt{a}=\frac{1}{2\sqrt{}}\text{[illegible]}a)$$

すな [illegible] $y=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}x+\dfrac{\sqrt{a}}{2}$

[illegible] 接線 [illegible] の共有点の x 座標は

[illegible] $\sqrt{a}$ [illegible] $=0$　　これを [illegible]　　$x=-a$

[illegible] って [illegible] $a)=$ [illegible] $a-\displaystyle\int_0^a$ [illegible]

[illegible] $\left[\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]^a$ [illegible] $\boldsymbol{a\sqrt{a}}$

(2 [illegible] 上 [illegible] $\sqrt{a})$ にお [illegible] 程式は

[illegible] $-\sqrt{}$ [illegible] $\sqrt{a}\,(x-a)$　すなわち　$y=-2\sqrt{a}\left(x-a-\dfrac{1}{2}\right)$

この法線と x [illegible] の共有点の x 座標は　$x=a+\dfrac{1}{2}$

よって [illegible] $=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{a}+\displaystyle\int_0^a \sqrt{x}\,dx$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{a}+\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^a=\boldsymbol{\frac{1}{4}\sqrt{a}+\frac{2}{3}a\sqrt{a}}$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{S_1(a)}{S_2(a)}=\lim_{a\to+\infty}\frac{\frac{1}{3}a\sqrt{a}}{\frac{1}{4}\sqrt{a}+\frac{2}{3}a\sqrt{a}}=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{\frac{3}{4a}+2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

7.4 (1) $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{4}{x_n}\right)$ より　$x_{n+1}-2=\frac{1}{2x_n}(x_n-$ … ①

$x_1=3\geqq 2$．$x_n\geqq 2$ のとき，x_{n+1} … 2.

数学的帰納法により，すべての … n に対 … $\geqq 2$

(2) ① および $x_n\geqq 2$ から

$$x_{n+1}-2=\frac{x_n-2}{x_n}\times \ldots$$

$$=\Big(1 \ldots \frac{1}{2}(\ldots -2)$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$0\leqq x_n-2\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_1 \ldots$$

$\lim_{n\to\infty}\Big(1 \ldots$ るから，はさみうち … 理により

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty}x_n=2}$$

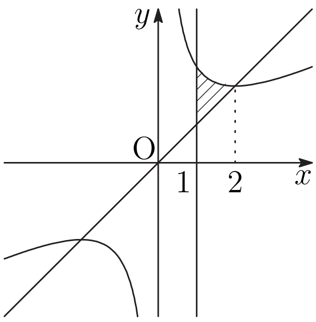
… $(x)>$ … より

… $>x$　整 … と　$x-\frac{4}{x}<0$

… 掛けると … $2)(x-2)<0$

よ … $\mathbf{2,\ 0<x<2}$

(5) (4) の結果か … める面積を S とすると

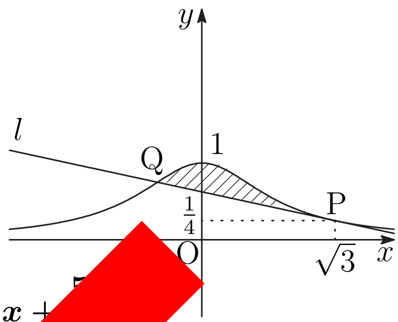


$$S=\int \ldots - f(x)\}\,dx$$

$$=\int_1 \ldots \frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right)-x\Big\}\,dx$$

$$=\left[\,2\log x-\frac{x^2}{4}\,\right]_1^2=\mathbf{2\log 2-\frac{3}{4}}$$

7.5 (1) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ より $\quad y'=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$



$x=\sqrt{3}$ のとき $\quad y'=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

よって,点 $\mathrm{P}\left(\sqrt{3},\ \dfrac{1}{4}\right)$ における接線 l は

$y-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\left(x-\sqrt{3}\right)$ 　よって　$\boldsymbol{y=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}x+}$ [illegible]

(2) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ と $y=\dfrac{\sqrt{3}}{8}x+\dfrac{5}{8}$ か [illegible]

$$\frac{1}{1+x^2}=-\frac{\sqrt{3}}{8}x+\frac{5}{8}$$ ゆえに [illegible]

したがって　$(x-\sqrt{3})^2(\sqrt{3}x$ [illegible]

P と異なる Q の x 座標は [illegible] $\boldsymbol{3}$

(3) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ [illegible] $\leqq\sqrt{3}$ のとき

[illegible] $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{8}x+\dfrac{5}{8}\right)=\dfrac{(x-\text{[illegible]}(\sqrt{\text{[illegible]}}+1)}{\text{[illegible]}+x^2)}\geqq 0$

求め [illegible] 積を S [illegible]

[illegible] $=\displaystyle\int$ [illegible] $x^2}dx-$ [illegible] $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{8}x+\dfrac{5}{8}\right)dx$

[illegible] , $\displaystyle\int^{\sqrt{3}}$ [illegible] x^2} [illegible] いて

x	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\longrightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{6}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

[illegible] と　$dx=$ [illegible] co [illegible]

x と [illegible] 対応 [illegible] のようになる.

ゆえに　[illegible] $x^2}dx=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\pi}{2}$

また　[illegible] $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{5}{8}\right)dx=\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{16}x^2+\dfrac{5}{8}x\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

よって　$S=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

7.6 (1) $f(x)=kx^3-3kx$ より　$f'(x)=3kx^2-3k$

P$(p,\ f(p))$ における接線 l_1 の方程式は

$$y-(kp^3-3kp)=(3kp^2-3k)(x-p)$$

ゆえに　$\boldsymbol{y=(3kp^2-3k)x-2kp^3}$

(2) Q$(ap,\ f(ap))$ における接線 l_2 の方程式は，(1) の結果か… $(p\to ap)$

$$y=(3ka^2p^2-3k)x-2ka^3p^3$$

これがPを通るから　kp^3- … $(3ka^2p^2$ … $2ka^3p^3$

整理すると　$kp^3(a-$ …

$k>0,\ p>0,\ a\neq1$ であるから …

(3) l_2 がPを通るから，(2) の結果 …

また $l_1\perp l_2$ より，$f'(p)f'$ … $=-1$ て … から

$(3kp^2-3k)\cdot\left\{3k\left(-\frac{1}{2}p\right)\ldots\right\}$

…に … $1)(p^2-4)=-1$ …

① を … $k>$ … とするとき

… $4)<0$　ゆえに　$1<p^2<4$

… >0 で … から … $\boldsymbol{p<2}$

① … $\boldsymbol{k}$ … $\boldsymbol{2}$ … $\boldsymbol{)(4-}$ …

(4) … 結 … l_2 の方程 … $3k\left(\frac{p^2}{4}-1\right)x+\frac{k}{4}p^3$

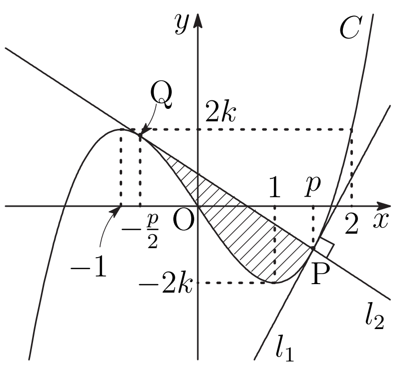
$g(x)$ … $3k\left(\ldots\right)x+\frac{k}{4}p^3$ とおくと

$g(x)-f($ … $k\left(\frac{p^2}{4}-1\right)x+\frac{k}{4}p^3$

$\qquad -(kx^3-3kx)$

$=-kx^3+\frac{3}{4}kp^2x+\frac{k}{4}p^3$

$=-k(x-p)\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$



$-\frac{p}{2} \leqq x \leqq p$ において，$k > 0$ より，$g(x) - f(x) \geqq 0$ であるから

$$S = \int_{-\frac{p}{2}}^{p} \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$= -k \int_{-\frac{p}{2}}^{p} (x - p)\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 dx$$

$$= -k \int_{-\frac{p}{2}}^{p} \left\{\left(x + \frac{p}{2}\right) - \frac{3}{2}p\right\}\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \text{[illegible]}$$

$$= -k \int_{-\frac{p}{2}}^{p} \left\{\left(x + \text{[illegible]} \frac{3}{2}p\left(x \text{[illegible]}\right.\right.\right. dx$$

$$= -k\left[\frac{1}{4}\left(x + \frac{p}{2}\right)^4 - \text{[illegible]} \frac{27}{\text{[illegible]}} p^4 k\right.$$

このとき，(3) の結果から

$$S = \frac{27}{64}p^4 \times \frac{\text{[illegible]}}{3\sqrt{\text{[illegible]} - p^2)}} \text{[illegible]} \sqrt{(p \text{[illegible]}}$$

7.7 (1) $f(x)$ を[illegible]分すると

$$\text{[illegible]} -4x^3 + 24x^2 - 36x$$

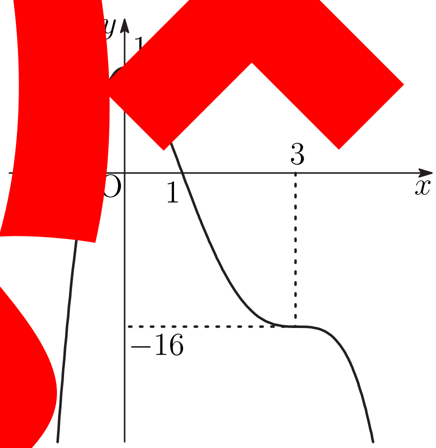
$$\text{[illegible]} (x-3)^2$$

$f(x)$ [illegible]は，[illegible]となる．

[illegible]	$\cdots$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\cdots$
[illegible])	+	[illegible]	$-$	[illegible]	$-$
$f(x)$	[illegible]	11	[illegible]	-16	↘

よ[illegible] $x =$ [illegible] 値 11

[illegible]，グラ[illegible]形は[illegible]



(2[illegible]る[illegible]程式を y [illegible]おくと，方程式

$-$[illegible]$1 = mx + n$ すなわち $x^4 - 8x^3 + 18x^2 + mx + n - 11 = 0$

は，異なる 2[illegible]もつので，その解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$

$$x^4 - 8\text{[illegible]}8x^2 + mx + n - 11 = (x - \alpha)^2(x - \beta)^2 \quad \cdots ①$$

このとき，[illegible]展開すると

$$(x - \text{[illegible]} - \beta)^2 = \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}^2$$

$$= x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3 + \{(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta\}x^2$$

$$- 2\alpha\beta(\alpha + \beta)x + (\alpha\beta)^2 \quad \cdots ②$$

①，② の係数を比較すると
$$\begin{cases} -8=-2(\alpha+\beta) \\ 18=(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta \\ m=-2\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ n-11=(\alpha\beta)^2 \end{cases}$$

上の第 1，2 式から　$\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=1$

これらを第 3，4 式に代入すると　$m=-8$，$n=12$

よって　$\boldsymbol{y=-8x+12}$

(3) 求める面積 S は，(2) の結果を利[illegible]ると

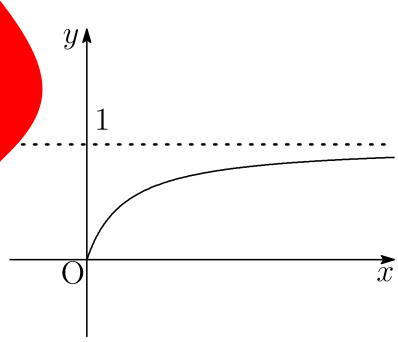
$$S=\int_\alpha^\beta\{(mx+n)-(-x^4+ [illegible] 1)\}\,dx$$
$$=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx$$
$$=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2\{(x- [illegible] -\alpha [illegible]$$
$$=\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^4- [illegible] -\alpha)(x-\alpha [illegible] \beta-\alpha) [illegible]\,dx$$
$$= [illegible] (x-\alpha)^5-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha) [illegible]$$
$$[illegible])^5=\frac{1}{30}\left\{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 [illegible]}\right\}^5$$
$$[illegible] \frac{1}{30}([illegible] =\boldsymbol{\frac{48}{5}\sqrt{3}}$$

8

$g($ [illegible] $x+1$ [illegible] $x+1$

y [illegible] $)$ $(x$ [illegible] の概形は

[illegible] うにな [illegible]



[illegible] $\boldsymbol{=1}$

(2) $t=g(x)$ とお [illegible] (1) の結果から，$x\geqq 0$ のとき　$0\leqq t\leqq 1$

ここで，$h(t)$ [illegible] $t)-f_2(t)$ とおくと

$$[illegible] (t)=2t^2-at+\frac{1}{2}a-(t^2+at-a)$$
$$=t^2-2at+\frac{3}{2}a=(t-a)^2+\frac{3}{2}a-a^2$$

$0\leqq t\leqq 1$ における $h(t)$ の最小値が 0 以上であればよい．

(i) $a<0$ のとき，最小値 $h(0)=\frac{3}{2}a<0$ となり，不適．

(ii) $0\leqq a\leqq 1$ のとき，最小値 $h(a)=\frac{3}{2}a-a^2$

ゆえに　$\frac{3}{2}a-a^2\geqq 0$　すなわち　$a\left(a-\frac{3}{2}\right)\leqq 0$

a の値の範囲に注意して，これを解くと　$0\leqq a\leqq$ [illegible]

(iii) $1<a$ のとき，最小値 $h(1)=1-\frac{a}{2}$　ゆえに [illegible] $\geqq 0$

a の値の範囲に注意して，[illegible]解くと [illegible] $\leqq 2$

(i)〜(iii) から，求める a の値の範[illegible] **2**

(3) (2) の結果から，$a=1$ のとき，$f_1($[illegible]

$$f_1(g(x))-f_2(g(x)) \ \text{[illegible]}$$

$$\left(\frac{x}{x+1}-\right. \ \text{[illegible]} \ \frac{1}{2}= \ \text{[illegible]}$$

よ[illegible]る面積 S は

$$\text{[illegible]}\left\{\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\right\}dx= \ \text{[illegible]} +\frac{x}{2}\Big]_0^1=\mathbf{1}$$

(1) [illegible]より[illegible]るから，$x=\alpha$ のとき　$-\frac{1}{y'}=\alpha^2$

[illegible]したが[illegible] C 上[illegible]$\left(\alpha,\ \frac{1}{\alpha}\right)$ にお[illegible]線の方程式は

$$\text{[illegible]} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=\alpha^2x-\alpha^3+\frac{1}{\alpha}}$$

(2) [illegible]k から，y を[illegible]すると

$$\text{[illegible]}=k-x \quad \text{すなわち} \quad x^2-kx+1=0$$

上の方程式の[illegible] $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\text{[illegible]},\quad \alpha\beta=1,\quad \beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{k^2-4}$$

(1) の結果から C の2点A，Bにおけるそれぞれの法線の方程式は

$$y=\alpha^2x-\alpha^3+\beta\cdots①,\quad y=\beta^2x-\beta^3+\alpha\cdots②$$

①−② より　$(\alpha^2-\beta^2)x-(\alpha^3-\beta^3)-(\alpha-\beta)=0$

したがって　$(\alpha+\beta)x=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1$

$$kx=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+1$$
$$kx=k^2-1+1$$
$$x=k$$

これを ①，② に代入して，辺々を加えると

$$2y=(\alpha^2+\beta^2)k-(\alpha^3+\beta^3)+\alpha+\beta$$
$$=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \text{[illegible]} (\alpha+\beta)^3 \text{[illegible]} +\beta)+k$$
$$=(k^2-2)k-k^3+3 \text{[illegible]}$$

したがって，求める円の中心は　$(k$ [illegible]

また，点 $(k,\ k)$ と点 $(\alpha,\ \beta)$ の距 [illegible] $=\frac{\text{[illegible]}}{\alpha}\Big)$

$$r^2=\text{[illegible]}+(\beta-\text{[illegible]}$$
$$=\text{[illegible]}\beta^2-2k(\alpha \text{[illegible]} 2k^2$$
$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \text{[illegible]} +2\text{[illegible]}$$
$$=k^2-2$$

[illegible]って，[illegible]半径は　$\boldsymbol{\sqrt{k^2-2}}$

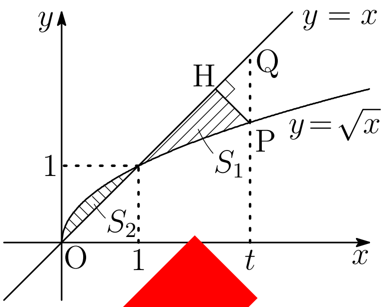
[illegible] 求め[illegible]積を S [illegible]

$$S=\text{[illegible]}x+k\text{[illegible]}\frac{1}{\text{[illegible]}}\Big)\text{[illegible]}x$$
$$\text{[illegible]}\frac{1}{\text{[illegible]}}x^2+kx-\text{[illegible]}\Big]_{\alpha}$$
$$=-\frac{\text{[illegible]}}{2}\text{[illegible]}(\beta-\alpha)-\log\frac{\beta}{\alpha}$$
$$=\left\{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+k\right\}(\beta-\alpha)-\log\frac{\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{k}{2}\sqrt{k^2-4}-2\log\beta$$

ここで　$\text{[illegible]}+\beta)+(\beta-\alpha)}{2}=\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$

よって　$S=\boldsymbol{\frac{k}{2}\sqrt{k^2-4}-2\log\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}}$

7.10 (1) 直線 PH は，点 P$(t,\ \sqrt{t})$ を通り，直線 $y=x\cdots$① に垂直な直線であるから



$$y-\sqrt{t}=-1(x-t)$$

すなわち　$y=-x+t+\sqrt{t}\quad\cdots$②

H の座標は①，②を解いて

$$\boldsymbol{\left(\frac{t+\sqrt{t}}{2},\ \frac{t+\sqrt{t}}{2}\right)}$$

(2) Q$(t,\ t)$ をとると

$$\triangle\mathrm{PQH}=\frac{1}{2}\mathrm{PH}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{2}}\right)^2= \text{[illegible]}$$

よって，求める面積 S_1 は

$$S_1=\text{[illegible]}\sqrt{x})\,dx-\text{[illegible]}\mathrm{QH}$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^t\text{[illegible]}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{6}t\sqrt{t}-\text{[illegible]}}$$

$$\text{[illegible]}\,dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\text{[illegible]}\right]_0=\frac{1}{6}$$

S_2 の[illegible]上式[illegible](2) の結果より

$$\text{[illegible]}\frac{1}{6}t\sqrt{t}\text{[illegible]}=\frac{1}{6}\quad\text{ゆえ[illegible]}\{3(\sqrt{t})^2-2\sqrt{t}-3\}=0$$

[illegible]に注[illegible]$+\sqrt{1}$[illegible]

よ[illegible]$\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)\text{[illegible]}=\boldsymbol{\frac{11+2\sqrt{10}}{9}}$

7.11 (1) $y=\frac{1}{x^2-1}$ を[illegible]すると　$y'=\frac{2x}{(x^2-1)^2}$

C の $x=a$ [illegible]る接線の方程式は

$$\text{[illegible]}-\frac{1}{a^2-1}=\frac{2a}{(a^2-1)^2}(x-a)$$

すなわち　$y=-\frac{2a}{(a^2-1)^2}x+\frac{3a^2-1}{(a^2-1)^2}$

これが $y = px + q$ を表すので

$$\boldsymbol{p = -\frac{2a}{(a^2-1)^2},\ q = \frac{3a^2-1}{(a^2-1)^2}}$$

(2) $(px+q)(x^2-1)-1=0$ とすると，3次方程式 $px^3+qx^2-px-q-1=0$ の解が a，a，k であるから，解と係数の関係により

$$a+a+k = -\frac{q}{p}, \quad aa+ak+ka = \frac{-p}{p}, \quad aak [illegible] \frac{[illegible]1}{p} \quad \cdots(*)$$

$a>0$ であるから，$(*)$ の第2式に [illegible] $\boldsymbol{\frac{[illegible]+1}{2a}}$

k は，(1) の結果から，$(*)$ の第1式 [illegible]

したがって　$(px+q)(x^2-1$ [illegible] $\frac{a^2+1}{2a}\Big)$

$x \neq 1$ のとき　px [illegible] $\frac{[illegible]}{[illegible]-1} = \frac{p([illegible]}{x[illegible]}$ [illegible]

$a>0$ [illegible] (1) の結果から $p<0$ であるか [illegible] $>$ [illegible] より

[illegible] $q - \frac{1}{x^2-1} \leqq 0$　ゆえに [illegible] $\frac{[illegible]}{[illegible]-1}$ [illegible] $px+q$

[illegible] $f(x)$ [illegible] $\frac{[illegible]}{x^2-1}$ [illegible] l の方程式から [illegible] $q = f'(a)(x-a)+f(a)$

[illegible]，$g(x)$ [illegible] $(a)(x$ [illegible] $f(a)$ [illegible]　$h(x) = (x^2-1)g(x)$ とおくと

[illegible] $(x) =$ [illegible] $)(x^2-1)-1$，

$g'($ [illegible] $x)$，　h' [illegible] $xg(x)+(x^2-1)g'(x)$

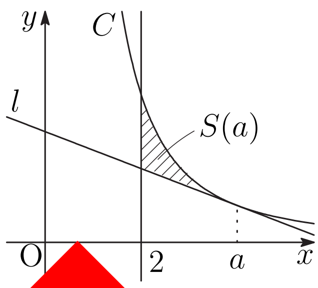
[illegible] $= 0$ であ [illegible] $(a)=0$，$h'(a)=0$

3 [illegible] $a)^2$ を因数にもつから，最高次の係数に注意して

$$h(x) = [illegible]\ q)(x^2-1)-1 = p(x-a)^2(x-k) \quad (k\text{ は定数})$$

の形に因数分 [illegible] きる．

(3) $S(a)$ は，右の図から



$$S(a)=\int_2^a\left\{\frac{1}{x^2-1}-(px+q)\right\}dx$$
$$=\int_2^a\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)-(px+q)\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}-\frac{p}{2}x^2-qx\right]_2^a$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{3(a-1)}{a+1}+p\left(2-\frac{a^2}{[illegible]}\right)+q(2-a)$$

ここで，(1) の結果から

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\log\frac{3(a-1)}{a+1}=\lim [illegible]$$
$$\lim_{a\to\infty}p\left(2-\frac{a^2}{[illegible]}\right)=\lim_{a\to\infty}\frac{-2[illegible]}{([illegible])^2}$$
$$\lim_{a\to\infty}q(2-a)=\lim_{a\to\infty}\frac{(2-[illegible]^2-1)}{([illegible])^2}$$

[illegible] $\boldsymbol{S(a)=\dfrac{1}{2}\log 3}$

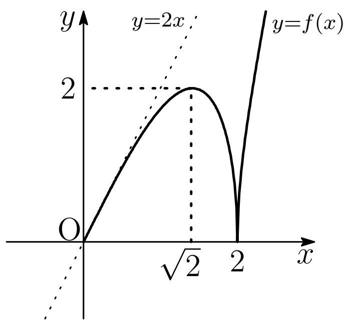
7.1[illegible] $f(x)=$ [illegible] $\sqrt{4-}$ [illegible] $\geqq 0)$

$$=\begin{cases} x\sqrt{[illegible]} & ([illegible]\leqq 2) \\ [illegible]-4 & ([illegible]) \end{cases}$$

(i) [illegible] <2 の [illegible] $f'(x)=\sqrt{4-}$ [illegible] $\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$

[illegible] $x>$ [illegible] き [illegible] $4+x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}=\dfrac{2(x^2-2)}{\sqrt{x^2-4}}$

[illegible]) の増減表およびグラフの概形 [illegible] 次の [illegible] る．



x	0	[illegible]	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		[illegible]	0	$-$		$+$
$f(x)$		[illegible]	2	↘	0	↗

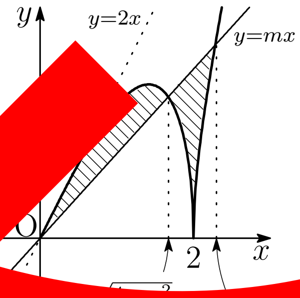
また $\lim\limits_{x\to+0}$ [illegible] $)=2$

$$\lim_{x\to2-0}f'(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to2+0}f'(x)=\infty$$

(2) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2-4)^{\frac{1}{2}}(x^2-4)'\,dx$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{1}{3}(x^2-4)^{\frac{3}{2}} + C}$ **(C は積分定数)**

(3) C と直線 $y=mx$ の共有点の x 座標は



(i) $0 \leqq x \leqq 2$ のとき　$x\sqrt{4-x^2} = mx$

これを解いて　$x = 0,\ \sqrt{4-m^2}$

(ii) $x \geqq 2$ のとき　$x\sqrt{x^2-4} =$ ...

これを解いて　$x = \sqrt{4+m^2}$

したがって，$mx - x\sqrt{4-x^2}$ の原 ...

$$F(x) \ \ldots + \frac{}{3} \ldots$$

とおくと，求める面積 S ...

$$\ldots \Big[\,F(x)\,\Big]_0^{\sqrt{4-m^2}} + \Big[\,F(x)\,\Big]_{\sqrt{4-\ldots}}^{2}$$

$$+ \int_2^{\sqrt{4+m^2}} (mx - \ldots - 4)\,dx$$

$$= F\ldots F(\sqrt{4-m^2}) + \left[\,\frac{m}{2}x^2 - \frac{1}{3}(x^2-4)^{\frac{3}{2}}\,\right]_2^{\sqrt{4+m^2}}$$

$$\ldots + 2m \ldots \frac{1}{6}m^2 + 2m \ldots m^3 = \boldsymbol{\frac{1}{2}m^3 - 2m + \frac{8}{3}}$$

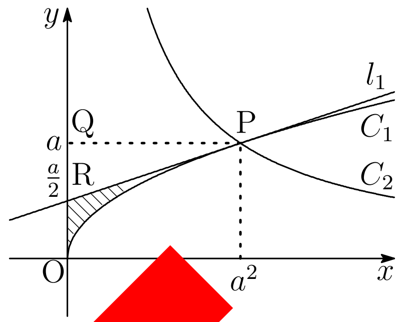
...) を微 ... と　... 3

...) の増減表 ... $\leqq m \leqq 2)$

	0	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	2
...)		$-$	0	$+$	
...)		↘	極小	↗	

よって　... $S\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{\dfrac{8(3-\sqrt{3})}{9}}$

7.13 (1) C_1 と C_2 の交点 P の x 座標は



$$\sqrt{x}=\frac{a^3}{x} \quad \text{これを解いて} \quad x=a^2$$

ゆえに，点 P の座標は $(a^2,\ a)$

$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より，l_1 の方程式は

$$y-a=\frac{1}{2a}(x-a^2) \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{x}{2 \ldots}$$ [illegible]

求める斜線部分の面積は，$C_1:$ [illegible] ることを用いて

$$\int_0^a x\,dy-\triangle\mathrm{PQR}=\int_0^a y^2\,dy \ldots$$ [illegible]

(2) C_2 の P における接線を l_2 [illegible] $\left(\dfrac{a^3}{x}\right)$ [illegible] $\dfrac{a}{x^2}$ [illegible] の [illegible] $-\dfrac{1}{a}$

$a>1$ より，$-1<-\dfrac{1}{a}<0$ [illegible] $\dfrac{1}{2a}<1$ であ [illegible]，l_1，[illegible] について

[illegible] $=\dfrac{1}{2a}$，$\tan\beta=-\dfrac{1}{a}$ $\Bigl(-$ [illegible] $\alpha<\dfrac{\pi}{4}\Bigr)$

[illegible] $<\alpha$ [illegible] $\dfrac{}{2}$ [illegible] から $\theta(a)=\alpha$ [illegible]

[illegible] $\tan\theta(a)$ [illegible] $\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\ldots\beta}=\dfrac{\frac{1}{2a}-\left(-\frac{1}{a}\right)}{1+\frac{1}{2a}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)}=\dfrac{\frac{3}{2a}}{1-\frac{1}{2a^2}}$

ゆ [illegible] $\lim$ [illegible] $\dfrac{\frac{3}{2a}}{1-\ldots}$ [illegible] すなわち $\lim\limits_{a\to\infty}\theta(a)=0$

[illegible] が [illegible] の諸式に [illegible]

$$\ldots \theta(a)=\lim_{a\to\infty}a\tan\theta(a)\cos\theta(a)$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2a^2}}\cos\theta(a)=\frac{3}{2}\cos 0=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

7.14 (1) $f(x)=x^3$ [illegible] $-x+2$ を微分すると $f'(x)=3x^2-4x-1$

$f'(x)=0$ の解を $x_1=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$，$x_2=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ とおく．

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	x_1	$\cdots$	x_2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで，$f(x)$ を $f'(x)$ で割ることにより

$$f(x) = f'(x)\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right) - \frac{14}{9}x + \frac{16}{9}$$

したがって

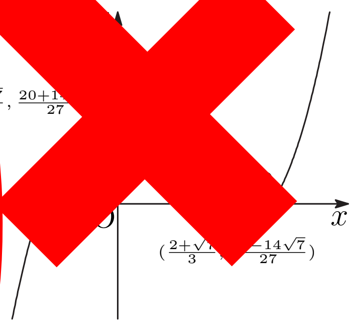
$$f(x_1) = -\frac{14}{9}x_1 + \frac{16}{9} = - \text{[illegible]} = \frac{20+14\sqrt{7}}{27}$$

$$f(x_2) = -\frac{14}{9}x_2 + \frac{16}{9} = -\frac{14}{\text{[illegible]}} \text{[illegible]}$$

極値およびグラフの概形は[illegible]にな[illegible]

極大値 $f\left(\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right) = \dfrac{\text{[illegible]}14\sqrt{7}}{27}$

[illegible] $\left(\dfrac{\text{[illegible]}+\sqrt{7}}{\text{[illegible]}}\right) = \dfrac{20-14\sqrt{7}}{27}$



(2) y [illegible] と y [illegible]の共有点の x 座標は

[illegible] $-2x^2$ [illegible] $+2=$ [illegible] 1) ゆ[illegible] $(x-1)\{x^2-x-(m+2)\}=0$

2 次[illegible] x^2- [illegible] 2) $=0\cdots$① [illegible]判別式を D とすると

[illegible] $=4m+9$

よ[illegible] **m [illegible] $\dfrac{9}{\text{[illegible]}}$ のとき $x=1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{4m+9}}{2}$**

$m=$ [illegible]のとき $x=1,\ \dfrac{1}{2}$

m [illegible] 4 のとき $x=1$

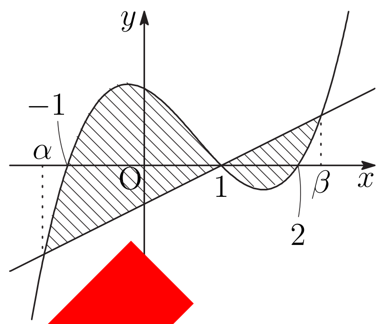
(3) $m>0$ の[illegible] (2) の結果から，α，β は 2 次方程式 ① の解である．

したがって，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-(m+2)}$$

(4) $g(x) = f(x) - m(x-1)$ とおくと

$$g(x) = x^3 - 2x^2 - (m+1)x + m + 2$$



また，$g(x)$ の原始関数の 1 つを

$$G(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+1)x^2 + (m+2)x$$

とおくと

$$S(m) = \int_{\alpha}^{1} g(x)\,dx - \int_{1} [illegible] \Big]_{\alpha} [illegible] - \Big[\,G(x)\,\Big]_{1}^{\beta}$$
$$= 2G(1) - \{G(\alpha) + G([illegible]$$

このとき　$G(1) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}($ [illegible] $+ \frac{13}{12}$　$\cdots$②

$$G(\alpha) + G(\beta) = \frac{1}{4}([illegible]) - \frac{2}{3}(\alpha^3 [illegible] - \frac{1}{2}([illegible] ^2)$$
$$+ (m+2)(\alpha [illegible]$$

[illegible] 結果より

[illegible] $\beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 + 2$ [illegible] $) = 2m + 5,$

[illegible] $+ \beta^3$ [illegible] $(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta(\alpha + \beta)$

[illegible] $(2$ [illegible] $(m+2)\cdot 1 = 3m + 7,$

α [illegible] $= (\alpha$ [illegible] $+ \beta^3)$ [illegible] $^2 + \beta^2)$

$=$ [illegible] $7) + (m+2)$ [illegible] $5) = 2m^2 + 12m + 17$

[illegible] がって

[illegible] $(\beta) = \frac{1}{4}(2$ [illegible] $m + 17) - \frac{2}{3}(3m+7)$

$$- \frac{1}{2}(m+1)(2m+5) + (m+2)\cdot 1$$

$$= -\frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m - \frac{11}{12} \quad \cdots③$$

②，③ を [illegible] 代入すると　$\boldsymbol{S(m) = \frac{1}{2}m^2 + \frac{5}{2}m + \frac{37}{12}}$

7.15 (1) 3 次関数のグラフは，変曲点に関して対称であるから，C と C の変曲点を通る直線で囲まれる 2 つの部分の面積は等しい．

C の変曲点を P とすると，P を通り x 軸に平行な直線で囲まれる部分の面積は等しいから，条件より P の座標は $(4,\ 0)$ である．

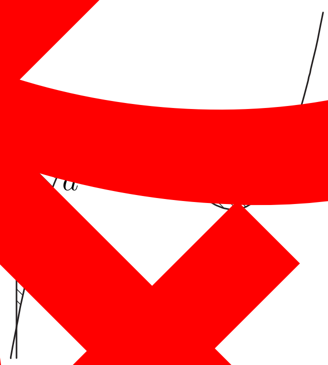
$y=(x-a)(x-4)(x-b)$ より

$$y''=6x-2(a+b+4)$$

$x=4$ のとき，$y''=0$ であるから

$$6{\cdot}4-2(a+b+4)=0 \quad よって \quad \boldsymbol{a} \text{ [illegible]}$$

(2) (1) の結果より



$$\begin{aligned}&(x-a)(x-4)(x-b)\\=&x^3-(a+b+4)x^2+(ab+4a+4b\text{ [illegible]}\\=&x^3-12x^2+(ab+32)x-4ab\end{aligned}$$

条件から $\displaystyle\int_0^4 (x-a)(x\text{ [illegible]}b)\,dx=$ [illegible]

上式の[illegible]辺は

$$\begin{aligned}\text{[illegible]}-4)(x-b)\,dx&=\int_0^4\{x^3-\text{[illegible]}32)x-\text{[illegible]}x\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\text{[illegible]}\frac{1}{2}(ab+32)x^2-4abx\right]_0^4\\&=4^3-4^4+8(ab+32)-16ab\\&=-8\text{[illegible]}4\end{aligned}$$

した[illegible] -8[illegible] $=0$ ゆえに [illegible] 8

[illegible] (1) の[illegible]は 2 次[illegible] $t^2-8t+8=0$ の解である．

[illegible]て $\boldsymbol{a=}$ [illegible] $\boldsymbol{b=4+2\sqrt{2}}$

7.16 (1) C [illegible]を[illegible]) とすると，条件により

$$\sqrt{(x-1)^2\text{[illegible]}}\ |x|=2 \quad ゆえに \quad \sqrt{(x-1)^2+y^2}=2-|x| \quad \cdots①$$

① の両辺を[illegible]て整理すると

$$y^2=2x-4|x|+3$$

上の方程式で x のとりうる値の範囲は

$$2x-4|x|+3 \geqq 0 \quad すなわち \quad 4|x| \leqq 2x+3$$

ゆえに　　　$-(2x+3) \leqq 4x \leqq 2x+3$

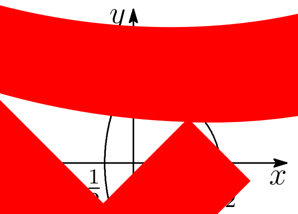
① の $2-|x| \geqq 0$ に注意して　$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$

したがって　　$C : y^2 = 2x - 4|x| + 3$

C は　$x \geqq 0$ のとき　$y^2 = -2x+3$　すなわち　$x = -\frac{1}{2}(y^2-3)$,

　　$x < 0$ のとき　$y^2 = 6x+3$　すなわち　x [illegible] $-3)$

C の表す図形は右の図の曲線 (閉 [illegible]) で，求 [illegible] をSとすると



$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left\{ -\frac{1}{2}(y^2-3) - \frac{1}{6}(y^2 \text{[illegible]} \right.$$

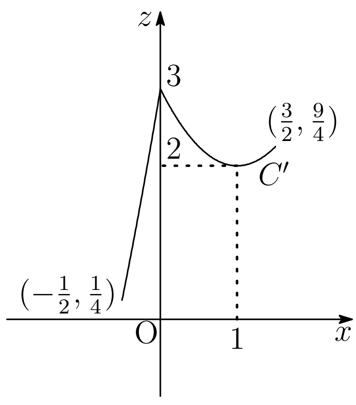
$$= \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{3}} (3-y^2)\,dy$$

$$= \frac{4}{3}\left[\, 3y - \frac{y^3}{3} \,\right]_0^{\sqrt{3}} \text{[illegible]} \sqrt{\mathbf{3}}$$

(2) 円 [illegible] と $C : y^2 = 2x-4|x|+3$ の [illegible] $x \leqq \frac{}{2}$ [illegible] にあ [illegible] 2 式か [illegible] 消去すると

$$\text{[illegible]} 4|x| + 3 = a \quad \left(\text{[illegible]} \frac{}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2} \right) \quad \cdots (*)$$

[illegible] 程式 ([illegible]) 実数解は [illegible] 平面上の [illegible]



C' [illegible] $x^2 +$ [illegible] $\left(-\frac{1}{2} \text{[illegible]} 2\right)$

[illegible] 線 [illegible] 交点の x [illegible]

C' [illegible] $-\frac{1}{2}$ [illegible] 0 のとき　$z = (x+3)^2 - 6$

　　$0 \leqq$ [illegible] のとき　$z = (x-1)^2 + 2$

円と C はと [illegible] 軸に関して対称であるから，方程式 $(*)$ の実数解について，$-\frac{1}{2} <$ [illegible] にある解 1 個に対して交点は 2 個あり，$x = -\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ に対

して交点は1個である．よって，求める交点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < a < \frac{1}{4}} \textbf{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{a = \frac{1}{4}} \textbf{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{\frac{1}{4} < a < 2} \textbf{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{a = 2} \textbf{ のとき} & \textbf{4 個} \\ \boldsymbol{2 < a < \frac{9}{4}} \textbf{ のとき} & \textbf{6 [illegible]} \\ \boldsymbol{a = \frac{9}{4}} \textbf{ のとき} & \text{[illegible]} \\ \boldsymbol{\frac{9}{4}} \text{[illegible]} \boldsymbol{a < 3} \textbf{ のと[illegible]} & \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \textbf{のとき} & \text{[illegible]}\textbf{個} \\ \boldsymbol{3} \text{[illegible]} & \textbf{0 個} \end{cases}$$

7.17 (1) 加法定理により $\cos 2\theta = 2\cos^2$ [illegible]

$\cos 3\theta = \mathrm{co}$ [illegible] θ

$=$ [illegible] $\theta\cos\theta\,\mathrm{si}$ [illegible]

[illegible] $\mathrm{s}^2\theta -$ [illegible]

[illegible] $\cos^3\theta - 3$ [illegible]

$t = \mathrm{c}$ [illegible] おくと　$x = 2\cos 2\theta = 2(2\,\mathrm{c}$ [illegible] $-1)$

$y = 2\cos 3\theta = 2(4\,\mathrm{c}$ [illegible] $) = 8t$ [illegible]

[illegible]たがっ[illegible]　$t^2 = \dfrac{x+2}{4}$

(i) [illegible] $\leqq \dfrac{\pi}{\ }$ [illegible] $\geqq 0$ より　$t = \dfrac{\text{[illegible]}}{2}$

[illegible] $(4t^2$ [illegible] $\cdot\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}\left(\text{[illegible]}\dfrac{\ }{2} - 3\right) = \boldsymbol{(x-1)\sqrt{x+2}}$

[illegible] $\dfrac{\ }{2} \leqq \theta$ [illegible] とき [illegible] より [illegible] $\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$

