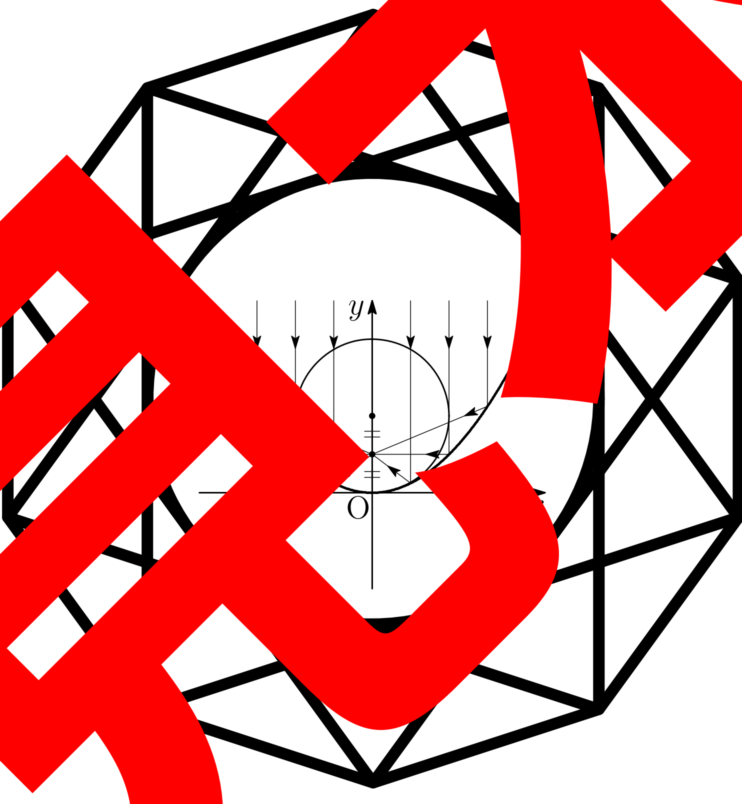
九州地区国立大学

大学受験　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B

2001－2016

問題



はじめに

2014年に開催された第68回九州算数・数学教育研究(熊本)大会で研究発表者(熊本県数学部会)より九州地区国立大学の入試問題を分析した大学入[illegible]問題集の作成に向けた取り組みが報告されました．この報告に対し多くの先生[illegible]ご賛同を頂き

『大学受験　数学I・A・II・B[illegible]『大学受[illegible]III』

が作成されました．

また，情報化に対応するため，本書および解[illegible]書化(PDF)を推進し携帯端末やパソコンでの操作に対応した電子書[illegible]

本書の編集にあたり，以下の点に留意し[illegible]

1. 本書に掲載した問題は，九州大[illegible]工業[illegible]福[illegible]学[illegible]学・長崎大学・熊本大学・大分大[illegible]崎大学・鹿[illegible]大学[illegible]全学部全学科過去16[illegible]分(2001-2016)の[illegible]般前期試験問[illegible]ら厳選[illegible]

2. 本書は[illegible]問題配置を行うと共に，難易[illegible]「基[illegible]準」「応[illegible]展」[illegible]明示しました．頻出問題[illegible]て[illegible]□□を付[illegible]て繰り返[illegible]しました．

本書に掲[illegible]問題[illegible]記10大学の全学部全学科過去16年分(2001-2016)の一般[illegible]試験問[illegible]次のサイトから入手することもできます．

http[illegible]amoto.s12.xr[illegible]/ruihi.html

[illegible]に関す[illegible]同サ[illegible]載しています．

平成28年5月　編者

目 次

第 1 章　数と式（数学I）

1.1　数の計算

□□ **1.1** $a^2(y-b)-(a+b)xy+ab(x+y)$ [illegible] 分解せよ．
([illegible]福岡教育大学 2004) 5

1.2　実数

□□ **1.2** α が無理数であり，a，b が [illegible] であるとき [illegible]

$$a+b\alpha=0 \text{ ならば } a= \text{[illegible]}$$

であることを [illegible] 育大 [illegible] 1

□□ **1**[illegible] 計算 [illegible] る．① から ⑥ の等号 [illegible] 誤っているものをすべてあげ [illegible] と判断 [illegible] 理由 [illegible] よ．
(宮崎大学 2006) 2

$$\text{[illegible]}\sqrt{64} \text{ [illegible]} \underset{③}{=} \text{[illegible]}{}^{6} \underset{④}{=} \sqrt{((-2)^3)^2} \underset{⑤}{=} (-2)^3 \underset{⑥}{=} -8$$

□□ **1.4** $a=$ [illegible]，b [illegible] とするとき

[illegible]

の値を求めよ．
(宮崎大学 2001) 9

□□ **1.5** $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ の整数 [illegible] を a，小数部分を b とする．このとき，a^2+ab+b^2 と $\dfrac{1}{a-b-1}-\dfrac{1}{a+b+1}$ [illegible] 求めよ．
(琉球大学 2011) 5

標準 1.6 次の問に答えよ．　(佐賀大学 2013) 7

(1) $a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}$ が成り立つとき，a を b を用いて表せ．

(2) $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{y}{8}+\dfrac{8}{y}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ をみたす実数 x，y の組をすべて求めよ．

標準 1.7 次の問いに答えよ．　([illegible]大 [文]2001) 4

(1) 自然数 a，b が互いに素であるとはどういうことか．

(2) 自然数 a，b が互いに素であるなら a^2[illegible]は互いに[illegible]ことを示せ．

(3) n を自然数とする．もしも $\sqrt{n}$ が有理[illegible]自然数であることを示せ．ただし，有理数とは分母と分子がとも[illegible]る分数のことである．

(4) n が自然数のとき，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+}$[illegible]ることを示せ．

応用 1.8 多項式 $f(x)=x^4-x^3+c$[illegible]$+d$ に[illegible]，[illegible]$\sqrt{2})$[illegible]り立つとする．ここで，c，d は有理数[illegible]次の問い[illegible]よ．　([illegible]011) 2

(1) $S=\{a+$[illegible]，b は有理数$\}$ とする．集合 S[illegible]$z=$[illegible]し，a，b は有理[illegible]て，$j(z)=a-\sqrt{2}b$ と定義す[illegible]の元[illegible]対して，[illegible]$w)$[illegible]$j(w)$ および $j(zw)=j($[illegible]が[illegible]り立つこと[illegible]示せ．

(2) [illegible]いて[illegible]$f(z)=0$ を満たせば[illegible]$z))=0$ が成り立つことを[illegible]．こ[illegible]を用[illegible]$-\sqrt{2})=0$ を示[illegible]

[illegible]有理数[illegible]を求[illegible](x)[illegible]数の範囲で因数分解せよ．

[illegible]集合[illegible]題

□□ [illegible]$x+1$[illegible]を満た[illegible]3の倍数でないものをすべて求めよ．　(鹿児島大学 2012) 1

□□ **1.10** 実[illegible]y に[illegible]次の各命題の真偽を述べよ．真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ．　(鹿児島大学 2009) 1

(1) $x \geqq y$ ならば $x^2 \geqq$[illegible]ある．

(2) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，[illegible]ならば $x \geqq y$ である．

□□ **1.11** 正の実数 x，y に関する次の各命題の真偽を述べよ．また，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ． (鹿児島大学 2014) $\boxed{1}$

(1) x が無理数かつ y が有理数ならば，その和 $x+y$ は無理数である．

(2) x が無理数かつ y が無理数ならば，その和 $x+y$ は無理数である．

□□ **1.12** 正の実数 a に関する次の各命題の真偽を述べよ．また，[illegible]真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ． ([illegible]大学 2010) $\boxed{1}$

(1) a が自然数ならば $\sqrt{a}$ は無理数である[illegible]

(2) a が無理数ならば $\sqrt{a}$ も無理数である[illegible]

□□ **1.13** a，b を実数とする．命題「$ab=0$ な[illegible]を書き，それぞれの真偽を答えよ． [illegible]

□□ **1.14** 次の (1)，(2) に答えよ． ([illegible]島大学[illegible]) $\boxed{2}$

(1) m，n が自然数ならば，$\frac{m}{n} \neq$ [illegible]る．この[illegible]を証明[illegible]

(2) p，q が自[illegible]らば，$\sqrt{2}$ は $\frac{p}{q}$ と $\frac{2q}{p}$ の間にあ[illegible]

すな[illegible] $\frac{[illegible]}{q}$ [illegible] $\frac{2q}{p}$ または $\frac{2q}{p} < \sqrt{2} < \frac{p}{q}$ [illegible]

[illegible]とを証[illegible]

基[illegible]**15** 次[illegible]の真[illegible]また，その命題が真である場合には証明し，偽[illegible]る場合[illegible]反例を[illegible]． (福岡教育大学 2007) $\boxed{2}$

[illegible]無理数[illegible]，a [illegible]なくとも一[illegible]理数である．

[illegible]が有理[illegible]が無[illegible] $a+b$，ab [illegible]に無理数である．

(3) [illegible]整数と[illegible]$)=$ [illegible]のとき，$f(2n-1)$ は 5 の倍数とな[illegible]

基本 1.16 次[illegible]題に[illegible]真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ．

(1) 有理数と有理数の[illegible]理数である． (佐賀大学 2007) $\boxed{8}$

(2) 無理数と無理数の[illegible]理数である．

(3) 無理数と無理数[illegible]無理数である．

(4) 無理数の無理数[illegible]無理数である．

基本 1.17　a，b，c を奇数とする．x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ に関して，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2003) $\boxed{3}$

(1) この 2 次方程式が有理数の解 $\dfrac{q}{p}$ をもつならば，p と q はともに奇数であることを背理法で証明せよ．ただし $\dfrac{q}{p}$ は既約分数とする．

(2) この 2 次方程式が有理数の解を持たないことを (1) を利用し[illegible]証明せよ．

基本 1.18　$\sqrt{2}$ は $x^2=2$ を満たす正の実数 x を表したもので[illegible]このことを用いて，次の各問に答えよ．　[illegible]宮崎大学 2005) $\boxed{12}$

(1) $\sqrt{2}$ は $1.4\cdots$ と無限に続く小数で表さ[illegible]2 の小数第 2 位の値が 1 であることを確かめよ．

(2) n を自然数とするとき，n^2 が偶数なら[illegible]

(3) (2) を利用して，$\sqrt{2}$ は有理数でな[illegible]有理数は最[illegible]公約数が 1 である 2 つの整数 a，b ($b \neq$[illegible]て $\dfrac{a}{b}$ [illegible]す[illegible]きる[illegible]る．

第 2 章　2次関数（数学I）

2.1　2次方程式・不等式

□□ **2.1** 連続する3つの自然数 a，b，c が[illegible]それ[illegible]$+ b^2 = c^2$，$a < b < c$ をみたすとする．このような a，b，c はただ1[illegible]とを示せ．

基本 2.2 次の問に答えよ．　(佐賀大学 [illegible]14) 8

(1) 0以上の整数 n に対して，2次[illegible]$+2($[illegible]$x+$[illegible]解をもつとする．このとき，n の[illegible]べて求めよ．

(2) 二桁の自然数[illegible]，一の位の数と十の位の数の和[illegible]差がも[illegible]自然数になるよう[illegible]べて求めよ．

基本 2.[illegible]数と[illegible]次方程式 $x^2 - 2ax + a +$[illegible]について，次の問いに答えよ．　(琉球大学 2001) 1

(1) 実数解[illegible]とき[illegible]を求めよ．

(2) 2[illegible]の差[illegible]ると[illegible]の値の[illegible]求めよ．

[illegible]ての解[illegible]より大[illegible]数であるとき[illegible]値の範囲を求めよ．

2.2 2次関数の最大・最小

基本 2.4 関数

$$f(x) = ax^2 + 2x + \frac{1}{a} - 2$$

について，以下の問に答えよ．ただし，a は定数で，$a > 1$ とする．

(1) $f(x) > 0$ を満たす x の範囲を求めよ． ([illegible]大学 2006) $\boxed{1}$

(2) $y = f(x)$ のグラフをかけ．

(3) $-2 \leqq x \leqq 1$ において，$y = f(x)$ の最[illegible](a) を求[illegible]

応用 2.5 a，b，c を定数とし，$a > 0$ とする．[illegible]$x + c$ とおく．実数 p に対し，x の関数 $px - f(x)$ の最大値を $g(p)$ とお[illegible]

(1) 2つの関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が一[illegible]求めよ．

(2) 実数 x に対し，p の関数 $xp - g($[illegible]値を[illegible](x) を[illegible]

(3) 直線 $y = px + q$ が点 $(t,\ f(t))$[illegible]$f(x)$ のグ[illegible]に接[illegible]十分条件は $g(p) = pt - f(t)$ かつ $q =$[illegible]$p)$ であるこ[illegible]せ．

第 3 章　図形と計量（数学 I）

3.1　三角比

□□ **3.1** $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の不等[illegible]([illegible]岡教育大学 2001) 5

$-1 \leqq \tan\theta \leqq$ [illegible]

3.2　正弦定理・余弦定理[illegible]

基本 3.2 次の問いに答えよ．　([illegible]008) 8

(1) 鋭角三角形[illegible]の外接円の半径を R とし，頂[illegible] B [illegible]う辺の長さを[illegible]く．このとき，

$\dfrac{a}{[\text{illegible}]A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ [illegible]

[illegible]証明[illegible]

(2) 45° [illegible] 75° [illegible]にも[illegible]を利用[illegible]，$\sin 75^\circ$ の値を求めよ．

[illegible]△AB[illegible]辺の長[illegible]B = 6，BC = [illegible]A = 4 であるとき，次の問いに[illegible]　(琉球大学 2013) 6

(1) c[illegible]C を求[illegible]

(2) ∠BA[illegible]BC の交点[illegible]とする．線分 AL の長さを求めよ．

3.3　三角形の面[illegible]

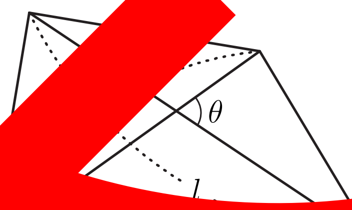
□□ **3.4** 三角形の 3 辺[illegible] a，b，c の比が $a:b:c = 7:6:5$ であり，面積が $12\sqrt{6}$ のとき，a の値を求め[illegible]　(鹿児島大学 2011) 1

基本 3.5 △ABC において，$\angle B = 45^\circ$，$\angle C = 75^\circ$，$BC = 3$ のとき，次の問いに答えよ．
(福岡教育大学 2008) 6

(1) △ABC の面積を求めよ．

(2) 辺 BC 上に点 D を $BD = 1$ となるようにとる．このとき，△ABC と △DAC が相似となることを証明せよ．

基本 3.6 右図のような四角形において，対角線の長さを l，m，対角線のなす角を θ とする．[illegible]の問いに答えよ．　(佐賀大学 200[illegible]



(1) 四角形の面積 S を l，m，θ を用いて表せ．

(2) 対角線の長さの和が k(定数) となる四角形の中で，その面積が最大とな[illegible]るものの面積を求めよ．

3.4　平面図[illegible]形への応用

基本 3.7 △[illegible]A $= \dfrac{4}{3}$，$BC = 6$ を満たして[illegible]る．[illegible]A $=$ ∠BAC と[illegible]
(琉球大学 2[illegible]08) 6

(1) [illegible]およ[illegible]れぞれ求めよ．

(2) [illegible]ABC[illegible]円の[illegible]

(3) △A[illegible]面積[illegible]値と，[illegible]きの辺[illegible]の長さを求めよ．

[illegible]円に内[illegible]る五角[illegible]CDE におい[illegible] $= 7$，$BC = 3$，$CD = 5$，D[illegible]∠B[illegible]120°[illegible]の問に答[illegible]
(佐賀大学 2006) 5

(1) [illegible]さを求[illegible]

(2) ∠BA[illegible]めよ．

(3) AE の長[illegible]求め[illegible]

基本 3.9 二等辺三角形[illegible]において $\angle BAC = 120^\circ$，$AB = AC = 1$ とする．辺 BC 上に点 D をとり，AD を[illegible]する正三角形 ADE をつくるとき，次の問いに答えよ．
(熊大 [文]2002) 1

(1) $BD : DC = m$[illegible]るとき，正三角形 ADE の面積を m，n で表せ．

(2) 二等辺三角形 ABC の面積が正三角形 ADE の面積の 3 倍になるとき，$m : n$ を求めよ．

標準 3.10 3辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2-2x}$，$4-x$，2で表される三角形がある．長さ $\sqrt{x^2-2x}$ の辺は他の2辺より短くないとする．このとき，次の問いに答えよ．

(九大[文]2007) 4

(1) このような三角形が描けるための x の満たす範囲を求めよ．

(2) この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ．

(3) x が(1)で求めた範囲にあるときの $\cos\theta$ の最小値と，そ[illegible]値を与える x の値を求めよ．

標準 3.11 三角形ABCの3辺の長さを $a=$ [illegible] $c=\mathrm{AB}$ とする．実数 $t \geqq 0$ を与えたとき，Aを始点としBを通る半直[illegible]るように点Pをとる．次の問いに答えよ．

(1) CP^2 を a，b，c，t を用いて表せ．

(2) 点Pが $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき，[illegible]よ．

(3) (2)の条件を満たす点Pが辺A[illegible]にちょうど[illegible]るとき[illegible]Bに関する条件を求[illegible]

標準 3.12 [illegible]において，

$$[illegible]\ \mathrm{AB}= [illegible]\ \mathrm{CD}=c,\quad \mathrm{DA}=d,\quad [illegible]\ x,\quad \mathrm{BD}=y$$

[illegible]．以下[illegible]に答[illegible]

(熊大[文]2011) 1

(1) c[illegible]os B [illegible]，cos[illegible]，b，c，[illegible] y を用いて表せ．

(2) [illegible]形A[illegible]円に[illegible]とき，

$$[illegible]\ xy\ [illegible]\ bd$$

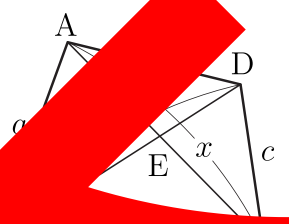
が成[illegible]す．

3.5　問題研究

3.5.1　ブラマーグプタの公式

9 ページの 3.12(熊大 [文]2011) で出題された円に内接する四角形 ABCD 関する定理 (トレミーの定理) を含め，いくつかの公式を以下にまとめた．

円に内接する四角形 ABCD において，



$$\mathrm{AB} = a,\quad \mathrm{BC} = b,\quad \mathrm{CD} = c,\quad \mathrm{DA} = \text{[illegible]}$$
$$\mathrm{AC} = x,\quad \mathrm{BD} = y$$

とすると，次が成り立つ．

(1)　$\cos A = \dfrac{d^2 + a^2 - b^2 - c^2}{2(da + bc)}$, [illegible]

(2)　$x^2 = \dfrac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$,　$y^2 = \dfrac{(bd + \text{[illegible]}a + ca)}{\text{[illegible]}}$

(3)　[illegible]$xy = ac + bd$　(トレミー[illegible])

(4)　2[illegible]$b + c$[illegible]ると，四角形 ABCD の[illegible] S，外接円の半径を R [illegible]ると (ブ[illegible]の公式)

$$\text{[illegible]}a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$
$$R = \text{[illegible]}\frac{\sqrt{\text{[illegible]}cd)(a\text{[illegible]})(ad + bc)}}{4S}$$

([illegible]の交点[illegible]

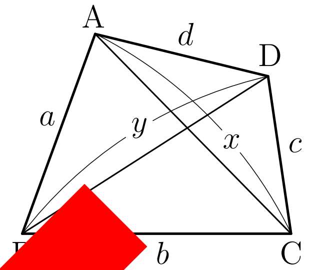
$$\text{[illegible]EA : EB : [illegible]}a : ab : bc : cd$$

(6)　$\theta = \angle \mathrm{AE}$[illegible]とする[illegible]

$$\cos\theta = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2(ac + bd)}$$

解答　(1)　余弦定理により

$$y^2 = d^2 + a^2 - 2da\cos A$$
$$y^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$$



このとき，$\cos C = -\cos A$ であるから

$$d^2 + a^2 - 2da\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

よって　$\cos A = \dfrac{d^2 + a^2 - \text{[illegible]}c^2}{2(da + \text{[illegible]}}$

上式から　$\cos B = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2\text{[illegible]}}{2(ab + cd)}$

補足　$\cos B$ は $\cos A$ の結果を $a \to b,\ b \to$ [illegible]

(2)　余弦定理により　$x^2 = a^2 +$ [illegible]

これに (1) の結果を代入す[illegible]

$$\text{[illegible]} = a^2 + b^2 - 2ab \times \frac{\text{[illegible]} + b^2 - c^2 - \text{[illegible]}}{2(ab + cd)} \text{[illegible]} \frac{(ac + \text{[illegible]}bc)}{\text{[illegible]}}$$

[illegible]　$y^2 = \dfrac{(bd + ca)(ba + cd)}{bc + da}$

(2) の結[illegible]$^2 = (ac + bd)^2$　よ[illegible]　$xy = ac + bd$

(4)　(1) [illegible]果から

$$\text{[illegible]} 1 + c\text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]} a + d\text{[illegible]} c)^2}{\text{[illegible]} bc)} = \frac{\text{[illegible]} b - c + d)(a - b + c + d)}{2(ad + bc)}$$

$$\text{[illegible]} s A = \frac{\text{[illegible]} + (b + c)^2}{\text{[illegible]} c)} = \frac{\text{[illegible]} b + c - d)(-a + b + c + d)}{2(ad + bc)}$$

[illegible]が[illegible]　$\sin^2 A = \text{[illegible]} - \cos A)$

$$= \frac{(2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)(2s - 2d)}{4(ad + bc)^2}$$

$$= \frac{4(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}{(ad + bc)^2}$$

$\sin A = \sin$ [illegible]　$S = \dfrac{1}{2}ad\sin A + \dfrac{1}{2}bc\sin C = \dfrac{1}{2}(ad + bc)\sin A$

$$= \frac{1}{2}(ad + bc) \times \frac{2\sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}}{ad + bc}$$

$$= \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

$$y = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}},\quad \sin A = \frac{2S}{ad+bc}$$ であるから，正弦定理により

$$R = \frac{y}{2\sin A} = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

(5) $\triangle$EDA $\backsim$ $\triangle$ECB より　EA : EB = ED : EC = $d : b$

$\triangle$EAB $\backsim$ $\triangle$EDC より　EA : ED = EB : EC = $a : c$

よって　　EA : EB : EC : ED = $da : ab : bc : cd$

(6) (2)，(3)，(5) の結果から

$$\mathrm{AE}^2 = \left(\frac{ad}{ad+bc}x\right)^2 = \frac{a^2 [illegible]}{(ad+bc[illegible]} [illegible] d+bc) [illegible] = \frac{a^2d^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab [illegible] cd)},$$

$$\mathrm{ED}^2 = \left(\frac{cd}{ab+cd}y\right)^2 = \frac{c^2d^2}{(ab+ [illegible]} [illegible] cd)},$$

$$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{ED} = \frac{ad}{ad+bc}x \times \frac{cd}{ab+ [illegible]} [illegible] \frac{acd^2([illegible] bd)}{[illegible] (ad+ [illegible] cd)}$$

これらを $2\mathrm{AE}\cdot\mathrm{ED}\cos\theta = [illegible] + \mathrm{ED}^2 - a$ [illegible] 入し [illegible]

$$[illegible] d^2(ac+bd) [illegible] (ab+cd)} \cos\theta = \frac{acd [illegible]}{(ad+bc)([illegible]} ([illegible] ^2)$$

[illegible] て [illegible] $\cos\theta = \dfrac{a^2+c^2-b^2-d [illegible]}{2(ac+bd)}$

(4) [illegible] (6) の [illegible] ら

$$[illegible] + \cos [illegible] - d)^2}{2 [illegible]} = \frac{(a-b+c+d)(a+b+c-d)}{2(ac+bd)}$$

$$1 [illegible] \theta = \frac{(b [illegible] (a-c)^2}{[illegible] + bd)} = \frac{[illegible] b+c+d)(a+b-c+d)}{2(ac+bd)}$$

[illegible] $a+b$ [illegible] て [illegible]

$$[illegible] n^2\theta = (1 [illegible] \cos\theta)$$

$$= \frac{(2s- [illegible] (2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)}{4(ac+bd)^2}$$

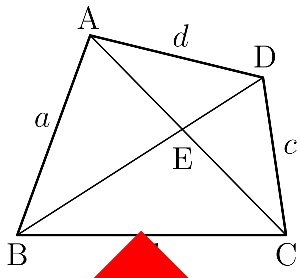
$$= \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ac+bd)^2}$$

したがって [illegible] る面積 S は

$$S = \frac{1}{2} [illegible] \sin\theta = \frac{1}{2}(ac+bd) \times \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ac+bd}$$

$$= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

補足　たとえば，(1)，(6) から得られた



$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

$$\cos\angle\mathrm{BEC} = \frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}$$

の符号から，これらの角の大きさに関する次の性質が分かる．

i) ∠ABC が鋭角　[illegible] a^2+ [illegible] $+\,d^2$
∠ABC が直角　[illegible] c^2+d^2
∠ABC が鈍角　$\Longleftrightarrow$ [illegible] d^2

ii) ∠BEC が鋭角　[illegible]
∠BEC が直角　[illegible] $+\,d^2$
∠BEC が鈍[illegible] $\Longleftrightarrow$ [illegible] d^2

$d=0$ とすると，四角形 AB[illegible]は三角形 AB[illegible]退化し，[illegible] B，∠BEC = [illegible]り，$\cos B$，$\cos A$ は余弦定理に[illegible]する[illegible]

また，[illegible]三角形 ABC における関係[illegible]

[illegible]，ブ[illegible]タの公式

$$S = \sqrt{(s-a)\cdots(s-c)(s-d)} \qquad (2s = a+b+c+d)$$

に[illegible]，$d=$ [illegible]ると[illegible]ヘロン[illegible]を得る．

$$S = \sqrt{s(s-\cdots(s-c)} \qquad (2s = a+b+c)$$

センター本試験 2011 から

点 O を中心とする円の円周上に 4 点 A，B，C，D がこの順にある．四角形 ABCD の辺の長さは，それぞれ

$$\mathrm{AB}=\sqrt{7},\quad \mathrm{BC}=2\sqrt{7},\quad \mathrm{CD}=\sqrt{3},\quad \mathrm{DA}=2\sqrt{3}$$

とする．$\angle\mathrm{ABC}=\theta$，$\mathrm{AC}=x$ とするとき，$\cos\theta$，x，円 O の[illegible]径 R，四角形 ABCD の面積 S

解答　$a=\sqrt{7}$，$b=2\sqrt{7}$，$c=\sqrt{3}$，$d=2$[illegible]くと

$$ab+cd=20, \quad \text{[illegible]}$$
$$ad+bc=4\sqrt{21},$$

したがって

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-\text{[illegible]}}{2(ab+\text{[illegible]})}=\frac{20}{2\cdot 20}=\text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}=\sqrt{\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}$$

[illegible] $+\,2$[illegible]$\sqrt{3}$ より，$s=\dfrac{3}{2}(\sqrt{7}$[illegible] であるから

$$\text{[illegible]}-a\ \text{[illegible]} \qquad s-b=\frac{1}{2}(3\sqrt{3}-\sqrt{7}),$$
$$\text{[illegible]}\frac{1}{2}(3\text{[illegible]}), \qquad \text{[illegible]}d=\frac{1}{2}(3\sqrt{7}-\sqrt{3})$$

[illegible]が[illegible]$(s-$[illegible]$(s-c)($[illegible]$=15$

[illegible] $S=$ [illegible]

また[illegible]$c+bd)(ad+$[illegible]$)=\sqrt{20\cdot 5\sqrt{21}\cdot 4\sqrt{21}}=20\sqrt{21}$

よって　$R=\dfrac{\sqrt{\text{[illegible]}cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}=\dfrac{20\sqrt{21}}{4\cdot 5\sqrt{3}}=\boldsymbol{\sqrt{7}}$

第 4 章　データの分析（数学I）

□□ **4.1** 変量 x の値が x_1，x_2，x_3 のとき，その平均値を $\overline{x}$ [illegible] 分散 s^2 を

$$\frac{1}{3}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2 \text{[illegible]} (x_3 \text{[illegible]}$$

で定義するとき，$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$ となることを示 [illegible]
均値を表す．

標準 4.2 1つのさいころを3回投げる [illegible] 出 [illegible] 目に出 [illegible] 数，3回目に出る目の数をそれぞれ X_1，[illegible] とし，5 [illegible] 数

$$2,\ 5,\ 2-X_1,\ 5+X_2,\ \text{[illegible]}$$

からなるデ [illegible] 以下の問いに答えよ．　[illegible] 大 [illegible] 2

(1) デ [illegible] 範囲 [illegible] ある確率を求めよ．

(2) [illegible] データ [illegible] 央値 [illegible] 確率を求めよ．

(3) X_3 が [illegible] の平均 [illegible] 率を求めよ．

(4) デ [illegible] 中央 [illegible] 均値が [illegible] るとき [illegible] が中央値に等しい条件付き確率を [illegible] よ．

第 5 章　場合の数と確率（数学 A）

5.1　場合の数

□□ **5.1** 0，1，2，3，4，5 の数字が 1 つず[illegible]さ[illegible]のカードが入っている箱から 1 枚ずつ 3 枚のカードを取り出し，左[illegible]数 n を作るとき，次の (1)，(2) に答えよ．ただし，例えば 012 は 12 を[illegible]

(1) n が 3 桁の自然数になるのは何通りか[illegible]岡教育大学 [illegible]) 1

(2) 3 桁の自然数 n を作った後，箱の[illegible]て[illegible]ドを左[illegible]べて 3 桁の自然数 m を作るとき，[illegible]555 と[illegible]は何[illegible]

□□ **5.2** $-2 \leqq m$ [illegible] 2 かつ $-2 < n \leqq 2$ であるような[illegible]の組 ([illegible]ち，条件「$1 \leqq m$ または[illegible]を満たすものの個数を求めよ[illegible]) 1

□□ **5.3** [illegible]I と[illegible] 5 文字を並べて得られ[illegible]の[illegible]ち，2 つの[illegible]が隣り合わな[illegible]の総[illegible]
(鹿児島大学 2012) 1

[illegible]4 SAT[illegible]とい[illegible]べかえて得られる順列のうち，最初が子音文字[illegible]るもの[illegible]数を求[illegible]
(鹿児島大学 2015) 1

[illegible]，2，[illegible] 5 の 5[illegible]数字を，同[illegible]を繰り返し用いることを許し[illegible]整数[illegible]るとき[illegible]数字の和が [illegible]数になる整数は何個あるか．
(鹿児島大学 2009) 1

□□ **5.6** [illegible]等分した[illegible]い合う辺に垂線を下ろす．このとき，正方形の 4 [illegible]の垂線を利用してできる長方形のうち，正方形でないものの個数を n を用いて[illegible]
(福岡教育大学 2016) 1

基本 5.7 6 個の文字 A，[illegible]，D，E，F を 1 列に並べて文字列をつくる．このとき，次の問いに答えなさい[illegible]
(大分大学 2009) 1

(1) 文字列の並べ方[illegible]で何通りあるか．

(2) 文字 A と B が隣り合う並べ方は何通りあるか．

(3) 文字 A と B の間に他の文字が 1 個以上入るような並べ方は何通りあるか．

基本 5.8 6 個の数字 1，2，3，4，5，6 から重複を許して 4 個を取り出し，それらを並べて 4 桁の整数をつくる．千の位，百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ，a，b，c，d とおく．次のような整数は，それぞれ何通りできるか．

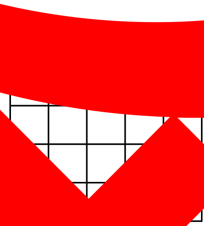
(佐賀大学 2001) $\boxed{7}$

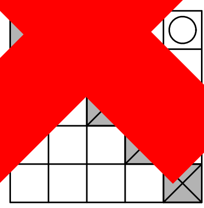
(1) $a < d$

(2) $a < b \leqq c < d$

基本 5.9 右上の図のような，縦方向に 5 行，横方向に 5 列の 　 個のマス目から，異なる 5 個のマス目を選んでマス目に○を 　 以下 　 答えよ．

(九工大 [情]2013) $\boxed{4}$





(1) すべての列に○がついているようなマス目 　 数を求めよ．

(2) すべての行と列に○がついているよう 　 の総数を求めよ，

(3) ○のついている列が 2 列，○ 　 いない列 　 列になるようなマス目の選び方の 　 を求めよ．

(4) 右下の図の 　 に，右上のマス目が選ばれて○ 　 ておりな 　 いた対角線上のマス目を選 　 つけ 　 ものとする．このとき， 　 の 行 　 ○が 　 ようなマス目の選び方 　 を 　 よ．

5.10 　 9 まで 　 ずつ書かれた 9 個の玉があり，これらのうち，2，3 　 れた 　 れぞれ 　 玉 2， 　 呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(九工大 [情]2015) $\boxed{4}$

(1) 　 の 　 3 個を 　 箱に入れ 　 の入れ方は何通りあるか．

(2) 　 方の 　 箱に， 　 っしょに含まれず，玉 1 と玉 3 もい 　 ものは何 　 か．

(3) 9 個の 　 つの箱に分けて入れる．ただし，各箱にはそれぞれ 3 個ずつの玉を入 　 のとする．この入れ方は何通りあるか．

(4) (3) の入れ方のうち 　 の箱にも，玉 1 と玉 2 がいっしょに含まれず，玉 1 と玉 3 もいっしょに含 　 いものは何通りあるか．

基本 5.11 1，2，3，4 を重複を許して並べてできる数について，次の問いに答えなさい．
(大分大学 2008) 6

(1) 各けたの数の和が 6 となる 5 けたの数の個数を求めよ．

(2) 各けたの数の和が 7 となる 5 けたの数の個数を求めよ．

(3) 各けたの数の和が $k+3$ となる k けたの数の個数を求めよ．

基本 5.12 10 個のアルファベットの大文字 A，B，C，D，E，F[illegible]O，X を重複を許して並べてできる 5 文字の順列を 1 枚の[illegible]ードに 1 つず[illegible]とする．なお，文字 H，I，O，X は上下を逆さまにしてもそ[illegible]H，I，[illegible]読めるので，これらの文字で書かれた 5 文字の順列はカードご[illegible]すると，$i=1,2,3,4,5$ に対して i 番目の文字がもとの $6-i$ 番目の文字[illegible]カードとして使えるとする．例えば，HIOXX[illegible]て，XXOIH と書かれたカードとしても使[illegible]IF と書かれたカードは上下を逆さまにすると 5 文字の順列を[illegible]ード[illegible]い．こ[illegible]き，次の問に答えよ．
([illegible]) 3

(1) 上下を逆さま[illegible]にして読んでも同[illegible]順列を表すカ[illegible]の総数

(2) 上下を逆[illegible]て読むと異なる順列を表すカ[illegible]の総[illegible]

(3) 上下[illegible]とにより 1 枚のカードを[illegible]て[illegible]ことを許[illegible]する．す[illegible]順列を[illegible]には，最小限で何枚の[illegible]が必要か．

標[illegible]3 次の[illegible]いに答[illegible]
(鹿児島大学 2007) 3

[illegible]) 10 桁[illegible]然数で[illegible]の数[illegible]がちょう[illegible]3 になるものはいくつあるか．

[illegible]下の[illegible]で，各[illegible]の合計がち[illegible]4 になるものはいくつあるか．

[illegible]から読[illegible]も左か[illegible]同じ数にな[illegible]数を「回文数」と呼ぶ．例え[illegible]，467[illegible]回文[illegible]るが[illegible]210 は回文数ではない．10 桁以下[illegible]数の[illegible]文数はい[illegible]

標準 5.14 正[illegible]て，つぎの条件 (i)，(ii) をみたす整数の組 $(a,\ b)$ の総数を $N(A)$ と表[illegible]す．
(分大 [医]2008) 7

(i) $a<b$

(ii) a と b の最小[illegible]数は A である．

(1) $N(105)$ を求め[illegible]

(2) $N(2310)$ を求めよ．

応用 5.15 $n \geqq 4$ とする。$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 からなる数列 a_k $(k=1,2,\cdots,n)$ を考える。以下の問いに答えよ。 (熊大 [医]2012) 1

(1) このような数列 $\{a_k\}$ は何通りあるか求めよ．

(2) 数列 $\{a_k\}$ の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1a_2\cdots a_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ とおく．$b_1+b_2+\cdots+b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ．

(3) $b_1+b_2+\cdots+b_n$ の最大値および最小値を与える数列 $\{a_k\}$ [illegible]それぞれ何通りあるか求めよ．

5.2　確率

5.2.1　サイコロ

□□ **5.16** 4 個のさいころを同時に投げ[illegible]みが出る確[illegible]を求めよ． ([illegible]島大[illegible]) 1

□□ **5.17** 3 個のさいころを同時に投[illegible]るとき，3 個[illegible]の積が[illegible]ある確率を求めよ． ([illegible]13) 1

□□ **5.18** [illegible]を同時に投げるとき，目の[illegible]る確率を[illegible]よ． (鹿児島大学 2010) 1

基[illegible]9 大[illegible]のサイ[illegible]げて，大きいサイ[illegible]の目の数を a，小さいサイ[illegible]の目の[illegible]とす[illegible]答えよ． (熊大 [文]2006) 1

([illegible]) [illegible] $= ax^2$ [illegible] $- b$ の[illegible]が -5 より[illegible]なる確率を求めよ．

[illegible]数 $y =$ [illegible] $2x$ [illegible]フと x 軸との[illegible]で，x 座標の大きい方を選ぶ．[illegible]が 1 よ[illegible]率を求[illegible]

(3) 関[illegible] ax^2 [illegible] b のグラ[illegible] x^2 のグラフが異なる 2 点で交わる確率[illegible]

標準 5.20 さいころを繰[illegible]投げて，n 回目に出た目の数を X_n とし，$a_n = X_1X_2\cdots X_n$ とする．このとき，各 n [illegible]いて，$a_n \leqq 9$ となる確率を求めよ． (熊大 [文]2002) 2

応用 5.21 X，Y は $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ の空でない部分集合で，$X \cap Y$ は空集合とする．また，n を自然数とする．A 君，B 君が以下のルールで対戦する．

(i) 1 回目の対戦では，まず A 君がさいころを投げて，出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする．出た目が X に属さなければ B 君がさいころを投げて，出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする．

(ii) 1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は，1 回目と同じ方[illegible]で 2 回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける．ただし，n 回[illegible]勝負がつかなかった場合は引き分けにする．

以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2013) 1

(1) さいころを投げたとき，X，Y に属する目[illegible] A 君が勝つ確率を求めよ．

(2) A 君が勝つ確率が，B 君が勝つ確率[illegible]な集合の組 $(X,\ Y)$ は何通りあるか．

5.2.2　球

□□ 5.22 1[illegible]整数がひとつずつ書かれた[illegible]ってい[illegible]中から玉を 3[illegible]出す[illegible]した玉に書かれた整数の[illegible] 12 以上となる確[illegible]を求めよ．　(福岡教育大学 2010) 5

[illegible].23 A[illegible]の 2 つ[illegible]箱 A には，赤玉が 1 個，青玉が 4 個，黄玉が[illegible]入って[illegible]箱 B[illegible]当[illegible] 3 本，[illegible]れくじが 7 本入っている．[illegible]箱 A[illegible]玉を 1[illegible]出し[illegible]が赤玉のと[illegible] B からくじを 5 本，青玉のと[illegible]黄玉[illegible]は 2[illegible]する．　(大分大学 2016) 3

(1) [illegible]出し[illegible]く[illegible]引く確率を求めなさい．

(2) 当[illegible]とも 1 本[illegible]めなさい．

(3) 当たり[illegible] 1 本引く確率を求めなさい．

標準 5.24 赤球 4 個と白[illegible]の入った袋から 2 個の球を同時に取り出し，その中に赤球が含まれていたら，[illegible]個数だけさらに袋から球を取り出す．このとき，以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2010) 2

(1) 取り出した赤[illegible]数が 2 である確率を求めよ．

(2) 取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ．

応用 5.25 n を2以上の自然数とする．1つの袋に1から n までの数を1つずつ書いた n 個の球と，数0を書いた2個の球が入っている．これら $(n+2)$ 個の球が入っている袋から，元に戻すことなく，1個ずつ3回球を取り出し，その3個に書かれている数を取り出した順に a，b，c とする．事象 $a+b \leqq c$ の起こる確率を $P(n)$ とするとき，次の各問に答えよ． (宮大 [医]2015) 7

(1) $P(3)$ を求めよ．

(2) n を偶数とするとき，$P(n)$ を，n を用いて表せ．

5.2.3 カード

基本 5.26 100から999までの自然数の集合を全[illegible]と3余るものの集合を A，9の倍数の集合を [illegible]

(1) A，B の要素の個数を求めなさい[illegible]

(2) $A \cap B$ の要素のうち，最小の[illegible]大のもの[illegible]め[illegible]

(3) U の要素が1つずつ書かれた玉[illegible]入った袋から[illegible]個取り[illegible]のとき，2個の玉に書[illegible]ている数がいずれも14で割ると[illegible]，[illegible]切れない場合の確[illegible]なさい．

基本 5[illegible]を3以[illegible]数とする．

1[illegible]までの[illegible]書かれた N 枚のカ[illegible]袋に入れ，「無作為に1枚の[illegible]を取[illegible]，その[illegible]袋に戻さずに次のカードを取り出す」という作[illegible]3枚の[illegible]を取[illegible]ま[illegible]す．取り出された3枚のカードに書かれた数[illegible]最大[illegible]とす[illegible]

[illegible]から[illegible]の数字[illegible]ずつ書かれた[illegible]のカードを袋に入れ，「無作為に[illegible]カー[illegible]取り出[illegible]書かれた[illegible]録し，袋に戻す」という作業を3[illegible]録され[illegible]最大[illegible]とす[illegible]

n を[illegible]の自[illegible]する．X[illegible]率を p_n とし，$Y=n$ となる確率を q_n とする．

次の問いに[illegible]よ． (琉球大学 2016) 4

(1) p_3，q_1，q_2，q_3 を[illegible]

(2) p_n と q_n を求めよ[illegible]

基本 5.28 1から5の数字が書かれたカードが1枚ずつある．これらから4枚を選び，横1列に並べる．並べられたカードに書かれた数字を左から順に a，b，c，d とおく．このとき，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2016) $\boxed{4}$

(1) カードの並べ方の総数を求めよ．

(2) 次のルールのもとで，3と4のカードを捨てる場合は何通りあるかを求めよ．

- $a < b < c < d$ ならば，b と c のカードを捨てる．
- $a < b < d < c$ ならば，b と d のカ[illegible]ドを捨てる．
- $b < a < c < d$ ならば，a と c の[illegible]を捨て[illegible]
- $b < a < d < c$ ならば，a と d のカ[illegible]
- その他は何も捨てない．

(3) (2) のルールのもとで，何も捨てない[illegible]

基本 5.29 A，B，Cの3人が自分の名[illegible]いた[illegible]を[illegible]枚ずつ[illegible]箱の中に入れる．この箱の中からA，B[illegible]にそれぞ[illegible]枚ず[illegible]とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし引いたカード[illegible]に戻さ[illegible]とする．　([illegible]02) $\boxed{2}$

(1) ひと[illegible]分の名前のカードを引く確[illegible]

(2) ひ[illegible]けが[illegible]のカードを引く確率を[illegible]よ．

([illegible]が自分の名[illegible]ドを引く確率を[illegible]

[illegible] **5.30** [illegible]中に1[illegible]まで[illegible]れかの数字を書いた同じ形の札が15枚入っ[illegible]て[illegible]らは[illegible]が1枚[illegible]札が2枚，[illegible]が3枚，4の札が4枚，5の札[illegible]となる[illegible]中から[illegible]の札のうち3[illegible]時にとり出すとき，札に書かれ[illegible]数の[illegible] S とす[illegible]次の問い[illegible]よ．　(熊大 [理]2001) $\boxed{4}$

(1) S[illegible]倍数[illegible]確率を求[illegible]

(2) S が[illegible]率を求めよ．

標準 5.31 箱の中に，数字の1を記入したカード，2を記入したカード，3を記入したカードがそれぞれ n 枚，合計 $3n$ 枚入っている．ただし，$n \geqq 4$ であり，またカードの裏側には何も書かれていないものとする．以下の問いに答えよ．

(九工大 [情]2009) $\boxed{4}$

(1) 箱の中からカードを1枚取り出し，数字を見ないでふせておく．次に箱の中から取り出したカードの数字が1である確率を求めよ．

(2) 箱の中から2枚のカードを同時に取り出したとき，カー[illegible]が異なる確率を n を用いて表せ．

(3) 箱の中から3枚のカードを同時に取[illegible]とき[illegible]の数字がちょうど2種類である確率を n を用いて表せ．

(4) 箱の中から4枚のカードを同時に取り出し[illegible]種類である確率を n を用いて表せ．

標準 5.32 1から6までの数字が1つず[illegible]れて[illegible]ドがあ[illegible]れらをよくきった上で，左から右に一列[illegible]る．カー[illegible]書か[illegible]ら順に a，b，c，d，e，f とする．このとき[illegible]の問いに答[illegible]2009) $\boxed{3}$

(1) $a+b=c$[illegible]確率を求めよ．

(2) $a+b$[illegible]確率を求めよ．

5[illegible]その[illegible]

[illegible] 5.3[illegible]akata[illegible]字を[illegible]べるとき，次の確率を求めよ．ただし，こ[illegible]文字[illegible]母音[illegible]で，[illegible]k，m，n，[illegible]る．(福岡教育大学 2009) $\boxed{1}$

(1) [illegible]端が[illegible]なる確[illegible]

(2) [illegible]となる[illegible]

(3) 母[illegible]並ぶ確率

□□ **5.34** 正[illegible]形の[illegible]中から異なる3点を選んで三角形を作る．この三角形が正三角形にも二等辺三[illegible]ともならない確率を求めよ．(鹿児島大学 2008) $\boxed{1}$

基本 5.35 A，B，C の 3 人がそれぞれある地域の東公園，西公園および北公園のいずれかに行こうとしている．この 3 人は次のように，硬貨の表裏によって，どの公園に行くのかを決める．

- A は手持ちの硬貨を 1 枚投げて，表が出たら東公園に行く．裏が出たら西公園に行く．
- B は手持ちの硬貨を 1 枚投げて，表が出たら西公園に行く．[illegible]が出たら，もう 1 度その硬貨を投げて，表が出たら東公園に行き，裏が[illegible]公園に行く．
- C は手持ちの硬貨を 1 枚投げて，表が[illegible]ら北公園[illegible]裏が出たら，もう 1 度その硬貨を投げて，表が出たら[illegible]行き[illegible]たら西公園に行く．

ただし，3 人が使用する硬貨は，表，裏がそれ[illegible]ものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) A と B が同じ公園に行く確率を求[illegible]公園に行っ[illegible]もよいものとする．

(2) B と C が同じ公園に行く確率[illegible]よ．ただし[illegible]どの[illegible]もよいものとする．

(3) 3 人が同[illegible]行く確率を求めよ．

(4) 少な[illegible] 2 [illegible]公園に行く確率を求めよ．

標準[illegible] 1 個買[illegible]に[illegible]個もらえる商品が[illegible]景品は全部で n 種類あり，[illegible] 1 か[illegible]での番[illegible]ある．また，1 から n までの数字が 1 つずつ記[illegible]れた[illegible]カード[illegible]．[illegible]ードは外から数字が見えない箱の中に入れ[illegible]あり[illegible]した商[illegible]ごと[illegible]中から 1 [illegible]て数字を確認して景品と交換す[illegible]カー[illegible]その[illegible]戻すものと[illegible]もらえる景品の番号は，引い[illegible]の数[illegible]同じ番[illegible]る．この[illegible]次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2012) 7

(1) この[illegible]したとき，[illegible]景品が少なくとも 1 個もらえる確率を求めよ．[illegible]し，[illegible] n とする．

(2) この商品を n 個購[illegible]とき，全種類の景品がそろわない確率を求めよ．

(3) この商品を $n+1$ [illegible]したとき，全種類の景品がもらえる確率を求めよ．

標準 5.37 図のような番号のついたマス目と駒とサイコロを使って，以下に示す規則にしたがうゲームを考える．

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- 駒は最初0番のマス目に置く．
- サイコロを投げ，出た目の数だけ駒を10番のマス目に向かって進める．
- 駒がちょうど10番のマス目に止まればゴールとする．
- ただし，10番のマス目を超える場合[illegible]その分だけ[illegible]マス目から0番のマス目側に戻る．

たとえば，7番のマス目に駒があり，出た目が5[illegible]駒は8番のマス目に移動し，その次に出た目が2であった場合は[illegible]

(九工大 [前] [illegible]) 1

(1) 2投目でゴールする確率を求め[illegible]

(2) 2投目の後，9番のマス目に[illegible]確率を求[illegible]

(3) 3投目でゴ[illegible]する確率を求めよ．

(4) このゲ[illegible]てA，Bの2名が対戦する．[illegible]交[illegible]コロを投[illegible]目[illegible]める試行を行ない，先に[illegible]し[illegible]を勝ち[illegible]る．ただ[illegible]ちら[illegible]でゴールしない場合は[illegible]けとする．引き分ける確[illegible]求めよ．

[illegible]A，Bの[illegible]それぞ[illegible]（$0 < k < 10$）のマス目に置いて(4)と同様の対戦[illegible]始する[illegible]Aが[illegible]率よりB[illegible]勝つ確率の方が高くなるためのk[illegible]を求[illegible]

5.2.[illegible]の最大[illegible]小

基本 5.38 [illegible]数とする．[illegible]にn個の球が入っている．このうち6個は赤球で残[illegible]球[illegible]この袋から6個の球を同時に取り出すとき，3個が赤球である確率をP_nとす[illegible]

(大分大学 2013) 1

(1) P_{10}を求めなさい．

(2) $\dfrac{p_{n+1}}{P_n}$ を求めなさ[illegible]

(3) P_nが最大とな[illegible]求めなさい．

基本 5.39 赤，青，黄 3 組のカードがある．各組は 10 枚ずつで，それぞれ 1 から 10 までの番号がひとつずつ書かれている．次の問いに答えよ．(福岡教育大学 2010) $\boxed{3}$

(1) 30 枚のカードの中からカードを 4 枚取り出すとき，2 枚だけが同じ番号で残りの 2 枚は相異なる番号である確率を求めよ．

(2) 30 枚のカードの中から k 枚 $(4 \leqq k \leqq 10)$ を取り出すとき，2 枚だけが同じ番号で残りの $(k-2)$ 枚はすべて異なる番号が書かれている確率[illegible](k) とする．

(ア) $\dfrac{p(k+1)}{p(k)}$ $(4 \leqq k \leqq 9)$ を求めよ．

(イ) $p(k)$ $(4 \leqq k \leqq 10)$ が最大とな[illegible]めよ．

基本 5.40 それぞれのカードに 1 から 25 までの[illegible]つずつ書かれた 25 枚のカードが箱に入っている．箱の中から無[illegible]箱に戻すという操作を 32 回繰り返す．以[illegible] (九工大 [illegible]) [illegible]

(1) 1 回の操作で取り出した 3 枚のカ[illegible]中に数[illegible]か[illegible]カー[illegible]まれている確率を求めよ．

(2) 32 回の操作が終わった時点にお[illegible]て，数字 13[illegible]かれた[illegible]た回数が k である確[illegible]を k を用いて表せ．

(3) (2) で[illegible]ついて $\dfrac{q_k}{q_{k-1}}$ を k を用いて[illegible]

(4) [illegible]めた[illegible]となる k を求めよ．

[illegible]41 r [illegible]上の整[illegible]赤球 r 個と白球 10 個が入っている袋がある．こ[illegible]から[illegible]球を同[illegible]取り[illegible]のうちの赤球の個数を調べ，取り出した球[illegible]白球[illegible]加え[illegible]戻すと[illegible]行を繰り[illegible]つまり，1 回の試行ごとに袋の[illegible]が 1 個[illegible]える[illegible]とになる．n [illegible]試行において取り出された 9 個[illegible]うち[illegible]球がち[illegible]ある確率[illegible]表す． (琉球大学 2008) $\boxed{4}$

(1) [illegible]が成[illegible]ことを示[illegible]

(2) $P_n <$ [illegible]ための n の[illegible]と r を用いて表せ．

(3) $r = 50$ の[illegible]き，P[illegible]大となる n の値を求めよ．

5.2.6 独立試行の定理

標準 5.42 9 枚のカードがあり，カードの表にはそれぞれ「2」「3」「4」「5」「6」「7」「8」「9」「10」の数が書かれている．また，裏にはすべて「1」が書かれている．これらのカードを投げたときに，それぞれのカードの表が上側になる確率と裏が上側になる確率は，ともに $\frac{1}{2}$ であるとする．9 枚のカードすべてを同時に投げて，各カードの上側に現れた数をすべて掛けあわせた値を得点とする．以下[illegible]答えよ．

(1) 得点が 8 点になる確率を求めよ． ([illegible]大 [情]2005) $\boxed{5}$

(2) 得点が偶数になる確率を求めよ．

(3) 得点が 8 の倍数になる確率を求めよ．

(4) 9 枚のカードからある 1 枚のカードを取り[illegible]枚のカードを同時に投げたときに得点が[illegible]確率の $\frac{3}{4}$ 倍になった．取り除いたカ[illegible]る数として考えられるものをすべて答えよ．

標準 5.43 出席者 n 人の会議で，出[illegible]のうち $\frac{2}{3}$ 以[illegible]議案に[illegible]率 T_n と，$\frac{1}{2}$ 以上が賛成す[illegible]H_n を考える．各出席者が議案[illegible]す[illegible]$\leqq 1)$ とし，各出[illegible]かしないかは互いにに独[illegible]る．
たとえ[illegible]$= 2p$[illegible]$^2 = 2p - p^2$ である．[illegible]き，以下の問いに答えよ．
ただ[illegible]席者[illegible]いかのどちらかで[illegible]のとする．

(九工大 [情]2008) $\boxed{4}$

[illegible]$_3$ を求[illegible]

(2) H[illegible]を示[illegible]

[illegible]$_2 - T$[illegible]大き[illegible]ときの p の値[illegible]よ．

([illegible]) [illegible]$\frac{1}{\ }$[illegible]，T[illegible]せ．

(5) p[illegible]き[illegible]$(k \geqq 1)$[illegible]

標準 5.44 大[illegible]の[illegible]コを投げ，大きいサイコロの目の数を p，小さいサイコロの目の数を q とする．[illegible]x^2 のグラフと $y = qx + 1$ のグラフの交点のうち，x 座標が負のものを A，正の[illegible]を B とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分 AB の中点の[illegible]標が 2 より小さくなる確率を求めよ．(熊大 [理]2009) $\boxed{3}$

(2) A の x 座標が[illegible]となる確率を求めよ．

(3) $\angle$OAB が 90° より大きくなる確率を求めよ．ただし，O は座標平面の原点である．

標準 5.45 1個のさいころを2回続けて投げるとき，1回目に出る目の数を a，2回目に出る目の数を b とする．これらの a，b に対して，実数を要素とする集合 P，Q を次のように定める．

$$P = \{x \,|\, x^2 + ax + b > 0\}$$
$$Q = \{x \,|\, 5x + a \geqq 0\}$$

このとき，以下の問いに答えよ． [illegible][理]2011) 1

(1) P が実数全体の集合となる確率を求[illegible]

(2) $Q \subset P$ となる確率を求めよ．

標準 5.46 さいころを3回続けて投げて出た目[illegible] b，c に対して2次方程式

$$(*) \qquad ax^2 \text{[illegible]}$$

を考える．ただし，さいころはどの[illegible]に確か[illegible]のとき，次の問いに答えよ． [illegible]007) 4

(1) 2次方程式[illegible]異なる二つの実数の解をもつ[illegible]積 a[illegible]を求め，積 ac の[illegible]可能な a と c の組 (a, c) がそ[illegible]よ．

(2) 2次[illegible](*)[illegible]二つの有理数の解をも[illegible]を求めよ．ただ[illegible]，一般[illegible]数 n が[illegible]でなければ $\sqrt{n}$ は無[illegible]であることを用いてよい．

[illegible].47 3[illegible]いこ[illegible]るものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 次[illegible]を求[illegible] (鹿児島大学 2001) 8

[illegible]1 の目[illegible]3 個出[illegible]

[illegible]1 [illegible]両方の[illegible]の他の目[illegible]い確率

[illegible]と3の[illegible]類の目[illegible]率

(2) 出る[illegible]最小値を[illegible]$M - m = k$ となる確率 p_k $(0 \leqq k \leqq 5)$ を求め[illegible]要ならば $k \leqq 2$ の計算には，次の事項 (i)，(ii) を用いてもよい．

(i) 出る目の数は[illegible]$m+k$ の2種類の目のみの場合と m，$m+k$，$m+i$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$ の[illegible]類の目の場合のいずれかである．

(ii) $1 \leqq m \leqq 6$[illegible]ある．

応用 5.48 袋の中に最初に赤玉2個と青玉1個が入っている．次の操作を繰り返し行う．

> (操作) 袋から1個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉1個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉1個を袋に入れる．袋に入っている3個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を1枚もらう．

(1) 2回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ．　[illegible][理]2015) 4

(2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことは[illegible]いことを示せ[illegible]

(3) 8回目の操作ではじめて硬貨をもら[illegible]求め[illegible]

(4) 8回の操作でもらう硬貨の総数がちょう[illegible]率を求めよ．

5.2.7　反復試行の確率

基本 5.49 箱の中に1から4までの番[illegible]ずつ[illegible]た[illegible]カー[illegible]てい る．また，手元に0の番号が書かれ[illegible]を持っ[illegible]とす[illegible]カードを1枚引き，手元のカードと比較し[illegible]番号の小さい[illegible]ードを[illegible]て，大きい方のカードを[illegible]残すという試行を繰り返す．[illegible]き．[illegible]．

[illegible]賀大[illegible]) 11

(1) 3[illegible]返して[illegible]ードが4である確率を[illegible]．また，n回繰り返して[illegible]のカー[illegible]率を求めよ．

[illegible]回繰[illegible]て手元[illegible]2である確率を求めよ．また，n回繰り返して手元[illegible]ードが[illegible]る確[illegible]よ．