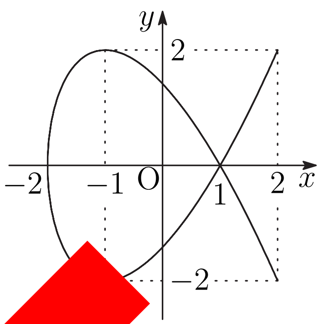
[illegible] $) = 2\left(-\dfrac{\text{[illegible]}}{2}\right)\left(4\cdot\dfrac{x+2}{4} - 3\right) = \boldsymbol{-(x-1)\sqrt{x+2}}$

(2) $f(x) = (x -$ [illegible] 2 $(-2 \leqq x \leqq 2)$ とおくと

[illegible] $= \sqrt{x+2} + (x-1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} = \dfrac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}}$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2



$y=f(x)$ と $y=-f(x)$ を合わせたものが C の表す図形であり，これらは，x 軸に関して対称であるから，その概形は右の図のようになる．

(3) 求める面積を S とすると，(2) の[illegible]から

$$\frac{S}{2}=\int_{-2}^{1}\{-(x-1)\sqrt{x+2}\}\,dx \text{ [illegible] } 2)^{\frac{3}{2}}+3(x+2)^{\frac{1}{2}}\}\,dx$$

$$\left[-\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}+2(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]^{1} \text{ [illegible]}$$

よって　　$S=\boldsymbol{\frac{24\sqrt{3}}{5}}$

7.18 (1) $y=x^2$ [illegible]微分すると　　y[illegible]$=2x$

放[illegible]$(t,\ t^2)$ における法線の方程式[illegible]

[illegible]$1(x$ [illegible] $y-t^2)=0$　すなわち　[illegible]$ty=t+2t^3$　$\cdots$①

$s\neq t$ [illegible]．放[illegible]の点 $(s,\ s^2)$ におい[illegible]線の方程式は

[illegible]$y=s+2s^3$　$\cdots$②

②$-$① [illegible]

[illegible]$(s-t)$[illegible](s^3-t^3)[illegible]　$y=s^2+st+t^2+\frac{1}{2}$

[illegible]を①[illegible]入すると

[illegible]$2t$[illegible]$st+t^2+\frac{1}{2}\Big)=t+2t^3$　ゆえに　$x=-2st(s+t)$

2 直線①，②[illegible]点の座標は　$\left(-2st(s+t),\ s^2+st+t^2+\frac{1}{2}\right)$

この点を s[illegible]とした極限の点が $(u(t),\ v(t))$ であるから

$$u(t)=\lim_{s\to t}\{-2st(s+t)\}=\boldsymbol{-4t^3}$$

$$v(t)=\lim_{s\to t}\left(s^2+st+t^2+\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{3t^2+\frac{1}{2}}$$

(2) Q(t) が放物線 $y=x^2$ 上にあるから

$$3t^2+\frac{1}{2}=(-4t^3)^2 \quad \text{整理すると} \quad 32t^6-6t^2-1=0$$

ゆえに　$(2t^2-1)(4t^2+1)^2=0$　$t \geqq 0$ に注意して　$\boldsymbol{t=\frac{1}{\sqrt{2}}}$

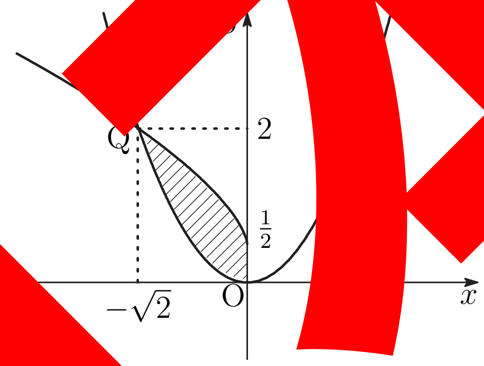
よって　　**Q$(-\sqrt{2},\ 2)$**

(3) (1) の結果から　　$x=-4t^3,\ y=$ [illegible] $t^2+\frac{1}{2}$

ゆえに　　$2x=(-2t)^3,\ y=\frac{3}{4}($ [illegible] 1

上の 2 式から t を消去すると　　y [illegible]

求める面積は，下の図の斜線部 [illegible]



[illegible] 面積を [illegible] ると [illegible]

$$\text{[illegible]} \left(\frac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}+ \text{[illegible]}\right) dx$$

$$= \Big[\text{[illegible]} \ \frac{2}{3} \ \text{[illegible]} \ 3 \Big]_{-\sqrt{2}}^{0} = \boldsymbol{\frac{11}{15}\sqrt{2}}$$

解説 曲線 [illegible] $\frac{3}{4}($ [illegible] 1 を放物線 $y=x^2$ の法線群の包絡線という．

7.19 (1) $y=\frac{x^2}{2}$ を微 [illegible] と　$y'=x$

点 A$\Big(a,$ [illegible] における接線の方向ベクトルは $(1,\ a)$ であるから，A における法線の方程式は

$$1(x-a)+a\left(y-\frac{a^2}{2}\right)=0 \quad \text{すなわち} \quad x+ay=a+\frac{a^3}{2} \qquad \cdots①$$

同様にして $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の方程式は　$x+by=b+\dfrac{b^3}{2}$　$\cdots$②

①，② から x を消去すると

$$(b-a)y=b-a+\frac{b^3-a^3}{2}\quad b\neq a \text{ より}\quad y=1+\frac{a^2+ab+b^2}{2}$$

これを ① に代入すると

$$x+a\left(1+\frac{a^2+ab+b^2}{2}\right)= [illegible] +\frac{a^3}{2}\quad \text{ゆえ} [illegible] -\frac{ab(a+b)}{2}$$

したがって，R の座標は　$\left(-\dfrac{a [illegible]}{} [illegible] +ab+b^2}{}\right)$

よって，$b\to a$ による R の極限の [illegible]

(2) (1) の結果から

$$x=-a^3,\ y [illegible] \frac{}{2}a^2$$

とお [illegible] 第 1 式から　$a=-x^{\frac{1}{3}}$

[illegible] 代入すると　$y=1+\dfrac{3}{2} [illegible]$

[illegible] 式が C [illegible] であり，C_1，C_2 の方程 [illegible] ら y を消去すると

[illegible] $\dfrac{3}{} x^{\frac{2}{3}}$　ゆえに　$x^2-3x^{\frac{2}{3}}-2=0$

[illegible] $=t$ [illegible] とおく [illegible] $t^3\cdots$③

t^6 [illegible] 0　ゆえに [illegible] $1)^2(t^2-2)=0$

[illegible] が [illegible] $=\pm\sqrt{2}$ [illegible] $=\pm 2\sqrt{2}$

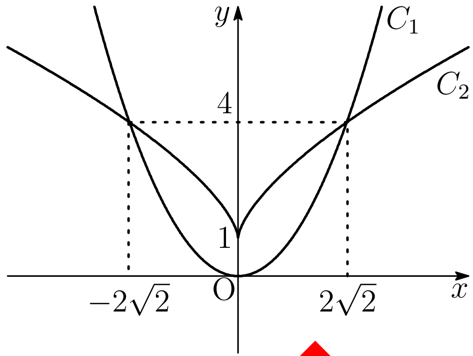
[illegible] 式に代入し [illegible] $=4$

よ [illegible] C_1 [illegible] の交点の座標は　$(\pm 2\sqrt{2},\ 4)$

$C_2: y=1+$ [illegible] ついて　$y'=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$，$y''=-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

ゆえに　y'' [illegible] したがって　C_2 は上に凸の曲線である．

したがって [illegible] C_2 の概形は，次のようになる．



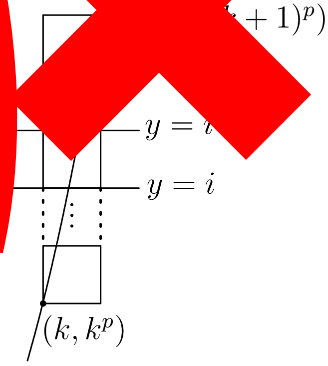
(3) C_1，C_2 は y 軸に関して対称で[illegible]，求め[illegible]を S とすると

$$S = 2\int_0^{2\sqrt{2}} \left\{\left(1 + \text{[illegible]}\right.\right.$$

$$= 2\left[\, x + \frac{9}{\text{[illegible]}} \text{[illegible]}\right.$$

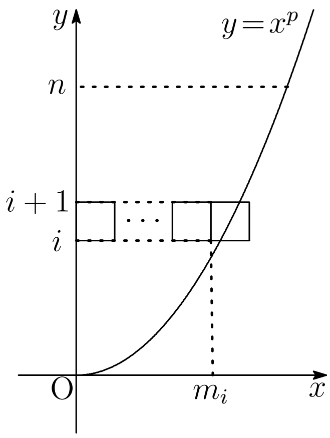
7.20 (1) 右の図は，$k \leqq x \leqq k+1$[illegible]て，$y = x$[illegible]と交わる単位正方形を図示[illegible]ものである[illegible]$y =$[illegible]単調増加であり，$x = k$ および[illegible]x[illegible]いて格子点を通る．

[illegible]て，i[illegible]$+1$ で $y = x^p$ と交わる単[illegible]正方形[illegible]る $(k^p \leqq i < (k+1)^p)$[illegible]した[illegible]，0[illegible]で $y = x^p$ と交わ[illegible]単[illegible]形の[illegible]



[illegible]個)

(2) 右の[illegible]ように[illegible]軸，直線 y[illegible]$+1$ で囲[illegible]積を S[illegible]内の[illegible]方形の個[illegible]と



[illegible] $S_i < m_i + 1$

ゆえに $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}$ [illegible] $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} S_i < \sum_{i=0}^{n-1}(m_i + 1)$

よって [illegible] $< S_n < M_n + n \quad \cdots①$

また $\displaystyle S_n = \int_0^n x\,dy = \int_0^n y^{\frac{1}{p}}\,dy = \boldsymbol{\frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}}}$

(3) 直線 $y=i$ $(i=0,1,\cdots n-1)$ 上にある格子点は，次の m_i+1 個である．

$$(0,\ i),\ (1,\ i),\ (2,\ i),\ \cdots,\ (m_i,\ i)$$

また，直線 $y=n$ 上にある格子点は，次の $[n^{\frac{1}{p}}]+1$ 個である．

$$(0,\ n),\ (1,\ n),\ (2,\ n),\ \cdots,\ ([n^{\frac{1}{p}}],\ n)$$

したがって，D_n 内にある格子点の個数 L_n は

$$L_n=\sum_{i=0}^{n-1}(m_i+1)+([\ [illegible]\ +1)=M_{[illegible]}\ [illegible]\ ]+1$$

$n^{\frac{1}{p}}-1<[n^{\frac{1}{p}}]\leqq n^{\frac{1}{p}}$ であるから

$$M_n+n+n^{\frac{1}{p}}<L_n\leqq [illegible]$$

①，② より　　$S_n+n^{\frac{1}{p}}<L_{[illegible]}$ [illegible]

これに (2) の結果を代入す[illegible]

$$\frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}}+\ [illegible]\ L_n<\frac{p}{p+\ [illegible]}\ [illegible]+n+\ [illegible]$$

した[illegible]

$$[illegible]\,n^{-1}<n^{-\frac{p+1}{p}}L_n<\frac{p}{p+1}\ [illegible]+\ [illegible]+n^{-\frac{p+1}{p}}$$

ここで[illegible]

$$[illegible]\,\infty\left([illegible]\,n^{-1}\right)=\frac{p}{[illegible]\,1},$$

$$\lim_{n\ [illegible]}\left(\ [illegible]\,1+n^{-\frac{1}{p}}+n^{[illegible]\,-\frac{p+1}{p}}\right)=\frac{p}{p+1}$$

[illegible]て，は[illegible]ちの[illegible]より　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}}L_n=\frac{p}{p+1}}$

別解 [illegible] $=i$ $(0\leqq i$ [illegible] にある格子点の個数は　$[i^{\frac{1}{p}}]+1$ (個)

したがって [illegible] $=\sum_{i=0}^{n}([i^{\frac{1}{p}}]+1)$

$i^{\frac{1}{p}}-1<[i^{\frac{1}{p}}]$ [illegible] であるから

$$[illegible]\sum_{i=0}\ i^{\frac{1}{p}}<L_n\leqq\sum_{i=0}^{n}(i^{\frac{1}{p}}+1)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{p}}<n^{-\frac{p+1}{p}}L_n\leqq\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{p}}+n^{-\frac{1}{p}}+n^{-\frac{p+1}{p}}$$

ここで　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = \int_0^1 x^{\frac{1}{p}}\,dx = \frac{p}{p+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{-\frac{1}{p}} + n^{-\frac{p+1}{p}}\right) = 0$$

よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n = \frac{p}{p+1}}$

7.21　(1)　$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 2\cos^2 [illegible]^2 x - [illegible] 2$$
$$[illegible]^4 x - 1$$
$$= 4\cos^2 x - [illegible]$$
$$= \frac{(2\cos^2 x [illegible]}{[illegible]}$$

$f(x)$ の増減表は，次のよう[illegible]

x	$-\frac{\pi}{6}$	[illegible]	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\pi}{3}$	$\nearrow$	極大 $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	[illegible]

よって[illegible]き**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

x[illegible]の[illegible]**小値** $\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{6}-\dfrac{\pi}{3}}$

$f(0) =$ [illegible]び $f($[illegible]減から

$-\dfrac{\pi}{6} <$ [illegible] $f(x) \leqq$ [illegible] $x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき $f(x) \geqq 0$

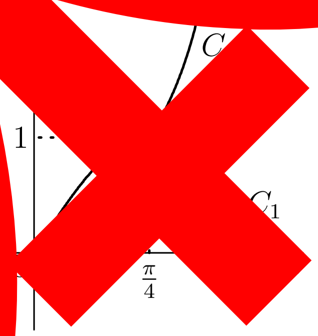
[illegible]の[illegible]数の 1 つを

$$F(x) = \sin^2 x + \log|\cos x| + x^2$$

とし，求める面積の和を S とすると

$$S = -\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$$
$$= -\Big[\,F(x)\,\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{0} + \Big[\,F(x)\,\Big]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= F\left(-\frac{\pi}{6}\right) + F\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2F(0)$$
$$= \left(\frac{1}{4} + \log\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{[illegible]}\right) [illegible] \left(\frac{3}{4} + \mathrm{lo}[illegible]\right) - 2\times 0$$
$$= \mathbf{1} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{2}} + \mathbf{log}\,\frac{\sqrt{\mathbf{3}}[illegible]}{\mathbf{4}}$$

7.22　(1)　$\sin 2x = \tan x$ より



$$2\sin x\cos x [illegible]$$
$$\sin x(2\cos^2 x - [illegible] = 0$$

0 [illegible]　$\sin x = 0,\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

[illegible]って [illegible] $\boldsymbol{\pi}$ [illegible]

(2)　C [illegible]の概形[illegible]ようになる．

(3)　[illegible]る面積[illegible]とす[illegible]

$$S [illegible] 2x - \tan x) [illegible]$$
$$= \left[-\frac{1}{2}\cos [illegible] x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{log\,2}$$

7.23　(1)　$\sin^2 x - \sin^2 [illegible]) = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x) - \dfrac{1}{2}\left\{1 - 2\cos 2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

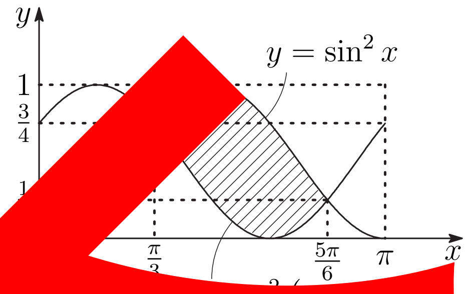
$$= \frac{1}{2}\left\{\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x\right\}$$
$$= -\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \quad \cdots (*)$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より　$\dfrac{\pi}{3} \leqq 2x + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{7}{3}\pi$

したがって，方程式 $\sin^2 x = \sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ の解は，$(*)$ より

$$2x + \frac{\pi}{3} = \pi,\ 2\pi \quad これを解いて \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6}}$$

(2) (1) の結果から，$\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ において，



$(*)$ により $\quad \sin^2 x \geqq \sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

したがって，求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi} \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right\} [illegible]$$

$$= \left[\ \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\ \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi} = [illegible]$$

補足 2 曲線 $y = \sin^2 x$，$y = \sin$ [illegible] $3)$ およ [illegible] 線 [illegible] まれた部分の面積を T とし，[illegible] の原始関数の [illegible] を

$$F(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\left(2 [illegible]\right)$$

[illegible] ると

$$T [illegible] (x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} + \Big[\ F(x)\ \Big]_{\frac{\pi}{3}} [illegible] \Big[\ F(x)\ \Big]_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}$$

$$= 2F [illegible]) - 2F([illegible] F(0) - F(\pi)$$

[illegible] で，[illegible] $) = -$ [illegible] $F(\pi)$ であるから

$$T = 4F\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

7.24 (1) $y = f(x) = \sin$ [illegible] おくと

$$[illegible]\text{m}_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\frac{2x+h}{2}$$

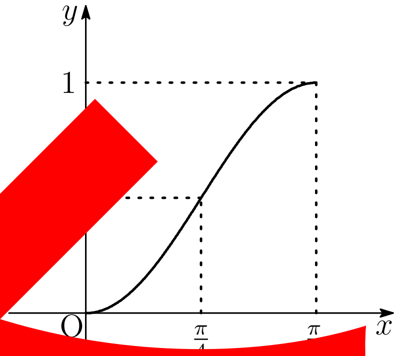
$$= 1 \cdot \cos x = \boldsymbol{\cos x}$$

(2) $y=\sin^2 x$ より

$$y'=2\sin x\cos x=\boldsymbol{\sin 2x},\quad y''=\boldsymbol{2\cos 2x}$$

(3) (2) の結果から，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における増減・凹凸は次のようなる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
y'	0	$+$	$+$	$+$	0
y''		$+$	0	$-$	[illegible]
y	0	⤴	$\frac{1}{2}$	⤵	[illegible]



よって，変曲点は $\left(\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}},\ \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}\right)$

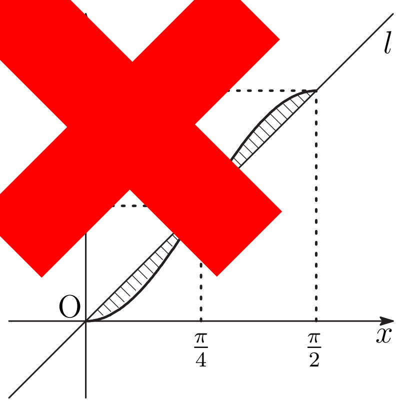
グラフの概形は，右のようになる[illegible]

(4) l の傾きは $\quad \dfrac{1}{2}\div\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2}{\pi}$ [illegible]

ゆえに，l の方程式は [illegible]

求め[illegible]は，右の図の斜線部分であるか[illegible]

の[illegible]すると



$= \int^{\frac{\pi}{4}}$ [illegible] $x\Big)\,dx$

[illegible] $-\dfrac{2}{\pi}x\Big)\,dx$

$=\Big[$ [illegible] $\dfrac{}{2}+\dfrac{1}{}$ [illegible] $\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

[illegible] $-\dfrac{x^2}{4}\Big]$ [illegible] $\boldsymbol{\dfrac{\ \ -\pi}{8}}$

7.25 (1) [illegible] $t\,dt=\displaystyle\int_0^x (t-x)(\cos t)'\,dt$

$$=\Big[\,(t-x)\cos t\,\Big]_0^x-\int_0^x \cos t\,dt$$

$$=x-\Big[\,\sin t\,\Big]_0^x=x-\sin x$$

上式を $f(x)=-x+2\displaystyle\int_0^x (x-t)\sin t\,dt$ に代入すると

$$f(x)=-x+2(x-\sin x)=\boldsymbol{x-2\sin x}$$

(2) (1) の結果から　$f'(x)=1-2\cos x$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	2π

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{3}}$ **のとき　極小値** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}}$

$\boldsymbol{x=\dfrac{5}{3}\pi}$ **のとき　極大** [illegible] $\boldsymbol{+\sqrt{3}}$

(3) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}-2$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ より，[illegible] $\dfrac{1}{[illegible]}=-1$

したがって，P における C の法線 [illegible]

$y-\left(\dfrac{\pi}{2}-2\right)=-\Big($ [illegible] すな [illegible] $+\boldsymbol{\pi}$ [illegible]

$h(x)=g(x)-f(x)$ とお [illegible]

$h(x)=-x+\pi-2-$ [illegible]

$=2\sin x-2x+$ [illegible]

[illegible] $(x)=2\cos x-2=-$ [illegible] $\cos x)$

0 [illegible] $\dfrac{}{2}$ にお [illegible] $)\leqq 0$ であるから，$h(x)$ は単調減少.

[illegible] $\left(\dfrac{}{2}\right)=2-$ [illegible] $-2=0$

[illegible] って [illegible] $=0$ [illegible] $f(x)\leqq g(x)$

[illegible] の結 [illegible] 求める [illegible] と

[illegible] $^{\frac{\pi}{2}}h(x)\,dx=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x-2x+\pi-2)\,dx$

[illegible] $2\cos x-x^2+(\pi-2)x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\pi^2}{4}-\pi+2}$

7.26 (1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{}}{2}$ [illegible] $\dfrac{-\cos 2x}{2}$ より　$f'(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2x$

したがって，増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\sqrt{3}\pi$

よって　極大値 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{3}{4}}$, $f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi + \frac{3}{4}}$

極小値 $f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{12}\pi + \frac{1}{4}}$, $f\left(\frac{11}{6}\pi\right)$ [illegible] $\boldsymbol{\pi + \frac{1}{4}}$

(2) $g(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + a\right) - f(x)$ とお[illegible]

$$g(x) = a - \sin^2 x, \text{[illegible]}$$

l と C の接点の x 座標を t とす[illegible] $= 0$ であるから

$$a - \sin^2 \text{[illegible]} -2\sin \text{[illegible]} t \text{[illegible]}$$

$a > 0$ より，$\sin t \neq 0$ で[illegible]から　$\cos t =$ [illegible]

した[illegible]　$t = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$　ゆえに　$\boldsymbol{a =}$ [illegible]

[illegible]の座[illegible] $\boldsymbol{\pi}$ [illegible] $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4} + 1}\Big)$, $\Big(\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}},$ [illegible] $\boldsymbol{+ 1}\Big)$

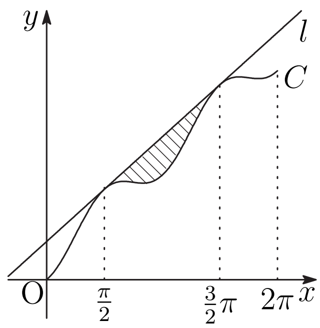
(3) (2)[illegible]果から[illegible] $\cos^2 x = \sin^2 x = \frac{\text{[illegible]}}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

[illegible] $\leqq x$ [illegible]において[illegible] $) \geqq 0$

よ[illegible]求める[illegible]

$$\text{[illegible]} = \int^{\frac{3}{2}\text{[illegible]}} \text{[illegible]}\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}} \text{[illegible]} 2x\Big)\, dx$$

$$\Big[\frac{\text{[illegible]}}{2} - \text{[illegible]} x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$



7.27　(1) $f(x) = 0$ より[illegible] $x - \frac{1}{2}\Big| - \frac{1}{2} = 0$ であるから

$$\sin x - \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin x = 0,\ 1$$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ より　　$\boldsymbol{x = -\pi,\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi}$

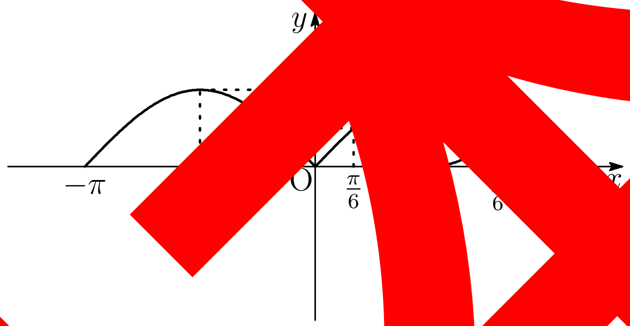
(2) i) $\sin x - \frac{1}{2} \geqq 0$ すなわち $\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{5}{6}\pi$ のとき

$$f(x) = \left|\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right| = |\sin x - 1| = 1 - \sin x$$

ii) $\sin x - \frac{1}{2} \leqq 0$ すなわち $-\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$f(x) = \left|\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) - \frac{1}{2}\right| = \ldots$$

i), ii) から，グラフの概形は，次…



(3) … $\leqq x$ … $-\frac{\pi}{2} \leqq x - \frac{\pi}{2} \leqq 0$ より … の結果から

$$f\ldots = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right| \ldots \cos x| = \cos x$$

…および…結果…

$$f(x) \ldots = \begin{cases} \sin x \ldots & (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{6}) \\ (1 - \ldots \cos x & (\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

が…

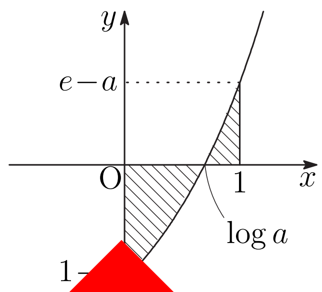
… $a \leqq$ … とき $F(a) = \int_0 \ldots \sin x \cos x \, dx = \mathbf{\frac{1}{4}(1 - \cos 2a)}$

$\frac{\pi}{6} \leqq a \leqq$ … き $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{a} (1 - \sin x) \cos \, dx$

$$= \mathbf{\frac{1}{4}\cos 2a + \sin a - \frac{1}{2}}$$

7.28 (1) $y=e^x-a$ と x 軸との交点の x 座標は

$$e^x-a=0 \quad すなわち \quad x=\log a$$



e^x-a の原始関数の 1 つを

$$F(x)=e^x-ax$$

とおくと

$$S(a)=-\int_0^{\log a}(\text{[illegible]})\,dx+\int^{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}-a)\,dx$$

$$=-\Big[\,F(x)\,\Big]_0^{\log \text{[illegible]}}\text{[illegible]}$$

$$=F(0)+F\text{[illegible]}$$

$$=1+(\text{[illegible]}(a\text{[illegible]}a\text{[illegible]}$$

$$=\mathbf{2}\text{[illegible]}\mathbf{3a+e}\text{[illegible]}$$

(2) (2) の[illegible]から $\qquad S'(a)=2\log a-1$

[illegible](a) の増減表は $(1 \leqq a \leqq e)$ [illegible]

[illegible]	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	$-$	0	$+$	[illegible]
[illegible]	[illegible]	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

[illegible]て[illegible]$\boldsymbol{e}$ の[illegible]値 $S($[illegible]$\boldsymbol{e-2\sqrt{e}+1}$

[illegible] $f(x)$[illegible]$-a)e$[illegible]すると

[illegible]$=e$[illegible]$-a)$[illegible]$\boldsymbol{\{(a+1)-x\}e^{-x}}$

(2) [illegible]に微分する[illegible]

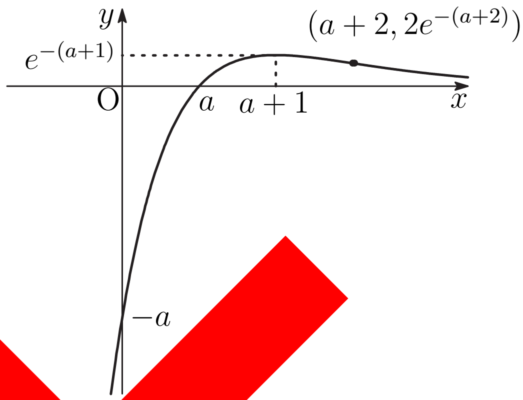
$$f''(x\text{[illegible]}e^{-x}-\{(a+1)-x\}e^{-x}=\boldsymbol{\{x-(a+2)\}e^{-x}}$$

(3) (1), (2) の結[illegible], $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$	$a+2$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$e^{-(a+1)}$	$\searrow$	$2e^{-(a+2)}$	$\searrow$

極大値 $f(a+1) = \boldsymbol{e^{-(a+1)}}$

また，変曲点は $\boldsymbol{(a+2,\ 2e^{-(a+2)})}$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

よって，グラフは右のようになる．

(4) (3) の結果から，求める面積 S_n [illegible]

$$S_n = \int_a^{a+n} (x \text{[illegible]}$$

$$= \Big[\text{[illegible]} \Big]_a^{\text{[illegible]}}$$

$$\text{[illegible]} + 1)e^{-(\text{[illegible]}} - e^{\text{[illegible]}}$$

ここ[illegible] $\lim_{n\to\infty}(n+1)e^{-(a+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+\text{[illegible]}}{e^{a+\text{[illegible]}}}$ [illegible]

[illegible] $\boldsymbol{S_n = e^{-a}}$

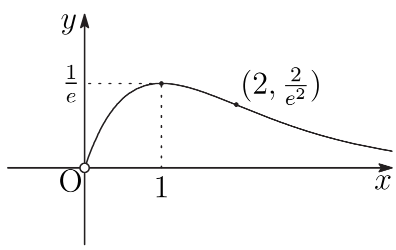
$$\int e^{k\text{[illegible]}}\,dx = \text{[illegible]}(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(\text{[illegible]})}{k^2} \text{[illegible]} \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots \Big\} + C$$

$$\text{[illegible]}^{x} f(x) \text{[illegible]} -e^{-x} \text{[illegible]} + f'(x) \text{[illegible]} (x) + f'''(x) + \cdots\} + C$$

[illegible]) $f(x)$ [illegible] ^{x} よ[illegible] $= (1-x)e^{-x}$ [illegible] $(x) = (x-2)e^{-x}$

[illegible]って[illegible]は次の[illegible]る．

[illegible]	[illegible]	$\cdots$	1	$\cdots$	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	$-$	[illegible]	$-$	
$f''(x)$	[illegible]	[illegible]	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	(0)	[illegible]	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘	



また，$\lim_{x\to+\text{[illegible]}} \text{[illegible]} = 0$ より，グラフの概形は右上の図のようになる．

よって，極大値は　$f(1) = \boldsymbol{\frac{1}{e}}$

(2) (1) のグラフから

$$g(t) = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t xe^{-x}\,dx$$
$$= \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^t = \mathbf{1 - (t+1)}\boldsymbol{e^{-t}}$$

(3) (2) の結果から　$h(t) = g(t+1) - g(t)$

$g'(t) = f(t)$ に注意して，$h(t)$ を微[illegible]すると

$$h'(t) = g'(t+1) - g\text{[illegible]}(t)$$
$$= (t+1)e^{-t-1} - t\text{[illegible]}) - et\}$$
$$= e^{-t-1}\{1 - (e - \text{[illegible]}$$

$t > 0$ における $h(t)$ の増減表[illegible]

t	[illegible]	[illegible]	$\frac{1}{e-1}$	[illegible]
$h'(t)$		$+$	0	[illegible]
$h(t)$		$\nearrow$	極大	[illegible]

[illegible]，[illegible]最大となる t の値は　$\boldsymbol{t}$ [illegible] $\mathbf{1}$

7.31 [illegible] $f(x)$ [illegible]を[illegible]ると

$$f'(\text{[illegible]}$$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

右の[illegible]より，[illegible] $f(2) = \mathbf{2}\boldsymbol{e^{-1}}$ [illegible]る．

([illegible]結果か[illegible]おける[illegible]次のようになる．

x	0	$\cdots$	[illegible]	$\cdots$	4
[illegible]		$+$	0	$-$	
[illegible]	0	$\nearrow$	$2e^{-1}$	$\searrow$	$4e^{-2}$

よって，求め[illegible]の個数は

$$\begin{cases} \text{[illegible]} < 0 \text{ のとき} & 0\text{ 個} \\ \text{[illegible]} \leqq k < 4e^{-2}\text{ のとき} & 1\text{ 個} \\ \text{[illegible]}e^{-2} \leqq k < 2e^{-1}\text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ k = 2e^{-1}\text{ のとき} & 1\text{ 個} \\ 2e^{-1} < k\text{ のとき} & 0\text{ 個} \end{cases}$$

(3) $$f(x) - g(x) = xe^{-\frac{x}{2}} - \sqrt{e}\,x = x(e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{1}{2}})$$

ゆえに，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の x 座標は　$x = -1,\ 0$

また，$-1 \leqq x \leqq 0$ において　　$f(x) \geqq g(x)$

よって，求める面積を S とすると

$$S = \int_{-1}^{0} (xe^{-\frac{x}{2}} - \sqrt{e}\,x)dx$$

$$= \left[(-2x-4)e^{-\frac{x}{2}} \text{[illegible]} \frac{\sqrt{e}}{2}x^2\right]^{0}_{\text{[illegible]}} \text{[illegible]} \mathbf{- 4}$$

7.32 (1) $f(x) = \dfrac{3}{2}e^{-x} + 2e^{x} - 3$ を微分すると

$$f'(x) = -\frac{3}{\text{[illegible]}} \text{[illegible]}$$

$f'(x) = 0$ とすると　e^{x} [illegible] すなわち [illegible] $\log$ [illegible]

e^{-1} [illegible] 1 であるから　　$-1 < \log$ [illegible]

[illegible] の増減表は次のようにな[illegible]

x	[illegible]	-1	$\cdots$	$\log \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	[illegible]
$f'(x)$	[illegible]	[illegible]	$-$	0	$+$	[illegible]
$f(x)$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	極小	$\nearrow$	[illegible]

[illegible]って[illegible]る最小[illegible]

$$f\left(\text{[illegible]}\right) = \text{[illegible]} \frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{\text{[illegible]}}} \text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]}3}{2} - 3 = \mathbf{2\sqrt{3} - 3}$$

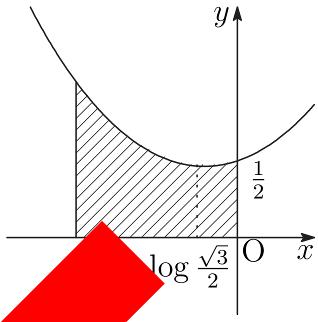
(2) [illegible]における接[illegible] a における接線が直交するから，

[illegible]$f'($[illegible]1 より

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\text{[illegible]} + 2e^{a}\right) = -1 \quad \text{すなわち} \quad (2e^{a} - 1)(2e^{a} + 3) = 0$$

$2e^{a} +$ [illegible] であるから　$e^{a} = \dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{a = -\log 2}$

(B) 求める面積を S とすると



$$S=\int_a^0\left(\frac32 e^{-x}+2e^x-3\right)dx$$
$$=\left[-\frac32 e^{-x}+2e^x-3x\right]_a^0$$
$$=\frac12-\left(-\frac32 e^{-a}+2e^a-3a\right)$$
$$=\frac12-\left\{-\frac32\cdot2+2\cdot\frac12 \cdots \log 2)\right\}$$
$$=\mathbf{\frac52-3\log 2}$$

7.33 (1) $f(x)=(ax+b)e^{-x}$ より $f'(x)=$ …

点 (0, 2) を通るから，$f(0)=2$ …

… ①

点 (0, 2) における接線の傾きが 2 であるから $f'(0)=$ …

$$a-b=2 \quad \cdots ②$$

… 4，$\boldsymbol{b=2}$

… の結果 …

x	$\cdots$	$\frac12$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$4e^{-\frac12}$	↘

$f(x)$ … e^{-x}

f' … $2(1-$ …

した…，$f(x)$ … は右のように…

…，$\boldsymbol{x=}$ … 値 $\boldsymbol{4e^{-\frac12}}$ … .

… 範囲におい … であるから，求める面積 S は

$$\cdots +2)e^{-x}\,dx=\Big[-(4x+6)e^{-x}\Big]_0^1=\mathbf{-10e^{-1}+6}$$

7.34 (1) $f(x$ … $2x$，$f'(x)=2ae^{2x}$

曲線 $y=f($ … $(b,\ f(b))$ における接線の方程式が $y=x$ であるから

$$\cdots = b,\quad f'(b)=1 \quad ゆえに \quad ae^{2b}=b,\quad 2ae^{2b}=1$$

これを解いて $\boldsymbol{a=\frac{1}{2e}}$，$\boldsymbol{b=\frac12}$

(2) (1) の結果から　　$g(x)=f(x)-x=\frac{1}{2}e^{2x-1}-x$

これを微分すると　$g'(x)=e^{2x-1}-1$

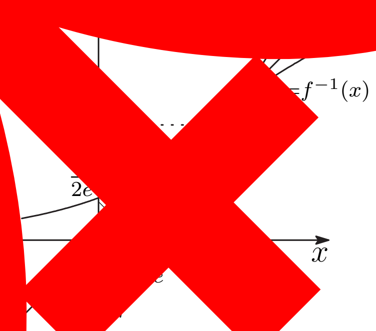
したがって，$g(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{2}-1$

ここで　$g(1)-g(0)=\frac{e}{2}-1-$ [illegible] $\frac{1}{\ }\left(e-\frac{5}{\ }\right)$ [illegible] $\left(\frac{\ }{2}-\frac{1}{e}\right)>0$

よって　$x=1$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{e}{2}-1}$ [illegible] き最小値 **0**

(3) 求める面積を S とすると，図の斜線 [illegible]
から



$$\frac{S}{2}=\int_0^{\frac{1}{2}}\{f(x)-x\} \ \text{[illegible]} \int_0 \ \text{[illegible]} \ g(x)\,d \ \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}\int^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}e^{2x-1}-x\right)dx$$

$$= \ \text{[illegible]} \ -\frac{x^2}{2}\Bigg]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}-\frac{1}{4e}$$

よ [illegible] S [illegible]

[illegible] $(t)=$ [illegible] $1+t$ [illegible] $\frac{\ }{6}\Big)$ とする [illegible]

[illegible] $=e^t$ [illegible] $+\frac{t^2}{2}\Big)$

f [illegible] $(1+t)$

$f'''(t)=e^t-1$

$t>0$ のとき [illegible] >0，$f''(0)=0$ であるから　$t>0$ のとき $f''(t)>0$

これから

$t>0$ のとき [illegible] $)>0$，$f'(0)=0$ であるから　$t>0$ のとき $f'(t)>0$

さらに

$t>0$ の [illegible] $'(t)>0$，$f(0)=0$ であるから　$t>0$ のとき　$f(t)>0$

したがって，$t>0$ のとき

$$e^t>1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\quad\cdots①$$

このとき

$$\begin{aligned} 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6} &= 1+t^2+\frac{t}{6}(t^2-3t+6) \\ &= 1+t^2+\frac{t}{6}\left\{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right\} \\ &> 1+t^2 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，② から，$t>0$ のとき

$$e^t \; [illegible] \; 1+t^2$$

上式において $t=-x$ とすると [illegible]

$$x<0 \text{ のとき } [illegible] + \boldsymbol{x^2}$$

解説 $e^t=1+t+\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^3}{3!}+\cdots$ であるた[illegible]

$$e^t > 1+t \; [illegible] \; e^t > [illegible]$$

などを活用すればよい．

別解 x^2+1 [illegible] $= e^{-x}\{(x^2+1)e^x-1\} \quad \cdots$ [illegible]

$g(x$ [illegible] $1)e^x-1$ とおくと

$$[illegible]\,'(x)=2xe^x+(x^2+1)e \; [illegible] + [illegible]\, e^x$$

[illegible] $(x)=$ [illegible] $=-1$

$g(x$ [illegible] 減表は [illegible] うになる．

[illegible]	…	-1	…	0
[illegible] (x)	[illegible]	0	[illegible]	[illegible]
$g($[illegible]	[illegible]	$2e^{-1}-1$	[illegible]	[illegible]

[illegible] って [illegible] $g(x)$ [illegible]

[illegible] て，[illegible] x [illegible] $\boldsymbol{+1<e^{-x}}$

(2) [illegible] $> x^2+1$ [illegible] に $\quad xe^{-x}<x(x^2+1)$

$x=$ [illegible] とき [illegible] $=x(x^2+1)$

$x>0$ のとき [illegible] $<1<x^2+1$ 　ゆえに 　$xe^{-x}<x(x^2+1)$

ゆえに，2 つ [illegible] $y=xe^{-x}$，$y=x(x^2+1)$ の共有点の x 座標は 　$x=0$

よって，求 [illegible] 積 S は

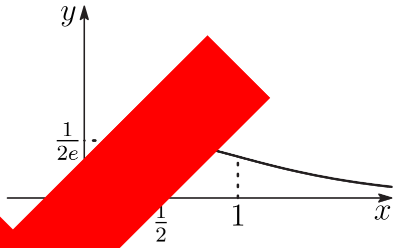
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0}\{x(x^2+1)-xe^{-x}\}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} = \boldsymbol{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

7.36 (1) $f(x) = xe^{-2x}$ より

$$f'(x) = (1-2x)e^{-2x} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$f''(x) = 4(x-1)e^{-2x} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

よって，$f(x)$ の増減，凹凸は下の表のようになる．したがって，グラフの概形は右の図のようになる．



x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	[illegible]
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	$\frac{1}{e^2}$	↘

(2) $f'(x)$ は (1) の表から，$x=1$ で [illegible] $f'(1) = -\frac{1}{e^2}$ をとる．したがって，曲線 $y=f(x)$ の [illegible] うち [illegible] なる点 [illegible] 点 $(a,\ f(a)) = \left(\mathbf{1},\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^2}}\right)$ を [illegible] 傾き $-\frac{1}{e^2}$ [illegible] であ [illegible]

$$[\text{illegible}] - \frac{1}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x-1) \quad \text{すなわち} \ [\text{illegible}]$$

[illegible] $= \left([\text{illegible}] \frac{2}{e^2} \right) - f(x)$ とおくと

$$[\text{illegible}]\ g'(x) = -f'(x) - \frac{1}{e^2}$$

[illegible] で述べ [illegible] に x [illegible] おいて

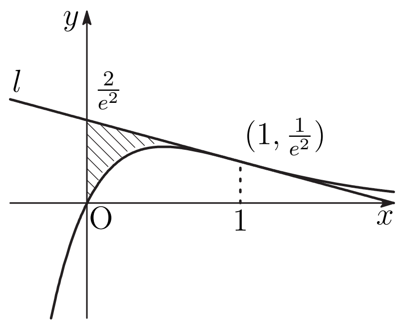
$$f'[\text{illegible}] \quad \text{ゆえに} \ g'[\text{illegible}] -f'(x) - \frac{1}{e^2} < 0$$

[illegible] って [illegible] は [illegible] おい [illegible] 減少である．また

$$[\text{illegible}] = -\frac{1}{e^2} + [\text{illegible}]) = -\frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} = 0$$

よ [illegible] $x <$ [illegible] いて $g(x) > 0$ となり，題意は示された．

(4) 求める面積 S [illegible] の図の斜線部分である．



$$S = \int_0^1 \left\{ \left([\text{illegible}] + 2e^{-2} \right) - xe^{-2x} \right\} dx$$

$$= \left[-\frac{e[\text{illegible}]}{2}x[\text{illegible}] + 2e^{-2}x + \frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{4} \right]_0^1$$

$$= \boldsymbol{\frac{9}{4e^2} - \frac{1}{4}}$$

別解 直線 l と x 軸，y 軸，直線 $x=1$ で囲まれた台形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1\left(\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e^2}\right)=\frac{3}{2e^2}$$

よって　$S=\dfrac{3}{2e^2}-\displaystyle\int_0^1 xe^{-2x}\,dx=\dfrac{9}{4e^2}-\dfrac{1}{4}$

7.37 (1) $f(x)=xe^x$ より

$f'(x)=(x)'e^x+x(e^x)'=e^x+xe^x=(\boldsymbol{x}+$ [illegible]

$f''(x)=(x+1)'e^x+(x+1)$ [illegible] $)e^x=(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})\boldsymbol{e^x}$

また　$\{(ax+b)e^x\}'=ae^x+(ax+$ [illegible]

$\{(ax+b)e^x\}'=f(x)$ であるとき [illegible]

したがって　$a=1,\ a+b=$ [illegible] て [illegible] $\mathbf{-1}$

(2) C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ にお [illegible] 線 ℓ の方 [illegible]

[illegible] $-f(p)=f'(p)(x-p)$　ゆえに [illegible] $'(p)($ [illegible] $)$

[illegible] の結果から　$c=f'(p)=($ [illegible] $=f(p)$

[illegible] $=f($ [illegible] $-p)+d\}$ より

[illegible] $f(x)$ [illegible] $)e^p(x-p)+pe$ [illegible] $x)-(p+1)e^px+p^2e^p$

[illegible] $)=f'$ [illegible] $=f'(x)-f'(p)$

[illegible]) の結 [illegible]，x [illegible] いて，$f''($ [illegible] であるから，$f'(x)$ は単調増加．
し [illegible] て，$g($ [illegible] 表は，次の [illegible] る．

[illegible]	[illegible]	0	[illegible]	p	$\cdots$
g [illegible]			[illegible]	0	$+$
$g(x)$			$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

$x\geqq 0$ におい [illegible] $\geqq 0$ であるから　$f(x)-\{c(x-p)+d\}\geqq 0$

よって　f [illegible] $c(x-p)+d\quad(x\geqq 0)$

補足 $f''(x)>0$ で [illegible] 曲線 $y=f(x)$ とその曲線上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接

線を $y = h(x)$ とすると

$$f(x) - h(x) = f(x) - \{f'(p)(x-p) + f(p)\} = \int_p^x f'(t)\,dt - f'(p)(x-p)$$

$$= -\int_p^x (x-t)'f'(t)\,dt - f'(p)(x-p)$$

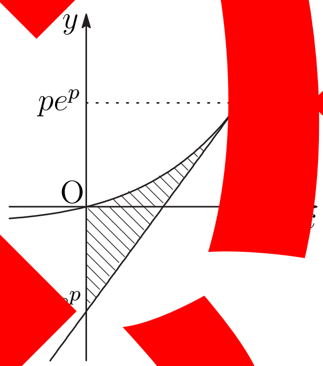
$$= -\Big[\,(x-t)f'(t)\,\Big]_p^x + \int_p^x (x-t)f''(t)\,d \cdots '(p)(x-p)$$

$$= \int_p^x (x-t)f''(t)\,d \cdots \int^p (t-x)f \cdots$$

$x \geqq p$ のとき $\int_p^x (x-t)f''(t)\,dt \geqq 0$ [illegible] $\int_x$

したがって　$f(x) - h(x) \geqq$ [illegible] て [illegible] $\geqq$

(3) 図形 F は，下の図の斜線 [illegible] ある．



よ [illegible] の面 [illegible] (1)，(2) の [illegible] から

$$\int_0^p g(x \cdots) - (p+1)e^p x + p^2e^p\}\,dx$$

$$\Big[\,(x-1)e^x - \frac{1}{2}(p+1)e^p x^2 + p^2e^p x\,\Big]_0^p$$

$$\cdots \boldsymbol{^p(p-1)(p^2+2)+1}$$

(4) R は，P お [illegible] $(0, -p^2e^p)$ を含む x 軸および y 軸に平行な長方形であるから，そ [illegible] の最小値 $T(p)$ は

$$T(p) = p\{pe^p - (-p^2e^p)\} = \boldsymbol{p^2(p+1)e^p}$$

よって　$$\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)} = \lim_{p\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^p(p-1)(p^2+2)+1}{p^2(p+1)e^p}$$
$$= \lim_{p\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{2}{p^2}\right)+\frac{2}{p^3e^p}}{2\left(1+\frac{1}{p}\right)} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

7.38 (1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ より　$0 \leqq \sqrt{3}x \leqq 2\pi$

したがって，$f(x)=0$ をみたす x の値は

$$\sqrt{3}x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$ よ [illegible] $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$

(2) $f(x) = e^{-x}\cos\sqrt{3}x$ を微分すると

$$f'(x) = -e^{-x}(\sqrt{3}\sin [illegible] s\sqrt{3} [illegible] (\sqrt{3}x [illegible]$$

$\dfrac{\pi}{6} \leqq \sqrt{3}x + \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{13}{6}\pi$ であ [illegible] から，$f'(x)$ [illegible] みたす [illegible]

[illegible] $x + \dfrac{\pi}{6} = \pi,\ 2\pi$　すなわち [illegible] $\dfrac{11\pi}{6\sqrt{3}}$

した [illegible]，0 [illegible] $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ における $f($ [illegible] 減は，次のようになる．

[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{11\pi}{6\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$
[illegible]		[illegible]	0	+	[illegible]	−	
[illegible] (x)		[illegible]	極小	↗	[illegible]	↘	

[illegible] $-(e$ [illegible] ある [illegible] 注意し [illegible] 分積分を行うと

$$\int [illegible] = -\int(e [illegible] \sqrt{3}x\,dx$$
$$= -e^{-x}\cos\sqrt{3}x + \int e^{-x}(-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x)\,dx$$
$$= -e^{-x}\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\int(e^{-x})'\sin\sqrt{3}x\,dx$$
$$= -e^{-x}\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}e^{-x}\sin\sqrt{3}x - 3\int e^{-x}\cos\sqrt{3}x\,dx$$

したがって

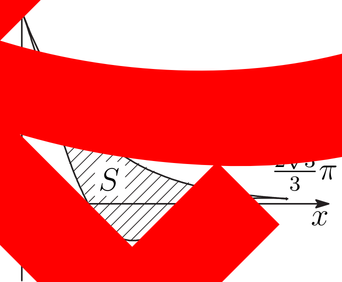
$$
\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int e^{-x}\cos\sqrt{3}x\,dx \\
&= \frac{1}{4}e^{-x}(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x - \cos\sqrt{3}x) + C \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}e^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x - \frac{\pi}{6}\right) + C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数)}
\end{aligned}
$$

(4) $e^{-x} - f(x) = e^{-x} - e^{-x}\cos\sqrt{3}x$

$\qquad\qquad\quad = e^{-x}(1 - \cos\sqrt{3}x)$ [illegible]

したがって，求める面積を S とする [illegible]

(3) の結果を用いると



$$S = \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \{e^{-x} - f(x)\}\,d[illegible]$$

$$= \left[[illegible] e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x}\sin\left([illegible]x - \frac{\pi}{6}\right) \right]_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}[illegible]}$$

[illegible] $\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$ $\Big)$ [illegible] **4**

7.39 [illegible] $x) =$ [illegible] $0)$ について，$f(x)$ [illegible] なる x の値であるから

$\sin$ [illegible] を解いて　$x = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

[illegible] って，[illegible] 点 P [illegible] 座標は [illegible] $\boldsymbol{n\pi}$

[illegible] (1) [illegible] 果から [illegible] $\int_{[illegible]1)\pi}^{n\pi} |e^{-x}$ [illegible]

[illegible] $(n-1)\pi$ [illegible]

x	$(n-1)\pi \longrightarrow n\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$\dfrac{dx}{dt} = 1$

よっ [illegible] S [illegible] $\int^{\pi} |e^{-t-(n-1)\pi}\sin\{t + (n-1)\pi\}|\,dt$

$$[illegible]^{(n-1)\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt$$

$$[illegible] e^{-(n-1)\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t) \right]_0^{\pi}$$

$$= e^{-(n-1)\pi} \times \frac{e^{-\pi} + 1}{2} = \boldsymbol{\frac{(e^{-\pi} + 1)e^{-(n-1)\pi}}{2}}$$

(3) (2) の結果から

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{e^{-\pi}+1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{(k-1)\pi}$$
$$= \frac{e^{-\pi}+1}{2} \times \frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}} = \boldsymbol{\frac{(1+e^{-\pi})(1-e^{-n\pi})}{2(1-e^{-\pi})}}$$

また，$0 < e^{-\pi} < 1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-n\pi} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1+\text{[illegible]}e^{-\pi}}{2\text{[illegible]}} = \boldsymbol{\frac{e^{\pi}}{2\text{[illegible]}}}$$

7.40 (1) $f(x) = xe^x$ を微分すると $f'(x) =$ [illegible]

P$(p,\ pe^p)$ における接線の方程式は

$$y - pe^p = (p+1)e^p(x - \text{[illegible]}) \quad \text{[illegible]} + 1)e^p x - p^2 e^p$$

よって $g(x) = (p+1)e^p$ [illegible]

ここで，$h(x) = f(x) -$ [illegible] $\geqq 0)$ とお[illegible]

$$h(x) = xe^x - (p\text{[illegible]}x + p^2\text{[illegible]}$$
$$h'(x) = (x+1)e^x \text{[illegible]}$$
$$h''(x) = (x+2)e^x \text{[illegible]}$$

[illegible] $\geqq 0$ [illegible] > 0 より，$h'(x)$ は単[illegible]であ[illegible](x) の増減は，[illegible]のよう[illegible]る。

[illegible]	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

[illegible]たがっ[illegible] $\geqq 0$ に[illegible] $h(x)$ [illegible]

よって[illegible] $x \geqq 0$ [illegible]て $f(x) \geqq$ [illegible]

([illegible]論から

$$\text{[illegible]} = \int_0^L \{f(\text{[illegible]}$$
$$\text{[illegible]}\int_0^L xe^x\,dx - (p+1)e^p\int_0^L x\,dx + p^2e^p\int_0^L dx$$
$$\text{[illegible]}\int_0^L xe^x\,dx - \frac{L^2}{2}(p+1)e^p + Lp^2e^p$$

したがって[illegible]

$$S'(p) = -\frac{L^2}{2}(p+2)e^p + L(p^2+2p)e^p$$
$$= \frac{L}{2}e^p(p+2)(2p-L)$$

よって，$S(p)$ の増減は右の表のようになり，$S(p)$ は，$\boldsymbol{p=\frac{L}{2}}$ で最小値をとる．

p	0	$\cdots$	$\frac{L}{2}$	$\cdots$
$S'(p)$		$-$	0	$+$
$S(p)$		↘	極小	↗

7.41 $f(x)=\dfrac{1+\log x}{x}=x^{-1}+x^{-1}\log x$ より

$$f'(x)=-x^{-2}-x^{-2}\log x+x^{-1}x^{-1}=x^{-2}\text{[illegible]}$$

$$f''(x)=-2x^{-3}\log x+\text{[illegible]}^{-2}x^{-1}=\frac{1-2\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$$

$f(x)=0$ とすると　$1+\log x=0$　す[illegible]

$f''(x)=0$ とすると　$1-2\log x=0$　すな[illegible]

よって　$S=\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}}\frac{1+\log x}{x}\,dx=$ [illegible] dx

$=\Big[\log x+\dfrac{1}{2}($[illegible]$\Big]_{\frac{1}{e}}$ [illegible] $=\boldsymbol{\dfrac{9}{8}}$

7.42 (1) $\boldsymbol{y'}$ [illegible]

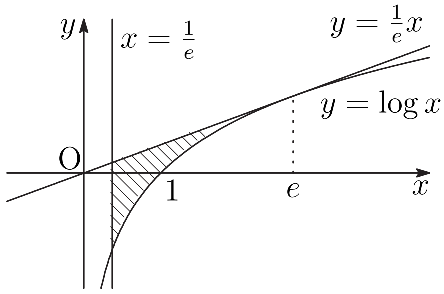
(2) [illegible] $\boldsymbol{\log x}$ [illegible] $\boldsymbol{x-x+C}$ **(**$\boldsymbol{C}$ **は積**[illegible]**)**

(3) $f($[illegible]分す[illegible]$)=\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\text{[illegible]}}{ex}$

[illegible]って，[illegible]$=\dfrac{1}{e}x$ [illegible] $\left(\dfrac{1}{e}\leqq x\right.$ [illegible]の増減表は，次のようになる．

x	[illegible]	$\cdots$	e	[illegible]	e^2
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	$\frac{1}{e^2}+1$	[illegible]	[illegible]	↗	$e-2$

(4) $y=$[illegible]は，[illegible]$=\log x$ の点 $(e,\ 1)$ における接線．求[illegible]積を S とすると



$S=$ [illegible] $x-\log x\Big)\,dx$

$=\Big[$[illegible]$\dfrac{\text{[illegible]}}{2e}-x\log x+x\Big]_{\frac{1}{e}}^{e}$

$=\boldsymbol{\dfrac{e}{2}-\dfrac{1}{2e^3}-\dfrac{2}{e}}$

7.43 (1) $f(x)=ax+b$, $g(x)=\log x$ とおくと

$$f'(x)=a,\quad g'(x)=\frac{1}{x}$$

ℓ と C の接点の x 座標を t とすると，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ であるから

$$at+b=\log t,\quad a=\frac{1}{t}$$

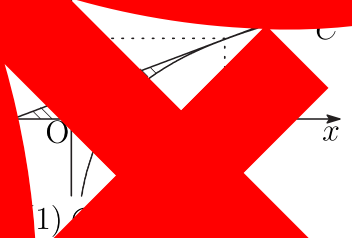
上の第 2 式より，$t=\dfrac{1}{a}$ であるから，これを第 1 [illegible] すると

$$a\cdot\frac{1}{a}+b=\log\frac{1}{a} \quad [illegible]\ \boldsymbol{b} [illegible] \boldsymbol{g\,a-1}$$

(2) $0<a<1$ より　$t=\dfrac{1}{a}>1$

ℓ と x 軸との交点の x 座標は

$$ax+b=0\quad \text{ゆえに}\ [illegible]\ \frac{b}{a}$$



求め [illegible] は，右の図の斜線部分であるか [illegible] 1) [illegible]

$$[illegible]\ \frac{1}{2}\left\{t-\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}\log t-[illegible]\,x\,d[illegible]$$

$$[illegible]\ \frac{b}{a}\Big)\log t-\Big[\,x([illegible]1)\,\Big]_1^t$$

$$[illegible]\ \frac{1}{2}\Big([illegible]\ \frac{a+1}{a}\Big)\ [illegible] - t(\log t-1)-1$$

$$[illegible]\ \log a\Big)(-\log a\ [illegible] -\log a-1)-1$$

$$[illegible]\ \frac{(\log\ [illegible]}{2a}\ [illegible]\ g\,a\ [illegible]\ 1$$

$$[illegible]\ \boldsymbol{\frac{(\log a)^2\ [illegible]\ a-2a+2}{2a}}$$

7.44 (1) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ [illegible] $x+1$，$g(x)=k\log\dfrac{x}{2}+k-1$ とおくと

$$f'(x)=x-\frac{4-k}{2},\quad g'(x)=\frac{k}{x}$$

点 P の x 座標を p とおくと，$f'(p)=g'(p)$ であるから

$$p-\frac{4-k}{2}=\frac{k}{p}\quad \text{ゆえに}\quad (p-2)(2p+k)=0$$

$k>0,\ p>0$ であるから　　$p=2$

このとき　$f(2)=k-1,\ g(2)=k-1$　ゆえに　$\mathbf{P(2,\ \boldsymbol{k}-1)}$

したがって，P における接線の傾きは　　$f'(2)=g'(2)=\dfrac{k}{2}$

よって，接線 l の方程式は

$$y-(k-1)=\frac{k}{2}(x-2)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=}\ [illegible]\ \mathbf{1}$$

(2) l が点 $(1,\ 0)$ を通るから

$$0=\frac{k}{2}\cdot 1-1\quad [illegible]\ =2$$

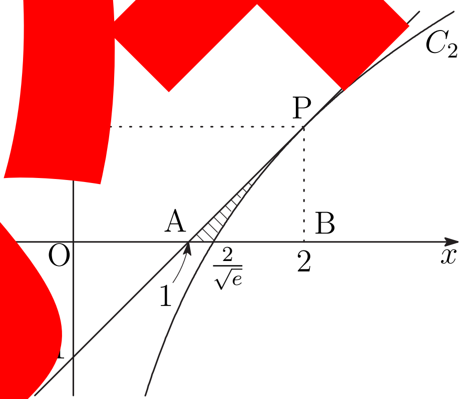
よって　　$C_2 : y=2\log\dfrac{x}{2}+1$

これに $y=0$ を代入すると

$$0=2\ [illegible]\ +1\quad \text{よっ}\ [illegible]\ =\frac{\ }{\sqrt{e}}$$

(3) 求 [illegible] 図の斜線部分で，その

[illegible] S [illegible]



$$S=\ [illegible]\ \mathrm{P}\ [illegible]\ \log\frac{x}{2}+1\Big)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\ [illegible]\ \mathrm{g}\,\frac{x}{2}\ [illegible]\ _{\sqrt{e}}$$

$$[illegible]\ \mathbf{2}-\frac{\mathbf{4}}{[illegible]}$$

7.45 ([illegible] $=$ [illegible] $g(x)=c$ [illegible] と　$f'(x)=2ax,\ g'(x)=\dfrac{c}{x}$

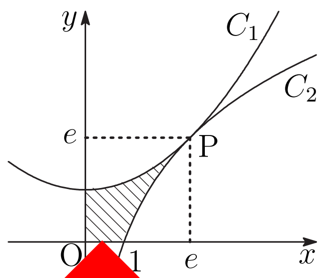
C_1 [illegible] $: y=g(x)$ が点 $\mathrm{P}(e,\ e)$ で接するから

$$f(e)=g(e)=e,\quad f'(e)=g'(e)$$

したがって　　$ae^2+b=c=e,\qquad 2ae=\dfrac{c}{e}$

これを解く [illegible]　　$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{e}},\ \ \boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{e}}{\mathbf{2}},\ \ \boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}$

(2) 求める面積を S とすると，右の図から



$$S = \int_0^e \left(\frac{x^2}{2e} + \frac{e}{2}\right) dx - \int_1^e e\log x\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{6e} - \frac{ex}{2e}\right]_0^e - e\left[x(\log x - 1)\right]_1^e$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}e^2 - e}$$

7.46 (1) $y = \dfrac{\log x}{a}$ を微分すると　$y' =$ [illegible]

接点の座標を $\left(t,\ \dfrac{\log t}{a}\right)$ とすると，[illegible] $\dfrac{1}{[illegible]}$ であるから，

その方程式は

$$y - \frac{\log t}{a} = \frac{1}{at}(x - t) \quad \text{[illegible]} \ \frac{\log t - 1}{\text{[illegible]}} \quad \cdots①$$

これが，点 $\left(0,\ 1 - \dfrac{1}{a}\right)$ [illegible]から

$$\frac{\log t - 1}{a} = 1 - \frac{1}{a} \quad \text{ゆ[illegible]}$$

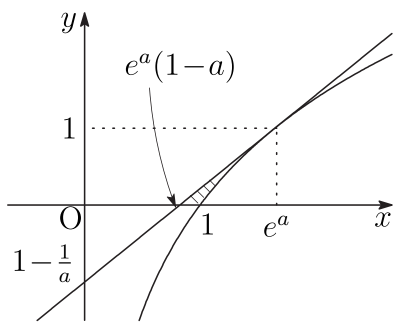
[illegible]より[illegible]式は　$\boldsymbol{y = \dfrac{x}{ae^a} +}$ [illegible] $\boldsymbol{\dfrac{\ }{a}}$

(2) [illegible] $= \dfrac{\log}{\text{[illegible]}}$ [illegible] $x = e^a$ および x 軸で囲まれた部分の面積を[illegible]とする[illegible]

$$S = \text{[illegible]} \frac{1}{\text{[illegible]}}\left[x(\log \text{[illegible]}\right]_1^a = \frac{1}{a}(ae^a - e^a + 1)$$

[illegible]のとき

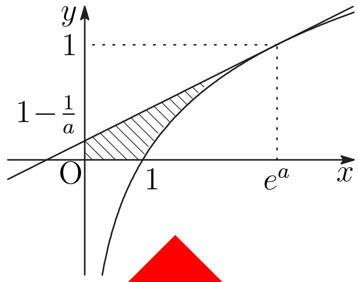
[illegible]部分の面積[illegible]



$$\text{[illegible]}\ e^a(1-a)\}\cdot 1 - S$$
$$= \text{[illegible]} \frac{1}{a}(ae^a - e^a + 1)$$
$$\text{[illegible]} \boldsymbol{\left(\frac{a}{2} - 1 + \frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a}}$$

ii) $a \geqq 1$ のとき

右の図の斜線部分の面積は



$$\frac{1}{2}e^a\left\{1+\left(1-\frac{1}{a}\right)\right\}\cdot 1-S$$
$$=e^a\left(1-\frac{1}{2a}\right)-\frac{1}{a}(ae^a-e^a+1)$$
$$=\boldsymbol{\frac{e^a}{2a}-\frac{1}{a}}$$

(3) 曲線 C と $y=\dfrac{x^2}{2e}$ の接点の x 座標 … u とすると

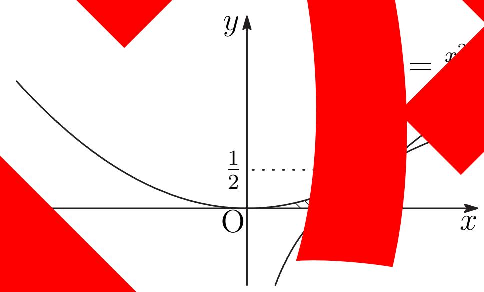
$\dfrac{\log \cdots}{a}$ …

$y=\dfrac{x^2}{2e}$ を微分すると，$y'=\dfrac{x}{e}$．接点 …

$\dfrac{1}{a \cdots}$ …

②，③ を解いて　$u=\sqrt{e}$, …

求める面積は，次の図の … 分の面積 … 。



… 面積を … すると

$$S= \cdots dx-\int_1^{\sqrt{e}}\log \cdots$$
$$\cdots\left[\frac{x^3}{6e}\right]_0 \cdots 1)\Big]_1^{\sqrt{e}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{e}-1}$$

7.47 (1) f … x を微分すると　$f'(x)=a-1-\log x$

$f'(x)=0$ と … $x=e^{a-1}$

$f(x)$ の増減表 …

x	(0)	$\cdots$	e^{a-1}	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	e^{a-1}	$\searrow$

このとき，$f(x)$ の最大値が 1 であるから

$$e^{a-1}=1 \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{a=1}$$

(2) (1) の結果から，$f(x)=x(1-\log x)$，$f'(x)=-\log x$

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}$ とすると

$$-\log x=-\frac{1}{2} \quad すなわち \quad x=\sqrt{e}$$

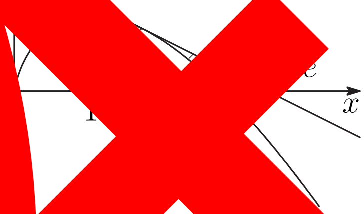
$f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2}\sqrt{e}$ より，求める接線は，点 $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2}\sqrt{e}\right)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線であるから

$$y-\frac{1}{2}\sqrt{e}=-\frac{1}{2}(x-\sqrt{e}) \quad よって \quad \boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{e}}$$

(3) 曲線 $y=x(1-\log x)$ の x 軸との交点の x 座標は

$$1-\log x=0 \quad すなわち \quad x=e$$

直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+\sqrt{e}$ の x 軸との交点の x 座標は



$$-\frac{1}{2}x+\sqrt{e}=0 \quad すなわち \quad x=2\sqrt{e}$$

よって，求める図形の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}(2\sqrt{e}-\sqrt{e})f(\sqrt{e})-\int_{\sqrt{e}}^{e}x(1-\log x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{e}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{e}-\left[x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\log x\right)\right]_{\sqrt{e}}^{e}$$

$$=\frac{1}{4}e-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{2}e=\boldsymbol{\frac{1}{4}e(3-e)}$$

7.48 (1) $f(x)=(\log x)^2-\log x$ より　$f(x)=0$ のとき

$$\log x(\log x-1)=0 \quad これを解いて \quad \boldsymbol{x=1,\ e}$$

(2)
$$f'(x)=2(\log x)\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=\frac{2\log x-1}{x}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-(2\log x-1)\cdot 1}{x^2}=\frac{3-2\log x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ のとき　$x=e^{\frac{1}{2}}$，　$f''(x)=0$ のとき　$x=e^{\frac{3}{2}}$

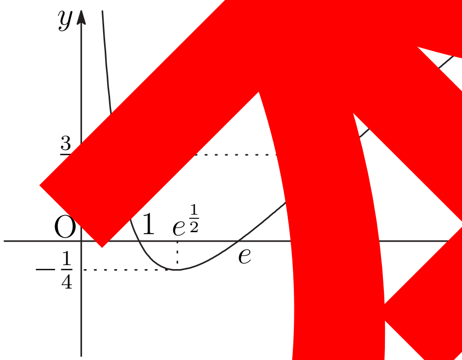
よって，$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	極小 $-\frac{1}{4}$	↗	変曲点 $\frac{3}{4}$	↗

また $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\left\{\left(\log x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} = \infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(\log\right.\right.$ [illegible] $\left.\left.\right)^2 - \frac{1}{4}\right\}$ [illegible]

以上から，この関数のグラフの概形[illegible]うになる．



[illegible]める[illegible]と，グラフの概形[illegible]

[illegible] $x)^2 - \log x\}\,dx$

$= $ [illegible] $\log x)^2 - 3x$ [illegible] $3x\Big]_1^e = \boldsymbol{3 - e}$

7.49 [illegible] $= 2\sqrt{}$[illegible] $\log t$ [illegible]

$$g'(t)\ \text{[illegible]}\ - \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{t}-1}{t}$$

したがって，[illegible]増減表は次のようになる．

[illegible]	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
[illegible]		$-$	0	$+$
[illegible]$)$		↘	0	↗

したがって $g(t) \geqq 0$ よって $\log t \leqq 2\sqrt{t} - 2$

(2) (1) の結果から，$t>1$ のとき

$$0<\log t<2\sqrt{t}-2 \quad \text{ゆえに} \quad 0<\frac{\log t}{t}<\frac{2}{\sqrt{t}}-\frac{2}{t}$$

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{t}}-\frac{2}{t}\right)=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{t\to+\infty}\frac{\log t}{t}=0}$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}x\log x$

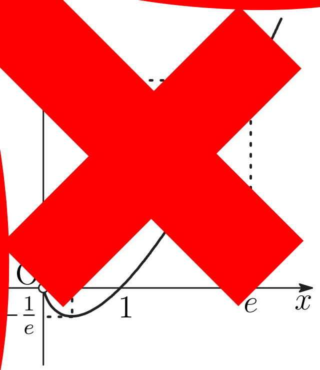
$\displaystyle=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}=\lim_{t\to+\infty}$ [illegible] $g\,t)$ [illegible]

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=\lim_{x\to+0}(\log x+1)=-\infty$ [illegible]

(4) $f'(x)=\log x+1$ より　$f''(x)$ [illegible]

x	0	$\cdots$	[illegible]	[illegible]
$f'(x)$		$-$	0	$+$
[illegible]		$+$	$+$	$+$
[illegible]		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

[illegible]フの[illegible]のようになる．



(5) [illegible]始関[illegible]$(x)=\dfrac{x^2}{4}(2\log x-1)$ とすると，面積 S は

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} [illegible] + \int_{1}^{e} f(x)\,d [illegible] \left[F(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[F(x)\right]_{1}^{e}$$

$$= [illegible]\ F\ [illegible]\ 2F(1 [illegible] \boldsymbol{\frac{3}{4e^2}+\frac{1}{2}}$$

7.50 (1) [illegible]を微分する[illegible]2 以上の自然数)

$$[illegible]\ nx^{n-1}\log 2x+x^n\cdot\frac{1}{x}=x^{n-1}(n\log 2x+1)$$

したがって，[illegible]の増減表は，次のようになる．

x	[illegible]	$\cdots$	$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{n}}}$ のとき極小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{en\cdot 2^n}}$

(2) $f'(x) = x^{n-1}(n\log 2x + 1)$ を微分すると

$$f''(x) = (n-1)x^{n-2}(n\log 2x + 1) + x^{n-1}\cdot\frac{n}{x}$$
$$= x^{n-2}\{n(n-1)\log 2x + (2n-1)\}$$

したがって　$x < \frac{1}{2}e^{\frac{1-2n}{n(n-1)}}$ のとき　$f''(x) < 0$,

$x > \frac{1}{2}e^{\frac{1-2n}{n(n-1)}}$ のとき　$f''(x) > 0$

よって，変曲点は　$\boldsymbol{\Bigl(\frac{1}{2}e^{\frac{1-2n}{n(n-1)}}}$ [illegible] $\boldsymbol{\frac{1-2n}{\ldots n-1)\ldots}}$ [illegible]

補足 関数 $y=f(x)$ が $f'(a)=0$ であっ[illegible]で $f'(x)$ の符号が変化しないと，$f(a)$ を極値と呼ばない．[illegible]0であっても $x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化しない[illegible]

(3) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x[illegible]

$x^n\log 2x = \log 2x$ より[illegible]$1)\log$[illegible]0[illegible]x[illegible]

$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ のとき $\log 2x \leqq$[illegible]$\log 2x$ であ[illegible]求める[illegible]

[illegible] $= \int_{\frac{1}{2}}^{1}(\log 2x - x^n\log 2x)dx$

[illegible]$\log 2x - 1) - \frac{x^{n+1}}{n+1}$[illegible]$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\Bigr]_{\frac{1}{2}}^{1}$

[illegible]$\boldsymbol{n+}$[illegible]$\boldsymbol{2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\ldots+1)^2}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}$

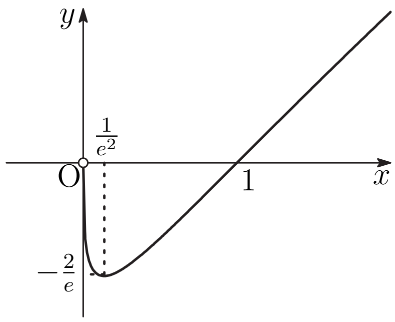
(3) の[illegible]ら[illegible]$\boldsymbol{= \log 2 -}$[illegible]

7.5[illegible]$\sqrt{x}$[illegible]

[illegible]$\frac{1}{\ldots\sqrt{x}}\log x$[illegible]$\frac{\ldots\log x + 2}{2\sqrt{x}}$

$f(x)$ の増減[illegible]のようになる．

x	(0)	[illegible]	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$
$f'(x)$		[illegible]	0	$+$
$f(x)$	(0)	[illegible]	$-\frac{2}{e}$	$\nearrow$



$x = \frac{1}{e^2}$ の[illegible]**小値** $-\frac{2}{e}$ をとる．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

グラフの概形は右の図のようになる．

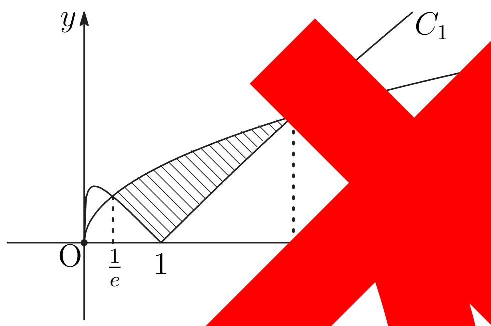
(2) $y=\sqrt{x}|\log x|$ と $y=\sqrt{x}$ から y を消去すると

$$\sqrt{x}\log x=\sqrt{x} \quad ゆえに \quad \sqrt{x}\,(|\log x|-1)=0$$

$x>0$ より　$|\log x|=1$　これを解いて　$x=\dfrac{1}{e},\ e$

よって，求める交点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{e},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)}$，$\boldsymbol{(e,\ \sqrt{e})}$

(3) 求める面積は下の図の斜線部分である．



したがって，求める面積[illegible]

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{x}\,dx-\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{\ }[illegible]x|[illegible]$$

[illegible]で，[illegible]の原始関数の 1 つを

$$F(x)=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\,\mathrm{lo}[illegible])$$

[illegible]と

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{\ }[illegible]\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{x}\,|[illegible]dx$$

$$[illegible]+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\sqrt{\ }[illegible]x-\int_{1}^{e}\sqrt{x}\,\log x\,dx$$

$$[illegible]2\left(e\sqrt{e}-[illegible]\right)[illegible]\Big[\,F(x)\,\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}-\Big[\,F(x)\,\Big]_{1}^{e}$$

$$[illegible]e\sqrt{e}-\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)+2F(1)-F\left(\frac{1}{e}\right)-F(e)$$

このとき，F[illegible]$-\dfrac{4}{9}$，$F\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{10}{9e\sqrt{e}}$，$F(e)=\dfrac{2}{9}e\sqrt{e}$ であるから

$$[illegible]\frac{\ }{3}\left(e\sqrt{e}-\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)+2\left(-\frac{4}{9}\right)-\left(-\frac{10}{9e\sqrt{e}}\right)-\frac{2}{9}e\sqrt{e}$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{9}\left(e\sqrt{e}+\frac{1}{e\sqrt{e}}-2\right)}$$

補足 まず，$0 < x \leqq 1$ のとき，$-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} < \log x$ を示す．

$g(x) = \log x + \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$ $(0 < x \leqq 1)$ とおくと

$$0 < x < 1 \text{ のとき} \quad g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x\sqrt[3]{x}} < 0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(1) = 3$ であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆ[illegible]} \quad \log x + \text{[illegible]}$$

よって　　$0 < x < 1$ のとき　$-$[illegible]

したがって　$0 < x < 1$ のとき　[illegible] < 0

$\lim\limits_{x \to +0}(-3\sqrt[6]{x}) = 0$ であるから [illegible]

$$\text{[illegible]}\lim_{x \to +0} \sqrt{x} \log x \text{ [illegible]}$$

7.52 (1) $\displaystyle\int$ [illegible] $= \displaystyle\int (x)' \log(ax)\, dx$

[illegible] $x(ax) - \displaystyle\int x \cdot \frac{1}{x}\, dx$

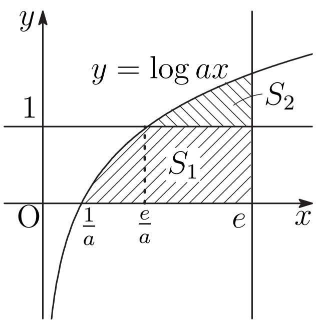
$=$ [illegible] $\boldsymbol{x) - x + C}$ $\quad$ (C [illegible] 定数)

(2) [illegible] $=$ lo[illegible] の共有点の x 座標は

[illegible] $= 1$ 　これ[illegible]て　$x = \dfrac{e}{a}$

[illegible]き，[illegible] e を満[illegible]よいので　$\boldsymbol{a > 1}$

(3) [illegible]図[illegible]



$S_1 =$ [illegible] $ax)\, dx + \left(e - \dfrac{e}{a}\right) \cdot 1$

$= \left[\text{[illegible]} ax) - x \right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}} + e - \dfrac{e}{a}$

$=$ [illegible] $a - \dfrac{e}{a}$

$$S_1 + S_2 = \int_{\frac{1}{a}}^{e} \log(ax)\, dx = \Big[\, x \log(ax) - x \,\Big]_{\frac{1}{a}}^{e} = e \log a + \frac{1}{a}$$

よって　$S = S_1 - S_2$

$$= 2S_1 - (S_1 + S_2)$$

$$= 2\left(e + \frac{1}{a} - \frac{e}{a}\right) - \left(e\log a + \frac{1}{a}\right)$$

$$= \boldsymbol{2e - \frac{2e-1}{a} - e\log a}$$

(4) (3) の結果から　$\dfrac{dS}{da} = \dfrac{2e-1}{a^2} - \dfrac{e}{a} = \dfrac{2e-1-ea}{a^2}$ [illegible]

したがって，S の増減表は，次[illegible]になる[illegible]

a	(1)	$\cdots$	$\frac{2e-1}{e}$	[illegible]
$\frac{dS}{da}$		$+$	0	[illegible]
S		$\nearrow$	極大	[illegible]

よって，$\boldsymbol{a = \dfrac{2e-1}{e}}$ のとき[illegible]$\boldsymbol{2e}$[illegible]g[illegible])をと[illegible]

7.53 (1) $f(x) = \dfrac{\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}$ より

$$[illegible]\frac{1}{[illegible]+1}\left\{\frac{1}{x+1} \times \sqrt{x+1} - [illegible]\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right\}$$

$$[illegible]\frac{[illegible]g(x+1)}{[illegible]1)^{\frac{3}{2}}}$$

[illegible]って[illegible]の[illegible]次のようになる．

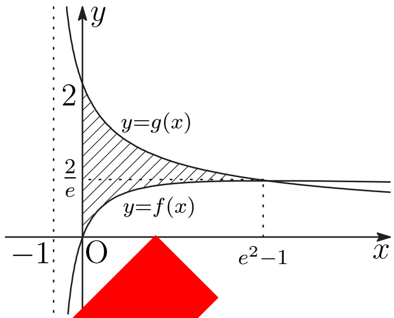
[illegible]	-1[illegible]	[illegible]	e^2-1	$\cdots$
[illegible](x)	[illegible]	[illegible]	0	$-$
$f($[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\frac{2}{e}$	[illegible]