[illegible]り返し[illegible]元のカ[illegible]3である確[illegible]めよ．

基本 5.50 座標平面上に点Pがあり，次のルールにより，点Pは移動する．

a，b，c の文字がそれぞれ1つずつ書かれた球3個が入った袋から，1個取り出してそこに書かれている文字を読み，その文字が

a のとき，点Pは x 軸の正の方向へ1だけ移動し，

b のとき，点Pは x 軸の負の方向へ1だけ移動し，

c のとき，点Pは y 軸の正の方向へ1だけ移動する．

最初，点Pは原点Oにあるものとする．この試行を，取り[illegible]球を元に戻しながら，5回続けて行う．例えば，これによ[illegible]得られた5[illegible]字が順に $b \to a \to c \to c \to a$ であるとすれば，上のルールに[illegible]点P[illegible]座標は，

$$(0,\ 0) \to (-1,\ 0) \to (0,\ 0) \to (0 \text{[illegible]} (1,\ 2)$$

と変化する．

このとき，次の各問に答えよ． ([illegible]) [illegible]

(1) y 軸上で点Pの移動が終了する[illegible]了し[illegible]の座標[illegible]て求めよ．

(2) 点Pの移動が終了する位置の[illegible]なる座標の個[illegible]求めよ．

(3) 点Pの移[illegible]了する位置の座標 $(x,\ y)$ が $|x$ [illegible] 1 [illegible]確率を求めよ[illegible]

応用 5.[illegible]中に[illegible]5個，青玉が10個，白[illegible]個入っている．袋の中から玉[illegible]取り出[illegible]玉の色に応じて，[illegible]操作で座標平面に置いたコ[illegible]動か[illegible]を考え[illegible]

(操作) [illegible]が点[illegible]にあ[illegible]とする．青玉を取り出したときにはコ[illegible]ンを点[illegible]$1,\ y)$ [illegible]青玉を[illegible]したときには点 $(x,\ y+1)$ に移[illegible]玉を取[illegible]たときには点[illegible]$1,\ y-1)$ に移動し，取り[illegible]た球は[illegible]

最初に[illegible]$0)$ に[illegible]を置き[illegible]り返して行う．指定した回数だけ操作を繰[illegible]ンが置か[illegible]を到達点と呼ぶことにする．このとき，以下の[illegible]

(九大 [文]2016) 3

(1) 操作を n 回繰り返[illegible]き，白玉を1度だけ取り出したとする．このとき，到達点となり得る点[illegible]て求めよ．

(2) 操作を n 回繰り返[illegible]き，到達点となり得る点の個数を求めよ．

(3) 座標平面上の4[illegible]$1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1, -1)$，$(1, -1)$ を頂点とする正方形 D を考える．操作を[illegible]回繰り返したとき，到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする．P_3 を求めよ．

(4) 自然数 N に対して P_{3N} を求めよ．

5.2.8　条件付き確率

基本 5.52 2個のさいころを同時に1回投げる．出る目の和を5で割った余りを X，出る目の積を5で割った余りを Y とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $Y \geqq 1$ である確率を求めよ．　　(宮崎大学 2003) $\boxed{7}$

(2) $X=2$ または $Y=2$ である確率を求めよ．

(3) $X=2$ である条件のもとで $Y=2$ である確率を求めよ．

基本 5.53 出る目の確率が次のようなさい[illegible]がひとつ[illegible]

・1，3の目が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{12}$

・5の目が出る確率は $\dfrac{1}{3}$

・2，4，6の目が出る確率はそれぞれ[illegible]

そこで，さいころを1回ふり，出た目[illegible]し，A を[illegible]割っ[illegible]る．次にもう1回さいころをふり，出た目[illegible]とし，$A+$[illegible]で割っ[illegible]とする．このとき，次の各[illegible]に答えよ．　　([illegible]005) $\boxed{9}$

(1) 事象 X[illegible]起こる確率を求めよ．

(2) 事[illegible] $Y=$[illegible]る確率を求めよ．

(3) [illegible] $X+Y$[illegible]起[illegible]という条件のもと[illegible] $X=1$，$Y=2$ である条件[illegible]き確率[illegible]よ．

基本 5.5[illegible]ーム[illegible]ームは[illegible]回野球[illegible]をする．毎回勝敗を決定し，引[illegible]いもの[illegible]．ど[illegible]のチームが[illegible]したときにそのチームの優勝[illegible]1回目[illegible]合では[illegible]の勝つ確率[illegible]チームの勝つ確率の2倍である．[illegible]の試合[illegible]ムが勝[illegible]は，前日の試合で勝ったときはBチー[illegible]の確率[illegible]であり，[illegible]Bチームの勝つ確率の $\dfrac{1}{3}$ 倍である．このとき，[illegible]えよ．　　(鹿児島大学 2007) $\boxed{7}$

(1) 1回目の試[illegible]でA[illegible]が勝つ確率 P_A とBチームが勝つ確率 P_B を求めよ．

(2) 前日の試合でAチ[illegible]が勝ったとき，今日の試合でAチームが勝つ確率 P_{AA} と，前日の試合で[illegible]ームが勝ったとき，今日の試合でBチームが勝つ確率 P_{BB} を求めよ．

(3) 4回以内の試合[illegible]が決まる確率を求めよ．

(4) 5回目の試合で優勝が決まったことがわかっている．このときAチームが優勝している確率を求めよ．

標準 5.55 はじめに，4 枚の硬貨 A，B，C，D が，表が上の状態で置かれている．これらの硬貨に対して以下の試行を繰り返すものとする．

試行：4 枚の硬貨のうち，裏が上の硬貨はそのままにし，
表が上の硬貨はすべて拾って同時に投げる．

ただし，すべての硬貨が，裏が上の場合も，0 枚の硬貨を拾って投げるとみなして，試行を繰り返すものとする．以下の問いに答えよ．　([illegible] [情]2016) 4

(1) 硬貨 A が 3 回目の試行の後に表が上で[illegible]る確率を求め[illegible]

(2) 3 回目の試行の後，硬貨 A と B は表[illegible]かつ[illegible]とDは裏が上である確率を求めよ．

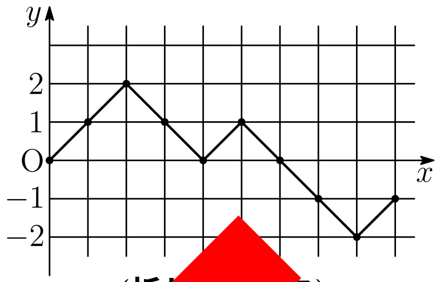
(3) 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚で[illegible]

(4) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 [illegible]後に表が上の硬貨が 2 枚である確率[illegible]

(5) 1 回目の試行の後に表が上の硬[illegible]で，[illegible]3[illegible]行の[illegible]が上の硬貨が 2 枚である確率を求[illegible]

(6) 3 回目の試行[illegible]後に表が上の硬貨が 2 枚であっ[illegible]のと[illegible]の試行の後に表が[illegible]が 3 枚である確率を求めよ．

応用 5.56 平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき，その点を格子点という．与えられた格子点を第 1 番目とし，この点から右斜め 45°，または右斜め −45° の方向にもっとも近い第 2 番目の格子点をとり，この 2 点を線分で結ぶ．同様にして第 2 番目の格子点から第 3 番目の格子点をとり，第 2 番目と第 3 番目を線分で結ぶ．以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということに[illegible]る．右図に[illegible]格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例を示す．次の問い[illegible] (九大 [理]2002) $\boxed{6}$



(折[illegible]フ)

(1) n は正の整数，k は $0 \leqq k \leqq n$ なる整数と[illegible]格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条[illegible]また，この必要十分条件がみたされて[illegible]と格[illegible]ぶ折れ線グラフの数を求めよ．

(2) n は 2 以上の整数，k は $0 \leqq k \leqq$[illegible]る整数[illegible]$-k$[illegible]す[illegible]O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グ[illegible]あって格子[illegible]$k)$，$($[illegible]$n-2,\ k)$ の少なくと[illegible]つを通る折れ線[illegible]ラフの数は，[illegible]O と格[illegible]$k+1)$ を結ぶ折[illegible]フの数の 2 倍に等しいことを[illegible]

(3) コイ[illegible]回[illegible] 1 回から i 回までの試行に[illegible]，[illegible]の出た回[illegible]ら裏の出[illegible]を引[illegible]で表す．このとき各格[illegible]$(i,\ T_i)$，$i = 0, 1, 2, \cdots, 9$，[illegible]番に線[illegible]つな[illegible]れ線グラフが得ら[illegible]ただし，$T_0 = 0$ とする．[illegible]$= 3$[illegible]たとき[illegible]$(i = 1, 2, \cdots, 7)$ も 3 にならない条件つき確率を求め[illegible]

第 6 章　整数の性質（数学 A）

6.1　約数と倍数

□□ **6.1** 3 桁の自然数 a について，百の位 [illegible] の数を a_2，一の位の数を a_3 とする．$a_1 + a_2 + a_3$ と a は 9 で割った余 [illegible] とを示せ．

□□ **6.2** n が 2 以上の整数のとき，$n^3 -$ [illegible] とを示せ．
([illegible]崎大学 [illegible]) 1

□□ **6.3** 自然数 n が 6 と互いに素 [illegible] とき，$n^2 -$ [illegible] で割 [illegible] とを示せ．
([illegible]016) 1

□□ **6.4** n [illegible] 数とする．n を m で割ると [illegible] 13 は [illegible] り切れるとき [illegible] 値を [illegible] めよ．
(鹿児島大学 2011) 1

□[illegible] 20! = [illegible] k は [illegible] り立つとき，整 [illegible] 値を求めよ．
(鹿児島大学 2009) 1

[illegible] y を整 [illegible] すると [illegible] 下の問い [illegible] よ．　(熊大 [医]2011) 1

[illegible] $- x$ [illegible] の倍数 [illegible] を示せ．

(2) [illegible] は 30 [illegible] であ [illegible]

6.2　不定[illegible]程[illegible]

□□ **6.7** 1 次不定方程式 [illegible]

$$37x + 32y = 1$$

の整数解を 1 組求めよ [illegible]
(鹿児島大学 2015) 1

□□ **6.8** $a^2b - 3a^2 + 5b = 21$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．
(福岡教育大学 2016) 1

基本 6.9 n を整数とする方程式を $5x+3y=2n$ とする． (大分大学 2005) 7

(1) $n=30$ のとき，この方程式をみたす正の整数 x，y の組をすべて求めなさい．

(2) この方程式をみたす整数 x，y の組をすべて求めなさい．

標準 6.10 100 人の団体がある区間を列車で移動する．このとき，乗車券が 7 枚入った 480 円のセット A と，乗車券が 3 枚入った 220 円のセット B を[illegible]入して，利用することにした．以下の問いに答えよ． ([illegible][文]2012) 3

(1) x が 0 以上の整数であるとき，次のこ[illegible]示せ．
$\frac{1}{3}(100-7x)$ は，x を 3 で割ったとき[illegible]て整数であり，
それ以外の場合は整数ではない．

(2) 購入した乗車券は，余らせずすべて利[illegible]とセット B の購入の仕方をすべて挙[illegible]

(3) 購入した乗車券は余ってもよい[illegible]る．[illegible]き，[illegible]た[illegible]B のみを購入する場合も含めて，[illegible]額が最も[illegible]るの[illegible]れぞれ何セットずつ購入するときか．[illegible]たそのときの[illegible]金額は[illegible]

標準 6.11 以[illegible]答えよ． ([illegible]大[illegible]) 1

(1) k[illegible]とする[illegible]の方程式 $x^2-k^2=12$[illegible]解をもつような k の値を[illegible]求め[illegible]

(2) [illegible]の方程[illegible]$a-1)$[illegible]$)x+a+2=0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつよう[illegible]a の[illegible]のと[illegible]数解をすべて求めよ．

[illegible]次の[illegible]答え[illegible]． (分大 [医]2007) 7

(1) [illegible]xy を[illegible]組 x，y[illegible]て求めよ．

(2) 7[illegible]$z)$[illegible]$+yz+$[illegible]然数の組 $(x \leqq y \leqq z)$ をすべて求めよ．

応用 6.13 p を[illegible]数とす[illegible]，次の問に答えよ． (佐大 [医]2015) 6

(1) 2 つの自然数 m，n[illegible]大公約数は 1 であるとし，$x=\frac{n}{m}$ とおく．p^x が有理数であるならば，m[illegible]であることを示せ．

(2) 方程式

$$p^x=-x^2+9x-5$$

が有理数の解 x をもつような組 $(p,\ x)$ をすべて求めよ．

6.3　合同式

基本 6.14 a，b は自然数とする．a を 8 で割った余りを r，b を 8 で割った余りを s とする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2002) $\boxed{3}$

(1) $a+b$ を 8 で割った余りと $r+s$ を 8 で割った余りが等しいことを示せ．

(2) a^2 を 8 で割った余りと r^2 を 8 で割った余りが等しいことを[illegible]せ．

(3) 平方数を 8 で割ったとき，余りとしてえられる数をすべ[illegible]．ただし，平方数とは自然数の平方となっている数[illegible]とである．

(4) 2 つの平方数の和を 8 で割ると余り[illegible]なら[illegible]を示せ．

標準 6.15 自然数 n に対して，10^n を 13 で割[illegible]は 0 から 1[illegible]まで整数である．以下の問いに答えよ．

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等[illegible]

(2) a_1，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ．

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数[illegible]べて求め[illegible]

(i) N を[illegible]数で表示したとき 6 桁となる．

(ii) [illegible]表示して，最初と最後の桁の[illegible]と[illegible]る．

(i[illegible]13 で[illegible]る．

**応[illegible] 以下[illegible]に答[illegible]　(九大 [理]2015) $\boxed{5}$

[illegible] n が[illegible]数の[illegible]倍数である[illegible]ことを示せ．

[illegible]然数[illegible] $2^n +$ [illegible] -1 は互[illegible]であることを示せ．

[illegible] q を[illegible]素数と[illegible] $-1 = pq^2$ [illegible]す p，q の組をすべて求めよ．

6.4　[illegible]の活用

基本 6.17 2 つ[illegible]整数[illegible]の和で表される整数の集合を A とする．以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2011) $\boxed{2}$

(1) 集合 A のある要素[illegible] b^2 (a，b は整数) が 3 で割り切れるとき，a，b はともに 3 で割り切れるこ[illegible]示せ．

(2) x を整数とする[illegible]が集合 A の要素であるとき，x は集合 A の要素であることを示せ．

基本 6.18 次の各問に答えよ．（鹿児島大学 2001）$\boxed{3}$

(1) 次の等式を証明せよ．

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

(2) 二つの整数の平方の和で表される数の全体からなる集合を A とする．x，y が集合 A の要素であるとき，積 xy もまた集合 A の要素であ[illegible]とを証明せよ．

(3) (2) の集合 A に対して，5 および 5^5 は A の要素である[illegible]明せよ．

標準 6.19 次の問いに答えよ．（[illegible]岡教育大学 2003）$\boxed{1}$

(1) a，b を正の整数とし，$f(x)=ax+b$ とす[illegible] $f(2)$ のうち，2つの値が3の倍数ならば a，b はともに3の倍[illegible]

(2) a，b，c，d を正の整数とし，$f(x)=$ [illegible] d とする．$F(x)=f(x)g(x)$ の係数，定数項が[illegible]3[illegible] a，b は[illegible]に3の倍数であるか，または c，d は[illegible]の倍数[illegible]

標準 6.20 1から[illegible]までの自然数の[illegible]で，n と互[illegible]である[illegible]数を $\varphi(n)$ とする．ただし[illegible]数 a と b が互いに素であるとは[illegible]1になることであ[illegible]（[illegible]賀大[illegible]）$\boxed{1}$

(1) [illegible]求め[illegible]

(2) [illegible]素数，[illegible]然数[illegible]とき，$\varphi(p^k)$ を求[illegible]

(3) $\varphi(100$[illegible]よ．

(4) φ[illegible]を求[illegible]

[illegible]1 $f($[illegible]$^2-2$[illegible]$+2)$ とおく[illegible]とき，次の問いに答えよ．（九大 [文]2007）$\boxed{1}$

(1) 方[illegible]数解 x を[illegible]小さい順に並べよ．

(2) 不等式[illegible]す整数 n をすべて求めよ．

(3) 不等式 $f(n) \leqq 1$ を[illegible]す整数 n をすべて求めよ．

応用 6.22 4次方程式の解について，次の問いに答えよ．ただし，右のことは既知としてよい．　(長大 [医]2010) 7

> 自然数 k，l，m が次の条件
> (イ)　k と l は 1 以外の約数をもたない
> (ロ)　k は lm の約数である．
> を満たすならば，k は m の約数である．

(1) a，b，c，d は整数で，$d \neq 0$ とする．次の方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

が有理数の解 r をもつとき，$|r|$ は[illegible]であり，[illegible]$|$の約数に限ることを証明せよ．

(2) 次の方程式

$$2x^4 - 2x \text{[illegible]}$$

の実数解はすべて無理数であること[illegible]

応用 6.23 以下の問いに答えよ．　[illegible]4) 2

(1) 任意の自然数 [illegible] に対し，a^2 を 3 [illegible]割った余りは [illegible] であ[illegible]明せよ．

(2) 自然数 [illegible] $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定[illegible] c [illegible] 3 で割り[illegible]ないことを証明せよ．

(3) [illegible] $= 3c^2$ [illegible]然数 a，b，c は存在し[illegible]とを証明せよ．

[illegible]24 n [illegible]整数と[illegible]　(分大 [医]2004) 8

(1) 整[illegible] x^5 [illegible]った[illegible]求めよ．

(2) [illegible] x^{4n} + [illegible] x^{2n} + [illegible] $+ x^3 + x^2 +$ [illegible] で割った余りを求めよ．

6.5　問題研究

6.5.1　オイラーの φ 関数

38ページの6.20(佐賀大学2005)は，オイラーの φ 関数に関する出題である．

1から n までの自然数のうちで，n と互いに素であるものの個数を表す関数 $\varphi(n)$ を，オイラーのトーシェント関数 (Euler's totient function) または φ [illegible]数 (phi function) という．6.20(2)の結果から，p を素数，k を自然数とするとき[illegible]が成り立つ．

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} [illegible] p^k\left(1 - \frac{1}{[illegible]}\right)$$

定理1

p，q を素数，k，l を自然数，$n = p^k q^l$ とす[illegible]

$$\varphi(n) = \varphi(p^k)\varphi(q^l) [illegible] - \frac{[illegible]}{p} [illegible]$$

証明 1から n までの自然数のうち[illegible]，q，pq で割[illegible]れる個[illegible]れぞれ $\frac{n}{p}$，$\frac{n}{q}$，$\frac{n}{pq}$ で[illegible]ら，p または q で割り切れる個[illegible]

$$\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{pq}$$

[illegible]て [illegible]$) = n$[illegible]$\frac{n}{[illegible]} - \frac{n}{pq}\right) = n\left(1 - [illegible]\frac{}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$

$[illegible] q^l \left(1 [illegible]\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) [illegible] \varphi(p^k)\varphi(q^l)$

証終

補題 [illegible](9)φ([illegible]せ．

証明 10[illegible]について，[illegible]列を $9i + 10j$ とすると，次のページの表1のよ[illegible]$9i + 10j$ を90で割った余り(ただし割り切れるときは，便宜上90とす[illegible]を求[illegible]表2のようになる．

表2からもわかるように[illegible]$10j$ $(1 \leqq i \leqq 10,\ 1 \leqq j \leqq 9)$ の値は，法90について，どの2つも合同ではない[illegible]て，$1 \leqq i, i' \leqq 10,\ 1 \leqq j, j' \leqq 9$ に対して

$$9i + 10j \equiv 9i[illegible] \quad \text{すなわち} \quad 9(i - i') \equiv 10(j' - j) \pmod{90}$$

が成立するとき
$$9(i - i') \equiv 0 \pmod{10}$$
$$10(j' - j) \equiv 0 \pmod{9}$$

$-9 \leqq i - i' \leqq 9$，$-8 \leqq j' - j \leqq 8$ であるから　$i = i'$，　$j = j'$

したがって，表 2 には，1 から 90 までの自然数が 90 個並ぶ．

$9i+10j$ の値 (表 1)

$i \backslash j$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	19	29	39	49	59	69	79	89	99
2	28	38	48	58	68	78	88	98	108
3	37	47	57	67	77	87	97	107	117
4	46	56	66	76	86	96	106	116	126
5	55	65	75	85	95	105	115	125	135
6	64	74	84	94	104	114	124	134	144
7	73	83	93	103	113	123	133	143	[illegible]
8	82	92	102	112	122	132	142	152	[illegible]
9	91	101	111	121	131	141	151	161	[illegible]
10	100	110	120	130	140	150	160	170	180

$9i+10j$ を 90 で割った余り (表 2)

$i \backslash j$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	19	29	39	49	59	69	79	89	9
2	28	38	48	58	68	78	88	8	18
3	37	47	57	67	77	87	7	17	27
4	46	56	66	76	[illegible]	6	16	26	36
5	55	65	75	[illegible]	[illegible]	[illegible]	25	35	45
6	64	74	[illegible]	[illegible]	[illegible]	24	34	44	54
7	73	83	[illegible]	[illegible]	[illegible]	33	43	53	63
8	82	[illegible]	[illegible]	[illegible]	32	42	52	62	72
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	31	41	51	61	71	81
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	50	60	70	80	90

$90 = 9 \times 10$ で 9 と 10 は互いに素であるから [illegible] 互いに素である数は 9 または 10 と互いに [illegible] 表 2 の 1 から 90 までの自然数のうち，[illegible] に素 [illegible] べて 3 [illegible] 6 列目，9 列目に並び，それ以外の列数は [illegible] また，1 [illegible] 0 ま [illegible]，10 と互いに素でない数は，すべて 2 行 [illegible] 4 行目，5 行 [illegible] 行目，[illegible] 10 行目に並び，それ以外の [illegible] 数は $\varphi(10)$．そこで，これらの数 [illegible] た，[illegible] いに素であるものを残 [illegible] が左下の表である．さらに，[illegible] の [illegible] を [illegible] べたものが右下 [illegible]，[illegible] 書かれた列数は $\varphi(9)$，数 [illegible] か [illegible] 行数は [illegible]．よって [illegible] $= \varphi($[illegible] 成り立つ．

[illegible]	29			[illegible]				
37			67	[illegible]		7	[illegible]	
	[illegible]		[illegible]	23				
[illegible]		[illegible]				61	71	

19	29	[illegible]	[illegible]	79	89			
37	47	67	77	7	17			
73	[illegible]	13	23	43	53			
[illegible]	[illegible]	31	41	61	71			

証終

補題の証明を一般化する [illegible] により，次の定理を得る．

定理 2

自然数 m，n が互い [illegible] あるとき，次式が成り立つ．

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

定理3

$p_1,\ p_2, \cdots, p_l$ を素数，$k_1,\ k_2, \cdots, k_l$ を自然数とすると

$$n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_l}^{k_l}$$

について，次式が成り立つ．

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)$$

証明 定理2の乗法的性質を用いると

$\varphi(n) = \varphi({p_1}^{k_1})\varphi({p_2}^{k_2})\cdots\varphi(p_l$ [illegible]

$= {p_1}^{k_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right){p_2}^{k_2}\Big(1$ [illegible] $p_l\Big)$

$= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\Big(1$ [illegible] $\cdots\Big($ [illegible] $\Big)$ **証終**

定理4 フェルマ[illegible]・オイラーの定理 (Fermat-Eu[illegible]Theor[illegible]

自然数 n と[illegible]ある自然数 a について，次[illegible]

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

証[illegible]以下の[illegible]で n [illegible]である数を

[illegible] $r_1,\ r_2,$ [illegible] $_{(n)}$ (6.1)

[illegible]する[illegible]に n [illegible]素である自然[illegible]掛けた数

[illegible] $ar_{\varphi(n)}$ (6.2)

は，[illegible]いて合同で[illegible]．$ar_i \equiv ar_j$ と仮定すると，$a(r_i - r_j) \equiv 0$ より，r_i [illegible] $_j$．ゆ[illegible]法 n に関して，(6.1) と (6.2) は順序を無視すると一致する．したがって[illegible]をすべて掛け合わせたものと (6.2) をすべて掛け合わせたものは合同で[illegible]すなわち

[illegible] $r_2\cdots r_{\varphi(n)} \equiv r_1r_2\cdots r_{\varphi(n)} \pmod{n}$

ゆえに　r_1r[illegible]$_{)}(a^{\varphi(n)}-1) \equiv 0 \pmod{n}$

よって　$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

とくに，n が素数 p のとき (フェルマーの小定理)　$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$　**証終**

定理 5

自然数 n と互いに素である自然数 a について

$$a^e \equiv 1 \pmod{n}$$

を満たす最小の自然数 e(位数) は，$\varphi(n)$ の約数である．

証明 $\varphi(n)$ が e で割り切れないと仮定し，$\varphi(n)$ を e で割った商を [illegible] をr r とすると

$$\varphi(n) = eq \text{ [illegible] } < r < \text{ [illegible]}$$

したがって　$a^{\varphi(n)} = a^{eq+r}$ [illegible]

$a^{\varphi(n)} \equiv 1$，$a^e \equiv 1 \pmod{n}$ であるから

$$a^r \equiv 1 \text{ [illegible]}$$

これは，e が位数であることに [illegible]．　**証終**

例 例えば，7 と互いに素である数 1，2，3，4，5，6 について

$$\text{[illegible]} \equiv 1,\quad 3^6 \equiv 1,\quad 4^3 \equiv 1,\quad 5^6 \text{ [illegible]} \pmod{\text{[illegible]}}$$

[illegible] ように [illegible] 位数は $\varphi(7) = 6$ の約数である．

[illegible] について [illegible] $\equiv 1$ [illegible] が $p-1$ に等しいとき，a を法 p の原始根という．
[illegible] とき

$$\text{[illegible]},\ \cdots,\ a\text{[illegible]}$$

[illegible] 関して [illegible] の 2 つ [illegible] はない．
実際 [illegible] $\equiv p -$ [illegible] $\pmod{\text{[illegible]}}$ [illegible] ると

$$\text{[illegible]} 1) \equiv 0 \quad \text{[illegible]} \quad a^{j-i} \equiv 1 \pmod{p}$$

これは a が法 p の原始根であることに反する．

上の例から 3 と 5 は法 7 の原始根であり，法 7 に関して次の巡廻性がある．

$$\begin{array}{llllllll} 3^1 \equiv 3, & 3^2 \equiv \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \equiv 6, & 3^4 \equiv 4, & 3^5 \equiv 5, & 3^6 \equiv 1 & & \pmod{7} \\ 5^1 \equiv 5, & 5^2 \text{[illegible]} & 5^3 \equiv 6, & 5^4 \equiv 2, & 5^5 \equiv 3, & 5^6 \equiv 1 & & \pmod{7} \end{array}$$

第 7 章　図形の性質（数学A）

7.1　角の大きさ

□□ **7.1** 三角形 ABC において辺 AB 上に[illegible]辺[illegible]点 E をとり，線分 BE と線分 CD の交点を F とする．点 A，D，E，[illegible]にあり，さらに角のあいだに

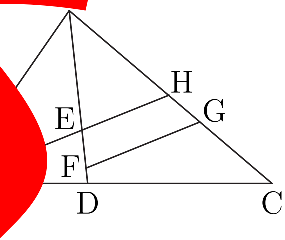
$$\angle \mathrm{AEB} = 2\angle \mathrm{AB}\text{[illegible]}$$

という関係が成り立つとき，∠BAC の値[illegible]よ．[illegible]児島大学[illegible]4) 1

7.2　三角形[illegible]辺の比

□□ **7.2** △A[illegible]て ∠A の二等分線と辺 BC と[illegible]する[illegible] = 6, BC = 5, [illegible]の[illegible]辺 AC の長さを求めよ．[illegible]児島大学[illegible]16) 1

基[illegible] 右図[illegible]BC[illegible]AB : [illegible]3 : [illegible]る．ま[illegible]等分線[illegible]辺 BC[illegible]点を[illegible]る．[illegible]AD を[illegible]に内分[illegible]を E, [illegible]F[illegible]: 1 に[illegible]F, [illegible]を 7 : [illegible]分する[illegible]



とする．[illegible]C との交点[illegible]るとき，次の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}}$ の値[illegible]めよ．　(宮崎大学 2010) 8

(2) BH//FG であるこ[illegible]せ．

(3) FG = 7 のとき，[illegible]E の長さを求めよ．

基本 7.4 △ABC は AB = AC で ∠C = 72° である．∠B の二等分線と AC との交点を D とする．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2009) 6

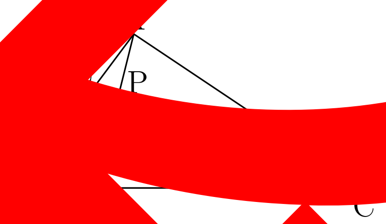
(1) △ABC と △BCD は相似であることを示せ．

(2) AD : DC を求めよ．

(3) 直線 BC 上の点 E を BC = BE となるようにとる．ただし，E は C と異なる点である．DE と AB の交点を F とするとき，AF : FB を求め[illegible]

基本 7.5 右の図の三角形 ABC において，

$$\mathrm{AE} : \mathrm{EB} = 1 : a$$
$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = 1 : b$$



とする．ただし，$a > 0$，$b > 0$ である．このと[illegible]次の各問に答えよ．　(宮崎大学 20[illegible]

(1) AP : PD を a，b を用いて表せ．

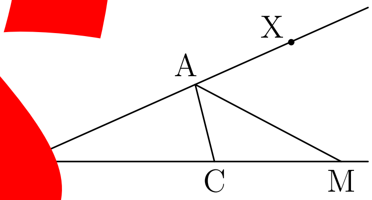
(2) △APE : △ABC を a，b を用[illegible]．

基本 7.6 AB > A[illegible]である △ABC について，次の各[illegible]答えよ[illegible]の 2 つの図において，[illegible]A の延長上の点とする．[illegible] 13

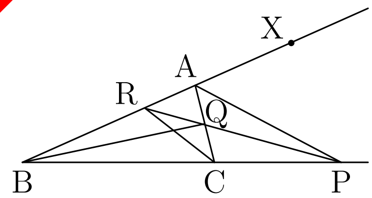
(1) 右図[illegible]に，[illegible]辺 BC の延長上に AB : [illegible]BM[illegible]MC を満た[illegible]ように[illegible]このと[illegible]) (B) に答えよ．

(A) 点[illegible]AB[illegible]AN を満た[illegible]にと[illegible]，[illegible]である[illegible]ことを示[illegible]

(B) AM[illegible]の外角[illegible]分すること[illegible]



(2) [illegible]いて，[illegible]∠[illegible]分線[illegible]辺[illegible]点[illegible]は ∠C の二[illegible]AB と[illegible]また，直線[illegible]辺 BC の延[illegible]の交[illegible]とする．このとき，AP が ∠A の外角を[illegible]することを示せ．



標準 7.7 △ABC におい[illegible]C = 90°，AB : AC = 5 : 4 とする．辺 BC の点 C 側の延長上に，CA = CD と[illegible]点 D をとる．辺 AB の中点を E とし，点 B から直線 AD に下した垂線を BF と[illegible]とき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2016) 7

(1) EF = EC を示せ．

(2) 面積比 △ABC : △CEF を求めよ．

標準 7.8 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D，E，F とする．また，AE と BF，BF と CD，CD と AE の交点をそれぞれ P，Q，R とする．このとき，以下の問いに答えよ． (九大 [文]2016) 2

(1) 3 直線 AE，BF，CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ．

以下，t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする．

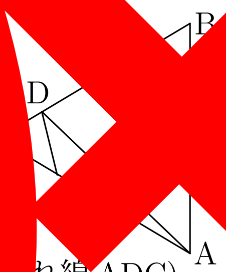
(2) $\mathrm{AP} = k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR} = \ell\mathrm{CD}$ を満たす実数 [illegible] ℓ をそれぞ[illegible]．

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ．

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ．

標準 7.9 △AOB は $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$ なる二等[illegible]分 OB に関して A と対称な点を A′ とする[illegible] (九大 [文]2[illegible]02) 3

(1) $\alpha < 90^\circ$ とする．右図のように線[illegible]上に点 C をとる．点 C を固定し，[illegible]OB 上に点 D を折[illegible]線 ADC の長さが最[illegible]小となるようにと[illegible] OA′ 上に $\mathrm{OC'} = \mathrm{OC}$ をみた[illegible] 線分 AC′ は点 D を通[illegible]を示[illegible]



[illegible]れ線 ADC)

(2) [illegible]5° と[illegible]線[illegible]上に点 E を，線分 [illegible]点 F を折れ線 AFE の長[illegible]が最小[illegible]よう[illegible]のとき ∠AEF は直角となることを示せ．

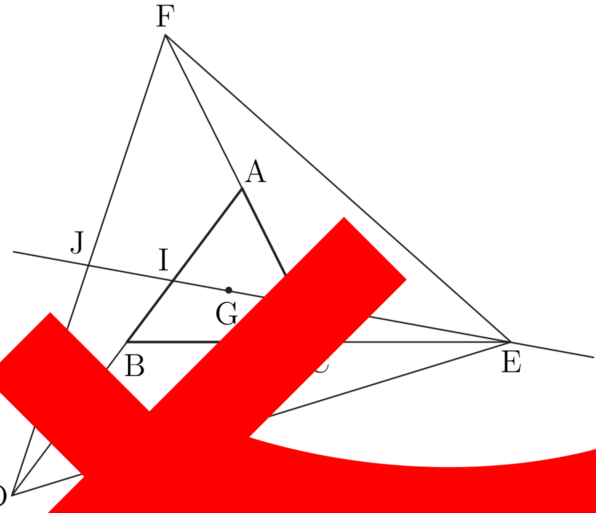
(3) $\alpha <$ [illegible]する[illegible]OA[illegible]を，線分 OB 上に点 H を折れ線 AHGB の長[illegible]最小と[illegible]ように[illegible]このとき，[illegible]線 AHGB の長さを α を用いて[illegible]．

7.3 [illegible]形[illegible]心・内心[illegible]

□□ **7.10** A[illegible]C[illegible]鋭角三角形 ABC の外心を O，重心を G とする．直線 OG と A から辺 BC におろし[illegible]線との交点を H，BC の中点を M とするとき，AH : OM を求めよ． (鹿児島大学 2009) 1

□□ **7.11** 三角形 AB[illegible]いて，辺 AB の中点を D，辺 AC の中点を E とする．BE = CD ならば AB[illegible]であることを示せ． (鹿児島大学 2012) 1

基本 7.12 右図の△ABCにおいて，辺AB上の延長上にAB = BDとなる点Dがある．同様に，辺BCの延長上にBC = CEとなる点Eが，辺CAの延長上にCA = AFとなる点Fがそれぞれある．△ABCの重心をGとし，直線GEと線分AC，AB，FDとの交点をそれぞれH，I，Jとする．このとき，次の比を求めよ． （宮崎大学 2015） 11



(1) CH : HA

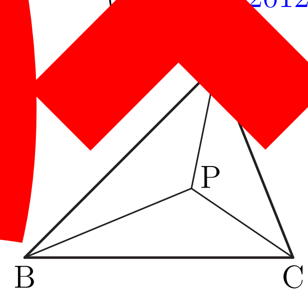
(2) BI : IA

(3) DJ : JF

基本 7.13 右図のように，△ABCの内[illegible]をと[illegible]△[illegible]PBC[illegible]Aの面積をそれぞれS_{AB}，S_{BC}，S_{CA}と[illegible]き，次の[illegible]答え[illegible] （[illegible]2012） 9

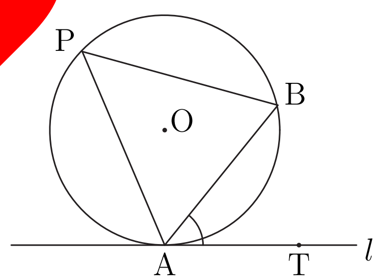
(1) 点Pが[illegible]内心で，${S_{AB}}^2 + {S_{CA}}^2 = {S_{BC}}^2$が成[illegible]ACの大きさを求めよ．

(2) S[illegible]$_{BC}$[illegible]り立つとき，点Pは[illegible]Cの重[illegible]示せ．



[illegible]と[illegible]

□□[illegible]のよう[illegible]を[illegible]る円において，[illegible]と[illegible]おける接線[illegible]角∠BATは[illegible]る弧ABに対[illegible]円周角∠APBに[illegible]いこ[illegible]証明せよ．ただし，∠BATは鋭角とする． （[illegible]崎大学 2013） 12



基本 7.15 次の問いに答えよ． (佐賀大学 2008) 10

(1) 平面において，一直線上に相異なる3点A，P，Bをこの順にとる．次に線分ABを直径とする半円Cをかき，点Pを通る直線ABの垂線と半円Cとの交点をQとする．このとき，半円Cの半径と線分PQの長さをそれぞれ線分APの長さと線分BPの長さを用いて表せ．

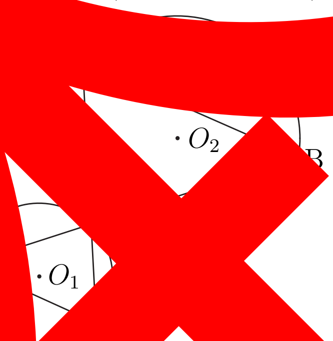
(2) (1)を用いて，2つの正の数a，bに対して，不等式

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

が成り立つことを示せ．また，等号[illegible]立つのは[illegible]うな場合かも示せ．

基本 7.16 次の問に答えよ． (宮崎大学 2014) 9

(1) 右図のように半径r_1の円O_1と半径r_2の円O_2が外接している．円O_1と円O_2の接[illegible]をPとする．円O_1の周上に点Pと[illegible]点Aをとり，線分APの延長と[illegible]交点をBとする．また，円O_1[illegible]点P，点Aと異なる点Cをとり，線[illegible]の延長と円O_2の[illegible]をDとする．



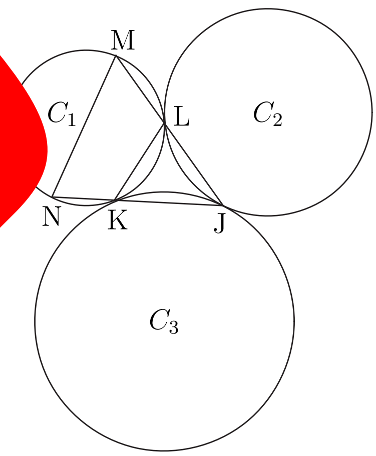
このと[illegible](a)，(b)に答えよ．

(a) [illegible]の接線を利用して，AC[illegible]ることを示せ．

(b) [illegible]O_1の中[illegible]中心を結ぶ直線を利[illegible]，点Pは線分ABを$r_1 : r_2$[illegible]に内分[illegible]こと[illegible]

(2) 右図の[illegible]半径[illegible]の円C_2，半[illegible]円C_3[illegible]に外接[illegible]る．円[illegible]C_3の接[illegible]，円[illegible]C_1の接点を[illegible]円[illegible]C_2の[illegible]する．線分[illegible]円C[illegible]線分[illegible]円C[illegible]をNと[illegible]

こ[illegible]LMNの面[illegible]K の面積[illegible]を求めよ．



7.5 方べきの[illegible]

□□ **7.17** 四角形ABCDにおいて，線分ACと線分BDの交点をPとし，$\angle\mathrm{DAC} = \angle\mathrm{CBD}$，$\mathrm{AC} = 8$，$\mathrm{AP} = 2$，$\mathrm{PD} = 4$とする．このときBDの長さを求めよ．

(鹿児島大学 2013) 1

基本 7.18 三角形ABCの辺AB，ACの中点をそれぞれD，Eとし，辺BE，CDの交点をGとする．4点D，B，C，Eが同一円周上にあるとき，次のことを証明せよ．

(1) AB = ACである．　(鹿児島大学 2006) 3

(2) $2\angle\mathrm{ABG} = \angle\mathrm{BAE}$であるとき，$\angle\mathrm{BAG} = \angle\mathrm{ABG}$である．

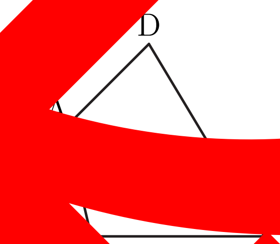
(3) (2)の条件を満たすとき，三角形ABCは正三角形である．

基本 7.19 次の各問に答えよ．　([illegible]大学 2009) 11

(1) 図1のように，直線ADとBCは点[illegible]で交わっている．

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PD} = \mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}$$

が成り立つとき，四角形ABCDは円[illegible]することを示せ．



(2) 図2のように，鋭角三角形A[illegible]部に点Pをとり，直線AP，BP，C[illegible]辺BC，CA，ABと[illegible]点をそれぞれD，E，Fとする．次の[illegible]がともに成り立つとき，点Pは[illegible]あることを示せ．

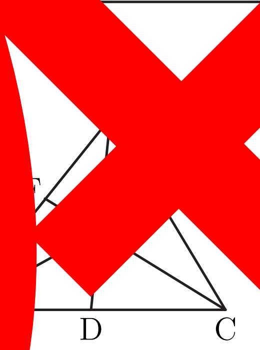


図2

(1) [illegible]角形[illegible]内接する．

(2) 四[illegible]EPD[illegible]する．

三[illegible]の各頂[illegible]対辺[illegible]した3本[illegible]線は1点で交わる．[illegible]点を三[illegible]の垂心[illegible]．

基[illegible]の点[illegible]接線上[illegible]異なる点Pをとる．点Pを通る直線[illegible]から近[illegible]2点B[illegible]ている．∠APBの二等分線と線分AB，A[illegible]それぞれD，E[illegible]$\mathrm{PA} : \mathrm{PB} = r : 1-r$とおき，$\mathrm{BD} = s$，$\mathrm{CE} = t$とお[illegible]$r < 1$とする．　(大分大学 2012) 3

(1) 線分ADの長さを[illegible]で表しなさい．

(2) $\mathrm{PB} : \mathrm{PC} = 2 : 3$と[illegible]き，$r$の値を求めなさい．

(3) (2)のとき，線分[illegible]長さをtで表しなさい．

7.6　三角形と円

□□ **7.21** 半径 r の円 O の外部の点 P からこの円に引いた接線の接点の一つを T とする．T を端点とする円 O の直径 TQ をとる．三角形 PTQ の辺 PQ と円 O との交点を R とするとき，PR の長さを求めよ．ただし，$\angle\mathrm{QPT} = 30^\circ$ とする．

(鹿児島大学 2008) 1

□□ **7.22** $\triangle$ABC において，$\angle\mathrm{A} = 75^\circ$，$\angle\mathrm{B} = 60^\circ$，$\mathrm{AB} = 1$ と [illegible] 頂点 A を通り辺 BC に垂直な直線と $\triangle$ABC の外接円との交点を P とする [illegible] き，線分 AP の長さを求めよ．[illegible] 児島大学 2010) 1

□□ **7.23** 半径 r の円 O′ が半径 $2r$ の円 O に点 [illegible] さらに円 O′ は円 O の弦 AB に点 Q で接している．線分 PQ の延長が円 O [illegible] のとき，線分 QM の長さを求めよ．[illegible]

基本 7.24 $\triangle$ABC に対し，点 P は辺 [illegible] 点，[illegible] の B，[illegible] なる点，点 R は直線 AQ と直線 CP との [illegible] する．こ [illegible] よ．

(1) $a = \dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RP}}$，$b$ [illegible] とおくとき，a と b の関係式 [illegible] よ．[illegible] 005) 14

(2) $\triangle$ABC [illegible] と直線 CP との点 C 以外の [illegible] る．[illegible] CR，CQ [illegible] であ [illegible] CR : RP : PX を求めよ [illegible]

基本 [illegible] 円 O [illegible] する [illegible] 直径 PQ と RS に [illegible]，OR の延長上に点 A を [illegible] Q と [illegible] うに [illegible] 円 O の交点を M とし，さらに線分 MQ と線分 [illegible] の交点 [illegible] とする [illegible] とき [illegible] 各問に答 [illegible] よ．(鹿児島大学 2001) 5

(1) [illegible] は線分 [illegible] の中点 [illegible] ことを証明せ [illegible]

(2) [illegible] 分の [illegible] 比 A [illegible] RB を求 [illegible]

(3) [illegible] は $\angle$A [illegible] 二等分 [illegible] 明せよ．

基本 7.26 [illegible] 接円の中心 [illegible]，この内接円と辺 AB，AC，BC との接点をそれぞれ [illegible]，$\mathrm{P_2}$ [illegible] する．また，辺 AB を B の方向に伸ばした延長線，辺 AC を C の方向に伸ばし [illegible] 長線，および辺 BC と接する三角形 ABC の傍接円の中心を $\mathrm{O_2}$ とし，この傍接 [illegible] AB の延長線，辺 AC の延長線，辺 BC との接点をそれぞれ $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$，$\mathrm{Q_3}$ と [illegible] このとき次の各問いに答えよ．(鹿児島大学 2004) 6

(1) $\mathrm{P_1Q_1} = \mathrm{P_2Q_2}$ [illegible] ことを示せ．

(2) $\mathrm{BP_3} + \mathrm{BQ_3} = \mathrm{CP_3} + \mathrm{CQ_3}$ であることを示せ．

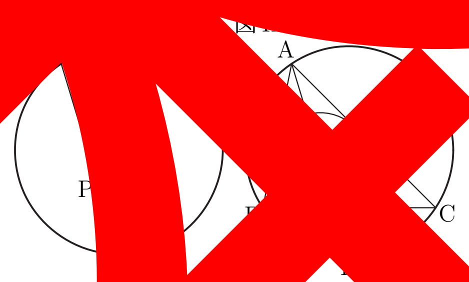
標準 7.27 r を 1 より小さい正の定数とする．平面上の点 A を端点とする半直線 l 上の点で A からの距離が $1-r$，1，$1+r$ となるものをそれぞれ B，C，D とする．BD を直径とする円を描き，A を端点としその円に接する半直線のひとつを m とする．m 上の点で A からの距離が $1-r$，1，$1+r$ となるものをそれぞれ E，F，G とする．E，F を通り l に接する円を描きその接点を P とする．また F，G を通り l に接する円を描きその接点を Q とする．　(九大 [文]2001) 5

(1) A と P との間の距離 AP を r で表せ．

(2) CF を r で表せ．

(3) $\mathrm{PQ} = \mathrm{CF}$ を示せ．

標準 7.28 次の各問に答えよ．　([illegible])



(1) 右図 I において，点 O を中心とする円
の半径を R とする．この円の弦 XY
の任意の点を P とするとき，等

$$\mathrm{OP}^2 = R^2 - \mathrm{XP}\cdot\mathrm{YP}$$

が成り立　　示せ．

(2) 右図　　AB　　心を O，内心を I とする．　　BC　外接円，内　円の半
　　　れぞれ　　　　また，直線 AI と　　の外接円の，点 A と異な
　　点を　　ABC　　円と辺 AB との接　　とする．このとき，次の
A)，(　　)に答
(A)　= DI で　ことを
　I·DI　　である　示せ．
　OI^2　　$- 2R$　　とを示せ．

7.7

□□ **7.29** 平　　で 2　　を考える．共通接線がちょうど 3 本引けるような 2 つの円の位置関係の例を図示　　また，3 本の共通接線も描け．

(鹿児島大学 2013) 1

第 8 章　式と証明（数学II）

8.1　二項定理

□□ **8.1** $\left(x - \dfrac{5}{x^2}\right)^6$ を展開したときの x を[illegible]よ.

[illegible]

□□ **8.2** $(x - 3y + 2z)^7$ の展開式における[illegible]求めよ.

[illegible]教育大学[illegible]) $\boxed{1}$

□□ **8.3** $(2x - y + z)^8$ の展開式に[illegible]$x^2y^3z^3$ の[illegible]求め[illegible]

(鹿[illegible]2011) $\boxed{1}$

基本 8.4 次の[illegible]なさい. [illegible]分大[illegible] $\boxed{2}$

(1) 正[illegible]n に[illegible]$\frac{1}{x}\Big)^n$ の展開式に，定[illegible]が含まれるための n の条件[illegible]めな[illegible]

(2) $\Big(x +$ [illegible] $x\Big)$ の[illegible]式に[illegible]数項を求めなさい.

[illegible]n を自[illegible]とする[illegible]$)^n$ の展開式を[illegible]して，次の問いに答えなさい.

(大分大学 2006) $\boxed{1}$

(1) n[illegible]$_2 + \cdots$[illegible]$_n = 12$[illegible]値を求めなさい.

(2) 31^{1}[illegible]きの余りを[illegible]さい.

標準 8.6 n を 3 以上の[illegible]とする．以下の問いに答えよ. (熊大 [文]2008) $\boxed{2}$

(1) $2 \leqq k \leqq n$ を満た[illegible]数 k について，$k(k-1)_n\mathrm{C}_k = n(n-1)_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ を示せ.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)_n\mathrm{C}_k$[illegible]よ.

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ.

標準 8.7 n を3以上の奇数として，次の集合を考える．

$$A_n = \left\{ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}} \right\}$$

以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2013) 1

(1) A_9 のすべての要素を求め，それらの和を求めよ．

(2) ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$ が A_n 内の最大の数であることを示せ．

(3) A_n 内の奇数の個数を m とする．m は奇数であることを[illegible]

8.2　等式と不等式の証明

□□ **8.8** $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ [illegible]

(琉球大学 [illegible]) [illegible]

□□ **8.9** $x > 0$，$y > 0$，$x + y = 1$ の[illegible]不等式

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geqq [illegible]$$

が成り立つこ[illegible]また，等号が成り立つのは[illegible]か答[illegible]

(宮崎大学 [illegible]01) 9

□□ [illegible] a，b [illegible] y [illegible]数とする．　(福岡教育大学 2011) 1

(1) $(a^2 + [illegible])(x^2 + [illegible] x + by + cz)^2$ が成り立つことを示せ．

(2) x [illegible] $= 1$ [illegible]，$x^2 +$ [illegible] の最[illegible]求めよ．

[illegible] 次の[illegible]答え[illegible]　(福岡教育大学 2010) 2

(1) [illegible] $+ y$ [illegible] $-$ [illegible] $- z)$ [illegible] $- x)^2\} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ が成[illegible]

(2) $a \geqq 0$，[illegible]とき，$\dfrac{a + [illegible]}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ が成り立つことを示せ．また，等号が成[illegible]立つの[illegible] $b = c$ のときであることを示せ．

(3) 一辺の長さがそれ[illegible] b，c の三角形の面積は $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ で与えられることが知[illegible]いる．ただし，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とする．三辺の長さの和が $2s$ $(s > 0)$ で[illegible]うな三角形の面積は $\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ 以下であることを示せ．また，面積が $\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ となるのは，三角形が正三角形のときであることを示せ．

標準 8.12 次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2005) $\boxed{3}$

(1) 2 個の負でない実数 a，b に対して，$\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b} \geqq \dfrac{a+b}{1+a+b}$ が成り立つことを示せ．

(2) 負でない実数 a，b，c について，$a+b \geqq c$ ならば

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ．

(3) n を 2 以上の整数とする．n 個の負で[illegible] a[illegible]$\cdots$，a_n と負でない実数 c について，$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqq c$ ならば[illegible]

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\cdots$$ [illegible] c

が成り立つことを示せ．

第 9 章　複素数と方程式（数学II）

9.1　複素数

□□ **9.1** 次の方程式を解け．

$$(1+i)x^2-(1+3i)x \text{ [illegible]}$$

ただし，i は虚数単位，x は実数とする．

□□ **9.2** a，b を実数とする．x の方程式 [illegible] $-1+bi$ を [illegible] つとき，a，b の値を求めよ．ただし，i は虚数 [illegible] る．　(琉球大 [illegible]) 5

9.2　剰余の [illegible] 理・因数定理

□□ **9.3** 整 [illegible] $\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{8}{3}$ と $P\left(-\frac{7}{2}\right)=$ [illegible]

$P(x)$ を [illegible] $11x$ [illegible] た余りを求めよ．　(琉球大学 2016) 5

基 [illegible] 3 次の [illegible] $P(x)$ [illegible] 条件 1)，2)，3) [illegible] している．

[illegible] $P(x)$ [illegible] 係数 [illegible]

[illegible] 2) P [illegible] $(x-1$ [illegible] り切 [illegible]

[illegible] を x [illegible] 割った [illegible] x^2-x-2 [illegible] た余りは等しい．

こ [illegible] 問に答 [illegible]　(宮崎大学 2013) 11

(1) P [illegible] めよ．

(2) $\{P($ [illegible] 割った余り [illegible] よ．

標準 9.5 $P(x)$ [illegible] x^5 [illegible] が 1 であるような 5 次式とする．$P(x)$ を x^2-x-6 で割ったときの商を $Q(x)$，[illegible] を $x-2$ で割ったときの商を $R(x)$ とおく．

$$P(-2)=\text{[illegible]}\quad P(3)=5,\quad Q(2)=Q(-2)=R(-3)=2$$

であるとき，次の各問 [illegible] よ．　(宮崎大学 2011) 5

(1) $P(x)$ を x^2-x [illegible] 割ったときの余りを求めよ．

(2) $R(x)$ を求めよ．

(3) $P(x)$ を求め，展開して降べきの順に整理せよ．

9.3　高次方程式

□□ **9.6** 3次方程式 $x^3-ax-6=0$ が $x=-1$ を解にもつとき，定数 a の値と他の解を求めよ．
(琉球大学 2015) $\boxed{5}$

□□ **9.7** a，b，c を実数とする．$a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ である．a，b，c のうち少なくとも1つは1に等しいことを示せ．
(福岡[illegible]大学 2014) $\boxed{1}$

□□ **9.8** 4次方程式 $x^4+ax^3+14x^2+16x+b=0$ が $x=-$[illegible]解としてもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ．
([illegible]教育大学 2013) $\boxed{1}$

基本 9.9 次の各問いに答えよ．
(鹿児島大学 2016) $\boxed{2}$

(1) 整式 $P(x)$ を0でない整式 $Q(x)$ で割った[illegible]と $Q(x)=0$ の共通解は方程式 $Q(x)$ [illegible]示せ．また逆に方程式 $Q(x)=0$ [illegible]方程式 $P($[illegible]$)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解であることを[illegible]

(2) 整式 $P(x)$，$Q(x)$ を

$$[illegible](x)=x^4+2x^3+x^2-1,\quad Q([illegible]$$

とお[illegible]$=0$ と $Q(x)=0$ の共通解[illegible]よ．

9[illegible]解と[illegible]の[illegible]

[illegible] **9.1**[illegible]ついて[illegible]方程[illegible]$+ax^2+$[illegible]$+c=0$ の1つの解が $1-2i$ であ[illegible]$2i$ も[illegible]程式の[illegible]ることを[illegible]ただし，a，b，c は実数の定数[illegible]は虚数[illegible]する[illegible]
(福岡教育大学 2008) $\boxed{5}$

□□[illegible]方程式[illegible]x^2+[illegible]$=$[illegible]の解が $2+\sqrt{3}i$ であるとき，実数の定[illegible]の値[illegible]よ．
(琉球大学 2011) $\boxed{5}$

基本 9.12 以[illegible]よ．
(佐賀大学 2009) $\boxed{9}$

(1) 次を満たす2数 x，[illegible]求めよ．

$$x+y=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$$

(2) 次を満たす3数[illegible]，z を求めよ．

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3,\quad xyz=1$$

9.5　その他の方程式・不等式

□□ **9.13** 方程式 $x^3-1=0$ の虚数解の一つを ω とするとき，$\omega^4+\omega^2+1$ の値を求めよ．　(鹿児島大学 2008) $\boxed{1}$

□□ **9.14** a を 0 でない実数とする．x についての 3 次方程式 $x^3-a^3=0$ の 2 つの虚数解を α，β とするとき，$\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ の値を求めよ．　(福岡[illegible]大学 2012) $\boxed{5}$

□□ **9.15** 次の (1)，(2)，(3) に答えよ．　([illegible]島大学 2014) $\boxed{2}$

(1) $t=x+\dfrac{1}{x}$ とおく．このとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ [illegible]ぞれ t についての多項式で表せ．

(2) $\dfrac{2x^4-3x^3-5x^2-3x+2}{x^2}$ を t について[illegible]

(3) 4 次方程式 $2x^4-3x^3-5x^2-3x+$ [illegible]解[illegible]

基本 9.16 次の問いに答えよ．　([illegible]02) $\boxed{5}$

(1) 複素数 $1+$[illegible]を解にもつ実数係数の x の 2 次方[illegible]，x^2 [illegible]であるものを求め[illegible]

(2) a，b [illegible]と[illegible]次方程式 $x^4-x^3+2x^2+$ [illegible] $=$ [illegible] $1+2i$ を[illegible]にもつ[illegible]，b の[illegible]

標[illegible]**7** i を[illegible]単位と[illegible]問いに答えよ．　(長崎大学 2008) $\boxed{2}$

(1) 3 次[illegible] x^3 [illegible]解け．

[illegible] $n+\sqrt{}$[illegible]するとき[illegible] $=225+2\sqrt{}$[illegible]成り立つ．このような整数 m，[illegible]の組を[illegible]よ．

(3) [illegible] $+2\sqrt{7}$ [illegible]とす[illegible]をを[illegible]求めよ．

9.6 問題研究

9.6.1 無理数を解にもつ有理係数の方程式

Q を有理数，$\sqrt{q}$ を無理数とするとき

$$Q[\sqrt{q}\,] = \{u + v\sqrt{q} \mid u, v \in Q\}$$

を考える．$x, \overline{x} \in Q[\sqrt{q}\,]$ を

$$x = u \text{ [illegible]}$$
$$\overline{x} = u - \text{ [illegible]}$$

と定義すると，$k \in Q$，$x, y \in Q[\sqrt{q}\,]$ について[illegible]

$$\begin{cases} \overline{k} = \text{[illegible]} \\ \overline{x}\text{ [illegible] } + \overline{y} \\ \text{[illegible] } \overline{y} \end{cases} \quad (9.1)$$

第3式から $\overline{x^2}$ [illegible]^2．さらに $\overline{x^n} = (\overline{x})^n$ （n は自[illegible]．

例えば，[illegible] a [illegible]ある3次方程式

$$\text{[illegible]}^3 + bx^2 + cx + d = \text{[illegible]} \quad (9.2)$$

[illegible] $Q[\sqrt{}$ [illegible]をもつ[illegible]$z^2 + cz + d = 0$ であるから，(9.1) により

$$\text{[illegible] } bz^2 + cz \text{ [illegible] } \overline{0}$$
$$\text{[illegible] } + \overline{bz^2} + \overline{cz} + \text{ [illegible]}$$
$$\text{[illegible] } \overline{z^2} + \overline{c}\text{ [illegible] } 0$$
$$a(\overline{z})^3 \text{ [illegible] } d = 0$$