[illegible]-1 のとき[illegible]$\boldsymbol{\dfrac{[illegible]}{e}}$

(2) $f(x)$[illegible]$g(x)$[illegible]$\log(x+1) = 2$

これを解いて[illegible]$e^2 - 1$　よって　$\boldsymbol{\left(e^2 - 1,\ \dfrac{2}{e}\right)}$

(3) $0 \leqq x \leqq e^2-1$ において，$g(x) \geqq f(x)$ であるから



$$S=\int_0^{e^2-1}\frac{2-\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

ここで，$t=\sqrt{x+1}$ とおくと

x	$0 \longrightarrow e^2-1$
t	$1 \longrightarrow \quad e$

$x=t^2-1,\quad \dfrac{dx}{dt}=2t$

よって　$S=\displaystyle\int_1^e \frac{2-\log t^2}{t}\,2t\,dt$ [illegible] $t)\,dt$

$=4\Big[t\,(2-\log t)\Big]_1^e$ [illegible]

7.54　(1) $f'(x)=\dfrac{1}{x},\quad g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{}}$ [illegible]

点Pの x 座標を p とする [illegible] $f(p)=g(p)$, [illegible] $=g'($ [illegible]

し [illegible] $a+\log p=\sqrt{p-1}\quad\cdots$①, [illegible] 1

[illegible] $-1\quad(p>1)$

[illegible] の式 [illegible] ると　$p^2=4(p-1)$ [illegible] えに　$(p-2)^2=0$

$p>$ [illegible] 意し [illegible] 2

[illegible] に注意 [illegible] 代入して　$\boldsymbol{a=1-\log 2}$

[illegible] って [illegible] 標は [illegible] $\mathbf{(2,\ 1)}$

点P [illegible] る接 [illegible] は $\dfrac{1}{2}$ であるか [illegible] 接線 l の方程式は

$y-1$ [illegible] ゆえに　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x}$

(2) $h($ [illegible] (x) [illegible] とおくと $(x \geqq 1)$

$h(x)=a+$ [illegible] $-\sqrt{x-1}$

$h'(x)=\dfrac{1}{x}$ [illegible] $x-1} = \dfrac{2\sqrt{x-1}-x}{2x\sqrt{x-1}}$

$= -\dfrac{(x-2)^2}{2x\sqrt{x-1}(2\sqrt{x-1}+x)}$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$-$
$h(x)$	a	$\searrow$	0	$\searrow$

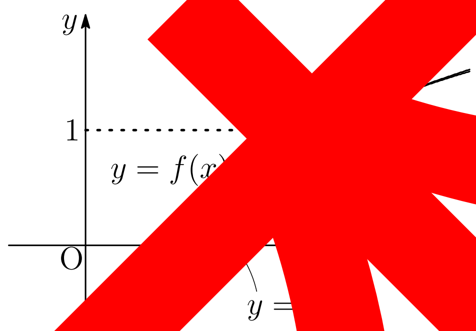
$h(x)=0$ の解は $x=2$ のみであり，2曲線は点P以外に共有点を持たない．

(3) 求める面積を S とすると，下の図から

$$S = \int_{\frac{2}{e}}^{2} (1 - \log 2 + \log x)\, dx - \int_{1}^{2} \sqrt{x-1}\, dx$$

$$= \Big[(1-\log 2)x + x\log x - x \Big]_{\frac{2}{e}}^{2} - \frac{2}{3}\Big[(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big]_{1}^{2}$$

$$= \Big[x\log x - x\log 2 \Big]_{\frac{2}{e}}^{2} - \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{e} - \frac{2}{3}}$$



7.55 (1) $g(x) =$ [illegible]$(1+x) - \left(x - \frac{[illegible]}{2}\right)$ とおくと [illegible]

[illegible] $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x =$ [illegible]

[illegible]$) = 0$ [illegible] $x > 0$ において [illegible] > 0

よ[illegible]すべ[illegible]対して $x - \dfrac{[illegible]}{2} < \log(1+x)$

[illegible]$x) =$ [illegible] $\dfrac{[illegible]}{3}$ − lo[illegible]) を微分す[illegible]

[illegible] $\dfrac{2}{3}x$ [illegible] $= \dfrac{x(1-2x)}{3(1+x)}$

[illegible]が[illegible]$x)$ の $0 \leqq$ [illegible]る増減表は次のようになる．

x	[illegible]	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	[illegible]	$\nearrow$	$\frac{5}{12} - \log\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{2}{3} - \log 3$

$1.09 < \log 3$ [illegible] $\dfrac{2}{3} < 1.09 < \log 3$ であるから $\dfrac{2}{3} - \log 3 < 0$

よって $x = \dfrac{[illegible]}{2}$ のとき **最大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{12} - \log\dfrac{3}{2}}$

$x = 2$ のとき **最小値** $\boldsymbol{\dfrac{2}{3} - \log 3}$

(3)　(2) の増減表により，$0 < x < \frac{1}{2}$ において　$f(x) > 0$

$\frac{1}{2} < x < 2$ において，$f(x)$ は単調減少で，$f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$，$f(2) < 0$

したがって，$\frac{1}{2} < x < 2$ において，$f(x) = 0$ となる x が唯一存在する．

よって，方程式 $x - \frac{x^3}{3} = \log(1+x)$ は $0 < x < 2$ に解[illegible]つだけもつ．

(4)　(3) の結果から

$0 < x < \alpha$ において　[illegible] lo[illegible]

$\alpha < x < 2$ において　$x -$ [illegible]

したがって

$$S = \int_0^\alpha \left\{\left(x - \text{[illegible]}\right) - \log(1+ \text{[illegible]}\right\} dx = \text{[illegible]}$$

$$T = \int_\alpha^2 \left\{\log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{3}\right) \text{[illegible]}\right\} = - \text{[illegible]}$$

[illegible]の 2 式[illegible]

$$T = \text{[illegible]} \int^2 f(x)\,dx = \int_0 f(x)\,dx$$

$$\text{[illegible]} \int_0^2 \left\{ \text{[illegible]} - \log(1+ \text{[illegible]}\right.$$

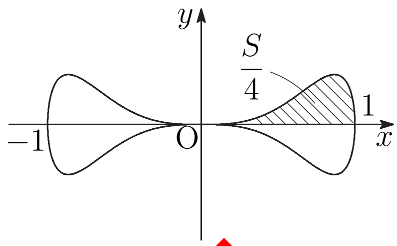
$$\text{[illegible]}(1+x)\text{[illegible]}x) + x \Big]_0^2$$

$$\text{[illegible]} 8 \text{[illegible]} - 3\log 3 \text{[illegible]} g\,3 - 1) = \frac{1}{9}\{1 - 27(\log 3 - 1)\}$$

$\log 3$ [illegible] $1 > 0$ [illegible]あるから　$-27(\log 3 - 1) < -27 \times 0.09 = -2.43$

ゆえに　$1 -$ [illegible] $3 - 1) < -1.43 < 0$　よって　$\boldsymbol{S < T}$

7.56 曲線 $y^2 = x^6(1-x^2)$ は，x 軸および y 軸に関して対称である．$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ において



$$y = x^3\sqrt{1-x^2}$$

よって，求める面積を S とすると

$$\frac{S}{4} = \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \{-x(1-\text{[illegible]}\}\sqrt{1-\text{[illegible]}}$$

$$= \int_0^1 \{-x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\text{[illegible]}$$

$$= \left[\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\text{[illegible]}\right.$$

よって　　$S = \mathbf{\dfrac{8}{15}}$

7.57 (1) $\dfrac{x^2}{\text{[illegible]}\sqrt{x^2+9}} = a\sqrt{x^2+9} + \dfrac{b}{\sqrt{x^2\text{[illegible]}}}$

[illegible]の両[illegible][illegible]^2+9} を掛けると

$$x^2 = a(x^2+9\text{[illegible]}$$

$$= ax^2 + 9a + b$$

[illegible]の同[illegible]の項の[illegible]比較し[illegible]

$1 = \text{[illegible]} = 9a + b$　よっ[illegible]$\boldsymbol{= 1,\ b = -9}$

$I_1 = \text{[illegible]})\sqrt{\text{[illegible]}}$

$$\text{[illegible]}^2+9\Big]_0^3 - \int_0 \text{[illegible]}x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

$$= 9\text{[illegible]}\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

$$= \text{[illegible]} - \int_0^3 \left(\sqrt{x^2+9} - \frac{9}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx$$

$$= 9\sqrt{2} - I_1 + 9I_2$$

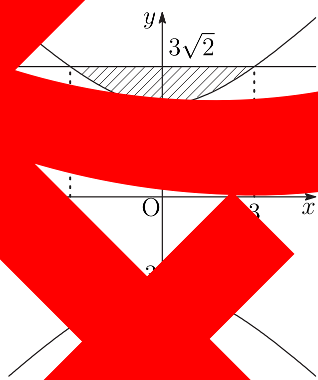
よって　　$\boldsymbol{I_1 = \dfrac{9}{2}I_2 + \dfrac{9\sqrt{2}}{2}}$

(3) $\dfrac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2+9}) = \dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}}{x+\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$ であるから

$$I_2 = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx$$
$$= \Big[\ \log(x+\sqrt{x^2+9})\ \Big]_0^3$$
$$= \log(3+3\sqrt{2}) - \log 3 = \mathbf{log(1}$$ [illegible]

(4) $x^2-y^2=-9$ から

$$y = \pm\sqrt{x^2+9}$$



ゆえに，$y=\sqrt{x^2+9}$ と $y=3\sqrt{2}$ [illegible]
部分が求める面積である．
この 2 つの関数のグラフの [illegible] x 座 [illegible]

$\sqrt{x^2+9} = 3\sqrt{2}$　これ [illegible] いて　$x=$ [illegible]

求め [illegible] は，(2)，(3) を用いて

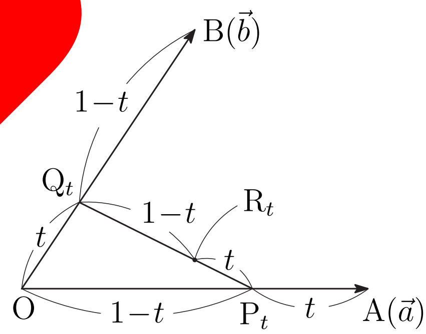
[illegible] $\sqrt{2}-\sqrt{x^2+9})dx = 2$ [illegible] $\sqrt{2}-\sqrt{x^2+9})dx$

$= 2$ [illegible] $- 2I_1 = 18\sqrt{2} - 2\left(\frac{[illegible]}{2}I_2 + \frac{9\sqrt{2}}{2}\right)$

[illegible] $\sqrt{2} -$ [illegible] $\mathbf{\sqrt{2} -}$ [illegible] $\mathbf{+\sqrt{2})}$

[illegible] $= \mathbf{(1}$ [illegible] $\boldsymbol{t\vec{b}}$

[illegible] がって



[illegible] $)\vec{p}_t + t\vec{q}_t$

$= ($ [illegible] $(1-t)\vec{a} + t\cdot t\vec{b}$

$= \mathbf{(1}$ [illegible] $\boldsymbol{\vec{a} + t^2\vec{b}}$

(2) (1) の結果か [illegible]

$$\vec{r}_t = ([illegible]-t)^2\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)^2a_1 + t^2b_1 \\ (1-t)^2a_2 + t^2b_2 \end{pmatrix}$$

よって　$\mathbf{R}_t\boldsymbol{((1-t)^2a_1+t^2b_1,\ (1-t)^2a_2+t^2b_2)}$

(3) (1) の結果から

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_t = -2(1-t)\vec{a}+2t\vec{b} = -2\vec{p}_t+2\vec{q}_t = 2(\vec{q}_t-\vec{p}_t) = 2\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t}$$

よって，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ は点 R_t で曲線 S と接する．

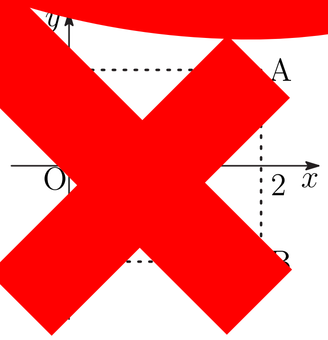
(4) A(2, 1)，B(2, −1) のとき，(2) の結果から

$$\vec{r}_t = (1-t)^2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \text{[illegible]}\\ \text{[illegible]} 2t\end{pmatrix}$$

R_t の座標を $(x,\ y)$ とすると　$x =$ [illegible] $= 1-2t$　$(0 \leqq t \leqq 1)$

したがって，S の方程式は　$x = y$[illegible]

求める面積は，右の図の斜線部分[illegible]

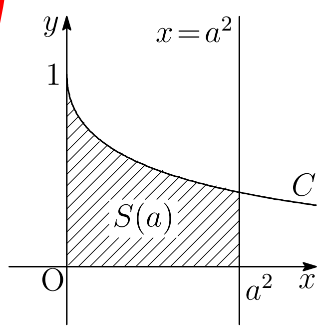


$$2\int_0^1 \{(y^2+1) \text{[illegible]}\}\,dy$$

$$=2\int_0^1 (y-1)^2\,d\text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}\left[\frac{1}{\text{[illegible]}}(y-1)^3\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

7 [illegible] C : [illegible] $= e^{-t}$ [illegible] り，$y \geqq 0$ であるから



$$\text{[illegible]}\int_0^{a^2}\text{[illegible]}\int_0^a e^{-t}\frac{dx}{dt}d\text{[illegible]}$$

$$2\int_0^a t\text{[illegible]}$$

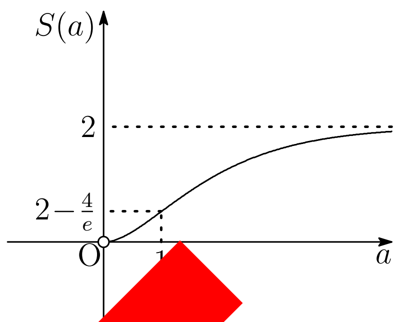
$$2\Big[(t+1)e\text{[illegible]}\Big]$$

$$\text{[illegible]}\boldsymbol{(a+1)e^{-a}+2}$$

(2) $S'(a)=2ae^{-a}$，$S''(a)=2(1-a)e^{-a}$

$S(a)$ の増減，凹凸は下の表のようになる．

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(a)$		$+$	$+$	$+$
$S''(a)$		$+$	0	$-$
$S(a)$	0	↗	変曲点	↗



また，$\lim_{a\to\infty}(a+1)e^{-a}=0$ であるから

$$\lim_{a\to\infty}S(a)=2$$

よって，$S(a)$ のグラフは，右の図の…

(3) $\frac{5}{2}<e<3$ であるから

$$S(2)=2(1-3e^{-2})=2\left(1-\frac{3}{e^2}\right)<2\cdots\frac{\cdots}{3^2}\cdots 1$$

$$S(3)=2(1-4e^{-3})=2\left(1-\frac{4}{e^3}\right)>2\cdots\left(\frac{2}{5}\right)\cdots 1.35$$

… $S(2)<1.35<S(3)$

…って，…理により，$S(a)=1.$…たす a が $2<a<3$ の範囲に…る．

(1) … $\frac{2e}{t}+\cdots$ …を…ると $\left(\frac{e}{2}\leqq t\leqq 2e\right)$

$$f'(t)\cdots+\frac{2}{e}=\frac{2(t^2\cdots}{e\cdots}=\frac{2(t+e)(t-e)}{et^2}$$

…がって…の増…のようになる．

t	$\frac{e}{2}$	$\cdots$	e	$\cdots$	$2e$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	-1	↗	0

$g(t)=4\log t$ … **増加．**

(2) $f(\alpha)=f(\beta)$ …

$$\frac{2e}{\alpha}+\frac{2\alpha}{e}-5=\frac{2e}{\beta}+\frac{2\beta}{e}-5 \quad ゆえに \quad (\alpha-\beta)(\alpha\beta-e^2)=0$$

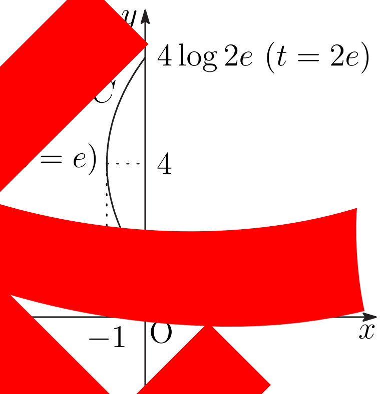
$\alpha\neq\beta$ より　　$\boldsymbol{\alpha\beta=e^2}$

(3) (2) の α，β について

$$\frac{g(\alpha)+g(\beta)}{2} = \frac{4\log\alpha+4\log\beta}{2} = 2\log\alpha\beta = 2\log e^2 = 4$$

よって　**曲線 C は直線 $y=4$ に関して対称．**

(4) 求める面積を S とすると



$$\frac{S}{2} = \int_{-1}^{0}(y-4)\,dx = \int_{e}^{2e}\{g(t)-4\}f'(t)\,dt$$

$$= \Big[\,\{g(t)-4\}f(t)\,\Big]_e^{2e} - \int_e^{2\text{[illegible]}} \text{[illegible]}\,dt$$

$$= -\int_e^{2e}\frac{4}{t}\left(\frac{2e}{t}+\frac{2t}{e}-5\right)dt$$

$$= -4\int_e^{2e}\left(\frac{2e}{t^2}+\frac{2}{e}-\frac{5}{t}\right)d\text{[illegible]}$$

$$= -4\Big[-\frac{2e}{t}+\frac{2t}{e}-5\text{[illegible]}\Big]_e\text{[illegible]} = 20\log\text{[illegible]}$$

よっ[illegible] **$S = 40\log 2 - 24$**

補足 [illegible] $= -\int_e^{2e} f(t)g'(t)\,dt$ と[illegible]もよ[illegible]．

7.6 [illegible] $f(\theta)$ [illegible] $r(\theta)$ [illegible] **$\sqrt{2\cos 2\theta}\ \cos\theta$**

$y =$ [illegible] θ [illegible] **$\text{[illegible]}s\,2\theta\ \sin\theta$**

[illegible]) の結[illegible]ら

[illegible] $\text{[illegible]}os\,2\theta\sin^2\theta$ [illegible] $-\,2\sin^2\theta)\sin^2\theta$

[illegible] $\theta \leqq \pi$ [illegible] $t=\sin$[illegible] $\theta)\}^2$ とおくと

$h($[illegible]$(1-2t)t = -4\left(t-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\quad\left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}\right)$

したがって，[illegible]の最大値は　$h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

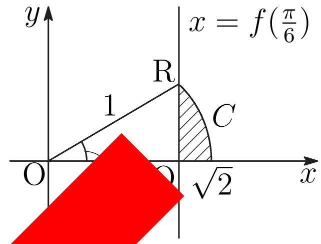
$g(\theta) \geqq 0$ で[illegible]ら，$h(t)$ が最大のとき，$g(\theta)$ は最大となる．

よって，$g(\theta)$ の最大値は

$$t = \frac{1}{4}\quad すなわち\quad \theta = \frac{\pi}{6}\ のとき，最大値\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(3) $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき　$r\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2\cos\frac{\pi}{3}} = 1$

右の図において



$$\mathrm{OR} = r\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{OR}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{RQ} = \mathrm{OR}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

求める面積を S とすると，図の[illegible]で[illegible]

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \{r(\theta)\}^2 \text{[illegible]}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{[illegible]}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\text{[illegible]}2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{2}\text{[illegible]} = \text{[illegible]}\mathbf{8}$$

7.62 (1) x [illegible] $y = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ より　$y + x =$ [illegible] e^{-t}

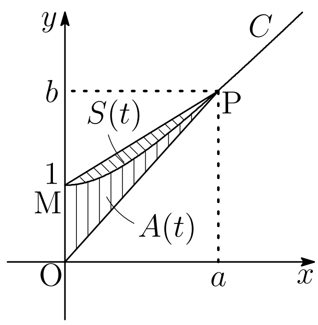
[illegible]に[illegible]$- x) = e^t{\cdot}e^{-t}$　した[illegible]　$y^2 - x^2 = 1$

$y >$ [illegible]るか[illegible] $= \boldsymbol{\sqrt{x^2+1}}$

(2) [illegible]) とす[illegible]区[illegible]における曲線 C

[illegible]よび直[illegible] : y [illegible]について，[illegible]結

果[illegible] $= \sqrt{}$[illegible]あるから



[illegible] $\sqrt{x^2+1}$ [illegible] a

[illegible] $\frac{(a^2 - x^2)}{\text{[illegible]}\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{a^2+1})} \geqq 0$

したがって

$$A(t) = \int_0^a \left(\sqrt{x^2+1} - \frac{b}{a}x \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1} + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \frac{b}{a}x^2 \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ a\sqrt{a^2+1} + \log(a+\sqrt{a^2+1}) - a [illegible]$$

$$= \frac{1}{2}\{ab + \log(a+b) - ab\} = \frac{1}{2}\mathrm{lo}[illegible]$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{e^t - [illegible]}{2} [illegible] + e^{-t} [illegible]\right)$$

$A(t) + S(t) = \dfrac{1}{2}a$ であるから　$S(t)$ [illegible]

(3)　$f(t) = A(t) - S(t)$ とおくと [illegible]

ゆえに　$f'(t) = 1 - \dfrac{e^t + [illegible]}{[illegible]} [illegible] \dfrac{e^{-t}}{4}(e^{2t} [illegible] + 1)$ [illegible]

$f'(t) =$ [illegible] を解くと $(t \geqq 0)$

[illegible] $(2+\sqrt{3})$

[illegible] と，[illegible] 減表により

t	0	[illegible]	log([illegible]	[illegible]
$f'(t)$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$f(t)$	[illegible]	[illegible]	[illegible] 大	[illegible]

[illegible] $\sqrt{3})$ **で最大**

7　(1)　P [illegible] を通 [illegible] $= 0$，$y(t) = 0$ より

$\begin{cases} \mathrm{c} [illegible] \frac{\pi}{4}) = [illegible] \\ [illegible] t) = 0 [illegible] \end{cases}$ $(0 \leqq t <$ [illegible] これを解いて　$t = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

x' [illegible] $-\sin($ [illegible] $= -2\sin$ [illegible] $)$

$\begin{cases} x' ([illegible] \\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) [illegible] \end{cases}$ [illegible] および　$\begin{cases} x'\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 1 \\ y'\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -2 \end{cases}$

求め [illegible] 速度 [illegible] は　$\boldsymbol{t = \frac{\pi}{4}}$ **のとき** $\boldsymbol{(-1, -2)}$，$\boldsymbol{t = \frac{5}{4}\pi}$ **のとき** $\boldsymbol{(1, -2)}$

(2)　$t = t_1$ $(0 \leqq t_1$ [illegible] $)$ における C 上の点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ と x 軸および y 軸に関して対称な点 [illegible] れぞれ $\mathrm{Q}(x_1, -y_1)$，$\mathrm{R}(-x_1,\ y_1)$ とすると

$$x_1 = \cos\left(t_1 + \tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left\{\left(\tfrac{3}{2}\pi - t_1\right) + \tfrac{\pi}{4}\right\}$$

$$-y_1 = -\cos 2t_1 = \cos 2\left(\tfrac{3}{2}\pi - t_1\right)$$

$$-x_1 = -\cos\left(t_1 + \tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left\{(t_1 + \pi) + \tfrac{\pi}{4}\right\}$$

$$y_1 = \cos 2t_1 = \cos 2\left(t_1 + \pi\right)$$

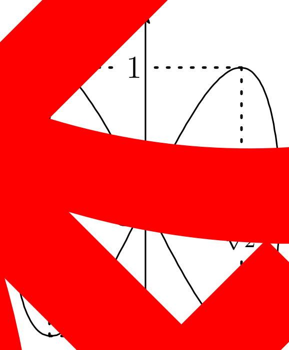
したがって，Q は $0 \leqq t_1 \leqq \frac{3}{2}\pi$ のとき，$t = \frac{3}{2}\pi - t_1$ における C 上の点であり，$\frac{3}{2}\pi < t_1 < 2\pi$ のとき $t = \frac{7}{2}\pi - t_1$ における C 上の点である．
また，R は $0 \leqq t_1 < \pi$ のとき，$t = t_1 + \pi$ における C 上の点であり，$\pi \leqq t_1 < 2\pi$ のとき $t = t_1 - \pi$ における C 上の点である．

(3) $x = \cos(t + \frac{\pi}{4})$，$y = \cos(2t)$ とおくと

$$y = \cos 2t = \sin 2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \text{[illegible]} 2x\sqrt{1 - x^2}$$

$y = 2x\sqrt{1 - x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ のとき[illegible]

$$y' = \frac{2(1 - 2x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$$



増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	[illegible]
y'		$+$	0	$-$	[illegible]
y	0	$\nearrow$	1	[illegible]	[illegible]

(2) の[illegible]から，C の概形は右の図のよう[illegible]．

(4) [illegible]面[illegible] $S = 4\int_0^1 2x\sqrt{1 - x^2}\,dx$ [illegible] $- x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1$ [illegible] $\mathbf{3}$

[illegible]2) は，[illegible]P の位置を調べると[illegible] Q，R の取り方がわかる．

(1) O[illegible] OP [illegible]向きとなす角が θ であるから

[illegible] $\mathbf{(2\cos}$[illegible]$\mathbf{in\,\theta)}$

線分[illegible]P の延[illegible]の交点を Q$'$[illegible]と，直線 l と PQ$'$ のなす角は θ[illegible]，$\angle$O[illegible]るから

$$\alpha \text{ [illegible] } = \theta + \theta = \mathbf{2\theta}$$

P[illegible]ら $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$

したがって [illegible] $= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PR}}$
$= (2\cos\theta,\ 2\sin\theta) + (2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$
$= (2\cos\theta + 2\cos 2\theta,\ 2\sin\theta + 2\sin 2\theta)$

よって [illegible]$\mathbf{os\,\theta + 2\cos 2\theta,\ 2\sin\theta + 2\sin 2\theta)}$

(3) R$(x,\ y)$ とすると，(2) の結果から

$$y = 2\sin\theta + 2\sin 2\theta = 4\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において，$y=0$ を解くと　$\theta = 0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi$

これらの θ の値を順次，(2) の結果に代入すると

$$(4,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (0,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (4,\ 0)$$

よって，求める x 軸との共有点の座標は

$$\mathbf{(4,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (0,\ 0)}$$

(4) (3) と同様に，(2) の結果から [illegible]

$x = 2\cos\theta + 2\cos$ [illegible] θ

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において，$y=0$ を [illegible] π

よって，これらの θ の値を [illegible] (2) の結 [illegible] 代入 [illegible]

$\mathbf{(0,\ 2}$ [illegible] $\mathbf{),\ (0,\ 0),}$ [illegible] $\mathbf{\sqrt{3})}$

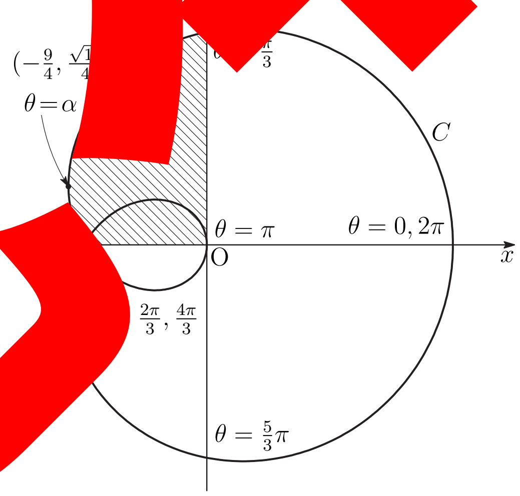
(5) (2 [illegible]

$x = 2$ [illegible] $\cos 2\theta$

[illegible] θ [illegible] $^2\theta - 1)$

[illegible] $4\cos^2$ [illegible]

$=$ [illegible] $\theta + \dfrac{1}{}$ [illegible] $\dfrac{}{4}$



点 [illegible] x 座標 [illegible] とき

[illegible] $\theta = -\dfrac{1}{4}$

この [illegible] き　$\sin$ [illegible] $\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos 2\theta = -\dfrac{7}{8}$，$\sin 2\theta = \mp\dfrac{\sqrt{15}}{8}$　(複号同順)

よって，求め [illegible] 標は　$\left(-\dfrac{9}{4},\ \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$

(6) よって，求める面積を S とすると

$$S = \int_{-2}^{0} y\,dx = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin\theta + 2\sin 2\theta)(2\cos\theta + 2\cos 2\theta)'\,d\theta$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin\theta + \sin 2\theta)(\sin\theta + 2\sin 2\theta)\,d\theta$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin^2\theta + 3\sin\theta\,\mathrm{s}\text{[illegible]}\sin^2\text{[illegible]}$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 3\times \frac{\cos\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (6 + 6\cos\theta - 2\text{[illegible]})\,d\theta$$

$$= \Big[\,6\theta + 6\sin\theta - \text{[illegible]} - 2\sin 3\theta - \text{[illegible]}\theta\,\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\text{[illegible]}}$$

補足 [illegible] $\int_{-\frac{9}{4}}$ [illegible] $\int^{-2} y\,dx = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta -$ [illegible] $\frac{dx}{d\theta} = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$

長崎大 [illegible] 09 [illegible][2]

(1) [illegible] P の [illegible] なす角は，$\frac{3}{2}\pi - \theta$ であるから

$$\text{[illegible]} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \end{pmatrix} \text{[illegible]} \begin{pmatrix} -2\sin\theta \\ -2\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\text{[illegible]} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \text{[illegible]} \begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\sin\theta \\ -2\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta - 2\sin\theta \\ 1 - 2\cos\theta \end{pmatrix}$$

よっ[illegible] $\boldsymbol{x}$ [illegible] $\boldsymbol{-\,2\sin\theta}$, $\boldsymbol{y = 1 - 2\cos\theta}$

(2) (1) の結果か[illegible] $= 1 - 2\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = 2\sin\theta$

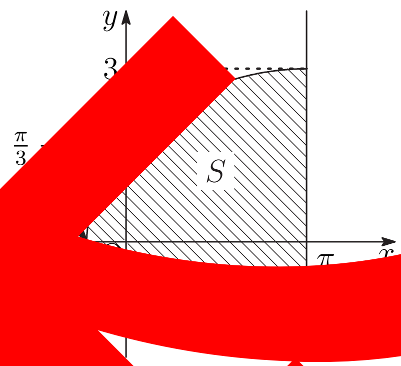
θ	[illegible]	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
[illegible]		$-$	0	$+$	
x	0	$\searrow$	極小 $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$	$\nearrow$	π

θ	0	$\cdots$	π
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	
y	-1	$\nearrow$	3

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2009.pdf

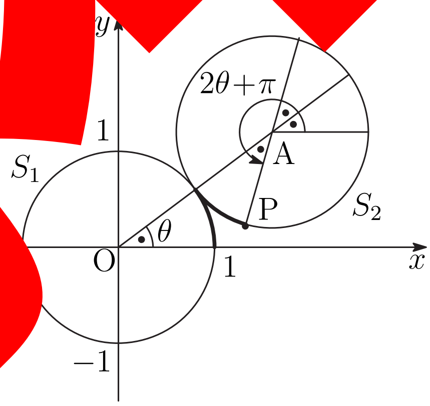
x 座標が最小となる点は $\left(\boldsymbol{\frac{\pi}{3} - \sqrt{3},\ 0}\right)$ $(\theta = \frac{\pi}{3})$
x 座標が最大となる点は $\boldsymbol{(\pi,\ 3)}$ $(\theta = \pi)$
y 座標が最小となる点は $\boldsymbol{(0, -1)}$ $(\theta = 0)$
y 座標が最大となる点は $\boldsymbol{(\pi,\ 3)}$ $(\theta = \pi)$

(3) 求める面積は，右の図の斜線部分で，その面積を S とすると



$$S = \int_{-1}^{3} (\pi - x)dy$$
$$= \int_0^{\pi} \{\pi - (\theta - 2\sin\theta)\}\cdot 2\sin\theta\, d \text{[illegible]}$$
$$= 2\int_0^{\pi} (\pi \sin\theta - \theta\sin\theta + 2\sin^2 \text{[illegible]}$$
$$= 2\int_0^{\pi} (\pi \sin\theta - \theta\sin\theta + \text{[illegible]}\theta)\, d\text{[illegible]}$$
$$= 2\Big[-\pi\cos\theta + \theta\cos\text{[illegible]}\theta + \theta - \frac{1}{2}\text{[illegible]}\Big]_0^{\pi}$$
$$= \text{[illegible]} = \boldsymbol{4\pi}$$

7.66 (1) [illegible]



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ [illegible]
[illegible] $(\cos(2$ [illegible] $\theta + \pi))$
$= (-$ [illegible] $, -\sin$ [illegible]

した [illegible]

$= \overrightarrow{\mathrm{O}}$ [illegible]

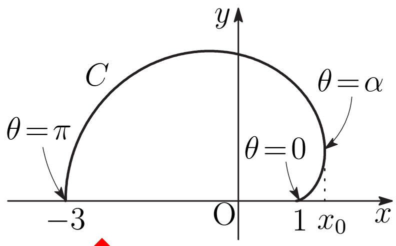
[illegible] $\cos 2\theta,\ 2$ [illegible] $2\theta)$

よ [illegible] $\boldsymbol{x}($ [illegible] $\boldsymbol{\cos\theta - \cos 2\theta,\ \ y(\theta) = 2\sin\theta - \sin 2\theta}$

(2) $x(2\pi$ [illegible] $2\cos(2\pi - \theta) - \cos 2(2\pi - \theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta = x(\theta)$
$y(2\pi$ [illegible] $2\sin(2\pi - \theta) - \sin 2(2\pi - \theta) = -2\sin\theta + \sin 2\theta = -y(\theta)$

よって，C [illegible] 関して対称である．

(3) C の x 軸の上側の部分の面積を T とすると



$$T=\int_{-3}^{1} y\,dx=\int_{\pi}^{0} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$
$$=\int_{\pi}^{0}(2\sin\theta-\sin 2\theta)(2\cos\theta-\cos 2\theta)'\,d\theta$$
$$=\int_{0}^{\pi}(2\sin\theta-\sin 2\theta)(2\sin\theta-2\sin 2\theta)\,d\theta$$
$$=\int_{0}^{\pi}(4\sin^2\theta-6\sin 2\theta\sin\theta+ \text{[illegible]}\mathrm{in}^2 2\theta)\,d\theta$$
$$=\int_{0}^{\pi}\{2(1-\cos 2\theta)+3(\cos 3\theta \text{ [illegible] } \mathrm{os}\,4\theta)\}\,d\theta$$
$$=3\pi$$

よって，求める面積を S とする[illegible] $3\pi-\pi=$ [illegible]

補足 C の x が，$\theta=\alpha$ で最大値[illegible]ると

$$T=\int_{-3}^{x_0} y\,dx - \text{[illegible]}\int_{1} y\,dx$$
$$\text{[illegible]}\int_{\pi}^{\alpha} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta-\int_{0}^{\alpha} y(\theta)\text{[illegible]}$$
$$\text{[illegible]}(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta+\int_{\alpha}^{0} y(\theta)\text{[illegible]}\int_{\pi}^{0} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

(1) [illegible] $\sqrt{5-}$ [illegible] 1) とおくと　$g(x)>0$

[illegible] $x)\}^2$ [illegible] x^2 を[illegible]ると

[illegible] $2g(x)$ [illegible] $0x$　ゆえに　[illegible] $'(x)=-5x$　$\cdots$ ①

[illegible]に，① [illegible]分する[illegible]

[illegible] $)g''(x)=-$ [illegible] ゆえに　$g''(x)=-\dfrac{5+\{g'(x)\}^2}{g(x)}<0$

$f(x)=2x+$ [illegible] あるから　　$f''(x)=g''(x)<0$

したがって，[illegible] $C: y=f(x)$ は上に凸である．

① より $g'($ [illegible] $\dfrac{5x}{g(x)}$ であるから　$f'(x)=2-\dfrac{5x}{g(x)}=\dfrac{2g(x)-5x}{g(x)}$

$f'(x)=0$ のとき　　$2g(x)=5x>0$

両辺を平方すると　$\{2\sqrt{5-5x^2}\}^2=25x^2$　　$x>0$ より　$x=\dfrac{2}{3}$

$f''(x) < 0$ であるから　最大値 $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 2 \times \dfrac{2}{3} + \sqrt{5 - 5\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \mathbf{3}$

(2) C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ 2x + g(x))$，$h(x) = \mathrm{OP}^2$ とすると $(-1 < x < 1)$

$$h(x) = x^2 + \{2x + g(x)\}^2$$
$$= x^2 + 4x^2 + 4xg(x) + \{g(x)\}^2 = 5 + 4xg(x)$$

これを微分すると

$$h'(x) = 4g(x) + 4xg'(x) = [illegible](x) + 4x\cdot\frac{-5[illegible]}{[illegible]}$$

$$= 4\cdot\frac{\{g(x)\}^2 - 5x^2}{g(x)} = [illegible] = \frac{20(1 - 2x^2)}{g(x)}$$

$h(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	(1)
$h'(x)$		$-$	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
$h(x)$	(5)	$\searrow$	$5-$[illegible]	$\nearrow$	$5+$[illegible]	$\searrow$	[illegible]

P が x [illegible] $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，原点 O との距離が最[illegible]なり，

x [illegible]き，原点 O との距離が最小[illegible]

[illegible] $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ [illegible]あるから

$$f\left(\frac{1}{[illegible]}\right) = [illegible]\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{[illegible]} + \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$$

$$[illegible]\frac{}{\sqrt{2}}\Big) [illegible] + g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) [illegible] \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$$

[illegible]て [illegible] $\mathbf{2}$, [illegible] $\mathbf{\sqrt{2}}\Big)$ [illegible] $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}{2}\right)$

(3) ta[illegible] $\dfrac{g(x)}{x}$ とおいて，これを x で微分すると

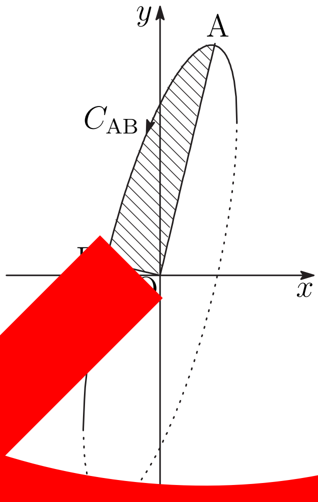
$$[illegible]\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{g'(x)}{x} - \frac{g(x)}{x^2}$$

$$[illegible]\tan^2\theta)\frac{d\theta}{dx} = -\frac{5}{g(x)} - \frac{g(x)}{x^2}$$

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\frac{d\theta}{dx} = -\frac{5x^2 + (5 - 5x^2)}{x^2 g(x)}$$

$$r^2\frac{d\theta}{dx} = -\frac{5}{g(x)} \qquad (r^2 = x^2 + y^2)$$

C 上の A から B への経路を C_{AB}，求める面積を S とすると



$$S = \frac{1}{2}\int_{C_{\mathrm{AB}}} r^2\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{5}{g(x)}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{5}{\sqrt{5-5\,[illegible]}}\,dx$$

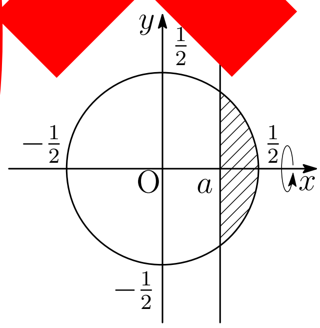
$$= \sqrt{5}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$x = \sin\varphi$ とおくと $\dfrac{dx}{\sqrt{1-[illegible]}}$ [illegible] $\frac{1}{\sqrt{2}}$ [illegible] $\frac{\pi}{4}$

よって　$S = \sqrt{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi$ [illegible] $\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{4}\pi}$

7.68　(1) 原[illegible]る半径 $\frac{1}{2}$ の円

[illegible] $y^2 = \frac{1}{4}$



[illegible] $\leqq x \leqq \frac{1}{2}$ [illegible] 軸の[illegible]に回転させた図形[illegible]体積で[illegible]から，[illegible]体積を V [illegible]と

$$V [illegible]\,dx = \pi\int^{\frac{1}{2}} [illegible]\, x^2\Big)\,dx$$

$$= \pi\Big[\frac{1}{4}x\ [illegible]\ \Big(\boldsymbol{\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a + \frac{1}{12}}\Big)\boldsymbol{\pi}$$

(2) 立方[illegible]ABC[illegible]H を空間の立体として，H(0, 0, 0)，E(1, 0, 0)，G(0, 1, 0)，D(0, 0, 1) と[illegible]

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = [illegible]1,\ 1,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AF}} = (0,\ 1, -1),\quad \overrightarrow{\mathrm{HB}} = (1,\ 1,\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}} =$ [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{HB}} = 0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ は，平面 ACF に垂直である．この立方体の内接円の中心を O とし，$\mathrm{O}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ から平面 ACF 引いた垂線を OT とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = k\overrightarrow{\mathrm{HB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} + t\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

であるから (k，s，t は実数)

$$k(1,\ 1,\ 1)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)+s(-1,\ 1,\ 0)+t(0,\ 1,-1)$$

したがって　$k=\frac{1}{2}-s=-\frac{1}{2}+s+t=\frac{1}{2}-t$　ゆえに　$k=\frac{1}{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{OT}}|=\frac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|=\frac{1}{6}\sqrt{1^2+[illegible]}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

三角錐 ABCF と内接円の共通部[illegible]体積を V_1 [illegible]

(1) の結果に $a=\frac{\sqrt{3}}{6}$ を代入して [illegible]

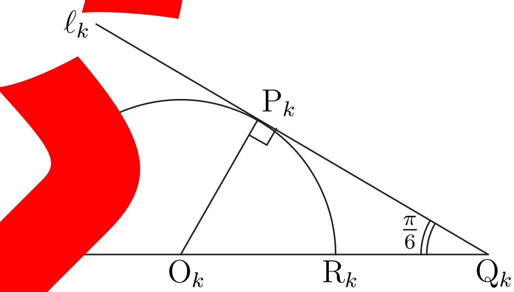
$$V_1=\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{6}}{[illegible]}\right)[illegible]\right\}[illegible]$$

よって，求める体積 V は [illegible] $\frac{[illegible]}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)$ [illegible] $V_1=$ [illegible]

7.69 (1) 球 x^2 [illegible] $z^2=1$ の $z\geqq0$ の部分の平面 [illegible] ($-$[illegible]る断面の [illegible] 中心 $\mathrm{O}_k(k,\ 0,\ 0)$，半径 $\sqrt{[illegible]}$

$$[illegible]+z^2=1-k^2\ (-1<[illegible]\ z\geqq0$$

この [illegible] と C_k [illegible] の点を [illegible] $\sqrt{1-[illegible]}$ [illegible]する [illegible]ベクトルが (0 [illegible] -1) で [illegible]接する直線を [illegible] し，ℓ_k の接点を P_k [illegible] xy 平 [illegible] 点を Q_k [illegible] ると



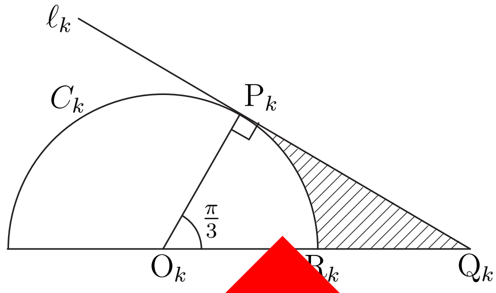
$$\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k=\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k=\sqrt{1-k^2}$$
$$\mathrm{O}_k\mathrm{Q}_k=2\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k=2\sqrt{1-k^2}$$

よって　$\boldsymbol{\sqrt{[illegible]^2}\leqq y\leqq 2\sqrt{1-k^2}}$

(2) (1) の結果 [illegible] $\mathrm{R}_k\mathrm{Q}_k=\mathrm{O}_k\mathrm{Q}_k-\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k=\sqrt{1-k^2}$

よって　$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-k^2}\,dk=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

(3) 右の図の斜線部分の面積は



$$\frac{1}{2}\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k\cdot\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k-\frac{1}{2}\mathrm{O}_k{\mathrm{R}_k}^2\cdot\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-k^2)-\frac{\pi}{6}(1-k^2)$$
$$=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}(1-k^2)$$

よって，求める体積を V とすると [illegible]

$$V=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\int_{-1} [illegible] \, dk [illegible] \boldsymbol{-2\pi} \over \boldsymbol{9}$$

7.70 (1) 平面 $z=t\ (-r\leqq t\leqq r)$，円柱 y^2 [illegible] まれた領域は

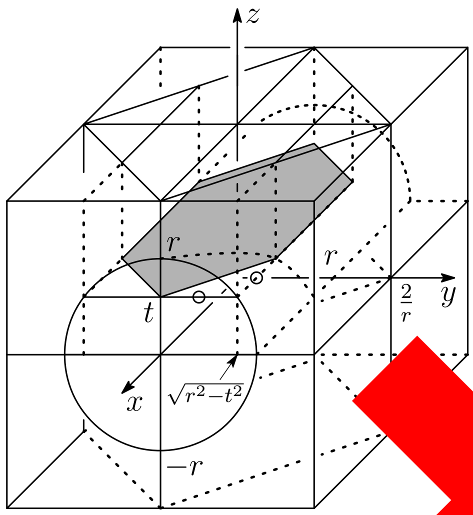
$$z=t,\quad -\sqrt{r^2-t^2}\leqq [illegible] -t^2}, \quad [illegible] -|y| [illegible] |y|$$

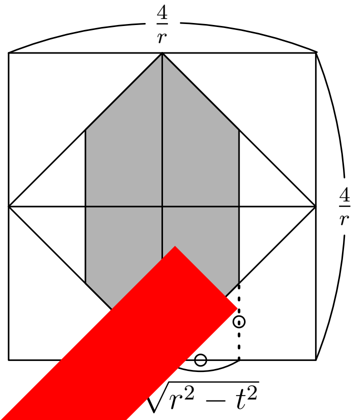
よって[illegible]める面積を $S(t)$ とすると

$$S [illegible] ^{\sqrt{r^2-t^2}} 2\left(\frac{2}{r}-|y|\right)dy= [illegible] \left(\frac{ }{r}-|y|\right)dy$$
$$= [illegible] \left(\frac{2}{r}-y\right)dy=4\left[[illegible] \frac{ }{r}-\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{r^2-t^2}}$$
$$[illegible] \boldsymbol{\frac{ }{r}\sqrt{r^2} [illegible] -2(r^2} [illegible]$$

別[illegible] [illegible]を $z=$ [illegible] 断面は下の[illegible]うになる．

$$S(t)= [illegible] -4\times\frac{1}{2}(\sqrt{r^2-t^2})^2$$
$$=\frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}-2(r^2-t^2)$$





(2) (1) の結果から，$V(r)$ は

$$V(r) = \int^{r} \cdots$$

$$= \int_{-r} \Big\{ \cdots \frac{\cdots}{r}\sqrt{r^2-t^2} - \cdots t^2) \Big\}\, d\cdots$$

$$= \frac{16}{r}\int_0^r \sqrt{r^2-t^2}\,dt - \cdots dt$$

$$\cdots \frac{16}{r}\cdot\frac{\pi r^2}{4} - 4\Big[\, r^2 t - \cdots$$

$$\cdots - \boldsymbol{\frac{8}{3}r^3}$$

$V(r) \cdots - \frac{8}{3}r^3 \cdots \leqq \sqrt{2})$ より

$$\cdots(r) = 4\cdots + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big)\Big(r - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big)$$

増…うなる．

	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
		$+$	0	$-$	
		↗	極大	↘	

よって，求…最大値は

$$V\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 4\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{3}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi^{\frac{3}{2}}}$$

7.71 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ より　$S=\pi\displaystyle\int_0^1 y^2\,dx=\pi\int_0^1(1-\sqrt{x})^4\,dx$

$t=1-\sqrt{x}$ とおくと

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

$x=(1-t)^2$ より　$\dfrac{dx}{dt}=2(t-1)$

よって　$S=\pi\displaystyle\int_1^0 t^4\cdot 2(t-1)\,dt$

$$=\pi\int_0^1(-2t^5+2t^4)\,dt=\pi\left[-\frac{1}{3}t^6+\frac{2}{5}t^5\right] \text{[illegible]} 15$$

7.72 (1) $k>0$ より，求める体積 $V(k)$ は

$$V(k)=\pi\int_k^{2k}\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 \text{[illegible]}$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{2k \text{[illegible]}}\right) \text{[illegible]}$$

(2) $V(k)=\pi\left(-\dfrac{1}{2k+1}+\dfrac{1}{k+1}\right)$ を微分する [illegible]

$$\text{[illegible]}\,\pi\left\{\frac{2}{(2k+1)^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$

$$\text{[illegible]}\frac{-2k^2+1}{\text{[illegible]})^2(2k+1)^2}=\frac{\text{[illegible]}+1)(\sqrt{2}k-1)}{\text{[illegible]}1)^2(2k+1)^2}$$

[illegible]の増減[illegible]次[illegible]なる．

k	[illegible]	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$V'(k)$		$+$	0	$-$
V[illegible]		[illegible]	$(3-$[illegible]	$\searrow$

[illegible] $\dfrac{1}{\text{[illegible]}}$ のとき[illegible] $2\sqrt{2})\pi$

7.73 (1) $S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan$ [illegible] $\log\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\log 2$

(2) $f'(x)=(\tan$ [illegible] $)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1=\tan^2 x$

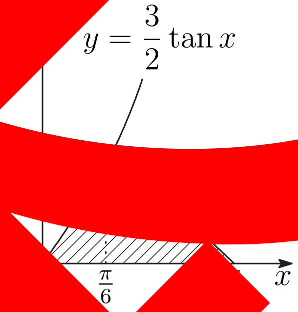
(3) (2) の結果[illegible]

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

7.74 (1) $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ より，$\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ であるから

$$\int \tan^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$$
$$= \boldsymbol{\tan x - x + C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数)}$$

(2) $y = \dfrac{3}{2}\tan x \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y = \cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ [illegible]点の x 座標は



$$\frac{3}{2}\tan x = \text{[illegible]}$$
$$3\sin x = 2\cos^2 x \text{[illegible]}$$
$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 \text{[illegible]}$$
$$(\sin x + 2)(2\sin x - \text{[illegible]}$$

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ より　$x =$ [illegible]

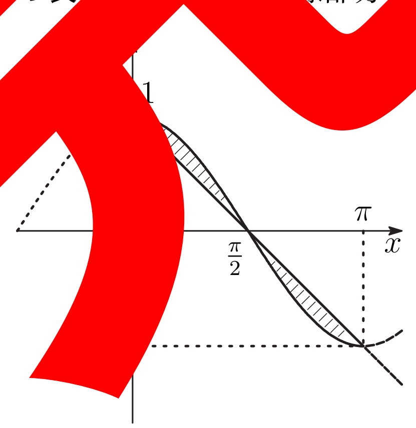
したが[illegible]て，求める立体の体積を V とす[illegible]

$$= \text{[illegible]} \left(\frac{3}{2}\tan x\right)^2 dx + \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]} dx + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \text{[illegible]}) dx$$

$$= \text{[illegible]} \tan x \text{[illegible]} + \frac{\pi}{2}\Big[\text{[illegible]} \sin 2x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{8}\pi - \frac{5}{24}\pi^2}$$

[illegible]の表[illegible]線部分[illegible]線を含む.

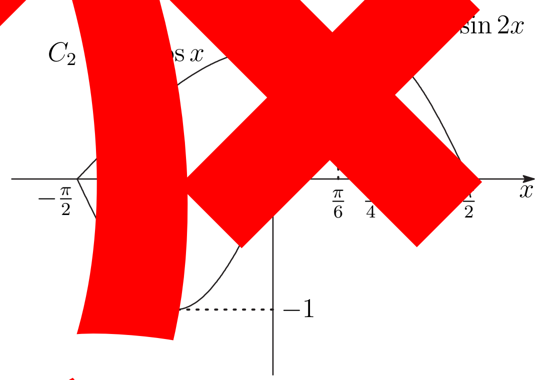


(2) D は点 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ に関して対称であるから，求める回転体の体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{2} &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx - \frac{1}{3}\times\pi\cdot1^2\times\frac{\pi}{2} \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx - \frac{\pi^2}{6} \\
&= \pi\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi^2}{6} \\
&= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}
$$

よって　　$\boldsymbol{V = \frac{\pi^2}{6}}$

7.76 (1) C_1 と C_2 の交点の x 座標は



$$\sin 2x = \cos x$$
$$2\sin x\cos x = \cos x$$
$$\cos x(2\sin x - 1) = 0$$

$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ から

$$x = -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$$

$a < b < c$ より　　$\boldsymbol{a = -\frac{\pi}{2},\ b = \frac{\pi}{6},\ c = \frac{\pi}{2}}$

(2) $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \cos x$ とおくと $f'(x) = 2\cos 2x$,　$g'(x) = -\sin x$

ゆえに，$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$, $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ より $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \neq -1$

よって，点 B における C_1 と C_2 のそれぞれの接線は垂直ではない．

(3) 上のグラフから

$$S_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos x - \sin 2x)dx = \left[\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{9}{4}$$
$$S_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x - \cos x)dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x - \sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

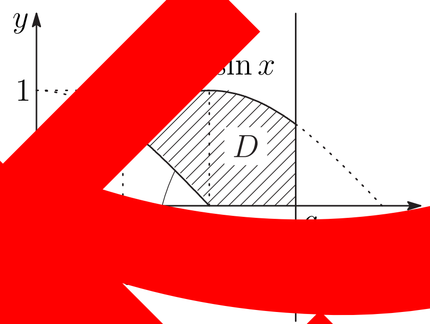
よって　　$S_1 : S_2 = \frac{9}{4} : \frac{1}{4} = \boldsymbol{9 : 1}$

(4) 上のグラフから

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4x) \, dx = \pi \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}}$$

7.77 (1) 求める面積 S は



$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{a} \sin x \, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, d\text{[illegible]}$$

$$= \Big[-\cos x \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{a} - \Big[\sin x \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boldsymbol{-\cos a + \sqrt{2} - 1}$$

(2) 求める回転体の体積 V は[illegible]

$$\frac{V}{\text{[illegible]}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{a} \sin^2 x \, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, d\text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]} \int^{a} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx - \int \text{[illegible]} + \text{[illegible]} \cos 2x \Big) \, dx$$

$$= \text{[illegible]} \sin 2x \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{a} - \left[\frac{1}{2} \text{[illegible]} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{[illegible]} a - \text{[illegible]} + \frac{1}{2} \text{[illegible]} \pi \text{[illegible]}$$

よ[illegible] $\boldsymbol{V = }$ [illegible] $\boldsymbol{\sin 2a + 2}$[illegible]

7.78 [illegible]の曲線[illegible]よう[illegible]

$$C_1 : y = x \text{[illegible]} \cos x \quad \left(\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi \right)$$

$$C_2 : y = x - 2\cos x \quad \left(\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi \right)$$

C_1 について[illegible] $1 - 2\sin x$, $y'' = -2\cos x \geqq 0$

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{\pi}{2}$	↘	極小	↗	$\frac{3\pi}{2}$

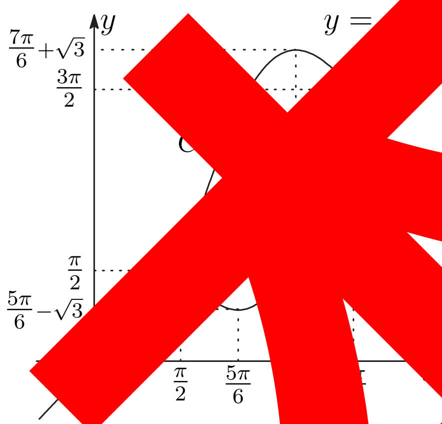
$x = \dfrac{5\pi}{6}$ で極小値 $\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$ をとる．下に凸.

また，C_2 について　$y' = 1 + 2\sin x$，$y'' = 2\cos x \leqq 0$

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$\frac{\pi}{2}$	↗	極大	↘	$\frac{3\pi}{2}$

$$x = \frac{7\pi}{6} \text{ で極大値 } \frac{7\pi}{6} + \sqrt{3} \text{ をとる．上に凸．}$$

以上の結果から，グラフの概形は次のようになる．



(2) C の[illegible]，$y = k$ が異なる 2 点で交わ[illegible]

$$\boldsymbol{\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} < k <} \text{[illegible]} \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

(3) $\frac{5\pi}{\text{[illegible]}}$ [illegible] > 0 [illegible] 求める回転体の体積を V とすると

$$V = \text{[illegible]} \{(x - 2\cos \text{[illegible]} x + 2\cos x)^2\}\,dx$$

$$= 8\pi \int_{\frac{\pi}{2}} \text{[illegible]} \cos \text{[illegible]}$$

$$= 8\pi\Big[-x\sin x - \cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \boldsymbol{16\pi^2}$$

補足 C_1 と C_2 で囲[illegible]分の面積 S は　$S = 8$

C_1 と C_2 は点[illegible]) に関して対称で，この図形の重心である．

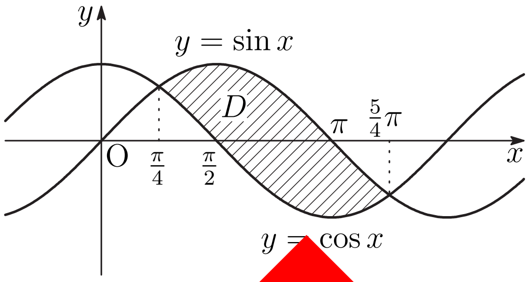
したがって[illegible]から重心までの距離 h は　$h = \pi$

よって，[illegible]回転体の体積 V は，パップス・ギュルダンの定理[3]により

$$V = 2\pi hS = 2\pi\cdot\pi\cdot 8 = 16\pi^2$$

[3]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf の $\boxed{1}$ を参照.

7.79 (1) 図形 D の面積 S は



$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin x - \cos x)dx$$

$$= \Big[-\cos x - \sin x \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$= \mathbf{2\sqrt{2}}$$

(2) $(|\cos x| + |\sin x|)(|\cos x| - |$ [illegible] $x|) = |\cos$ [illegible] $x|^2$

$=$ [illegible] $x = \cos 2x$

$|\cos x| + |\sin x| > 0$ であるから, $|$ [illegible] と $\cos 2x$ は同符号.

$\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ より $\dfrac{\pi}{2} \leqq 2x \leqq \dfrac{5}{2}\pi$ に [illegible]

$2x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{}$ [illegible] $= 0$

$\dfrac{\pi}{2} < 2x < \dfrac{}{2}$ [illegible] き $\quad |$c [illegible] $|\sin$ [illegible]

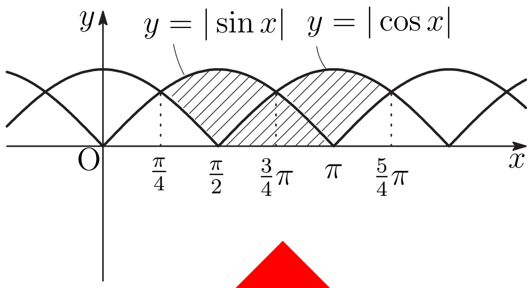
$\dfrac{3}{}\pi < 2x < \dfrac{5}{2}\pi$ のとき $\quad |$c [illegible] 0

[illegible] って [illegible] $\boldsymbol{\dfrac{3}{}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi}$**のとき** $\quad |$**si** [illegible] $|\boldsymbol{\cos x}|$

$\boldsymbol{\pi}$ [illegible] **とき** $\quad \boldsymbol{|\sin x| > |\cos x|}$

[illegible] $\boldsymbol{\frac{}{4}\pi <}$ [illegible] $\boldsymbol{\pi}$**のとき** [illegible] $\boldsymbol{| < |\cos x|}$

(3) (1) の x 軸の求める回転体の体積を V とすると，V は右の図の斜線部分を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積である．このとき，図の斜線部分は，直線 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ に関して対称であるから



$$\frac{V}{2\pi}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin^2 x\,dx-\int_{[illegible]}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx \ [illegible] \ \frac{1}{2}\cos 2x\Big)\,dx$$

$$=\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} [illegible]$$

よって　　$\boldsymbol{V=\pi\left(\frac{\pi}{4}+ [illegible]\right.}$

7.80 (1) $y=2\sin x$ を微分すると　　$y'=2\cos x$

y' [illegible] $x\leqq\pi)$ を解くと　　$x=\pm$ [illegible]

$\frac{\pi}{3}$ に [illegible] の接線の方程式は

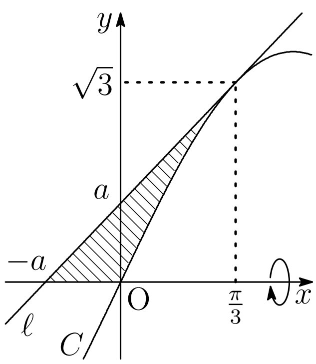
$$y- [illegible] x-\frac{\pi}{3}\quad \text{すなわち}\quad y=x+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

$-\frac{\pi}{3}$ に [illegible] C の [illegible] 方程式は

$$[illegible] -2 [illegible] =x+\frac{\pi}{3}\quad \text{す[illegible]}\quad y=x-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$$

[illegible] 0 であ [illegible] a [illegible]

(2) [illegible] 積を V とする [illegible]



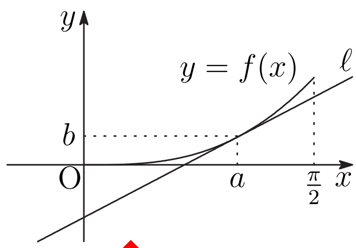
$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi(\sqrt{3}) [illegible] +a\Big)-\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin x)^2\,dx$$

$$=\sqrt{3}\pi- [illegible] (1-\cos 2x)\,dx$$

$$=\sqrt{3}\pi-2\pi\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi-\frac{2}{3}\pi^2}$$

7.81 (1) $f(x)=x-\sin x$ より $\quad f'(x)=1-\cos x$



点 $(a,\ b)$ における接線の傾きが $\dfrac{1}{2}$ であるから

$$1-\cos a=\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a=\frac{\pi}{3}$$

また $\qquad b=f(a)=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，接点の座標は $\quad \boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ [illegible]

よって，この点における接線 ℓ の [illegible]

$$y-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \text{[illegible]}$$

(2) $a=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，求め [illegible] の体積 [illegible]

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x-\sin x)^2\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}}(x^2-2x\sin x+\sin^2 x \text{[illegible]}$$

$$= \text{[illegible]}\ 2x\cos x-2\sin \text{[illegible]} -\frac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \text{[illegible]}\frac{\ }{81} \text{[illegible]} \frac{\sqrt{3}}{8}$$

[illegible] $\boldsymbol{V}$ [illegible] $\boldsymbol{\pi}$ [illegible] $\boldsymbol{9\sqrt{\ }}$ [illegible]

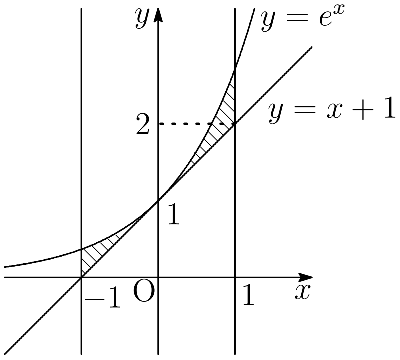
7.82 (1) [illegible] $+1)$ より [illegible] $-1,\ f''(x)=e^x$

[illegible] の $-1 \leqq x \leqq 1$ における増減表は次のようになる．

x	-1	[illegible]	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		[illegible]	0	$+$	
$f''(x)$		[illegible]	$+$	$+$	
$f(x)$	[illegible]	[illegible]	0	↗	$e-2$

$x=0$ で**極小値 0**

(2) D は図の斜線部分



(3) 求める体積 V は

$$V = \pi\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx - \frac{1}{3}\pi \text{[illegible]}$$

$$= \pi\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-1}^{1} \text{[illegible]} \boldsymbol{\frac{8}{3}}\Big)$$

7.83 (1) $\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = \text{[illegible]} - \cos\theta \end{cases}$ より [illegible] $1 - \cos\theta$, [illegible] $\sin\theta$

し[illegible] $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ において

$$\text{[illegible]}\ y = 1,\quad \frac{dx}{d\theta} = 1,\quad \text{[illegible]}\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = 1$$

よ[illegible]求め[illegible]程式は

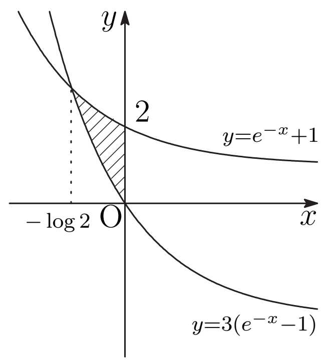
y [illegible] $1\Big\{x$ [illegible] $1\Big)\Big\}$ [illegible]わち $\boldsymbol{y = x - \dfrac{\pi}{2} + 2}$

$y = e$[illegible], $y =$ [illegible] $-1)$ から y を[illegible]すると

[illegible] $+ 1 =$ [illegible]えに [illegible] したがって $x = -\log 2$

[illegible]て, [illegible]交点の座[illegible]**2, 3)**

(3) [illegible]面積を S と[illegible]ると



$$S = \int_{-\log\text{[illegible]}}^{0} \text{[illegible]} + 1) - 3(e^{-x} - 1)\}dx$$

$$= \int_{\text{[illegible]}}^{0} \text{[illegible]}e^{-x} + 4)\,dx$$

$$= \Big[2e\text{[illegible]} + 4x\Big]_{-\log 2}^{0}$$

$$= \boldsymbol{4\log 2 - 2}$$

(4) 求める立体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = \int_{-\log 2}^{0} \{(e^{-x}+1)^2 - 3^2(e^{-x}-1)^2\}\,dx$$
$$= \int_{-\log 2}^{0} (-8e^{-2x} + 20e^{-x} - 8)\,dx$$
$$= \Big[\,4e^{-2x} - 20e^{-x} - 8x\,\Big]_{-\log 2}^{0}$$
$$= 8 - 8\log 2$$

よって　　$V = \boldsymbol{8\pi(1-\log 2)}$

7.84 (1) 求める面積を S_1 とすると

$$S_1 = \int_1^q p\log x\,dx = p\Big[$$ [illegible] $\boldsymbol{\log q - q + 1)}$

(2) 求める面積を S_2 とする [illegible]

[illegible] $= \int_e^{e^2} (3\log x - \log x)dx = 2\Big[$ [illegible] $x -$ [illegible]

(3) [illegible] 積を V とすると

[illegible] $\int^{e^2} \{(3\log x)^2 -$ [illegible] $)^2\}\,dx$

[illegible] $(\log x)^2$ [illegible]

[illegible] $\Big[\,x(\log x)^2 -$ [illegible] $x + 2x\,\Big]_e^{e^2}$

$=$ [illegible]

7.85 (1) $f($ [illegible] $\sqrt{x}$ [illegible] $^{\frac{1}{2}}\log x$ より

[illegible] $x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\log x + x^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}$
$$= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\log x + x^{-\frac{3}{2}} = \frac{2-\log x}{2x\sqrt{x}},$$
$$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}\log x - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x} - \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$
$$= \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}\log x - 2x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3\log x - 8}{4x^2\sqrt{x}}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$	$e^{\frac{8}{3}}$	$\cdots$	e^3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	$\frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}$	$\searrow$	$3e^{-\frac{3}{2}}$

よって　　極大値 $f(e^2) = \boldsymbol{\dfrac{2}{e}}$，変曲点 $\boldsymbol{\left(e^{\frac{8}{3}},\ \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}\right)}$

(2) $S = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = \Big[\,2\sqrt{x}(\log x$ [illegible] $\Big]^{e^2}$ [illegible]

解説 $\displaystyle\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = \int (2\sqrt{x})' \log x\,dx = 2$ [illegible]

$= 2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{}$ [illegible]

(3) $\dfrac{V}{\pi} = \displaystyle\int^{e^3} \left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)^2 dx =$ [illegible] $\log x)^2(\log$ [illegible] $= \Big[\,\frac{}{3}$ [illegible] $= 9$

よ[illegible] $= \boldsymbol{9\pi}$

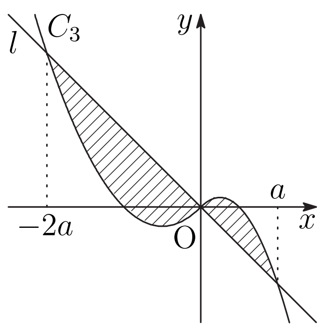
7.86 [illegible] $= x^2$ [illegible] $x) = -2x^2 + ax$ とおく

[illegible] $= 2x + a,\quad h'($[illegible]$4x + a$

[illegible]がって[illegible]$(0) =$ [illegible] $0,\ g'($[illegible] $h'(0) = a$

よって[illegible]と C_2 [illegible]で共通の接[illegible] $= ax$ をもつ．

l [illegible]を通[illegible] ax



C_3 の[illegible]外の共[illegible]

[illegible] $x^2 + ax = -ax$

これを解[illegible]　$x = -2a$

ii) $x > 0$ の[illegible] $-2x^2 + ax = -ax$

これを解[illegible]　$x = a$

求める面積を S とすると

$$S=\int_{-2a}^{0}\{-ax-(x^2+ax)\}dx+\int_{0}^{a}\{(-2x^2+ax)-(-ax)\}dx$$

$$=-\int_{-2a}^{0}x(x+2a)dx-2\int_{0}^{a}x(x-a)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{0-(-2a)\}^3-2\left(-\frac{1}{6}\right)(a-0)^3=$$ [illegible]

(3) C_3 と l の共有点が 2 個となるとき [illegible] C_3 と l は接 [illegible]

このとき，接線の傾きが $-a$ であ [illegible] $-a$ とすると

i) $x<0$ のとき　$2x+a=-a$　ゆ [illegible] $f(-a)=0$

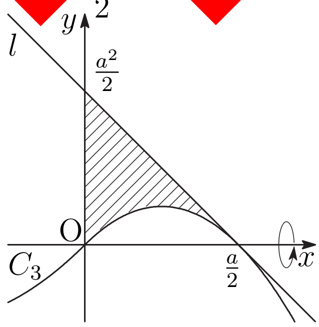
接点 $(-a,\ 0)$ は $l: y=-ax+k$ [illegible]

$$0=-a(-a)\ \text{[illegible]}\ =-a^2$$

ii) $x \geqq 0$ のとき　$-4x$ [illegible] a　ゆえ [illegible] $\frac{\ }{2}$ [illegible]

接 [illegible] $\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ は $l: y=-ax+k$ 上の点 [illegible] るから

$$0=-a\cdot\frac{a}{2}+k\quad これを\ \text{[illegible]}\ \frac{a^2}{2}$$



i)，ii) [illegible] ^{2}，$\boldsymbol{\frac{a^2}{2}}$

(4) [illegible] 結果 [illegible] 求め [illegible] は，右の図の斜線

部分を x [illegible] りに回 [illegible] させたもの [illegible] から，

その [illegible] V とす [illegible]

$$=\frac{\pi}{3}\left(\frac{a}{2}\right)\ \text{[illegible]}\int_{0}(-2x^2+ax)^2dx$$

$$\text{[illegible]}\ a^5-\pi\int_{0}^{\frac{a}{2}}(4x^4-4ax^3+a^2x^2)dx$$

$$\text{[illegible]}\ a^5-\pi\left[\frac{4}{5}x^5-ax^4+\frac{a^2}{3}x^3\right]_0^{\frac{a}{2}}=\boldsymbol{\frac{3\pi}{80}a^5}$$

7.87　(1) $0 \leqq x \leqq 1$ [illegible]

$$y=x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{x^2-x^4}=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}$$

したがって，$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，最大値 $\frac{1}{2}$ をとる．

よって，求める座標は　$\boldsymbol{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2}\right)}$

(2) $x\sqrt{1-x^2}=kx$ より，C と l の原点以外の交点であるから

$$k=\sqrt{1-x^2}\quad\cdots①$$

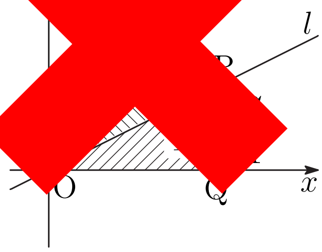
このとき，$0 <\leqq x \leqq 1$ であるか[illegible] $\boldsymbol{0 \leqq k <}$ [illegible]

① より，$x=\sqrt{1-k^2}$．これを y [illegible]代[illegible]と

$$y=k\sqrt{}\ \text{[illegible]}$$

よって，求める交点の座標は [illegible] $\boldsymbol{k^2)}$

(3) 右の図から



$T=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-k^2}\cdot k\sqrt{}$ [illegible] $=\frac{1}{2}k(1-$ [illegible]

S [illegible] $\int^{\sqrt{1-k^2}} x\sqrt{1-x^2}\,dx$

[illegible] $x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{\sqrt{1-k^2}}=\frac{1}{3}(1-$ [illegible]

[illegible]って [illegible] $(S+T)-2T\,|$

[illegible] $\left|\frac{1}{3}(1-k\right.$ [illegible] $\left.\frac{1}{2}k(1-k^2)\right|$

[illegible] $\frac{1}{}\ |2k^3-$ [illegible]

[illegible] $=2k$ [illegible] $+1$ と [illegible] $=3(2k^2-1)$

[illegible] k の値の範[illegible] $\frac{1}{4}\leqq k<1\quad\cdots②$

このとき，f [illegible]増減表は次のようになる．

k	[illegible]	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(1)
$f'(k)$	[illegible]	$-$	0	$+$	
$f(k)$	[illegible]32	↘	$1-\sqrt{2}$	↗	(0)

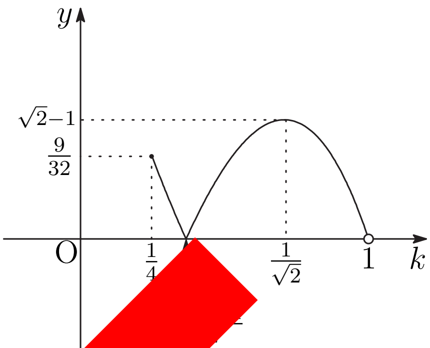
$f(k)=0$ とすると

$(k-1)(2k^2+2k-1)=0$　このとき，②に注意して　$k=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$y=|f(k)|$ のグラフは，右の図のようになる．よって，$|S-T|$ は

$\boldsymbol{k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ **のとき　最大値** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}}$

$\boldsymbol{k=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$ **のとき　最小値 0**



(4) 図形 A を x 軸のまわりに 1 回転[illegible]き[illegible]の体積を V_1，△OPQ を x 軸のまわりに 1 回転させてでき[illegible]積を V_2 とすると

$$V_1+V_2=\pi\int_0^{\sqrt{1-k^2}}\Big(x\sqrt{1 [illegible]$$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{3} [illegible]\right. [illegible] = [illegible]$$

$$=\frac{\pi(1-k^{[illegible]})}{15}(2+3k^2),$$

$$[illegible] = \frac{1}{3}\cdot\pi(k\sqrt{1-k^2})^2\cdot\sqrt{1-k^2} [illegible] (1-k^2)^{\frac{3}{2}}$$

[illegible] $=V$[illegible] $V_2=2V_2$ であるから

$$[illegible] (2+3k^2)=2\times\frac{1}{3}\pi k^2(1-k^2)^{\frac{3}{2}}$$

ゆえ[illegible] $+3k^2$ [illegible] このとき，[illegible] <1 に注意して　$\boldsymbol{k=\dfrac{\sqrt{14}}{7}}$

7.88 [illegible] $=x+$ [illegible] x^2 を[illegible]ると

$$[illegible] \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{[illegible] x^2 - x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+x)}$$

したがって，[illegible]の増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	極大 $\sqrt{2}$	↘	1

よって，最大値 $\boldsymbol{f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}}$，最小値 $\boldsymbol{f(-1)=-1}$

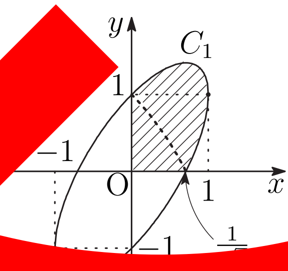
(2) $f(-x) = -x + \sqrt{1-(-x)^2} = -(x - \sqrt{1-x^2}) = -g(x)$

よって，$C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = g(x)$ は原点に関して対称である．

(3) $f(x) - \{-g(x)\} = f(x) + g(x) = 2x$ であるから

$-1 \leqq x \leqq 0$ のとき $f(x) \leqq -g(x)$,

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $f(x) \geqq -g(x)$



$g(x) \geqq 0$ のとき

$x - \sqrt{1-x^2} \geqq 0$　ゆえに　x [illegible] $\sqrt{1-x^2} \geqq$ [illegible]

両辺を平方して　　$x^2 \geqq 1 - x^2$ [illegible]

$0 \leqq x \leqq 1$ に注意して解くと　　[illegible]

(4) (3) の結果から，求める体積は [illegible] x 軸のまわ[illegible]に回転したものであるから

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^1 (x + \sqrt{\ [illegible]\ x^2})^2 dx - \int [illegible] \sqrt{1-\ [illegible]}$$

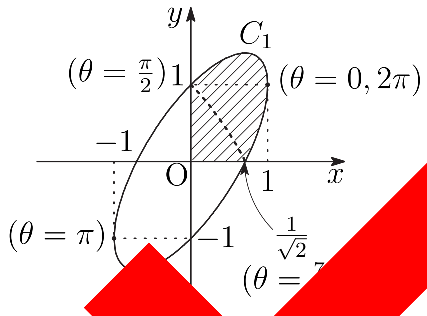
$$[illegible] \int^1 (2x\sqrt{1-x^2}+1)dx + \int [illegible] - 1)d[illegible]$$

$$[illegible] - x^2)^{\frac{3}{2}} + x \Big]_0^1 + \Big[[illegible] - x^2)^{\frac{3}{2}} - x \Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$

[illegible] $(1+$ [illegible]

よ[illegible] $\boldsymbol{V =}$ [illegible] $\boldsymbol{\sqrt{2})\pi}$

別解 $C(\theta) = (\cos\theta,\ \cos\theta+\sin\theta)$ とおくと，C_1，C_2 は，それぞれ $C(\theta)$ の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ および $\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分である．



$x=\cos\theta$，$y=\cos\theta+\sin\theta$ である [illegible]

$y^2\,dx = y^2\dfrac{dx}{d\theta}d\theta = ($ [illegible]

$= (-\sin$ [illegible]

求める回転体の体積 V [illegible]

$\dfrac{V}{\ }$ [illegible] $\{f(x)\}^2\,dx - \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\{g(x)\}^2\,dx$

$=$ [illegible] $- 2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta -$ [illegible] $\sin\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta$

$= \Big[\cos$ [illegible] $\Big]^0 - \Big[\cos\theta - \frac{\ }{3}\sin\ \theta\Big]^0_{\frac{7}{4}\pi}$

$=$ [illegible] $\theta - \frac{2}{\ }$ [illegible] $\Big]_{\frac{\pi}{2}}$ $= \frac{2}{3}(1$ [illegible]

[illegible] $\frac{\ }{3}(1$ [illegible]

7.89 (1) [illegible] $-x^2\ (-1 \leqq$ [illegible] $1)\cdots$① より

$y' =$ [illegible] $\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

$y'' =$ [illegible] $-x^2 - x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$ over $1-x^2$ $= \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} > 0$

$y'=0$ とすると　$x-\sqrt{1-x^2}=0$　これを解いて　$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，関数①の増減および凹凸は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y''		$+$	$+$	$+$	
y	3	$\searrow$	極小 $2-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