これから $\overline{z}$ が[illegible]ることが分かる．

(9.1) において，k を実[illegible]，y を複素数とし，x と $\overline{x}$ を互いに共役な複素数と考えても成り立つ．ゆえ[illegible]$, b, c, d$ を実数とするとき，(9.2) の方程式が複素数 z を解にもつとき，共[illegible]素数 $\overline{z}$ も (9.2) の解であることがわかる．
なお，n 次方程式に[illegible]もこれらのことが成立する．

第 10 章　図形と方程式（数学II）

10.1　点と直線

□□ **10.1** 放物線 $y=x^2-x$ の頂点をP [illegible]点[illegible]の放物線上の点であり，原点 O(0, 0) とも点Pとも異なるとする．∠O[illegible]るとき，点Qの座標を求めよ．

基本 10.2 t を実数とし，点Pの座標を $(t$[illegible]直線 $l_1: 2x+$[illegible]$+3=0$ の距離を d_1 とし，点Pと直線 $l_2: 2x-$[illegible]の距[illegible]$_2$[illegible]また[illegible]$+d_2$ とおく．　[illegible]2) $\boxed{7}$

(1) $t=2$ のとき[illegible]d の値を求めなさ[illegible]．

(2) 点Pが直[illegible]たはその上側にあるための t[illegible]

(3) d の[illegible]の t の値を求めなさい．

標準 [illegible]$a>1$[illegible]p[illegible]る．2直線 $l_1: y=$[illegible]1，$l_2: y=a$ の交点をS，l[illegible]の交[illegible]とし[illegible]P$(0,\ p)$，l_1 上の点 A$(1,\ 1)$，l_2 上の点 Q$(q,\ a)$ [illegible]る．∠[illegible]$=135°$[illegible]QS[illegible]あるとき，次の問いに答えよ．

(熊大 [文]2002) $\boxed{3}$

[illegible]れぞ[illegible]で表[illegible]

[illegible]AT[illegible]S で[illegible]a それぞ[illegible]を求めよ．

10.2 [illegible]

基本 10.4 座標[illegible]面上[illegible]O(0, 0)，点A(−1, 3)，点B(4, 8) がある．さらに，2次関数 $y=f(x)$ のグラ[illegible]円 C はそれぞれ3点O，A，Bを通るものとする．このとき，次の各問に答え[illegible]

(宮崎大学 2010) $\boxed{2}$

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 円 C の中心の座標[illegible]よび半径を求めよ．

(3) グラフ G と円 C との交点のうち，3点O，A，B以外の点の座標を求めよ．

基本 10.5 座標平面上に 2 点 A(1, 3)，B(5, −5) があり，直線 AB に関して原点 O と対称な点を C とする．このとき，次の問いに答えなさい．　(大分大学 2009) 4

(1) 点 C の座標を求めよ．

(2) 3 点 A，B，C を頂点とする △ABC の外接円の方程式とその中心の座標を求めよ．

(3) 点 (0, 5) から △ABC の外接円に引いた接線の方程式を求め[illegible]

基本 10.6 a を実数とする．円 $x^2+y^2-4x-8y+15=0$ と[illegible]$ax+1$ が異なる 2 点 A，B で交わっている．　[illegible]分大学 2015) 1

(1) a の値の範囲を求めなさい．

(2) 弦 AB の長さが最大になるときの a の値[illegible]

(3) 弦 AB の長さが 2 になるときの a の値を[illegible]

基本 10.7 2 つの円 $C_1 : x^2+y^2=4$，C_2[illegible]両方に接する直線は全部で 4 本ある．この 4 本の直線の方程[illegible]めよ[illegible]崎大学[illegible]) 2

標準 10.8 直線 $l_1 : y=mx+3$ (m[illegible]，点 A(5[illegible]中心[illegible]接している．その接点を[illegible]とする．直線 l_1 と[illegible]軸との交点を[illegible]2 点 A[illegible]直線 l_2 と x 軸との交点を[illegible]る．[illegible]1) 2

(1) 円 C_1[illegible]を用いて表しなさい．

(2) 円[illegible]x 軸と[illegible]点で交わるような m の[illegible]範囲を求めなさい．

(3[illegible]QR の[illegible]の[illegible]求めなさい．

[illegible]点 P[illegible]を通[illegible]と円 C_1 の中心との距離を d とする．d の最小値[illegible]ときの[illegible]値を求[illegible]い．

[illegible]平面[illegible]点 A(0[illegible]B(−1, 0)，C[illegible]を頂点とする △ABC について[illegible]各問[illegible]よ．　(宮崎大学 2001) 2

(1[illegible]中心と[illegible]求め[illegible]

(2) 内[illegible]を求めよ．

三角[illegible]円をその三角形の**外接円**という． また，三[illegible]形の[illegible]べてに接する円をその三角形の**内接円**という．

標準 10.10 座標平面上[illegible]の円 C_1，C_2，C_3 は，それぞれ中心が (0, 0)，(0, 3)，(4, 0)，半径が r_1，r_2，[illegible]り，どの 2 つの円も互いに外側で接しているとする．このとき，次の各問に[illegible]よ．　(宮崎大学 2004) 3

(1) r_1，r_2，r_3 の値[illegible]よ．

(2) 円 C が C_1，C_2，C_3 のそれぞれと互いに外接しているとき，円 C の半径 r と中心の座標 (a, b) を求めよ．

10.3　軌跡の方程式

基本 10.11 円 $C: x^2+y^2-4kx+2ky-5=0$ について，次の問いに答えよ．
(熊大 [文]2003) $\boxed{3}$

(1) C は k の値に関係なくある 2 つの点 A，B を通る．A，B の座標を求めよ．ただし，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする．
(2) PA : PB $= 2:1$ となる点 P の軌跡を求めよ．

基本 10.12 座標平面上の 3 点 P(2, 1)，Q[illegible]$\dfrac{11}{5}\Big)$，[illegible]を通る円を C_1 とする．このとき，次の問いに答えよ．(佐賀大学 2009) $\boxed{5}$

(1) 円 C_1 の方程式を求めよ．
(2) 円 C_1 に内接する正三角形の面積を求[illegible]
(3) 円 $C_2: x^2+y^2=5$ の円周上を動[illegible]に対[illegible]P，Q[illegible]角形を作るとする．このとき，△MP[illegible]の軌跡[illegible]めよ．

標準 10.13 座標平[illegible]面上に，2 つの放物線

$$[illegible]y=(x-t)^2+t \qquad C_2: y [illegible]$$

がある[illegible]し，t[illegible]る．このとき，次の各[illegible]に答えよ．
(宮崎大学 2012) $\boxed{8}$

[illegible]C_1，C[illegible]なる 2[illegible]き，t の値の範囲を求めよ．
[illegible]2) (1[illegible]き，C[illegible]の 2[illegible]点を結[illegible]の中点の軌跡を図示せよ．

[illegible]14 円[illegible]$C_2: (x-2$[illegible]$-4)^2=5$ とに点 P から接線を引[illegible]C_1 の接[illegible]C_2 の[illegible]の距離との比が $1:2$ になるとする．[illegible]，P[illegible]を求め[illegible]
(熊大 [文]2004) $\boxed{1}$

10.4　不[illegible]式の[illegible]領域

□□ **10.15** xy 平面で次[illegible]等式で表される領域を図示せよ．(鹿児島大学 2016) $\boxed{1}$

$$|x| \leqq y \leqq 1-|x|$$

□□ **10.16** 実数 x，y が $(x-2)^2+y^2 \leqq 3$ を満たすとき，$\dfrac{y-7}{x}$ のとりうる値の範囲を求めよ．
(福岡教育大学 2013) $\boxed{1}$

□□ **10.17**　a を正の実数とするとき，座標平面において，連立不等式

$$x^2+y^2 \leqq 4ax, \quad x^2+y^2 \geqq 2ax, \quad \sqrt{3}\,x-y \leqq 2\sqrt{3}\,a$$

の表す領域を図示せよ．　(福岡教育大学 2006) 1

基本 10.18　座標平面上の 3 点を A(1, 0)，B(0, 1)，C(−1, 0) とし [illegible] △ABC の内部の点を P(a, b) とする．ただし，点 P は △ABC の周上にはない [illegible] する．このとき，次の各問に答えよ．　([illegible]大学 2007) 3

(1) 直線 AB に関して，点 P と対称な点 [illegible] 標を求 [illegible]

(2) 直線 BC に関して，点 P と対称な点を [illegible] 2 点 Q，R を通る直線 l の方程式を求めよ．

(3) 原点 O と直線 l の距離が $\dfrac{4}{5}$ より小さく [illegible] せよ．

基本 10.19　x，y が不等式 $|x-2|$ [illegible] $| \leqq 2$ を満 [illegible] とき，[illegible] えよ．

(1) この不等式 [illegible] す領域を図示しなさい．　([illegible] 010) 1

(2) $x+2y$ [illegible] 小値を求めなさい．

基本 1[illegible] の問 [illegible]　(鹿児島大学 2009) 2

([illegible] $4x$ [illegible] a が [illegible] $-x^2+6x-5$ [illegible] るとき，a の値と接点の座標を求 [illegible]

[illegible]) 点 [illegible] が連 [illegible] 式 x^2 [illegible] 25，y [illegible] $+6x-5$ の表す領域を動くとき，[illegible] $3y$ の [illegible] と最 [illegible] めよ．

基本 [illegible] 平面 [illegible] 軸 [illegible] 距離 [illegible] $= \dfrac{3}{4}x$ までの距離の和が 1 以下である [illegible] らな [illegible] 域を D と [illegible]，次の各問に答えよ．

(1) 領域 D [illegible]　(宮崎大学 2003) 2

(2) 点 (x, y) [illegible] 領域 D [illegible] 動くとき，$x+y$ が最大となる点の座標を求めよ．

基本 10.22 直線 $l : y = x + 1$ と曲線 $C : y = 2x^2 - 4x + 1$ との交点を P，Q とするとき，次の各問に答えよ．ただし，P の x 座標は Q の x 座標より小さいものとする．
(宮崎大学 2005) 6

(1) 直線 l に平行で曲線 C に接する直線を m とするとき，点 P と直線 m との距離を求めよ．

(2) 曲線 C と (1) における直線 m との接点を R とする．このとき，△PQR の面積を求めよ．

(3) 点 $(x,\ y)$ が直線 l と曲線 C で囲まれる[illegible]域にあるとき，[illegible]の最小値を求めよ．ただし，領域は境界を含むもの[illegible]

基本 10.23 座標平面において，原点 O(0, 0)[illegible]点 B(1, 2) を頂点とする △OAB の内部またはその周上に点 P$(a,\ b)$ があ[illegible]での距離の和を k とする．このとき，次の各[illegible]

(1) k を a と b についての 1 次式で表せ[illegible]

(2) k の最大値と最小値を求めよ．

標準 10.24 点 $(x,\ y)$ が連立不等式[illegible]

$$\begin{cases} y \geqq x^2 - 1 \\ y \leqq x + 1 \end{cases}$$

の表す領[illegible]くと[illegible]$^2 - 4y$ の最大値と最小[illegible]めよ．(熊大 [文]2[illegible]01) 1

標[illegible]5 連[illegible]式 $\{$ [illegible] $- 3|$ の表す領域[illegible]とする．

(大分大学 2013) 2

([illegible]) 領域[illegible]図示し[illegible]．

([illegible]) [illegible]でない[illegible]数と[illegible]点 $(x,\ y)$ が[illegible]内を動くとき，$ax + y$ の最大[illegible]と最小[illegible]よび[illegible]の点 $(x,\ y)$ を[illegible]さい．

(3) [illegible]領域 [illegible]動[illegible]$x^2 +$[illegible]小値とそのときの点 $(x,\ y)$ を求[illegible]

標準 10.2[illegible]次の連立不[illegible]の表す領域を D とする．

$$x [illegible] 2y \leqq [illegible] + y \leqq 8, \quad -2x - y \leqq 4, \quad -x - 4y \leqq 7$$

点 P$(x,\ y)$ が領域 D 内を[illegible]とき，$x + y$ の値が最大となる点を Q とし，最小となる点を R とする．以下の[illegible]答えよ．
(九大 [文]2013) 2

(1) 点 Q および点 R[illegible]標を求めよ．

(2) $a > 0$ かつ $b >$ [illegible]る．点 P$(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax + by$ が点 Q でのみ最大値をとり，点 R でのみ最小値をとるとする．このとき，$\dfrac{a}{b}$ の値の範囲を求めよ．

第 11 章　三角関数（数学II）

11.1　三角関数

□□ **11.1** $\dfrac{\sin 105^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}$ の値を求めよ[illegible]育大学 2004) 5

□□ **11.2** $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$, $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ と[illegible]めよ. (宮崎大学 [illegible]) 2

11.2　加法定理

□□ **11.3** θ が[illegible] $\frac{1}{[illegible]}$ および $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす[illegible]値を求めよ．また[illegible]おくとき，$\tan\alpha$ の値を求[illegible] (長崎大学[illegible]) 5

□□ [illegible] 鋭角[illegible]の 3 [illegible]大きさを α，β，[illegible]る．このとき，$\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$ [illegible] α，t[illegible]用い[illegible] (福岡教育大学 2007) 1

[illegible]次の問[illegible]えよ． (熊大 [文]2005) 2

[illegible]角関[illegible]法定理[illegible]モアブル[illegible]を用いて，任意の角 θ に対し，[illegible]成り[illegible]ことを[illegible]

$$\sin 3[illegible] - 4\sin^3\theta$$

(2) $\theta = 18^\circ$ の[illegible]き，[illegible] $= \sin 3\theta$ が成り立つことを示せ．

(3) $\sin 18^\circ$ の値を求め[illegible]

基本 11.6 $0^\circ \leqq \alpha$，β [illegible]とする．このとき，次の 2 つの等式

$$\sin\alpha = \cos\beta, \quad \cos\alpha = \sin\beta$$

が同時に成り立つための必要十分条件を α と β の関係式で表せ． (宮崎大学 2005) 10

基本 11.7 x，y を実数とするとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2003) 1

(1) 等式 $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x+y) = 2 - \cos x \cos y \cos(x+y)$ が成り立つことを示せ．

(2) $x > 0$，$y > 0$，$x + y < \pi$ とする．$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x+y) > 2$ であるとき，不等式 $x + y > \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ．

標準 11.8 整数 m，n が $1 \leqq m < n$ を満たすとき，次の問いに[illegible]

[illegible]大 [文]2004) 2

(1) $x > 3$ ならば，不等式

$$(mx-1)(nx-[illegible]$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\tan\alpha = \dfrac{1}{m}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{n}$ を満たし[illegible]n(α[illegible]の[illegible]となる[illegible]α，β があるとする．このような，[illegible]の組をす[illegible]めよ．

標準 11.9 平面上[illegible]点 C(c, 0) を通る直線 $l_1 : y = m$[illegible]を考[illegible]c，m は定数で，c[illegible]0 とする．直線 l_1 上で x 軸よ[illegible]x[illegible]C より右側に点[illegible]次の問いに答えよ．　(長崎大学[illegible]2) 2

(1) [illegible]を通[illegible]等分線と平行な直[illegible]方程式を求めよ．

(2) 直線 l[illegible]交点 P[illegible]線分 CP の長さを求めよ．

(3) 直線[illegible]傾き m[illegible]ら[illegible]変化するとき，点 P が描く曲線の長さを求め[illegible]

発[illegible]10 関[illegible](x) が[illegible]数 p に対し[illegible]に $f(x+p) = f(x)$ を満たすとき[illegible]関数[illegible]い[illegible]周期[illegible]．正の周期のうちで最小のものを特に基[illegible]とい[illegible]とえば，[illegible]基本周期は 2π である．このとき，次の問いに答[illegible]　(九大 [理]2007) 5

(1) $y = |\sin x|$ のグラ[illegible]き，関数 $|\sin x|$ の基本周期を求めよ．

(2) 自然数 m，n に対し[illegible]数 $f(x)$ を $f(x) = |\sin mx| \sin nx$ とおく．p が関数 $f(x)$ の周期ならば $f\left([illegible]\right)$[illegible]$f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = 0$ が成り立つことを示せ．また，このとき mp は π の整数倍[illegible]，np は 2π の整数倍であることを示せ．

(3) m，n は 1 以外の[illegible]約数をもたない自然数とする．(2) の結果を用いて関数 $|\sin mx| \sin nx$ の基本周期を求めよ．

11.3　方程式・不等式

□□ **11.11** $4\cos^3\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$ を満たす θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を求めよ.
(福岡教育大学 2003) $\boxed{5}$

□□ **11.12** 不等式 $4\sin x \geqq \dfrac{3}{\sin x}$ $(0 < x < 2\pi,\ x \neq \pi)$ を解け.
(福岡[illegible]大学 2005) $\boxed{1}$

□□ **11.13** $\dfrac{\pi}{6} \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，等式

$$(1+\sqrt{3})\sin x\tan x = 2\sqrt{\ } \text{[illegible]} \cos x$$

を満たす x の値を求めよ.

□□ **11.14** $0 \leqq x \leqq \pi$，$0 \leqq y \leqq \pi$ のとき[illegible]

$$3\sin x - \sin y = \text{[illegible]} \cos x + \text{[illegible]} =$$

を解け.
(福岡[illegible]2014) $\boxed{1}$

□□ **11.15** [illegible]° のとき，方程式 $\cos 2\theta + \text{c}$[illegible].
(琉球大学 [illegible]5) $\boxed{5}$

□□ [illegible] $0 \leqq$ [illegible]

$$\text{[illegible]} \cos x + 1 > 0$$

[illegible]の範囲[illegible]よ.
(福岡教育大学 2016) $\boxed{1}$

□□ **11.17** [illegible] $\leqq \pi$ [illegible]

$$5\sin^2\theta \text{ [illegible] } 13 \geqq 0$$

を満たす θ の[illegible]大[illegible]を α とするとき，$\cos\alpha$ と $\tan 2\alpha$ の値を求めよ.
(鹿児島大学 2010) $\boxed{2}$

□□ **11.18** 方程式 $\sin 3$[illegible]$\text{os}\, 3x = 0$ を解け．ただし，$0 \leqq x \leqq \pi$ とする.
(福岡教育大学 2006) $\boxed{1}$

□□ **11.19** $0 \leqq x \leqq \pi$ [illegible]とき，次の方程式を解け.
(宮崎大学 2009) $\boxed{1}$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

□□ **11.20** $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，不等式 $\sin 3x + \sin 2x < \sin x$ を解け．
(長崎大学 2016) 1

基本 11.21 関数 $f(\theta) = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $y = f(\theta)$ のグラフをかけ． (佐賀大学 2009) 10

(2) $-\pi < \theta < \pi$ のとき，方程式 $f(\theta) = 1$ を解け．

(3) $-\pi < \theta < \pi$ のとき，不等式 $\sin\theta > \sqrt{3}\cos\theta + 1$ を解け．

応用 11.22 実数 θ に対し，関数 $f(\theta)$ と $g($[illegible]

$$f(\theta) = (\cos\theta)(\cos 2\theta)(\cos 3\theta), \quad g \text{[illegible]} 2\theta)(\sin 3\theta)$$

とおくとき，次の (1)，(2) に答えよ．

(1) 関数 $f(\theta)$，$g(\theta)$ は，それぞれ

$$f(\theta) = p + q \text{[illegible]} r\cos \text{[illegible]} s \text{[illegible]}$$
$$g(\theta) = t \text{[illegible]} \theta + v\sin 4 \text{[illegible]} \sin 6 \text{[illegible]}$$

のように表[illegible]ることを示せ．ただし，p，q，[illegible] t，[illegible]によらない定数[illegible]

(2) $0 \leqq$ [illegible]のと[illegible]程式 $f(\theta) = g\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ を[illegible]よ[illegible]な θ をすべ[illegible]求めよ．

[illegible] 最[illegible] 最小[illegible]

□ 11[illegible] $\leqq \theta$ [illegible]とき[illegible] $y = \sin$[illegible]$n\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ の最大値と最小値を[illegible]た，[illegible]きの θ [illegible]求めよ． (福岡教育大学 2013) 1

基本 [illegible]実数と[illegible]のとき[illegible] $y = a\cos\theta - 2\sin^2\theta$ の最大値，最小値[illegible]ぞれ M[illegible]$m(a)$ と[illegible]いに答えよ． (熊大 [文]2008) 1

(1) $M(a)$ [illegible]．

(2) a が実数全[illegible]を動[illegible]，$M(a)$ の最小値と $m(a)$ の最大値を求めよ．

基本 11.25 θ の範囲が [illegible] $\leqq 180°$ であり，$x = \sin\theta + \cos\theta$ とする．

(1) $x = 0$ となる θ の[illegible]めよ． (佐賀大学 2002) 5

(2) x の値の範囲を[illegible]．

(3) a を実数とするとき，$y = a\sin\theta - \sin\theta\cos\theta + a\cos\theta$ を，a，x を用いて表せ．

(4) y の最小値を求めよ．

基本 11.26 a，b を定数とし，$a > b$ をみたすものとする．

$$f(x) = a\cos^2 x + \sqrt{3}(a-b)\cos x \sin x + b\sin^2 x$$

とするとき，次の問いに答えよ．　(熊大 [文]2009) $\boxed{3}$

(1) $f(x)$ の最大値が 6，最小値が 2 となるときの a，b を求めよ．

(2) (1) で求めた a，b に対して，$f(x)$ を考える．$0 \leqq x \leqq \pi$ の [illegible] $f(x) > 5$ となる x の範囲を求めよ．

基本 11.27 次の各問いに答えよ．　[illegible]鹿児島大学 2003) $\boxed{1}$

(1) a，b はともに 0 でない定数とするとき，

$$a\cos\theta - b\sin\theta = \text{[illegible]}$$

が成り立つことを示せ．ここで [illegible] 定数 [illegible]

(2) $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta$ を (1) を用い [illegible] 式で表せ [illegible] 値も [illegible]

(3) $0^\circ \leqq \theta \leqq 18$[illegible] のとき，$\cos\theta -$ [illegible] θ の最大値と [illegible] 値を求 [illegible] のときの θ の値もそ [illegible] めよ．

標準 11.[illegible] $y =$ [illegible] $2x - \cos 2x + 2\sin x - 2$ [illegible] x [illegible] ついて，以 [illegible] の問いに答え [illegible]　(熊大 [理]2010) $\boxed{1}$

[illegible] $x -$ [illegible] $x = t$ [illegible] y を t の式で表せ．

[illegible] $0 \leqq$ [illegible] $\frac{}{3}\pi$ の [illegible] y の最 [illegible] よび最小 [illegible] を求めよ．

[illegible] **29** 0 [illegible] $\leqq \frac{5}{6}\pi$ で [illegible] た x の関数

$$\text{[illegible]} = \text{l[illegible]}x + \sqrt{3}\,\text{s[illegible]} x + 2\sqrt{3}\cos x \sin x + 2$$

について，[illegible]．　(鹿児島大学 2006) $\boxed{1}$

(1) $t = \cos x + \sqrt{3}\sin$ [illegible] く．$0 \leqq x \leqq \frac{5}{6}\pi$ のとき，t の値の範囲を求めよ．

(2) $f(x)$ を (1) の t を [illegible] 表せ．

(3) (2) で求めた t の [illegible] (t) とおく．この $g(t)$ は $0 \leqq t_1 < t_2$ ならば $g(t_1) < g(t_2)$ を [illegible] ことを示せ．

(4) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

11.5　図形への応用

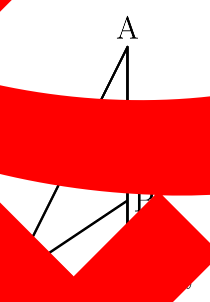
基本 11.30　三角形 ABC は $\mathrm{AB}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$\mathrm{BC}=4$，$\mathrm{AC}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ を満たしている．このとき，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2014) 9

(1) 角 A の大きさを求めよ．

(2) $\sin B$ と $\cos B$ の値を求めよ．

(3) 加法定理を用いて，角 B の大きさを求めよ．

基本 11.31　右図のように，直線 l 上にな[illegible]H[illegible]なる l 上の点 H，線分 AH 上の点 B をとる．[illegible]上を点 H から左へ動くものとする．



$$\mathrm{AH}=a,\quad \mathrm{BH}=b\ (a>b>[illegible]$$
$$\mathrm{PH}=x\ (x>0),\quad \angle\mathrm{APB}[illegible]$$

とおくとき，次の問に答えよ．　[illegible]崎大学 200[illegible]

(1) $\tan\theta$ を a,[illegible]を用いて表せ．

(2) θ が最[illegible]a，b を用いて表せ．ただし[illegible]に対[illegible]

p[illegible]（等号成り立つのは p[illegible]ときに限る.）

[illegible]成り[illegible]とを用[illegible]

[illegible]本 1[illegible]座標平[illegible]，原[illegible]中心とし[illegible]A(1, 0)，B(0, 1)，C(−1, 0)，[illegible]を通る[illegible]る．[illegible]弧 AB 上にとり[illegible]OA $=2\theta\ (0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ)$ とする[illegible]とき[illegible]の各問[illegible]　(宮崎大学 2006) 9

(1) [illegible]さを θ[illegible]て表せ．

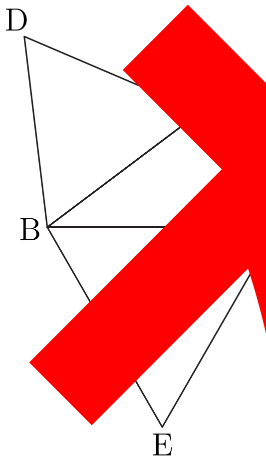
(2) PA [illegible]うる値の範[illegible]めよ．

標準 11.33 下図のように，△ABC の外部に 3 点 D，E，F を △ABD，△BCE，△CAF がそれぞれ正三角形になるようにとる．△ABC の面積を S，3 辺の長さを BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とおくとき，以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2016) 1

(1) ∠BAC $= \theta$ とおくとき，$\sin\theta$ を b，c，S を用いて，$\cos\theta$ を，a，b，c を用いて表せ．

(2) DC^2 を a，b，c，S を用いて表し，DC^2 = EA^2 = FB^2 が成[illegible]立つことを示せ．

(3) 3 つの正三角形の面積の平均を T とおくとき，DC^2 を S [illegible]いて表せ．



標準 11.34 [illegible]二等辺三角形 ABC を考え[illegible]点を[illegible]線分 AM を[illegible]内[illegible]をPとする．また，点[illegible]り辺[illegible]C に平行[illegible]直線と，辺 AB[illegible]との交[illegible]Q，R とする．この[illegible]次の問いに答えよ．　(九大 [文]2009) 1

([illegible]∠QM[illegible]めよ

[illegible]∠QM[illegible]倍と[illegible]判定せよ．

[illegible]座標平[illegible]x 軸[illegible]部分にあ[illegible]と y 軸の正の部分にある点 B を[illegible]原点 O[illegible]A，[illegible]直線 l におろ[illegible]線と，直線 l との交点を P とす[illegible]るよ[illegible]が動くと[illegible]問に答えよ．　(琉球大学 2009) 1

(1) $\theta =$ [illegible]き，OA + [illegible]を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表せ．

(2) OA + [illegible]B[illegible]値を求めよ．

標準 11.36 $\alpha > 1$，$x >$ [illegible]る．O を原点とする座標平面上に 3 点 A(0, 1)，B(0, α)，P($\sqrt{x}$, 0) がある．次に[illegible]．　(九工大 [工]2012) 3

(1) $\sin\angle$OPB と sin [illegible]を α と x を用いて表せ．

(2) $\sin\angle$APB を x[illegible]と考え，その関数を $f(x)$ とおく．$f(x)$ の最大値を α を用いて表せ．

(3) (2) で求めた最大値が $\dfrac{1}{2}$ となる α を求めよ．

応用 11.37 鋭角三角形△ABC について，∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とする．△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする．
(九大[文]2014) 3

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD，OE とする．このとき，

$$\mathrm{AD} = 2R\sin B\sin C, \quad \mathrm{OE} = R\cos A$$

を証明せよ．

(2) G と O が一致するならば△ABC は正[illegible]形である[illegible]明せよ．

(3) △ABC が正三角形でないとし，さら[illegible]行であるとする．このとき，

$$\mathrm{AD} = 3\mathrm{OE}, \quad \mathrm{ta}[illegible]$$

を証明せよ．

応用 11.38 いくつかの半径3の円を[illegible]の円[illegible]接[illegible]わらないように配置する．このとき，[illegible]に答えよ[illegible]008) 5

(1) 半径3の円[illegible]つを R とする．円 Q の中心を[illegible]し，[illegible]2本の半直線[illegible]とおく．ただし，$0<\theta<$[illegible]と[illegible]を求めよ．

(2) [illegible]$< \frac{\pi}{2}$ を[illegible]置でき[illegible]径3の[illegible]数を求めよ．

応用 11.39 [illegible]三角形[illegible]の3[illegible]QR，[illegible]にそれぞれ点 A，B，C をとる．[illegible]QAB[illegible]BC の[illegible]の中心をそれぞれ O_1，O_2，O_3，その半径をそれぞれ[illegible]r_2，[illegible]る．[illegible]辺の長さを[illegible]，$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とするとき，[illegible]答えよ．
(熊大[理]2003) 2

(1) r_1，[illegible]で表わせ．

(2) $\triangle \mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$[illegible]であることを示せ．

応用 11.40 円周率 π に[illegible]次の不等式が成立することを証明せよ．
ただし，数値 $\pi = 3.141$[illegible]を利用して直接比較する解答は0点とする．
(分大[医]2010) 7

$$3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} < \pi < 24 - 12\sqrt{3}$$

第 12 章　指数関数と対数関数（数学 II）

12.1　指数関数

□□ **12.1** 方程式 $2\cdot 8^x - 3\cdot 4^{x+1} + 5\cdot 2^{x+1} + 24 =$ [illegible] めよ.

□□ **12.2** 不等式 $3^{3x+3} - 7\cdot 3^{2x+1} - 7\cdot$[illegible] 0 を[illegible]育大学[illegible]) $\boxed{5}$

□□ **12.3** a を実数とする．x に関[illegible]程式 $4^x -$ [illegible] $2^a =$ [illegible]を持つように a の値の範囲[illegible]求めよ. [illegible]010) $\boxed{6}$

基本 12.4 [illegible]，$f(x) = 2^{2x-1} - a\cdot 2^x +$ [illegible]分大学[illegible]) $\boxed{5}$

(1) [illegible] $b = 4$ [illegible]程式 $f(x) = 0$ の解を[illegible]さい.

(2) [illegible]0，b [illegible]とき[illegible] $f(x) = 0$ の解を[illegible]さい.

(3) 方程式[illegible] $= 0$ [illegible]数解をもつとき，点 $(a,\ b)$ の表す領域を図示し[illegible].

[illegible]**5** 次[illegible]に答え[illegible] (福岡教育大学 2015) $\boxed{2}$

(1) [illegible]の実[illegible]と[illegible]値を m とする．次の (ア)，(イ) に[illegible]

(ア) m[illegible] $+ 2^{-x} = m$ を満たす x を求めよ.

(イ) $k > m$ のとき[illegible] $2^{-x} = k$ を満たす x をすべて求めよ.

(2) a を定数とし，$a \leqq$ [illegible]する．方程式

$$\ldots 4^{-x} - 3a\cdot 2^x - 3a\cdot 2^{-x} + 2(a^2 + 1) = 0$$

の異なる実数解の[illegible]数を求めよ.

12.2 対数の値

□□ **12.6** $\log_2 \dfrac{1}{6} + \log_2 \dfrac{3}{4}$ の値を求めよ． (琉球大学 2015) $\boxed{5}$

□□ **12.7** 次の数を小さい順に並べよ． (琉球大学 2012) $\boxed{5}$

$$\log_3 5,\ \ \frac{1}{2} + \log_9 8,\ \ \log_9 26$$

□□ **12.8** $0 < a < b < 1$ のとき，$\log_a b$ と [illegible] a の大小を比[illegible]
([illegible]教育大学 2002) $\boxed{5}$

□□ **12.9** 定数 a は実数で，$a > 0$，$a \neq 1$ と[illegible]すべての正の実数 x，y に対して $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ が成り立つ．このこ[illegible]

□□ **12.10** 0 でない実数 a，b，c，d が 3^a [illegible]たすとき，

$$\frac{1}{[illegible]} [illegible] \frac{}{c} = \frac{1}{d}$$

が成り立つことを[illegible]す． ([illegible]015) $\boxed{2}$

□□ **12.1**[illegible]に異なる実数で，$a > 1$，[illegible]とする．[illegible]の等式が成り立[illegible]と，比[illegible]$_2 b : \log_2 c$ を求めよ． (鹿児島大学 2014) $\boxed{2}$

$$[illegible]_2 a - [illegible]_2 b - \log_8 c,\quad \frac{[illegible]}{\log_8 b} = \frac{\log_2 b}{\log_8 c}$$

□□ **1**[illegible]次方程[illegible]$- (2$[illegible]$+ a + 3$[illegible] 2 つの解が $\log_2 2b$ と $\log_2 4b$ で[illegible]定数[illegible]の値を[illegible] (福岡教育大学 2007) $\boxed{1}$

応用[illegible]平面上[illegible]等[illegible]$|x -$ [illegible]$| \leqq 3$，$\quad 2\Big||x|-4\Big| + \Big||y|-5\Big| \leqq 3$ が表す[illegible]それ[illegible]A，B とす[illegible] (九大 [文]2003) $\boxed{2}$

(1) 領域 A [illegible]

(2) 領域 B を図示せよ[illegible]

(3) 領域 B の点 $(x,\ y)$ [illegible]が正の整数であり y が整数であって，$\log_x |y|$ が有理数となる点を，理[illegible]示してすべて求めよ．

12.3　対数方程式

□□ **12.14** 方程式 $2(\log_2 x)^2 - 7|\log_2 x| - 4 = 0$ を解け．　(長崎大学 2016) $\boxed{1}$

□□ **12.15** x を 1 と異なる正の数とする．このとき，x についての方程式 $\log_{10} x - 3\log_x 10 = 2$ を解け．　(福岡教育大学 2008) $\boxed{1}$

□□ **12.16** 次の方程式を解け．　([illegible]大学 2011) $\boxed{5}$

$$\log_5(1 - 4{\cdot}5^x) [illegible] 2x + 1$$

□□ **12.17** $2\log_{10}(a-b) = \log_{10} a + \log_{10} b$ [illegible]を求めよ．
([illegible])

□□ **12.18** 次の方程式を解け．　([illegible])

$$\log_4(4x-7) + [illegible] 1 + 3 [illegible] -$$

基本 12.19 角 θ は $0° < \theta < 90°$ を[illegible]していると[illegible]対数 [illegible] の値が 2 以下の整数であ[illegible] $\sin\theta$ のとりうる値をすべて[illegible]．　([illegible]04) $\boxed{9}$

標準 12.2[illegible]，[illegible]ない正の数とし，次の式[illegible]立[illegible]する．

$$[illegible] + \log_c b + \log_a c = [illegible]$$

[illegible]$\log_a b$[illegible]$\log_b c$[illegible]$\log_c$[illegible]とき，以下の問いに答えよ．

(佐賀大学 2004) $\boxed{2}$

([illegible]) [illegible]値を[illegible]．

[illegible] $+ \beta$[illegible]の値を[illegible]

(3) [illegible]

$$[illegible] - 5x^2 + [illegible]\gamma\alpha)x - 3\alpha\beta\gamma = 0$$

の解で[illegible]，γ の値を求めよ．ただし，$\alpha < \beta < \gamma$ とする．

12.4　対数不等式

□□ **12.21** 不等式

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(x+1)>3$$

を満たす x の値の範囲を求めよ． (宮崎大学 2008) $\boxed{1}$

□□ **12.22** $0<a<1$ とする．次の不等式を解け． (鹿[illegible]大学 2011) $\boxed{1}$

$$\log_a(2x-1)+\log[illegible](x-1) \leqq 0$$

□□ **12.23** $0<a<1$ とする．このとき，[illegible]式[illegible]$1) \geqq \log_{a^2}(x+11)$ を解け． (琉球大学 2009) $\boxed{5}$

□□ **12.24** 不等式 $\log_a(x+6)+\log_a(x-1)$[illegible] $a \neq 1$ とする． ([illegible]教育大学 2[illegible]04) $\boxed{1}$

□□ **12.25** a を正の数で $a \neq 1$ と[illegible]a とおく[illegible]次の[illegible] (福岡[illegible]2001) $\boxed{1}$

$$\log_a\left(\frac{|x-1|}{3}\right) \leqq \log_b |x [illegible]$$

□□ [illegible]a は正[illegible]$\neq 1$ とする．不等式

$$[illegible] y) > \log_a x + \log_a y$$

[illegible]表す[illegible]図示[illegible] (福岡教育大学 2015) $\boxed{1}$

[illegible]27 [illegible]に対し[illegible]を超えない[illegible]整数を表す．例えば，$\left[\frac{3}{2}\right]=1$, $[2]=$[illegible]このと[illegible]$<$[illegible]とし[illegible]問いに答えよ．ただし，必要なら $\sin\alpha$[illegible]と[illegible]$(0^\circ<\alpha$[illegible]てよい． (九大 [文]2005) $\boxed{3}$

(1) 不等式 $\log$[illegible]$\left[\frac{5}{2}+ [illegible]\right] \leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ．

(2) 不等式 $\left[\frac{3}{2}+\log_2 [illegible]\right] \geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ．

(3) 不等式 $\log_2\left[\frac{5}{2} [illegible] \theta\right] \leqq 0 \leqq \left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ．

12.5　対数関数の最大・最小

基本 12.28 関数 $f(x) = \log_2 x + 2\log_2(6-x)$ の最大値を求めよ．

(熊大 [文]2003) $\boxed{2}$

基本 12.29 $a > 1$ とする．

$$y = -(\log_a x)^2 + \log_a x^4$$

について，次の問いに答えよ．　賀大学 2008) $\boxed{5}$

(1) $\log_a x = t$ とおくとき，y を t の式とし

(2) $0 \leqq y \leqq 3$ となる t の範囲を求めよ．

(3) $2 \leqq x \leqq 4$ を満たすすべての x に対して

標準 12.30 実数 $\theta\,(0 < \theta < \pi)$ が等式

$$\frac{\sin \theta}{\sin\theta - \quad s\,\theta} = 3 + 2\sqrt{\quad}$$

を満たすとき　範囲で関数

$$= \left(\log_2 \frac{x}{2\sin\theta}\right)\left(\log_4 \right.$$

が最　なる x　，そ　最小値を求めよ．　(宮崎大学 2007) $\boxed{2}$

12.3　正の　する　関数

$$\left(\log_2 \frac{1+}{}\right)\left(\log_4 \frac{1+\mathrm{si}}{2a}\right) \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

の最　を用い　．　(宮崎大学 2012) $\boxed{2}$

12.6 常用対数

□□ **12.32** N は自然数で N^{10} が 16 桁であるとする．このとき，N^8 は何桁になるか求めよ．

(福岡教育大学 2011) 1

□□ **12.33** $p = \dfrac{2^{148}+1}{17}$ は整数である．p は何けたの整数か答えよ．ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ である．

([illegible]大学 2006) 2

基本 12.34 次の問いに答えなさい．

([illegible]分大学 2004) 1

(1) $2^{10} = 1024 > 1000$ を利用して，$\log_{10}$ [illegible]の[illegible]べなさい．

(2) (1) の結果を利用して，2^{21} と 5^9 の大小を[illegible]

基本 12.35 関数 $f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 3$ につ[illegible]

(1) $f(x) > 0$ を満たす x の値の範囲を[illegible]

([illegible]崎大学[illegible]) 1

(2) $f(1.59)$ の値の正負を判定せ[illegible]し，0.30[illegible]$\log_{10} 2$[illegible]
$0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ である．

基本 12.36 [illegible]答えよ．ただし，$\dfrac{30}{100} < \log$[illegible]$\dfrac{31}{}$[illegible]るこ[illegible]いてよい．

([illegible]教育大学 [illegible]09) 7

(1) [illegible] $< \log$ [illegible] $\dfrac{}{100}$ [illegible]す自然数 n を求め[illegible]

[illegible]は[illegible]整数か[illegible]

(3) [illegible]を小数[illegible]したと[illegible]数第何位[illegible]て 0 と異なる数字が現れるか．

基[illegible]7 [illegible]% (a[illegible]食塩水が[illegible]このとき，次の問いに答えよ．

(佐賀大学 2009) 6

(1) 食塩[illegible]分の 1 を取[illegible]，代わりに同じ質量の真水を加えて濃度が均[illegible]る[illegible]した．このときの食塩水の濃度を求めよ．

(2) (1) の操作を n 回繰[illegible]してできる食塩水の濃度を求めよ．

(3) $0.4771 < \log_{10} 3 <$ [illegible]2 を用いて，(2) において濃度が $\dfrac{a}{10}$% 以下になる n の最小値を求めよ．

標準 12.38 半径 1 の円に内接する正十二角形 D がある．その面積を S とする．D の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_1 をつくる．さらに，D_1 の各辺の中点を結んで正十二角形 D_2 をつくる．このように，D_{n-1} の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_n をつくる $(n \geqq 2)$．D_n の面積を S_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) S と S_1 を求めよ．　(長崎大学 2016) 3

(2) S_n を n の式で表せ $(n \geqq 1)$．

(3) $S_n \leqq \dfrac{1}{2}S$ となる最小の整数 n を求めよ．ただし，

$$1.89 < \log_2$$ [illegible]) < [illegible]

である．

第 13 章　微分法と積分法（数学II）

13.1　微分係数と導関数

□□ **13.1** 関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分[illegible]るとき，

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+3h) - f([illegible]}{h} [illegible]$$

を $f'(a)$ を用いて表せ．　　　　　　　　　　[illegible]教育大学 [illegible]05) 1

13.2　曲線の接線・法線

□□ **13.2** 円 [illegible] 1 と放物線 $y = x^2 + 5$ との共[illegible]象限で接する接[illegible]めよ．　　　　　　　　　　([illegible]教育大学 [illegible]) 1

基本 [illegible]座標平[illegible]ら放物線 $y = x^2$ へ 2 [illegible]接線が引けて，かつ，この 2 [illegible]線が直[illegible]ような[illegible]軌跡を求めよ．　　　　　　　　　　(熊大 [文]2005) 1

[illegible] **13** [illegible]の問い[illegible]よ．　　　　　　　　　　(佐賀大学 2007) 2

[illegible] $\alpha <$ [illegible]る．[illegible] $\alpha - \beta = 90°$ [illegible]満たすとき，

$$[illegible] = \frac{\mathrm{ta}[illegible]}{[illegible]\alpha}$$

が成[illegible]せ．

(2) $a > \dfrac{1}{2}$ と[illegible]．$f($[illegible]$^2 - x + 1$ とし，放物線 $y = f(x)$ の点 $(a,\ f(a))$ における接線を l_1 とする[illegible] x 軸とのなす角を α $(0° < \alpha < 90°)$ とするとき，$\tan\alpha$ を a を用いて表せ[illegible]

(3) l_1 に関して直線 [illegible]と対称な直線を l_2 とするとき，l_2 の方程式を求めよ．

(4) a の値にかかわ[illegible] l_2 は定点を通ることを示し，その座標を求めよ．

標準 13.5 $f(x) = x^3 - x$ とし，関数 $y = f(x)$ のグラフを C とする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2005) 1

(1) C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線の方程式を求めよ．

(2) $t \neq t'$ のとき，点 $(t,\ f(t))$ における C の接線と $(t',\ f(t'))$ における接線は異なることを示せ．

(3) C の接線で点 $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$ を通るものの方程式をすべて求め[illegible]

(4) 点 $(u,\ v)$ を通る C の接線が 3 本存在す[illegible]ための u，[illegible]べき条件を求めよ．また，その条件を満たす点 $(u,$ [illegible]在範囲[illegible]よ．

標準 13.6 a を定数とする．2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2, \qquad C\text{[illegible]} + a$$

について，以下の問いに答えよ．　[illegible]熊大 [理[illegible]) 1

(1) C_1，C_2 の両方に接する直線[illegible]在するた[illegible]の条[illegible]

(2) C_1，C_2 の両[illegible]に接する 2 本の直線が，直交す[illegible]の a [illegible]

(3) C_1，C[illegible]する 2 本の直線が，$\dfrac{\pi}{4}$ の角度[illegible]a [illegible]めよ．

標準 1[illegible]物線 C[illegible]の点 P における法線[illegible]点 P における C の接線と点 P[illegible]に交[illegible]線[illegible]このとき，次の問[illegible]えよ．(九大 [文]2008) 2

[illegible]点 $(p$[illegible]おけ[illegible]程式を求めよ．

[illegible]) y[illegible]点 $(0$[illegible]通る C[illegible]線の本数[illegible]よ．

13[illegible]の増[illegible]極[illegible]グラ[illegible]

□□ **13.**[illegible]下の条件 ([illegible]) を満たす．そのような正の数 a の値と $f(x)$[illegible]　(長崎大学 2016) 1

(イ) $f'(x) = x^2 + ax$

(ロ) $f(0) = -1$

(ハ) $f(x)$ の極大値と[illegible]の差が $\dfrac{4}{81}$

基本 13.9 $k>0$ とし，$f(x)=x(x+k)(x+2k)$ とおく．曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1) 関数 $f(x)$ は異なる 2 つの極値をもつことを示しなさい．　(大分大学 2014) 1

(2) 曲線 C 上の極値をとる点を P，Q とする．線分 PQ の中点 R の座標を求めなさい．

(3) 点 R が曲線 C 上にあることを示し，点 R における曲線 C の接線の方程式を求めなさい．

基本 13.10 関数 $f(x)=x^3-6x^2+3kx$ (k [illegible]定数) を考え[illegible]問いに答えよ．
(長崎大学 2001) 1

(1) $y=f(x)$ が極大値，極小値をもつような[illegible]を求めよ．

(2) $y=f(x)$ の極大値と極小値の差が 4 とな[illegible]

(3) (2) の場合について $y=f(x)$ のグラ[illegible]

標準 13.11 関数 $f(x)=x^3+3x^2\cos$[illegible]$\theta+2$[illegible]大値[illegible]値を[illegible]する．ここで θ の範囲は $-90^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$[illegible]次の問い[illegible]えよ．　([illegible]004) 3

(1) θ の値の範[illegible]求めよ．

(2) 関数 f[illegible]極小値に対応する $y=f($[illegible]の 2 点[illegible]直線の傾[illegible]h と[illegible]を θ の関数として表せ．

(3) [illegible]のと[illegible]を求めよ．

[illegible]3.12 [illegible]数と[illegible]an^2 $(n=1,2,3,\cdots)$ で定められている数列[illegible]$\}$ が

$$[illegible]_2 > \cdots [illegible] > x_{15},\quad x_{1}[illegible] < x_{17} < \cdots$$

と[illegible]とき[illegible]求め[illegible]．　(熊大 [理]2001) 3

標準 1[illegible]数 f[illegible]$ax^3+(a$[illegible]$1)x$ を考える．　(九大 [文]2001) 1

(1) 関数 $f($[illegible]ね[illegible]するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ．

(2) $a=0$ のとき，関数[illegible]が $x>-1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ が $x>$[illegible]おいてつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上[illegible]示せよ．

13.4　最大・最小

13.4.1　3 次関数の最大・最小

□□ **13.14** 3 点 O(0, 0)，A(t, 0)，B(0, $1-t$) $(0<t<1)$ を頂点とする三角形 OAB を，x 軸の周りに 1 回転させてできる円錐の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ．　([illegible]球大学 2008) 5

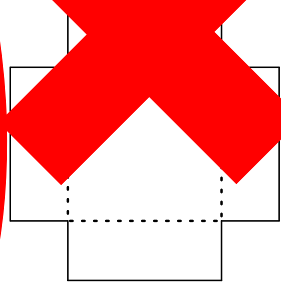
基本 13.15 t を $0 \leqq t < 2$ をみたす定数とする．放物線 $y=$ [illegible]の点 $(t,\ (t-2)^2)$ における接線を l とする．このとき，次の[illegible]答えよ．　([illegible]球大学 2013) 5

(1) 接線 l の方程式を求めよ．

(2) 直線 l と x 軸の交点を求めよ．

(3) 直線 l と x 軸，y 軸によって囲まれる部[illegible]いて $S(t)$ が最大となるときの t の値[illegible]

基本 13.16 1 辺の長さが 24cm の正[illegible]紙の 4 [illegible]から合同な正方形を切りとり，その[illegible]部分 (右図[illegible]点線に沿って折り[illegible]げてふたのない箱 A を作る．同様[illegible]1 辺の長さが [illegible]方形の厚紙からふたのない箱[illegible]を作る．こ[illegible]の底面が合同な正方形とな[illegible]ように作[illegible]とす[illegible]き，2 つの箱 A，B の[illegible]積の[illegible]大値を[illegible]よ．[illegible]紙の厚みの影響[illegible]るものと[illegible]　([illegible]宮崎大学 2003) 8



基本 13.17 [illegible]標平[illegible]曲線[illegible]を C と[illegible]を $0 \leqq m \leqq 1$ とする．次の問い[illegible]　(佐賀大学 2008) 7

(1) [illegible]におけ[illegible]の式を[illegible]．

(2) [illegible]Q([illegible] L_m 上の[illegible] b を m の式で表せ．

(3) R(1, [illegible]角形 PQR の[illegible]を m の式で表せ．

(4) 三角形 P[illegible]の面[illegible]大値を求めよ．

基本 13.18 p を $0<p<$ [illegible]満たす定数とする．関数 $y=x^3-(3p+2)x^2+8px$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における[illegible]値と最小値を求めよ．　(佐賀大学 2010) 11

標準 13.19 m を定数とするとき，関数 $f(x)=x(x^2-5x+m)$ $(x>0)$ について，次の問いに答えよ．　(長崎大学 2002) $\boxed{1}$

(1) $x>0$ の範囲で関数 $f(x)$ が次の条件 (i)，(ii) を満たすような最小の整数 m を求めよ．
　(i) $f(x)>0$　　　(ii) 極大値および極小値をもつ

(2) m を (1) で求めた整数とするするとき，関数 $f(x)$ の $\dfrac{1}{2} \leqq$ [illegible] における増減表をつくれ．

(3) m を (1) で求めた整数とするとき，[illegible] $f(x)$ [illegible] $\leqq 3$ における最大値を求めよ．ただし，$a>0$，$a \neq 1$ と[illegible]

応用 13.20 関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考え[illegible]下の問いに答えよ．

(1) $t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t [illegible]線を[illegible]を示せ．

(2) (1) において，傾きが t である 2[illegible]線と曲線 C [illegible]接点[illegible]p，$f(p)$)，Q(q，$f(q)$) とする (ただし $p<$ [illegible] このとき，[illegible]と点 Q [illegible]，0) に関して対称の[illegible]にあることを示せ．

(3) $t \geqq 0$ [illegible] Q の間の距離の最小値を[illegible]最小[illegible]えるとき[illegible]Q の[illegible]，q もそれぞれ求めよ．

[illegible]三[illegible]数の[illegible]

基本 13.21 [illegible]の問[illegible]えよ．　(佐賀大学 2011) $\boxed{1}$

(1) [illegible] a，[illegible]て，[illegible]$\cos\theta$ を $a\sin(\theta$ [illegible]の形に表せ．ただし，$a>0$，[illegible]b[illegible]とする．

(2) [illegible]の範[illegible] $\sin\theta+$ [illegible]最小値を求めよ．

(3) $t=$ [illegible]とき，sin[illegible]を t を用いて表し，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で $\sin\theta\cdot$ co[illegible]最大[illegible]小値を求めよ．

(4) $t=\sin\theta+\cos\theta$ と[illegible]き，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ を t を用いて表し，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，$\sin^3\theta+$ cos[illegible]最大値と最小値を求めよ．

基本 13.22 次の各問[illegible]よ．　(琉球大学 2006) $\boxed{6}$

(1) $\sin\theta+\cos\theta=t$ と[illegible]く．$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ．

基本 13.23 関数 $y = \sin^3 x - \cos^3 x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\sin x - \cos x = t$ とおいて，t のとり得る値の範囲を求めよ．(熊大 [文]2010) 1

(2) y を t の式で表せ．

(3) y の最大値および最小値を求めよ．

基本 13.24 $y = 2(\sin^3 x - \cos^3 x) - 6\sin x \cos x(\sin x - \cos x - 1$[illegible]$\leqq x \leqq \pi)$ に対して，次の問いに答えよ．(福[illegible]大学 2010) 6

(1) $t = \sin x - \cos x$ とおくとき，t の範[illegible]めよ．

(2) y を t で表せ．

(3) y の最大値と最小値を求めよ．

基本 13.25 変数 θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲[illegible]数

$$f(\theta) = 4\sin^3\theta - [illegible]\cos\theta + [illegible]\theta$$

について，次の各問に答えよ．(鹿[illegible]2001) 1

(1) $t = \sin\theta$ [illegible]するとき，t のとる値の範囲[illegible]よ．

(2) θ の関[illegible]数 $g(t)$ として表せ．

(3) t [illegible]の範囲[illegible]関数 $g(t)$ の最大値[illegible]値を求めよ．また，その[illegible]の t の[illegible]めよ．

[illegible] **13.2**[illegible]問に[illegible]．(琉球大学 2012) 6

(1) [illegible]理を[illegible]，$\cos$[illegible]び $\cos 3x$ を[illegible]で表せ．

(2) [illegible]x[illegible]とき[illegible]$= \cos 3x +$[illegible]$- 2\cos x$ の最大値および最小[illegible]．

基本 13.2[illegible]$\cos\theta + 1$ [illegible]次の問いに答えよ．

(1) $30^\circ \leqq \theta$ [illegible]0° の[illegible]$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ．(福岡教育大学 2002) 7

(2) y を $\cos\theta$ を用いて[illegible]

(3) $30^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ の[illegible] y の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

基本 13.28 a を定数とし，関数

$$f(\theta) = \sin^3\theta + a\cos 2\theta + \frac{21}{4}\sin\theta$$

は $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{13}{4}$ を満たすものとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) a の値を求めよ．　([illegible]大学 2015) 9

(2) $t = \sin\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t を用いて表せ．

(3) $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ における $f(\theta)$ の最大値[illegible]値を求め[illegible]，そのときの θ の値を求めよ．

標準 13.29 $f(\theta) = 4\left(\sin^3\frac{\theta}{2} + \cos^3\frac{\theta}{2}\right) + 6\left(\sin [illegible]\right.$ [illegible]

とおく．ただし，θ の範囲は $0 \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi$ [illegible]答えよ．

(1) $x = \sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$ とおくとき[illegible] x のみの[illegible]表せ[illegible]12) 3

(2) $f(\theta)$ の最小値[illegible]そのときの θ の値[illegible]求めよ．

13.4.3 [illegible]・[illegible]数の最大・最小

□□ [illegible] a は[illegible]，[illegible]1 とする．関数

$$[illegible]\, a^{3x} + [illegible]\, a^{-2x}) + 27(a^x + a^{-x}) \quad (x \geqq 0)$$

[illegible]最小[illegible]求め，[illegible]きの[illegible]よ．　(福岡教育大学 2005) 1

基[illegible]1 [illegible]数 $f($[illegible] $- 9(4^x$ [illegible] $+ 27(2^x + 2^{-x}) - 26$ について，次の[illegible]えよ．　(鹿児島大学 2012) 2

(1) $t = 2$[illegible] $f(x)$ を t の[illegible]て表したものを $g(t)$ とするとき，$g(t)$ を求め[illegible]

(2) $t = 2^x + 2^{-x}$ のと[illegible]範囲を求めよ．

(3) t が (2) で求めた範[illegible]動くとき，関数 $y = g(t)$ の増減を調べよ．

(4) $x \geqq 0$ のとき，関[illegible]) の最小値とその最小値を与える x の値を求めよ．

13.5 方程式・不等式への応用

基本 13.32 a を実数とする．直線 $y = 3x - a$ を l とし，曲線 $y = 2x^3 - 3x$ を C とする． (大分大学 2013) 5

(1) $a = 0$ のとき，直線 l と曲線 C の共有点の座標を求めなさい．

(2) 直線 l と曲線 C の共有点の個数が 3 個となるように a の範囲[illegible]求めなさい．

基本 13.33 点 $(a,\ b)$ を通り曲線 $y = x^3 - x$ に接するような[illegible]本の直線が存在するための実数 a，b が満たすべき必要十[illegible]を求め，[illegible]たす点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示せよ． (琉球大学 2010) 3

基本 13.34 放物線 $C : y = x^2$ と，それと共有[illegible]える．直線 ℓ 上の点 P から放物線 C に相異な[illegible]それ Q，R とする．このとき，次の問に[illegible] (佐賀大学 [illegible]14) 10

(1) 点 Q，R の座標をそれぞれ $(\alpha$[illegible]$,\ \beta^2)$[illegible]β で表せ．

(2) 直線 QR は[illegible]を ℓ 上どのようにとっても，定[illegible]通る[illegible]よ．

標準 13.35[illegible]点 O を中心とする半径 1[illegible]その上[illegible]C とし，その[illegible]A($-$[illegible]1, 0) とする．C 上の[illegible]M を NM = MB となるよう[illegible]ただ[illegible]る．このとき，次[illegible]に答えよ． (九大 [文[illegible]) 3

(1) ∠M[illegible]θ と置[illegible]，弦[illegible]MB 及び[illegible]M の座標を θ を用いて表せ．

(2)[illegible]から x[illegible]ろした[illegible]を NP とした[illegible]PB を θ を用いて表せ．

(3)[illegible]sin[illegible]．条[illegible]B を t を用い[illegible]せ．

(4)[illegible]とな[illegible]な点[illegible]ことを示せ．

標準 13.3[illegible]多項式と[illegible]係数は 1，定数項は 0 とする．2 つの異なる実数 α,[illegible]対[illegible]$(\alpha) = f'(\beta) = 0$ が満たされているとする．以下の問いに答えよ． (熊大 [理]2015) 1

(1) $f(\alpha)$，$f(\beta)$ を α,[illegible]いて表せ．

(2) 不等式 $\alpha < \beta <$[illegible]成り立つとき，3 次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数を求めよ．