よって　　$\boldsymbol{x=-1}$ のとき**最大値 $\boldsymbol{3}$,**

$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき**最小値 $\boldsymbol{2-\sqrt{2}}$**

(2) $y=-x+2+\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq$ [illegible] $\cdots$② よ[illegible]

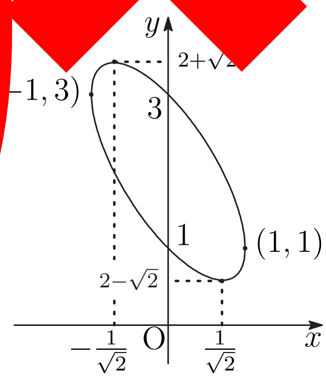
$$y'=-1+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-1 \text{ [illegible] } \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\text{[illegible]}}$$

$$y''=-\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{-2\text{[illegible]}}{2\text{[illegible]}}}{1-\text{[illegible]}} \text{ [illegible] } x^2} < \text{[illegible]}$$

$y'=0$ とすると　$x+\sqrt{1}$ [illegible] $=0$　これ[illegible]て　x[illegible]

した[illegible]関数 ② の増減および凹凸は[illegible]うに[illegible]

x	[illegible]	[illegible]	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'	[illegible]	[illegible]	0	$-$	
y''	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$-$	
y	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\searrow$	1



① と[illegible]って囲[illegible]た図形 D は右[illegible]
よ[illegible]る．[illegible]
① [illegible] $=0$ [illegible] $y=$ [illegible]
[illegible] $x=0$ のと[illegible]
よ[illegible]軸と $\boldsymbol{(0,\ 1)}$, $\boldsymbol{(0,\ 3)}$ で交わる．

(3) 求める回転体の体積を V とすると

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\{(-x+2+\sqrt{1-x^2})^2-(-x+2-\sqrt{1-x^2})^2\}dx$$
$$=4\pi\int_{-1}^{1}(-x+2)\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$=-4\pi\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx+8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$=8\pi\times\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{4\pi^2}$$

7.90 (1) $C : y=\dfrac{4}{x+1}+x$, $L : y=-\dfrac{1}{2}x$ [illegible] とすると

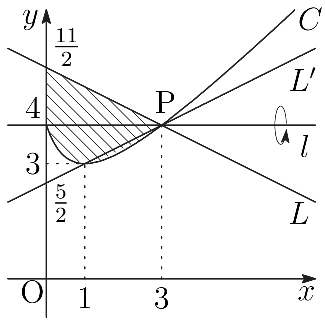
$\dfrac{4}{x+1}+x=-\dfrac{1}{2}x$ [illegible] 整理する [illegible] $(x$ [illegible]

$x\geqq 0$ [illegible] 意してこれを解くと　$x=3$ [illegible] **P**[illegible]

(2) [illegible] とすると，L' は点 P を通 [illegible] 直線で [illegible] ら

y [illegible] $\dfrac{1}{2}(x-3)$　すなわ [illegible] $=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}}$

(3) [illegible] $=\dfrac{4}{}$ [illegible] x, $g($ [illegible] $x+\dfrac{5}{2}$ [illegible] と



[illegible] $f(x)$ [illegible] $+x\Big)=$ [illegible]，

[illegible] $\dfrac{4}{x+1}+$ [illegible] $2\Big)$

[illegible] $\dfrac{(x-1)(x-3)}{2(x+1)}$

ゆえに　0 [illegible] 1 のとき　$g(x)\leqq f(x)\leqq 4$,

[illegible] $\leqq 3$ のとき　$f(x)\leqq g(x)\leqq 4$

したがって，求める立体の体積 V は

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 \{4-g(x)\}^2\,dx + \int_1^3 \{4-f(x)\}^2\,dx \\
&= \int_0^1 \left\{4-\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)\right\}^2 dx + \int_1^3 \left\{(4-x)-\frac{4}{x+1}\right\}^2 dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{4}(x-3)^2\,dx + \int_1^3 \left\{(x-4)^2+\frac{8(x-4)}{x+1} \text{[illegible]} \frac{16}{\text{[illegible]})^2}\right\} dx \\
&= \left[\frac{1}{12}(x-3)^3\right]_0^1 + \left[\frac{(x-\text{[illegible]})^3}{\text{[illegible]}} + 8\{x-\text{[illegible]}1)\} - \frac{16}{x+1}\right]_1^3 \\
&= \frac{121}{4} - 40\log 2
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \left(\frac{121}{4} - 40\log \text{[illegible]}\right.}$

7.91　(1)　$2+\sin x > 0$ であるから

$$S_n = \int^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi} (2+\sin x)\,dx = \Big[\,2x - \text{co[illegible]}\Big]^{\text{[illegible]}\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi}$$

$$\text{[illegible]}\right)\pi - \cos\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi + 1 = \text{[illegible]}\right)\boldsymbol{\pi - \text{[illegible]} + 1}$$

求め[illegible]体の[illegible]は

$$\begin{aligned}
\frac{\text{[illegible]}n}{\pi} &= \text{[illegible]}(2\text{[illegible]})^2\,dx = \int^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi} (4+4\sin x+\sin^2 x)\,dx \\
&= \int_0^{\left(n+\frac{1}{\text{[illegible]}}\right)\text{[illegible]}} \text{[illegible]}4\sin x + \frac{1-\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\right) dx \\
&= \text{[illegible]} - 4\cos x \text{[illegible]}\Big]_0^{\text{[illegible]}\frac{}{3})\pi} \\
&= \frac{\text{[illegible]}}{2}\text{[illegible]}\frac{1}{3}\right)\pi - 4\cos\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi + 4 - \frac{1}{4}\sin 2\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi \\
&= \frac{9}{2}\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{3}\right)\pi - 2(-1)^n + 4 - \frac{\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$

よって　　[illegible]$\boldsymbol{= \pi\left\{\frac{9}{2}\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi - 2(-1)^n + 4 - \frac{\sqrt{3}}{8}\right\}}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\left\{\frac{9}{2}\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi-2(-1)^n+4-\frac{\sqrt{3}}{8}\right\}}{2\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi-\frac{(-1)^n}{2}+1}$$

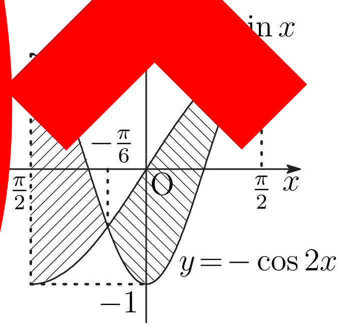
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\left\{\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{3n}\right)\pi-\frac{2(-1)^n}{n}+\cdots\right\}}{2\left(\cdots\right)\pi-\cdots\frac{\cdots}{n}}=\boldsymbol{\frac{9}{4}\pi}$$

7.92 (1) $\sin x+\cos 2x \geqq 0$ より　$\sin x+(1$ [illegible]
$(\sin x-$ [illegible]

$-1\leqq \sin x\leqq 1$ に注意して　[illegible] $\sin x$ [illegible]

$-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より　[illegible] $\leqq \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

(2) 求める[illegible]積 S は右の図の斜線部分であ[illegible]



[illegible] $\sin x-(-\cos 2x)|dx$

[illegible] $+\cos 2x)dx$

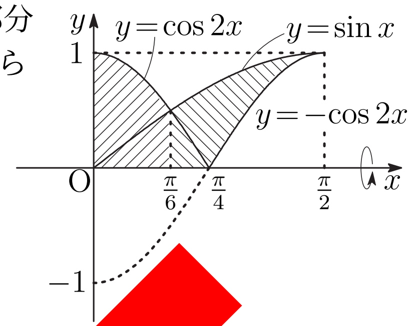
[illegible] $\cos 2x)$ [illegible]

関数[illegible] $+\cos$ [illegible] 関数の 1 つを [illegible] $=-\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x$ とおくと

[illegible] $\left(-\frac{\pi}{2}\right)=$ [illegible] $=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

よっ[illegible] S [illegible] $\left(-\frac{\pi}{2}\right)+F\left(\frac{\pi}{2}\right)-2F\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

(3) 求める回転体の体積 V は，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに回転させたものであるから



$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 2x\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$$
$$- \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2x)^2\,dx$$

このとき

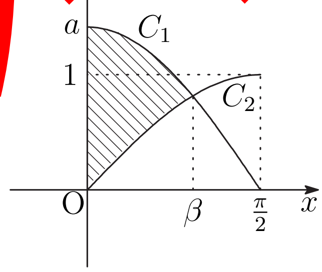
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\text{co[illegible]}}{2} \text{[illegible]} \Big[\, 1 \text{[illegible]} \text{n}\,4x \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \text{[illegible]}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2x)^2\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \text{[illegible]} \,d\text{[illegible]}\, 4x \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{[illegible]}$$

よって $\boldsymbol{V = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\text{[illegible]}}{16}\right)\pi}$

7.93 (1) [illegible]ける 2 つの曲線を



[illegible] x，　$C_2 : y = \sin x$

と[illegible]これら[illegible]標を β とすると

[illegible] $a\cos$ [illegible] β

ゆえ[illegible] $\sin\beta$ [illegible] $\beta = 0$　$\cdots$①

た[illegible]の斜線[illegible]

$$\int^{\beta} (a\cos x \text{[illegible]} = \Big[\, a\sin x + \cos x \,\Big]_0^{\beta}$$
$$= a\sin\beta + \cos\beta - 1$$

条件により，[illegible] $\sqrt{3}-1$ に等しいから

$a\sin\beta + \text{c[illegible]}\, 1 = \sqrt{3}-1$　ゆえに　$a\sin\beta+\cos\beta = \sqrt{3}$　$\cdots$②

次の等式

$$\text{[illegible]in}\,\beta - a\cos\beta)^2 + (a\sin\beta+\cos\beta)^2 = a^2+1$$

に①，②を代入すると

$$3 = a^2+1 \quad \text{このとき},\ a>0\ \text{により} \quad \boldsymbol{a = \sqrt{2}}$$

(2) $\begin{cases} y = \sqrt{2}\cos x & \cdots ① \\ y = \tan x & \cdots ② \end{cases}$ とおく．①，② から y を消去すると

$$\sqrt{2}\cos x = \tan x \quad ゆえに \quad \sqrt{2}\cos^2 x = \sin x$$

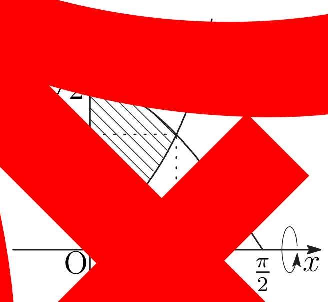
整理すると　　$\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0$

したがって　　$(\sin x + \sqrt{2})(\sqrt{2}\sin x - 1) = 0$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に注意して，これを解くと　$x = \dfrac{\pi}{4}$

これを ② に代入して　$y = 1$　[illegible] 求め[illegible]は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}},\ \mathbf{1}\right)$

(3) $C_3 : y = \tan x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．[illegible]
ら求める回転体の体積を V とする[illegible]



$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 x - \tan^2 x)\ [illegible]$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos 2x - \frac{[illegible]}{\cos^2 x} + 2\right) dx$$

$$[illegible]\ 2x - \tan x + 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}(\pi}\ [illegible]$$

7.94 [illegible] $(x) =$ [illegible] 微分すると

$$[illegible]'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{[illegible]}{x}$$

[illegible]たが[illegible] (x) の[illegible]は，次[illegible]となる．

x	(0)	$\cdots$	[illegible]	$\cdots$
[illegible]		[illegible]	0	$+$
[illegible]		[illegible]	1	$\nearrow$

[illegible]は　$\boldsymbol{f(1)}$ [illegible]

(2)(ア) $\begin{cases} y = a[illegible] & \cdots ① \\ y = \tan[illegible] & \cdots ② \end{cases}$ とおく．①，② から y を消去すると

$$[illegible]\,x = \tan x \quad ゆえに \quad \sin x\left(a - \frac{1}{\cos x}\right) = 0$$

したがって，①，② の交点の x 座標は

$$x = 0,\ \beta \quad \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2},\ \cos\beta = \frac{1}{a}\right)$$

また，$0 \leqq x \leqq \beta$ において

$$a\sin x - \tan x = \sin x\left(a - \frac{1}{\cos x}\right) \geqq 0$$

$0 \leqq x \leqq \beta$ において，$y = a\sin x$ と $y = \tan x$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_0^{\beta} (a\sin x - \tan x) = \Big[-a\cos x + \log\cos x \Big]_0^{\beta}$$

$= a(1 - \cos\beta) + \log$ [illegible]

[illegible] $= a - \log a - 1$

これが $1 - \log 2$ に等しいから

$a - \log a - 1 = 1 - \log$ [illegible] $\log a$

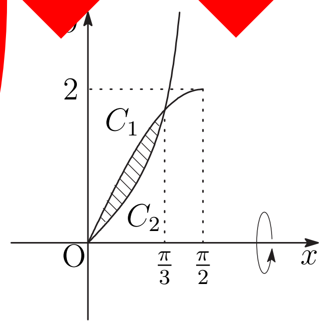
上の第 2 式から　$f(a)$ [illegible]

(1) の増減表により [illegible] において，[illegible] は単 [illegible] ら，上式をみたす a $(a > 1)$ の値は

$$\boldsymbol{a = 2}$$

[illegible] $= 2$ [illegible] $< \beta < \frac{\pi}{2}$ に注意して

$\cos$ [illegible] えに　$\beta = \frac{\pi}{4}$



$C_1 : y$ [illegible] x，[illegible] $\tan x$ とする．

C [illegible] によっ [illegible] れた図形 D [illegible] の

[illegible] 斜線部 [illegible]

[illegible] って [illegible] とす [illegible]

$$V = \pi \int_0 \text{[illegible]} x)^2 - \tan^2 x\} \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(3 - 2\cos 2x - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$$

$$= \pi\Big[\, 3x - \sin 2x - \tan x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\boldsymbol{= \pi\left(\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)}$$

7.95　(1)　$u' = e^{\tan t}(\tan t)' = \boldsymbol{\dfrac{e^{\tan t}}{\cos^2 t}}$

(2) $u=e^{\tan t}$ とおくと，(1) の結果および $1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$ に注意して

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1+\int_{-x}^{x}\frac{1}{e^{\tan t}(1+e^{\tan t})}\cdot\frac{e^{\tan t}}{\cos^2 t}\,dt\\
&= 1+\int_{e^{\tan(-x)}}^{e^{\tan x}}\frac{1}{u(1+u)}\,du\\
&= 1+\Big[\log\left|\frac{u}{1+u}\right|\Big]_{e^{-\tan x}}^{e^{\tan x}}\\
&= 1+\log\frac{e^{\tan x}}{1+e^{\tan x}}-\log\frac{e^{-\tan x}}{1+e^{-\tan x}}\\
&= 1+\log e^{\tan x}\\
&= \boldsymbol{1+\tan x}
\end{aligned}$$

別解 $\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt=\int_{-x}^{0}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt+\int_{0}^{x}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt$ ……①

$\displaystyle\int_{-x}^{0}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt$ において $t=-s$ とおくと $\dfrac{dt}{ds}=-1$

t と s の対応は右のようになる.

t	$-x \longrightarrow 0$
s	$x \longrightarrow 0$

よって

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^{0}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt &= \int_{x}^{0}\frac{1+\tan^2(-s)}{1+e^{\tan(-s)}}\cdot(-1)\,ds\\
&= \int_{0}^{x}\frac{1+\tan^2 s}{1+e^{-\tan s}}\,ds\\
&= \int_{0}^{x}\frac{e^{\tan s}(1+\tan^2 s)}{e^{\tan s}+1}\,ds\\
&= \int_{0}^{x}\frac{e^{\tan t}(1+\tan^2 t)}{1+e^{\tan t}}\,dt
\end{aligned}$$

ゆえに，①から次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^{x}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt &= \int_{0}^{x}\frac{e^{\tan t}(1+\tan^2 t)}{1+e^{\tan t}}\,dt+\int_{0}^{x}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt\\
&= \int_{0}^{x}(1+\tan^2 t)\,dt\\
&= \int_{0}^{x}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt=\Big[\tan t\Big]_{0}^{x}=\tan x
\end{aligned}$$

したがって　$\boldsymbol{f(x)=1+\tan x}$

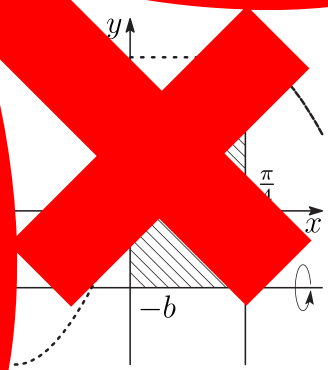
(3) 求める回転体の体積を V とすると，(2) の結果より

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan x)^2\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2\tan x+\tan^2 x)\,dx$$
$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+2\tan x\right)dx = \pi\Big[\ \tan x - 2\log|\cos x|\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \pi\left(1-2\log\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boldsymbol{\pi(1+\log 2)}$$

7.96 (1) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \boldsymbol{-\log|\cos x| +}$ … **は積**

$$\int \tan^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \ldots$$

(2) V_1 は右の図の斜線部分を $y=$ … 回転したものであるから



$$\frac{V_1}{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 2x+b)^2\,dx$$
$$\ldots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x + 2b\sin 2x\Big)$$
$$= \Big[\ \ldots\ \frac{1}{8}\sin 4x - b\cos 2x \ldots$$
$$\ldots \frac{}{8}(2b^2 \ldots$$

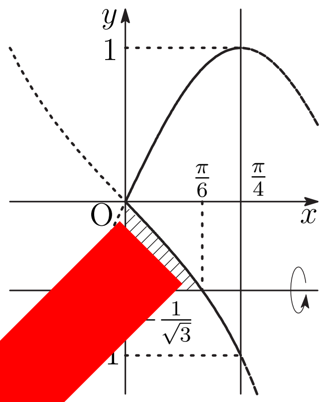
よって … $\boldsymbol{V_1 = \pi^{\ldots}}$ … $\boldsymbol{+1) + b\pi}$

$f(x)$ … $) =$ … $+\sin$ …
$= -$ … $\cos x$
$= -\tan x$ … $\tan x\cos^2 x$
$= \tan x(-1+2\cos^2 x) = \tan x\cos 2x$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ に … $\tan x \geqq 0,\ \ \cos 2x \geqq 0$

よって … $g(x) \geqq 0$

(4) 右の図の斜線部分を $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のまわりに 1 回転させた立体の体積を V とすると



$$\frac{V}{\pi}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(-\tan x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\tan^2 x-\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x+\frac{1}{3}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x+\tan x+\frac{2}{\sqrt{3}}\log [illegible] x|\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=-\frac{\pi}{9}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\log\frac{3}{4}\right)$$

ゆえに　　$V=-\dfrac{\pi^2}{9}+\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\Bigl(1+$ [illegible]

$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときの V_1 を V_0 [illegible] V_0 [illegible]

よって，求める面積 V_2 は

$$[illegible] = V_0 - V$$
$$[illegible] \left(\frac{5}{[illegible]}\pi^2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)-\left\{-\frac{\pi^2}{9} [illegible] \left(1+\log\frac{3}{4}\right)\right\}$$
$$= [illegible] \boldsymbol{\frac{\pi}{\sqrt{3}}\log\frac{3}{4}}$$

[illegible]7 (1) [illegible] $=\log$ [illegible] 分する [illegible] $=\dfrac{1}{x}$

$x=$ [illegible] き，[illegible] るから，l_1 [illegible], 0) を通り，傾き 1 の直線．

[illegible] がって [illegible] -0 [illegible] 1) [illegible] ち　$\boldsymbol{y=x-1}$

(2) [illegible] および高さ [illegible] $e-1$ の直円錐の体積であるから

$$[illegible] =\frac{1}{3}\cdot\pi(e-1)^2\cdot(e-1)=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}(e-1)^3}$$

(3) $xP(\log x)$ を微 [illegible] ると

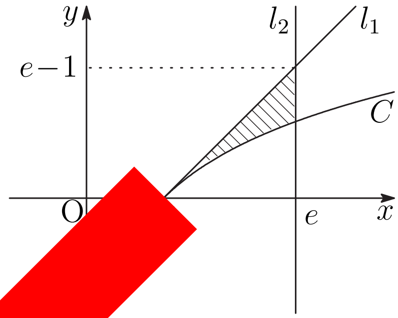
$$\{xP(\text{[illegible]}\}'=P(\log x)+x\cdot P'(\log x)\frac{1}{x}=P(\log x)+P'(\log x)$$

上式が $(\log x)^2$ に等しいので，$P(x)+P'(x)=x^2$ が成り立つ．これに $P(x)=ax^2+bx+c$，$P'(x)=2ax+b$ を代入すると

$(ax^2+bx+c)+(2ax+b)=x^2$　すなわち　$(a-1)x^2+(b+2)x+(b+c)=0$

上式は x に関する恒等式であるから　　$\boldsymbol{a=1,\ b=-2,\ c=2}$

(4) $y=\log x\ (1\leqq x\leqq e)$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転させた回転体の体積を V_2 とすると，(3) の結果から



$$\frac{V_2}{\pi}=\int_1^e(\log x)^2\,dx$$
$$=\Big[\,xP(\log x)\,\Big]_1^e=eP(1) \text{ [illegible] } P(0)$$

$P(x)=x^2-2x+2$ より，$P(1)=$ [illegible] あるから

$$\frac{V_2}{\pi}=e\cdot1-2\quad \text{ゆ [illegible]}$$

よって　　$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{3}($ [illegible]

[illegible] $\boldsymbol{-3e^2}$ [illegible]

7.98 (1) [illegible] $\int^x f(t)\,dt=(x+1)f(x)-2$ [illegible] $x+$ [illegible]

[illegible] 入すると

[illegible] $2\log 2$　すなわち [illegible] $=\log 2$　$\cdots$①

$(*)$ [illegible] 辺を微 [illegible] $>0)$

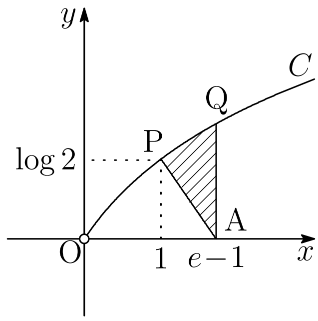
[illegible] $f(x)$ [illegible] $1)f'(x)$ [illegible] ゆえに　$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$

こ [illegible] 分する [illegible] $=\log(x+1)$ [illegible] (C は積分定数)

[illegible] り [illegible] $\log 2$ [illegible] に　$C=0$

[illegible] $\boldsymbol{=\log(x}$ [illegible]

(2) 図の [illegible] 線部分 [illegible] 軸のまわりに1回転してできる立体の体積である．



求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_1^{e-1}\{\log(x+1)\}^2dx-\frac{\pi}{3}(\log 2)^2(e-2)$$
$$=\pi\Big[\,(x+1)\{(\log(x+1))^2-2\log(x+1)+2\}\,\Big]_1^{e-1}$$
$$-\frac{\pi}{3}(\log 2)^2(e-2)$$
$$=\pi\left\{e-2(\log 2)^2+4\log 2-4\right\}-\frac{\pi}{3}(\log 2)^2(e-2)$$
$$=\boldsymbol{\pi\left\{e-\frac{e+4}{3}(\log 2)^2+4\log 2-4\right\}}$$

7.99 (1) $f(x)=a(e^x+e^{-x})$ より $f'(x)=a(e^x-e^{-x})$

$$f(\log 3)=a(e^{\log 3}+e^{-\log 3})=a\left(3+\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{3}a$$
$$f'(\log 3)=a(e^{\log 3}-e^{-\log 3})=a\left(3-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}a$$

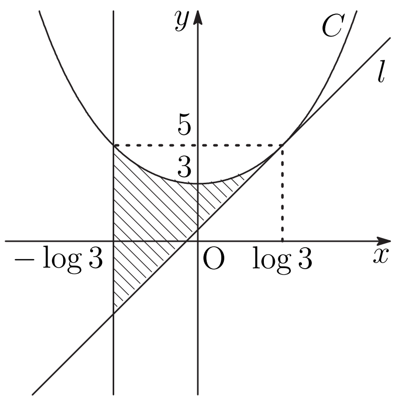
ゆえに，曲線 $y=f(x)$ の点 $(\log 3,\ f(\log 3))$ における接線の方程式は

$$y-\frac{10}{3}a=\frac{8}{3}a(x-\log 3)\quad すなわち\quad y=\frac{8}{3}ax+\left(\frac{10}{3}-\frac{8}{3}\log 3\right)a$$

これが $y=4x+b$ であるから $\dfrac{8}{3}a=4,\quad \left(\dfrac{10}{3}-\dfrac{8}{3}\log 3\right)a=b$

よって $\boldsymbol{a=\dfrac{3}{2},\ b=5-4\log 3}$

(2) 求める面積 S は



$$S=\int_{-\log 3}^{\log 3}\left\{\frac{3}{2}(e^x+e^{-x})-(4x+b)\right\}dx$$
$$=2\int_0^{\log 3}\left\{\frac{3}{2}(e^x+e^{-x})-b\right\}dx$$
$$=\Big[\,3(e^x-e^{-x})-2bx\,\Big]_0^{\log 3}$$
$$=8-2b\log 3=8-2(5-4\log 3)\log 3$$
$$=\boldsymbol{8-10\log 3+8(\log 3)^2}$$

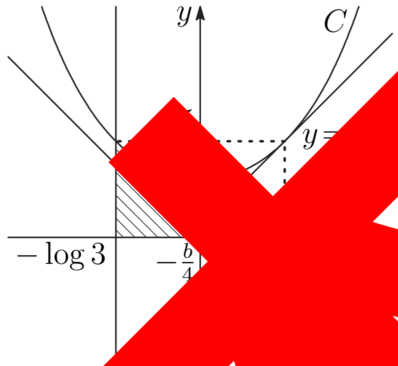
(3) (1) の結果から $\quad b=4\left(\dfrac{5}{4}-\log 3\right)=4\left(\dfrac{5}{4}-1.1\right)>0$

$f(x) \geqq 4x+b$ および C は y 軸に関して対称であるから　$f(x) \geqq 4|x|+b$

このとき，$|4x+b| \leqq |4x|+|b| = 4|x|+b$ であるから　$f(x) \geqq |4x+b|$

$y=|4x+b|$ の x 軸との交点の x 座標は　$-\dfrac{b}{4} = \log 3 - \dfrac{5}{4}$

求める体積 V は，図の斜線部分を x 軸のまわりに1回転させた体積である．



したがって

$$V = \pi\int_{-\log 3}^{\log 3}\left\{\frac{3}{2}(e^x+e^{-x})\right\}^2 dx - \frac{1}{3}\left\{ \cdots \left(\cdots\right) \cdots \right\}$$

$$= \frac{9}{4}\pi \cdots (e^{2x}+4+2e^{-2x})dx - \frac{1}{3}\cdots\left(\log 3 - \frac{5}{4}\right)\cdots\pi\cdot 5^2$$

$$= \cdots\left[e^{2x} \cdots e^{-2x}\right]_0^{\log 3} - \frac{125}{12}\pi$$

$$= \frac{9}{\cdots}\left(\cdots 4\log\cdots\right) - \frac{125}{12}\cdots$$

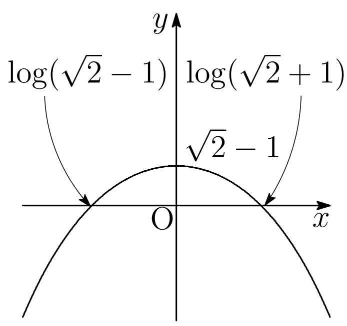
$$= \cdots\left(\cdots \frac{\cdots 15}{12}\right)\pi$$

7.100　(1) $\cdots(e^x+e^{-x})\cdots$ と

$$f'(x) = -\frac{\cdots}{2}(\cdots e^{-x}) = -\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{2e^x}$$

$f(x)$ の増減表は $\cdots$ のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\sqrt{2}-1$	↘



したがって，グラフの概形は右のようになる．

$f(x)=0$ とすると，$e^x+e^{-x}-2\sqrt{2}=0$ となるから

$$(e^x)^2-2\sqrt{2}e^x+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad e^x=\sqrt{2}\pm1$$

$y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は　**$x=\log(\sqrt{2}\pm1)$**

(2) $1+\{f'(x)\}^2=1+\dfrac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2=\dfrac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2$

$y=f(x)$ は y 軸に関して対称であるから，$\alpha=\log(1$ [illegible] とおくと

$$\ell=2\int_0^\alpha\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\ [illegible] \int_0^\alpha(e^x+\ [illegible]$$

$$=\Big[\,e^x-e^{-x}\,\Big]_0^\alpha=e^\alpha-e\ [illegible]\ (\sqrt{2}-1)=\mathbf{2}$$

(3) 求める立体の体積 V は

$$\frac{V}{\pi}=2\int_0^\alpha\{f(x)\}^2\,dx=2\ [illegible]\ \sqrt{2}\ [illegible]\ e^x+\ [illegible]\ dx$$

$$=\int_0^\alpha\left\{\frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2}\ [illegible]\ 2\sqrt{2}(e^x+e\ [illegible]\right\}dx$$

$$[illegible]\ ^{2x}-e^{2x})-2\sqrt{2}(e^x-e^{-x})+\ [illegible]$$

$$=\frac{1}{[illegible]}\ [illegible])-2\sqrt{2}(e^\alpha-e^{-\alpha})+\ [illegible]$$

$$[illegible]\ (e^\alpha+\ [illegible]\ ^{-\alpha})-2\sqrt{2}(e^\alpha-e\ [illegible])+5\alpha$$

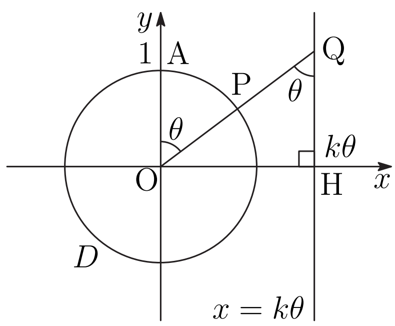
$$=\frac{1}{[illegible]}\ [illegible]\ -2\sqrt{[illegible]}\ [illegible]\ \log(\sqrt{[illegible]}\ [illegible]=5\log(\sqrt{2}+1)-3\sqrt{2}$$

よ[illegible] **$V=$** [illegible] **$\sqrt{2}+1)-3$** [illegible]

7.10[illegible] $x=k$[illegible]軸と[illegible]を H [illegible]と，

[illegible]OH[illegible]，OQ sin[illegible]るから

[illegible]in[illegible]　ゆえに　$r(\theta)=\dfrac{k\theta}{\sin\theta}$



よって　$\lim\limits_{\theta\to+}$ [illegible] $=\lim\limits_{\theta\to+0}k\cdot\dfrac{\theta}{\sin\theta}=\boldsymbol{k}$

(2) $r(\theta)=\dfrac{k[illegible]}{\sin\theta}$ [illegible]微分すると

$$r'(\theta)=\frac{k(\sin\theta-\theta\cos\theta)}{\sin^2\theta}=\frac{k\cos\theta(\tan\theta-\theta)}{\sin^2\theta}$$

ここで，$h(\theta) = \tan\theta - \theta$ とすると

$$h'(\theta) = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \tan^2\theta$$

上式から，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき，$h'(\theta) > 0$ であるから

$$h(\theta) > h(0) \quad すなわち \quad h(\theta) > 0$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき　　$r'(\theta) = \dfrac{k\cos\theta h(\theta)}{\sin^2\theta} > 0$

$r(\theta) = \dfrac{k\theta}{\sin\theta}$ は単調増加であるか[illegible]点 Q がつ[illegible]内部にあるとき

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} r(\theta) < [illegible] < 1$$

このとき，$k > 0$ に注意して　　**0**[illegible]

(3) (1) の図から，点 Q$(x,\ y)$ は [illegible]

$$x = k\theta, \quad [illegible] \cos\theta = [illegible] \cos [illegible]$$

上の 2 [illegible]から θ を消去すると　$y = \dfrac{x}{\tan\frac{x}{k}}$ [illegible]に [illegible]

[illegible] $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{\tan\frac{x}{k}}$

[illegible]$(x) =$ [illegible] k [illegible]微分すると

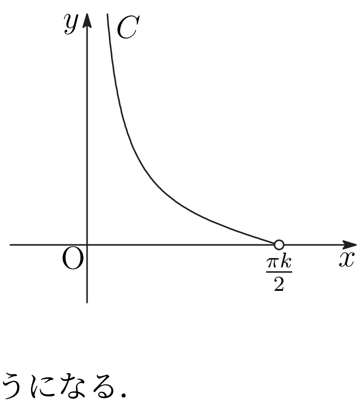
$$[illegible]\,g'(x)\ [illegible]\left(\tan\frac{x}{k}\right)' = -\frac{\cos^2\frac{x}{k}}{\sin^2\frac{x}{k}}\cdot\frac{\frac{1}{k}}{\cos^2\frac{x}{k}} = -\frac{1}{k\sin^2\frac{x}{k}}$$

$g'(x)$ [illegible] k $\left(\sin\frac{x}{[illegible]}\right.$ [illegible]微分すると

$$g''(x)\ [illegible]\left(\sin\frac{[illegible]}{k}\right.\ [illegible]\frac{x}{[illegible]}\ [illegible]\frac{1}{\sin^3\frac{x}{k}}\cdot\frac{1}{k}\cos\frac{x}{k} = \frac{2}{k^2}\cdot\frac{\cos\frac{x}{k}}{\sin^3\frac{x}{k}}$$

[illegible] $< \dfrac{\pi}{2}$ およ[illegible] $k\theta$ から

$$[illegible]\ x < \frac{\pi}{2}k$$



この範囲にお[illegible]　$g'(x) < 0,\ \ g''(x) > 0$

ゆえに，g[illegible]単調減少で，下に凸である．

また　$\displaystyle\lim_{x \to +0} g(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi k}{2}-0} g(x) = 0$

よって，曲線 C のグラフの概形は右の図のようになる．

(4) 求める立体の体積を V とすると　$V=\pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}k}^{\frac{\pi}{3}k}\frac{1}{\tan^2\frac{x}{k}}\,dx$

$x=k\theta$ より　$\dfrac{dx}{d\theta}=k$

x	$\frac{\pi}{4}k \longrightarrow \frac{\pi}{3}k$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって　$V=\pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{k}{\tan^2\theta}\,d\theta=\pi k\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)$ [illegible]

$=\pi k\Big[-\dfrac{1}{\tan\theta}-$ [illegible] $\Big]^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\pi k\Big(1}$ [illegible] $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{12}\Big)}$

7.102 (1) $\dfrac{\sin x}{x}=0$ より　$x=n\pi$ (n は整数) [illegible] $\boldsymbol{=n\pi}$

$\dfrac{V_n}{\pi}=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ [illegible] $\Big)\sin^2 x\,dx$

$=-\Big[\dfrac{1}{x}\sin^2$ [illegible] $+\displaystyle\int_{n\pi}^{(}$ [illegible] $(\sin$ [illegible]

$=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{2\sin x\cos x}{x}\,dx=$ [illegible] $\sin 2$ [illegible]

よって [illegible] $\boldsymbol{\displaystyle\int^{(n+1)\pi}\frac{\sin 2x}{x}\,dx}$

(2) [illegible] $\leqq (n$ [illegible] $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\leqq\dfrac{1}{x^2}$ であるから

[illegible] $V_n=$ [illegible] $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 d$ [illegible]

[illegible] $\displaystyle\int_{n\pi}$ [illegible] $\Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

別解 [illegible] $n\pi\leqq$ [illegible] $n+\frac{1}{2}\big)\pi$ のとき　$\dfrac{\sin 2x}{x}\leqq\dfrac{\sin 2x}{n\pi}$

$(n+$ [illegible] $x\leqq(n+1)\pi$ のとき　$\dfrac{\sin 2x}{x}\leqq\dfrac{\sin 2x}{(n+1)\pi}$

(1) の結果を用いると

$$V_n = \pi\int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin 2x}{x}\,dx + \pi\int_{(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin 2x}{x}\,dx$$

$$\leqq \pi\int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin 2x}{n\pi}\,dx + \pi\int_{(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin 2x}{(n+1)\pi}\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} + \frac{1}{n\ [illegible]\ 1}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\ [illegible]\right. = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} V_k \leqq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - [illegible]\right.$$

よって $\sum_{n=1}^{\infty} V_n \leqq$ li[illegible] $\frac{1}{n+ [illegible]}$ [illegible]

7.103 (1) $\frac{1}{\sin x\ [illegible]} = \frac{\sin^2 x + \cos\ [illegible]}{\sin x\cos x} = \tan x + \frac{1}{\tan\ [illegible]}$ [illegible] 0

$$y = \tan x + \frac{1}{\tan x} \quad \left([illegible] < [illegible] 2 \right.$$

[illegible] おく [illegible] から y を消去すると

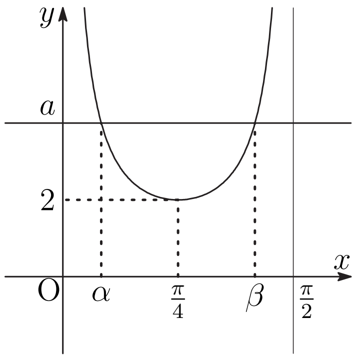
[illegible] $x +$ [illegible] えに $\tan^2 x - a\tan x + 1 = 0 \quad \cdots(*)$

[illegible] の方程 [illegible] が α [illegible] るから [illegible]), $a > 2$ に注意して

tan [illegible] $\sqrt{a^2-4}$ [illegible], [illegible] $= \dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$

([illegible] の解 [illegible] の関係に [illegible] $\beta = 1$

[illegible] 求める面積 [illegible]



$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{[illegible]}{\sin\ [illegible]}\,dx = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\frac{(\mathrm{ta}\ [illegible]}{\mathrm{t}\ [illegible]}\ [illegible]\ x = \Big[\log\tan x\Big]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= \log\frac{\mathrm{t}\ [illegible]}{\tan\alpha}\ [illegible] = \log\tan^2\beta$$

$$= \mathbf{2\log\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}$$

(3) $\tan\alpha\tan\beta = 1$, $\tan\beta - \tan\alpha = \sqrt{a^2-4}$ より，求める体積 V は

$$\frac{V}{\pi} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int_\alpha^\beta \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$$
$$= \int_\alpha^\beta \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right)(\tan x)'dx = \int_\alpha^\beta \left\{(\tan x)' + \frac{(\tan x)'}{\tan^2 x}\right\}dx$$
$$= \left[\ \tan x - \frac{1}{\tan x}\ \right]_\alpha^\beta = \left(\tan\beta - \frac{1}{\tan\beta}\right) - \left(\text{ta[illegible]} \frac{1}{\text{[illegible]an}\,\alpha}\right)$$
$$= (\tan\beta - \tan\alpha) - (\tan\alpha \text{ [illegible] } \beta) = 2(\text{ta[illegible]}\alpha) = 2\sqrt{a^2-4}$$

よって　　$\boldsymbol{V = 2\pi\sqrt{a^2-4}}$

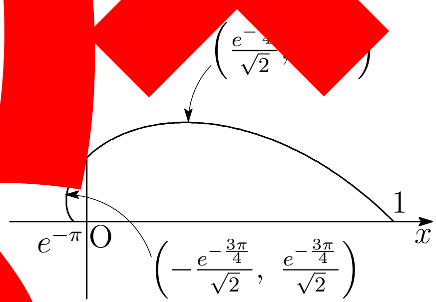
7.104 (1) $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$ を t で微[illegible]

$$x' = -e^{-t}(\sin t \text{ [illegible] } + \frac{\pi}{4})$$
$$y' = -e^{-t}(\text{[illegible]}s\,t) = \text{[illegible]}^{t}\,\text{si[illegible]}$$

x，y の[illegible]減表は

[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	+	
x	[illegible]	[illegible]	[illegible]	↗	$-e^{-\pi}$

[illegible]	0	$\cdots$	[illegible]	[illegible]	π
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	[illegible]	[illegible]
y	[illegible]	↗	e[illegible]	↘	0



[illegible] $= \frac{3\pi}{\text{[illegible]}}$ [illegible]値 [illegible] をと[illegible] $t = \frac{\pi}{4}$ で最大値 $\boldsymbol{\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}}$ をとる．

[illegible]の概形は右[illegible]うになる．

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\{r(t)\}^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt = \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\{(r(t))^3\}'\sin^2 t\cos t\,dt$

$$= \frac{1}{3}\Big[\ \{r(t)\}^3\sin^2 t\cos t\ \Big]_0^{\pi}$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3(\sin^2 t\cos t)'\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3(2\sin t\,c \text{[illegible]} n^3 t)\,dt$$

$$= \text{[illegible]} r(t)\}^3\{\text{[illegible]} \sin^2 t) - \sin^3 t\}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi}\{r\text{[illegible]} 2 \text{[illegible]} \sin t\Big)\,dt$$

(3) $y_1 = e^{-t}\sin t \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{3\pi}{4}\right)$, [illegible] $t \leqq \pi\Big)$,

$\alpha = -\dfrac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$, $\beta = e^{-\pi}$ と [illegible]

$$\text{[illegible]}\pi\int_{\alpha}^{1} {y_1}^2\,dx - \pi\int_{\alpha}^{\beta} {y_2}^2\,dx$$

$$\text{[illegible]}{}^2\frac{dx}{dt}\cdot dt - \pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} y^2\frac{dx}{dt}\cdot d\text{[illegible]}$$

$$= -\text{[illegible]} dt = -\int_0^{\pi}(r(t)\sin t)\text{[illegible]}\{r(t)\cos t\}'dt$$

$$\text{[illegible]}\int_0^{\pi}(\text{[illegible]}\sin^2 t\cdot\{r\text{[illegible]} - r(t)\sin t\}\,dt$$

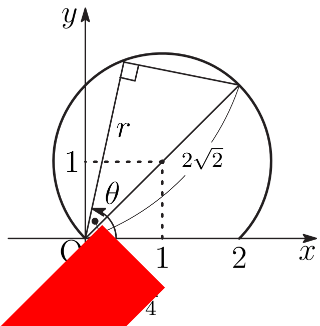
$$= -\text{[illegible]} r'(t)\sin^2 t\,c\text{[illegible]} + \pi\int_0^{\pi}(r(t))^3\sin^3 t\,dt$$

[illegible] に ([illegible] 式を適用 [illegible]

$$= \text{[illegible]}(r(t))^3\left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right)dt + \pi\int_0^{\pi}(r(t))^3\sin^3 t\,dt$$

$$= \frac{2\pi}{3}\text{[illegible]}(t))^3\sin t\,dt = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} e^{-3t}\sin t\,dt$$

7.105 (1) $\quad r=2(\cos\theta+\sin\theta)=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$



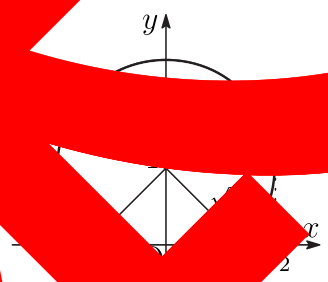
したがって，描く曲線は，点 (1, 1) を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の一部であり，

$\theta=0$ のとき $\quad r=2 \quad$ すなわち $\quad(2,\ 0)$

$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき $\quad r=0 \quad$ すなわち $\quad(0,\ 0)$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ であるから，右の図のようになる．

(2) 半径 $\sqrt{2}$，中心角が $\dfrac{3}{2}\pi$ の扇形の[illegible]で高さが 1 の三角形の面積の和であ[illegible]



$$\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\cdot\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=\mathbf{3}\ [illegible]$$

(3) 図形[illegible]軸に関して対称であるから，[illegible]立体[illegible]すると

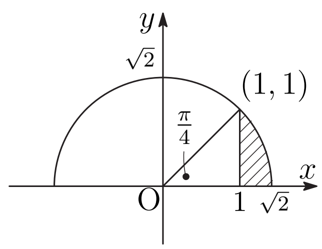
$$\frac{V}{2\pi}=[illegible]\sqrt{2-x^2}\,)^2dx-\int_1^{\sqrt{2}}(\,[illegible]-x\,)^2$$

$$[illegible]\int_0^{\sqrt{2}}(\,[illegible]\sqrt{2-x^2}\,)dx-\int_1^{\sqrt{2}}(\,[illegible]-x^2-2\sqrt{2-x^2}\,)dx$$

$$[illegible]-x^2)[illegible]\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{[illegible]}\,dx+2\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx$$

[illegible]，S_1[illegible]，$S_2=$[illegible]$\overline{2-x^2}$ とおくと

[illegible]$\dfrac{1}{[illegible]}$ 円の面積[illegible]右の図の斜線[illegible]るから



$$S_1=[illegible])^2=\frac{1}{2}\pi$$

$$S_2=[illegible])^2\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

ゆえに $\quad\dfrac{[illegible]}{2\pi}=\Big[\,3x-\dfrac{x^3}{3}\,\Big]_0^1+2S_1+2S_2=\dfrac{8}{3}+2\cdot\dfrac{\pi}{2}+2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right)$

したがって $\quad\dfrac{V}{2\pi}=\dfrac{3}{2}\pi+\dfrac{5}{3}\quad$ よって $\quad V=\boldsymbol{3\pi^2+\dfrac{10}{3}\pi}$

別解 求める立体の体積を V とすると

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{3}{4}\pi} r^3\sin\theta\,d\theta=\frac{16}{3}\pi\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\cos\theta+\sin\theta)^3\sin\theta\,d\theta \quad\cdots(*)$$

であるから

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\cos\theta+\sin\theta)^4\,d\theta=4\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\sin^4\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\theta = [illegible] \int^{\pi}\sin^4 t\,dt$$

$$=\Big[\,3\ [illegible]\ \frac{3}{[illegible]}\sin t\cos\ [illegible]\ \cos t\,\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$=\frac{9}{8}\pi+\ [illegible]$$

また $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\cos\theta+\sin\theta)^3(-\sin$ [illegible] $(\cos\theta+\sin\theta)$ [illegible] $\Big]_0$

$-$ [illegible] 4 [illegible]

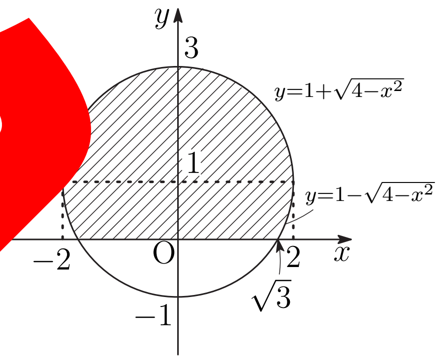
上の 2 [illegible] から $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\cos$ [illegible] $+\sin\theta)^3\sin\theta$ [illegible] $\frac{9}{16}\pi+$ [illegible]

[illegible]入すると

[illegible] $\frac{16}{[illegible]}\pi\times\left(\frac{9}{16}\pi+\frac{5}{8}\right)$ [illegible] $+\boldsymbol{\frac{10}{3}\pi}$

[illegible]立体[illegible]の図の[illegible]のまわ[illegible]回転[illegible]させる回[illegible]ある. [illegible]方程式[illegible] $(y-1$ [illegible]を y について解[illegible]

[illegible] $\sqrt{4-x}$ [illegible]



斜線部[illegible]て対称であるから，求める回転体[illegible]を V とすると

$$V=2\left\{\pi\int\ [illegible]\ \sqrt{4-x^2})^2dx-\pi\int_{\sqrt{3}}^{2}(1-\sqrt{4-x^2})^2dx\right\}$$

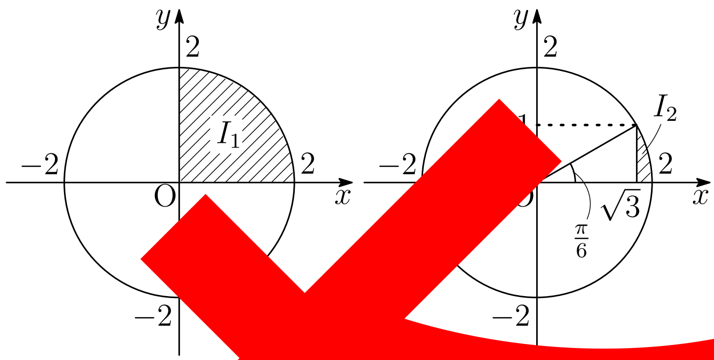
$$=2\pi\left\{\int_0\ [illegible]\ -x^2+2\sqrt{4-x^2})dx-\int_{\sqrt{3}}^{2}(5-x^2-2\sqrt{4-x^2}dx)\right\}$$

$$=2\pi\left\{\int_0^{\sqrt{3}}(5-x^2)dx+2\int_0^{2}\sqrt{4-x^2}dx+2\int_{\sqrt{3}}^{2}\sqrt{4-x^2}dx\right\}$$

ここで，$I_1=\displaystyle\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$，$I_2=\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-x^2}dx$ とおくと，これらはそれぞれ下の図の斜線部分の面積であるから

$$I_1=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot2^2=\pi$$

$$I_2=\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot1=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$



よって

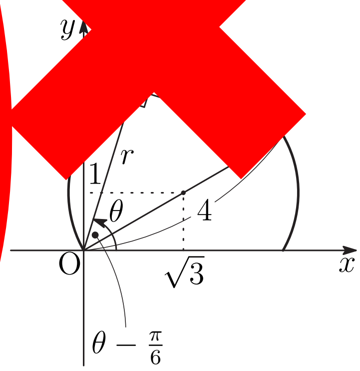
$$V=2\pi\left\{\left[5x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}+2 \text{[illegible]} \frac{\sqrt{3}}{3} \text{[illegible]} 6 \text{[illegible]} \pi^2+6 \text{[illegible]}\right.$$

別解 円 $x^2+(y-1)^2=4$ を x 軸方向に $\sqrt{3}$ だけ平行移動 [illegible] 円

$$\text{[illegible]}\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$$

[illegible] x 軸 [illegible] 極方程式で表すと

$$\text{[illegible]}=4\cos\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{6}\text{[illegible]}\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi\Big)$$



求め [illegible] の体積 [illegible] すると

$$\text{[illegible]}=\frac{2}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\sin\text{[illegible]}\frac{16}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^3\sin\theta \quad\cdots(*)$$

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta\text{[illegible]}\cos\theta)^4\,d\theta=16\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin^4\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\,d\theta=16\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin^4t\,dt$$

$$=\Big[\,6t-6\sin t\cos t-4\sin^3t\cos t\,\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=4\pi+\frac{9}{4}\sqrt{3}\quad\cdots①$$

また

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^3(-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta = \left[\frac{1}{4}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^4\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$= -\frac{9}{4} \quad \cdots ②$$

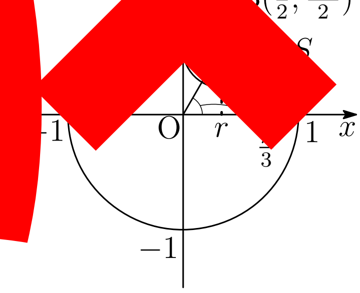
① − ② × $\sqrt{3}$ により　　$4\int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^3\,\mathrm{si}$ [illegible] $+\frac{9}{2}\sqrt{3}$

したがって　　$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}$ [illegible] $\theta = \pi + \frac{9}{8}\sqrt{3}$

上式を (∗) に代入すると

$V = \frac{16}{}$ [illegible] $\pi^2 + 6\sqrt{3}\pi$ [illegible]

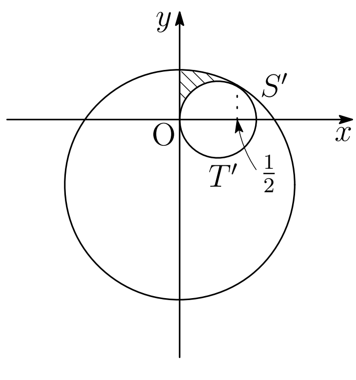
7.107　(1) OB の x 軸の正の方向と[illegible]は $\frac{\pi}{3}$ であ[illegible]
から，T の半径を r とす[illegible]，D の座標[illegible]B$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
$(r,$ [illegible] OD $= 2r$ である．
右[illegible]D + DB $= 1$ であるから



[illegible] ゆえに　$r = \frac{1}{3}$

[illegible] 径 $\mathbf{\frac{1}{3}}$

S，T [illegible]フを[illegible]向に $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ だけ[illegible]
動[illegible]図形を[illegible] T' とす[illegible]



[illegible] $+\left(y+\frac{}{3}\right)$ [illegible]

T' : [illegible] $\left.\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$

右の図の斜線[illegible]を x 軸のまわりに 1 回転し
てできる回[illegible]体積を求めればよい．
S' および[illegible]上半分の曲線の方程式は，それぞれ

$$y = \sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y = \sqrt{-x^2+\frac{2}{3}x}$$

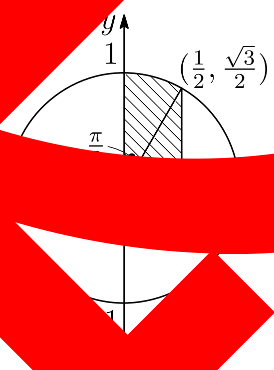
求める回転体の体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\sqrt{-x^2+\frac{2}{3}x}\right)^2\right\}dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(2-x)\,dx-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

ここで，$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$ とおくと，

I は右の図の斜線部分の面積であ[illegible]



$$I=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

よって

$$V=\frac{2}{3}\pi\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi I$$

$$=\frac{2}{3}\pi\times\frac{7}{8}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2}$$

(1) A[illegible]，P[illegible]り

[illegible] $\cos^2\theta+(a$ [illegible] $a)^2$

[illegible] $1-\sin^2\theta+$ [illegible] $\theta-1)^2$

[illegible] X^2 [illegible] $-1)^2$

[illegible] $-2a^2X+a^2+1$

よ[illegible] $\boldsymbol{=(a^2-1)X^2-2a^2X+a^2+1}$

(2) (1) の結果か[illegible] $X)=(a^2-1)\left(X-\frac{a^2}{a^2-1}\right)^2+\frac{1}{1-a^2}$

$0<a<1$ よ[illegible] $-1<-\frac{a^2}{a^2-1}<0$ であることに注意すると

$\frac{a^2}{a^2-1}<-1$ すなわち　$\frac{1}{\sqrt{2}}<a<1$ のとき　最大値 $\boldsymbol{f(-1)=4a^2}$

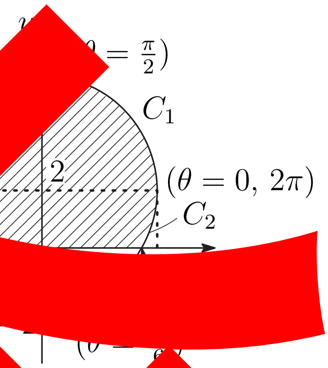
$\frac{a^2}{a^2-1}\geqq-1$　すなわち　$0<a\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{f\left(\frac{a^2}{a^2-1}\right)=\frac{1}{1-a^2}}$

(3) $a=2$ のとき

$$f(X)=3X^2-8X+5=3\left(X-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{1}{3} \quad (-1\leqq X\leqq 1)$$

したがって，$f(X)$ は $X=-1$，すなわち，$\mathbf{P_1(0,-2)}$ で最大値 **16** をとる．

A を中心とし，P_1 を通る円を



$$C(\theta)=(4\cos\theta,\ 4\sin\theta+2)$$

とおく．この円の $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ [illegible] $\frac{11}{6}\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分をそれぞれ [illegible] C_2 とすると，求める回転体の体積 V [illegible]

$$\frac{V}{2\pi}=\int_{C_1}y^2\,dx-\int_{C_2}y^2 \text{[illegible]}$$

このとき

$$y^2\,dx=y^2\frac{d\text{[illegible]}}{d\theta}d\theta=(4\sin\theta\ \text{[illegible]}\cos\theta\ \text{[illegible]}$$
$$=-16(4\sin^3\theta+4\sin\ \text{[illegible]}$$
$$=16(\sin 3\theta+2\cos 2\theta\ \text{[illegible]}\sin\theta-2)\,d\theta$$

したが[illegible]

$$\frac{V}{2\pi}=\text{[illegible]}(\sin 3\text{[illegible]}2\theta-4\sin\theta-2)\,d\theta$$

$$\text{[illegible]}\int^{2\pi}(\sin 3\theta+\text{[illegible]}\theta-4\sin\theta-2)\,d\theta$$

$$\text{[illegible]}+16\left[-\frac{\text{[illegible]}}{3}\text{[illegible]}+4\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$\text{[illegible]}-16\left[-\frac{1}{3}\cos 3\theta+\sin 2\theta+4\cos\theta\right]_{\frac{11}{6}\pi}^{0}$$

$$=\frac{64}{3}\text{[illegible]}6\left[-\frac{1}{3}\cos 3\theta+\sin 2\theta+4\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{11}{6}\pi}=\frac{64}{3}\pi+24\sqrt{3}$$

よって [illegible] $\dfrac{\mathbf{128}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi^2+48\sqrt{3}\pi}$

参照 九大 2012 年一般前期理系数学 $\boxed{\mathbf{1}}$ の解答[4]を参照．

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf

7.109 (1) $y = \dfrac{1}{2}\{x\sqrt{x^2+4} + 4\log(x+\sqrt{x^2+4})\}$ より

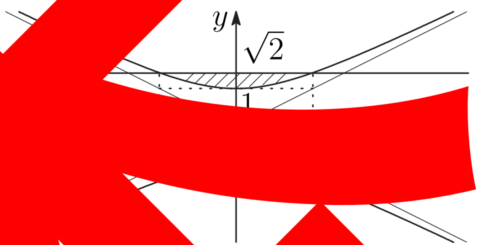
$$y' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+4} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} + 4\cdot\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{x+\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+4} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{4}{\sqrt{x^2+4}}\right) = \text{[illegible]}\ \mathbf{+\,4}$$

(2) 求める面積は，曲線 $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2}$ [illegible] ①

と直線 $y = \sqrt{2}\cdots$② で囲まれた [illegible]

面積である．①と②の共有点の x 座標 [illegible]



$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4} = \sqrt{2}$$

これを解いて　$x = \pm 2$

上の図の斜線部分の面積 [illegible] とすると， [illegible] 結果を [illegible]

$$\text{[illegible]} = 4\sqrt{2} - \int_0^2 \sqrt{x^2+4}\,dx$$

$$\text{[illegible]} - \frac{1}{2}\Big[\,x\sqrt{x^2+4} + 4\ \text{[illegible]} + \sqrt{x^2+4})\Big]_0^2$$

$$\text{[illegible]}\{4\sqrt{2} + 4\log(2+2\sqrt{2}) - 4\log 2\}$$

$$\text{[illegible]}\ \mathbf{2\sqrt{2}}\ \text{[illegible]}\ \mathbf{g(1+}\ \text{[illegible]}$$

[illegible] 求め [illegible] 体の [illegible] とすると

$$V = \pi\ \text{[illegible]} \int_1^{\sqrt{2}} (y^2-1)\,dy$$

$$= 4\pi\left[\frac{y^3}{3} - y\right]_1^{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{4}{3}(2-\sqrt{2})\pi}$$

7.110 (1) C_1 の x 軸と [illegible] 点の x 座標は

$$\text{[illegible]} - a - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm\sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

$\alpha = -\sqrt{\frac{a+1}{a}}$, $\beta = \sqrt{\frac{a+1}{a}}$ とおくと，求める面積 S は

$$S = -\int_{\alpha}^{\beta} (ax^2 - a - 1)\,dx = -a\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$= \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\,dx = \frac{a}{6}\left(2\sqrt{\frac{a+1}{a}}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{(a+1)^3}{\ldots}}}$$

(2) $f(a) = \frac{(a+1)^3}{a}$ とおくと $(a > \ldots$

$$f'(a) = \frac{3(a+1)^2a - (\ldots}{a^2} \ldots 1)(a+1)^2$$

したがって，$f(a)$ の増減表は，…

a	(0)	$\cdots$		$\cdots$
$f'(a)$				$+$
$f(a)$			$\frac{27}{4}$	$\nearrow$

よ… $a = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$ のとき，最小値 $\frac{4}{3}\sqrt{\ldots}$ …る．

解… (a) は原… $= (x+1)^3$ 上の点 $(a, \ldots 1)^3)$ を結ぶ直線の傾きで

ある… $a > 0$ … からこの曲線に引… 接線の傾きを求めると $\frac{27}{4}$.

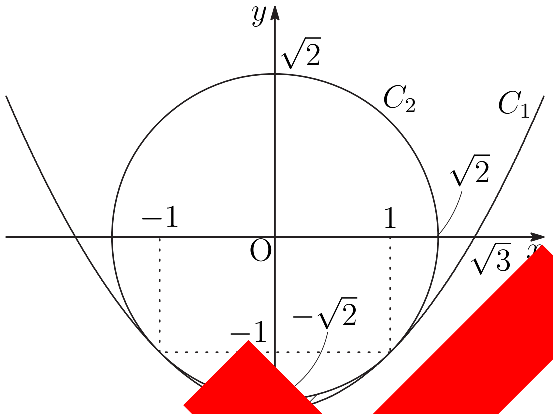
…って … $\geqq$

$a = \frac{1}{\ldots}$ … 原点 … C_1 上の点 P$\left(\ldots - \frac{3}{2}\right)$ との距離について

$$\ldots t^2 + \left(\ldots\right)^2 \ldots \frac{\ldots}{2} + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}(t^2-1)^2 + 2$$

し…て … は $t = \pm 1$ のとき最小値 $\sqrt{2}$ をとる．

ゆえに，C_1 … の接点の座標は，$(\pm 1, -1)$



$C_1 : x^2 = 2y + 3$，$C_2 : x^2 = 2 - y^2$ で

$$\frac{V}{\pi} = \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} (2y+3) \quad -\sqrt{2}$$

$$= \Big[\, y^2 + 3 \quad \Big]_{-\frac{3}{2}} - \Big[\, 2y - \quad = \quad 12$$

$$\left(\frac{\mathbf{23}}{\mathbf{12}} - \frac{\mathbf{4\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}\right)\boldsymbol{\pi}$$

7.11 $f(x)$ を と

$(x) = \quad \frac{1}{x^2} + \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)' \quad + \log x\left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{1 - 2\log x}{x^3}$

$f'($ とす $\sqrt{e}$

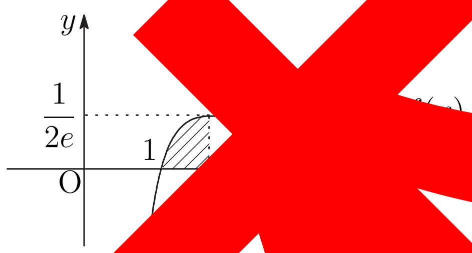
$= \frac{\log}{}$ $\geqq 1)$ の ようになる．

x		$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，求め 大値は $\quad \boldsymbol{f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}}$

(2) 求める面積を S とすると，(1) の結果から

$$S=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x^2}\,dx=-\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx$$
$$=-\left[\frac{1}{x}\log x\right]_1^{\sqrt{e}}+\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=-\left[\frac{1}{x}(\log x+1)\right]_1^{\sqrt{e}}=\mathbf{1}-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}\,[illegible]}$$



(3) 求める立体の体積を V と [illegible]

$$V=2[illegible]\int_1^{\sqrt{e}}x\cdot\frac{\log x}{x^2}\,dx=2\pi\int_1^{\sqrt{e}}(\log x)(\mathrm{l}[illegible]\,dx=[illegible]\Big]^{\sqrt{e}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$$

[illegible]ウム[illegible]型求積法

$a\leqq$ [illegible] の [illegible] $(x)\geqq 0$ のとき，y [illegible]) のグラフと x 軸および 2 [illegible] $=a$ [illegible] 囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してでき [illegible] 立体の体 [illegible] は

$$V=2\pi\int_a [illegible]\,dx$$

7.112 [illegible] s， $\sqrt{t}$ [illegible] C_1 上にあ [illegible] $(s>0,\ t>0)$

[illegible] $s)^2$ [illegible] $+(\sqrt{t})$ [illegible] 1 ゆえに $\boldsymbol{s=-4t+4}$

$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を [illegible] ついて微分すると

$$\frac{x}{2}+2yy'=0\quad ゆえに\quad -\frac{1}{y'}=\frac{4y}{x}$$

C_1 上の点 $\mathrm{P}(\sqrt{s},\ \sqrt{t})$ における法線 l の傾きは $\quad -\dfrac{1}{y'}=\dfrac{4\sqrt{t}}{\sqrt{s}}$

したがって，l の方程式は

$$y-\sqrt{t}=\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{s}}(x-\sqrt{s}) \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{s}}x-3\sqrt{t}$$

$\sqrt{s}=2\sqrt{1-t}$ であるから　$\boldsymbol{y=\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}x-3\sqrt{t}}$　$\cdots$①

(2) ① を $x^2+y^2=1$ に代入すると　$x^2+\left(\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}x-\right.$ [illegible] 1

したがって　$\frac{1+3t}{1-t}x^2-\frac{12}{\sqrt{1-}}$ [illegible] $9t-1$ [illegible] $\cdot$②

このとき，$D=0$ であるから

$$D/4=\left(-\frac{6t}{\sqrt{1-t}}\right)^2-\frac{1+}{}$$ [illegible] $\frac{}{1-t}$

上式より $t=\frac{1}{3}$　ゆえに [illegible] $\frac{}{3}$，$\sqrt{s}$ [illegible] $\sqrt{1-}$ [illegible] $\sqrt{6}$

した[illegible]　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{3}}, \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)$

[illegible] 3 を ([illegible] 代入すると

[illegible] $y=$ [illegible] $\sqrt{3}\cdots$①$'$,　$3x^2-$ [illegible] $+2=0\cdots$②$'$

[illegible] ら　x [illegible] 3 [illegible] $'$ に代入して　$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

した[illegible] $-\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}\Big)$

[illegible] より [illegible] $\frac{+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

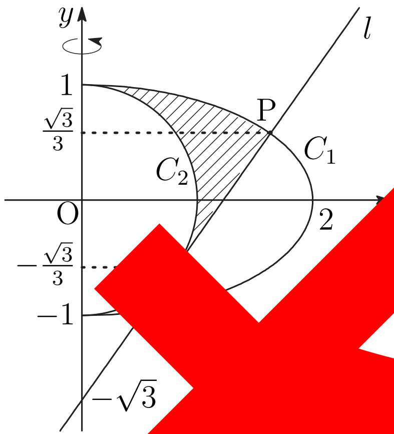
$$\frac{}{\pi}=\int_{-}\left(\frac{y+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2dy+\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}(4-4y^2)dy-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}(1-y^2)dy$$

$$=\frac{1}{6}\Big[\ldots\sqrt{3})^3\Big]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}+4\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}+\left[\frac{y^3}{3}-y\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}$$

$$=\frac{}{6}\cdot\frac{56}{9}\sqrt{3}+4\left(\frac{2}{3}-\frac{8}{27}\sqrt{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}-\frac{8}{27}\sqrt{3}\right)$$

$$=2-\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \dfrac{18-4\sqrt{3}}{9}\pi}$



7.113 (1) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \cos\theta$ [illegible]

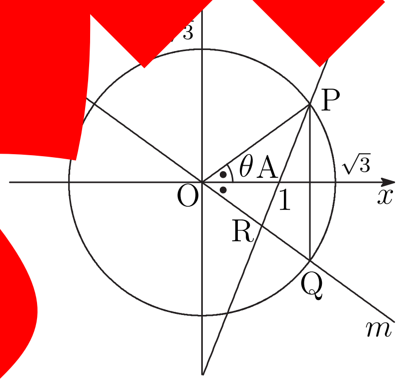
$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < \sqrt{3}\cos$ [illegible] 3　よって [illegible] $\mathrm{os}\,\theta >$ [illegible]

(2) 2 [illegible] る直線 l の方程式は

[illegible] $\mathrm{in}\,\theta$ [illegible] $\boldsymbol{(x-1)}$

2 [illegible] Q を [illegible] 方程式は

[illegible] $= -$ [illegible] $\boldsymbol{x}$



[illegible] で求め [illegible] 直線 l，m [illegible] y を消去すると

[illegible] $\cos\theta$ [illegible] $-1) = -(\tan\theta)x$　ゆえに　$\dfrac{\sqrt{3}(x-1)}{\sqrt{3}\cos\theta - 1} = -\dfrac{x}{\cos\theta}$

(1) の結果に [illegible] て　$x = \dfrac{\sqrt{3}\cos\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta - 1}$

これを m [illegible] 式に代入して　$y = -\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta - 1}$

よって　　$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}\cos\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta - 1},\ -\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta - 1}}\right)$

(4) $\mathrm{PQ} = 2\sqrt{3}\sin\theta$ であり，A と直線 PQ との距離は　$\sqrt{3}\cos\theta - 1$

したがって　$S = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\sin\theta(\sqrt{3}\cos\theta - 1) = \sqrt{3}(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - \sin\theta)$

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\theta} &= \sqrt{3}\{\sqrt{3}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \cos\theta\}\\ &= \sqrt{3}(2\sqrt{3}\cos^2\theta - \cos\theta - \sqrt{3})\\ &= \sqrt{3}(\sqrt{3}\cos\theta)(2\cos\theta - \sqrt{3})\end{aligned}$$

S の増減表は

θ	(0)	$\cdots$	[illegible]	$\cdots$	(π [illegible]
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	[illegible]	[illegible]	[illegible]
S		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	[illegible]	[illegible]

よって　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$ のとき，最大値 [illegible]

(5) (4) の結果から，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ の [illegible] $\left(\dfrac{3}{2},\ \text{[illegible]}\right)$ [illegible] $\mathrm{Q}\left(\text{[illegible]}\sqrt{3}\right)$

また，[illegible]のとき，(2),(3) の[illegible]結果から

[illegible] $\left(\text{[illegible]}3\text{[illegible]}, -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$，　$l : y = \sqrt{3}(x$ [illegible] $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$[illegible]

2 つの[illegible] $\geqq$ [illegible] $y^2 \leqq 3$ で囲まれた[illegible]を y 軸のまわりに 1 回転して[illegible]る立体[illegible]すると

[illegible] $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ [illegible] $\left.\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}dy$ [illegible] $\displaystyle\int^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{(3 - y^2) - \dfrac{9}{4}\right\}dy$

[illegible] $\dfrac{\text{[illegible]}}{4}y -$ [illegible] $\Big]^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $=$ [illegible]

[illegible]た部分を y [illegible]わりに 1 回転してできる立体の体積を V_2 [illegible]ると

$$\frac{V_2}{2\pi} = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} \text{[illegible]}3(x-1) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)\right\}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}}(4x^2 - 3x)\,dx$$

$$= \text{[illegible]}3\text{[illegible]}x^3 - \frac{3}{2}x^2\Big]_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} = \frac{15\sqrt{3}}{32}$$

よって　　$V = V_1 + V_2 = 2\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{15\sqrt{3}}{32}\right) = \boldsymbol{\dfrac{23\sqrt{3}}{16}\pi}$

補足 以下の検算法がある (高校数学の範囲外のため答案には書かないこと).

∠POQ を中心角とする扇形の半径を r, P の y 座標を a とすると, この扇形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_3 とすると[5]

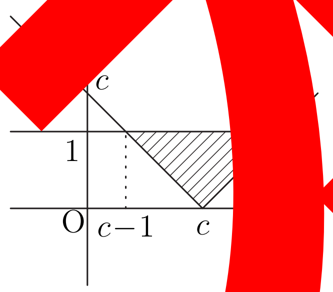
$$V_3 = \frac{4}{3}\pi r^2 a = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\pi$$

△OPQ の面積を T, 重心の x 座標を h とし, これを [illegible]のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_4 とすると

$$T = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad h = \frac{3}{4}, \quad [illegible]\, h = [illegible]\cdot\frac{3}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{16}\pi$$

よって　　$V = V_3 - V_4 = 2\sqrt{3}\pi - 9$ [illegible]

7.114 (1) $y = |x-c|$ と $y = 1$, $x = 2$ で[illegible]図の斜線部分である.



した[illegible]て

$f(c)$ [illegible] $\displaystyle\int_{c-1}$ $x($[illegible]$- c|)\,d$[illegible]

$= $ [illegible]$+1)\,dx +$ [illegible]$-x+c+1)\,dx$

$= $ [illegible]$\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{}{2}$[illegible]$\Big]_{c-1} + \left[-\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}(c+1)x^2\right]_c^2$

$= $ [illegible]$c^3 - \dfrac{1}{2}c^2 + \dfrac{[illegible]}{2}c - \dfrac{5}{6}$

よって　　$\boldsymbol{f}$[illegible]$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}(-c^3 - 3c^2 + 15c - 5)}$

(2) (1) の結果[illegible]$'(c) = \pi(-c^2 - 2c + 5)$

$1 < c < 2$ [illegible]して, $f'(c) = 0$ を解くと　$c = \sqrt{6} - 1$

したがって, $f(c)$ の増減表は, 次のようになる.

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf の $\boxed{1}$ を参照.

c	(1)	$\cdots$	$\sqrt{6}-1$	$\cdots$	(2)
$f'(c)$		$+$	0	$-$	
$f(c)$		↗	極大	↘	

よって，$f(c)$ が最大となる c の値は　$\boldsymbol{c = \sqrt{6} - 1}$

7.115　(1)　$f(x) = \sqrt{x} - 2 - \log x + \log 4$ とおくと

x	[illegible]	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	[illegible]	$-$	0	$+$
[illegible]	[illegible]	↘	0	↗

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2[illegible]}$$

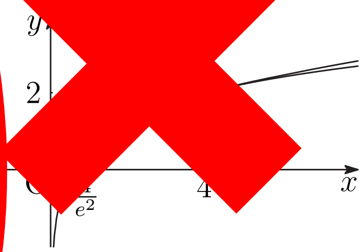
右の増減表により，$f(x) \geqq f(4$[illegible]ある

$$\sqrt{x} - 2 - \log x + \log 4 \geqq 0 \quad [illegible] \quad \geqq 2 + \log \frac{x}{[illegible]}$$

上式の等号は，$\boldsymbol{x = 4}$ のとき成り[illegible]

(2)　$2 + \log \dfrac{x}{4} = 0$ より　　$\boldsymbol{x =}$ [illegible]

(3)　D は右の図の斜線部分で[illegible]，その面積を S とすると



$$S [illegible] - \int_{\frac{4}{e^2}}^{4} (2 + \log x - \log 4)\,dx$$

$$= \Big[\,2[illegible]\Big]_0 [illegible] (\log x - \log 4 + 1)\Big]_{[illegible]}$$

$$[illegible]\ \boldsymbol{3} - \frac{\boldsymbol{4}}{[illegible]}$$

$y = 2$[illegible]$\dfrac{x}{4}$ を[illegible]て解くと　x[illegible]$^{-2}$

[illegible]を x[illegible]　$x =$ [illegible]

$$[illegible] \int_0^2 \{(4e[illegible]\}\,dy = \int_0^2 (16e^{2y-4} - y^4)\,dy$$

$$[illegible]\,8e^{2y-4} - \frac{y^5}{5}\Big]_0^2 = 8\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{e^4}\right)$$

よって　$\boldsymbol{V}$ [illegible] $\boldsymbol{\pi\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{e^4}\right)}$

別解　$$\frac{V}{2\pi} = \int_0^{[illegible]} [illegible]\,x\,dx - \int_{\frac{4}{e^2}}^{4} x\left(2 + \log\frac{x}{4}\right)dx$$

$$= \left[\,\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\,\right]_0^4 - \left[\,\frac{x^2}{4}\left(2\log\frac{x}{4} + 3\right)\right]_{\frac{4}{e^2}}^{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{e^4}\right)$$

7.116 (1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ $(x \geqq 1)$ より $\{f(x)\}^2 = 1-\dfrac{1}{x^2}$

上の第2式の両辺を微分すると

$$2f(x)f'(x)=\frac{2}{x^3} \quad \text{ゆえに} \quad f(x)f'(x)=\frac{1}{x^3} \quad \cdots ①$$

$x>1$ のとき，$f(x)>0$ であるから，① より $f'(x) >$ [illegible]

よって，区間 $x>1$ で $f(x)$ は増加する．

① の両辺を微分すると $\{f'($[illegible]$f(x)$[illegible]$-\dfrac{3}{x^4}$

したがって $f(x)f''(x)=-\{f'(x$[illegible]

$x>1$ のとき，$f(x)>0$ である[illegible]$(x)<0$

よって，区間 $x>1$ で，曲[illegible]に凸[illegible]る．

(2) ① より $f(\sqrt{2})f'(\sqrt{2}$[illegible]$(\sqrt{2})^3}$

$f($[illegible]であるから $f'(\sqrt{2})=\dfrac{1}{2}$

[illegible]点 $($[illegible]を通り，傾き $\dfrac{1}{2}$ の直線[illegible]から

[illegible]$(x-\sqrt{2})$ すなわち $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x}$

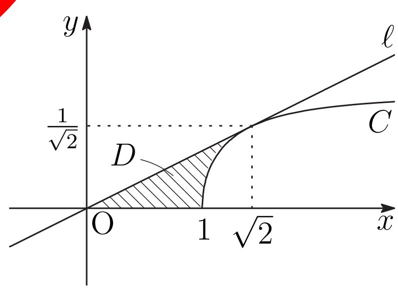
[illegible] $y=$[illegible]より[illegible]$\dfrac{1}{1-y^2}$，[illegible]x より $x^2=4y^2$

[illegible]て，求[illegible]積 [illegible]

[illegible]$\dfrac{1}{1-y^2}-4y$[illegible]$\Big)dy$

$=\Big[$[illegible]$\dfrac{y+1}{y-1}\Big|-\dfrac{4}{3}y^3\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$=$[illegible]$+1)-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$



よって $\boldsymbol{V=\pi\left\{\log(\sqrt{2}+1)-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right\}}$

別解 (バウムクーヘン型求積法)

$$\frac{V}{2\pi} = \int_0^{\sqrt{2}} x\cdot\frac{1}{2}x\,dx - \int_1^{\sqrt{2}} x\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{2}} - \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1})\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

よって　$V = \pi\left\{\log(\sqrt{2}+1)\ [illegible]\ \sqrt{2}\ [illegible]\right\}$

(4) $\mathrm{A}(\sqrt{2},\ f(\sqrt{2}))$, $\mathrm{B}\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とする [illegible] $\frac{1}{[illegible]} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{[illegible]} = \frac{1}{[illegible]}$

曲線 C の方程式を x について解く [illegible]

また，定積分 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-[illegible]}}$ [illegible] ついて [illegible] sin [illegible] とおくと

$$[illegible]\frac{1}{[illegible]y^2} = \frac{1}{\cos\theta},\quad \frac{dy}{d\theta} = \cos\theta$$

[illegible]	$0 \longrightarrow$ [illegible]
[illegible]	0 [illegible]

[illegible] って　$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}}$ [illegible] os [illegible] θ

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ [illegible]\ \frac{[illegible]}{4}$$

[illegible] って　$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ [illegible] $y^2}\,dy$ [illegible] $= \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$

[illegible] P [illegible] $(\sqrt{2})$ [illegible] とすると [illegible] $\mathrm{Q} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

[illegible] $\sqrt{2}$ $\frac{\sqrt{x^2[illegible]}}{x}$ [illegible] て，$x = \frac{1}{\cos\theta}$ とおくと

$\frac{\sqrt{x^2[illegible]}}{x}$ [illegible] $\sin\theta$,　$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

x	$1 \longrightarrow \sqrt{2}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

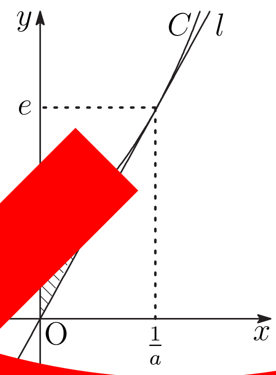
したがって　[illegible] $\sqrt{2}$ $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)d\theta$$

$$= \left[\tan\theta - \theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

よって　　$S = \triangle\mathrm{OPQ} - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$