標準 13.37 a を実数とし，3 次方程式 $4x^3-3x-a=0$ が 3 つの異なる実数解をもつとする．次の問いに答えよ．(長崎大学 2004) 1

(1) a はどのような範囲にあるか．

(2) 3 つの解はいずれも -1 と 1 の間にあることを示せ．

(3) 三角関数の加法定理および 2 倍角の公式を用いて，3 倍角の公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を導け．

(4) 上の方程式の 3 つの解のうち，最も大きなものを $\cos\theta$ ([illegible] $180°$) と表す．このとき，残りの 2 つの解は $\cos(\theta+$[illegible]$)$ と $\cos(\theta-$[illegible] であることを示し，それらの大小を調べよ．

13.6　定積分

□□ **13.38** 次の定積分を求めよ．(琉球大学 [illegible]12) 5

$$\int_0^3 [illegible] - 2|\,dx$$

□□ **13.39** 関数 [illegible] $= -3mx + 2n$ と関数 $g(x) = $ [illegible]nx [illegible]

$$[illegible] \int_0^2 f(x)\,dx, \quad T = \int_0^2 [illegible]$$

とお[illegible]だし，[illegible]とする．このとき，[illegible]各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2015) 2

[illegible]と T [illegible] n を[illegible]

[illegible] S [illegible] $\geqq 0$ [illegible] m [illegible]大とな[illegible]うな m と n を求めよ．

[illegible]**0** 関[illegible] $= \int^x$ [illegible] dt について，[illegible]問いに答えよ．ただし，a は実[illegible]．(長崎大学 2007) 1

(1) 関[illegible] $f(x$[illegible]を調べ，[illegible]および極小値を，a を用いて表せ．

(2) 関数 g [illegible]と x 軸が異[illegible] 3 点で交わるための a の範囲を求めよ．

基本 13.41 関数 $f(x)$ を

$$[illegible]) = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{7}t^2 - \frac{2}{3}t - 3\right) dt$$

で定める．このとき[illegible]問いに答えよ．(熊大 [文]2009) 1

(1) $f(x) = 0$ をみたす x をすべて求めよ．

(2) $-3 \leqq x \leqq 6$ における $f(x)$ の最小値を求めよ．

基本 13.42 $f(x)$ を $x=-1$ で極大，$x=2$ で極小となる 3 次関数で

$$\int_0^2 f'(x)\,dx = -5$$

を満たすものとする．以下の問いに答えよ．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ． ([illegible]大 [文]2013) 2

(2) $f(x)$ の極大値と極小値の差を求めよ．

基本 13.43 関数 $f(x)$ は $f(0)=0$ および [illegible] $f(1)$ [illegible]満たす 2 次関数とし，関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_0^x f(t)\ [illegible]$$

とする．ただし，a は 0 でない定数である．[illegible]問い[illegible]

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ． ([illegible]島大学[illegible]) 2

(2) 直線 $y=3x+2$ が曲線 $y=g$[illegible]するよう[illegible] a の[illegible]さらに，その接点の座標を求めよ．

基本 13.44 [illegible]で，関数

$$[illegible] = 2^{3x} - a2^{2x} + a2^{x+}[illegible]$$

の[illegible]は x 軸[illegible]異なる[illegible] β $(\alpha<\beta)$ で交わ[illegible]のとする．このとき，次の問いに[illegible]． (鹿児島大学 2007) 1

(1) [illegible]とおい[illegible] (x) を[illegible]した関数を[illegible]とする．$g(t)$ を求めよ．

(2) [illegible]および[illegible]を，a [illegible]表せ．

(3) [illegible]

$$\int_\alpha^{\beta} \Bigl(3\ [illegible] = 2(\beta-\alpha)$$

を満た[illegible]，a [illegible]求めよ．さらに，そのときの α，β の値を求めよ．

標準 13.45 t は実数と[illegible] $f(x) = x|x-t|$ について，次の問いに答えよ．

(1) $S(t) = \int_0^1 f(x)\,d$[illegible]めよ． (福岡教育大学 2005) 7

(2) (1) で求めた $S(t)$ [illegible]最小値を求めよ．

標準 13.46 $0 \leqq x \leqq 1$ とする．このとき，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^1 |t^2 - xt|\, dt$$

と定義する．次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2011) 2

(1) t の関数 $g(t) = |t^2 - xt|$ のグラフの概形をかけ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

標準 13.47 a を 0 でない定数とし，関数 $f($[illegible]$- a)|$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．　[illegible]

(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ におけ[illegible]めよ．

(2) $b = f'(0)$，$c = f(0)$，$S(a) = \int_0^1$ [illegible] $-(b$[illegible]とき[illegible]を求めよ．

(3) $S(a)$ の最小値を求めよ．

応用 13.48 [illegible]数とする関数 $f(x) = ax^2 +$[illegible]の条[illegible]る．

(∗) [illegible] $\leqq x \leqq$ [illegible]で $f(x) \geqq (x+1)^2$ が成[illegible]る．　(九大 [文] 2003) 1

(1) [illegible]のと[illegible]件 ([illegible]す最小の c の値[illegible]$a-1$ であることを示せ．

(2) [illegible]$a \leqq 2$[illegible]，条[illegible]最小の c の値は $4 - a$ であることを示せ．

(3) [illegible](x) が[illegible]) を満[illegible]いるとき，[illegible]分 $\int_0^1 f(x)\, dx$ を最小にする a，[illegible]，そ[illegible]の定積[illegible]求めよ．

応用 1[illegible]式 $\int^2$ [illegible] $- 2x +$ [illegible] $= a^2$ が成り立つような定数 a の値を求めよ．　(分大 [医] 2006) 8

13.7　積分方程式

13.7.1　積分方程式 (定数型)

基本 13.50 a，b，c，k を実数とし，$k>0$ とする．2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ は $f(0)=9$，$f(-1)=16$ をみたす．また，関数 $f(x)$ について，x に関する恒等式

$$f'(x)=6x-9k-4+\int_0^k f(t)\,dt$$

が成り立つ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関[illegible]る．　(大分大学 2013) 6

(1) $f(x)$ を求めなさい．

(2) k の値を求めなさい．

基本 13.51 等式

$$f(x)= [illegible] 2xf([illegible]$$

を満たす関数 $f(x)$ について，次の問[illegible]に答えなさい[illegible] 2003) 5

(1) 関数 $f(x$[illegible]さい．

(2) $\int^1$ [illegible] dx を[illegible]さい．

(3) [illegible]数と[illegible]き[illegible] $=x+k$ と曲線 y[illegible]$)|$ との共有点の個数を求めなさい[illegible]

[illegible] 1[illegible] 関数 f[illegible] $-3x^2$ [illegible] $(t)\,dt+\int_0$ [illegible] $(t)\,dt$ について，次の問いに答[illegible]　(福岡教育大学 2004) 7

(1) [illegible]よ．

(2) $y=$ [illegible] $f(a))$ にお[illegible]うち，点 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ を通る接線の方程式を求[illegible]．た[illegible] $a>-\frac{1}{2}$ とする．

(3) (2) で求めた接線と[illegible] $f(x)$ とで囲まれた部分の面積を求めよ．

13.7.2　積分方程式 (変数型)

基本 13.53　関数 $f(x)$ が等式

$$f(x) = x^2 - x\int_0^1 f(t)\,dt + 2\int_1^x f'(t)\,dt$$

を満たすとき次の問いに答えよ．　(佐賀大学 2006) $\boxed{10}$

(1)　$f(x)$ は 2 次関数であることを示せ．

(2)　$f(x)$ を求めよ．

基本 13.54　定数 a，b と関数 $f(x)$ が $\int_2^x f($[illegible]$+ x + b)$ をみたすとする．次の問いに答えなさい．　[illegible]

(1)　$y = f(x)$ のグラフが点 $(-1,\ 4)$ を通る [illegible]

(2)　定数 a が負のとき，$y = f(x)$ のグ[illegible] a [illegible]く定点を通[illegible]ことを示し，その定点の座標を求めな[illegible]

標準 13.55　2 次関数 $f(x)$ に対して

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

とおく．[illegible]の数と[illegible]) が $x = a$ と $x = -a$ で[illegible]とるとき，以下の問いに答え[illegible]　(熊大 [文]2016) $\boxed{4}$

[illegible]べての[illegible]ついて[illegible] $F(x)$ が成り立つことを示せ．

[illegible]) $F($[illegible]$(a) =$ [illegible]たす[illegible]て求め[illegible]

[illegible]$\dfrac{(x)}{F'(0}$[illegible]値を[illegible]

標[illegible]関数 f[illegible](x)[illegible]れぞれ[illegible]

$$[illegible]\frac{3x^2}{6}\int_0^1 f(t[illegible]\int_{-1} f(t)\,dt + 7,$$

$$(x - [illegible] = \int_0^x g(t)\,dt - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 2x + 1$$

を満たすとする．次の問[illegible]答えよ．　(佐賀大学 2012) $\boxed{7}$

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　$g(x)$ を求めよ．

(3)　放物線 $y = f(x)$ の点 $(4,\ f(4))$ における接線を l とする．直線 l と放物線 $y = g(x)$ とで囲まれた部分の面積を求めよ．

13.8　面積

13.8.1　放物線

基本 13.57 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+4x & (x \leqq 0,\ x \geqq 2 \text{ のとき}) \\ x^2 & (0 < x < 2) \end{cases}$$

とする．座標平面上の曲線 $C: y=f(x)$ と[illegible] $l: y=x$ [illegible]る部分の面積を S とする．このとき，次の各問に答えよ．(宮崎大学 2011) 13

(1) 曲線 C の概形をかけ.

(2) S の値を求めよ.

基本 13.58 放物線 $C: y=(x-p)^2+q$ の[illegible]$q)$ [illegible]$-4x^2+1$[illegible]$\geqq 0)$ 上を動くとき，放物線 C と x 軸およ[illegible]$x=0$[illegible]2[illegible]た[illegible]積の最大値と，そのときの p の値を求め[illegible]007) 5

基本 13.59 a を[illegible]数とし，放物線 $y=x^2$ の x [illegible]部分[illegible]C とする．また a [illegible]に対して，曲線 C と 2 つの[illegible]$y=t$ [illegible]て囲まれる図[illegible]積を[illegible]く．このとき次の問い[illegible]よ．(熊大 [文] 2001) 2

(1) [illegible]t で[illegible]

(2) [illegible]示せ.

基本 [illegible]線 $y=$[illegible]$+4$ $(0 \leqq$[illegible]する．曲線 C と y 軸との交点を P とし，x 軸[illegible]する．さら[illegible]と点 Q を結ぶ線分上に点 R をとる．点 R を通り，[illegible]線がこの曲線 C と交わる点を S とする．このとき，次の各問に答えよ．(鹿児島大学 2001) 13

(1) 曲線 C と x 軸およ[illegible]とで囲まれる部分の面積を求めよ.

(2) R の座標を $(t,\ 0)$ [illegible]とき，線分 PR と線分 RS および曲線 C とで囲まれる部分の面積 $S(t)$ [illegible]よ.

(3) $S(t)$ の最大値を求[illegible]よ．また，そのときの t の値を求めよ．

基本 13.61 放物線 $y = 4x^2 + 3$ を C とする．x 軸上に点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ $(p \neq 0$ とする$)$，C 上に点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2 + 3)$ をとり，点 A における C の接線 l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ とする．さらに，点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2 + 3)$ における C の接線を m とする．以下の問いに答えよ．

(1) q を p を用いて表せ． (熊大 [文]2008) $\boxed{3}$

(2) 接線 m が点 P を通るとする．p，q の値を求めよ．

(3) (2) で求めた p，q に対して，放物線 C と 2 つの接線 l，m [illegible]れた部分の面積を求めよ．

基本 13.62 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，C_2 [illegible] $^2 +$ [illegible] を考える．
点 $\mathrm{A}\left(t, -t^2 + 2t - \dfrac{1}{2}\right)$ における C_2 の接線を ℓ [illegible] 問いに答えよ．

(1) ℓ と C_1 との交点の x 座標を，t を用い[illegible]

(2) 点 A の x 座標を $t = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ とす[illegible]第[illegible]ℓ，C_1[illegible] y 軸で囲まれた部分の面積を求め[illegible]

標準 13.63 $a >$ [illegible]する．2 つの 2 次関数 $f(x) = -$[illegible]$x + $[illegible]$- 2(a - 1)x + 3$ につい[illegible]各問いに答えよ． [illegible] $\boxed{3}$

(1) 2 つ[illegible] $y =$ [illegible] $= g(x)$ の交点の x 座標[illegible]座標を求めよ．

(2) [illegible]曲線[illegible](x)[illegible]$g(x)$ とで囲まれた[illegible]面積 S を a の式で表せ．

(3) [illegible]で求[illegible]つの[illegible]点 $\mathrm{C}(1,\ 4)$ を頂点とする三角形 ABC の面積を T と[illegible]$T : S$[illegible]k と[illegible]き，k の最小値およびそのときの a の値を求め[illegible]

標[illegible]**4** [illegible]の実数[illegible]$0,\ a + \dfrac{1}{}$[illegible]線 $C : y = ax^2$ $(x \geqq 0)$ を考える．曲[illegible]の点で[illegible]との距[illegible]ものを P とする．このとき，次の問いに答[illegible]
(九大 [文]2005) $\boxed{1}$

(1) 点 P の座[illegible]線分[illegible]の長さを求めよ．

(2) 曲線 C と y 軸，お[illegible]線分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

(3) $a > 0$ のとき，面積[illegible]の最小値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

標準 13.65 曲線 $C: y=x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ をとり，点 P における曲線 C の接線を l，点 P を通り l に垂直な直線を m とする．ただし，$t>0$ とする．接線 l と x 軸との交点を Q とし，直線 m と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ $\mathrm{R_1}$，$\mathrm{R_2}$ とする．また，$\triangle\mathrm{PQR_1}$ の面積を S_1 とし，曲線 C と y 軸および線分 $\mathrm{PR_2}$ で囲まれる図形の面積を S_2 とする．このとき次の問いに答えよ．(九大 [文]2006) 1

(1) 点 Q と点 $\mathrm{R_1}$ の x 座標を t を用いて表せ．

(2) 面積 S_2 を t を用いて表せ．

(3) $S_1>S_2$ が成り立つ t の範囲を求めよ．

標準 13.66 関数 $f(x)=x^2$，$g(x)=|2x^2-$ [illegible] の問いに答えよ．

(1) $f(x)=g(x)$ を満たす x の値を求めよ．

(2) $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフ [illegible] の面積 [illegible]

標準 13.67 a が正の値をとりながら動 [illegible]，

$$I(a)=\int_0 [illegible] (x-a)(x-2a) [illegible]$$

が最小とな [illegible] よ．[illegible] 賀大 [illegible] 10

標準 1 [illegible] を実 [illegible] 曲線 $C_1: y=x^2$ 上の [illegible] $a^2)$ における接線を l とする [illegible] C_2 を [illegible] -1 [illegible] 以下の問いに答 [illegible]　(熊大 [文]2015) 1

[illegible] l と C [illegible] 囲まれ [illegible] 求めよ．

[illegible] $\sqrt{2}$ とす [illegible] 曲線 C [illegible] $-x^2+1$ と [illegible] で囲まれた部分は l によって 2 [illegible] の部 [illegible] けられ [illegible] のうち，点 [illegible] $2)$ を含む部分の面積を求めよ．

標準 13 [illegible] 半径 1 の [illegible] $\cos\theta, a+\sin\theta)$ について，θ が $180^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ の [illegible] 点 P の軌跡 [illegible] とする．C が不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域にあるとき，[illegible] 各問 [illegible] よ．(宮崎大学 2004) 5

(1) $a \geqq \dfrac{5}{4}$ であること [illegible]．

(2) $a=\dfrac{5}{4}$ のとき，C [illegible] 物線 $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

標準 13.70 3 次関数 $f(x)$ は $x=-1$ と $x=1$ で極値をとり，$f(1)=0$ である．次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2003) $\boxed{8}$

(1) $f(-2)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分のうち，y 軸の左側にある部分の面積を S_1，y 軸の右側にある部分の面積を S_2 とする．このとき，$\dfrac{S_1}{S_{[illegible]}}$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C$ (C は積分定数) である．

標準 13.71 座標平面上の円 $(x-1)^2+(y$ [illegible] 2 を C [illegible] 以下の問いに答えよ． (九大 [文]2013) $\boxed{4}$

(1) 直線 $y=x-2$ は円 C に接することを示せ [illegible]

(2) 円 C と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ の共有点の [illegible] よ．

(3) 不等式 $y \geqq \dfrac{1}{4}x^2-1$ の表す領域を [illegible] る． [illegible] $+|y|$ [illegible] 表す領域を A とし，不等式 $(|x|$ [illegible] $(y-1)^2 \leqq$ [illegible] 表す [illegible]．そして，和集合 $A \cup B$，すなわち領 [illegible] A と領域 B [illegible] せた領 [illegible] する．このとき，領 [illegible] と領域 E の共通部分 $D \cap E$ を [illegible]，[illegible] 積を求めよ．

13 [illegible] 放物 [illegible]

[illegible] **13.72** [illegible] 問いに [illegible] (琉球大学 2001) $\boxed{6}$

(1) [illegible] 実数 [illegible] ついて [illegible] 分 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-$ [illegible] $)dx$ を求めよ．ただし，$\alpha<\beta$ とする．

(2) [illegible] 上の点 [illegible] を通 [illegible] の [illegible] L とする．直線 L と放物線 $y=x^2$ と [illegible] の交 [illegible] 座標を求め [illegible]

(3) (2) の [illegible] $=x^2$ で囲 [illegible] る面積が最小になる a の値と，そのときの面積を [illegible] よ．

基本 13.73 曲線 $C: y=$ [illegible] $2x+1$ と直線 $l: y=x+k$ が異なる 2 点 P，Q で交わり，点 P における曲線 [illegible] 線と，点 Q における曲線 C の接線が直交している． (大分大学 2001) $\boxed{3}$

(1) k の値を求めよ [illegible]

(2) 2 点 P，Q の座標を求めよ．

(3) 曲線 C と直線 l で囲まれる部分の面積を求めよ．

基本 13.74 a を 0 でない実数とする．2 つの放物線 $y = x^2$，$y = -x^2 + 2ax + \dfrac{1}{2a^2}$ がある．　(大分大学 2016) $\boxed{2}$

(1) 2 つの放物線は異なる 2 点で交わることを示しなさい．

(2) 2 つの放物線の交点の x 座標を α，β $(\alpha < \beta)$ とするとき，$\beta - \alpha$ を a の式で表しなさい．

(3) 2 つの放物線で囲まれた部分の面積 S を a の式で表しなさ[illegible]

(4) (3) で定めた面積 S の最小値を求めなさ[illegible]い．

基本 13.75 a，b を実数とし，関数 $f(x) =$ [illegible]は $x = -\dfrac{2}{3}$，2 で極値をとる．　[illegible]

(1) a，b の値と，関数 $f(x)$ の極大値，極小[illegible]

(2) 曲線 $y = f'(x) + \dfrac{7}{3}$ と x 軸で囲まれ[illegible]い．

基本 13.76 放物線 $y = -x^2 + 6x$ [illegible]とし，C[illegible]点を[illegible]$(1, -2)$ を B とする．点 A[illegible]B を通る直線を[illegible]とし，点 A，B[illegible]る放物[illegible]$+ bx + c$ を C_2 とする．た[illegible]a，b，c は実数，$a > 0$ である[illegible]と[illegible]答えよ．

(1) 点 A[illegible]　(佐賀大学[illegible]) $\boxed{7}$

(2) 直[illegible]方程[illegible]

(3) [illegible]c を a[illegible]て表[illegible]

(4) C_2 と[illegible]まれた[illegible]を用いて表せ．

基本 13.77 [illegible]$k > 1$[illegible]る．2 直[illegible]$= kx$，$y =$ [illegible]$1)x$ と放物線 $y = x^2$ によって[illegible]図形の[illegible]を S と[illegible]る．次の問いに[illegible]よ．　(佐賀大学 2009) $\boxed{8}$

(1) [illegible]いて表[illegible]

(2) S[illegible]調[illegible]に増加す[illegible]

(3) $6S <$ [illegible]成り立つよう[illegible]k の値の範囲を求めよ．

基本 13.78 $a > 0$ のと[illegible]物線 $C : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における C の接線を l_1 とし，P を通り l_1 と垂直[illegible]線を l_2 とする．次の問いに答えよ．(佐賀大学 2012) $\boxed{9}$

(1) 直線 l_2 と放物線[illegible]交点のうち，点 P と異なる方を Q とする．点 Q の座標を a の式で表せ[illegible]

(2) 放物線 C と直線 l_2 とで囲まれた部分の面積を S とする．S を a の式で表せ．

(3) (2) の S の最小値を求めよ．またそのときの a の値を求めよ．

基本 13.79 放物線 $y=x^2$ 上に2点P，Qがある．P，Qの x 座標がそれぞれ a，$a+2$ であるとき，次の問いに答えよ．ただし，$-2<a<0$ とする．　(熊大[文]2003) 4

(1) 原点をOとするとき，$\triangle$OPQの面積 S_1 を求めよ．

(2) 直線PQと放物線で囲まれた部分の面積 S_2 を求めよ．

(3) $S_2=2S_1$ となる a の値を求めよ．

基本 13.80 関数 $f(x)=|x(x+1)|-x+1$ に対して，$y=f(x)$ [illegible]をCとする．次の問いに答えよ．　([illegible]熊大[文]2006) 3

(1) 曲線 C 上の点 $(a,\ f(a))$ $(-1<a<0)$ [illegible]る[illegible]点P$(-1,\ 2)$，Q$(0,\ 1)$ を通る直線に平行になるとき，a の値お[illegible]の方程式を求めよ．

(2) 放物線 $y=x^2+1$ と曲線 C で囲まれた図[illegible]

(3) (1)の接線 ℓ と曲線 C で囲まれた図形[illegible]

基本 13.81 a，b は実数で，$a>1$ と[illegible]の関数[illegible]

$$f(t)=2t^3-[illegible](a+1)t^2+6[illegible]$$

について，次[illegible]えよ．　([illegible]崎大[illegible]) 1

(1) 関[illegible]の極[illegible]b を用いて表せ．

(2) [illegible]を x[illegible]b[illegible]座標とする xy 平面[illegible]点P$(a,\ b)$ を考える．このとき，3[illegible]程式 $f($[illegible]異なる3つの実数解をもつような点P$(a,\ b)$ の存在[illegible]域 D[illegible]平面[illegible]せよ．

(3) [illegible]び D[illegible]からな[illegible]を E とす[illegible]領域 E のうち，

$$[illegible] \leqq -x^2+[illegible]$$

と[illegible]部分[illegible]を求めよ．

基本 13.82 [illegible](x)[illegible]$x^2+2|x+1|+1$ に対し，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする．点P$(t,\ f(t))$[illegible]$-1)$ における曲線 C の接線に垂直で，点Pを通る直線を ℓ とする．このとき，[illegible]各問に答えよ．　(宮崎大学2016) 11

(1) 直線 ℓ の方程式を[illegible]用いて表せ．

(2) 直線 ℓ が点 $(-1$[illegible]$))$ を通るとき，t の中で最も小さいものを求めよ．

(3) (2)で求めた t が定める直線 ℓ と曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ．

基本 13.83 座標平面上の原点 O，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ の 3 点を通る放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を C_1 とし，原点 O を中心とする半径 1 の円を C_2 とする．次の問いに答えよ．　(琉球大学 2016) $\boxed{6}$

(1) a，b，c の値を求めよ．

(2) 放物線 C_1 と線分 PQ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) 放物線 C_1 と円 C_2 で囲まれた図形のうち，放物線 C_1 の[illegible]部分の面積を求めよ．

基本 13.84 次の問いに答えよ．　(長崎大学 2001) $\boxed{2}$

(1) 放物線 $y = x^2$ について，傾きが $\sqrt{3}$ の接[illegible]を求めよ．

(2) y 軸上に中心をもち，P において[illegible]る円[illegible]めよ．

(3) (1) の放物線と (2) の円の下の[illegible]って囲[illegible]部[illegible]．

標準 13.85 放物[illegible] $= x^2$ を C とする．点 $(a,\ a^2 -$ [illegible]る C [illegible]線の接点をそれぞれ A，[illegible] 2 点 A，B を通る直線を l と[illegible]以[illegible]　(佐賀大学 [illegible]7) $\boxed{6}$

(1) 直線[illegible]程式[illegible]用いて表せ．

(2) [illegible]とで囲[illegible]面積が，a の値にかか[illegible]，一定であることを示せ．

[illegible] [illegible].86 [illegible] $C : y$ [illegible]ついて，次の問いに答えなさい．ただし，$a > 0$ [illegible]る．　(長崎大学 2003) $\boxed{2}$

(1) [illegible]線 C と[illegible] $y = -$ [illegible]とで囲まれる[illegible]面積を求めなさい．

(2) [illegible] 2 [illegible]，直線[illegible]って (1) の[illegible]面積が二等分されるように k [illegible]めなさ[illegible]

(3) 放[illegible]を通る直線[illegible]る図形の面積が最小となるとき，直線の方[illegible]図形の面積を求めなさい．

標準 13.87 曲線 $C : y =$ [illegible] $6x|$ と直線 $\ell : y = kx$ (k は実数) について，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2015) $\boxed{12}$

(1) 曲線 C を座標平[illegible]図示せよ．

(2) 曲線 C と直線[illegible]なる 3 つの共有点をもつような k の値の範囲を求めよ．

(3) (2) のとき，曲線 C と直線 ℓ で囲まれた 2 つの部分の面積の和が最小になるような k の値を求めよ．

標準 13.88 k を実数とする．関数 $y = |x(x-1)|$ のグラフと直線 $y = kx$ が異なる 3 点を共有している．これらで囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする．

(1) k の値の範囲を求めなさい．　(大分大学 2015) 3

(2) S を k の式で表しなさい．

(3) S が最小になるときの k の値を求めなさい．

標準 13.89 2 つの関数

$$f(x) = -px^2 \text{[illegible]} \ (p > 0)$$
$$g(x) = |\,x\,| - 2 \text{[illegible]}$$

が与えられていて，放物線 $y = f(x)$ が 2 点 $(-$[illegible]

(1) p の値を求めよ．　(九大 [文]2[illegible]) 1

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点をす[illegible]よ．

(3) (2) で求めた交点のうち，x 座[illegible]小になる[illegible]$(a,$ [illegible]このとき，点 A にお[illegible]ける $y = f(x)$ の接[illegible] $y = h(x)$ を求[illegible]また[illegible] $y = h(x)$ と $y = g($[illegible]点 A とは異なる，交点 $\mathrm{B}(b,\ g($[illegible]求め[illegible]

(4) 次の連[illegible]ある図形の面積を求めよ．

$$\text{[illegible]} \quad y \leqq h(x), \quad y \geqq \text{[illegible]} \quad y \geqq g(x)$$

[illegible].90 [illegible] $y =$ [illegible] $t^2)$ から直線 $y = x$ へ垂線を引き，交点を H [illegible]る．[illegible]，$t >$ [illegible]る．[illegible]，以下の[illegible]いに答えよ．(九大 [文]2011) 1

[illegible]座標を[illegible]いて表[illegible]

[illegible]通[illegible]に平行[illegible]線 $y = x$ と[illegible]の座標を R とするとき，三角[illegible]面積[illegible]用いて[illegible]

(3) $x \geqq$ [illegible]，放物線 [illegible]直線 $y = x$ および線分 PH とで囲まれた図形[illegible]するとき，S_1 を t を用いて表せ．

(4) 放物線 $y = x^2$ と直[illegible] $= x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．$S_1 = S_2$ であるとき，t の値を求[illegible]

標準 13.91 座標平面上の直線 $y=-1$ を ℓ_1，直線 $y=1$ を ℓ_2 とし，x 軸上の 2 点 O$(0,\ 0)$，A$(a,\ 0)$ を考える．点 P$(x,\ y)$ について，次の条件を考える．

$$d(\mathrm{P}, \ell_1) \geqq \mathrm{PO} \quad \text{かつ} \quad d(\mathrm{P}, \ell_2) \geqq \mathrm{PA} \quad \cdots ①$$

ただし，$d(\mathrm{P}, \ell)$ は点 P と直線 ℓ の距離である．　(九大 [文]2014) $\boxed{1}$

(1) 条件 ① を満たす点 P が存在するような a の値の範囲を求[illegible]

(2) 条件 ① を満たす点 P 全体がなす図形の面積 S を a を用[illegible]．ただし，a の値は (1) で求めた範囲にあるとする．

標準 13.92 座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$
$$C_2 : y = -[illegible]$$

を考える．ただし，a，b は実数とす[illegible]　([illegible]大[illegible]) $\boxed{1}$

(1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わる[illegible]の a，b に[illegible]条件を[illegible]

以下，a，b が[illegible]を満たすとし，C_1 と C_2 で[illegible]する．

(2) b を[illegible]いて[illegible]

(3) [illegible]べての[illegible]て変化するとき，放[illegible]の頂点が描く軌跡を座標[illegible]面上に[illegible]よ．

[illegible]面積の[illegible]値・[illegible]値

[illegible]3 [illegible]$= x^2$[illegible] $k>0$ に[illegible]直線 $y=kx$ を l_1 とし，原点を通[illegible]垂直な[illegible]と l_2 [illegible]　(大分大学 2010) $\boxed{6}$

(1) 曲[illegible]点の座標を[illegible]い．

(2) 曲線 C [illegible] l_1 [illegible]まれる部分の面積を S_1，曲線 C と直線 l_2 とで囲まれる部分の面積を S_2 と[illegible] S_1，S_2 をそれぞれ k の式で表しなさい．

(3) $S_1 + S_2$ の最小値を[illegible]なさい．

基本 13.94 次の問いに答えよ．(琉球大学 2010) $\boxed{5}$

(1) t を実数とする．放物線 $y = x(2-x)$ 上の点 $(t,\ t(2-t))$ における接線の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた直線と放物線 $y = x(2-x)$ および 2 直線 $x = 0$，$x = 3$ とで囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする．$0 \leqq t \leqq 2$ における $S(t)$ の最大値，最小値とそのときの t の値を求めよ．

基本 13.95 放物線 $C : y = x^2$ とその上の点 [illegible] $a^2)$ $(0 < a$ [illegible] ける接線を l とするとき，次の各問に答えよ．[illegible] 宮崎大学 2001) $\boxed{5}$

(1) 接線 l の方程式を求めよ．

(2) 直線 $x = 0$，$x = 1$，放物線 C と接線 l で [illegible] の面積 $S(a)$ を求めよ．

(3) $S(a)$ の最小値を求めよ．

基本 13.96 a を $0 < a < 1$ の範囲 [illegible] する．直 [illegible] $y =$ [illegible] $C : y = 1 - x^2\ (x \geqq 0)$ に [illegible] いて，次の各問 [illegible] えよ．[illegible] 2004) $\boxed{10}$

(1) 曲線 C [illegible] 線 l で囲まれる部分の面積を [illegible] 直線 $x =$ [illegible] の面積を S_2 とする．S_1, [illegible] a [illegible] いて表せ [illegible]

(2) [illegible] $+ S_2$ [illegible] $0 < a < 1$ の範囲お [illegible] の最小値を求めよ．

[illegible] .97 [illegible] 点とす [illegible] 上に 2 点 A$(4,\ 0)$，P$(t,\ 0)$ をとる．ただし，$0 <$ [illegible] とす [illegible] らに [illegible] C [illegible] $+ 7x$ 上 [illegible] 2 点 B$(4,\ 12)$，Q$(t, -t^2 + 7t)$ を [illegible] る．[illegible] の面 [illegible] (t) と [illegible] 物線 C, [illegible] Q，線分 OP によって囲まれた [illegible] 積を $g($ [illegible] る．[illegible]，次の問に答 [illegible] (佐賀大学 2016) $\boxed{9}$

(1) [illegible] 用いて [illegible]

(2) $g($ [illegible] を用 [illegible] せ．

(3) $h(t) =$ [illegible] く．$0 < t$ [illegible] における $h(t)$ の最小値とそのときの t の値を求め [illegible]

基本 13.98 $0 \leqq m \leqq 1$ [illegible]．$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，曲線 $y = x^2$ と直線 $y = mx$ で挟まれた部分の面積を [illegible] とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $S(m)$ を求めよ [illegible] (琉球大学 2002) $\boxed{6}$

(2) $S(m)$ が最小となる m の値と，そのときの $S(m)$ の値を求めよ．

基本 13.99 k を正の数とし，放物線 $y = x(x-1)$ と直線 $y = kx$ と原点 O 以外の交点を A とする．x 軸上の点 B を，直線 AB が y 軸と平行になるようにとる．放物線と線分 OA とで囲まれた部分の面積を S_1，放物線と線分 AB および x 軸とで囲まれた部分の面積を S_2 とおく．このとき面積の差 $S_1 - S_2$ を最大とする k の値を求めよ．

(佐賀大学 2004) 11

基本 13.100 次の問に答えよ．　(宮崎大学 2005) 5

(1) $\alpha < \beta$ のとき，次の等式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (\beta - x)(x-\alpha)\,dx = \frac{1}{6}(\beta$ [illegible] り立つことを示せ．

(2) $-2 \leqq a \leqq 2$ のとき，曲線 $y = (3x - a$ [illegible] 軸で囲まれる部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ．

標準 13.101 実数 $p > 0$ と関数 $f(x) = x^3 -$ [illegible]
$C_2 : y = f(x+p) - p$ について，次に答え [illegible] (九工大 [工]2011) 3

(1) 曲線 C_1 と C_2 が共有点を 2 個も [illegible] p の [illegible]

(2) 実数 α，β に対して

$$\int_\alpha^\beta (\beta - x)(x-\alpha)\,dx = [illegible]\alpha)^3$$

を示 [illegible]

(3) [illegible] で求 [illegible] 動くとき，曲線 C_1，C [illegible] って囲まれた図形の面積 [illegible] の最 [illegible] 求め [illegible]

[illegible] 13.10 [illegible] 平面 [illegible] 上に 3 点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$　$(0 < \alpha < \beta)$ [illegible] あり，[illegible] $: y$ [illegible] $ax^2 +$ [illegible] 軸と [illegible] で交わっているものとする．た [illegible] は実数 [illegible] る．[illegible]，以下の問 [illegible] えよ．　(九大 [文]2016) 1

(1) [illegible] 線 C [illegible] で囲 [illegible] 部分の面 [illegible] を S とする．S を α と β の式 [illegible]

(2) β [illegible] $< \alpha < \beta$ [illegible] を動かすとき，S を最小とする α を β の式 [illegible]

標準 13.103 a，[illegible] を実 [illegible]，曲線 $C : y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を考える．C の接線の傾きの最小値が -3 であ [illegible]，以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2016) 4

(1) b を a を用いて表 [illegible]

(2) C が x 軸の正の [illegible] 負の部分とそれぞれ 1 点で交わるとする．このとき a の値の範囲を求め [illegible]

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき，C と x 軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め，そのときの a の値の範囲を求めよ．

13.8.4　放物線と接線

□□ **13.104** 直線 $l : y = ax + b$ が原点を中心とする半径 1 の円と点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ で接しているとする．また，直線 l は放物線 $C : y = x^2 - \sqrt{3}x + c$ とも接しているとする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2010) $\boxed{2}$

(1) 定数 a，b の値を求めよ．

(2) 放物線 C と直線 l との接点の座標および定数 c の値を[illegible]

(3) 放物線 C と直線 l および y 軸とで囲[illegible]図形の[illegible]めよ．

基本 13.105 頂点が点 A(0, 4) で，点 B(2, 0) [illegible]考える．次の問いに答えよ．

(1) この放物線をグラフとする 2 次関数[illegible]

(2) この放物線上にあり，x 座標が [illegible]) で[illegible]を[illegible]，[illegible]線と x 軸との交点で，点 B と異な[illegible]とする．[illegible]にお[illegible]線 l_1 と点 D における放物線の接線 l_2 と[illegible]交点 E の座[illegible] a を使[illegible]

(3) この放物[illegible] l_2，および点 E を通り y 軸に[illegible]直[illegible]分の面積を求[illegible]

基本 1[illegible]曲線[illegible] $2x$ と，直線 $l : y =$ [illegible]なる 2 つの共有点 Q(b, a)，R([illegible] $< c)$ [illegible]とす[illegible]線 l と y 軸との交[illegible] $0, a)$ とおくとき，次の各[illegible]えよ．　(宮崎大学 2007) $\boxed{8}$

([illegible]1) 点[illegible]線分 R[illegible] : 2 に[illegible]るとき，[illegible] c の値をそれぞれ求めよ．

[illegible]で求め[illegible] b，c [illegible]曲線 C の点 R[illegible]る接線 m の方程式を求めよ．

([illegible]，y 軸[illegible] n とす[illegible]) で求めた接線 m，曲線 C，お[illegible] n で[illegible]る部分の[illegible]

基本 13.10[illegible] x^2 上の点 A(a, a^2) における接線が曲線 $C_2 : y = x^2 - 4$ と交わる点を B[illegible]C とす[illegible]ただし，B の x 座標は C の x 座標より小さいとする．以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2010) $\boxed{2}$

(1) 線分 BC の中点 M[illegible]び C の座標を a を用いて表せ．

(2) M を通り y 軸に[illegible]直線，線分 MC および曲線 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

標準 13.108 定数 a は $0 < a < 1$ をみたすとする．曲線 $C : y = (x-1)^2$ と C 上の点 $(a,\ (a-1)^2)$ における接線 ℓ について，以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2012) $\boxed{4}$

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C と接線 ℓ および 2 直線 $x = 0,\ x = 1$ とで囲まれた 2 つの部分の面積の和 $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(3) 曲線 C と 2 直線 $x = 0,\ y = 0$ とで囲まれ，接線 ℓ の上側に [illegible] 2 つの部分の面積の和 $T(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

基本 13.109 曲線 $C : y = x^2 + px + q$ と [illegible] の交点 [illegible]，x 座標 t が正である曲線 C 上の点を P とする．点 P における [illegible] とする．曲線 C，接線 l および y 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とし，[illegible] で囲まれた部分の面積を S_2 とする．

(1) l の方程式を求めなさい．

(2) S_1 を t で表しなさい．

(3) $S_1 : S_2$ を求めなさい．

基本 13.110 [illegible] $(x-2)^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ (t-2)^2)$ [illegible] 軸上 [illegible] $)^2)$ を考える．た [illegible] $t < 2$ とする．このとき，[illegible] 答えよ．
(鹿児島大学 2002) $\boxed{13}$

(1) [illegible] 関数 [illegible] の [illegible] は 2 点 P，Q を [illegible] 軸に接する．この $f(x)$ を求めよ．

(2) 線 [illegible] と C [illegible] 囲ま [illegible] 分の面 [illegible] を求めよ．

(3) [illegible] に指 [illegible] ある範 [illegible] 化するとき，[illegible] の最大値とそのときの t の値を求め [illegible]

標準 1[illegible] 放物線 [illegible] のグラ [illegible] $a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ (ただし，$a < b$) がある．ま [illegible] A と点 B の [illegible] $(p,\ p^2)$ をとり，点 P における放物線の接線，線分 [illegible] $= a,\ x = p$ で囲まれた部分の面積を S_1，放物線，点 P における放物線の接線，[illegible] $x = a$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする．点 P が点 A と点 B の間 (両端を含ま [illegible] を放物線のグラフに沿って動くとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ のとる値の範囲を求めよ．
(佐賀大学 2009) $\boxed{12}$

標準 13.112 実数 a，b $(a>0,\ b>0)$ に対して，点 $(1,\ 1)$ を通る放物線 $C: y=ax^2+b$ と，放物線 C の点 $(1,\ 1)$ における接線 l を考える．以下の問いに答えよ．

(1) b を a を用いて表せ．　(九工大 [情]2008) $\boxed{2}$

(2) 接線 l の方程式を a を用いて表せ．

(3) 放物線 C，接線 l および y 軸で囲まれた図形のうち，$y \geqq 0$ の部分の面積 S を a を用いて表せ．

(4) S が最大となるときの a の値とそのときの S の値を求[illegible]

標準 13.113 $a>0$ とし，2 つの放物線を[illegible]

$$C_1 : y = x^2 + \text{[illegible]}$$
$$C_2 : y = \frac{1}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}$$

とする．次の問いに答えよ．　([illegible]育大[illegible]) $\boxed{7}$

(1) 放物線 C_1 上の点 $(t,\ t^2+at)$ [illegible]る接線の方[illegible]を求め[illegible]

(2) 放物線 C_1，[illegible]の両方に接する直線の方程式を[illegible]．

(3) (2) で求[illegible]うち，傾きが正であるものを[illegible]物線[illegible]および接[illegible]囲ま[illegible]分の面積が 1 となるよう[illegible]値[illegible]求めよ．

標準[illegible]4 x[illegible]て[illegible]整式 $f(x)$ は，次の[illegible](i)，(ii)，(iii) を満たしている．

(i) $f($[illegible]次の係[illegible]1 である[illegible]

[illegible]$)=0$[illegible]$=-1$[illegible]

(iii)[illegible]$-3x$[illegible]た余[illegible]$+5$[illegible]

$f(x)$ を x[illegible]たときの商[illegible]余りを $k(x)$ とするとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2008) $\boxed{10}$

(1) $k(x)$ を求めよ．

(2) $g(x)$ を求めよ．

(3) 座標平面上におい[illegible]つの関数 $y=x^2-3x+2$，$y=g(x)$，$y=k(x)$ のグラフで囲まれた部[illegible]面積を求めよ．

標準 13.115 $a < -\dfrac{1}{2}$，$b > 1$ とする．放物線 $C : y = ax^2 + b$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の共有点が，$\mathrm{P}_1(p,\ q)$，$\mathrm{P}_2(-p,\ q)$ の 2 点のみとなるとき，次の問いに答えよ．ただし，$p > 0$ とする． (熊大 [文]2002) $\boxed{4}$

(1) b を a で表せ．

(2) p，q それぞれを a で表せ．

(3) 座標平面の原点を O とする．$\angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2 = 90^\circ$ のとき，P_1 [illegible] る放物線 C の接線と放物線 C および y 軸とで囲まれ [illegible] 部分の面積を [illegible]

標準 13.116 座標平面上に，半円 $C : x^2$ [illegible] $x > 0)$ と放物線 D : $x^2 - 6y + 3 = 0$ がある．半円 C 上の点 P(2 co [illegible] だし，$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ における半円 C の接線を l とするとき，次の各問 [illegible]

(1) 半円 C と放物線 D との交点 Q の座標 [illegible]

(2) 直線 l が放物線 D に点 R におい [illegible] とき [illegible] の座標 [illegible] よ．

(3) (2) のとき，半円 C と放物線 [illegible] び直線 l に [illegible] て囲 [illegible] 積を求めよ．

標準 13.117 [illegible] において，点 A(0, 1) を中心 [illegible] 通る [illegible] ついて，点 B([illegible] から [illegible] 2 本の接線の接点を P，[illegible] る．ただし，点 [illegible] の x 座標は正 [illegible]．さら [illegible] 関して対称な放物線 [illegible] 直線 BP と直線 BQ にそれぞれ [illegible] 点 O [illegible] る [illegible] る．このとき，次 [illegible] 問に答えよ． (宮崎大学 2011) $\boxed{2}$

(1) 2 点 P [illegible] の座標 [illegible] よ．

(2) 放 [illegible] C_2 を表 [illegible] 程式を [illegible]．

(3) [illegible] A から [illegible] C_2 上 [illegible] までの距離は [illegible] であることを示せ．

(4) [illegible] 点 O を [illegible] 物線 C [illegible] れる部分の面積 S を求めよ．

応用 13.118 [illegible] 3 点 P(0, [illegible], 0, $-1)$，R$(t,\ t^2 - t + 1,\ 0)$ を考える．t が $0 \leqq$ [illegible] 動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする．以下の問い [illegible] 答え [illegible] (熊大 [医]2011) $\boxed{4}$

(1) K を xy 平面で切 [illegible] きの断面積を求めよ．

(2) K の体積を求め [illegible]

13.8.5　放物線と 2 本の接線

基本 13.119　放物線 $y = x^2$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における接線が点 R で交わっている．次の問いに答えよ．　(琉球大学 2011) $\boxed{6}$

(1) R の座標を求めよ．

(2) $p = -1$，$q = 2$ のとき，2 本の接線と放物線で囲まれた図形の面積を求めよ．

基本 13.120　座標平面において，曲線 $C : y = x^2$ 上の点 P(2, [illegible]る接線を l とし，l と直線 $y = -1$ との交点を Q とする．ま[illegible]点 Q を通り[illegible]と接する直線のうち，l と異なるものを m とする．このと[illegible]の各問[illegible]．

(1) 直線 l の方程式を求めよ．　(宮崎大学 2006) $\boxed{7}$

(2) 直線 m の方程式を求めよ．

(3) 曲線 l，m および曲線 C で囲まれる部[illegible]よ．

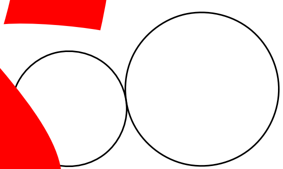
基本 13.121　放物線 $C : y = ax^2 + bx$ [illegible]0) が[illegible]1, [illegible]Q(5, 1[illegible]るとし，P，Q における C の接線をそれ[illegible]m とす[illegible]下の[illegible]

(1) b，c をそれぞれ a を用いて表せ[illegible]　([illegible]2014) $\boxed{3}$

(2) l と m の[illegible]座標が -4 であるとき，a，b，[illegible]求[illegible]

(3) (2) で[illegible]について，放物線 C と l，[illegible]囲[illegible]た部分の[illegible]積を求め[illegible]

基[illegible].122 [illegible]$+ y^2 -$[illegible]に外接し，[illegible]$y =$[illegible]接する[illegible]心[illegible]C とする．[illegible]に答え[illegible]ただし[illegible]つの円が[illegible]は，[illegible]のよう[illegible]のことである．　([illegible]003) $\boxed{6}$



外接する円

(1) [illegible]式を求[illegible]

(2) C 上[illegible]x_2, 2) に[illegible]接線の方程式を求めよ．

(3) C と (2[illegible]の[illegible]接線で囲まれた部分の面積を求めよ．

基本 13.123　A(2, 1)，[illegible]1)，C(0, 1) とする．$0 \leqq t \leqq 1$ に対して線分 AB を $t : 1-t$ の比に内分する[illegible]，線分 BC を $t : 1-t$ の比に内分する点を Q，線分 PQ を $t : 1-t$ の比に内分[illegible]を R とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) P の座標を t を[illegible]表せ．　(佐賀大学 2005) $\boxed{6}$

(2) R の軌跡を求めよ．

(3) 線分 AB，BC と (2) で求めた軌跡によって囲まれた図形の面積を求めよ．

基本 13.124 放物線 $C: y = x^2 - 3x$ と点 A$(2, -6)$ がある．　(大分大学 2006) $\boxed{2}$

(1) 点 A から放物線 C へ引いた接線の方程式を求めよ．

(2) 放物線 C 上を動く点 P に対して，線分 AP の中点 Q の軌跡の方程式を求めなさい．

(3) (1) で求めた接線と，(2) で求めた軌跡とで囲まれる部分の面積を求めなさい．

基本 13.125 座標平面上の放物線 $y = x^2$ と直線 $y = kx + 1$ (k [illegible]) の 2 つの交点を P，Q とし，点 P の x 座標を α，点 Q の x [illegible]標を β ($\alpha <$ [illegible])．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2012) $\boxed{11}$

(1) $\alpha + \beta$ および $\alpha\beta$ の値を，k を用いて表[illegible]

(2) 2 点 P，Q における放物線の接線をそれ[illegible]とき，点 R の x 座標を，k を用いて表[illegible]

(3) 放物線と (2) の 2 つの接線 l，m で[illegible]部[illegible]k を用い[illegible]せ．

標準 13.126 次の問いに答えよ．　[illegible]02) $\boxed{1}$

(1) 原点を中心[illegible]る半径 r ($r > 0$) の円 $x^2 + y^2 =$ [illegible]の点[illegible]ける接線の方程式[illegible]

$$ax + by = r^2$$

[illegible]れる[illegible]

([illegible]$+ y^2$[illegible]放物[illegible]$= x^2 + 1$ の両方[illegible]する直線は 3 本ある．これ[illegible]接線[illegible]式を[illegible]

([illegible]) 問[illegible]おけ[illegible]接線[illegible]，x 軸の[illegible]部分と交わる接線を l_1，x 軸に平[illegible]接線を[illegible]る．[illegible] l_2 および放[illegible]とで囲まれる部分の面積を求[illegible]よ．

標準 [illegible]次関[illegible]が

$$\text{[illegible]})\{2f'(x) - x\text{[illegible]} 6f(x) + 2x + 8$$

を満たしている[illegible]する．[illegible]問いに答えよ．　(福岡教育大学 2006) $\boxed{8}$

(1) 2 次関数 $f(x)$ を求[illegible]

(2) k は正の実数とす[illegible]の (i)，(ii) に答えよ．

(i) 点 $(0, -k$[illegible]曲線 $y = f(x)$ に引いた 2 本の接線の方程式を求めよ．

(ii) (i) で求めた 2 本の接線と曲線 $y = f(x)$ によって囲まれた部分の面積が $2\sqrt{3}$ となるような k の値を求めよ．

標準 13.128 p を正の定数として，放物線 $C : y = (x-p)^2 + p^2$ を考える．C の 2 本の接線 l，m を考え，接点の x 座標を，それぞれ a，b とする．ただし，$a < 0$，$b > 0$ とする．次の問いに答えよ． (長崎大学 2014) $\boxed{1}$

(1) l と m の方程式を求めよ．

(2) l，m が原点を通るとき，a，b を p を用いて表せ．

(3) l，m が原点を通るとき，放物線 C と 2 本の接線 l および [illegible]って囲まれた図形の面積を S とする．S を p を用いて表せ．

標準 13.129 放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ [illegible]を考え[illegible]本の直線

$$\ell_1 : y = \frac{5}{2}x \quad \text{および} \quad [illegible]$$

は C に接するものとする．C と ℓ_1 の接点を[illegible]をQと[illegible]いに答えよ． ([illegible]工大 [情[illegible]4) $\boxed{1}$

(1) α，β，γ $(\alpha \neq 0)$ を定数とする[illegible]2 次方程[illegible]$+ \beta$[illegible]解をもつための条件を求めよ．

(2) b の値を求[illegible]また，c を a を用いて表せ．

(3) P，Q[illegible]を用いて表せ．

(4) a[illegible]かか[illegible]頂点は直線 m 上にあ[illegible]の方程式を求めよ．

(5) [illegible]ℓ_1，ℓ[illegible]まれ[illegible]の面積を a を用い[illegible]

[illegible]13.1[illegible]線 $y =$[illegible]点 P[illegible]における接線と点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線が R で[illegible]とす[illegible]だし，[illegible]$< b$ とす[illegible]のとき，次の問いに答えよ．

(1) [illegible]R の座[illegible]よび三[illegible]の面積を求[illegible] (九大 [文]2009) $\boxed{4}$

(2) [illegible]線分[illegible]辺[illegible]平行[illegible]RQS とする．折れ線 PSQ と曲線[illegible]で囲[illegible]図形の面[illegible]

(3) $\angle$PR[illegible]ながら P と[illegible]動くとき，(2) で求めた面積の最小値を求めよ．

13.9　問題研究

13.9.1　面積公式

$f(x)=\dfrac{1}{2}(x+k)^2$，$g(x)=\dfrac{1}{3}(x+k)^3$ とすると (k は定数)

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+kx+\frac{1}{2}k^2$$
$$g(x)=\frac{1}{3}x^3+kx^2 \text{[illegible]} k^2x+\frac{1}{3}k^2$$

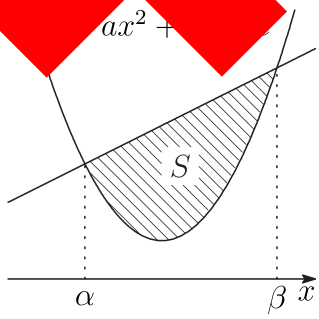
したがって　$f'(x)=x+k,\quad g'(x)=x$ [illegible] $+k)^2$

よって　$\displaystyle\int(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k})\,\boldsymbol{dx}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k})^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{C}$ [illegible]

$\displaystyle\int(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k})^{\boldsymbol{2}}\,\boldsymbol{dx}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}(\boldsymbol{x}+$ [illegible]

上の積分公式を使って，$a>0$ の [illegible] 物線 $y=a$ [illegible] $x+c$ [illegible] れた部分の面積を求めて [illegible] る ($\alpha<\beta$).

[1]　直線の [illegible] $mx+n$ とすると



[illegible] $(mx+$ [illegible] $bx+c)$

$=$ [illegible] $\alpha)(x-\beta)$

した [illegible]

$S=$ [illegible] $(x-$ [illegible] $)dx$

$-a\displaystyle\int^{\beta}$ [illegible] $)\{(x$ [illegible]

[illegible] $)^2\,dx+a(\beta$ [illegible] $)\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\,dx$

$=-a\left[\dfrac{1}{3}(x\right.$ [illegible] $\left.\right]_{\alpha}^{\beta}+a(\beta-\alpha)\left[\dfrac{1}{2}(x-\alpha)^2\right]_{\alpha}^{\beta}$

$=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{6}}(\boldsymbol{\beta}-$ [illegible]

また，a の符号に関係なく　$\boldsymbol{S}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{\boldsymbol{6}}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{3}}$

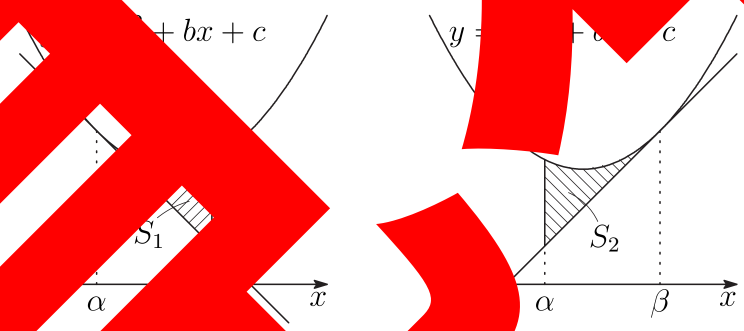
106 ページの 13.100(宮崎大学 2005) や 13.101(九工大 [工]2011) では

$$\int_{\alpha}^{\beta}(\beta - x)(x-\alpha)\,dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を証明させる問題も出題されている．これらの公式を覚えるだけでなく，自分でも導けるようにしておくことも大切である．

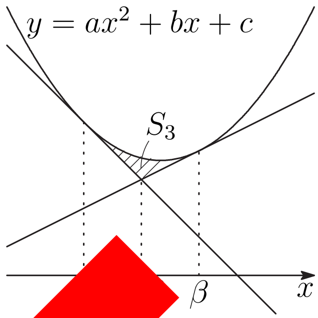
[2] 下の図の直線の方程式を $y = mx + n$ とすると

$$S_1 = \int_{\alpha}^{\beta}\{(ax^2+bx+c) \text{[illegible]} n)\}d\text{[illegible]}$$
$$= a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\,dx = a\Big[\,\frac{1}{3}(\text{[illegible]}\Big]\text{[illegible]})^3$$
$$S_2 = \int_{\alpha}^{\beta}\{(ax^2+bx+c) \text{[illegible]}$$
$$= a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\beta)^2 \text{[illegible]} \Big[\,\frac{1}{3}(x-\text{[illegible]}\Big]^{\beta}$$
$$\text{[illegible]} -\frac{a}{3}(\alpha-\beta)^3 = \frac{\text{[illegible]}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{(\beta-\alpha)^3}$$



S[illegible]の符号に[illegible]$\boldsymbol{(\beta-\alpha)^3}$

数[illegible]線と直線で囲[illegible]た図形の面積を求める問題は頻出である．入試[illegible]とし[illegible]重要な単元である．



［3］ $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，$f'(x)=2ax+b$.
$y=f(x)$ 上の 2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ における接線の方程式は，それぞれ

$$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha),$$
$$y=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$$

上の 2 式から y を消去すると

$$f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha \text{[illegible]} '(\beta)(x- \text{[illegible]})$$

ゆえに　$\{f'(\beta)-f'(\alpha)\}x+f(\beta)$ [illegible] $)-\alpha f'(\alpha) \quad \cdots(*)$

このとき　$f'(\beta)-f'(\alpha)=2a(\beta-$ [illegible]
$f(\beta)-f(\alpha)=(\beta$ [illegible]
$\beta f'(\beta)-\alpha f'(\alpha)=$ [illegible] $(2a$ [illegible]

これらを $(*)$ に代入すると

$$2a(\text{[illegible]})x+(\beta-\alpha)\{a(\alpha+\beta)+b\}= \text{[illegible]} \alpha)\{2 \text{[illegible]}$$

$\beta-$ [illegible]　$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

[illegible] $=\frac{\alpha+}{}$ [illegible] 線部分を 2 つに分け [illegible] めると
［2］の [illegible] を利用 [illegible]

$$\text{[illegible]}_3=\frac{a}{\text{[illegible]}}\left(\text{[illegible]}-\alpha\right)^3 \text{[illegible]} \left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$$

[illegible] $\boldsymbol{\alpha)^3}$

ま [illegible] 係なく　$\boldsymbol{S_3}$ [illegible] $\boldsymbol{-\alpha)^3}$

第 14 章　平面上のベクトル（数学B）

14.1　ベクトルと図形

基本 14.1 正六角形 ABCDEF において，[illegible]し，線分 AP と BF の交点を Q とする．次の問いに答えよ．　[illegible]福岡教育大学 2014) $\boxed{5}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を用いて表せ．

(2) AQ : QP を最も簡単な整数の比で表[illegible]

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$ のとき，△BPQ の面積[illegible]よ．

基本 14.2 平面に四角形 ABCD があ[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，[illegible]とお[illegible]点 C は

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{4}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{d}$$

を満た[illegible]とする[illegible]き，次の各問いに答え[illegible]　(鹿児島大学 2008) $\boxed{4}$

([illegible]AB[illegible]の交[illegible]直線 AD と BC の[illegible]を F とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ [illegible] $\vec{d}$ を用[illegible]

([illegible]2) 線[illegible]の中[illegible]，線分[illegible]中点を[illegible]るとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ [illegible]いて表[illegible]

([illegible]分 A[illegible]点を P[illegible] 3 点 P，[illegible]同一直線上にあることを証明[illegible]

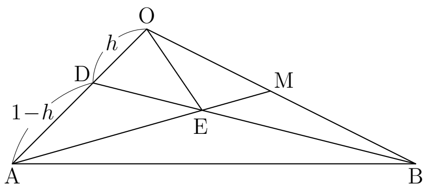
基本 14.3 [illegible]辺 AB を[illegible]内分する点を P，辺 AC を 1 : 2 に内分する点を Q と[illegible]辺 B[illegible]点 R があるとする．　(大分大学 2015) $\boxed{2}$

(1) 線分 PQ の中点を[illegible]，点 A，M，R が一直線上にあるとき，BR : RC を求めなさい．

(2) △ABC の重心 G[illegible]RQ の重心 H が一致するとき，BR : RC を求めなさい．

(3) 直線 AR，BQ，[illegible]が一点で交わるとき，BR : RC を求めなさい．

基本 14.4 △OAB において，辺 OB の中点を M，辺 OA を $h:(1-h)$ $(0<h<1)$ に内分する点を D とし，線分 AM，BD の交点を E とする．次の各問に答えよ．　(琉球大学 2006) 5



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および h で表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=4$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ のとき [illegible] を求めよ．

基本 14.5 平面上に △OAB と点 P があり [illegible] k，m，[illegible] て

$$k\overrightarrow{\mathrm{PO}}+m\overrightarrow{\mathrm{PA}}+ \text{[illegible]}$$

が成り立つとする．次の問いに答えよ．

(1) $k=4$，$m=1$，$n=2$ のとき，△P [illegible] の面積比を [illegible] も簡単な整数の比で表せ．

(2) k を 0 以上の定数とする．点 [illegible] $\geqq 0$，$n\geqq$ [illegible] $+n=$ [illegible] ながら動くとき，点 [illegible] の軌跡は線分になることを示せ．

(3) 点 P が [illegible] $\geqq 0$，$n\geqq 0$，$m+n=3$ を満 [illegible] の存在する [illegible] よ．また，領域 D の面積 [illegible] の面積の [illegible] となるか [illegible] よ．

基 [illegible] 平 [illegible] △AB [illegible] がある．△ABC の [illegible] 部に点 D があって，三角形 [illegible] 積比が [illegible]

$$\text{[illegible]}\triangle\mathrm{DBC} \text{[illegible]} \mathrm{A}:\triangle\mathrm{D} \text{[illegible]} :q:r$$

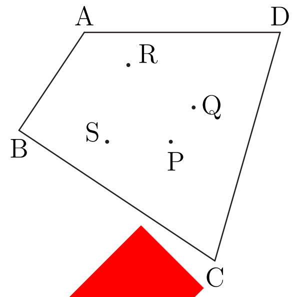
[illegible] する． [illegible] 問いに [illegible]　(福岡教育大学 2015) 3

(1) [illegible] 辺 BC [illegible] を [illegible] BD [illegible] の交点を T とするとき，BS : SC [illegible] T : T [illegible] q，r を [illegible]

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=$ [illegible] $+q$ [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ [illegible] となることを示せ．

基本 14.7 右図のような四角形 ABCD について，すべての内角の大きさは 180° 未満とする．△BCD の重心を P，△CDA の重心を Q，△DAB の重心を R，△ABC の重心を S とする．ただし，点 P と点 R は直線 AC 上になく，点 Q と点 S は直線 BD 上にないものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(宮崎大学 2013) 10



(1) AC//RP を示せ．

(2) AB//QP を示せ．

(3) 四角形 ABCD が円に内接するとき，4 [illegible]は同一円周上にあることを示せ．

標準 14.8 $0 < \alpha < 1$，$0 < \beta < 1$ とする．[illegible]の辺 BC [illegible]内分する点を P とし，辺 CD を $1-\beta$: [illegible]す[illegible]る．また[illegible]分 QP と平行四辺形の対角線 AC の交点を [illegible]．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$[illegible] A[illegible]い に答えよ． [illegible]004) 3

(1) ベクトル [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) 長さの[illegible] $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(3) A[illegible] AD[illegible]B $= 60°$ とするとき，[illegible]R の面積を求めよ．

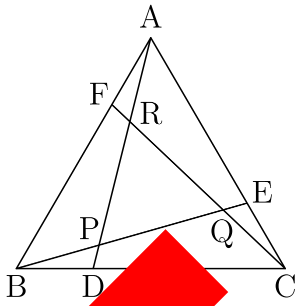
標[illegible]**.9** 座標[illegible]に 3 点[illegible] A(2, 6)，B(3, 4) をとり，点 O から直線 AB に [illegible]OC を[illegible]．ま[illegible]数[illegible]対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} \text{[illegible]}$$

で[illegible]き，次[illegible]よ． (九大 [理]2009) 1

(1) 点[illegible]標を[illegible] $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を[illegible]表せ．

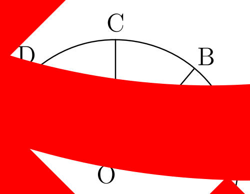
(2) s を定[illegible] $\geqq 0$ の範囲[illegible]かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ．



標準 14.10 右図の正三角形 ABC において，辺 BC，CA，AB を $m : n$ $(0 < m < n)$ に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．また，線分 AD と BE の交点を P，線分 BE と CF の交点を Q，線分 CF と AD の交点を R とする．このとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2003) $\boxed{11}$

(1) △PQR は正三角形であることを示せ．

(2) $\mathrm{AR} : \mathrm{AP} = m : n$ であることを示せ．



標準 14.11 右図のように，中心 O，半径 1 の[illegible]相異なる 4 つの点 A，B，C，D を $\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{B}$[illegible] $\angle\mathrm{COD} = \theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ となるようにとる．[illegible]ル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{c}$ とするとき，[illegible]答えよ． (宮崎[illegible]) [illegible]

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，θ を用い[illegible]表せ．

(2) 線分 AC[illegible]D の交点を P とするとき，ベ[illegible]いて表せ[illegible]

1[illegible] ベ[illegible]ルの[illegible]

□□ **14**[illegible]面上の[illegible]，B[illegible]して $|\overrightarrow{\mathrm{A}}$[illegible]$1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 5$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3$ であ[illegible]求め[illegible]し，[illegible]は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と [illegible]内積とする．

(福岡教育大学 2010) $\boxed{5}$

□□ [illegible]$| = 3$[illegible]2 で，[illegible]60° であるとき，$|\vec{a} - 3\vec{b}|$ を求めよ．

(琉球大学 2012) $\boxed{5}$

□□ **14.14** 平面上に 3[illegible]$,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の[illegible]値と，そのときの θ の値を求めよ．(琉球大学 2015) $\boxed{5}$

□□ **14.15** 三角形 A[illegible]三辺を $\mathrm{AB} = 4$，$\mathrm{AC} = 3$，$\mathrm{BC} = \sqrt{13}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおくとき，[illegible]$\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．また，三角形 ABC の重心を G とするとき，線分 AG の長さを求めよ． (琉球大学 2010) $\boxed{6}$

基本 14.16 大きさ 1 のベクトル $\vec{a}$ と，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{b}$ のなす角を θ とする．
(大分大学 2016) $\boxed{1}$

(1) $|3\vec{a}+t\vec{b}|$ が最小となるような実数 t の値を $|\vec{b}|$，θ を用いて表しなさい．

(2) $|3\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$ をとる．$|\vec{b}|$ および $\cos\theta$ の値を求めなさい．

基本 14.17 $\triangle$ABC において，$\angle A = 60^\circ$，AB $=2$，AC $=1$ と[illegible]$\angle$A の 2 等分線と辺 BC の交点を D とする．また，$\angle$A の 2 等分線と辺 BC[illegible]等分線の交点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき[illegible]の問いに答[illegible]
([illegible]福岡教育大学 2008) $\boxed{2}$

(1) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) AD : AE を求めよ．

基本 14.18 一辺の長さが 2 の正三角形[illegible]おい[illegible]を 1 : 3 [illegible]する点を P，線分 OB を 3 : 1 に内分す[illegible]とする．[illegible]$=\vec{a}$[illegible]とき，次の問に答えよ．
([illegible]2013) $\boxed{1}$

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内[illegible]値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を[illegible]表せ．

(3) 線[illegible]の長さ[illegible]

(4) [illegible]OB の[illegible]C[illegible]分 AC と線分 PQ[illegible]点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用い[illegible]．

基本 14.19 [illegible]三角形[illegible]におい[illegible]B $=2$，[illegible]1，$\angle$BAC $=120^\circ$ とし，実数[illegible]>0 に[illegible]，$4\overrightarrow{\mathrm{PA}}$[illegible]$+k\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$[illegible]れている点を P，直線 AP と直[illegible]との[illegible]D と[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{D}}$ で与え[illegible]る点を Q とする．このとき，次の[illegible]よ．
(鹿児島大学 2001) $\boxed{6}$

(1) 線分[illegible]DC を k を[illegible]せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp$BC[illegible]る[illegible]の値を求めよ．

(3) (2) の k の値に対し[illegible]点 Q が三角形 ABC の外接円の周上にあるとき，l の値を求めよ．

基本 14.20 $\triangle$OAB に[illegible]$\angle$AOB $=\dfrac{2}{3}\pi$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=b$ とする．点 O から辺 AB に垂線をお[illegible]し，辺 AB との交点を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$a$，$b$ を用いて表せ．
(福岡教育大学 2003) $\boxed{3}$

基本 14.21 平面上の 3 点 O，A，B は同一直線上にないとし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の長さはそれぞれ $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 8$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 5$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 7$ とする．点 P を線分 AB を $2:1$ に内分する点とする．また，2 点 O，P を通る直線と，線分 AB の垂直二等分線との交点を E とする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2002) 6

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 s，t を求めよ．

基本 14.22 △OAB において，OA $= 3$，O[illegible] 2 とし，辺 [illegible] 点を M，∠AOB の二等分線と辺 AB の交点を D とする．[illegible] OD に [illegible] ら下ろした垂線の足を E とし，直線 OM と直線 AE の交点を F と [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ として，次の各問いに答えよ．　[illegible]

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表 [illegible]

基本 14.23 △ABC において，辺 [illegible] 1 に内分 [illegible] 点を [illegible] 1 に内分する点を E とし，線分 CD，BE の [illegible] 点を P とする [illegible] の問い [illegible]　[illegible] 5

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を，[illegible] を用いて表せ．
(2) AB [illegible] $= \sqrt{7}$ のとき，∠BAC の [illegible] さを [illegible] めよ．

基本 [illegible] OA [illegible] OB [illegible] AOB $= 60^\circ$ の △O[illegible] おいて，辺 AB を $3:1$ に [illegible] る点を [illegible] OB の [illegible] OP と AQ の交点を R とする．

(大分大学 2005) 2

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ [illegible] と [illegible] しな [illegible]
[illegible] PQ の [illegible] を求め [illegible]
[illegible] R [illegible] めな [illegible]
(4) [illegible] の面積 [illegible] なさい．

基本 14.25 [illegible] があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ [illegible]，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおくと，$|\vec{a}| = 3$，$|\vec{b}| = 2$，$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{[illegible]}{6}$ [illegible] 成り立 [illegible] いる．OA の中点を P とし，半直線 AB 上に AB : AH $= 1 : s$ $(s > 0)$ [illegible] 点 H をとる．　(大分大学 2011) 3

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を s，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を [illegible] 表しなさい．
(2) 直線 OH と直線 [illegible] 垂直に交わるような s の値を求めなさい．
(3) (2) のとき，直線 OH と直線 PB の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい．

基本 14.26 平面上に一辺の長さが k の正方形OABCがある．この平面上に $\angle\mathrm{AOP}=60^\circ$，$\angle\mathrm{COP}=150^\circ$，$\mathrm{OP}=1$ となる点 P をとり，線分 AP の中点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおいて，次に答えよ． (九工大 [工]2006) 2

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の長さを k を用いて表せ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を k と $\vec{a}$，$\vec{p}$ を用いて表せ．
(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ が平行になるときの k の値を求めよ．
(4) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が垂直になるときの k の値を求めよ．

基本 14.27 四角形 ABCD に対して次の [illegible] が成 [illegible] する．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

このとき，四角形 ABCD は向かい合う [illegible] なわち [illegible] 辺形になる) ことを示せ． [illegible]) 3

基本 14.28 △AB [illegible] を 1 辺の長さが 1 の正三角形と [illegible] ABC [illegible] 中心を O とする．次の問 [illegible] よ． [illegible]) 7

(1) ベク [illegible] A [illegible] を求めよ．
(2) [illegible] △AB [illegible] を動くとき，次の ([illegible] イ) に答えよ．
　([illegible]) 内積 [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ [illegible] $+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の値を求めよ．
　(イ) [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ [illegible] 大値 [illegible] を求めよ．

[illegible] 平面 [illegible] 上いに [illegible] 3 点 O，A，B [illegible] り，それらは同一直線上にはな [illegible] とする [illegible] A = [illegible] とする．O [illegible]，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，その内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = [illegible] ∠AOB [illegible] 等分 [illegible] 分 AB [illegible] 点を C とし，直線 OA に関して点 B と [illegible] 点を [illegible] る．この [illegible] 問いに答えよ．
(鹿児島大学 2012) 3

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，[illegible] を用い [illegible] せ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用 [illegible] 表せ．
(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となると [illegible] ∠AOB と OC を求めよ．

標準 14.30 平面上に OA⊥AP，OB⊥BP を満たす四角形 OAPB がある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ と表すと，

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\frac{1}{4},\quad \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\frac{1}{7}$$

が成立している．（大分大学 2010）3

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ として，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい．

(3) △OAB と △PBA の面積比を求めな[illegible]

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=2\sqrt{7}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を求めなさ[illegible]

標準 14.31 △OAB において，OA = 1，OB [illegible] 2 : 1 に内分する点を P，線分 OP を P の方[illegible]の点を[illegible] 次の問いに答えなさい．（[illegible]大分大学[illegible]3）3

(1) △PQB = 2△POA のとき，[illegible] と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ [illegible]なさ[illegible]

(2) ∠OQA = ∠QOB のとき，OP : [illegible]Q を求めなさ[illegible]

標準 14.32 [illegible]が 1 の正三角形 OAB がある[illegible] OB[illegible] 線分 AB を[illegible]内分[illegible]を C とする．さらに，2[illegible]Q は[illegible]正の実数[illegible] l について，[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$[illegible]を満たすものとする[illegible]とき，次の各問に答えよ．（宮崎大学 2011）4

(1) 3 点[illegible]Q が[illegible]上[illegible]き，k と l の関係式を求めよ．

(2) [illegible]P，Q[illegible]直線上[illegible]ものとし，[illegible]PQ の重心が ∠AOB の二等分線[illegible]ある[illegible]．この[illegible]k と l の関係式[illegible]めよ．

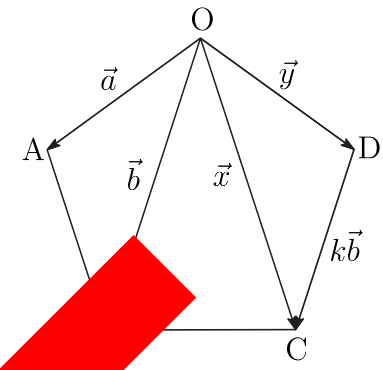
([illegible]) [illegible]，AP[illegible]き，k[illegible]求めよ．

標準 14.33 一辺の長さ1の正五角形OABCDについて，OBとDCは平行である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{x},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{y},\quad \overrightarrow{\mathrm{DC}} = k\vec{b}\quad (k \text{ は実数})$$

とするとき，次の各問に答えよ．

(宮大 [医]2016) 5



(1) k の値を求め，$\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用[illegible]ぞれ表[illegible]

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の[illegible]

(3) $\vec{a}$ と $\vec{x}$ の内積を求めよ．

標準 14.34 相異なる3点O，A，Bに対し[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ が

$$|\,\vec{a}\,| = |\,\vec{b}\,| = 1,\quad \vec{a}\text{[illegible]}\ \vec{a}\cdot\vec{b} \neq \text{[illegible]}$$

を満たしているものとする．$t = \vec{a}\cdot\vec{b}$ [illegible]くとき，次[illegible]問に答[illegible]し，記号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ [illegible]の内積を，また，$|\,\vec{a}\,|$ はベクト[illegible]大き[illegible]

([illegible]崎大[illegible]) 6

(1) 直線[illegible]に関し[illegible]Aと対称な点をCとす[illegible]ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ と[illegible]て表[illegible]

(2) [illegible]線OC[illegible]て，[illegible]な点をDとすること，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\vec{b}$ が平行とな[illegible]ような t の[illegible]た．

[illegible]座標[illegible]おいて[illegible]$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を[illegible]し，半径が $\dfrac{1}{2}$ の円を S とする．S [illegible]N(0[illegible]とり[illegible]る．この[illegible]次の各問いに答えよ．ただし，Oは[illegible]ものと[illegible]

(鹿児島大学 2010) 3

(1) x 軸[illegible]とり，直線[illegible]S との交点のうち，Nと異なるものをQと[illegible]O[illegible]とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = a\vec{p} + b\vec{n}$ の形で表したとき，a，b を x で表せ．

(2) x 軸上に2点 $\mathrm{P}_1(x$[illegible]$\mathrm{P}_2(x_2,\ 0)$ をとる．直線 NP_1 と円 S との交点のうち，Nと異なるものを[illegible]し，直線 NP_2 と円 S との交点のうち，Nと異なるものを Q_2 とする．こ[illegible]き，$x_1x_2 = -1$ が成り立っていれば

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ_1}} + \overrightarrow{\mathrm{CQ_2}} = \vec{0}$$

が成立することを証明せよ．ただし，$\vec{0}$ は零ベクトルを表すものとする．

標準 14.36 座標平面上の点 $\mathrm{P}_n(n,\ 1)$，$n = 1, 2, \cdots$ に対して，点 P_1 から原点 O と点 P_n $(n \geqq 2)$ を通る直線へ下ろした垂線を $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_n$ とし，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ のなす角を θ_n とする．このとき，次の問いに答えよ．(熊大 [文]2001) 3

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ の成分を求めよ．

(2) $\cos\theta_n$ を求めよ．

(3) $\tan\theta_n < 1.01$ をみたす最小の n の値を求めよ．

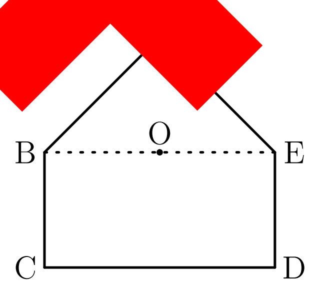
標準 14.37 △OAB において，辺 OB の中点を M，辺 AB を [illegible] α に内分する点を P とする．ただし，$0 < \alpha < 1$ とする．線 [illegible] P と AM の [illegible] Q とし，Q を通り，線分 AM に垂直な直線が，辺 OA またはそ [illegible] 交 [illegible] R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ として，次の問いに答えよ．(九大 [理]2006) 2

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および α を用 [illegible]

(2) $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ で $\cos$ [illegible] き，ベク [illegible] OR を $\vec{a}$ と α を用いて表せ．

(3) (2) の条件のもとで，点 R が [illegible] 中点であ [illegible] きの α [illegible]．

標準 14.38 図の [illegible] な五角形 ABCDE(角 A が直角で [illegible] 二等辺三角形 A [illegible] 形 BCDE をあわせた図形) に [illegible] 辺 BC と辺 [illegible] 辺 CD と線分 BE の長さ [illegible] とする．線 [illegible] の中 [illegible] る．また，5 枚のカー [illegible] あり，[illegible] れに A [illegible] C [illegible] と書いてある．カ [illegible] よく [illegible] 1 枚 [illegible] もと [illegible] の操作を n 回繰り返し，[illegible] に引 [illegible] ード [illegible] たとえば，i 回目 [illegible] B を [illegible] とす [illegible] $_i$ = [illegible] る．この [illegible] 次の問 [illegible]．(九大 [illegible]) 3



(1) [illegible] 内積 [illegible]

(2) [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{P}_2}$ の [illegible] 1 であ [illegible]

(3) $\overline{\mathrm{OC}}$ [illegible] 積を q_i とす [illegible] のとき，$q_1q_2\cdots q_n = 0$ となる確率を求めよ．

標準 14.39 平面上に直 [illegible] 形 ABC があり，その斜辺 BC の長さを 2 とする．また，点 O は $4\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ [illegible] $= \vec{0}$ をみたしているとする．このとき，以下の問いに答えよ．(九大 [文]2011) 3

(1) 辺 BC の中点を [illegible] するとき，点 A は線分 OM の中点となることを示せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = 10$ となることを示せ．

(3) $4|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 = -4$ をみたす点を P とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の値を求めよ．

14.3　三角形の内心・外心・垂心

□□ **14.40** 三角形 ABC の垂心を H とする．次の等式が成り立つことを示せ．

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\overrightarrow{\mathrm{HC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}}$$

ただし，三角形の各頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わる．この点を三角形の垂心という．　(鹿[illegible]大学 2013) 3

基本 14.41 平面上に 3 点 O，A，B があり[illegible]A $=2$，OB[illegible]AOB $=\dfrac{\pi}{3}$ とする．点 A から直線 OB に垂線を下ろし，直線 O[illegible]点[illegible]る．また，点 B から直線 OA に垂線を下ろし，直線 OA との交点[illegible]線 AH と直線 BI の交点を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の[illegible]

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) 線分 OP の長さを求めよ．

基本 14.42 △O[illegible]において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$|\vec{a}$[illegible]3，$|\vec{b}$[illegible]$=t$ とする．点 A から[illegible]垂線 AP を下ろし，点 B か[illegible]O[illegible]線[illegible]ろし，直線 AP と[illegible]Q[illegible]を R とする．　([illegible]大分大学[illegible]) 3

(1) [illegible]面を求[illegible]

(2) [illegible]を t [illegible]，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ [illegible]表しなさい．

(3) $t=$ [illegible]き，O[illegible]と[illegible]$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ を求めなさい．

[illegible]平面[illegible]角形[illegible]点 O があり，[illegible]$=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく[illegible]

[illegible]

を満たし[illegible]．辺 BC[illegible]，線分 OB の中点を N とし，三角形 OBC の外心[illegible]のとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2015) 4

(1) M $\neq$ P のとき，線[illegible]と線分 OA は平行であることを示せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=t\vec{a}$ とおいて[illegible]と $\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および実数 t を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ を $\vec{a}$，[illegible]用いて表せ．

基本 14.44 △ABC において，AB = 5，BC = 7，CA = 6 とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおく．次の問いに答えよ．　　(長崎大学 2014) $\boxed{2}$

(1) △ABC の内心を I とする．∠A の 2 等分線と ∠B の 2 等分線は点 I で交わる．∠B の 2 等分線と辺 AC の交点を D とするとき，AD : DC と BI : ID を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\angle \mathrm{A} = \theta$ とする．$\cos\theta$ と内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(4) 実数 x，y を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x\vec{b} + y\vec{c}$ と表される点 P を考[illegible]P が辺 AB の垂直 2 等分線上にあるとき，x と y が[illegible]関係式を[illegible]

(5) △ABC の外心を O とする．辺 AB の垂[illegible]AC の垂直 2 等分線は点 O で交わる．$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．

標準 14.45 3 辺の長さが AB = 4，BC = 3[illegible]角三角[illegible]の内側にあって 2 辺 AB および AC に接[illegible]円の半径[illegible]とし，中心 O から AB に引いた垂線と AB [illegible]を H と[illegible]ク[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きで大きさが 1 のベクト[illegible]れぞれ $\vec{u}$[illegible]し，[illegible]0) とする．次の問いに答[illegible]よ．　　([illegible]2011) $\boxed{2}$

(1) 直線 A[illegible]の交点を M とするとき，[illegible]$\vec{u}$[illegible]いて表せ[illegible]

(2) [illegible]$\vec{u}$，[illegible]を求め，ベクトル A[illegible]O を，それぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ およ[illegible]を用い[illegible]．[illegible]O の半径 r を t で[illegible]

[illegible]円 O が[illegible]にも[illegible]の中心を I とする．すなわち，I は三角形 ABC の[illegible]ある[illegible]きの[illegible]と，内[illegible]の半径を求めよ．

[illegible]と内接[illegible]共有[illegible]ないような[illegible]囲を求めよ．

標[illegible] [illegible]形 AB[illegible] = AC[illegible]A = θ とし，この三角形の外接円の中[illegible]す[illegible]，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ = [illegible]し，実数 s，t に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\vec{b} + t\vec{c}$ となる点 P[illegible]$= \dfrac{1}{3}$ であり[illegible]外接円の周上にあるとき，次の問いに答えよ．　　(長崎大学 2008) $\boxed{5}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用い[illegible]せ．

(2) s，t の満たすべき[illegible]式を求めよ．

(3) $s + t = u$，$st =$ [illegible]くとき，v のとりうる値の範囲を求めよ．

(4) 上の (3) において，[illegible]が最小値をとるときの $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．また，中心 O との位置関係が分かるように，点 P を図示せよ．

標準 14.47 △OABにおいて，辺AB上に点Qをとり，直線OQ上に点Pをとる．ただし，点Pは点Qに関して点Oと反対側にあるとする．3つの三角形△OAP，△OBP，△ABPの面積をそれぞれa，b，cとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OQ}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$およびa，bを用いて表せ．　(九大[理]2008) 3

(2) $\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$およびa，b，cを用いて表せ．

(3) 3辺OA，OB，ABの長さはそれぞれ3，5，6であるとす[illegible]Pを中心とし，3直線OA，OB，ABに接する円が存在するとき，$\overrightarrow{OP}$[illegible]$\overrightarrow{OB}$を用いて表せ．

応用 14.48 三角形OABで$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=$ O[illegible]1，$\angle AOB=\frac{\pi}{6}$とする．このとき次の問いに答えよ．　[illegible]

(1) 三角形OABの外接円の中心(外心)Q[illegible]を[illegible]

(2) 原点OとAからそれぞれの対辺[illegible]の交点([illegible])をHとするとき，$\overrightarrow{OH}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$で表[illegible]

(3) $|\overrightarrow{AB}|$の値を求めよ．

(4) 三角形OA[illegible]内接円の中心(内心)Pの位置ベ[illegible]$\overrightarrow{OP}$[illegible]せ．

14.4[illegible]角形[illegible]

標[illegible]49 △[illegible]の辺[illegible]中点をそれぞれC，Dとする．辺OA上にOE : [illegible]1 : 4[illegible]点E[illegible]．[illegible]Cと線分BE，ADとの交点をそれぞれP，Q[illegible]し，線[illegible]Dと線[illegible]の交[illegible]とする．[illegible]$\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$とおくとき，次の[illegible]よ．　(熊大[文]2006) 4

([illegible]をベ[illegible]表せ．

(2) [illegible]$\overrightarrow{PR}$[illegible]トル$\vec{a}$，[illegible]

(3) $|\vec{a}|=$[illegible]内積$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$[illegible]，△PQRの面積を求めよ．

標準 14.50 放物線 $C: y=x^2$ 上に異なる 2 点 P，Q をとる．P，Q の x 座標をそれぞれ p，q (ただし，$p<q$) とする．直線 PQ の傾きを a とおく．以下の問いに答えよ．

(1) a を p，q を用いて表せ． (長崎大学 2015) 3

(2) $a=1$ とする．直線 PQ と x 軸の正の向きとなす角 θ_1(ただし，$0<\theta_1<\pi$) を求めよ．

(3) $a=1$ とする．放物線 C 上に点 R をとる．R の x 座標を r(た[illegible]，$r<p$) とする．三角形 PQR が正三角形になるとき，直線 PR と x [illegible]向きとのなす角 θ_2(ただし，$0<\theta_2<\pi$) を求めよ．[illegible]，このと[illegible]の傾き，および直線 QR の傾きを，それぞれ求めよ[illegible]正[illegible]QR の面積を求めよ．

(4) $a=2$ とする．放物線 C 上に点 S(1, 1) [illegible] PQS が $\angle\mathrm{S}=\frac{\pi}{2}$ である直角三角形になるとき，この三角形の面積[illegible]

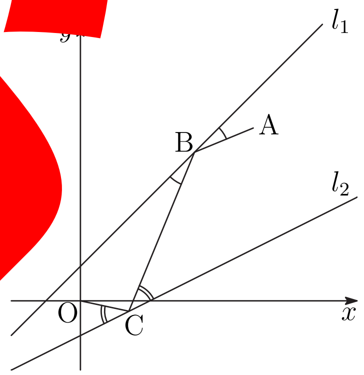
応用 14.51 曲線 $y=f(x)=x(4-x)$ 上[illegible]$f(a))$，B[illegible]$f(b))$，C(3, 3) $(0<a<b<3)$ をとる． [illegible]分大 [illegible] 9

(1) 四角形 OABC の面積が最大[illegible]きの a，b[illegible]を求め[illegible]

(2) 角 OAC の大[illegible]さが最小になるときの a の値を[illegible]．

14.5 [illegible]ト[illegible]式

標[illegible]52 O[illegible]点とす[illegible]面上の 2 直[illegible]$-y+$[illegible]と x[illegible]2[illegible]れぞれ l_2 と[illegible]A(5[illegible]とる[illegible]点 C は[illegible]l_1，l_2[illegible]るとす[illegible]ただし，右図の[illegible]けた[illegible]角が[illegible]ように，線分 A[illegible]線 l_1[illegible]角[illegible]線 BC，C[illegible]線 l_2[illegible]す角は等[illegible] (佐賀大学 2[illegible]



(1) $a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq$[illegible]満たす定数 a，b，c に対して，直線 $ax+by+c=0$ を l とする．直線 l に[illegible]点 P$(m,\ n)$ と対称な点 Q の座標は

$$\left(\cdots\frac{\cdots a(am+bn+c)}{a^2+b^2},\ n-\frac{2b(am+bn+c)}{a^2+b^2}\right)$$

であることを証明せよ．ただし，P は l 上の点でないとする．

(2) 点 B と点 C の座標を求めよ．

14.6 問題研究

14.6.1 オイラー線

△ABC の垂心 H について，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{HA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{HB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{HC}}$ とする．線分 AB および BC の垂直二等分線の方程式は，実数 s，t を用いて

$$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+s\vec{c},\quad \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+t\vec{a}$$

△ABC の外心を O とすると，O はこれらの交点であるから

$$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+s\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+t\vec{a}\quad \text{すなわち}\quad \cdots+\left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{c}=\vec{0}$$

$\vec{a}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立であるから $\qquad s=t=\frac{1}{2}$

したがって $\qquad \overrightarrow{\mathrm{HO}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

また，△ABC の重心を G とすると $\overrightarrow{\mathrm{HG}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

上の 2 式から $\qquad \overrightarrow{\mathrm{HG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{HO}}$

よって，外心，重心，垂心は同一直線 (**オイラー線**) 上にあり，G は線分 HO を 2 : 1 に内分する点である．

また，127 ページの 14…（…島大学 2013）の結果から

$$k=\cdots=\vec{c}\cdot\vec{a}\quad\cdots(*)$$

△ABC の外接円の半径を R とすると

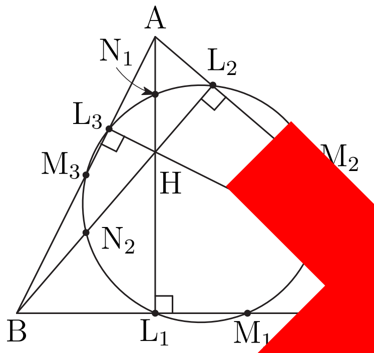
$$R^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{HA}}-\overrightarrow{\mathrm{HO}}|^2=\left|\vec{a}-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|^2$$

$$=\frac{1}{4}|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}|^2$$

$$=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k)$$

14.6.2　9 点円 (オイラー円)

△ABC の垂心 H から辺 BC，CA，AB にそれぞれ垂線 $\mathrm{HL_1}$，$\mathrm{HL_2}$，$\mathrm{HL_3}$ を引く．また，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ $\mathrm{M_1}$，$\mathrm{M_2}$，$\mathrm{M_3}$ とし，さらに，HA，HB，HC の中点をそれぞれ $\mathrm{N_1}$，$\mathrm{N_2}$，$\mathrm{N_3}$ とする．



3 点 L_i，M_i，N_i を通る円を C_i とする [illegible] 2, [illegible] を直径と[illegible]る円である．C_i 上の点 P_i に対して $\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{HP}}$ [illegible] まず [illegible] の [illegible] 方程 [illegible]

$$\left(\vec{x} - \frac{\vec{b} + [illegible]}{2}\right) \cdot \left(\vec{x} - \frac{\vec{a}}{2}\right) [illegible]$$

(∗) に注 [illegible] $\vec{b} + \vec{c})\Big|^2 = \frac{1}{16}(|\vec{a}|^2 + [illegible] \vec{c}|^2 - 2k) \qquad \cdots (∗∗)$

[illegible] 計算 [illegible] C_2 [illegible] のベクトル方程 [illegible] (∗∗) に一致する[1]．ゆえに [illegible] N_i [illegible] 2, 3) [illegible] あり，この円を **9 点円 (オイラー円)** という．
[illegible]) の中 [illegible] Q とす [illegible] Q も [illegible] 一線上 [illegible]，Q は △ABC の垂心 H と外心 [illegible] ある．[illegible] (∗∗) [illegible] を r とする [illegible]

$$[illegible] + |\vec{b}|^2 [illegible] 2k)$$

したが [illegible] ページの [illegible]

$$[illegible] = \frac{1}{4}R^2 \quad すなわち \quad r = \frac{1}{2}R$$

これらの内容につい [illegible] 図形の性質 (数学 A) の分野からの出題が多いが，複素数平面 (数学 III) で出題 [illegible] こともある[2]．

---
[1] ベクトル方程式における $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の対称性からも明らか．
[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf $\boxed{5}$

第 15 章　空間のベクトル（数学B）

15.1　ベクトルの成分

□□ **15.1** O を原点とする xyz 座標空間に [illegible] 4 [illegible], 5, 5), B(1, 4, −2), C(3, 1, −3), D(4, −2, 1) を考える．また，点 [illegible] 置ベクトルが，定数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と表される点を E とする．こ [illegible] にあるように t の値を定め，AE : EC を求め [illegible]

基本 15.2 点 O を原点とする空間の 2 [illegible] 3, [illegible]) の位 [illegible] トル をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ とし，直線 AB 上の [illegible] 位置ベ [illegible] を $\vec{p}$ [illegible]

(1) $|\vec{p}|$ が最小と [illegible] る点 P を求めな [illegible] い．　(　[illegible] 2002) 5

(2) (1) で求め [illegible] に対して，△OAP の面積を求 [illegible]

基本 15.3 [illegible] 半径が $2\sqrt{5}$ の球面が y [illegible] と [illegible] わってでき [illegible] 円を C とする [illegible] 問い [illegible]　(琉球大学 2011) 2

[illegible] の中心 [illegible] と半 [illegible]

[illegible] 点 P [illegible] を動 [illegible] Q [illegible] 面上の直線 $x=y$ 上を動くとする．線分 PQ の [illegible] の最小 [illegible] よび [illegible] の P, [illegible] 標を求めよ．

15.2　[illegible] トル [illegible]

□□ **15.4** [illegible] 点 A(3, 0, [illegible] 3, 0), C(1, s, t) を頂点とする三角形 ABC の重 [illegible] O とする．OG⊥AG, OG⊥AB となるときの s と t の値を求めよ．　(琉球大学 2016) 5

基本 15.5 空間に 3 点 A [illegible] 6), B(7, 0, 9), C(s, t, 0) がある．ただし，s, t は実数とする．このとき [illegible] 問に答えよ．　(佐賀大学 2016) 8

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を [illegible] を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ となるとき，s と t の関係式を求めよ．

(3) △ABC が ∠BAC = 90° の直角二等辺三角形となるとき，s と t の値を求めよ．

基本 15.6 a を定数とする．座標平面において，3 点 A$(3, -2, -2)$，B$(-1, -1,\ 3)$，C$(1,\ a,\ 3a+2)$ がある．線分 AB を $3:2$ に外分する点を D とするとき，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2006) 7

(1) 直線 AB と直線 CD が直交するときの a の値を求めよ．

(2) a は (1) で求めた値とし，G を三角形 BCD の重心とする．このとき，原点からの距離が 5 となるような線分 AG 上の点の座標を求めよ．

基本 15.7 a，b，c を定数とする．O を原点とする xyz 座標空[illegible]て，3 点 A$(a, -9,\ b)$，B$(2,\ c,\ 3)$，C$(-3,\ 2,\ 0)$ を考える．この[illegible]次の問い[illegible]よ．　([illegible]福岡教育大学 2001) 7

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満[illegible]

(2) (1) で定めた a，b，c の値に対して，次[illegible]

　(ア) 点 D$\left(-\dfrac{8}{5},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{19}{5}\right)$ について[illegible]O[illegible]用いて[illegible]

　(イ) 点 O に関する位置ベク[illegible]定数 t を用[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+$[illegible]れる点を E とす[illegible]3 点 A，C，E が同一直線上に[illegible]き，[illegible]求めよ．

基本 15.8 [illegible]A$(2,\ 1,\ 4)$，B$(3,\ 0,\ 1)$，[illegible]頂点と[illegible]面体 AOBC が[illegible]　(琉球大学 2007) 2

(1) [illegible]O，B[illegible]とめ[illegible]点 A から垂線 A[illegible]す．点 H の座標を求めよ．

(2) 三角形[illegible]の面積[illegible]BC の体積を求めよ．

(3) 四[illegible]OBC[illegible]する[illegible]なわち，[illegible]A，O，B，C を通る球面を考え[illegible]この球[illegible]程式を[illegible]よ．

基[illegible]間内で[illegible]$0,\ 0)$[illegible]$b_2,\ 0)$，C$(c_1,\ c_2,\ c_3)$ を頂点とする正[illegible]を考え[illegible]だし，[illegible]る．次の問いに答えよ．

(1) b_1，b_2[illegible]c_3 を求めよ．　(佐賀大学 2012) 1

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と BC[illegible]垂直[illegible]ことを示せ．

(3) P は直線 BC 上の点[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であるとする．P の座標を求めよ．また $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂[illegible]ることを示せ．

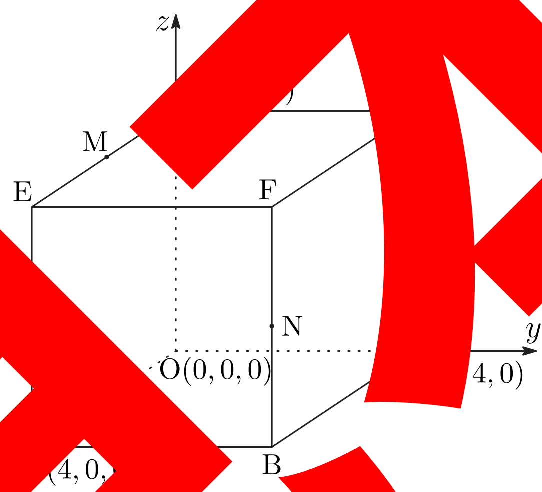
基本 15.10 xyz 空間に点 A(1，0，0)，B(0，1，0)，C(0，0，1)，D(1，1，1) をとる．点 A，B，C，D を頂点とする四面体 T について，次の問いに答えよ．

(長崎大学 2001) 5

(1) z 軸上の点 $(0,\ 0,\ a)$ を通り z 軸に垂直な平面で T を切ったときの切り口の頂点 P，Q，R，S の座標を，a を用いて表せ．ただし，a は $0 < a < 1$ なる定数とし，P，Q，R，S はそれぞれ線分 AC，AD，BD，BC 上に[illegible]るものとする．

(2) (1) における切り口の面積 $S(a)$ と，その最大値，および[illegible]の a の値を求めよ．

基本 15.11 4 点 O(0，0，0)，A(4，0，0)，C[illegible]，4) をとり，下図のように線分 OA，OC，OD を 3 辺とする立方体 O[illegible]．辺 DE，BF の中点を，それぞれ M，N とする．以下の問いに[illegible]



(1) [illegible]トル[illegible]よび[illegible]分で表せ．

(2) [illegible]とす[illegible]求めよ．

(3) 3[illegible]M，[illegible]点とする[illegible]面積を求めよ．

(4) 三角錐[illegible]，三角形 G[illegible]N を底面としたときの高さを求めよ．

(5) 三角形 G[illegible]N を含[illegible]と線分 OF との交点を P とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を用いて表せ．

基本 15.12 空間上に相異なる 4 点 O，A，B，C があり，線分 OA，OB，OC は互いに直交している．次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2010) 4

(1) 4 点 O，A，B，C からの距離が全て等しくなる点がただ一つ存在する．この点を G とする．線分 OA の中点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ が直交することを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

となることを示せ．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ の内[illegible]る．

(2) (1) を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{2}(\mathrm{OA} \text{[illegible]}$$

が成り立つことを示せ．

(3) O(0，0，0)，P(1，$\sqrt{3}$，0)，Q$\Big(-\frac{\sqrt{6}}{2}$，[illegible]$\frac{}{4}$，$\frac{}{2}\Big)$[illegible]る．このとき線分 OP，OQ，OR は互[illegible]交し[illegible]こ[illegible]た．[illegible]点 O，P，Q，R を通る球面の半径を[illegible]．

基本 15.13 原点[illegible]とする座標空間に，3 点 A(1，[illegible]B(0[illegible]2，1，3) がある．この[illegible]の問いに答えよ． ([illegible]大[illegible]) 1

(1) △A[illegible]おい[illegible]は $\frac{\pi}{2}$ より大きいことを示[illegible]

(2) [illegible]から直[illegible]た垂線と直線 BC と[illegible]点を H とする．[illegible]H の座[illegible]求めよ[illegible]

(3) △O[illegible]面積を[illegible]．

[illegible]座標[illegible]に 4 点[illegible]0，0)，B(0，[illegible]C(0，2，0)，D(3，2，0) を考[illegible]CD[illegible]P(x，[illegible]て，三角形[illegible]の面積を S とするとき，次の問い[illegible] (熊大 [文]2005) 3

(1) ∠A[illegible]き，$\cos\theta$ [illegible]

(2) S の最[illegible]

標準 15.15 3 点 O(0，0[illegible]A(3，0，0)，B(1，2，1) がある． (琉球大学 2010) 2

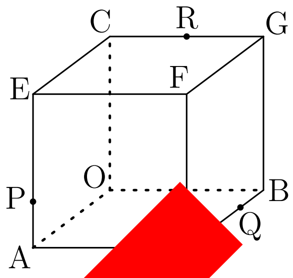
(1) z 軸上の点 C(0，0[illegible]ら直線 AB 上の点 H におろした垂線を CH とする．このとき，点 H が[illegible]B 上にあるような m の値の範囲を求めよ．

(2) 点 H が線分 AB[illegible]るとき，垂線 CH の長さの最大値，最小値とそのときの H の座標を求めよ．

(3) 三角形 OAB に外接する円の中心 P の座標とその半径 r を求めよ．

標準 15.16 右図のような1辺の長さが1の立方体OADB-CEFGがある．辺AEおよび辺BDを $x:(1-x)$ に内分する点をそれぞれP，Qとする．また辺CGを $t:(1-t)$ に内分する点をRとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，x および t の範囲は $0<x<1$，$0<t<1$ である．

(長崎大学 2002) 5



(1) △PQRの重心を S とするとき，ベ[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$ [illegible]用いて表せ．

(2) 直線OSが△PQRに垂直となるとき，[illegible]表せ．

(3) (2)の場合の△PQRの面積を $f(x)$ とする[illegible]小値を求めよ．

(4) $f(x)$ が最小となるとき，四面体O[illegible]

基本 15.17 空間内の点A，Bの座[illegible]ぞれ(0,[illegible]，(0[illegible]原点をOとする．このとき，次の各問いに[illegible]よ．

(鹿[illegible]2005) 6

(1) 点P(x, [illegible] Bと異なる点で，ベクトル[illegible]直となるよう[illegible]する．このとき，x，y，z [illegible]条件を[illegible]．

(2) P[illegible]の条件[illegible]き，直線APと xy 平[illegible]交点をQ(u, v, 0)とする．[illegible]と x，[illegible]せ．
[illegible]のと[illegible] y，[illegible]いて表せ．

[illegible]) P[illegible]の条件[illegible]し，[illegible]クトル[illegible]がベクトル $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$ に垂直[illegible]ようし[illegible]とき，[illegible]y 平面上の[illegible]うな図形をえがくかを答えよ．

15.[illegible]線べ[illegible]ル

□□ 15.18 [illegible]$\sqrt{2}$[illegible] $0\Big)$，$\vec{b}=\left([illegible]\frac{}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ．

(福岡教育大学 2002) 5

基本 15.19 座標空間内[illegible]点A(1, 1, 1)，B(3, 0, 1)，C(1, 2, 0)を含む平面を H とする．以下の問いに[illegible]．

(熊大[文]2015) 2

(1) 点P(-3, 2, 2)は H 上の点であることを示せ．

(2) 点Q($1,-3,-4$)を通る直線が H と直交するとき，その交点の座標を求めよ．

基本 15.20 空間内に3点 A(1, 2, 3)，B(2, −1, 4)，P がある．原点を O とするとき，次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2004) 6

(1) $\angle \mathrm{AOB} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) 線分 OA と線分 OB を2辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ がそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に垂直で，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = S$ のとき，P の座標を求めよ．

基本 15.21 空間内に4点 A(0, 0, 0)，B(2, 1, 1)，C(−2, 2, −… , 2, −4) がある． (…分大学 2006) 3

(1) $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値と…の面積…なさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトルを 1…

(3) 点 D から，3点 A，B，C を含む平面に垂…るとき，線分 DE の長さを求めなさい．

(4) 四面体 ABCD の体積を求めなさい．

標準 15.22 $\mathrm{A_1}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{A_2}(2,\ 3,$ … $2,\ 2,\ 2)$ … $4,\ 2$ … 4点とし，O を原点とするとき，次の問い…えよ． (… 2009) 7

(1) $\mathrm{A_3}$ と $\mathrm{A_4}$ … B とするとき，$\triangle \mathrm{A_1A_2B}$ の面…求め…

(2) 2つの…B，および $\mathrm{A_1A_2A_4B}$ の体…求めよ．

(3) …

$$\cdots \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} \cdots)$$

を位…トルに…点を…る．$\overrightarrow{\mathrm{A_1P}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A_1B}}$ を用いて表し，4点 A…，B，…一平面…あること…

… $\mathrm{A_2}$ … C と…き，4点 $\mathrm{A_3}$，…，P は同一平面上にあること…させ…

標準 1… …間に…3点 A(… 2, 0)，C(0, 1, 5) を頂点とする三角形 ABC…問いに答え… (長崎大学 2016) 2

(1) 線分 AB，…C，C…さを求めよ．

(2) 三角形 ABC の面積…求めよ．

(3) 原点 O(0, 0, 0) か…ABC に垂線を下し，平面 ABC との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \ell\overrightarrow{\mathrm{AB}} + m$ … おくとき，実数 ℓ，m の値を求めよ．

(4) 直線 AH と直線…の交点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおくとき，実数 k の値と三角形 HBC の面積 T を求めよ．

(5) 原点 O を頂点，四角形 ABHC を底面とする四角錐（すい）O-ABHC の体積 V を求めよ．

標準 15.24 a，b，c を正の定数とし，3 点 A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ の定める平面を α とする．また，原点を O とし，平面 α に垂直な単位ベクトルを $\vec{n} = (n_1,\ n_2,\ n_3)$ とする．ただし，$n_1 > 0$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(佐賀大学 2015) 8

(1) $\vec{n}$ を求めよ．

(2) 平面 α 上に点 H があり，直線 OH は α に垂直であるとする[illegible]H および $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ を求めよ．

(3) △ABC の面積を S，△OBC の面積を[illegible]とする．四[illegible]BC の体積を考えることにより，$S_1 = n_1 S$ であること[illegible]

応用 15.25 空間内に四面体 OABC があり，∠A[illegible]あるとする．辺 OA，OB，OC の長さを，そ[illegible]心を G とする．

(九大 [illegible]) [illegible]

(1) ∠OGA，∠OGB，∠OGC がすべ[illegible]ある[illegible]b，[illegible]式で表せ．

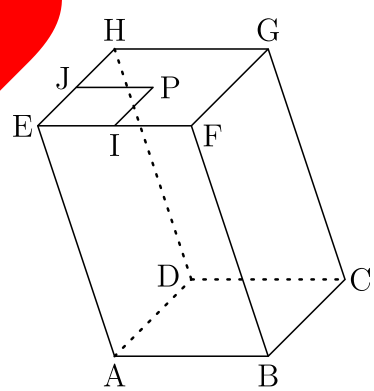
(2) 線分 BC を 1[illegible]2 に内分する点を[illegible]とする．点 P[illegible]線 AD [illegible]の点を動き，点 Q[illegible]形 APQ の重心が点 G になるよ[illegible]動く[illegible]分 OQ の長さ[illegible]めよ．

応用 [illegible]空間内[illegible]て次の問いに答えよ[illegible]

(九大 [理]2002) 4

(1) △ABC[illegible]積は $\frac{1}{[illegible]}$[illegible]$^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2$ に等しいことを示せ．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$[illegible]はベク[illegible]B とべ[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と[illegible]積を表す．必要ならば，二つのベ[illegible]のなす[illegible]コサ[illegible]内積の関係式[illegible]いてよい．

(2) [illegible]図の[illegible]面体[illegible]H を考え[illegible] $= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}$[illegible]，$|$[illegible]2 と[illegible]∠[illegible]∠[illegible]$\frac{\pi}{2}$，∠EA[illegible]る．[illegible]$< \pi$ なる定[illegible]する．面 E[illegible]上に[illegible]をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を[illegible]，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろ[illegible] $= |\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y = |\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，△A[illegible]面積を θ，x，y を用いて表せ．



(平行六面体 ABCD-EFGH)

(3) (2) で点 P が面 E[illegible]H 上を動くとき，△ACP の面積の最小値を求めよ．

15.4 空間図形

15.4.1 四面体

基本 15.27 四面体OABCを考える．辺OAを$1:1$に内分する点をPとする．また辺OBを$2:1$に内分する点をQとして，辺OCを$3:1$に内分する点をRとする．さらに三角形ABCの重心をGとする．3点P，Q，Rを通る平面と[illegible]分OGの交点をKとする．線分OKとKGの長さの比を求めよ． ([illegible]大学 2016) 4

基本 15.28 四面体OABCがある．辺AC[illegible]2に内分[illegible]Dとし，線分DBを$1:2$に内分する点をEとする．また，[illegible]直線と辺ABの交点をFとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とする[illegible]に答えよ．

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を使って，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$および$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$を表[illegible]

(2) CE : EFを最も簡単な整数比で表せ[illegible]

(3) 四面体OABCの体積をVとする[illegible]面体[illegible]Vを[illegible]表せ．

基本 15.29 四面体OABCの3辺O[illegible]B，BC上に[illegible]れぞれ[illegible]Rがある．OP = PA，AQ[illegible]Bとし，点Rは点Bと異なる[illegible]する[illegible]心をHとするとき，[illegible]答えよ．ただし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，[illegible]C

(1) $\overrightarrow{\mathrm{O}}$[illegible]，$\vec{b}$，[illegible]いて表せ． (宮崎大学 2015) 8

(2) [illegible]Cの重[illegible]G[illegible]3点O，G，Hが同[illegible]線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を$\vec{b}$，[illegible]を用い[illegible]．

[illegible]本 15[illegible]四面体[illegible]におい[illegible]辺OA[illegible]をD，辺OBを$1:2$に内分する[illegible]OCを[illegible]に内分[illegible]をFとする．[illegible]，△ABCの重心をGとする．[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=$[illegible]き，次の問[illegible]えよ．

(福岡教育大学 2007) 6

(1) 3点[illegible]る平面を[illegible]直線OGと平面αの交点をPとするとき，[illegible]を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DP}}$を$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$を[illegible]表せ．

(3) △PDE，△PEF，[illegible]の面積をそれぞれS_1，S_2，S_3とするとき，$S_1:S_2:S_3$を最も[illegible]な整数の比で表せ．

基本 15.31 四面体 ABCD がある．点 P が $10\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たしているとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2004) 7

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表せ．

(2) 直線 AP と三角形 BCD との交点を Q としたとき，次の式を満たす実数 s，t，k を求めよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{BC}} + t\overrightarrow{\mathrm{BD}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

(3) 四面体 ABCD と四面体 PBCD の体積の比を求めよ．

基本 15.32 四面体 OABC において，OA [illegible] ある [illegible] さらに，BC を $1:2$ に内分する点を D，AD を $3:1$ に内分する点 [illegible] OE⊥AC であるとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \vec{e}$ とお [illegible]

(1) $\vec{e}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c}$ であることを示せ．ただ [illegible] $\vec{x}\cdot$ [illegible] $\vec{y}$ の内 [illegible] 表す．

(3) OA : OB = 2 : 1，OE⊥BC で [illegible]，∠AO [illegible] めよ．

基本 15.33 四面 [illegible] ABC において，OA = 2，OB [illegible] OC [illegible] OB であるとする．点 [illegible] AB 上に，OD⊥AB となる [illegible] $= \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$，[illegible] 次の各問に答えよ．た [illegible] ベクトル [illegible] の内積を表 [illegible] (宮崎大学 2004) 6

(1) [illegible] $\vec{a}$，$\vec{b}$ [illegible] 用いて [illegible]

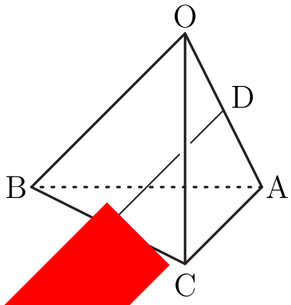
(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ [illegible] 角が [illegible] $\vec{d}$ のなす角が 60° であるとき，$|\vec{c}|^2$ の値を求め [illegible]

[illegible] 34 [illegible] OABC [illegible] OB = OC [illegible] ∠AOB = ∠BOC = ∠COA = $\frac{\pi}{3}$ [illegible] C の重 [illegible] 1 : [illegible] する点を P，辺 OA の中点を Q とし，[illegible] 交点を R [illegible] $= \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，次の各問に [illegible] (宮崎大学 2007) 4

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，[illegible] を用い [illegible]

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$⊥$\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ であると [illegible] A の長さを求めよ．さらに，CR の長さを求めよ．

基本 15.35 正四面体は，4つの面が全て合同な正三角形からなる四面体である．右の図のような1辺の長さが1である正四面体OABCを考える．OA，BCの中点をそれぞれD，Eとする．



$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}$$

とおく．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2011) $\boxed{3}$

(1) $\vec{d}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2) t を実数とし，F，G を $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=t\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}}$[illegible]$t)\vec{d}$ [illegible]点とする．$\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ の内[illegible]よ．

(3) E は線分 FG の中点であることを示せ．

(4) 四角形 BFCG の面積の最小値と，その[illegible]

基本 15.36 1辺の長さが1である正四[illegible]BC[illegible]Aの中[illegible]，辺OBを $2:1$ に内分する点をQ，辺O[illegible]に内分[illegible]点を[illegible]の問いに答えよ．　[illegible]2015) $\boxed{2}$

(1) 線分 PQ の[illegible]と線分 PR の長さを求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と[illegible]$\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ．

(3) 三[illegible]R の[illegible]めよ．

基本 [illegible] 原点[illegible]間の4点 A$(\sqrt{3},\ 3$[illegible]B$(-\sqrt{3},\ 3,\ 0)$，C$(0,\ 2,\ 2)$，[illegible]$0)$ お[illegible]平面[illegible]ABC 上にそれぞれ点 Q，R，S をとる．ベク[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ が[illegible]AC，[illegible]ABC にそれぞれ直交するとき，次の問いに[illegible]よ．　(熊大 [理]2006) $\boxed{2}$

(1) [illegible]クトル[illegible]成分[illegible]

(2) [illegible]S を成[illegible]

(3) △[illegible]面積[illegible]よ．

基本 15.38 [illegible]おいて，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}\ [illegible]\mathrm{B}=3,\ \angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$$

とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ [illegible]$\mathrm{C}=\vec{c}$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値[illegible]よ．　(宮崎大学 2012) $\boxed{3}$

(2) 平面 ABC 上の[illegible]，直線 OD が平面 ABC に垂直に交わるようにとる．$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくとき，p と q の値を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

基本 15.39 四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であり，$\triangle$OABの面積と$\triangle$OACの面積が等しいとする．このとき，次の問いに答えよ．(熊大 [文]2009) 4

(1) OB = OC を示せ．

(2) $\triangle$ABCの重心をGとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であることを示せ．

標準 15.40 四面体OABCの6つの辺の長さを

$$\mathrm{OA}=\sqrt{10},\ \mathrm{OB}=\sqrt{5},\ \mathrm{OC}=\sqrt{6},\ \mathrm{A}[illegible]=\sqrt{5},\ \mathrm{AC}=[illegible]\mathrm{C}=\sqrt{5}$$

とする．以下の問いに答えよ．(熊大 [文]2007) 2

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値をそ[illegible]

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ [illegible]を示せ．

(3) 四面体OABCの体積を求めよ[illegible]

標準 15.41 四面体OABCにおいて，[illegible]A = OB = O[illegible]，AB [illegible]A = 1 とする．また，辺[illegible]に点PをAP⊥OBとなるよう[illegible]さ[illegible]，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ[illegible]．このとき，次の各問に答[illegible]崎大[illegible]) 5

(1) ベ[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を[illegible]て表せ．

(2) [illegible]Cの[illegible]求め[illegible]

(3) 平面O[illegible]に点[illegible]が平面OACに垂直となるようにとる．このとき[illegible]トル[illegible]$\vec{a}$，$\vec{c}$ を[illegible]表せ[illegible]し，平面OACは3点O，A，C[illegible]の平面[illegible]．

標[illegible]の長さ[illegible]OABC[illegible]る．$0<s<\frac{1}{2}$ に対しOAを $s:(1$[illegible]分する[illegible]とし，[illegible]OCを $t:(1-t)$ に内分する点をQとする．[illegible]$\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=$[illegible]き，以下の問いに答えよ．
(熊大 [理]2016) 1

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をそれぞ[illegible]$\vec{b}$，$\vec{c}$，s，t を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{BPQ}=90^\circ$ であ[illegible]，t を s を用いて表せ．

(3) (2)の条件の下で[illegible]最大値とそのときの s の値を求めよ．

(4) (3)で求めた s[illegible]して，PQ^2 を求めよ．

標準 15.43 四面体 OABC の面はすべて合同であり，$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OB}=8$，$\mathrm{AB}=7$ である．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ として，次に答えよ．　(九工大 [工]2016) $\boxed{1}$