7.117　(1)　$y = e^{ax}$ より　$y' = ae^{ax}$



C 上の点 $(t,\ e^{at})$ における接線の方程式は

$$y - e^{at} = ae^{at}(x - t)$$

ゆえに　　$y = ae^{at}x + (1 - at)e^{at}$

これが原点を通るから

$$1 - at = 0 \quad ゆえに \quad t = [illegible]$$

l の方程式は　　$y = aex$

よって　　$V_1 = \pi \int_0^{\frac{1}{a}} (e^{ax}$ [illegible] $\frac{1}{3} \cdot \pi e^2 \cdot$ [illegible]

$$= \frac{\pi(e^2-1)}{2a} - \frac{\pi e^2}{3a} = [illegible]$$

(2)　[illegible] $= \frac{1}{a} \log y$

よって　$V_2 =$ [illegible] $\Big)^2 e - \frac{\pi}{a^2} \int_1^e (\log$ [illegible]

[illegible] $\{(\log y)^2 - 2\log y + 2\}\Big]_1^e$

[illegible] $(e-2)$ [illegible] $=$ [illegible]

別解 [illegible] $- aex)$ [illegible] $\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) - \frac{ae}{3}x^3 \Big]_0^{\frac{1}{a}} = \frac{2\pi(3-e)}{3a^2}$

(3)　[illegible] $V_1 = V_2$ に代入して

[illegible] $= \frac{2\pi(3-e)}{3a^2}$　　よって　$\boldsymbol{a = \frac{4(3-e)}{e^2-3}}$

7.118　(1)　$f(x)$，$g(x)$ [illegible] すると

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\sin x, \quad g'(x) = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の接点が $(p,\ q)$ であるから，$q = f(p) = g(p)$，$f'(p) = g'(p)$ より

$$q = \frac{1}{2}\cos p = \cos\frac{p}{2} + c \qquad \cdots ①$$
$$-\frac{1}{2}\sin p = -\frac{1}{2}\sin\frac{p}{2} \qquad \cdots ②$$

② より　$\sin\frac{p}{2}\left(\cos\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$　$p \neq 0$ であるから [illegible] $\frac{2}{3}\pi$

これを ① に代入すると　$q = \frac{1}{2}$ [illegible] $= \cos\frac{\pi}{3}$ [illegible]

ゆえに　$q = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}+c$　よ [illegible] $\left(\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{4}\right)$，　$c = -\frac{3}{4}$

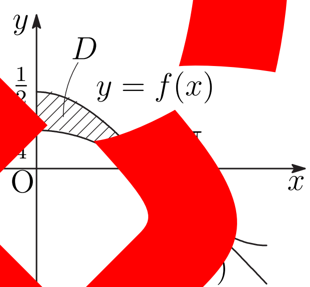
したがって　$f(x) - g(x) = \frac{1}{2}\cos$ [illegible]

$= \frac{1}{2}$ [illegible] $\frac{x}{2}$ [illegible] $\frac{3}{4}$

[illegible] $\left(\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)$ [illegible]

よ [illegible] $\geqq g(x)$　$\left(x = \frac{2\pi}{3}\right.$ のとき [illegible] $\left.\right)$

(2 [illegible] の結果 [illegible] 形 D は，下の図の斜線 [illegible] である．

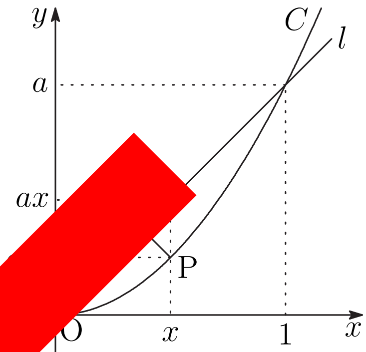


[illegible] る回転体の [illegible] は，$(*)$ により

$$\frac{V}{2\pi} = \text{[illegible]} \{f(x) - g(x)\}\,dx$$
$$= \text{[illegible]} \left(\frac{1}{2}x\cos x - x\cos\frac{x}{2} + \frac{3}{4}x\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}(x\sin x + \cos x) - 2\left(x\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{8}x^2\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}$$
$$= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi + \frac{5}{4}$$

よって　$\boldsymbol{V=\pi\left(\frac{\pi^2}{3}-\sqrt{3}\pi+\frac{5}{2}\right)}$

7.119 $C: y=ax^2$，$l: y=ax$ とする．C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ ax^2)$，l 上の点を $\mathrm{Q}(x,\ ax)$ とし，P から l に垂線 PH を引くと



$$\mathrm{PH}:\mathrm{HQ}:\mathrm{PQ}=1:a:\sqrt{1+a^2}$$

$t=\mathrm{OH}$，$h=\mathrm{PH}$ とすると

$$\mathrm{PQ}=ax-ax^2=ax(1-x) \text{ [illegible]}$$

であるから

$$h=\frac{ax(1-x)}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$t=\mathrm{OQ}-\mathrm{HQ}= \text{[illegible]}\ x-\frac{a^2x\text{[illegible]}}{\sqrt{\text{[illegible]}}} = \text{[illegible]}\ x^2 \text{[illegible]}$$

ゆえに　[illegible] $\dfrac{1+2a^2x}{\sqrt{1+a^2}}$

t	0	$\longrightarrow$	[illegible] a^2
x	0	$\longrightarrow$	[illegible]

求め[illegible]体[illegible] V とすると

$$V=\text{[illegible]}\pi\text{[illegible]}\,dt=\pi\int_0^1\frac{a^2x^2(\text{[illegible]}}{1+a\text{[illegible]}}\cdot\frac{1+2a^2x}{\sqrt{1+a^2}}dx$$

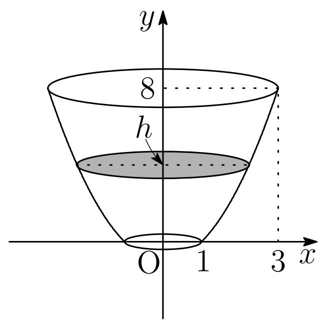
$$=\text{[illegible]}+a^2)^{\frac{3}{2}}\text{[illegible]}(1-x)^2\text{[illegible]}a^2x^3(1-x)^2\}dx$$

[illegible]こで　[illegible] $x^2(1$ [illegible] $\frac{1}{30}$，$\int_0^1 x^3($ [illegible] $)^2\,dx=\frac{1}{60}$

よ[illegible]　V [illegible] $\frac{\text{[illegible]}a^2}{\text{[illegible]}a^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\text{[illegible]}}{30}\text{[illegible]}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi a^2}{30\sqrt{1+a^2}}}$

解説　(分[illegible]]20[illegible]

7.120　(1)　$x^2=y+1$ で[illegible]ら



$$V=\text{[illegible]}+1)\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}+y\right]_0^h=\boldsymbol{\pi\left(\frac{h^2}{2}+h\right)}$$

(2) 容器に水が満たされたときの水の体積は，(1) の結果に $h=8$ を代入して

$$V=\pi\left(\frac{8^2}{2}+8\right)=40\pi$$

毎秒 2π の割合で注入するので　$\dfrac{40\pi}{2\pi}=\mathbf{20}$ (秒後)

(3) $t=6$ のときの水の体積は　$2\pi\times 6=12\pi$

このときの水面の高さ h は，(1) の[illegible]結果から

$$2\pi\left(\frac{h^2}{2}+h\right)=12\pi \quad h>[illegible]を解くと \quad h=4$$

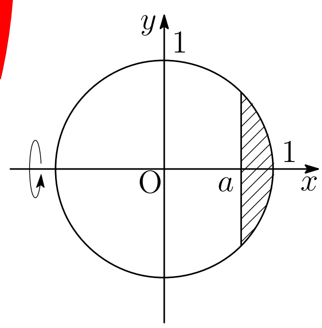
(1) の結果を t で微分すると　$\dfrac{dV}{d[illegible]}$ [illegible]

上式に $\dfrac{dV}{dt}=2\pi$，$h=4$ を代[illegible]と

$$2\pi=\pi(4+1)\frac{[illegible]}{dt} [illegible]ゆえに \quad \frac{dh}{dt} [illegible] よって[illegible]$$

7.121　(1) [illegible] $\dfrac{\boldsymbol{20\pi}}{\mathbf{3}}$ (m^3)

[illegible]の図[illegible]軸のまわりに回転[illegible]
立体[illegible]積を V[illegible]と



[illegible] (a) [illegible] $(1-$ [illegible]

$$[illegible]=\pi\left[[illegible] \right] [illegible] \frac{\pi}{3}(1-a)^2 [illegible]$$

[illegible]て[illegible]体積を V [illegible]

$$[illegible]\pi\cdot 2^2\cdot h-V(1-h)=4\pi h-\frac{\pi}{3}h^2(3-h)$$

$$[illegible]\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{(h^3-3h^2+12h)} \quad (\mathrm{m}^3)$$

(3) 条件から [illegible] a　(2) の結果から　$\dfrac{dV}{dh}=\pi(h^2-2h+4)$

よって　$v(h)=\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{dh}{dV}\cdot\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dh}}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\pi(h^2-2h+4)}}$　(m/s)

(4) (3) の結果から　$v(h) = \dfrac{a}{\pi\{(h-1)^2+3\}}$

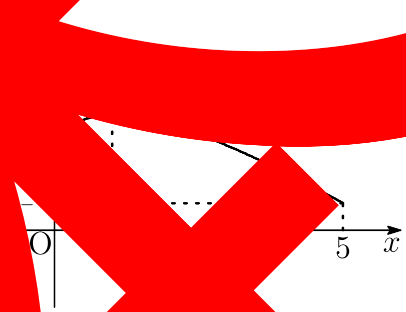
$0 < h < 2$ より，$v(h)$ は $h=1$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{a}{3\pi}}$ (m/s) をとる．

7.122 (1) $f(x) = 1 + 2\sqrt{x} - x$ より

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \qquad f''(x) [illegible] \frac{1}{[illegible]\sqrt{x}}$$

したがって，グラフの増減・凹[illegible]びグラ[illegible]は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	2[illegible]



(2) V [illegible] $+ 2\sqrt{x} - x)^2\,dx = \pi\int_0^h (x^2 -$ [illegible]

$= \pi\Big[$ [illegible] $\sqrt{x} + x^2 + \dfrac{8}{3}x\sqrt{x} + x$ [illegible]

[illegible] $\boldsymbol{\Big(\dfrac{1}{3}h^3}$ [illegible] $\boldsymbol{h^2 + \dfrac{8}{3}h\sqrt{h} + h\Big)}$

(2) の[illegible] $h =$ [illegible]入すると　V [illegible] π　よって　$t = \boldsymbol{\dfrac{172\pi}{15a}}$

[illegible] $\pi\int^h$ [illegible] $\sqrt{x} -$ [illegible] $\dfrac{}{dh} = \pi(1+2\sqrt{h}-h)^2$

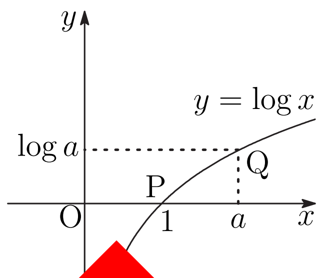
$\dfrac{d[illegible]}{dt}$ [illegible] $\dfrac{}{dh}\dfrac{}{d[illegible]}$ [illegible]式および $\dfrac{dV}{dt} = a$ を代入すると

$$a = \pi(1+2\sqrt{h}-h)^2\frac{dh}{dt}$$

したがっ[illegible] $\dfrac{[illegible]h}{dt} = \dfrac{a}{\pi(1+2\sqrt{h}-h)^2}$

よって，$h=4$ のとき　$\boldsymbol{\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{a}{\pi}}$

7.123 (1) $y=\log x$ より $x=e^y$ であるから



$$V=\pi\int_0^{\log a} x^2dy$$
$$=\pi\int_0^{\log a} e^{2y}dy$$
$$=\frac{\pi}{2}\Big[\,e^{2y}\,\Big]_0^{\log a}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}(a^2-1)}$$

(2) 条件および (1) の結果から

$$mt=\frac{\pi}{2}(a^2-1) \quad \text{[illegible]} \quad \frac{\ \ mt}{}+1$$

また，$h=\log a$ であるから，上式 [illegible]

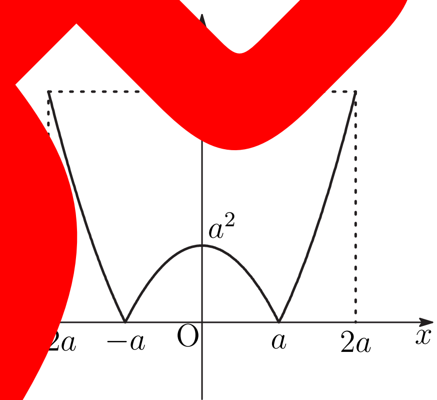
$$h=\log a=\frac{1}{\ }\ \text{[illegible]}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\ \text{[illegible]}$$

これを t で微分すると

$$v=\frac{dh}{dt}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\log\left(\ \text{[illegible]}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{2m}{\pi}}{\frac{2mt}{\pi}+1}=\boldsymbol{\frac{\ }{2\ \text{[illegible]}\ \pi}}$$

[illegible] (1) [illegible] $=|x^2$ [illegible] $=\Big\{$ [illegible] $(-2a\leqq x\leqq -a,\ a\leqq x\leqq 2a)$
[illegible] $(-a$ [illegible] $a)$

よっ [illegible] $=f($ [illegible] フは，次のよ [illegible] る．



(2) $0\leqq x\leqq a$ のとき　$y=a^2-x^2$ より　$x^2=a^2-y$
$a\leqq x\leqq 2a$ のとき　$y=x^2-a^2$ より　$x^2=a^2+y$

よって，求める体積 V は

$$V = \pi \int_0^{a^2} (a^2 + y)\,dy - \pi \int_0^{a^2} (a^2 - y)\,dy$$
$$= \pi \int_0^{a^2} 2y\,dy = \pi \Big[\, y^2 \,\Big]_0^{a^2} = \boldsymbol{\pi a^4}$$

(3) 容器が一杯になったときの水の体積は

$$V + \pi \int_{a^2}^{3a^2} (a^2 + y)dy \quad \ldots \quad \pi\Big[\, a^2 \ldots \,\Big]_{a^2} = 7\pi a^4$$

よって　　$T = \dfrac{7\pi a^4}{\pi a^2} = \boldsymbol{7a^2}$

(4) 水面の高さが a^2 になる時間は … 結 … $= a^2$

i) $0 < t \leqq a^2$ のとき

$$\pi a^2 t = \pi \int_0^h (a^2 + y)dy \quad \ldots \quad (a^2 \ldots$$
$$= \pi \int_0^h 2y\,dy = \pi\Big[\ldots$$

… a^2 … すなわち　$h = a$ …

… $< t$ … とき

$$\pi a^2 t \ldots \int_{a^2}^{h} (a^2 + y)d \ldots$$
$$= \pi a \ldots \Big]_{a^2} = \pi\left(-\frac{a^4}{2} + a^2 h + \frac{h^2}{2}\right)$$

… に … $= -\dfrac{a^4}{2} + a^2 h + \dfrac{h^2}{2}$

… $+ 2a^4 = h^2 + 2a^2 h + a^4$

… $+ a^2)^2 = a^2(2t + 2a^2)$

$h > a^2$ … して　$h = a\sqrt{2t + 2a^2} - a^2$

よって　$\boldsymbol{h} = \begin{cases} \boldsymbol{a\sqrt{t}} & \boldsymbol{(0 < t \leqq a^2)} \\ \boldsymbol{a\sqrt{2t + 2a^2} - a^2} & \boldsymbol{(a^2 < t < T)} \end{cases}$

(5) $v = \dfrac{dh}{dt}$ であるから　$\boldsymbol{v} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2\sqrt{t}}} & (\boldsymbol{0 < t \leqq a^2}) \\ \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\sqrt{2t+2a^2}}} & (\boldsymbol{a^2 < t < T}) \end{cases}$

解説 たとえば，$0 \leqq x \leqq 2a$ の範囲で $y = |x^2 - a^2|$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_1 は

$$\frac{V_1}{2\pi} = \int_0^{2a} x\,|x^2 - a^2|\,dx$$

$$= -\int_0^a (x^3 - [illegible])\,dx + \int_a^{2a} ([illegible])\,dx$$

ここで $x^3 - a^2x$ の原始関数の 1 つを [illegible] $\dfrac{a^2}{[illegible]}x^2$ とおくと

$$\frac{V_1}{2\pi} = F(0) + [illegible]$$

$$= 0 [illegible] 2\cdot\left([illegible] \right)$$

ゆえに　　$V_1 = 5\pi a^4$

本題の[illegible]の容積は　$\pi(2a)^2{\cdot}3a^2 - V_1 = [illegible] - 5\pi [illegible]$

7.125 $x = \log [illegible]$，$y = \sqrt{t^2+1}$ より

$$\frac{dx}{dt} = [illegible] = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

ゆえ[illegible]

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2} = 1$$

[illegible]て，求[illegible]弧長は

$$[illegible]\sqrt{[illegible]\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{t_0} dt = \boldsymbol{t_0}$$

7.126 (1) [illegible] $r\sin\theta$ を θ [illegible]て微分すると

$$[illegible] \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

したがって

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)^2$$

$$= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$$

$$= \boldsymbol{\{f'(\theta)\}^2 + \{f(\theta)\}^2}$$

(2) $f(\theta)=\sin^3\dfrac{\theta}{3}$ を微分すると

$$f'(\theta)=3\sin^2\frac{\theta}{3}\cdot\frac{1}{3}\cos\frac{\theta}{3}=\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$$

したがって

$$\{f'(\theta)\}^2+\{f(\theta)\}^2=\left(\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\right)^2+\left(\sin^3\right.$$ [illegible] $$\sin^4\frac{\theta}{3}$$

求める長さを l とすると

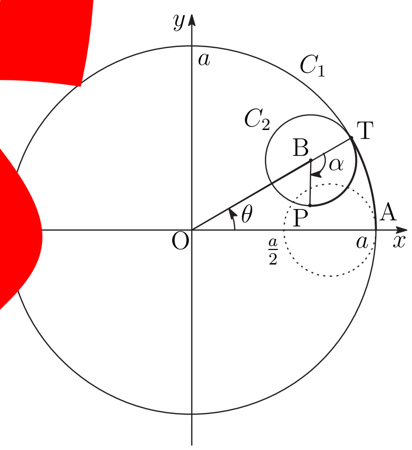
$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$ [illegible]

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\{f'(\theta)\}^2+\{f}$$ [illegible]

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^4\frac{\theta}{3}}\,d$$ [illegible] $$\sin^2\frac{\theta}{3}\,d\theta$$ [illegible]

[illegible] $$\left[\theta-\frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}-\frac{3}{8}\sqrt{}}$$ [illegible]

7.127 (1) [illegible] C_2 [illegible] $\alpha=\angle\mathrm{PBT}$ とする. [illegible] の弧について, $\overset{\frown}{\mathrm{AT}}$ [illegible] である [illegible]



[illegible] $a\theta=\dfrac{a}{}$ [illegible] ゆえ [illegible] $=4\theta$

BT [illegible] 軸のな [illegible] あるから

[illegible] P $=\dfrac{a}{}$ [illegible] $-\alpha)$, [illegible]

[illegible] $3\theta)$, $\sin(-3$ [illegible]

$$=\boldsymbol{\frac{a}{4}(}\ \text{[illegible]}\ \boldsymbol{-\sin 3\theta)}$$

(2) OB $=$ OT $-$ [illegible] $a-\dfrac{a}{4}=\dfrac{3}{4}a$, $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} \\ &= \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta) + \frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta) \\ &= \boldsymbol{\frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta,\ 3\sin\theta - \sin 3\theta)}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと，(2) の結果から

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{3}{4}a(\sin\theta + \sin 3\text{[illegible]} \qquad \frac{dy}{d\theta} = \text{[illegible]}\theta - \cos 3\theta)$$

したがって　$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2 = \dfrac{\text{[illegible]}}{8}\text{[illegible]}\theta + \sin 3\theta \sin\theta)$

$= \text{[illegible]}$

求める距離を s とすると，$\dfrac{3}{\text{[illegible]}}$ [illegible] の [illegible] ことに [illegible] して

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\text{[illegible]}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\text{[illegible]}^{2\pi} \frac{3}{2}a|\text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}a\sin 2\theta\, d\theta = \Big[-3a\,\text{[illegible]}\Big]_0^{\frac{\pi}{\text{[illegible]}}}\text{[illegible]}$$

7.128 [illegible] $= e^{-\theta}$ [illegible] $\sin\theta$ を θ で微分す[illegible]

$$\frac{dx}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\theta - e^{-\theta}\sin\theta = -e^{-\theta}(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$\text{[illegible]}d\theta = -\text{[illegible]}\theta + e^{-\theta}\text{c[illegible]} -e^{-\theta}(\sin\theta - \cos\theta)$$

[illegible] $\dfrac{\text{[illegible]}}{\dfrac{dx}{d\theta}}$ [illegible] $\theta(\sin\theta$ [illegible] $\theta)$ $= \boldsymbol{\dfrac{\sin\theta - \cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta}}$

(2) 点 [illegible] $y)$ [illegible] $\dfrac{y}{x} = \dfrac{e^{-\theta}\sin\theta}{e^{-\theta}\cos\theta} = \tan\theta$

ゆえに，線分 [illegible] 向きは x 軸の正の向きから θ だけ回転したもの．

$$\sin\theta - \text{[illegible]} = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right), \qquad \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

上の 2 式を [illegible] 結果に代入すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

ゆえに，P のおける C の接線の向きは x 軸の正の向きから $\theta-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転したもの．したがって，OP と P のおける C の接線のなす角は

$$\theta-\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\quad \text{よって}\quad \angle\mathrm{OPQ}=\frac{\pi}{4}$$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 &= e^{-2\theta}(\cos\theta+\sin\theta)^2+e^{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}-\cos\theta)^2\\ &=2e^{\text{[illegible]}}\end{aligned}$$

したがって，求める曲線 C の長さは [illegible]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}\,e^{-\theta}\,d\theta$$

$$\text{[illegible]}\left[-\text{[illegible]}\right.$$

$$\boldsymbol{(1-}\text{[illegible]}$$

7.129 (1) [illegible] $f'(t)=\tan\theta$

これを [illegible] $f''(t)=\dfrac{\theta'}{\cos^2\theta}$

[illegible] 0 で [illegible] よって，$\theta(t)$ は増加関数である．

[illegible]における[illegible]下側[illegible]の単位法[illegible]ルは $\vec{n}=(\sin\theta,-\cos\theta)$

$-\frac{\pi}{2}$ [illegible] $\frac{\pi}{2}$ であ[illegible]

$$\cos\text{[illegible]}\,1\,\text{[illegible]}\qquad \sin\theta=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

したがって [illegible] $=\left(\dfrac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}},-\dfrac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+$ [illegible]るから

$$\text{[illegible]}\left(t+\frac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}},\ f(t)-\frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha(t)=t+\frac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}},\ \beta(t)=f(t)-\frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}}$$

(3) $L_1 = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{1+\tan^2\theta}\,dt = \int_a^b \frac{dt}{\cos\theta}$

$\alpha(t) = t + \sin\theta$，$\beta(t) = f(t) - \cos\theta$ であるから，これを微分して

$$\alpha'(t) = 1 + \cos\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\beta'(t) = f'(t) + \sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \tan\theta + \sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \tan\theta\left(1 \text{[illegible]} s\,\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\{\alpha'(t)\}^2 + \{\beta'(t)\}^2 = (1+\tan^2 \text{[illegible]} \left(1+\cos\theta\frac{d\theta}{\text{[illegible]}} \text{[illegible]} \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$L_2 = \int_a^b \sqrt{\{\alpha'(t)\}^2 + \{\beta'(t)\}^2\,d \text{[illegible]}} \text{[illegible]} \int^{\theta(b)} d\theta$$

よって　　$L_2 - L_1 = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} d\theta$ [illegible] $\boldsymbol{\theta(a)}$

7.130 (1) 円上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について [illegible] 角 t だけ [illegible] した [illegible] C，x 軸との接点を T とする．[illegible] とき，$\mathrm{OT} =$ [illegible] $= at$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix}$$

[illegible] た $\overrightarrow{\mathrm{C}}$ [illegible] だけ回転したもの [illegible] から

$$\text{[illegible]} \quad -\sin(-t) \ \text{[illegible]} \ \cos(\text{[illegible]} \ \overrightarrow{\mathrm{CT}}$$

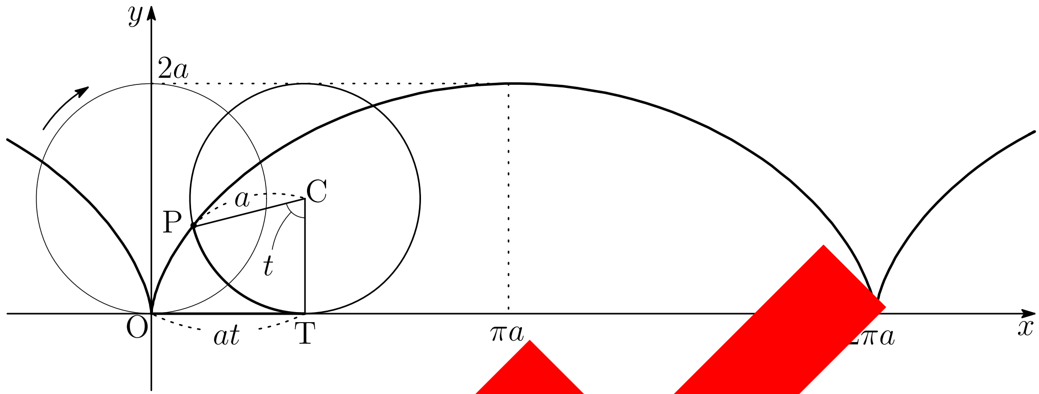
$$\text{[illegible]} \ \sin t \ \text{[illegible]} \ \cos t \ \text{[illegible]} = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix}$$

[illegible] が [illegible]

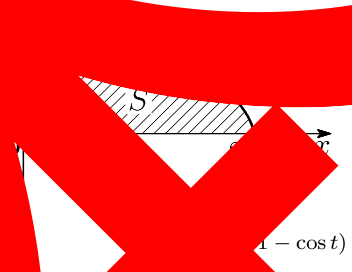
$$\text{[illegible]} \ \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$$

$$\text{[illegible]} \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t-\sin t) \\ a(1-\cos t) \end{pmatrix}$$

よって，P [illegible] は　　$\boldsymbol{(a(t-\sin t),\ a(1-\cos t))}$



(2) 求める面積は，右の図の斜線部[illegible]
の面積であるから



$$S=\int_0^{2\pi a} y\,dx$$

また，$x=a(t-\sin t)$ より[illegible]

$$dx=a(1-\cos t)dt$$

で，[illegible]の対応は右のようになる．
[illegible]積分法により

[illegible]	[illegible] $\longrightarrow$ [illegible]
t	$0 \longrightarrow 2\pi$

$$[illegible]\int_0^{2\pi a} y\,dx=\int_0^{2\pi} a(1-[illegible](1-\cos t)\,dt$$

$$[illegible]\int_0 [illegible] 2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$

$$=[illegible]\left(1-2\cos t+[illegible]\cos 2t\right)dt$$

$$[illegible]\Big[2[illegible]\sin t+[illegible]\Big]_0^{2\pi}=\boldsymbol{3\pi a^2}$$

(3) 求[illegible]さを L とすると，$\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dt}=a\sin t$ より

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{[illegible]\Big)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{[illegible]a(1-\cos t)\}^2+(a\sin t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=\boldsymbol{8a}$$

7.131 (1) $x = s(t)$，$y = \frac{1}{2}\{s(t)\}^2$ をそれぞれ t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = s'(t),\quad \frac{dy}{dt} = s(t)s'(t)$$

ゆえに，点 P の速度 $\vec{v}$ は

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = s'(t)(1,\ s(t)$$

$s'(t) > 0$ に注意して　$|\vec{v}| =$ … $+\{s($ …

与えられた $|\vec{v}|$ の条件により

$$s'(t)\sqrt{1+\{s(}\ \ldots$$

ゆえに　$s'(t) = \frac{1}{1+\{s(}$ … って f … $\frac{d}{dt}$ …

(2) $s'(t) >$ … り，$s(t)$ は単調増加関数である

… $) < s(0) < s\left(\frac{4}{3}\right)$　ゆえ … $<$ … ⋯

上式お … (1) … を与えられた等式に … すると

$$\ldots 3 = \int^0 \ldots dt \ldots \int_\alpha^0 (x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_\alpha^0 = -\frac{\alpha^3}{3}-\alpha$$

$$\ldots \int_0 \ldots \frac{1}{} \ldots = \int_0^\beta (x^2+1 \ldots \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^\beta = \frac{\beta^3}{3}+\beta$$

… に … $1)(\alpha^2$ … $\beta-1)(\beta^2+\beta+4)=0$

… $\boldsymbol{\alpha = -1,}$ … **1**

(3) (1) の結果か … $\frac{d^2x}{dt^2} = f'(x)\frac{dx}{dt}$

ゆえに　g … $\frac{d^2x}{dt^2} = f'(x)f(x)$

$f(x) = \frac{}{1+x}$ … 微分すると　$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

したがって　$g(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{1+x^2} = \boldsymbol{-\frac{2x}{(1+x^2)^3}}$

$g(x) = -2x(1+x^2)^{-3}$ を微分すると

$$g'(x) = -2(1+x^2)^{-3} - 2x\cdot(-3)(1+x^2)^{-4}\cdot 2x$$
$$= \frac{-2(1+x^2)+12x^2}{(1+x^2)^4} = \frac{2(5x^2-1)}{(1+x^2)^4}$$

(2) の結果から，$-1 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	[illegible]	[illegible]
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	[illegible]	
$g(x)$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	[illegible]	$\searrow$	$-$[illegible]	[illegible]	$-\frac{1}{4}$

よって，$-1 \leqq x \leqq 1$ において，[illegible]なる x の値は $\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{5}}}$

7.132 (1) $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = e^x\frac{dx}{dt}$ であるから[illegible]

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = \text{[illegible]} \quad \cdots ①$$

$|\vec{v}| = 1$，$\frac{dx}{dt} > 0$ に注意し[illegible] ① の大きさ[illegible]ると

[illegible] $= \frac{dx}{dt}\sqrt{1+e^{2x}}$ ゆえに $\frac{dx}{dt}$ [illegible]

① に[illegible]て

$$\text{[illegible]}(1,\ e^x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\text{[illegible]}}},\ \frac{e^x}{\text{[illegible]}1+e^{2x}}\right) \quad \cdots ③$$

[illegible]，点[illegible]に[illegible]速度ベクトルは

$$\text{[illegible]}\left(\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}}},\ \text{[illegible]}\boldsymbol{\frac{e^s}{+e^{2s}}}\right)$$

[illegible]につ[illegible]を代入[illegible]

$$\text{[illegible]} = \frac{dx}{dt}\left(\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$\text{[illegible]}\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$= \left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\right) \quad \cdots ④$$

よって，点 ([illegible]e^s) における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ は

$$\boldsymbol{\vec{\alpha} = \left(-\frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^2},\ \frac{e^s}{(1+e^{2s})^2}\right)}$$

(3) ④より　$\vec{\alpha} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}(-e^x,\ 1)$ であるから

$$|\vec{\alpha}| = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\sqrt{(-e^x)^2+1^2} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

$f(x) = |\vec{\alpha}|$ とおいて，$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{e^x(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^{\frac{5}{2}}}$$

x	[illegible]	[illegible] $\log\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	[illegible]	0	$-$
[illegible]	[illegible]	極大	$\searrow$

$f'(x) = 0$ を解くと　$e^{2x} = \frac{1}{2}$ [illegible] $\frac{1}{2}$

$f(x)$ の増減は右のようになる．

よって，$x = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$ $(e^{2x} = \frac{1}{2})$ で極[illegible]

[illegible] $\frac{\ }{(1+\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}} =$ [illegible]

7.133　(1) $y =$ [illegible] $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$　$\cdots$[illegible]

[illegible] $= C$ [illegible] $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 =$ [illegible] $\cdots$②

① [illegible]に代入[illegible]

[illegible] $+$ [illegible] $= C^2$ [illegible] $(1+4x^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = C^2$

[illegible]であ[illegible] $\frac{C}{\sqrt{1}}$ [illegible] $\cdots$③

[illegible] $\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$ [illegible] $(1,\ 2x) = \boldsymbol{\frac{C}{\sqrt{1+4x^2}}(1,\ 2x)}$

(2) (1) の結果から

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{C}{\sqrt{1+4x^2}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{C}{\sqrt{1+4x^2}}\right)\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{-4Cx}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{C}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{-4C^2x}{(1+4x^2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{[illegible]}\left([illegible]\frac{dx}{[illegible]}\right)$$

$$= 2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + 2x\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$= 2\left(\frac{C}{\sqrt{1+4x^2}}\right)^2 [illegible] (1+4x^2)$$

よって $\vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2[illegible]}{}\right.$ [illegible] $\boldsymbol{\frac{2C^2}{(1+4x^2[illegible]}}$ [illegible] $\boldsymbol{2x,}$ [illegible]

解説 関数 [illegible] (x) について, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' =$ [illegible] おく [illegible]

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = [illegible]$$

$\left(\frac{d[illegible]}{}\right)$ [illegible] $\left(\frac{dy}{[illegible]}\right)$ [illegible] り $(1+y'^2)\left(\frac{[illegible]}{dt}\right) = C^2$

$\frac{[illegible]}{dt} > 0$ [illegible] から [illegible] $\frac{C}{\sqrt{1+y'^2}}$

[illegible] $\vec{v}$ [illegible] $\frac{dx}{}$ [illegible] $(1,$ [illegible] $\boldsymbol{\frac{C}{\sqrt{1+y'^2}}(1,\ y')}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{C}{\sqrt{1+y'^2}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{C}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{-Cy'y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{C}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{-C^2y'y''}{(1+y'^2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(y'\frac{dx}{dt}\right)$$

$$= y''\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + y'\frac{d^2x}{dt^2}$$ [illegible]

$$= y''\left(\frac{C}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^2$$ [illegible] $$\frac{\cdots}{(1+y'^2)^2}$$

よって　　$\vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \boldsymbol{\frac{C^2y''}{(1+y'^2)^2}(-y',\ 1)}$

した[illegible]一定の速度で曲線 $y=f(x)$ [illegible]動[illegible]ベクト[illegible]クトル $\vec{\alpha}$ は垂直である．

[illegible]た，時[illegible]する動点 $(x(t),\ y(t))$ の速度ベクトル $\vec{v}$ の大きさが一定[illegible]とき

$$|\vec{v}|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

[illegible]定数[illegible]から[illegible] t で微分[illegible]

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$ すなわ[illegible] $\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)\cdot\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0$

[illegible]トル $\vec{v}$ と加[illegible]クトル $\vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$ は垂直である．

(3) 円周上の点 Q$(x,\ y)$ を $x = r\cos\theta$, $y = r + r\sin\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad\qquad \cdots(*)$$

$|\vec{v}| = C$ より, $|\vec{v}|^2 = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = C^2$ であるから

$$\left(-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = C^2 \quad \text{ゆえに [illegible]} = \frac{C^2}{r^2}$$

上の結果に注意して $(*)$ を t で微[illegible]と

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad \text{[illegible]}$$

$$= -\frac{C^2}{r}\cos\theta \quad \text{[illegible]} \sin\theta$$

ゆえに　$\vec{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \text{[illegible]}\right)$ [illegible] $\dfrac{}{r}(-\cos\theta,$ [illegible] $\theta)$ [illegible] $\boldsymbol{= \dfrac{C^2}{r}}$

(4) (2) [illegible]ら, 原点における P の加速度[illegible]

[illegible]P の加速度の大きさは $|$[illegible]C[illegible]

[illegible]れと ([illegible]加速度の大きさが等し[illegible]で

[illegible] $2C^2$　よって　$\boldsymbol{r = \dfrac{1}{2}}$

[illegible](4) で求[illegible]の半[illegible]放物線 $y =$ [illegible]原点における曲率円 (接触円) の半径[illegible]る.

7.134 [illegible]は特[illegible]式 ([illegible]であ[illegible]

$$a_n r^n + a_n \text{[illegible]} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

両辺に e^{rx} を[illegible]と

$$\text{[illegible]}\,e^{rx} + a_{n-1}r^{n-1}e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0$$

$$a_n\text{[illegible]} + a_{n-1}(e^{rx})^{(n-1)} + \cdots + a_1(e^{rx})^{(1)} + a_0 e^{rx} = 0$$

よって, 関[illegible] $= e^{rx}$ は方程式 (A) を満たす.

(2) n 次方程式 (B) が実数 r を k 重解にもつから，$n-k$ 次多項式 $Q(t)$ を用いて

$$a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0 = (t-r)^kQ(t) \quad \cdots(*)$$

とおける．この両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} na_nt^{n-1} + (n-1)a_{n-1}t^{n-2} &+ \cdots + 2a_2t + a_1 \\ &= k(t-r)^{k-1}Q(t) + [illegible])^kQ'(t) \\ &= (t-r)^{k-1}\{kQ [illegible] -r)Q'(t)\} \end{aligned}$$

よって，次の方程式は，r を k [illegible]にも[illegible]

$$na_nt^{n-1} + (n-1)a_{n-1}t [illegible] 0$$

(3) $y_j = x^je^{rx}$ より，$y_j = xy_{j-1}$ であ[illegible]の式[illegible]分すると

$$y_j^{(n)} = (xy_j)^{(n)} [illegible] {}_n\mathrm{C}_kx^{(n-k)}y_j [illegible]$$

$$[illegible] \sum_{[illegible]n-1}^{n} {}_n\mathrm{C}_kx^{(n-k)}{y_{j-1}}^{(k)} = \boldsymbol{n} [illegible] \boldsymbol{y_{j-}} [illegible]$$

[illegible] [illegible]イプ[illegible]

$$[illegible]^{(n)} = \sum_{k[illegible]}^{n} {}_n\mathrm{C}_kf^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

証明は[illegible]学的帰[illegible]より示すこと[illegible]きる．

([illegible](t) を[illegible]$0, 1, 2, \cdots$[illegible]) を用いて ($b_{n-k} = a_n$)

$$[illegible] \sum_{i=0}^{[illegible]} b_it^i$$

とお[illegible]と，([illegible]

$$\begin{aligned} a_nt^n + [illegible]^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0 &= (t-r)^kQ(t) \\ &= \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_jt^{k-j}(-r)^j \sum_{i=0}^{n-k} b_it^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} b_i \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j(-r)^jt^{k+i-j} \end{aligned}$$

上式から

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=\sum_{i=0}^{n-k}b_i\sum_{j=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_j(-r)^jy^{(k+i-j)}$$

ここで $z=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_j(-r)^jy^{(k-j)}$ とおくと

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=\sum_{i=0}^{n-k}b_iz^{(i)}$$

このとき，微分方程式

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0 \quad (**)$$

は，次のようになる．

$$b_0z+b_1z'+\cdots+b_{n-k}z^{(n-k)}=0$$

したがって，$z=0$ は微分方程式 (**) の解の1つである．

$$\sum_{j=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_j(-r)^jy^{(k-j)}=0$$

$$e^{-rx}\sum_{j=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_j(-r)^jy^{(k-j)}=0$$

$$\sum_{j=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_jy^{(k-j)}(e^{-rx})^{(j)}=0$$

ゆえに，ライプニッツの公式により

$$(ye^{-rx})^{(k)}=0$$

これを k 回積分すると，ye^{-rx} は x の $k-1$ 次式になるので

$$ye^{-rx}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{k-1}x^{k-1}$$

となる (c_j は定数 $(j=0,1,2,\cdots,k-1)$)．
したがって，y は微分方程式 (**) の解の1つである．

$$y=(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{k-1}x^{k-1})e^{rx}$$

よって，x^je^{rx} $(j=0,1,2,\cdots,k-1)$ は，(**) をみたす．

解説 (分大 [医]2010) 9