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) 3 点 O，A，B の定める平面を α とし，α 上の点 H を直線 CH と α が垂直になるように選ぶ．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) (2) の点 H に対して，線分 CH の長さを求めよ．

(4) 四面体 OABC の体積 V_1 を求めよ．また，辺 OC の中点 [illegible]，さらに辺 OB 上に点 E を $\mathrm{AE}+\mathrm{ED}$ が最小となるよ[illegible]とる．こ[illegible]四面体 OAED の体積 V_2 を求めよ．

標準 15.44 四面体 OABC は $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$，O[illegible]たしている．線分 AB を $1:2$ に内分する点を [illegible]に内分する点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ [illegible] $=\theta$ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ として，次に答えよ．　([illegible]工大 [[illegible]) $\boxed{1}$

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，[illegible]用いて表[illegible]

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の[illegible]き，s を θ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp$[illegible]$\sqrt{17}$[illegible] とするとき，$\cos\theta$ と s [illegible]

(4) [illegible]M，[illegible]するとき，四面体 O[illegible]体積 V を求めよ．

[illegible] **15.4**[illegible]体 OA[illegible]OA[illegible]B $=\sqrt{15}$，$\mathrm{OC}=2$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{AOC}=$ [illegible]を満[illegible]ている[illegible]OA[illegible]を $s:1-s$ [illegible] $s<1)$ に内分する点をそれぞ[illegible]とし[illegible]Q の[illegible]する．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$ (0[illegible]して，[illegible]え[illegible]　(九工大 [工]2012) $\boxed{2}$

(1) ベ[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$[illegible]$\vec{c}$ と s を[illegible]．

(2) ベクト[illegible]は[illegible]BC に垂直であるとする．

(a) s と $\cos\theta$ の値[illegible]よ．

(b) 線分 OG と BC[illegible]さ，および $\angle\mathrm{BAC}$ を求めよ．

(c) 四面体 OABC[illegible]積 V を求めよ．

標準 15.46 t を $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす数とし，空間内の 4 点 $\mathrm{A}(t,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ t,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ t)$，$\mathrm{P}\left(\frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t\right)$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(九大 [文]2007) $\boxed{2}$

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形であることを示し，その面積 $S(t)$ を求めよ．

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{PG}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直で[illegible]ることを示せ．

(3) 四面体 PABC の体積 $V(t)$ を求めよ．また $V(t)$ の最小値[illegible]小値を与える t の値を求めよ．

標準 15.47 四面体 OABC は，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$ [illegible] $\angle\mathrm{OCA} = \angle\mathrm{OCB} = 90^\circ$ をみたしている．点 C から 3 点 O，A，B を通[illegible]垂線とその平面との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，[illegible]

([illegible])

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{c}$ と $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．ま[illegible]$\vec{a}\cdot\vec{b}$[illegible]せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}$ とおくとき[illegible]を θ を用[illegible]表せ[illegible]大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|$ を θ を用いて表せ．

(3) $\triangle\mathrm{AOB}$ と[illegible]の面積をそれぞれ S と T と[illegible]S[illegible]θ と $\angle\mathrm{ACB}$[illegible]

標準 1[illegible]頂点が[illegible]の長さが 1 である正四[illegible]O-ABCD がある．辺 OA，CO[illegible]$1 - t$[illegible]< 1[illegible]する点をそれぞれ[illegible]とし，辺 OD を $k : 1 - k$ [illegible]< 1) [illegible]する点[illegible]また，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．次[illegible]答えよ[illegible]

(九工大 [工]2013) $\boxed{1}$

[illegible]を $\vec{a}$，[illegible]用いて[illegible]また，内積[illegible]値を求めよ．

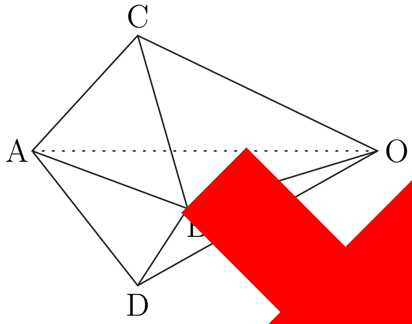
[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{P}}$[illegible]を k，[illegible]せ．

(3) [illegible]点 P[illegible]の定め[illegible]とする．

(i) [illegible]表せ．

(ii) t の[illegible]変化[illegible]とき，k の最大値を求めよ．また，k が最大値をとるときの四角形 P[illegible]の面積 S を求めよ．

標準 15.49 四面体 OABC において，三角形 ABC は 1 辺の長さが 1 の正三角形であり，OA = OB = OC = 2 とする．また，点 C を通り平面 OAB に垂直な直線上に点 D があり，線分 CD の中点 H は平面 OAB に含まれるとする．すなわち，点 D は平面 OAB に関して，点 C と対称な点である．



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおいて，次に答[illegible]

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ [illegible]，$\vec{c}$ で表[illegible]

(3) 直線 BH と直線 OA の交点を P[illegible]る．$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を[illegible]表し，[illegible]めよ．さらに，OP [illegible]び BP の長さを求めよ．

(4) (3) で定[illegible]対して，四角形 BCPD の面[illegible]また[illegible]錐O-BCP[illegible]積[illegible]よ．

応用 [illegible] 空間[illegible]て[illegible]を固定し，O に関[illegible]置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P[illegible]$\vec{p}$) で表[illegible]点 O[illegible])，C($\vec{c}$) を頂点とする四面体 OABC において，[illegible]OA，[illegible]BC を[illegible]$-s$ [illegible]1) に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．[illegible]点 A[illegible]の定[illegible]面を α と[illegible]$\vec{a}-\frac{9}{16}\vec{b}+\frac{9}{16}\vec{c}$ を位置ベクト[illegible]平面[illegible]点を H[illegible]．OA = A[illegible]，OB = $3\sqrt{2}$，OC = BC = 4，AC[illegible]次に答[illegible]

(九工大 [工]2014) 1

(1) ベ[illegible]$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ [illegible]いて表せ．また，内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2) 線分 O[illegible]よ．

(3) 3 点 D，E，F の定[illegible]平面が点 H を通るときの s の値を求めよ．

(4) s を (3) で求めた値[illegible]るとき，四面体 OAFC の体積 V を求めよ．

応用 15.51 a，bを正の数とし，空間内の3点A$(a, -a,\ b)$，B$(-a,\ a,\ b)$，C$(a,\ a, -b)$を考える．A，B，Cを通る平面をα，原点Oを中心としA，B，Cを通る球面をSとおく．このとき，次の問いに答えよ． (九大[理]2007) $\boxed{3}$

(1) 線分ABの中点をDとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$および$\overrightarrow{\mathrm{DO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$であることを示せ．また△ABCの面積を求めよ．

(2) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$と$\overrightarrow{\mathrm{DO}}$のなす角を$\theta$とするとき$\sin\theta$を求めよ．[illegible]た，平面$\alpha$に垂直で原点Oを通る直線と平面$\alpha$との交点をHとすると[illegible]OHの長さを求めよ．

(3) 点Pが球面S上を動くとき，四面体[illegible]の体積[illegible]値を求めよ．ただし，Pは平面α上にはないものとする．

応用 15.52 一辺の長さが1の正方形OABC[illegible]POABCがある．ただし，点Pは内積に関[illegible]およびOC[illegible]$\frac{}{2}$をみたす．辺APを$2:1$に内分する点[illegible]，辺[illegible]とす[illegible]らに，点Pと直線BC上の点Qを通る直線[illegible]，平面O[illegible]に垂[illegible]．このとき，長さの比BQ : QC，および線[illegible]Pの長さを[illegible]． ([illegible]2013) $\boxed{2}$

応用 15.53 [illegible]が$\sqrt{2}$の正四面体OABCに[illegible]，辺BCを$1:2$[illegible]N，辺OCの中点をLとす[illegible]$\vec{b}=$ O[illegible]$= \overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおく[illegible]の問い[illegible] (熊大[医]2012) $\boxed{4}$

(1) [illegible]L，M[illegible]を通る[illegible]線OAの交点を[illegible]る．$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2) 辺[illegible]中点[illegible]直線[illegible]の点P[illegible]XPを引く．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

応用 [illegible]体OA[illegible]A $= 1$[illegible]OC $= \sqrt{3}$，∠AOB = ∠AOC = 90°，∠[illegible]α (0°[illegible]90°) と[illegible]の点Pと辺AB上の点Rを，線分PRの長さ[illegible]ような位置に[illegible]た，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく．次の問い[illegible]よ． (長大[医]2009) $\boxed{6}$

(1) $\cos\alpha = x$とし，線[illegible]の長さをxの関数として表せ．

(2) 線分OAの中点を[illegible]線分BCを$5:9$に内分する点をNとする．線分PRと線分MNが交わる[illegible]にxの値を定めよ．

応用 15.55 空間内の1辺の長さ1の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$．$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とし，OAの中点をPとする．以下の問いに答えよ．　(熊大[医]2014) 1

(1) $0<t<1$に対し，BCを$t:(1-t)$に内分する点をQとする．また，PM＋MQが最小となるOB上の点をMとし，PN＋NQが最小となるOC上の点をNとする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$と$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$を，それぞれ$t$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2) △QMNの面積をtを用いて表せ．

(3) tが$0<t<1$の範囲を動くとき，△QMNの最大値を求[illegible]

応用 15.56 Oを原点とする空間内の2点A[illegible]1)，B[illegible]2)に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$かつ$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$を満たす平面OAB上の点[illegible]を$D$とする．以下の問いに答えよ．[illegible]

(1) 実数kに対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-$[illegible]る点Q[illegible]まれるとき，kの値の範囲を求めよ．

(2) 点Cを中心とする半径$\sqrt{6}$の[illegible]Dに含[illegible]と[illegible]なるCの座標を求めよ．

15.4.2 [illegible]

基本 [illegible]角形[illegible]面としOを頂点とす[illegible]錐O-ABCDにおいて，底面の[illegible]ABC[illegible]AD[illegible]をみたしている．[illegible]の中点をMとし，3点A，[illegible]を通る[illegible]辺O[illegible]をNとする．次に，四角形ABNMの対角線の[illegible]をP[illegible]直線[illegible]底面[illegible]と交わる点をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，[illegible]いて[illegible]答えよ．　(九工大[工]2008) 2

(1) [illegible]を[illegible]を用[illegible]

(2) [illegible]用いて[illegible]

(3) OP[illegible]表せ．

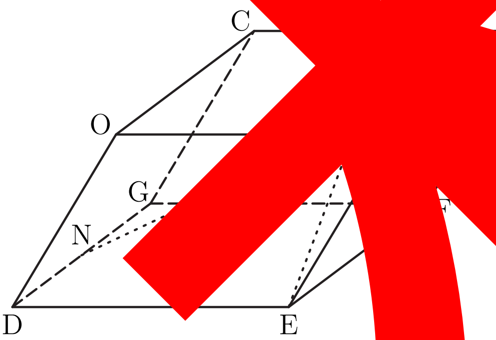
(4) 線分の[illegible]Qを求めよ．

基本 15.58 平行六面体 OABC-DEFG において，辺 AB を 3 : 1 の比に内分する点を L とし，辺 BC，DG の中点をそれぞれ M，N とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とおくとき，以下の問に答えよ．　(佐賀大学 2007) 1

(1) 線分 EM を $t:(1-t)$ の比に分ける点を I とするとき，$\overrightarrow{OI}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(2) 線分 LN を $s:(1-s)$ の比に分ける点を J とするとき，$\overrightarrow{OJ}$ を [illegible]，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(3) 線分 EM と線分 LN とが交わることを[illegible]，その交点[illegible]るとき，比 EH : HM を求めよ．



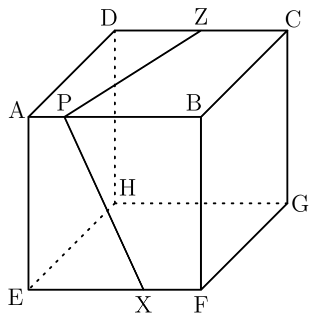
基本 15.59 [illegible]の長さが 1 の四角錐がある．[illegible]点[illegible]面を正方形 AB[illegible]し，[illegible]，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とす[illegible]の[illegible]き，次の各[illegible]に答えよ．　(宮崎大学 2010) 4

(1) [illegible]を $\vec{a}$，[illegible]を用い[illegible]

(2) 内積 [illegible]，$\vec{c}$，[illegible]よ．

(3) 点[illegible]，B，[illegible]四面[illegible]点となる[illegible]すべての点 P について，$\overrightarrow{OP}$ を [illegible]，$\vec{c}$ を[illegible]表せ．

基本 [illegible]間内に[illegible]よう[illegible]長[illegible] 1 である[illegible]EF を 3 : [illegible]点を X，辺[illegible]する．さら[illegible]辺 AB を $t:1-t$ $(0<t<1)$ [illegible]する点を P とする．3 点 P，X，Z を通る平[illegible]線 GH との交点を Y とおく．$\overrightarrow{AE}=\vec{a}$，[illegible]，$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ とするとき，次の各問に答えよ[illegible]　(宮崎大学 2008) 4



(1) $\overrightarrow{PY}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，[illegible] t を用いて表せ．

(2) 点 Y が辺 GH 上にあるとき，t の値の範囲を求めよ．

(3) (2) において四角形 PXYZ がひし形になるとき，t の値を求めよ．

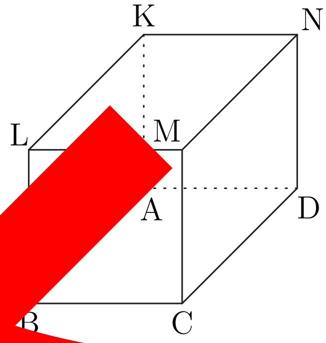
基本 15.61 図の長方体 ABCD-KLMN において，辺 AB の長さは 2，辺 AD の長さは $\sqrt{2}$ である．三角形 CLN の重心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \vec{c}$ とおく．次に答えよ．　(九工大 [工]2001) $\boxed{2}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) ∠AGC が直角となるように辺 AK の長さを定めよ．

(4) 辺 AK が (3) で定めた長さのとき，三角形 CLN の面積を求めよ．



基本 15.62 一辺の長さが 1 の正方形 OABC を[illegible]みたす点 P を頂点とする四角錐 POABC が[illegible]辺 CP の中点を E，辺 BC を $t : (1-t)$ に[illegible]このとき[illegible]以下の問いに答えよ．　([illegible]大 [illegible]) $\boxed{1}$

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用い[illegible]．

(2) ベクトル [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と t を用いて[illegible]

(3) 内積 [illegible]求めよ．

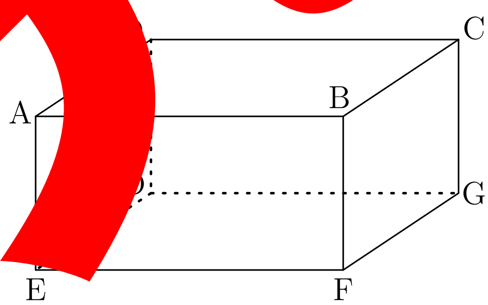
(4) 直[illegible]が平面[illegible]垂直であるとき，t の値[illegible]線分 OP の長さを求めよ．

標[illegible]3 長[illegible]ABC[illegible]において，OA = [illegible] 1，OC = 2 とし，辺 EF [illegible]を M[illegible]．ま[illegible] $(0 \leqq t \leqq 1)$ とし，点 P から線分 CM におろ[illegible]垂線[illegible] CM [illegible]点を[illegible]．$\vec{a}$ [illegible] $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくとき，[illegible]に答え[illegible]　(熊大 [文]2013) $\boxed{3}$

(1) [illegible]M を[illegible]いて表せ[illegible]

(2) [illegible] $\vec{c}$，$\vec{d}$ [illegible]いて[illegible]

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ [illegible]値を求め[illegible]



標準 15.64 1辺の長さが2の立方体ABCD-EFGHがある．下の図1にように，2辺BC，CD上に，BS = CT = x $(0 \leqq x \leqq 2)$ を満たす点S，Tをとる．このとき，三角形ESTの面積の最大値と最小値を求めたい．以下の問いに答えよ．　　　(長崎大学 2016) 4

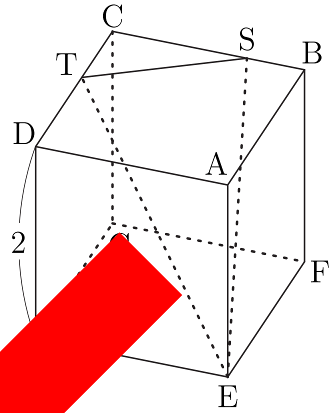


図1

(1) 右の図2を参考にして，三角形OPQにおい[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{q}$ とおくとき，三角形O[illegible]の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

と表されることを証明せよ．

図[illegible]

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \vec{a}$，[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{EA}} = \vec{c}$ とおく．立方体の1[illegible]あ[illegible]注意して，[illegible] $\vec{c}$ および x を用いて表[illegible]た[illegible]$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2$ を，そ[illegible]の式[illegible]さらに，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ は，x によらない[illegible]の値[illegible]こと[illegible]

(3) 上の([illegible]用して[illegible]の面積 $f(x)$ を求めよ．

(4) 0 [illegible] 2の範[illegible] $f(x)$ [illegible]値と最[illegible]求めよ．また，そのときの x の[illegible]答えよ．

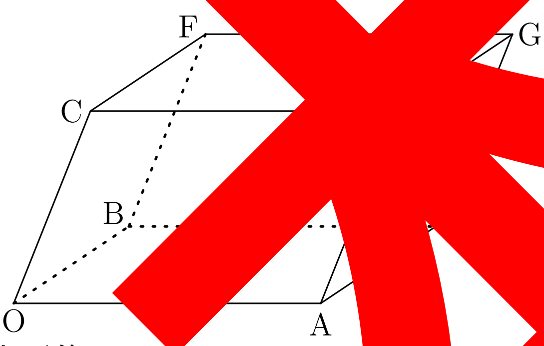
標準 15.65 平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を 2 : 3 に内分する点を N，辺 DG を 1 : 2 に内分する点を L とする．また，辺 OC を $k : 1-k$ $(0 < k < 1)$ に内分する点を K とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(熊大 [理]2011) $\boxed{2}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

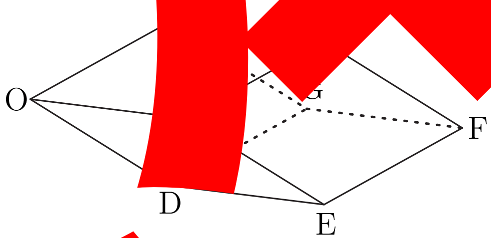
(2) 3 点 M，N，K の定める平面上に点 L があるとき，k の値[illegible]よ．

(3) 3 点 M，N，K の定める平面が辺 GF と[illegible]点をもつよう[illegible]値の範囲を求めよ．



標準 15.66 右図[illegible]平行六面体において，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$[illegible]，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とし，△ACD[illegible]点を H とする．さ[illegible]面体[illegible]1 辺の長さ 1[illegible]面体[illegible]と[illegible]のと[illegible]の各問[illegible]よ．

(宮[illegible]20[illegible])



[illegible]の重[illegible]H に[illegible]ことを示し[illegible]の線分 OH と HF の比 OH : HF [illegible]求めよ[illegible]

(2) [illegible]の値[illegible]よ．

(3) △[illegible]面積[illegible]よ．

応用 15.67 1 辺の長さ $\sqrt{2}a$ の正方形の折り紙がある．正方形 ABCD の中心を点 O とし，AO 上に点 E をとり，EO $= b$ とする．図 1 の斜線部分を取り去り，OB，OE に沿って折り，OC と OD を貼り合わせ，図 2 のように三角錐 O-BCE を作って平面に置いた．O より三角形 BCE に下ろした垂線と三角形 BCE との交点を H とするとき，次の問いに答えよ． (長大 [医]2008) 7

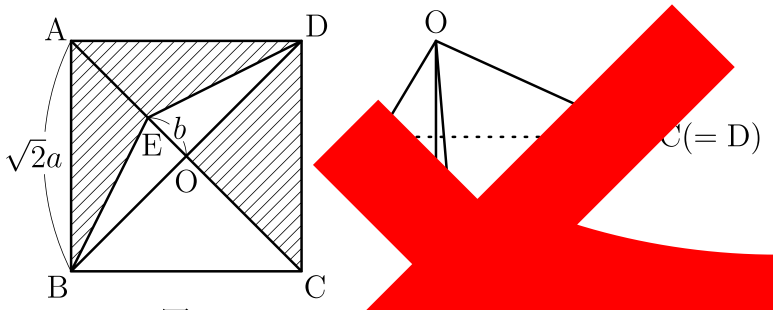


図 1

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を用いて表[illegible]

(2) 三角形 BCE の外心を点 P と[illegible]P $= \dfrac{a}{4}$ のと[illegible]H の長[illegible]て表せ．

15.4.3 直[illegible]・球面

基本 15[illegible]点 A([illegible]C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$) を頂点する[illegible]体 ABCD について，ベクトル[illegible]$\vec{c}$，$\vec{d}$ [illegible]各問いに答えよ． (鹿児島大学 2007) 4

(1) △ABC[illegible]心 G の[illegible]$\vec{g}$ と，△BCD の重心 H の位置ベクトル $\vec{h}$ を求めよ．

(2) [illegible]，G を[illegible]直線 l[illegible]程式を求めよ[illegible]A，H を通る直線 l_2 の方程式を求めよ．

(3) [illegible]線 l_1，[illegible]点を[illegible]とを示[illegible]の交点の位置ベクトルを求めよ．

基本 15.6[illegible]とする半径[illegible]球面 S 上に 3 点 A，B，C があり，

$$\overrightarrow{\mathrm{O}[illegible]} = 4, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 5, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$$

をみたしている．三角形[illegible]の重心を G とし，直線 OG と球面 S の交点のうち G から遠い方を P とする． (大分大学 2014) 2

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ の値[illegible]めなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表しなさい．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を求めなさい．

標準 15.70 空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(0,\ 2,\ 3),\ \mathrm{B}(1,\ 0,\ 3),\ \mathrm{C}(1,\ 2,\ 0)$$

を考える．このとき，以下の問いに答えよ．　(九大 [理]2011) $\boxed{4}$

(1) 4 点 O，A，B，C を通る球面の中心 D の座標を求めよ．
(2) 3 点 A，B，C を通る平面に点 D から垂線を引き，交点を F [illegible]る．線分 DF の長さを求めよ．
(3) 四面体 ABCD の体積を求めよ．

応用 15.71 座標空間内の三角柱

$$0 \leqq x \leqq 1,\quad 0 \leqq y \leqq 1,\ [illegible]$$

を考え，その xy 平面内の面を S，xz 平面[illegible]点 A$(a,\ b,\ 0)$ を S 内に，点 B$(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また[illegible]$,\ 1)$ [illegible]点 A[illegible]原点 O とは異なるとする．　[illegible]04) $\boxed{4}$

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{O}[illegible]}$ [illegible]よび $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクト[illegible]め，[illegible]クトルとベクトル[illegible]積の絶対値を求めよ．
(2) 四面[illegible]を求めよ．ただし，点 O，[illegible]は同一平面[illegible]ない[illegible]
(3) [illegible]が S [illegible]点 B [illegible]を動くとする．こ[illegible]の，四面体 OABC の体積[illegible]最大[illegible]よび[illegible]る点 A，B の位置をすべて求めよ．

[illegible]用 1[illegible] [illegible]間ベ[illegible] $\vec{a}$，$\vec{b}$ [illegible]いて次[illegible]に答えよ．ただし，h と k は実[illegible]　(九大 [文]2006) $\boxed{3}$

(1) [illegible]と垂直[illegible]べての[illegible]に対して

$$|x[illegible]h\vec{a}+\vec{b}\,|$$

が成り立[illegible]と[illegible]．ただし，$\vec{0}$ はすべてのベクトルと垂直であるとする．
(2) $h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$ [illegible]ずれとも垂直であるとき，すべての実数 x，y に対して

$$|\,x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}\,| \geqq |\,h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}\,|$$

が成り立つこと[illegible]せ．
(3) $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 4,-2)$，$\vec{c}=(-3,-6,\ 6)$ とするとき，$|\,x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}\,|$ の最小値を与える実数 x，y と，そのときの最小値を求めよ．

応用 15.73 原点をOとし，空間内に3点A$(4,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 2,\ 0)$，C$(2,\ 1,\ 2)$をとる．線分BCを$t:(1-t)$ $(0<t<1)$に内分する点をPとおく．このとき，以下の問い に答えよ． (熊大 [医]2010) $\boxed{1}$

(1) △OAPの面積を最小にするtの値を求めよ．

(2) Cを通り，3点O，A，Pを通る平面に垂直な直線とxy平面との交点をDとする．Dが△OABの内部にあるとき，tの範囲を求めよ．

15.5 問題研究

15.5.1 ベクトル積 (外積)

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と [illegible] $\vec{a}\times\vec{b}$ で表す．

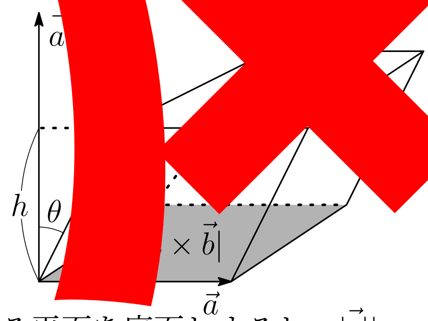
$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b} \text{[illegible]} \boldsymbol{-a_1b_3,\ a_1b} \text{[illegible]} \boldsymbol{)}$$

であるから，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．[illegible] その大 [illegible] ついて

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1 \text{[illegible]} b_1)^2$$
$$=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+ \text{[illegible]}$$
$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ [illegible] 行四 [illegible] しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ [illegible] と



$$(\vec{a}\times\vec{b}) \text{[illegible]} |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

絶対値をと [illegible]

$$\text{[illegible]} \times\vec{b})\cdot\vec{c} \text{[illegible]} \theta|$$

[illegible] $\vec{c}$ の張 [illegible] 六面 [illegible] $\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，[illegible] の高さ [illegible] るか [illegible] の平行 [illegible] 体の体積 [illegible]

$$\text{[illegible]} = |(\boldsymbol{\vec{a}}\times\boldsymbol{\vec{b}}) \text{[illegible]}$$

O [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{O}}$ [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ [illegible]

四面体 [illegible] の体積 [illegible] $\boldsymbol{V}$ [illegible] |

また，対称性 [illegible] $)\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．

例えば，138 ページの [illegible]（大分大学 2006）の四面体 ABCD の体積 V は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{[illegible]} =(2,\ 1,\ 1)\times(-2,\ 2,\ -4)=(-6,\ 6,\ 6)$$
$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{A}} \text{[illegible]} =(-6,\ 6,\ 6)\cdot(1,\ 2,\ -4)=-18$$
$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\frac{1}{6}\times18=3$$

注意 ベクトル積 (外積) は，センター試験などでは利用できるが，高校数学の範囲外であるから，筆記試験では $\vec{a}\times\vec{b}$ などの痕跡を残さないようにする．

第 16 章　数列（数学B）

16.1　等差数列・等比数列

□□ **16.1** 次の数列の一般項を求めよ．(琉球大学 2012) 5

$$1,\ 5,\ 11,\ 19,\ 29,\ \text{[illegible]}$$

基本 16.2 次の問いに答えよ．([illegible]岡教育大学 [illegible]) [illegible]

(1) 第 1 項から第 n 項までの和 S_n が [illegible] an^2 [illegible]で表[illegible]数列[illegible]一般項を求めよ．ただし，a，b [illegible]する．

(2) (1) における[illegible]列 $\{a_n\}$ は等差数[illegible]であることを[illegible] その[illegible]よ．

基本 16.3 次[illegible]答えよ．([illegible]島大[illegible]) 11

(1) a[illegible]する．[illegible]つの有限数列

$$\text{[illegible]}\ b \quad \text{および} \quad b,\ c,\ \text{[illegible]}$$

は[illegible]等比数[illegible]り，

$$a,\ b,\ c\ \text{[illegible]}$$

[illegible]等差数[illegible]する．[illegible] a，b，c の[illegible]めよ．

(2) [illegible]た a [illegible]数列[illegible]$_2 = a$ の等比数列とし，数列 $\{b_n\}$ は[illegible]を満[illegible]その階差数[illegible]等しいとする．このとき，数列 $\{b_n\}$ の一般[illegible]

(3) 初項を p と[illegible]る数[illegible]において，その階差数列が元の数列と等しいとする．このとき，この数[illegible]般項 p_n を求めよ．

基本 16.4 等差数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = \frac{1}{6}, \qquad \sum_{k=11}^{40} a_k = 250$$

を満たすとする．このとき，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2015) $\boxed{7}$

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $a_n \leqq 10$ となる n の最大値 N を求めよ．

(3) (2) で求めた N に対して，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k$ [illegible]

基本 16.5 等比数列 3，6，12，$\cdots$ を $\{a_n\}$ とし [illegible]
までの和を T_n とする．　[illegible]

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい．

(2) T_n を求めなさい．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$ を求[illegible]さい．

基本 16.[illegible]数列 [illegible] $\cdots$ を $\{a_n\}$，等比数列 [illegible]，8，$\cdots$ を $\{b_n\}$ とする．
次の問[illegible]えよ．　(大分大学 2008) $\boxed{1}$

[illegible]列 $\{a$[illegible]項か[illegible]での和を求めよ．

[illegible] 数列[illegible]の初項[illegible] n 項[illegible]和が 300 [illegible]超える最小の n を求めよ．

[illegible] $\{a_n\}$ と[illegible] $\{b_n\}$ と[illegible]に含まれる[illegible]に取り出してできる数列 $\{c_n\}$
[illegible]般項[illegible]よ．

基本 [illegible] $\{a_n\}$ [illegible]項 a_1 [illegible]差数列で，数列 $\{b_n\}$ は初項 b_1 か
ら第 n 項[illegible] $^{+1} - 2$ で[illegible]る．このとき，次の問に答えよ．

(1) b_n を n [illegible]　(宮崎大学 2004) $\boxed{12}$

(2) $c_n = b_n - a_n$ とお[illegible] $\geqq 5$ のとき，$c_{n+1} > c_n$ となることを示せ．

(3) $a_n = b_n$ となる n [illegible]すべて求めよ．

基本 16.8 数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 2$ で，第 3 項 $a_3 = -\dfrac{1}{2}$ である．$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，数列 $\{S_n\}$ は等比数列となった．このとき次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2004) $\boxed{5}$

(1) S_n を n の式で表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ．

基本 16.9 △OAB において，OA $= a$，OB [illegible] b，∠AOB = [illegible]．ただし，$a \geqq b$ および $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．点 B から辺 [illegible] ろした [illegible] を $\mathrm{A_1}$ とする．また点 $\mathrm{A_1}$ を通って辺 AB に平行な直線と，辺 O[illegible] とする．次に点 $\mathrm{B_1}$ から辺 $\mathrm{OA_1}$ に下ろした垂線の足を $\mathrm{A_2}$ とし，点 $\mathrm{A_2}$ を [illegible] 平行な直線と，辺 $\mathrm{OB_1}$ との交点を $\mathrm{B_2}$ とする．以下，この操作を [illegible]

$$\triangle \mathrm{OA_1B_1},\ \triangle \mathrm{OA}\text{[illegible]},$$

をとる．このとき，次の問いに答え [illegible] 2) $\boxed{8}$

(1) $\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ は [illegible] △OAB に相似であることを示せ [illegible]

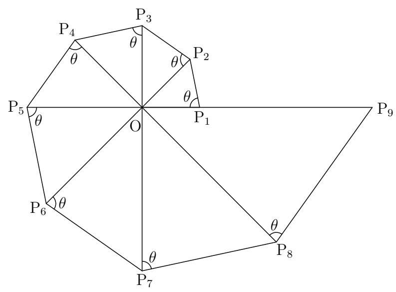
(2) $\dfrac{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{n-1}\text{[illegible]}}$ [illegible] θ の式で表せ．

(3) △ [illegible] の面 [illegible] する．$a = 2$，$b = 1$，[illegible] のとき，

$$\text{[illegible]}\ S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

を [illegible] で表せ [illegible]

[illegible] 10 右 [illegible] の [illegible] つの三 [illegible] OP [illegible] 2, 3, [illegible] あ [illegible] し，[illegible] であり [illegible] つい [illegible] $_n\mathrm{P}_{n+1}$ = [illegible] $2)$，$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}$ [illegible] のとき，次 [illegible] 問に答えよ．　(宮崎大学 2005) $\boxed{1}$



(1) 辺 $\mathrm{OP_2}$ の長さを θ [illegible] て表せ．

(2) 辺 $\mathrm{OP_9}$ の長さを [illegible] て表せ．

(3) 辺 $\mathrm{OP_9}$ の長さ [illegible] あるとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．

標準 16.11　座標平面上に原点 O(0, 0) と点 A(3, 0) がある．自然数 n に対して，点 $\mathrm{B}_n(0,\ n)$ をとり，$\triangle \mathrm{AB}_n\mathrm{O}$ の境界を除いた内部に含まれる格子点の個数を a_n とする．ただし，x 座標と y 座標がともに整数の点を格子点という．このとき，次の各問に答えよ．
(宮崎大学 2010) 3

(1) a_1, a_2, a_3 の値を求めよ．

(2) 自然数 k に対して，$n = 3k$ とする．このとき，$\triangle \mathrm{AB}_n\mathrm{O}$ の境[illegible]を除いた内部に含まれる格子点のうち，x 座標が 1 であるものの個数を [illegible]いて表せ．

(3) 自然数 k に対して，a_{3k} を，k を用いて[illegible]せ．

(4) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする．自然[illegible]対し[illegible]を，m を用いて表せ．

標準 16.12　自然数 n について，a_n を $\sqrt{n}$ 以下[illegible]のものとするとき，次の各問に答えよ．

(1) a_1, a_2, a_3, a_4 の値を求めよ．

(2) 自然数 m について，$S = a_1 + $[illegible]$a_{m^2}$ [illegible]を[illegible]表せ．

16.2　群数[illegible]

基本 16.1[illegible]以下のように群に区切り，[illegible]群[illegible]2^{n-1} 個の[illegible]ある．ただし[illegible]自然数[illegible]

[illegible] | 12 [illegible] | 24 27 30 33 36 [illegible] 45 | 48 ⋯

[illegible]とき[illegible]問いに[illegible]よ．
(福岡教育大学 2002) 6

(1) [illegible]群の最[illegible]を求[illegible]

(2) [illegible]群[illegible]の項を[illegible]表せ．

(3) [illegible]項の総[illegible]めよ．

基本 16.1[illegible]項に m 個[illegible]だ数列

$$\cdots\ 4,\ 4,\ 4,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ \cdots$$

を $\{a_n\}$ とする．
(大分大学 2011) 5

(1) 正の偶数 $2t$ が数[illegible]の第何項に初めて現れるかを自然数 t を用いて表しなさい．

(2) a_{100} を求めなさい．

(3) a_1 から a_{100} までの和を求めなさい．

基本 16.15 a を定数とする．$a_n = -2n + a$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を次のような群に分け，第 k 群には k 個の項が入るようにする．

$$\underset{\text{第 1 群}}{a_1} \;\Big|\; \underset{\text{第 2 群}}{a_2,\ a_3} \;\Big|\; \underset{\text{第 3 群}}{a_4,\ a_5,\ a_6} \;\Big|\; \underset{\text{第 4 群}}{a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10}} \;\Big|\; \cdots$$

第 k 群に含まれるすべての項の和を S_k とするとき，次の問いに答[illegible]よ．

(1) S_k を求めよ． ([illegible]大学 2014) $\boxed{3}$

(2) $a = 212$ のとき，S_k が最大となる群に[illegible]まれる項の[illegible]求めよ．

(3) $a = 92$ のとき，$|S_k| = |S_{k+1}|$ を満た[illegible]

基本 16.16 次の数列について，各問いに答えよ[illegible]

$$\overbrace{\frac{1}{1}}^{\text{第 1 群}},\ \overbrace{\frac{1}{2},\ \frac{2}{1}}^{\text{第 2 群}},\ \overbrace{\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}}^{\text{第 3 群}},\ \cdots [illegible] \cdots$$

([illegible]2009) $\boxed{4}$

(1) $\dfrac{n}{m}$ は第何[illegible]何項か．ただし，m と n は正[illegible]と[illegible]

(2) $\dfrac{n}{m}$ [illegible]先[illegible]数えると何番目の項か．

(3) [illegible]先頭[illegible]番目の項 a を求め[illegible]

[illegible]値が[illegible]項の[illegible]に現れるのは，数列の先頭から数えて何番目か．

[illegible]準 16[illegible]列

$$1 [illegible] \frac{3}{2^2},\ 1 [illegible] \frac{7}{2^3},\ \cdots,\ [illegible],\ \cdots,\ \frac{2^n - 1}{2^n}$$

にお[illegible]母が 2^n[illegible]項を[illegible]よぶことにする．次に答えよ．

(1) 第 n [illegible]和を求めよ[illegible] (九工大 [工]2003) $\boxed{1}$

(2) 分子に初[illegible] 51 [illegible]るのは第何項目か．

(3) 初項から (2) で求[illegible]までの和を求めよ．

(4) 第 2003 項を求め[illegible]

標準 16.18 初項1，公差3の等差数列 $\{a_n\}$ と，一般項が $b_n = \left[\dfrac{2n+2}{3}\right]$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ がある．ここで，実数 x に対して $[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す．たとえば，$b_1 = \left[\dfrac{4}{3}\right] = 1$，$b_2 = [\,2\,] = 2$，$b_3 = \left[\dfrac{8}{3}\right] = 2$ である．数列 $\{a_n\}$ を次のように，b_1 個，b_2 個，b_3 個，$\cdots$ の群に分け，第 k 群には b_k 個の数が入るようにする．

$$\mid\ a_1\ \mid\ a_2,\ a_3\ \mid\ a_4,\ a_5\ \mid\ a_6,\ \cdots$$

第1群　第2群　第[illegible]群　$\cdots$

第 k 群の最初の数を c_k とする．次に答え[illegible]　(九工大[工]2015) 2

(1) 自然数 m に対して，b_{3m-2}，b_{3m-1}，b_{3m} を[illegible]項式で表せ．また，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 $3m$ 項までの和 [illegible]

(2) 自然数 m に対して，c_{3m-2}，c_{3m-1}，[illegible]多項式で表せ．また，数列 $\{c_k\}$ の初項から第 $3m$ 項まで[illegible]$_{3m}$ を[illegible]

(3) 1000 は第何群の何番目の数か[illegible]

(4) $x \geqq 1$ のとき[illegible]$\sqrt{x^2+1} < x + \dfrac{1}{2}$ であることを用[illegible]次の[illegible]り立つことを示せ[illegible] m は自然数とする．

$$\sum_{k=1}^{3m}(\sqrt{c_k} - k) < \text{[illegible]}$$

[illegible].3 [illegible]い[illegible]数列

[illegible] $n \geqq$ [illegible]るよ[illegible]然数 n に対し[illegible]

$$1\text{[illegible]}\cdots+\text{[illegible]}) = (1\text{[illegible]}+\cdots+n)(2+3+\cdots+n)$$

が成り立[illegible]　(福岡教育大学 2010) 1

基本 16.20 $a_n = \log_{10}$ [illegible] $+3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}\Big)$ について，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2003) 6

(1) a_n を求めよ．

(2) $a_1 + a_2 + \cdots +$ [illegible]求めよ．

基本 16.21 連続する自然数について，以下のような関係がある．

$$
\begin{aligned}
1+2&=3 && \cdots ① \\
4+5+6&=7+8 && \cdots ② \\
9+10+11+12&=13+14+15 && \cdots ③ \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

n 番目の式を ⓝ とし，その左辺の和を $S(n)$ で表す．このとき，[illegible]各問に答えよ．

(1) 4 番目の式 ④ と $S(4)$ を求めよ．　([illegible]崎大学 2001) 10

(2) n 番目の式 ⓝ を予想し，その等式が[illegible]つこと[illegible]

基本 16.22 下記の一連の等式が成立している[illegible]は自然数)．これについて，次の各問いに答えよ．

(1) ① の等式を証明せよ．

(2) 最下行の右辺の空欄に入る式を推[illegible]最下行[illegible]式[illegible]立つこ[illegible]明せよ．なお，推測する式の中で[illegible]辺と同様[illegible]を用[illegible]

$$\sum_{k=1} k = \frac{1}{2}n(n+ \text{[illegible]}$$

$$\sum^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+ \text{[illegible]} 2) \quad \cdots ①$$

$$\sum^{n} \text{[illegible]} +2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\vdots$$

$$\sum^{n} \text{[illegible]} +1)(\text{[illegible]} m) = \boxed{\qquad\qquad}$$

基本 16.[illegible] [illegible]数[illegible]て，$f(n)$ [illegible]$(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)$ とおく．

(1) k を自然数とする[illegible]等式　(大分大学 2005) 5

$$f(k) \text{[illegible]} -1) = a(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)$$

が成立するよう[illegible]数 a の値を定めなさい．

(2) m が自然数であるとき，$\sum_{k=1}^{m}(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)$ を $f(m)$ を用いて表しなさい．

基本 16.24 n を自然数とするとき，和

$$S_n = n + (n-1)x + (n-2)x^2 + \cdots x^{n-1}$$

について，次の問いに答えなさい．　(大分大学 2007) 2

(1) $x \neq 1$ のとき，$(1-x)S_n$ を求めなさい．

(2) $x = \dfrac{1}{2}$ のとき，$S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ を求めなさい．

標準 16.25 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項ま[illegible]和 S_n が

$$S_n = n^4 + 6n^3 + \text{[illegible]}$$

で表されるとする．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = 4n(n+$ [illegible] 示しなさい．

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によ[illegible]る数列[illegible]の初[illegible]の和 T_n を n の式で表しなさい．

標準 16.26 [illegible]対して

$$g(a) = \sum_{k=1}^{a} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \text{[illegible]}}$$

[illegible]以下[illegible]に答[illegible]　(熊大 [文]2016) 3

(1) 和[illegible]を求め[illegible]

(2) [illegible]が整数[illegible]る自然数[illegible]小さい順に並[illegible]数列を

$$\text{[illegible]}\ a_3\ \text{[illegible]}, \cdots$$

とす[illegible]求めよ．

(3) (2) の数[illegible]$\}$ [illegible]て，a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を 4 で割った余りは 0 か 3 であることを示せ．

(4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と[illegible] N に対して和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n}$ を求めよ．

標準 16.27 以下の問いに答えよ.　(佐賀大学 2010) $\boxed{8}$

(1) 等式 $2\sin k\theta \sin\dfrac{\theta}{2} = \cos\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\theta$ を示せ.

(2) n が自然数のとき，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$ を求めよ.

標準 16.28 次の各問いに答えよ.　([illegible]大学 2005) $\boxed{4}$

(1) m を正の整数とする．実数の集合 $\{y \,|$ [illegible] $\leqq y < m^2\}$ [illegible]る整数の個数を求めよ.

(2) 座標平面において，x 座標と y 座標が整[illegible]格子点という．n を正の整数とするとき，集合 A，B を

$$A = \{(x,\ y) \,|\, 1 \leqq x \text{[illegible]} x^2\}$$
$$B = \{(x,\ y) \,|\, 1 \text{[illegible]} 1 \leqq \text{[illegible]}\}$$

によって定める．集合 A，B [illegible]る格子点の[illegible]をそれ[illegible].

(3) 正の整数 n [illegible]して，集合 C を

$$\text{[illegible]}(x,\ y) \,|\, 1 \leqq x \leqq n^2,\ 1 \leqq \text{[illegible]}\, y \text{[illegible]} x\}$$

[illegible]て定め[illegible]属する格子点の個[illegible]めよ.

[illegible]6.29 [illegible]問い[illegible]えだけでなく，必ず証明も記せ.

(1) 和 [illegible] $+ \cdots$ [illegible] n の[illegible]で表せ.　(九大 [文]2010) $\boxed{4}$

[illegible] $+ 2^2$ [illegible] $+ n^2$ を[illegible]項式で表せ.

(3) [illegible] $\cdots +$ [illegible]式で表せ.

標準 16.[illegible] $\cdots + n$ (n[illegible]$\cdot$) で定められる数列 $\{a_n\}$ において，a_n が 6 の倍[illegible]初から順に b_1，b_2，$b_3, \cdots$ とする．次に答えよ.

(1) b_1，b_2，b_3，b_4 を求[illegible]　(九工大 [工]2004) $\boxed{1}$

(2) すべての自然数 n [illegible]て，$a_{n+12} - a_n$ は 6 の倍数であることを示せ.

(3) b_{4k-3}，b_{4k-2}，b_{4k}[illegible] $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ を k を用いて表せ.

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4n} b_k$ を求めよ.

標準 16.31 2 以上の自然数 n と自然数 a について，和

$$1{\cdot}(1+a)+2{\cdot}(2+a)+\cdots+(n-1)\{(n-1)+a\}$$

を S とおく．このとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2016) 8

(1) 6 と n が互いに素であるとき，すべての自然数 a に対して，S は n で割り切れることを示せ．

(2) n を 6 で割った余りが 2 であるとき，すべての奇数 a に対[illegible] S は n で割り切れることを示せ．

(3) n を 6 で割った余りが 3 であるとき，[illegible]の自然数[illegible]して，S を n で割った余りを，n を用いて表せ．ただし，[illegible]上 $n-1$ 以下の範囲で求めよ．

標準 16.32 n を正の整数，r を 1 でない実数[illegible]

$$S=\sum_{k=1}^{n} r^{k-1},\quad T=[illegible],\quad [illegible]$$

とする．このとき，次の各問いに[illegible] ([illegible]2009) 9

(1) S を $\sum$ を[illegible]ずに，r，n で表せ．

(2) T を $\sum$ [illegible] S，r，n で表せ．ただし，[illegible]ること[illegible]

(3) U [illegible]用い[illegible] T，r，n で表せ．ただ[illegible] S と [illegible] を必ず用いること．

応用 [illegible] 実数[illegible]は x 以下の最大の[illegible]を表すものとする．

[illegible] $\sum_{k=[illegible]}\Big[\ [illegible]$ 238 [illegible] 9[illegible]数 n の値を求めよ． (分大 [医]2009) 8

[illegible]整数[illegible]して $\left[\ [illegible]+\dfrac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{[illegible]}\ [illegible]\right]$ の値を求めよ．

応用 [illegible]の和[illegible]の問[illegible]なさい． (分大 [医]2014) 8

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}$ [illegible]示しなさい．

(2) 多項式 $(k+1)^3-$ [illegible]展開を利用して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を示しなさい．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{1}{4}n^2(n$ [illegible]を示しなさい．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めなさい．結果は因数分解すること．

応用 16.35 n を2以上の自然数とする．数列 $\{S_k\}$ が $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$ で与えられている．　(九大 [理]2003) 9

(1) 不等式　$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$　が成り立つことを示せ．

(2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して，$\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とおく．数列 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - \ \text{[illegible]}\ b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ \text{[illegible]}$$

が成り立つことを示せ．また，$\sum_{k=1}^{n-1} kS_k =$ [illegible] となる n の整式 $p(n)$ を求めよ．

(3) 不等式

$$\left| \frac{2}{n(n\ \text{[illegible]}} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \text{l[illegible]} \right| \ \text{[illegible]}\ \frac{1}{2}$$

が成り立つ[illegible]を示せ．

発展 16.36 [illegible]対し，a の正の約数全体の[illegible]す．た[illegible] 1 および a 自[illegible]数と[illegible]えば $f(1) = 1$ であり，[illegible]5 ならば 15 の正の約数は 1，3[illegible]なの[illegible]となる．次の問い[illegible]よ．　(九大 [理]2002) 2

(1) [illegible]が正[illegible] b と[illegible]用いて $a = 2^m b$ と表されるとする．このとき $f(a)$[illegible]$^{+1}$ − [illegible]が成[illegible]ことを示[illegible]

(2) [illegible]以上の[illegible] p と正[illegible] q を用いて[illegible]と表されるとする．このとき[illegible]$) \geqq ($[illegible]q が成[illegible]を示せ．ま[illegible]号が成り立つのは，$q = 1$ か[illegible]である[illegible]を示せ[illegible]

(3) 正[illegible] a，b[illegible]る整数 m[illegible]数 r，s を用いて $a = 2^m r$，$b = 2^n s$ のよ[illegible]きる．こ[illegible]，b が

$$\begin{cases} f(a) = 2b \\ f(b) = 2a \end{cases}$$

をみたせば，r，[illegible]数であり，かつ $r = 2^{n+1} - 1$，$s = 2^{m+1} - 1$ となることを示せ．

16.4 漸化式

16.4.1 2 項間の漸化式

基本 16.37 $a_1 = \frac{1}{15}$，$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 4(2n+3)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2004) $\boxed{2}$

(1) $b_n = \frac{1}{a_n}$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．ま[illegible] $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 1 項から第 n 項までの[illegible]求め[illegible]

基本 16.38 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + \text{[illegible]}$$

で定義されるとき，次の問いに答えよ[illegible]佐賀大学[illegible] $\boxed{5}$

(1) すべての自然数 n に対して [illegible] $= 2(a_n +$ [illegible]成り[illegible] b を求めよ．

(2) 一般項 a[illegible]よ．

(3) $\frac{a_{2n}}{a_n} >$ [illegible]す最小の自然数 n を求め[illegible] $\log_{10} 2 =$ [illegible]10 とす[illegible]

基本 16.39 次[illegible]によ[illegible]される数列 $\{a_n\}$ が[illegible]る．

[illegible] $\frac{\text{[illegible]}}{4}$，[illegible] $\frac{\text{[illegible]}}{3}a_n +$ [illegible] $= 1, 2, 3, \cdots)$

[illegible] $= a_n$ [illegible] $(n =$ [illegible]$\cdot)$ とおく．次[illegible]いに答えよ．

(1) [illegible]めよ (福岡教育大学 2008) $\boxed{7}$

(2) 数[illegible]の[illegible]求めよ．

(3) 数列 $\{$[illegible]求めよ．

基本 16.40 数列 $\{a_n\}$ が[illegible] $= 5$，$a_n = 3a_{n-1} - 2^{n-1}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ で定められているとき，次の各問に答[illegible] (宮崎大学 2009) $\boxed{8}$

(1) a_{n+1} を，a_{n-1} と[illegible]いて表せ．

(2) n が奇数のとき[illegible]は 5 で割り切れることを示せ．

(3) $b_n = a_n - 2^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，b_n を n を用いて表せ．

(4) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を求めよ．

標準 16.41 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} + a_n = 3n - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

次の問いに答えよ． (熊大 [文]2006) 2

(1) $b_n = a_n - \dfrac{6n-7}{4}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求め[illegible]

(2) 一般項 a_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} a_n$ の値を求めよ．

基本 16.42 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 0,\ a_n = \frac{(n-1)(n - [illegible]}{2} [illegible] \sum_{k=1} a [illegible] \cdot)$$

によって定められている．以下の問[illegible]答えよ． [illegible]2008) 4

(1) $b_n = n$ [illegible] $2, 3, \cdots)$ とおくとき，$b_n =$ [illegible] $= 2,$ [illegible]) を示[illegible]

(2[illegible] $\{b_n\}$ [illegible]数列[illegible]ことを示せ．

[illegible] a_n を求[illegible]

[illegible] $\sum^{n}$ [illegible]を求め[illegible]

基[illegible]3 の数[illegible] $b_n =$ [illegible] a_n とするとき，数列 $\{b_n\}$ は初項 6，[illegible]等比[illegible]ある． (大分大学 2016) 5

(1) $c_n = $ [illegible] 3 [illegible] $c_{n+1} - c_n$ を[illegible]なさい．

(2) a_n を n の[illegible]で表し[illegible]い．

(3) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする[illegible] S_n を n の式で表しなさい．

標準 16.44 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 0$，$a_{n+1} - a_n = \dfrac{n\{1 + (-1)^{n+1}\}}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ により定まるものとして，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2015) $\boxed{3}$

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 をそれぞれ求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$b_n = a_{2n-1}, \quad c_n = a_{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots [illegible]$$

で定めるとき，一般項 b_n，c_n を求め[illegible]

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} (-1)^n a_n$ を求めよ．

標準 16.45 数列 $\{a_n\}$ を次の条件で定義する[illegible]

$$a_1 = 100, \quad a_{n+1} = 1.05 [illegible]$$

(1) 一般項 a_n を求めなさい．

(2) $a_n \leqq 0$ とな[illegible]最小の n を求めな[illegible]い．
ただし，[illegible] 0.3010，$\log_{10} 3 = 0.4771$，lo[illegible]

標準 16.[illegible] $\{a_n$[illegible]式

$$[illegible] a_k = 3^n - a_n - [illegible]$$

[illegible]満た[illegible]るとす[illegible]のと[illegible]の各問[illegible]よ． (鹿児島大学 2008) $\boxed{9}$

[illegible] a_1 [illegible]よ．

(2[illegible]

$$a_{n+1} [illegible] \quad (n \geqq 1)$$

が成り[illegible]せよ．

(3) 一般項 a_n [illegible]求め[illegible]

標準 16.47 $a_1 = \dfrac{1}{2}$，a[illegible]$_n + \dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列を $\{a_n\}$ とする． (大分大学 2005) $\boxed{1}$

(1) a_4 を求めなさい．

(2) 一般項 a_n を求めなさい．

標準 16.48 数列 $\{a_n\}$ は次の 2 つの条件 (ア)，(イ) を満たす.

（ア）$a_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

（イ）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$

このとき次の問いに答えよ. (福岡 大学 2009) $\boxed{2}$

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ.

(2) $\displaystyle {a_{n+1}}^2 = a_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} a_k$ が成り立つこ

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

応用 16.49 数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$\cdots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a}{1} \quad n = 1,$$

をみたしているとる. このとき，以下の問いに答 011) $\boxed{3}$

(1) $a_1 = 1$ 一般項 a_n を求めよ.

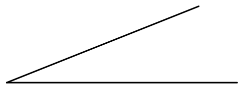
(2) 値を

$= \tan$ するよ

a_n, n $5, \cdots$

みたす 自然 めよ.

応用 16.50 n を正の整数とする．平面を n 本の直線，または 1 回折れ線でいくつかの領域に分けることを考える．ここで直線は両側に無限にのびているものとし，**1 回折れ線**とは，右図のように直線の途中を 1 回折り曲げたものである．次の問いに答えよ．　(九大 [文]2002) $\boxed{5}$



(1 回折れ線)

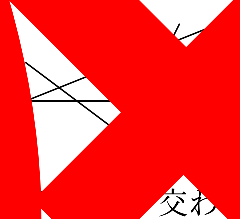
(1) 平面が次の条件 (i)，(ii) をみたす異なる n 本の直線のみで[illegible]割されているとする．

　(i) n が 2 以上ならば，どの 2 本の直[illegible]も交わる．

　(ii) n が 3 以上ならば，どの 3 本の[illegible]わらない．

　分割される平面の領域の個数を L_n で表す[illegible] L_n と L_{n-1} の間の関係式を求めよ．また，L_n $(n \geqq 1)$ を求め[illegible]

(2) 平面が次の条件 (i)，(ii) をみたす異な[illegible]のみで分割されているとする．



　(i) n が 2 以上ならば，ど[illegible] 1 回折れ線[illegible]も異な[illegible] 4 点で交わる．

　(ii) n [illegible]ば，どの 3 本の 1 回折れ線も[illegible]交わ[illegible]点で[illegible]ない (右図を参照せよ)．[illegible]の 1 [illegible]折れ線)

　[illegible]れる平[illegible]数を H_n で表す．H[illegible]めよ．

[illegible] $(n \geqq$ [illegible]めよ．

[illegible] 16[illegible]$_k\}$ を[illegible]の等[illegible]とする[illegible]関数 $y = x^2$ のグラフを C とし，[illegible]をと[illegible]自然数[illegible]し，点 P_k [illegible] P_{k+1} を順次つぎのように定め[illegible]を通[illegible] m_k の[illegible]とし，この直[illegible] C とのもう一つの交点を P_{k+1} と[illegible] C と[illegible]は P_k[illegible]とする．点 P_k の x 座標を a_k とする．

(1) a_{k+1} [illegible]．　(九大 [文]2003) $\boxed{4}$

(2) 数列 $\{a_k\}$ [illegible]一般[illegible] m_1，r，k で表せ．

(3) $a_1 = \dfrac{m_1}{1+r}$ とする[illegible]とき，ある 2 次関数 $y = bx^2$ があって，すべての自然数 k に対し直線 ℓ_k [illegible]の 2 次関数のグラフに接することを示し，b を r で表せ．ただし，$m_1 \neq 0$[illegible]$-1, 0$ とする．

応用 16.52 a と b を正の実数とする．$\triangle$ABC において，$\angle$B と $\angle$C は鋭角とする．点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする．また，$BX_1 = a$，$CX_1 = b$ とする．各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して以下の操作を行う．

> 辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする．また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺[illegible]との交点を Z_n とする．点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き[illegible]との交点を X_{n+1} とする．

線分 Z_nX_{n+1} の長さを l_n とするとき，以下[illegible]答[illegible] (熊大 [医]2015) 3

(1) l_1 を a，b を用いて表せ．

(2) l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ．

(3) $b = 8a$ のとき，$l_n > \dfrac{1}{2}$ となる最小[illegible]n[illegible]要ならば[illegible]169 $< \log_2 9 < 3.17$ を用いてもよい．

16.4.2 3 項[illegible]漸化式

基本 16.5[illegible]

$$a_1 = \text{[illegible]} \quad a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n \text{[illegible]} 1, 2, 3, \cdots)$$

[illegible]られ[illegible]次の[illegible] (宮崎大学 2007) 7

(1) b[illegible]$_{+1} -$[illegible]1, 2,[illegible]とすると[illegible]$_{+1}$ を b_n を用いて表せ．

[illegible]$\{b_n\}$[illegible]項 b[illegible]を用いて表せ．

([illegible]一般項[illegible]，[illegible]いて表[illegible]

基本 16.[illegible]列[illegible]の条件を[illegible]

$$a\text{[illegible]}1, \quad \text{[illegible]}1, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき次の問いに答え[illegible] (福岡教育大学 2010) 7

(1) a_3，a_4，a_5 を求め[illegible]

(2) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} =$[illegible]$_{+1} - \alpha a_n)$ を満たす実数 α，β の組を全て求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

基本 16.55 r を実数とする．$\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}=ra_{n+1}-4a_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定められる数列とする．次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2014) 3

(1) $r=0$ の場合に，以下のそれぞれについて一般項 a_n を n の式で表せ．
 (i) n が奇数のとき．
 (ii) n が偶数のとき．

(2) $r=5$ の場合に，次の (a)，(b) に答え[illegible]
 (a) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$b_n=a_{n+1}-a_n$$
$$c_n=a_{n+1}-4a_n \quad ([illegible]3,\cdots)$$

 で定めるとき，一般項 b_n，[illegible]よ．
 (b) 一般項 a_n を求めよ．

(3) $r=4$ の場[illegible]次の (c)，(d) に答えよ．
 (c) 数列[illegible]

$$d_n=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n} \quad (n=[illegible],\cdots)$$

 [illegible]定め[illegible]d_n を求めよ．
 [illegible]一般[illegible]を求め[illegible]

[illegible]本 16[illegible]列 $\{a$[illegible]して[illegible]式が[illegible]つとする．

$$[illegible],\ a_2 [illegible] -5a_{n+1}+[illegible] \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

以下[illegible]えよ． (熊大 [文]2012) 2

(1) 定数[illegible]$_n+c$ で定[illegible]数列 $\{b_n\}$ を考える．

$$[illegible]_2-5b_{n+1}+6b_n=0 \quad (n=1,2,3\cdots)$$

 を満たす c の値を[illegible]．

(2) a_n を n の式で表[illegible]

基本 16.57 c を実数とし，$a_1 = c$，$a_2 = c^2 - 2$ および

$$a_{n+2} = a_1 a_{n+1} - a_n \quad (n \geqq 1)$$

で数列 $\{a_n\}$ を定義する． (佐賀大学 2011) 6

(1) $n \geqq 1$ のとき $a_{n+4} = a_2 a_{n+2} - a_n$ となることを示せ．

(2) $c = \sqrt{2}$ のとき a_{100} を求めよ．

標準 16.58 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = (5+\sqrt{26})^{n-1} + (5-\sqrt{26})^{n-1}$ [illegible]$,3,\cdots)$ と定義する． [illegible]琉球大学 2004) 1

(1) すべての自然数 n に対して，$a_{n+2} =$ [illegible]ことを示せ．

(2) すべての自然数 n に対して，a_n は自然数[illegible]

(3) 実数 $(5+\sqrt{26})^{99}$ を無限小数で表すと，[illegible]がすべて 0 であることを示せ．-0.1[illegible]明なしで用いてよい．

標準 16.59 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = a_2 = 1$[illegible]a_{n+1}[illegible]n[illegible]て定める．また α を $\alpha = 1 + \dfrac{1}{\alpha}$ を満た[illegible]実数とする[illegible]の各問[illegible] ([illegible]016) 3

(1) 数列 $\{b$[illegible]$\dfrac{a_{n+1}}{}$ で定める．b_{n+1} を b_n を[illegible]

(2) n[illegible]$,\cdots$[illegible]$b_n \geqq 1$ となることを示[illegible]

(3)[illegible]$1,2,3$[illegible]対し[illegible]$-\alpha| \leqq \dfrac{1}{\alpha}|b_n - \alpha$[illegible]ることを示せ．

[illegible]$n =$[illegible]$\cdots$ に[illegible]$|b_n$[illegible]$\dfrac{1}{\alpha^n}$ となることを示せ．

[illegible]赤玉[illegible]置 M[illegible]は，1 分経過[illegible]個の白玉に変化する．白玉は，[illegible]の中で[illegible]分経過[illegible]赤玉と 1 個[illegible]に変化する．時刻 $t = 1$(分) に装置[illegible]1 個入[illegible]過ごと[illegible]M へ赤玉を 1 個追加する．時刻 $t = n$([illegible]する装[illegible]中の赤玉[illegible]それぞれ a_n と b_n $(n = 1, 2, \cdots)$ とする．この[illegible](分) までの[illegible]玉の個数は，$a_1 = 1$，$a_2 = 1$，$a_3 = 3$，$b_1 = 0$，$b_2 =$[illegible]．以下に答えよ． (九工大 [情]2006) 3

(1) a_{n+1} を b_n を用いて[illegible]b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ．

(2) a_{n+2}，a_{n+1}，a_n ([illegible]$2,\cdots)$ が満たす関係式を求めよ．

(3) $c_n = a_{n+1} - 2a_n$[illegible]とき，数列 $\{c_n\}$ の一般項が $c_n = (-1)^n$ となることを示せ．

(4) $d_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とするとき，数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

標準 16.61 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \frac{10}{9},\ a_2 = 2,\quad 100a_{n+2} - 180a_{n+1} + 81a_n = 0\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって与えられている．次に答えよ．　(九工大 [工]2002) 2

(1) $b_n = a_{n+1} - \dfrac{9}{10}a_n$ とおく．数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．

(2) $a_n = \dfrac{9}{10}b_nc_n$ により数列 $\{c_n\}$ を定める．一般項 c_n およ[illegible]求めよ．

(3) a_n が最大になるときの自然数 n を求[illegible]

標準 16.62 袋の中に白色と黄色の 2 枚のカー[illegible]る．袋から無作為に 1 枚取り出してその色を記録し，袋にもどす試行を[illegible]行，つまり，$n-1$ 回目と n 回目にはじめて[illegible]る場合の数を $f(n)$ とおく．ただし $n \geqq 2$ [illegible]

[illegible]工大 [illegible]) 5

(1) $f(2)$，$f(3)$，$f(4)$，$f(5)$ を求め[illegible]

(2) $f(n-2)$，[illegible]1)，$f(n)$ $(n \geqq 4)$ の間の関係式[illegible]たい[illegible]イ),(ウ) に当ては[illegible]求めよ．
1 枚目[illegible]で，さらに $n-1$ 回の試[illegible]結果最後の[illegible]回ではじ[illegible]枚連続[illegible]のカードが取り出され[illegible]の数は $\boxed{\text{(ア)}}$ である．1 [illegible]のカー[illegible]色[illegible]に $n-1$ 回の試行[illegible]った結果最後の 2 回ではじ[illegible]て 2 枚[illegible]して黄[illegible]が取り出される場合の数は $\boxed{\text{(イ)}}$ である．したが[illegible] $f(n$[illegible] $f(n$[illegible](n) $(n$[illegible]) の間に $\boxed{\text{(ウ)}}$ の関係式が成り[illegible]

[illegible]方程[illegible]$-x-$[illegible]2 つの解を α[illegible]し，$a_n = f(n) - \alpha f(n-1)$，[illegible]$\beta f(n$[illegible]のとき[illegible]$_n\}$ は公比 β の等比数列であり，[illegible]は公[illegible]等比数[illegible]示せ．

(4) $f(n)$[illegible]

16.4.3　S_n を含む[illegible]式

□□ **16.63** 第 1 項から[illegible]項までの和 S_n が，$S_n = an^2 + bn + c$ で表される数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を求め[illegible]だし，a，b，c は定数とする．　(福岡教育大学 2001) 1

基本 16.64 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．いま $S_n = n^2 - 25n$ のとき，次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2005) $\boxed{6}$

(1) 初項 a_1 を求めよ．

(2) この数列が等差数列であることを示せ．

(3) $S_n > 396$ となる最小の n を求めよ．

基本 16.65 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする [illegible]

$$a_1 = 1, \quad S_{n-1} - a_n = \text{[illegible]} \quad (n = 2, \text{[illegible]}$$

が成り立つとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2008) $\boxed{9}$

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 の値をそれぞれ求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

基本 16.66 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 [illegible] での和 [illegible] と [illegible] $S_n = 2a_n + n$ が成り立っている．このと [illegible] の各問に答 [illegible] 2006) $\boxed{8}$

(1) $n \geqq 2$ のと [illegible] を a_{n-1} を用いて表せ．

(2) $n \geqq 1$ [illegible] $a_{n+1} - a_n$ とおく．b_n を n [illegible]

(3) a [illegible] 用い [illegible]

基 [illegible] **.67** 数 [illegible] $\}$ の初 [illegible] 項までの和 S_n が $S_n = \dfrac{3}{2}a_n - n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ [illegible] たす [illegible] (大分大学 2012) $\boxed{1}$

[illegible] 求めな [illegible]

[illegible] を求 [illegible] い．

(3) [illegible] を求 [illegible]．

標準 16.6 [illegible] 項 a_1 から第 [illegible] a_n までの和を S_n とする．

$$a_1 = \text{[illegible]} \ a_{n+1} = 4a_n - S_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つとき，次の問 [illegible] 答えなさい． (大分大学 2009) $\boxed{2}$

(1) $n \geqq 1$ のとき，[illegible] a_{n+1} と a_n を用いて表せ．

(2) $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ [illegible] $= 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

標準 16.69 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n + n^2$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2013) $\boxed{4}$

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(2) a_n を n の式で表せ．

標準 16.70 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の初項から第 [illegible] までの和を [illegible] れ

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad [illegible] + b_n$$

とおいたとき

$$s_n = \frac{3n^2+n}{2}, \quad \log_2(t \; [illegible])$$

が成り立つ．次の問いに答えよ．　(福 [illegible] 16) $\boxed{2}$

(1) $\{a_n\}$ の一般 [illegible] を求めよ．

(2) $\{b_n\}$ の [illegible] めよ．

(3) $\sum^{n}$ [illegible] を求め [illegible]

[illegible] .71 [illegible] $n\}$ の [illegible] 項までの和を S_n とする．数列 $\{a_n\}$ が

$$a_2 = [illegible] \; n = ([illegible] (2a_n + 2 [illegible] \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

[illegible] ていい [illegible]，次の [illegible] えよ．　(鹿児島大学 2001) $\boxed{4}$

(1) [illegible] は n [illegible] $2(n +$ [illegible] $1, 2, 3, \cdots)$ をみたすことを証明せ [illegible]

(2) $b_n = \frac{[illegible]}{n}$ ([illegible]) [illegible] られる数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2a_k + 1)$ を n [illegible] 表せ．

16.4.4 分数漸化式

基本 16.72 数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{3a_n+5}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をみたす．

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{a_n+1}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．　(大分大学 2001) 1

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

基本 16.73 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1=1,\quad a_n=\frac{a_{n-[illegible]}}{(4n+3)a_{n[illegible]}}\quad (n=[illegible]\cdots)$$

次の問いに答えよ．　([illegible]教育大学 [illegible])

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおくとき，[illegible]を求[illegible]

(2) (1) の b_n を用いて $c_n=b_{n+1}-b_{[illegible]}$ [illegible]$2,3,$[illegible] 数列[illegible]の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

16.4.5 [illegible]

基本 [illegible] 2つの[illegible]}が初項 $a_1=1$，$b_{[illegible]}$ [illegible]あり，また

$$a[illegible]+2,\quad b_{n+1}=a_n+2b_n$$

[illegible]関係[illegible]してい[illegible]する．[illegible]き次の問[illegible]えよ．　(佐賀大学 2002) 1

(1) [illegible] b_3 を[illegible]よ．

(2) [illegible]と c_n [illegible] b_n [illegible]とき[illegible]一般項を求めよ．

(3) 数[illegible]般項を求[illegible]

(4) 数列 {[illegible] n 項までの和 S_n を求めよ．

標準 16.75 数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ は以下の条件を満たしているものとする．

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 8, \qquad y_1 = -5 \\
x_{n+1} &= 2x_n + y_n + 3n - 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\
y_{n+1} &= 2y_n + x_n - 3n + 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)
\end{aligned}
$$

以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2007) $\boxed{4}$

(1) $z_n = x_n + y_n$，また $w_n = x_n - y_n$ とおく．数列 $\{z_n\}$ およ [illegible] の一般項を求めよ．

(2) xy 平面上の点 $(x_n,\ y_n)$ と直線 $y = x$ [illegible] 離が [illegible] るような n の値をすべて求めよ．

標準 16.76 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，[illegible]

$$
\begin{cases}
2a_{2k+1} - 3a_{2k} + a_{2 \cdots} & [illegible] \\
2a_{2k+2} - 3a_{2k+1} \cdots & [illegible]\ 1
\end{cases}
$$

をみたしている．次に答えよ．　([illegible] 2005) $\boxed{1}$

(1) a_3，a_4，[illegible] それぞれ求めよ．

(2) 数列 [illegible] b_n [illegible] $- a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で [illegible] する [illegible] b_{n+2} を b_n [illegible] 用いて表 [illegible]

(3) [illegible] 列 $\{b_n\}$ [illegible] 項 b [illegible] よ．

(4) 数列 [illegible] 一般 [illegible]

[illegible] 数列 [illegible]，a_1 [illegible] 1，$a_{n+2} =$ [illegible] a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める．[illegible] 列 $\{b$ [illegible] $n = c$ [illegible] $= 1, 2, 3, \cdots$ [illegible] め，数列 $\{c_n\}$ を $c_n =$ [illegible] $(n = 1$ [illegible] る．次 [illegible] よ．　(九工大 [工]2007) $\boxed{2}$

(1) b_1，[illegible] b_6 の値を求 [illegible]

(2) b_{n+3} $(n$ [illegible] $3,$ [illegible] b_n を用いて表せ．

(3) b_{100} の値を求めよ．

(4) c_1，c_2，c_3，c_4，c_5 [illegible] の値を求めよ．

(5) c_{2007} の値を求めよ．

応用 16.78 数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ の間に次の漸化式が成立する．

$$x_{n+1}=2x_n,\ y_{n+1}=3x_n+y_n,\ z_{n+1}=x_n-2y_n+3z_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ． (分大 [医]2013) $\boxed{8}$

(1) 初項 $(x_1,\ y_1)=(2,\ 0)$ に対して，一般項 x_n と y_n を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が定数 c，d，r，s に対して，関係 $a_{n+1}=ra_n+$ [illegible] d で定義されるとき，$f_n=ps^n+q$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が次式を満たす [illegible] 数 p と q を求めよ．ただし，$r\neq s$，$r\neq 0,1$，$s\neq 0$ [illegible] る．

$$a_{n+1}+f_{n+1}=r(a_n+ \text{[illegible]} 3,\cdots)$$

(3) 初項 $(x_1,\ y_1,\ z_1)=(2,\ 0,\ 0)$ に対して，[illegible]

16.4.6 確率漸化式

標準 16.79 平面の上に正四面体が [illegible] 平面と接し [illegible] る面の [illegible] を任意に選び，これを軸 [illegible] て正四面体をたおす．この操作 [illegible] 続け [illegible] き，最初に平面と接し [illegible] 再び平面と接する確率を p_n [illegible] $\boxed{4}$

(1) p_1 [illegible] $_3$ を求 [illegible]

(2) [illegible] を用 [illegible]

[illegible] 6.80 [illegible] の中に [illegible] がいて，この容器の中では増殖しない．この [illegible] 物に関 [illegible] 次の [illegible] 満た [illegible] がある [illegible] が知られている．

この [illegible] 個体 [illegible] に生存してい [illegible] 他の個体が何匹いるかに [illegible] なく [illegible] は確率 p で [illegible] ている $(k=1,2,3,\cdots)$．

k 日目 [illegible] て [illegible] 数を X_k [illegible] n とするとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2009) $\boxed{7}$

(1) $X_2=0$ と [illegible] る確率 [illegible] めよ．

(2) $X_3=0$ となる確率 [illegible] めよ．

(3) $X_k>0$ であるが [illegible] $=0$ となる確率を求めよ．

標準 16.81 正三角形ABCがあり，点Xは正三角形ABCの頂点を移動する点である．サイコロを投げて5の目が出たとき点 X は時計回りに隣の頂点に移動し，6の目が出たとき点Xは反時計回りに隣の頂点に移動し，それ以外の目が出たとき点Xは移動しない．はじめに点Xは頂点Aにあるとし，サイコロを n 回投げたとき点Xが頂点Aにある確率を P_n とする．　(大分大学 2014) 6

(1) P_1，P_2，P_3 を求めなさい．

(2) P_{n+1} を P_n を用いて表しなさい．

(3) P_n を求めなさい．

標準 16.82 1辺の長さが1の正三角形の頂[illegible]P，Q，Rとする．これらの頂点のいずれかにある動点が，次のように[illegible]を1回の試行と[illegible]する．さいころを1回投げて，1の目が出れば[illegible]目が出れば移動せず，それ以外の場合は時[illegible]移動する．動点は最初に点Pにあり，n 回の試行後に動点が[illegible]Q，[illegible]をそれぞ[illegible] q_n，r_n $(n=1,2,3,\cdots)$ とする．以下の問[illegible]えよ．　[illegible]) 4

(1) p_1，p_2 をそれぞれ求めよ．

(2) q_2，r_2 を[illegible]求め，さらに p_3 を求めよ．

(3) p_{n+1} [illegible]せ．

(4) [illegible]p_n を用[illegible]

([illegible]) [illegible]を n を[illegible]表せ．

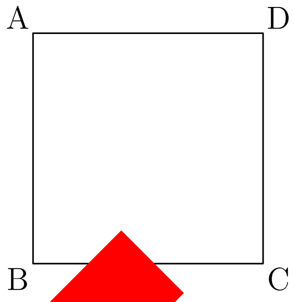
[illegible] 16.8[illegible]形の[illegible]頂点[illegible]回りに順[illegible]A，B，C，Dとする．頂点Aから出発[illegible]点上[illegible]回り[illegible]を進める[illegible]を行う．硬貨を1回投げるごと[illegible]出たと[illegible]は頂点[illegible]け点Pを進め[illegible]が出たときには頂点2つ分だけ[illegible]進[illegible]のとす[illegible]点Pが頂[illegible]とまった時点でゲームは終わるもの[illegible]硬貨を[illegible]投げ終[illegible]頂点Aに到達する確率を p_n とするとき，[illegible]　(佐賀大学 2015) 4

(1) p_2，p_3 を[illegible]よ．

(2) p_4，p_5 を求めよ．

(3) p_{12} を求めよ．

標準 16.84 図のような一辺の長さが1の正方形ABCDがある．この正方形の辺上の点Qを，コインを投げて表が出れば反時計まわりに1，裏が出れば時計まわりに1動かす試行を考える．点Qが頂点Aから出発してこの試行が繰り返し行われるものとする．このとき，次の問いに答えよ． (九大 [文]2007) 3



(1) 表の出る確率が $\frac{1}{2}$ のコインを投げて，上記の試行を2[illegible]すとき，各頂点A，B，C，Dに点Qがある確率をそ[illegible]求めよ．[illegible]上記の試行を3回および4回繰り返すとき，各頂点A，B[illegible]ある確率をそれぞれ求めよ．

(2) 裏の出る確率 p が $\frac{1}{2}$ より大きいコインを[illegible]き，頂点A，B，C，DのうちQ点が[illegible]最大となる[illegible]示せ．同様に3回繰り返すとき，点[illegible]点D[illegible]最大と[illegible]とを示せ．

標準 16.85 Aと[illegible]は，赤球2個と白球1個が入った[illegible]それぞ[illegible]持っている．次のような[illegible]考える．

> A[illegible]，[illegible]自分の持っている袋の中[illegible]無作為に球を1つ選[illegible]を見て[illegible]袋に戻す．

[illegible]を n[illegible]回繰[illegible]き，n回の試行の中でAとBが取り出した球の[illegible]一致[illegible]が少[illegible]も[illegible]るが続けては起こらない確率を P_n とする．[illegible]のと[illegible]の各問[illegible]よ． (宮崎大学 2016) 4

(1) [illegible]回の試[illegible]Aと[illegible]した球の色[illegible]する確率を求めよ．

(2) [illegible]求めよ．

(3) n [illegible]き[illegible]

$$P_n = \frac{4}{9}P_{n-1} + \frac{[illegible]}{81}P_{n-2} + \frac{5\cdot 4^{n-1}}{9^n}$$

が成り立つことを[illegible]

応用 16.86 k は2以上の自然数とする.「1」と書かれたカードが1枚,「2」と書かれたカードが2枚，$\cdots$,「k」と書かれたカードが k 枚ある．そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M，奇数が書かれたカードの枚数を N で表す．この $(M+N)$ 枚のカードをよくきって1枚を取り出し，そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す．記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする．次の問いに答えよ． (九大 [理]2009) $\boxed{2}$

(1) p_1 と p_2 を M，N で表せ．

(2) p_{n+1} を p_n，M，N で表せ．

(3) $\dfrac{M-N}{M+N}$ を k で表せ．

(4) p_n を n と k で表せ．

応用 16.87 はじめに，袋Aには赤玉が1個[illegible]Bに[illegible]ている．袋Aから無作為に玉を1個取り[illegible]続き袋B[illegible]ら無作為に玉を1個取り出して袋Aに戻す．[illegible]の操[illegible]回[illegible]す．[illegible]n 回 $(n \geqq 1)$ の試行の後，袋Aに赤玉が[illegible]入ってい[illegible]率を p[illegible]いる確率を q_n，1個も入[illegible]ていない確率を r_n とする．以下[illegible]よ．([illegible]2003) $\boxed{5}$

(1) p_1，q_1，[illegible]求めよ．

(2) p_{n+}[illegible]，r_n[illegible]q_n，r_n を用いて表せ．

(3) [illegible]であ[illegible]

[illegible]q_n，[illegible]求めよ．

[illegible]16[illegible]くつか[illegible]が入っ[illegible]と箱B[illegible]るとき，次の試行Tを考える．

[illegible]箱A[illegible]個の[illegible]出して箱Bに[illegible]．その後，

[illegible]ら2個[illegible]て箱A[illegible]る．

最初に箱[illegible]玉[illegible]箱Bに白[illegible]ているとき，以下の問いに答えよ．
(九大 [文]2012) $\boxed{4}$

(1) 試行Tを1回行っ[illegible]に，箱Aに黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n=1,2,3)$ を求めて既約分数[illegible]．

(2) 試行Tを2回行っ[illegible]に，箱Aに黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n=1,2,3)$ を求めて既約分[illegible]せ．

(3) 試行Tを3回行[illegible]ときに，箱Aの中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ．

応用 16.89 点 P は次の (i), (ii), (iii) の規則に従って数直線上を動く．

(i) 時刻 0 で，P は整数座標点 0 から 10 のいずれかの位置 i $(1 \leqq i \leqq 10)$ にある．

(ii) 時刻 t $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ に位置 i $(1 \leqq i \leqq 9)$ にある P は，$t+1$ には確率 p $\left(0 < p < \dfrac{1}{2}\right)$ で位置 $i+1$ に，確率 $1-p$ で位置 $i-1$ に移動する．

(iii) 時刻 t に位置 0 または 10 にある P は，$t+1$ にもその位置[illegible]る．

以下の問いに答えよ． ([illegible]大 [情]2014) 4

(1) P が時刻 0 で位置 2 にあるとき，時[illegible]置 0 [illegible]率を求めよ．

(2) P が時刻 0 で位置 1 にあるとき，時刻 3 [illegible]確率を求めよ．

時刻 0 で位置 i にある P が，いずれかの時刻[illegible]
ただし，$q_0 = 1$，$q_{10} = 0$ である．$1 \leqq i$ [illegible]，q_{i-1} [illegible]
$pq_{i+1} + (1-p)q_{i-1}$ の関係が成り立つ．

(3) $q_{i+1} - q_i = \boxed{\text{(a)}}(q_i - q_{i-1})$ [illegible]空欄の [illegible]入る[illegible]式を求めよ．

(4) q_i を q_1 と[illegible]いて表せ．

(5) q_1 を求[illegible]用いて表せ．

16[illegible]その[illegible]漸化[illegible]

[illegible]16.90[illegible] $\{a_n\}$ [illegible]

$$[illegible] a_{n+2}{}^3 \quad a_n > 0 \quad [illegible] 2, 3, \cdots)$$

[illegible]てい[illegible]$= 1$[illegible]き，a_{2k-}[illegible]然数) を，k を用いて表せ．
(宮大 [医]2015) 5

標準 16.[illegible]

$$a_1 = [illegible]{}_{+1} = a_n{}^2 - a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で与える．$a_1, \ldots, a_n$ の[illegible]$_n$ とおく． (九大 [文]2001) 3

(1) 各 n について a_n [illegible]あることを示せ．

(2) 各 n について a[illegible]$P_n + 1$ であることを示せ．

(3) $S_n = \dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{}{a_n}$ とおく．S_1，S_2，S_3，S_4 を求めよ．

(4) 各 n について S_n を P_n で表せ．

応用 16.92 放物線 $C : y = x^2 - 1$ と $a_1 > 1$ を満たす実数 a_1 を考える．このとき，次の問いに答えよ． (九大 [文]2008) 4

(1) C 上の点 $(a_1,\ {a_1}^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_2 とするとき，a_2 を a_1 を用いて表せ．

(2) (1) で求めた a_2 に対して，C 上の点 $(a_2,\ {a_2}^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_3 とする．この操作を繰り返してできる数列を a[illegible]a_2，$\cdots$，$a_n \cdots$ とする．このとき，すべての n に対して $a_n > 1$ を示せ．

(3) $b_n = \dfrac{1}{2}(a_n - 1)$ とおくとき，すべての[illegible]対して，b[illegible]を示せ．

(4) $a_1 = 2$ のとき，$b_n < 10^{-12}$ となる n の[illegible]求め[illegible]だし，必要があれば，$\log_{10} 2$ を 0.3010 として計算してよい．

16.5　数学的帰納法

□□ **16.93** 次の (1)，(2) に答えよ[illegible]) 3

(1) 自然数 n に対して自然数 a_n を[illegible]ように定義[illegible]

$$a_n = (2n-1)\cdot(2n-3) \text{[illegible]} 1$$

こ[illegible]す[illegible]然数 k に対して $(2k)! =$ [illegible]が[illegible]り立つ．こ[illegible]ことを[illegible]よ．

([illegible]ての[illegible]n に[illegible]$n!$ は $2^{(2^n-1)}$ で割[illegible]れる．このことを数学的帰納法で[illegible]せよ．

□[illegible]数列[illegible]，a_1[illegible]，$a_{n+1} =$ [illegible]$- a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定め[illegible]るとき[illegible] (1)[illegible]えよ． (宮崎大学 2013) 2

(1)[illegible]θ を[illegible]表[illegible]

(2) a_n[illegible]n を[illegible]どのよう[illegible]か予想し，それが正しいことを数学的帰[illegible]せよ．

□□ **16.95** n は[illegible]以上[illegible]数とする．数学的帰納法によって，次の不等式を証明せよ． (福岡教育大学 2015) 1

$$2^n > \frac{1}{2}n^2 + n$$

□□ **16.96** 自然数 n について $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ． (福岡教育大学 2013) 5

基本 16.97 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 6$，$a_{n+1} = a_n + 16n + 8$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ により，定まるものとして，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2002) $\boxed{4}$

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) 和 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$ を求め[illegible]

基本 16.98 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = \frac{3}{2}$，$a_{n+1} = 3 -$ [illegible] $\cdots)$ により定まるものとして，次の各問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n について，$1 < a_n$ [illegible] す．

(2) $x_n = \dfrac{1}{2 - a_n}$ とおくとき，x_{n+1} [illegible] 間に成 [illegible] 求め [illegible]

(3) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ [illegible] 般項を求めよ．

基本 16.9[illegible] $> 0)$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n}$ [illegible] で定義さ[illegible]た数列 $\{a_n\}$ [illegible]，次[illegible]よ． (宮崎大学 2003) $\boxed{12}$

[illegible] a_3，[illegible]めよ

[illegible] 一般[illegible]を推定[illegible]，p，[illegible]いて表せ[illegible]さらに，その推定が正しいことを数[illegible]帰納法[illegible]いて証[illegible]．

基[illegible]**100** [illegible] $\{a_n\}$ [illegible]

$$\cdots, \quad a_{n+1} \cdots \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められて[illegible]き[illegible]各問に答えよ． (宮崎大学 2012) $\boxed{10}$

(1) a_2，a_3，a_4 の値を[illegible]．

(2) 一般項 a_n を予想[illegible]れが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

基本 16.101 初項 $a_1 = 0$ と漸化式

$$a_{n+1} = (1-r)r^{n-1} + r^2 a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって与えられる数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．ただし，$r \neq 0$，$r \neq 1$ とする．（宮崎大学 2015）10

(1) a_2，a_3，a_4 を，r を用いてそれぞれ表せ．

(2) 第 n 項 a_n を推測して，それが正しいことを，数学的帰　　　いて証明せよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を計算し，r，n を用いて表せ

基本 16.102 条件 $a_1 = 0$，$na_{n+1} = (n+1)a_n +$
を $\{a_n\}$ とし，条件 $b_1 = 1$，$nb_{n+1} = (n+1)$
れる数列を $\{b_n\}$ とする．（大分大学 2　02）1

(1) a_n，b_n を表す n の式を推定し　　　が正しい　を　　　　　て証明しなさい．

(2) $\{a_n\}$ と $\{b$　　共通に含まれる数を小さい順に　　でき　　　　とする
とき，　　　　の式を求め，簡潔にその理由

(3) $\{c_n$　　項か　　までの和を求めなさい．

標準　　**3** 次　　　に答　　　　　　　　　　　　　　　（長崎大学 2012）2

m を　　の自然　　　　の不等式が成り立つことを，数学的帰納法によ　　明せ

$$m! > 2^m >$$

　　数　　する　　　よ．

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$$

(3) (2) で求め　S_n に　　，$S_n < \dfrac{3}{4}$ が成り立つことを示せ．

(4) (2) で求めた S_n に　　，$S_n > \dfrac{2}{3}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

標準 16.104 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ に対し，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．すべての自然数 n に対して，$\dfrac{a_n + 3}{2} = \sqrt{3S_n}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ． (佐賀大学 2012) 5

(2) a_{n+1} を S_n を用いて表せ．

(3) n が自然数であるとき，数学的帰納法を用いて，$S_n = 3n$[illegible]立つことを証明せよ．

標準 16.105 関係式

$$a_1 = \beta, \quad a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n)$$ [illegible]

で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の各[illegible]$\beta < \dfrac{1}{2}$ とする．

(1) $n \geqq 1$ に対して，不等式 $a_n <$[illegible]り立つこと[illegible]せ． ([illegible]05) 13

(2) $n \geqq 1$ に対[illegible]$b_n = \log_2\left(\dfrac{1}{2} - a_n\right)$ とおく．[illegible]き，

$$b_{n+1} = 2b_n + 1$$ [illegible]

[illegible]立つ[illegible]

[illegible]n を n[illegible]用い[illegible]

標準 1[illegible] 1 次関[illegible]$(x) =$[illegible]$_n$ $(n =$[illegible]$\cdots)$ は以下の 2 つの条件を満た[illegible]

(i) [illegible]

(ii) f_{n+1}[illegible]$= \int_1^x 6t f_n$[illegible]$+ x$ で割った余りに等しい．

以下の問いに答[illegible]よ． (熊大 [文]2014) 4

(1) $n \geqq 1$ のとき，a_{n+}[illegible]$_{+1}$ を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，$|a$[illegible]$_n|$ は偶数であることを示せ．

(3) $n \geqq 2$ のとき，[illegible]$|b_n|$ は 3 の倍数ではないことを示せ．

標準 16.107 n を 2 以上の整数とする．n 個の実数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n が与えられたとき，

$$P_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2, \quad Q_n = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2$$

とおく．次に，$1 \leqq i < j \leqq n$ を満たすすべての番号 i，j に対する $a_i a_j$ の和を R_n とする．たとえば，$R_2 = a_1 a_2$，$R_3 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3$ である．同様に，$1 \leqq i < j \leqq n$ を満たすすべての番号 i，j に対する $(a_i - a_j)^2$ の和を S_n とする．たとえば，$S_2 = (a_1 - a_2)^2$，$S_3 = (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2$ である．次の問いに答[illegible]

(1) P_4 を Q_4 と R_4 を使って表せ． [illegible]崎大学 2013) 3

(2) すべての $n \geqq 2$ に対して $S_n = (n -$ [illegible] R [illegible]れることを，数学的帰納法で証明せよ．

(3) Q_4 を P_4 と S_4 を使って表せ．

(4) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ のとき，Q_4 の最[illegible] a_1，[illegible]をそれぞれ求めよ．

標準 16.108 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n$ [illegible] $= b_1 =$ [illegible]び，[illegible]

$$a_{n+1} = 2a_n b_n$$
$$b_{n+1} = 2{a_n}^2 + {b_n}^2$$

をみた[illegible]とする[illegible]次の問いに答えよ． (九大 [文]2006) 2

[illegible] $\geqq 3$ の[illegible] a_n は[illegible]れるが，b_n は[illegible]り切れないことを示せ．

[illegible] $n \geqq$ [illegible]き，[illegible]は[illegible]であること[illegible]を示せ．

[illegible]9 自[illegible]に対し[illegible] $= (\cos 2^n)(\cos$ [illegible]$)\cdots(\cos 2)(\cos 1)$ とおく．た[illegible]の大[illegible]表す[illegible]を用いる．[illegible]き，次の問いに答えよ．

(1) [illegible] を[illegible] (九大 [文]2008) 1

(2) $a_n =$ [illegible]

(3) $a_n < \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ．

応用 16.110 次の問いに答えよ．　　(九大 [文]2002) $\boxed{4}$

(1) n を正の整数とする．どんな角度 θ に対しても

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

が成り立つことを示せ．また，ある n 次式 $p_n(x)$ を用いて $\cos n\theta$ は

$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

と表されることを示せ．

(2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数な[illegible]ることを示せ．

(3) 整式 $p_n(x)$ の定数項を求めよ．また，$p_n(x$[illegible]を求めよ．

16.6　問題研究

16.6.1　3 項間の漸化式

数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_{n+2} - pa_{n+1} + qa_n = 0$ の特性方程式

$$x^2 - px + q = 0$$

の解を α，β とすると，与えられた漸化式は　$a_{n+2} - (\alpha +$ [illegible] $\alpha\beta a_n = 0$

これから　$a_{n+2} - \beta a_{n+1} =$ [illegible] $- \beta a_n)$; $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} =$ [illegible]

ゆえに　$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}($ [illegible] ; $a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}$ [illegible]

i) $\alpha \neq \beta$ のとき，$(*)$ の第 1 式から第 [illegible] く [illegible]

$a_n = \dfrac{(a_2}{}$ [illegible] $\dfrac{{}^{-1} - (a_2 \ \text{[illegible]})\beta^n}{\alpha - \beta}$ [illegible]

ii) $\alpha = \beta$ の [illegible] ら　$\dfrac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \dfrac{a_n}{\alpha^n} = \dfrac{a_2}{\alpha^2} -$ [illegible]

数 [illegible] $\alpha^n\}$ は [illegible] α [illegible] $\dfrac{a_2}{\alpha^2} - \dfrac{a_1}{\alpha}$ の等差数列 [illegible] るから

[illegible] α^n [illegible] $+ (n-1)\left(\dfrac{a_2}{\alpha^2} - \dfrac{a_1}{\alpha}\right)$

[illegible] α [illegible] ${}^{-1}\{$ [illegible] $- 1)\left(\dfrac{a_2}{\alpha} - a\right.$ [illegible]

i), [illegible]，定数 [illegible] を用い [illegible]

α [illegible] とき [illegible] $A\alpha^{n-1} +$ [illegible] $= \beta$ のとき　$a_n = (Cn + D)\alpha^{n-1}$

例えば，[illegible] 5(鹿児島大学 [illegible] 4) について，(2) は特性方程式 $x^2 - 5x + 4 = 0$ の解が 1, [illegible] であ [illegible] 一般項を

$$a_n = A + B \cdot 4^{n-1}$$

とおける．$a_1 = 1$，a_2 [illegible] あるから

$$A + B = 1, \quad A + 4B = 3 \quad \text{これを解いて} \quad A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{3}$$

よって　$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 4^{n-1} = \frac{1}{3}(1 + 2^{2n-1})$$

(3) は特性方程式 $x^2-4x+4=0$ が重解 2 をもつから，一般項を

$$a_n=(Cn+D)\cdot 2^{n-1}$$

とおける．$a_1=1$，$a_2=3$ であるから

$$C+D=1,\quad (2C+D)\cdot 2=3\quad \text{これを解いて}\quad C=D=\frac{1}{2}$$

よって $$a_n=\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{n-1}=(n+1)\cdot 2^{n-\text{[illegible]}}$$

(1) は特性方程式 $x^2+4=0$ の解が $\pm 2i$ [illegible]ら，[illegible]を

$$a_n=C(2i)^n+D\text{[illegible]}$$

とおくと，$a_1=1$，$a_2=3$ であるから

$$2i(C-D)=1,\quad -4(C+D)=\text{[illegible]}に\quad C\text{[illegible]}=-\text{[illegible]}$$

したがって (ド・[illegible]アブルの定理 [数[illegible]III] を用いる)

$$\text{[illegible]}^n+D(-i)^n\}$$

$$=\text{[illegible]}\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\Big)^n+D\Big(\text{c[illegible]}\,i\sin\frac{\text{[illegible]}}{2}\Big)^n\Big\}$$

$$\text{[illegible]}\Big\{(C\text{[illegible]}\frac{n}{2}\pi+(C-D)i\text{[illegible]}\Big\}$$

$$=2^n\text{[illegible]}\cos\text{[illegible]}\sin\frac{n}{2}\pi\Big)$$

$$\text{[illegible]}\Big(-\text{[illegible]}+2\sin\frac{n}{2}\pi\Big)$$

i) [illegible]とき，[illegible]$=0$，[illegible]より

$$a_n=2^{n-2}\cdot 2\text{[illegible]}^{\frac{n-1}{2}}=(-4)^{\frac{n-1}{2}}$$

ii) n が偶数のとき，co[illegible]$=(-1)^{\frac{n}{2}}$，$\sin\frac{n}{2}\pi=0$ より

$$\text{[illegible]}=2^{n-2}\cdot(-3)\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}=3\cdot(-4)^{\frac{n-2}{2}}$$

16.6.2　分数漸化式

p，q，$r \neq 0$，s を定数とする漸化式

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \cdots (*)$$

の一般項について，以下に述べる．
$ps - qr = 0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps - qr \neq 0$ とす[illegible]
$(*)$ の特性方程式

$$x = \frac{px+q}{rx+s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + \text{[illegible]} \quad \cdots (**)$$

の解を α，β とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + \text{[illegible]}} \text{[illegible]} \quad \cdots (***)$$

$$a_{n+1} - \beta = \frac{(ps-qr)(a_n - \text{[illegible]}}{(r\beta + s)(ra_n \text{[illegible]}}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のと[illegible]の 2 式から

$$\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha} = \frac{r\alpha+s}{r\beta+s} \cdot \text{[illegible]}$$

[illegible]がっ[illegible] $\beta \left(\frac{r\alpha+s}{r\beta+s}\right)^{n-1}$

上[illegible]，a_n [illegible]る．

[illegible]β の[illegible]$(*)$ の[illegible]について

$$\text{[illegible]}(s - \text{[illegible]}rq = 0 \quad \text{[illegible]})^2 = 4(ps-qr) \quad \cdots ①$$

また，[illegible]であるから

$$\alpha = \text{[illegible]} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p+s) \quad \cdots ②$$

①，② により，$(*$[illegible]

$$\text{[illegible]} - \alpha = \frac{(ps-qr)(a_n-\alpha)}{(r\alpha+s)\{r(a_n-\alpha)+r\alpha+s\}}$$
$$= \frac{\frac{1}{4}(p+s)^2(a_n-\alpha)}{\frac{1}{2}(p+s)\{r(a_n-\alpha)+\frac{1}{2}(p+s)\}}$$

逆数をとると $$\frac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{1}{a_n-\alpha}+\frac{2r}{p+s}$$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項が $\dfrac{1}{a_1-\alpha}$，公差が $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる．

例えば，179 ページの 16.72(大分大学 2 [illegible] 化式

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=\ [illegible]$$

の特性方程式 $x=\dfrac{2x}{3x+5}$ の解が 0, −1 で [illegible]

$$a_{n+}\ [illegible]\ \frac{[illegible](a_n+1)}{3a_n+5}$$

したがって [illegible] $=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{a_n}{a_n+1}$ ゆえに $\dfrac{a_n}{a_n+}$ [illegible]

よっ [illegible] $\dfrac{3\cdot 2^{n-1}}{4\cdot 5^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}}$

[illegible]，18 [illegible] ジの 1 [illegible] 003) の漸化式

[illegible] $(p>$ [illegible] $a_{n+1}=\dfrac{[illegible]}{2\ [illegible]}$ $(n=1,2,\cdots)$

の特 [illegible] $=\dfrac{1}{2\ [illegible]}$ な [illegible] は重解 1 をもつから

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$$

ゆえに $\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{1}{\frac{q}{p}-\ [illegible]}$ [illegible] $-1)$ よって $a_n=\dfrac{(n-1)p-(n-2)q}{np-(n-1)q}$

16.6.3　ギャンブラーの破産問題

ランダムウォークの応用として，ギャンブラーの破産問題と呼ばれているものを考える．あるギャンブラーの最初の所持金を 2 ドルとする．1 回賭けを行うごとに，勝てば所持金が 1 ドル増え，負ければ 1 ドル失うものとする．所持金がなくなればギャンブラーは破産しそこで賭けは終わり，また，所持金が 5 ドルになれば賭けは終了する．1 回の賭けで勝つ確率を $\frac{2}{3}$，負ける確率を $\frac{1}{3}$ としたとき，[illegible]のギャンブラーが破産して終了する確率はいくらとなるかを考えてみよう．こ[illegible]を数直線上で考えると，数直線上の位置 2 からスタートし，0 と 5 の間で [illegible] 移動する確率が $\frac{2}{3}$，$-$ 方向へ移動する確率が $\frac{1}{3}$ のランダム[illegible]クとな[illegible]ら 5 の間で $+$ 方向へ移動する確率が $\frac{2}{3}$，$-$ 方向へ移動する確率が[illegible]ークとなる．0 または 5 に達したときに賭けは終了する．

さて，ランダムウォークでは，状態の変化は[illegible]る．すなわち，ある状態にある場合，それ[illegible]や履歴[illegible]に定まる．したがって，ギャンブラーの[illegible]率は[illegible]きの所持[illegible]の額で決まる．これを $r(i)$ $(i = 0, 1, \cdots, 5)$ [illegible]る．$r(i$[illegible]持[illegible]あ[illegible]，破産して終了する確率である．　　　　(　[illegible]年後期)

(1) $r(2)$ を $r(1)$ [illegible]で表せ．

(2) このよ[illegible]状態について表し，それら[illegible]の所持[illegible]ドルのギ[illegible]ラー[illegible]終了する確率を求め[illegible]

解　(1)　$\boldsymbol{r(}$[illegible] $\boldsymbol{\frac{\ }{3}r(3)}$

(2)　[illegible]と同様[illegible] $r(1) =$ [illegible] $+\frac{1}{3}r(0$[illegible]$) = 1$

$r($[illegible]とおい[illegible]代入すると[illegible] $= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

[illegible]の結果[illegible]さら[illegible]

[illegible] $\frac{1}{2}r(1) =$ [illegible] $\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}$

$r(4) = \frac{3}{2}r$[illegible]$\frac{1}{2}r(2) = \frac{3}{2}\left(\frac{7}{6}x - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2}x = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$

$r(5) = \frac{3}{\ }$[illegible]$\frac{1}{2}r(3) = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{31}{24}x - \frac{7}{24}$

$r(5) = 0$ であるから　$x = \frac{7}{31}$　よって　$\boldsymbol{r(2) = \frac{7}{31}}$

補足 確率漸化式 $r(i)=\dfrac{2}{3}r(i+1)+\dfrac{1}{3}r(i-1)$ の特性方程式 $2x^2-3x+1=0$ の解が $\dfrac{1}{2}$，1 から，定数 A，B を用いて

$$r(i)=A\left(\frac{1}{2}\right)^i+B$$

とおくと，$r(0)=1$，$r(5)=1$ であるから

$$A+B=1,\quad \frac{A}{32}+B=0 \quad \text{[illegible]を解いて [illegible]}\quad B=-\frac{1}{31}$$

よって　$r(i)=\dfrac{[illegible]}{31}$ [illegible] $(i=0,1,\cdots,5)$

次の問題も (185 ページの 16.89)，破産問[illegible]

点 P は次の (i)，(ii)，(iii) の規則に従っ[illegible]上[illegible]　(九工大[illegible]2014)

(i) 時刻 0 で，P は整数座標点 0 [illegible]のいずれか[illegible]置 i [illegible]ある．

(ii) 時刻 t $(t=$ [illegible]$1,2,\ldots)$ に位置 i $(1\leqq i\leqq 9$[illegible]る P[illegible]は確率 p $\Bigl(0<$[illegible]位置 $i+1$ に，確率 $1-p$ で位[illegible]す

(iii) 時[illegible]位置 [illegible]にある P は，$t+1$ に[illegible]位置に留まる．

(i) [illegible]の規則[illegible]とき[illegible]に q_i を求めさせ[illegible]題であるが，次の確率漸化[illegible]り立[illegible]先の[illegible])．

$$q_0=[illegible]=0 \quad [illegible]pq_{i+1}+(1[illegible]{}_{1} \qquad (i=1,2,\cdots,9)$$

[illegible]ルコ[illegible]ように[illegible]確率過程を[illegible]

$$(\times)\ [illegible]-p)q_{i+1}$$

とす[illegible]より，$i=1$ [illegible]上式は成立しない．これ以外で成立したとして[illegible]確率[illegible]式は，連立方程式であるから，間違いである．

確率漸化式 $(*)$ の特性方[illegible]$x^2-x+1-p=0$ の解は

$$1,\ [illegible]\qquad \left(0<p<\frac{1}{2}\ \text{より}\ 1\neq\frac{1-p}{p}\right)$$

$\alpha=\dfrac{1-p}{p}$ とおくと，実数 C，D を用いて

$$q_i=C+D\alpha^i$$

とおける．$q_0 = 1$，$q_{10} = 0$ であるから

$$C + D = 1,\quad C + D\alpha^{10} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad C = \frac{\alpha^{10}}{\alpha^{10}-1},\quad D = -\frac{1}{\alpha^{10}-1}$$

よって
$$q_i = \frac{\alpha^{10} - \alpha^i}{\alpha^{10}-1} = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{i}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - 1} \qquad (i = 0, 1, \cdots, 10)$$

本題を次のように書き直すこともできる．

破産問題 (Ruin problem)

P は所持金 i 万円で $(1 \leqq i \leqq 9)$，1 回の[illegible]万円だけ増え，負ければ 1 万円だけ減るゲームに参加する．P は[illegible]円 (目標金額) になるか，所持金がなくなったときにゲームは終了[illegible]をを p $(0 < p < \frac{1}{2})$ とし，P の所持金がなく[illegible]

本題の結果から，$\alpha = \dfrac{1-p}{p}$ とおくと[illegible]

$$q_i = \frac{\alpha^{10} - \alpha[illegible]}{\alpha^{10} - 1} \qquad (i = 0, 1, \cdot[illegible])$$

また，この[illegible]金額を E_i とすると

$$[illegible] 10^5(1 - q_i) = \frac{10^5(\alpha^i [illegible]}{\alpha^{10} [illegible]}$$

[illegible]，P の[illegible]が 5 万[illegible]破産する確率 q_5 およびゲームの期待金額 E_5 は[illegible]の 1 円[illegible]は切り[illegible]

[illegible]	q_5	[illegible]
[illegible]	0.88364	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.42	[illegible]	[illegible]605
0.43	[illegible]	19635
0.44	0.76956	23044
0.45	0.73172	26828
0.46	0.69035	30965
0.47	0.64583	35417
0.48	0.59874	40126
0.49	0.54985	45015

このような不利なゲーム $(0 < p < \frac{1}{2})$ に時間をかけて参加するより，1 回勝負で 5 万円をかけることができるならば，1 回勝負の期待金額の方が大きい．

16.6.4 連続する自然数のべき乗和

165 ページの 16.29(九大 [文]2010) や 166 ページの 16.34(大分大学 2014) で出題されたように，連続する自然数のべき乗和の公式を証明させる問題が出題されている．

一般には，次の定理が成り立つ．

ファウルハーバー (Faulhaber) の定理

0 以上の整数 i に対して，$S_i(n) = \sum_{k=1}^{n} k^i$ とすると，次式が [illegible]．

$$S_i(n) = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^{i} (-1) \text{[illegible]}$$

ただし　$B_j = \sum_{p=0}^{j} \frac{(-1)^p\, p!}{p+1} \left\{ {j \atop p} \right\} = \sum^{j} \text{[illegible]} \Big) q^j$

なお，B_j はベルヌーイ数，$\left\{ {j \atop p} \right\}$ [illegible] 2 種スタ [illegible] グ数 [illegible] 係数．

0^0 は定義され [illegible] いが，ここでは便宜的に，$0^0 =$ [illegible] て計算 [illegible]

証明 第 2 種 [illegible] 1 を Coupon collector's p [illegible] の [illegible] 係式2 か [illegible]，独自 [illegible] を与 [illegible] **証終**

[illegible]，ベ [illegible] 数を計 [illegible]

$$B_0 \text{[illegible]} B_1 = \text{[illegible]} {}_2 = \text{[illegible]} 0,\ B \text{[illegible]} \frac{1}{\text{[illegible]}},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ \cdots$$

[illegible] て，[illegible] の n^{i+1} [illegible] の係数は $\frac{1}{i \text{[illegible]}}$ [illegible] の係数は $\frac{1}{2}$．例えば，

$$\text{[illegible]} \sum (-1)^j \binom{\text{[illegible]}}{j} \text{[illegible]}$$
$$= \text{[illegible]}{}^5 - 5B_1n^4 + 10B_2n^3 - 10B_3n^2 + 5B_4n)$$
$$= \text{[illegible]} + \frac{5}{2}n^4 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{1}{6}n\Big)$$
$$\text{[illegible]} (n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2014.pdf $\boxed{8}$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2012.pdf $\boxed{7}$

第 17 章　確率分布と統計（数学B）

17.1　確率分布

基本 17.1 次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2016) $\boxed{5}$

(1) 1 個のさいころを 10 回投げるとき，1 また[illegible]の期待値 $E(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の確率密度関数が $f(x)$ [illegible]えられているとき，X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ [illegible]．

(3) 2 つの事象 A，B について，[illegible]が独立な[illegible] B も[illegible]ことを示せ．ただし $\overline{A}$ は A の余事象を表す．

標準 17.2 確[illegible] n 個の値 1，2，$\cdots$，n を[illegible]とる[illegible]る．このとき[illegible]各問[illegible]　(鹿児島大学 2001) $\boxed{12}$

(1) [illegible]変数 X [illegible]偏差を求めよ．

(2) 確率変[illegible] $2X$ [illegible]と標準偏差 σ を求めよ．

(3) $|Y$ [illegible] $< \sqrt{3}$ [illegible]明せよ[illegible]し，n [illegible]する．

[illegible] 1 か[illegible] > 3) [illegible]数字 1，2，3，[illegible]を 1 つずつ書いた n 枚のカード[illegible]の中か[illegible]枚のカー[illegible]り出す．この 2 枚のカードに書いてあ[illegible] X，[illegible] Y) と[illegible]然数 s，t は $1 \leqq s < t \leqq n$ を満たしている[illegible]問いに答え[illegible]　(鹿児島大学 2002) $\boxed{8}$

(1) 次の各確[illegible]求め[illegible]

(a) $X = t$ かつ Y [illegible]ある確率 $P(X = t,\ Y = s)$

(b) $X = t$ である確[illegible]$(X = t)$

(c) $Y = s$ であ[illegible]$P(Y = s)$

(d) $X = 3Y$ であ[illegible]確率 $P(X = 3Y)$

(2) X，Y の平均をそれぞれ $E(X)$，$E(Y)$ とするとき，$E(X) + E(Y)$ を求めよ．

標準 17.4 1, 2, 3, 4, 5の番号をつけた5枚のカードがある．カード1枚をでたらめに取り出し，取り出したカードはもとに戻す試行を繰り返す．ただしこの試行は，取り出したカードの番号が4以上であるか，または取り出したカードの番号の和がはじめて4以上になったときに終了する．カードを取り出した回数を X とするとき，次の問いに答えよ． (鹿児島大学 2003) 8

(1) 確率 $P(X=1)$ および $P(X=2)$ を求めよ．

(2) X の確率分布および平均 (期待値)$E(X)$ を求めよ．

(3) 取り出したカードの番号の和が8であ[illegible]率を求めよ[illegible]，取り出したカードの番号の和が8であるときに，カ[illegible]り出[illegible]が2回である条件つき確率を求めよ．

標準 17.5 A チームはB，C，D，E の4チー[illegible]チームがB，C，D，E のチームに勝つ確率[illegible]3，2[illegible]はないものとする．A チームが勝つ試合[illegible]X[illegible]き次の[illegible]に答えよ．

([illegible]004) 9

(1) A チームが[illegible]くとも1つのチームに勝つ確率[illegible]よ．

(2) A チー[illegible]1つのチームに勝つ確率を[illegible]

(3) X[illegible]分布[illegible]均 (期待値)$E(X)$ を求め[illegible]

基[illegible] [illegible]区別[illegible]ない[illegible]箱と，1から4[illegible]番号をつけた4個の玉があ[illegible]号1，[illegible]4の[illegible]次の (ア)，(イ) のように箱に入れる．

[illegible]) 番[illegible]の玉を[illegible]一つに[illegible]る．

[illegible]2，3，[illegible]いて[illegible]の玉を番号1[illegible]入っている箱かまたは空箱の[illegible]．た[illegible]の玉が入[illegible]る箱へ入れる確率は $1-\frac{1}{j}$ で，空[illegible]れる[illegible]$\frac{1}{j}$ である．

$j=1,\ 2,\ 3,$[illegible]番号 j の玉を入れ終わったとき，玉が入っている箱の個数を X_j とする．このとき[illegible]各問いに答えよ． (鹿児島大学 2005) 8

(1) 確率 $P(X_2=1)$，[illegible]$=1)$，$P(X_4=1)$ を求めよ．

(2) 確率 $P(X_2=2)$，[illegible]$=3)$，$P(X_4=4)$ を求めよ．

(3) $j=3,\ 4$ につ[illegible]$2 \leqq i \leqq j-1$ を満たす i に対し，確率 $P(X_j=i)$ を $P(X_{j-1}=i)$ と $P(X_{j-1}=i-1)$ を用いて表せ．

(4) X_4 の確率分布を求めよ．

標準 17.7 2つのさいころを投げ，出た目を X，Y $(X \leqq Y)$ とする．このとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2006) $\boxed{7}$

(1) $X = 1$ である事象を A，$Y = 5$ である事象を B とする．確率 $P(A \cap B)$，条件つき確率 $P_B(A)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 確率 $P(X = k)$，$P(Y = k)$ をそれぞれ k を用いて表せ．

(3) $3X^2 + 3Y^2$ の平均 (期待値)$E(3X^2 + 3Y^2)$ を求めよ．

標準 17.8 1，2，3，4 の番号をつけた 4 枚[illegible]カードがあ[illegible]中からカードを 1 枚取り出しそこに書かれている番号を見[illegible]う試[illegible]返す．ただし，取り出したカードはもとに戻さない．この試行[illegible]ードに書かれた番号の合計が 3 の倍数になるか，または 4 枚全部を取[illegible]たカードに書かれた番号の合計が 3 の倍数に[illegible]ぶ．4 枚全部を取り出したとき，この試行[illegible]この試行の得点 X は，成功したときは取り出したカードの枚数[illegible]失敗[illegible]する．[illegible]とき，次の各問いに答えよ． [illegible]) $\boxed{7}$

(1) 確率 $P(X = [illegible])$ および $P(X = [illegible])$ を求めよ．

(2) この試行[illegible]る確率を求めよ．また，得点[illegible](期[illegible]めよ．

(3) 取り[illegible]書かれた番号の和が 6 とな[illegible]よ．さ[illegible]取り出[illegible]ード[illegible]番号の和が 6 であるこ[illegible]かっているとき，$X = 3$ [illegible]る条件[illegible]率[illegible]た．

[illegible] 17.9 [illegible]に 1 の[illegible]いる球が 5 個，2 の数字が書かれている球が[illegible]個，5[illegible]が書か[illegible]いる球[illegible]の合計[illegible]の球が入っている．1 個の球を取[illegible]その球[illegible]かれて[illegible]を確認し，も[illegible]戻すことを繰り返す．i 回目に[illegible]た球[illegible]れて[illegible]とする．こ[illegible]，次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2010) $\boxed{7}$

(1) X_1 [illegible]分[illegible]表せ．ま[illegible]均と分散を求めよ．

(2) $Z = X_1$ [illegible]布を表で表せ．また，確率 $P(Z \leqq 4)$ の値を求めよ．

(3) $S = X_1 - X_2$ とす[illegible]

$$P(W \leqq a) \leqq P(Z \leqq 4)$$

を満たす整数 a [illegible]値を求めよ．

(4) $S = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ が $n + 1$ となる確率を求めよ．

標準 17.10 大小 2 個のさいころを同時に投げる試行を考える．この試行で，大きいさいころの出た目を X，小さいさいころの出た目を Y とする．$T = 2X - Y$ とするとき，次の各問いに答えよ．(鹿児島大学 2011) 7

(1) 確率 $P(T = 6)$，$P(T \geqq 0)$ を求めよ．

(2) 分散 $V(X)$，平均 $E(T)$ を求めよ．

(3) $V(aT) = 25$ となる定数 a の値を求めよ．

標準 17.11 0，1，2，3，4 の数字が 1 つずつ記入された 5 枚[illegible]がある．この 5 枚のカードの中から 1 枚引き，数字を記[illegible]戻すとい[illegible] 3 回繰り返す．ただし，3 回ともどのカードを引く確率も等[illegible]る[illegible]3 つのカード数字の最小値を X とするとき，次の各問いに答えよ[illegible] (鹿児島大学 2013) 7

(1) $k = 0$，1，2，3，4 に対して確率 $P(X \geqq k$[illegible]

(2) 確率変数 X の確率分布を表で表せ．

(3) 確率変数 X の平均 (期待値)$E(X$[illegible]よ．

(4) 確率変数 X の分散 $V(X)$ を求[illegible]

標準 17.12 2 つの[illegible]率変数 X，Y の[illegible]率分布を同[illegible]えた表[illegible]率分布表) が以下のように[illegible]れている．ただし，X，Y は[illegible]独[illegible] < 1，$0 < b < 1$ と[illegible]き，次の各問いに答えよ．[illegible]島大学[illegible]) 7

Y \ X	[illegible]	4	計
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
計	[illegible]	[illegible]	1

[illegible]成させ[illegible]

[illegible]率変数[illegible] $X -$[illegible]$E(W)$ を求め[illegible]

(3) [illegible]$= \frac{Y}{[illegible]}$[illegible]率分[illegible]成[illegible]平均 $E(Z)$ を求めよ．

(4) $E(Z$[illegible]$-\frac{3}{2}$ となる[illegible] Z の分散 $V(Z)$ を求めよ．

標準 17.13 整[illegible] $(n$[illegible]対し，2 枚のコインを同時に投げる試行を繰り返し，2 枚とも表が出るか，また[illegible]回繰り返した時点で試行を終了するときの試行の回数を X_n とする．確率変数[illegible]ついて，次の各問いに答えよ．(鹿児島大学 2015) 5

(1) $n-1$ 以下の自然数[illegible]対して，確率 $P(X_n = k)$ を求めよ．また，確率 $P(X_n > 3)$ を求めよ．

(2) 確率 $P(X_n = n)$ を n を用いて表せ．

(3) X_n の平均を E_n とかくとき，$E_{n+1} - E_n$ を求めよ．

17.2　統計的な推測

標準 17.14 2つの変量 x，y の値からなる N 個の資料 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，$(x_N,\ y_N)$ がある．この資料による x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とし，標準偏差をそれぞれ σ_x，σ_y とする．また，σ_{xy}，$E(x^2)$ および $E(xy)$ を次で定める．

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}),\quad E(x^2) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}{x_k}^2,\quad E(xy) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k y_k$$

このとき，次の文中にある空欄 $\boxed{\quad\quad}$ に[illegible]式を求[illegible]結果だけを答えよ．

(鹿児島大学 2002) 12

(1) σ_x を $\overline{x}$ および $E(x^2)$ を用いて表すと $\sigma_x =$ [illegible]

(2) σ_{xy} を $\overline{x}$，$\overline{y}$ および $E(xy)$ を用いて表[illegible]

(3) x，y の相関係数 r を σ_x，σ_y および[illegible]用い[illegible] $\boxed{\quad\quad}$ [illegible]．ただし，$\sigma_x\sigma_y \neq 0$ とする．

(4) $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k -$ [illegible] $- 1)^2$ の値を最小にする実数 t の[illegible] $\overline{x}$，E[illegible] $E(xy)$ を用いて[illegible] $\boxed{\quad\quad}$ である．ただし，E[illegible]．

標準 1[illegible]確率変[illegible]0，分散 1 の標準正規[illegible] $N(0,\ 1)$ に従うとする．P[illegible] $\leqq 1.5)$ [illegible]332 [illegible]して，次の各問い[illegible]よ．

(鹿児島大学 2003) 12

(1) 確[illegible] X は[illegible]40，分[illegible]の正規[illegible] $(40,\ 20^2)$ に従うとする．確率[illegible] $\leqq 10)$ [illegible]よ．

(2) [illegible]平均[illegible]分散[illegible]から，大[illegible]の無作為標本を抽出するとき，[illegible]平均を[illegible]る．[illegible]分布[illegible]き，$\overline{X}$ が近似的に従う確率分布を[illegible]の確率分布[illegible]確に従うと仮定して，$P(39 \leqq \overline{X} \leqq 41) \geqq$ [illegible]の値の範囲を[illegible]よ．

標準 17.16 母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，その標本平均を $\overline{X}$ とする．また，標本平均 $\overline{X}$ は平均 m，分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ の正規分布 $N(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n})$ にしたがうとする．このとき次の各問いに答えよ．(鹿児島大学 2004) 13

(1) $\overline{X}$ の変換 $\dfrac{\overline{X}-a}{b}$ が，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ にしたがうように a と b を定めよ．

(2) 標本平均 $\overline{X}$ を用いて母平均 m に対する信頼度 95% の信[illegible]を求めよ．また，その信頼区間を導きだす過程も示せ．ただし，確[illegible]が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ にしたがうとき，$P(Z > 1$[illegible]025 で[illegible]る．

(3) 母標準偏差 σ が 5 のとき，母平均 m に[illegible]% の信頼区間の幅が 2 以下となる標本の大きさ n の最小値を求[illegible]

標準 17.17 ある工場で生産されている製品[illegible]，こ[illegible] n 個を無作為に抽出して調べるとき，その[illegible]良[illegible]個とする[illegible]お，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数[illegible]て，

$$P(|Z| \leqq 1.96) = 0.95, \qquad P(0 \leqq Z \leqq 1.8) = 0.464 \text{[illegible]} (0 \leqq Z \text{[illegible]} 0.4713$$
$$P(0 \leqq Z \leqq 2 \text{[illegible]} 772, \quad P(0 \leqq Z \leqq 2.1) = 0.482 \text{[illegible]}$$

であると[illegible]この[illegible]次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 [illegible]05) 12

(1) [illegible]のよ[illegible]従うかを答えよ．ま[illegible]が大きいとき X の確率分[illegible]は何で[illegible]される[illegible]．

(2) 標本[illegible]率 (標[illegible]) p_0 [illegible]値が得られるものとする．このとき，信頼度 9[illegible]信頼区[illegible]を，標[illegible]大きさ n の[illegible]の半分にするには，標本の大き[illegible]いくら[illegible]ればよ[illegible]求めよ．

(3) [illegible]の[illegible]率を n[illegible]る．標本[illegible]さが $n = 1900$ のとき，確率 [illegible]$X \leqq 1$[illegible]二項[illegible]規[illegible]よる近似値を用いて表せ．

標準 17.18 次の各問いに答えよ．ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，

$$P(Z > 1.96) = 0.0250,\quad P(Z > 2.00) = 0.0228,\quad P(Z > 2.58) = 0.0049$$

である．　(鹿児島大学 2006) $\boxed{8}$

(1) 1 枚の硬貨を 100 回投げる試行において，表の出た回数を X [illegible] する．次の (i), (ii), (iii) に答えよ．

　(i) X はどのような確率分布に従うか [illegible] 答えよ．ま [illegible] $= k)$ を k を用いて表せ．

　(ii) X を正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ で近似す [illegible] の値をそれぞれ求めよ．

　(iii) (ii) において，確率 $P(50 \leqq X \leqq 60$ [illegible] す値 a をそれぞれ求めよ．

(2) 変形した硬貨が 1 枚ある．この硬貨 [illegible] 出 [illegible] という) を [illegible] 定するために，400 回投げたところ，[illegible] 100 回 [illegible] 出 [illegible] と [illegible] 率の信頼度 99%の信頼区間の幅を [illegible]．

標準 17.19 次の [illegible] いに答えよ．ただし，確率変数 [illegible] 標準 [illegible] 1) に従うとき，

$$\text{[illegible]}\ 1.53)\ \text{[illegible]}\quad P(Z \geqq 1.96) = 0.025\ \text{[illegible]}\ Z \geqq 2.32) = 0.010$$

で [illegible]　(鹿児島大学 2007) $\boxed{8}$

(1) 確率 [illegible] が正 [illegible] $N(m$ [illegible] 従うとき $\dfrac{X-a}{b}$ は，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ [illegible] うとす [illegible] た，[illegible] 数 Y が二項 [illegible] $n,\ p)$ に従うとき，$\dfrac{Y-c}{d}$ は，[illegible] が十 [illegible] なら [illegible] に標準正規 [illegible] $(0,\ 1)$ に従うとする．このと [illegible] $c,\ d$ [illegible] σ, [illegible] 用い [illegible]

(2) 確 [illegible] X [illegible] x の範囲 [illegible] で，その確率密度関数 $f(x)$ が次の式で [illegible]

$$f(x) = k - |x-1|$$

このとき，次の (a [illegible] に答えよ．

(a) k の値を求め [illegible]

(b) X の平均と [illegible] 差を求めよ．

(3) ある工場で 1k [illegible] と表示する製品が生産されている．この製品の重さは，平均 1kg，標準偏差 50g の正規分布に従っているという．この工場より 1000 個の製品を仕入れた．この中に 902g 以下の製品は何個あると推測されるか．

標準 17.20 確率変数 Z が平均 0，分散 1 の標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとするとき，$P(Z>1.65)=0.05$，$P(Z>1.96)=0.025$ であるとして，次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2008) 8

(1) 確率変数 X は平均 65，分散 20^2 の正規分布 $N(65,\ 20^2)$ に従うとする．確率 $P(X>c)$ が 0.05 となるような c を求めよ．

(2) 母平均 m，母分散 20^2 の母集団から大きさ 100 の無作為標本[illegible]抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とする．標本の大きさ 100 は十分大きい数[illegible]みなせるとする．このとき，$\overline{X}$ が近似的に従う確率[illegible]布を答えよ．[illegible]母平均 m の信頼度 95%の信頼区間を $\overline{X}$ を用いて表[illegible]

基本 17.21 次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2009) 8

(1) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $-1 \leqq$ [illegible] の式で与えられている．

$$f(x) = \begin{cases} [illegible] & (-1 [illegible] < 0) \\ [illegible] + k & (0 \leqq [illegible]) \end{cases}$$

(a) k の[illegible]平均を求めよ．

(b) 確[illegible]$\leqq 0.5)$ を求めよ．

(2) 母[illegible]m，母[illegible]の母集団から大きさ[illegible]作為標本を抽出するとき，[illegible]標本平[illegible]X と[illegible]標本平均 $\overline{X}$ は，n[illegible]大きいとき，近似的に正[illegible]分布[illegible]$y)$ に従[illegible] 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うならば[illegible]$\geqq 1$[illegible]0.15[illegible]$\geqq 2.00)$[illegible]0.0228 である．

[illegible]と y を[illegible]，n を[illegible]表せ．

[illegible]母平[illegible]，母標[illegible]の母集団か[illegible]きさ 100 の無作為標本を抽出[illegible]き，確[illegible]46[illegible]2) を[illegible]．ただし，標本の大きさ 100 は[illegible]大き[illegible]あるとみ[illegible]

標準 17.22 数字 1 が書かれたカードが 1 枚，数字 2 が書かれたカードが 2 枚，数字 3 が書かれたカードが 1 枚の合計 4 枚のカードがある．この 4 枚のカードを母集団とし，カードに書かれている数字を変量とする．このとき，次の各問いに答えよ．ただし，母集団の中から標本を抽出するのに，毎回もとに戻してから次のものを 1 個ずつ取り出すことを復元抽出といい，取り出したものをもとに戻さずに続けて抽出することを非復元抽出という． (鹿児島大学 2010) 8

(1) 母平均 m と母標準偏差 σ を求めよ．

(2) この母集団から，非復元抽出によって[illegible]大きさ 2 の無[illegible]本を抽出し，そのカードの数字を取り出した順に Y_1, [illegible]る．[illegible] $\overline{Y} = \dfrac{Y_1+Y_2}{2}$ の確率分布，期待値 $E(\overline{Y})$，標準偏差 $\sigma(\overline{Y})$ を[illegible]

(3) この母集団から，復元抽出によって，大[illegible]標本平均を $\overline{X}$ とする．このとき，標[illegible]正規[illegible]なすことができるとして，$P(\overline{X} <$ [illegible] を求めよ[illegible]ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0$[illegible]そうとき[illegible]$P(Z$[illegible]$=$[illegible]る．

標準 17.23 次の各問いに答えよ． (鹿[illegible]2011) 8

(1) 確率変数[illegible]上 3 以下の値をとり，その確[illegible]度[illegible]えられて[illegible]のとき，定数 k，平均 $E(X$[illegible]

$$f(\text{[illegible]}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 \leqq x \text{ [illegible] のとき}) \\ \text{[illegible]} x + k & (1 \leqq x \leqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2) Z を[illegible]正規分[illegible]$0,\ 1)$[illegible]確率変数[illegible]する．また，任意の x $(x \geqq 0)$ に[illegible]，関数[illegible]を $g($[illegible] $(0 \leqq Z \leqq$ [illegible]く．このとき，次の各問いに[illegible]よ．

(a) [illegible]$a \leqq Z$[illegible]表せ[illegible]，a と b は定数で $a < b$ とする．

(b) [illegible]均 50[illegible]準偏差[illegible]ら大きさ 10 の標本を抽出すると[illegible]1.0 以上 48[illegible]なる確率を関数 g で表せ．

(c) $0 <$ [illegible] と[illegible]は $g(l_p) = \dfrac{p}{2}$ をみたすものとする．母分散 25 の母集団から大きさ 20[illegible]本を抽出したところ，標本平均が 45 であった．母平均 m に対する信[illegible]00p% の信頼区間の区間幅を l_p を用いて表せ．

標準 17.24 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，

$$P(Z > 1.96) = 0.025, \quad P(Z > 2.58) = 0.005, \quad \frac{2.58}{1.96} \fallingdotseq 1.32$$

であるとして，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2012) $\boxed{8}$

(1) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $-1 \leqq x \leqq 1$ で，その確率密度関数が $f(x) = k(1-x^2)$ で与えられている．このとき，定数 k の値と X を求めよ．

(2) 母平均 m，母標準偏差 10 の母集団から大きさ 100 の 本を抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とする．標本の大き は十分大 であるとみなせるとする．

(a) 標本平均 $\overline{X}$ を用いて，母平均 m の信

(b) 母平均 m を信頼度 99%の信頼区間を 幅を (a) で求めた幅より小さくす の大きさ n を 上にとればよいか求めよ．

標準 17.25 確率変数 X のとる値の $0 \leqq X \leqq$ その $f(x)$ が次の式で与えられ ものとする．

$$\begin{cases} \dfrac{k}{a} & (0 \leqq \quad) \\ \dfrac{k}{2-a}(2-x) & (a < \quad) \end{cases}$$

， a， $< a <$ 満たす定数である．次の各問いに答えよ．

(1) 定 値を ．　(鹿児島大学 2013) $\boxed{8}$

 平均 値)$E($ を用いて表せ．

(0.5 と a を用い ．

標準 17.26 次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2014) $\boxed{8}$

(1) 数字 1 が書かれた玉 a 個 $(a \geqq 1)$ と，数字 2 が書かれた玉 1 個がある．これら $a+1$ 個の玉を母集団として，玉に書かれている数字を変量とする．このとき，この母集団から復元抽出によって大きさ 3 の無作為標本を抽出し，その玉の数字を取り出した順に X_1，X_2，X_3 とする．標本平均 $\overline{X} = \dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$ の平均 $E(\overline{X})$ が $\dfrac{3}{2}$ であるとき，$\overline{X}$ の確率分布とその分散 $V(\overline{X}$[illegible]めよ．ただし，復元抽出とは，母集団の中から標本を抽出するのに，[illegible]に戻してから次のものを 1 個取り出す抽出法である[illegible]

(2) ある企業の入社試験は採用枠 300 名の[illegible]募があった．試験の結果は 500 点満点の試験に対し，平均点 24[illegible]点であった．得点の分布が正規分布であるとみなせるとき[illegible]小数点以下を切り上げて答えよ．ただ[illegible]標準正規[illegible]き，$P(Z > 0.25) = 0.4$，$P(Z > 0$[illegible]，[illegible]0.2 とす[illegible]

答

1.1 $(y-b)(a+b)(a-x)$

1.2 省略

1.3 ⑤

1.4 $a^3+b^3=4$, $a^6+b^6=18$

1.5 $a^2+ab+b^2=6$, $\dfrac{1}{a-b-1}-\dfrac{1}{a+b+1}$

1.6 (1) $a=b$ または $a=\dfrac{1}{b}$

(2) $(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{8},\ 1\right)$, $(8,\ 64)$, (… 2, 4

1.7 (1) a, b は 1 以外に共通の約数 … たないこと … (2) 省

(3) 省略 … 省略

1.8 (1) 省 … (3) $c=2$, $d=-5$, $f($ … $-1)($ … $5)$

1.9 2 … 7

1 … 偽, … $x=$ … (2) 真

1 … (1) … (2)

偽, 反 … $=4$

1.1 … 「$a=$ … b … ば ab … (真)

… は「 … たは $b\neq$ … 0」 (偽)(反例 $a=0,b=1$)

1.14 (1) 省

1.15 (1) 真　命題「a … ともに有理数ならば ab は有理数である」は真である.

この命題の対 … 命題である.

(2) 偽　反例：a … $b=\sqrt{2}$

(3) 真　$f(2n-$ … $2^{2n-1}+3^{2n-1}\equiv 2^{2n-1}+(-2)^{2n-1}\equiv 0 \pmod 5$

1.16 (1) 真　(2) 偽　(3) 偽　(4) 偽

1.17 (1) 省略　(2) 省略

1.18 (1) 省略 (2) 省略 (3) 省略

2.1 $(a,\ b,\ c) = (3,\ 4,\ 5)$ の1組のみ

2.2 (1) $n = 0,\ 1,\ 2$ (2) 81

2.3 (1) $a \leqq \dfrac{1-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \leqq a$ (2) $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ (3) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \leqq a < \dfrac{5}{4}$

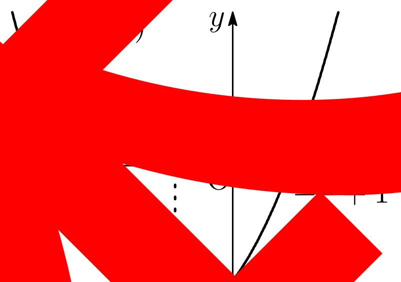
2.4 (1) $x < -\dfrac{1}{a} - 1,\quad -\dfrac{1}{a} + 1 < x$

(2) $y = f(x)$ は

$$\left(-\frac{1}{a}, -a\right)$$

を頂点とする下に凸の放物線.

グラフは，右の図のようにな[illegible]



(3) m[illegible] $\begin{cases} [illegible]\dfrac{1}{a}[illegible] & (1 < a \leqq 2\ のとき) \\ [illegible] - 4 & (2 < a\ のとき) \end{cases}$

2.[illegible] $f(x)$[illegible] (2)[illegible] $ax^2 + bx + c$ ([illegible])[illegible]略

[illegible] $0° <$[illegible]$0°,\ 1$[illegible]$\theta \leqq$[illegible]

[illegible] 省略 [illegible] $\sin 75°$[illegible]$\sqrt{2}$[illegible]

3.3 ([illegible]) $\angle$BAC[illegible] (2) [illegible]

3.4 $a = 7$[illegible]

3.5 (1) $\dfrac{3}{4}(3+\sqrt{3})$ ([illegible])[illegible]略

3.6 (1) $S = \dfrac{1}{2} lm \sin$[illegible] $l = m = \dfrac{k}{2}$, $\theta = 90°$ のとき面積の最大値 $\dfrac{k^2}{8}$

3.7 (1) $\sin A = \dfrac{4}{5}$, $\cos A = \dfrac{3}{5}$ (2) $R = \dfrac{15}{4}$ (3) $\mathrm{AB} = 3\sqrt{5}$ のとき最大値 18

3.8 (1) $\mathrm{BD} = 7$ (2) $\angle\mathrm{BAD} = 60°$ (3) $\mathrm{AE} = -3 + \sqrt{22}$

3.9 (1) $\dfrac{\sqrt{3}(m^2-mn+n^2)}{4(m+n)^2}$ (2) $m:n=2:1$ または $1:2$

3.10 (1) $1+\sqrt{5} \leqq x < \dfrac{18}{5}$ (2) $\cos\theta = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}$

(3) $x=1+\sqrt{5}$ のとき最初値 $\dfrac{3(\sqrt{5}-1)}{4}$

3.11 (1) $\mathrm{CP}^2 = ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2$

(2) $\begin{cases} b \geqq a \text{ のとき} \quad t=1,\ \dfrac{b^2-a^2}{c^2} \ \text{[illegible]} A \leqq \text{[illegible]} \\ b < a \text{ のとき} \quad t=1 \end{cases}$

3.12 (1) $\cos A = \dfrac{a^2+d^2-y^2}{2ad}$, $\cos B = \dfrac{a^2+\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$

$\cos C = \dfrac{b^2+c^2-y^2}{2bc}$, $\cos D = \dfrac{c^2\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}d}$

(2) 省略

4.1 省略

4.2 (1) $\dfrac{1}{6}$ (2) [illegible] (3) $\dfrac{1}{27}$ (4) $\dfrac{4}{5}$

5.1 (1) [illegible] (通り) (2) [illegible] (通り)

5.2 [illegible]

36 (通り) [illegible]

[illegible] (通り)

[illegible] (個)

5.6 $\dfrac{1}{12}$ [illegible] $1)($[illegible]$n+2)$

5.7 (1) 720 [illegible] (2) [illegible]0 (通り) (3) 480 (通り)

5.8 (1) 540 (通り) (2) [illegible] (通り)

5.9 (1) 3125 (通り) (2) [illegible]20 (通り) (3) 2500 (通り) (4) 11 (通り)

5.10 (1) 84 (通り) (2) [illegible]1 (通り) (3) 280 (通り) (4) 150 (通り)

5.11 (1) 5 (個) (2) 15 (個) (3) $\dfrac{1}{6}k(k+1)(k+2)$ (個)

5.12 (1) 64 (枚) (2) 960 (枚) (3) 99520 (枚)

5.13 (1) 55 (通り) (2) 715 (通り) (3) 199998 (通り)

5.14 (1) 13 (2) 121

5.15 (1) $\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$ (通り)

(2) 最大値 $n-4$, 最小値 $-n+4$

(3) 最大値を与える数列の総数 $\frac{1}{2}(n-$ [illegible] $(n-3)$,

最小値を与える数列の総数 $n-$ [illegible]

5.16 $\frac{1}{81}$

5.17 $\frac{19}{27}$

5.18 $\frac{5}{324}$

5.19 (1) $\frac{1}{3}$ (2) [illegible] (3) $\frac{5}{12}$

5.20 p_n [illegible] $(n^3$ [illegible] $14n+6)$

5.21 (1) $\frac{p\{1-}{}$ [illegible] (2) 371 (通り)

5.22 $\frac{17}{}$ [illegible]

5.23 $\frac{17}{}$ [illegible] $\frac{77}{12}$ [illegible]

5.24 (1) [illegible] (2) [illegible]

5.25 (1) $P(3)$ [illegible] $\frac{}{3}$ (2) [illegible] $) = \frac{2n^2+21n-2}{12(n+1)(n+2)}$

5.26 (1) $n(A)=65$, [illegible] 100 (2) 最大 927, 最小 171 (3) $\frac{19}{4650}$

5.27 (1) $p_3 = \frac{}{N(N-1)(N-2)}$, $q_1 = \frac{1}{N^3}$, $q_2 = \frac{7}{N^3}$, $q_3 = \frac{19}{N^3}$

(2) $p_n = \frac{3(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}$, $q_n = \frac{3n^2-3n+1}{N^3}$

5.28 (1) 120 (通り) (2) 8 (通り) (3) $\dfrac{5}{6}$

5.29 (1) $\dfrac{3}{14}$ (2) $\dfrac{23}{56}$ (3) $\dfrac{9}{28}$

5.30 (1) $\dfrac{236}{455}$ (2) $\dfrac{151}{455}$

5.31 (1) $\dfrac{1}{3}$ (2) $\dfrac{2n}{3n-1}$ (3) $\dfrac{6n(n-1)}{(3n-1)(3n-2)}$ (4) $\dfrac{2n(7}{3(3}$ [illegible] $-2)}$

5.32 (1) $\dfrac{1}{10}$ (2) $\dfrac{7}{45}$

5.33 (1) $\dfrac{3}{14}$ (2) $\dfrac{3}{14}$ (3) $\dfrac{1}{35}$

5.34 $\dfrac{3}{5}$

5.35 (1) $\dfrac{3}{8}$ (2) $\dfrac{5}{16}$ (3) $\dfrac{3}{32}$ (4) [illegible]

5.36 (1) $1-$ [illegible] (2) $1-\dfrac{n!}{n^n}$ (3) $\dfrac{(n+1)}{2n^n}$ [illegible]

5.37 (1) [illegible] (2) [illegible] (4) $\dfrac{121}{144}$ (5) $1 \leqq$ [illegible]

[illegible] (1) P [illegible] 21 (2) [illegible] $\dfrac{(n-5)^2}{\text{[illegible]}1)(n-8)}$ (3) $n=11,\ 12$

[illegible] $\dfrac{\text{[illegible]}}{203}$ [illegible] $\dfrac{P(k}{\text{[illegible]}}$ [illegible] $\dfrac{3(k+1)(1}{(k-1)(30}$ [illegible] (イ) $k=6$

5.40 (1) [illegible] (2) [illegible] $C_k\left(\dfrac{\text{[illegible]}}{25}\right)^{32}$ [illegible] (3) $\dfrac{q_k}{q_{k-1}} = \dfrac{3(33-k)}{22k}$ (4) $k=3$

5.41 (1) 省略 (2) [illegible] -10 (3) $n=53$

5.42 (1) $\dfrac{1}{256}$ (2) $\dfrac{31}{32}$ (3) $\dfrac{3}{4}$ (4) 「4」

5.43 (1) $T_3 = 3p^2 -$ [illegible] (2) 省略 (3) $p=\dfrac{1}{3}$ (4) 省略 (5) $H_{2k+1} = \dfrac{1}{2}\ (k \geqq 1)$

5.44 (1) $\dfrac{1}{3}$ (2) $\dfrac{1}{6}$ (3) $\dfrac{29}{36}$

5.45 (1) $\dfrac{17}{36}$ (2) $\dfrac{2}{3}$

5.46 (1) $ac = 1$ のとき $(a,\ c) = (1,\ 1)$ の 1 通り
$ac = 2$ のとき $(a,\ c) = (1,\ 2),\ (2,\ 1)$ の 2 通り
$ac = 3$ のとき $(a,\ c) = (1,\ 3),\ (3,\ 1)$ の 2 通り
$ac = 4$ のとき $(a,\ c) = (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$ の 3 通り
$ac = 5$ のとき $(a,\ c) = (1,\ 5),\ (5,\ 1)$ の 2 通り
$ac = 6$ のとき $(a,\ c) = (1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,$ [illegible] り
$ac = 8$ のとき $(a,\ c) = (2,\ 4),\ (4,$ [illegible] $)$ の 2 通り

(2) $\dfrac{5}{72}$

5.47 (1) (a) $\dfrac{1}{216}$ (b) $\dfrac{1}{36}$ (c) $\dfrac{1}{36}$

(2) $p_0 = \dfrac{1}{36}$, $p_1 = \dfrac{5}{36}$, $p_2 = \dfrac{2}{9}$, p_3 [illegible]

5.48 (1) $\dfrac{2}{9}$ (2) 省略 (3) $\dfrac{686}{6561}$ [illegible] $\dfrac{[illegible]0}{6561}$

5.49 (1) 3 回繰り[illegible]して手元のカードが 4 である確[illegible]

n[illegible]手元のカードが 4 である確[illegible]

[illegible]回繰り[illegible]カードが 2 である確[illegible]

n 回[illegible]返して[illegible]が 2 である確率は $\dfrac{2^n - 1}{4^n}$

[illegible] $\dfrac{[illegible]2^n}{4^n}$

5.[illegible] [illegible] $(0,\ 3)$ [illegible] 21 (3) [illegible]

5.51 (1) [illegible] (2) $m = $ [illegible] $- 1$ (2) $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$

(3) $P_3 = $ [illegible] (4) [illegible] $= \dfrac{(19N+6)(3N)!}{6^{2N+1}(N!)^2(N+1)!}$

5.52 (1) $\dfrac{25}{36}$ (2) $\dfrac{1}{3}$

5.53 (1) $\dfrac{1}{16}$ (2) [illegible] (3) $\dfrac{1}{5}$

5.54 (1) $P_A = \dfrac{2}{3}$, $P_B = \dfrac{1}{3}$ (2) $P_{AA} = \dfrac{2}{3}$, $P_{BB} = \dfrac{3}{4}$ (3) $\dfrac{31}{48}$ (4) $\dfrac{272}{785}$

5.55 (1) $\dfrac{1}{8}$ (2) $\dfrac{49}{4096}$ (3) $\dfrac{147}{2048}$ (4) $\dfrac{9}{64}$ (5) $\dfrac{9}{256}$ (6) $\dfrac{24}{41}$

5.56 (1) ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$ (2) 省略 (3) $\dfrac{1}{3}$

6.1 省略

6.2 省略

6.3 省略

6.4 $m = 10,\ 20$

6.5 $m = 18$

6.6 (1) 省略 (2) 省略

6.7 $(x,\ y) = (13, -15)$

6.8 $(a,\ b) = (\pm 1,\ 4)$

6.9 (1) $(x,\ y)$ [illegible] $5),\ (6,\ 10),\ (3,\ 15)$
(2) $(x$ [illegible] $2k,\ -n+5k)$ (k は整数)

6.10 (1) [illegible] (2) [illegible] $(1,\ 31),\ (4,\ 24),\ (7,$ [illegible] $10,\ 10),\ (13,\ 3)$
[illegible] を 12 [illegible], [illegible] セット購入したと [illegible] 00 円

[illegible] (1) k [illegible] (2) [illegible] $= -2,\ a = -2$ のとき $x = 0$

[illegible] (x, $y) =$ [illegible], $(6,$ [illegible] $4),\ (30,$ [illegible]
$(x,$ [illegible] $(1,\ 3$ [illegible] $,\ 4,\ 9),\ (2,$ [illegible]

6.13 [illegible] (2) [illegible] $= (3$ [illegible] $2)$

6.14 (1) [illegible] (3) 0, 1, [illegible] 省略

6.15 (1) 省略 (2) a [illegible] $a_2 = 9,\ a_3 = 12,\ a_4 = 3,\ a_5 = 4,\ a_6 = 1$
(3) 220168, 3201[illegible]0160, 520169, 620165, 720161, 920166

6.16 (1) 省略 (2) 省[illegible] (3) $(p,\ q) = (7,\ 3)$

6.17 (1) 省略 (2) [illegible]

6.18 (1) 省略 (2) 省略 (3) 省略

6.19 (1) 省略 (2) 省略

6.20 (1) $\varphi(10) = 4$ (2) $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ (3) $\varphi(100) = 40$ (4) $\varphi(1500) = 400$

6.21 (1) $-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}$ (2) $n = -1,\ 0,\ 2,\ 3$
(3) $n = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

6.22 (1) 省略 (2) 省略

6.23 (1) 省略 (2) 省略 (3) 省略

6.24 (1) n を 5 で割った余りを r とすると, x^n を x^5-1 で[illegible]余りは

$$\begin{cases} 0 < r \leqq 4 \text{ のとき} & \text{余り } x^r \\ r = 0 \text{ のとき} & \text{余り } -1 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} n \not\equiv 0 \pmod 5 \text{ のとき} & \text{余り } -1 \\ n \equiv 0 \pmod 5 \text{ のとき} & \text{余り } 4 \end{cases}$$

7.1 $\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$

7.2 $\mathrm{AC} = 4$

7.3 (1) $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}} = $ [illegible] (2) 省略 (3) $\mathrm{BE} = 9$

7.4 (1) [illegible] (2) [illegible]$\mathrm{DC} = 2 : \sqrt{5}-1$ (3) [illegible]$+1 : 1$

7.5 [illegible] : PD [illegible]
[illegible] △AP[illegible]ABC[illegible]$+1)(ab+b+1)$

7.6 (1) [illegible] (2) [illegible]

7.7 省略 [illegible]ABC[illegible]$= 48 : 25$

7.8 (1) [illegible]5 (2) [illegible]$3+t$ [illegible]$3(1-$[illegible] (3) $\dfrac{1}{6}$ (4) $\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}$

7.9 (1) 省[illegible] (3) $2\sin$[illegible]

7.10 $\mathrm{AH} : \mathrm{OM} = 2 : 1$

7.11 省略

7.12 (1) $\mathrm{CH} : \mathrm{HA} = $ [illegible] (2) $\mathrm{BI} : \mathrm{IA} = 2 : 3$ (3) $\mathrm{DJ} : \mathrm{JF} = 1 : 1$

7.13 (1) $\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$ (2) 省略

7.14 省略

7.15 (1) $r = \dfrac{\mathrm{AP} + \mathrm{BP}}{2}$, $\mathrm{PQ} = \sqrt{\mathrm{AP} \cdot \mathrm{BP}}$ (2) 省略

7.16 (1) 省略 (2) $\dfrac{9}{5}$ 倍

7.17 $\mathrm{BD} = 7$

7.18 (1) 省略 (2) 省略 (3) 省略

7.19 (1) 省略 (2) 省略

7.20 (1) $\mathrm{AD} = \dfrac{rs}{1 - r}$ (2) $r = 3 - \sqrt{6}$ ([illegible]

7.21 $\mathrm{PR} = 3r$

7.22 $\mathrm{AP} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}$

7.23 $\mathrm{QM} = \sqrt{3}r$

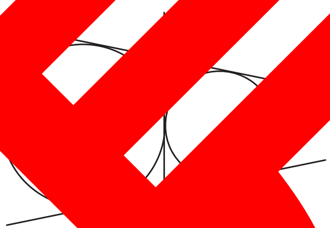
7.24 (1) $a = 2b$ (2) $\mathrm{CR} : \mathrm{RP} : \mathrm{PX}$ [illegible] $6 : 3 : 4$

7.25 (1) 省[illegible] $: \mathrm{PB} = \sqrt{3} : 1$, $\mathrm{AR} : \mathrm{RB} =$ [illegible] 略

7.26 (1) [illegible] (2) [illegible]

7.[illegible] [illegible] AP [illegible] r [illegible] $\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - r^{[illegible]}}}$ [illegible] 省略

[illegible] (1) [illegible] (2) [illegible]



8.1 375

8.2 1890

8.3 -2240

8.4 (1) n は偶数 (2) 393

8.5 (1) $n = 7$ (2) 511

8.6 (1) 省略 (2) $n(n-1)\cdot 2^{n-2}$ (3) $n(n+1)\cdot 2^{n-2}$

8.7 (1) 255 (2) 省略 (3) 省略

8.8 省略

8.9 省略

8.10 (1) 省略 (2) $\dfrac{1}{3}$

8.11 (1) 省略 (2) 省略 (3) 省略

8.12 (1) 省略 (2) 省略 (3) 省略

9.1 $x = 2$

9.2 $a = 2,\ \ b = \pm\sqrt{3}$

9.3 $x + 1$

9.4 (1) $P(x) =$ [illegible] $-1)^2(x+2)$ (2) 16

9.5 (1) $3x$ [illegible] $(x) = x^2 + 3x + 2$ (3) $P($[illegible] $- 4$[illegible] $+ 8$

9.6 a [illegible] $= -2$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $a =$ [illegible] $8,$ [illegible] $x =$ [illegible]

[illegible] 省略 [illegible] $= \dfrac{-1}{\ }$ [illegible]

9.10 [illegible]

9.11 $a =$ [illegible]

9.12 (1) $x =$ [illegible] 1 [illegible] $= y = z = 1$

9.13 $\omega^4 + \omega^2 + 1 = 0$

9.14 $\pm\sqrt{3}\,i$

9.15 (1) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} =$ [illegible], $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = t^3 - 3t$ (2) $2t^2 - 3t - 9$

(3) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-3 \pm \sqrt{7}\,i}{4}$

9.16 (1) $x^2-2x+5=0$ (2) $a=7,\ b=-5$

9.17 (1) $x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ (2) $(m,\ n)=(-3,-2)$
(3) $\beta=-3-2\sqrt{7}\,i,\ \dfrac{1}{2}\left\{3\pm2\sqrt{21}+(2\sqrt{7}\mp3\sqrt{3})i\right\}$ （複号同順）

10.1 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{15}{4}\right)$

10.2 (1) $d=3\sqrt{5}$ (2) $-1\leqq t\leqq 3$ (3) [illegible] 1 のとき [illegible] $\sqrt{5}$

10.3 (1) $p=2a-2,\ q=2-a$ (2) $p=\dfrac{8}{7}$, [illegible]

10.4 (1) $f(x)=x^2-2x$ (2) 中心 $(4,\ 3)$ [illegible] $-1)$

10.5 (1) $\mathrm{C}(4,\ 2)$ (2) $(x-1)^2+(y$ [illegible] $5,$ [illegible] $1)$
(3) $y=\dfrac{4}{3}x+5,\ y=-\dfrac{3}{4}x+$ [illegible]

10.6 (1) $a<$ [illegible] $\sqrt{10},\ -6+2\sqrt{10}<a$ (2) a [illegible] (3) [illegible] 12

10.7 y [illegible] $\dfrac{}{15}(x$ [illegible] $\pm\dfrac{3}{\sqrt{7}}\left(x-\dfrac{8}{3}\right)$

10.8 [illegible] $r=$ [illegible] a^2+1 [illegible] 3 (3) $\left(\dfrac{3m+\text{[illegible]}}{2},\ \dfrac{\text{[illegible]}}{2}\right)$
[illegible] $=\dfrac{5}{3}$ の [illegible] 最小値 [illegible]

10.9 [illegible] 中心 [illegible] $\left(\dfrac{}{2},\ 0\right)$ [illegible] 2 [illegible] 中心 $\left(\text{[illegible]},\ \dfrac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)$, 半径 $\dfrac{3\sqrt{5}-5}{2}$

10.10 (1) r [illegible] $=3$ (2) r [illegible] $\dfrac{}{23}$, $(a,\ b)=\left(\dfrac{20}{23},\ \dfrac{21}{23}\right)$

10.11 (1) $\mathrm{A}(-1,-2),\ \mathrm{B}$ [illegible] (2) 点 $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$ の円

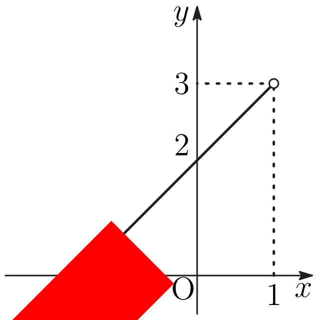
10.12 (1) x^2+y^2-4 [illegible] $=0$ (2) $\dfrac{75\sqrt{3}}{16}$
(3) 中心 $\left(\dfrac{8}{15},-\dfrac{2}{5}\right)$, 半径 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ の円．ただし，2 点 $\left(\dfrac{6}{5},-\dfrac{1}{15}\right)$, $\left(\dfrac{2}{5},-\dfrac{17}{15}\right)$ は除く．

10.13 (1) $-4 < t < 2$

(2) 求める軌跡の方程式は

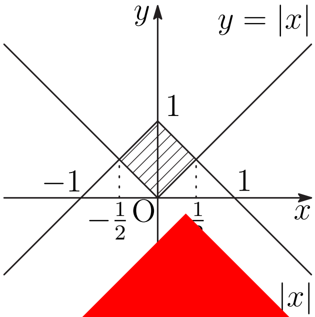
$$y = x + 2 \quad (-2 < x < 1)$$

よって，軌跡は右の図のようになる．



10.14 点 $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{7[illegible]}}{3}$ [illegible]

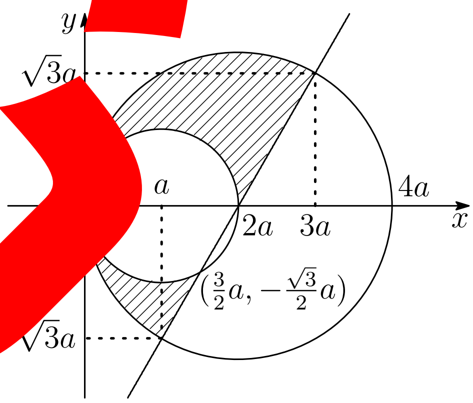
10.15 求める領域は，次の図の斜線部分で，境[illegible]



10.16 $-$ [illegible] $\sqrt{6} \leqq$ [illegible] $5\sqrt{6}$

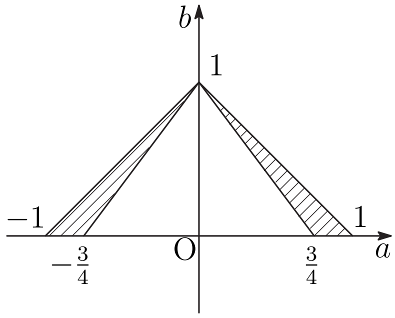
10.1[illegible] [illegible]図の[illegible]分で[illegible]含む．

[illegible]

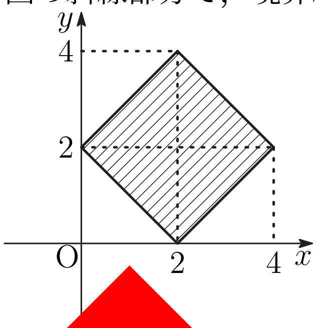


10.18 (1) $\mathrm{Q}(1-b,\ 1-a)$ (2) $ax+(1-b)y+b-1=0$

(3) 下の図の斜線部分．ただし，境界線を含まない．



10.19 (1) 図の斜線部分で，境界線を含む．

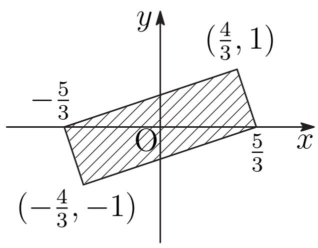


(2) x [illegible] とき，最大値 10， $x=2$ [illegible]， 最 [illegible]

10.20 [illegible] $-\frac{4}{3}$ [illegible]

(2) 最 [illegible] 3 $\Big($ x [illegible] $22\Big)$， 最大値 25 $(x=4,\ y=-3)$

10.21 [illegible] 4 点 [illegible]， $(\frac{5}{3},$ [illegible] $\frac{4}{3},-1)$， [illegible]) を頂点とする [illegible] 四辺形 [illegible] およびその内部 [illegible]， 右の [illegible] 線部分 [illegible]



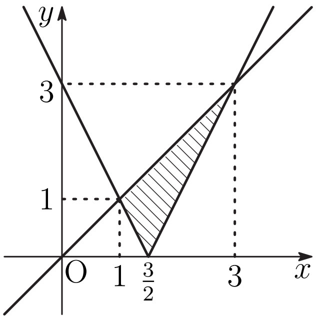
(2) [illegible] $) = ($ [illegible] $)$ のとき [illegible]

10.22 (1) $\frac{25\sqrt{}}{16}$ [illegible] (2) [illegible] (3) $\left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{8}\right)$ で最小値 $-\frac{1}{8}$

10.23 (1) $k=\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ [illegible] $\frac{-1}{\sqrt{5}}b+1$ (2) $\begin{cases} \text{最大値}\,2 & (a=1,\ b=2\ \text{のとき}) \\ \text{最小値}\,\frac{2\sqrt{5}}{5} & (a=1,\ b=0\ \text{のとき}) \end{cases}$

10.24 最大値 5， 最小値 $-\frac{7}{2}$

10.25 (1) D の表す領域は図の斜線部分で，境界を含む．



(2) 点 $(3,\ 3)$ で最大値 $3a+3$

$0<a<2$ のとき点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ で最小値 [illegible]

$2<a$ のとき点 $(1,\ 1)$ で最小値 $a+$ [illegible]

(3) 点 $\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$ で最小値 $\dfrac{9}{5}$

10.26 (1) Q$\left(\dfrac{11}{5},\ \dfrac{7}{[illegible]}\right)$，R$\left(-\dfrac{9}{7},\ -\dfrac{[illegible]}{7}\right)$ (2) $\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{b}$ [illegible]

11.1 1

11.2 sin [illegible] $\theta=$ [illegible]

11.3 [illegible] $2\theta=$ [illegible] $\tan 4\theta$ [illegible] $\alpha=\dfrac{1}{239}$

11.4 [illegible]

11.5 [illegible] (2) 省 [illegible] $=\dfrac{-1+[illegible]}{[illegible]}$

11.6 α [illegible] °

11.7 (1) 省 [illegible]

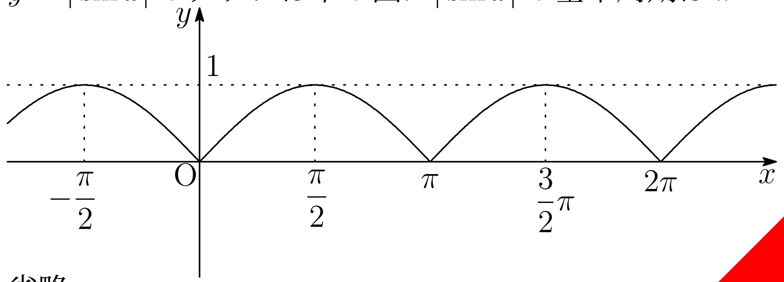
11.8 (1) 省略 (2) $(m$ [illegible] $=(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3)$

11.9 (1) $y=\left(\dfrac{-1+\sqrt{[illegible]}}{[illegible]}\right)x$

(2) P$\left(c+\dfrac{[illegible]}{\sqrt{1+m^2}},\ \dfrac{cm}{\sqrt{1+m^2}}\right)$，CP $=c$

(3) $\dfrac{\pi c}{12}$

11.10 (1) $y = |\sin x|$ のグラフは下の図．$|\sin x|$ の基本周期は π



(2) 省略

(3) n が偶数のとき π，n が奇数のとき [illegible]

11.11 $\theta = 0°,\ 60°$

11.12 $\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{2\pi}{3},\ \pi < x \leqq \frac{4\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3} \leqq x < 2\pi$

11.13 $x = \frac{\pi}{4}$

11.14 $x = \frac{2}{3}\pi,\ \ y = \frac{\pi}{3}$

11.15 $\theta = 60°,\ 18$[illegible]$300°$

11.16 $0 \leqq x$ [illegible] $< \frac{4}{3}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi < x \leqq 2\pi$

11.17 [illegible] $= \frac{4}{5},$ [illegible]

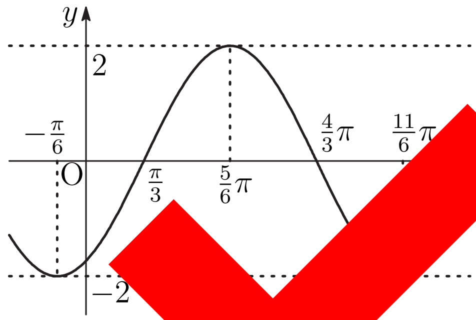
[illegible] $x = \frac{\pi}{}$ [illegible] $\pi,\ \frac{11}{1}$ [illegible]

[illegible] $\frac{}{8},\ \frac{5}{}$ [illegible]

11.20 [illegible] $\pi,\ \frac{5}{}$ [illegible] 2π

11.21 (1) $$f(\theta)=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

$y=f(\theta)$ は $y=2\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に，$\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもの．



(2) $\theta=-\frac{5}{6}\pi,\ \frac{\pi}{2}$

(3) $-\pi<\theta<-\frac{5}{6}\pi,\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

11.22 (1) $p=q=r=s=\frac{1}{4},\ t=0,$ [illegible] $\frac{1}{4},\ w$ [illegible] $\frac{7}{8}\pi$

11.23 $\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$ [illegible] とき最大値 $\frac{5}{4}$，$\theta=0$ のとき最小 [illegible]

11.24 (1) [illegible] $(\ <0)$ [illegible]，$m(a)=$ [illegible] $(-4\leqq a\leqq 4)$，$(4<a)$

(2) M [illegible] 最小値 [illegible] の最大値は -2

11.25 [illegible] $135°$ [illegible] $-1\leqq$ [illegible] 2 (3) y [illegible] $x^2+ax+\frac{1}{2}$

[illegible] $\leqq a$ [illegible] a [illegible] のとき [illegible]

11.26 (1) $a=$ [illegible] $=3$ [illegible] $0<x<\frac{\pi}{3}$

11.27 (1) 省略 (2) $\sqrt{3}$ [illegible] $-\sin\theta=2\cos(\theta+\alpha)$，$\alpha=30°+360°\times n$ (n は整数)
(3) $\theta=0°$ のとき [illegible] 1，$\theta=135°$ のとき最小値 $-\sqrt{2}$

11.28 (1) $y=-t^2+$ [illegible] (2) 最大値 3，最小値 $-2\sqrt{3}-1$

11.29 (1) $0\leqq t\leqq 2$ (2) $\log_2(t+2)+t^2+1$
(3) 最大値 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=7$，最小値 $f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=2$

11.30 (1) $A=90^\circ$ (2) $\sin B=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos B=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (3) $B=75^\circ$

11.31 (1) $\tan\theta=\dfrac{(a-b)x}{x^2+ab}$ (2) $x=\sqrt{ab}$

11.32 (1) $\mathrm{PC}=2\cos\theta$ (2) $2-\sqrt{2}\leqq \mathrm{PA}+\mathrm{PC}-\mathrm{PD}\leqq 2(\sqrt{2}-1)$

11.33 (1) $\sin\theta=\dfrac{2S}{bc}$, $\cos\theta=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (2) 省略 (3) D [illegible] $\sqrt{3}(S+T)$

11.34 (1) $\cos\angle\mathrm{QMR}=\dfrac{4}{5}$ (2) $2\angle\mathrm{QMR}$ [illegible]

11.35 (1) $\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB}=\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}-$ [illegible]

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最小値 $2(\sqrt{2}-1)$

11.36 (1) $\sin\angle\mathrm{OPB}=\dfrac{\alpha}{\sqrt{x+\alpha^2}}$, [illegible]

(2) $\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}$ (3) $\alpha=3$

11.37 (1) 省[illegible] (3) 省略

11.38 [illegible] $=\dfrac{24}{}$ [illegible] (3) 4 (個)

1[illegible] (1) r[illegible], r_2 [illegible] (2) 省略

[illegible]

12[illegible] lo[illegible]

12.2 [illegible] 0

12.3 $a\geqq 2$ [illegible]

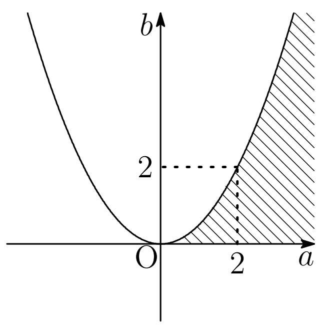
12.4 (1) $x=1,\ 2$

(2) $x=1+\log_2 a$ [illegible]

(3) $a>0$, $b>$ [illegible] $\dfrac{1}{2}a^2$

求める領域[illegible]右の図の斜線部分である．

ただし，境界線を含まない．



12.5 (1)(ア)　$m=2,\ x=0$　(イ)　$x=\log_2 \dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$

(2) $\begin{cases} a<1 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a=1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ 1<a<2 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a=2 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$

12.6 -3

12.7 $\dfrac{1}{2}+\log_9 8<\log_3 5<\log_9 26$

12.8 $\log_a b<\log_b a$

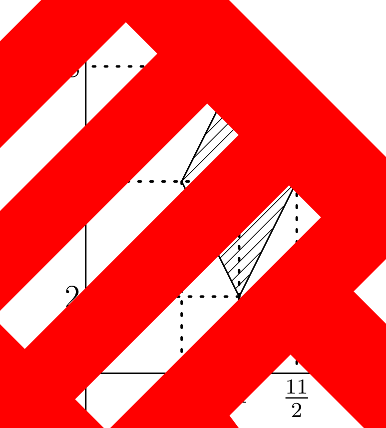
12.9 省略

12.10 省略

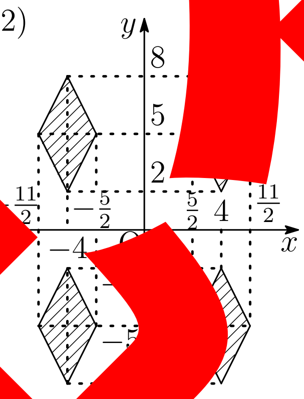
12.11 $\log_2 a : \log_2 b : \log_2 c = 1:3:9$

12.12 $(a,\ b)=(-1,\ 1),\ \left(-3,\ \dfrac{1}{4}\right)$

12.13 (1)



(2)



(3) [illegible] $(4,\pm 4)$, [illegible] $(5,\pm 5)$

12.14 $x=16,\ \dfrac{1}{16}$

12.15 $x=\dfrac{1}{10},\ 1000$

12.16 $x=-1$

12.17 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

12.18 $x=2$

12.19 $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

12.20 (1) $\alpha\beta\gamma = 1$ (2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = -\dfrac{11}{3}$ (3) $\alpha = -1,\ \beta = -\dfrac{1}{3},\ \gamma = 3$

12.21 $1 < x < \dfrac{14}{13}$

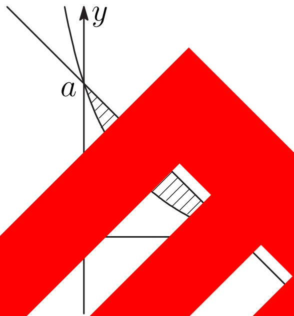
12.22 $x \geqq \dfrac{3}{2}$

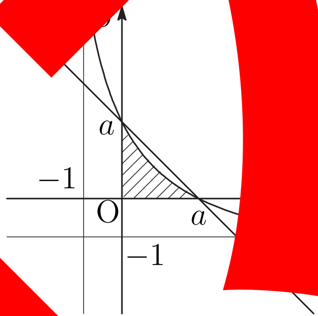
12.23 $1 < x \leqq 5$

12.24 $a > 1$ のとき $x > 2+\sqrt{3}$, $0 < a < 1$ のと … $\sqrt{3}$

12.25 $a > 1$ のとき $3-\sqrt{7} \leqqq x < 1,\ 1 < x$ …
$0 < a < 1$ のとき $x \leqq 3-\sqrt{7},\ 2 \leqq$ …

12.26 $0 < a < 1$ のとき　　1 … き





境界 … まない　　… 線を含まない

… $0° <$ … $0°$ (… $\leqq \theta \leqq 135°$ … $20° < \theta \leqq 180° - \alpha$

12.2 … 値 5

12.29 (1 … t^2 … 2) $0 \leqq t$ … 4 (3) $a \geqq 4$

12.30 最小値 f … $\sqrt{3}$ …

12.31 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(\log_2 a)(\log_2 a \cdots & \left(0 < a < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ -\dfrac{1}{8} & \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq a \leqq \sqrt{2}\right) \\ \dfrac{1}{2}(\log_2 a)(\log_2 a - 1) & (\sqrt{2} < a) \end{cases}$

12.32 13 桁

12.33 44 桁の整数

12.34 (1) $\log_{10} 2 > 0.3$ (2) $2^{21} > 5^9$

12.35 (1) $x < 0$, $\log_2 3 < x$ (2) $f(1.59) > 0$

12.36 (1) $n = 69$ (2) 15 桁の整数 (3) 小数第 8 位

12.37 (1) $\dfrac{9}{10}a$ (2) $\left(\dfrac{9}{10}\right)^n a$ (3) $n = 22$

12.38 (1) $S = 3$, $S_1 = \dfrac{3(2+\sqrt{3})}{4}$ (2) S_n … (3) 10

13.1 $7f'(a)$

13.2 $y = -2\sqrt{2}x + 3$

13.3 $y = -\dfrac{1}{4}$

13.4 (1) 証明は省…

(2) tan …

(3) … $\dfrac{a^2 - 3a + 1}{2a - 1}$

l_2 は …にかか… 定点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ を…

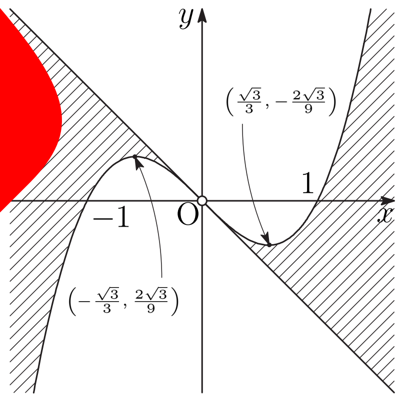
13.5 (1) … $3t^2$ − … t^3

…略

… $y =$ … $y = 2$…

…$)(-v^3$ … $v) <$ …

…囲は，右の… 部分…び原点を含まない.



13.6 (1) $a > -\dfrac{3}{4}$ (2) … 3 (3) $a = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{3}$

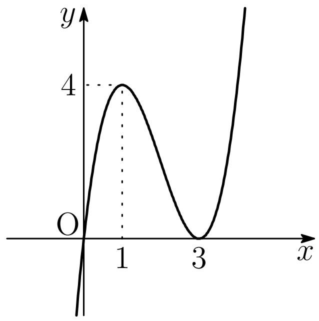
13.7 (1) $x + 2py - 2p$… $p = 0$ (2) $a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき 1 本, $a > \dfrac{1}{2}$ のとき 3 本

13.8 $a = \dfrac{2}{3}$, $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{3}x^2 - 1$

13.9 (1) 省略 (2) $(-k,\ 0)$ (3) $y = -k^2x - k^3$

13.10 (1) $k < 4$ (2) $k = 3$

(3)



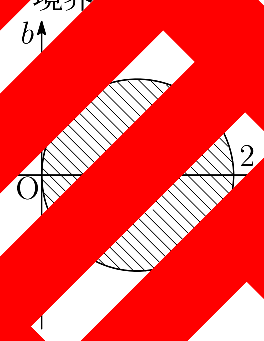
13.11 (1) $-60^\circ < \theta < 60^\circ$ (2) $m = \frac{2}{3}(4\sin^2\theta$ …

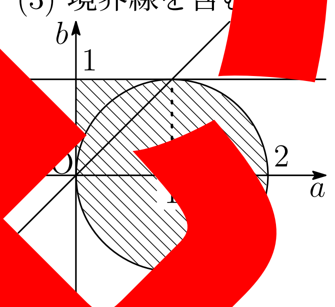
13.12 $a = 22,\ 23$

13.13 (1) $(a-1)^2 + b^2 \leqq 1$, (図は左 …

(2) $0 \leqq b \leqq 1$

(3) $\left\{ \begin{array}{l} a \geqq \ldots \\ 0 \ldots \\ \ldots a \end{array} \right.$ または $(a-1)^2 + b^2 \leqq 1$, …





13.14 $t = \frac{\ }{3}$ … π

13.15 (1) $y = 2(t-2)x$ … 4 (2) $\left(\frac{t+2}{2},\ 0\right)$ (3) $t = \frac{2}{3}$ のとき最大値 $\frac{64}{27}$

13.16 $4000\,(\mathrm{cm}^3)$

13.17 (1) $y = 2mx -$ … (2) $a = 2m - m^2,\ b = \frac{m}{2}$

(3) $\frac{1}{4}(m^3 - 4m^2 + 4m)$ (4) $\frac{8}{27}$

13.18 $0 < p < \frac{1}{5}$ のとき　最大値 $4p^2(2-p)$,　最小値 $5p-1$

$\frac{1}{5} \leqq p < \frac{1}{2}$ のとき　最大値 $4p^2(2-p)$,　最小値 0

$\frac{1}{2} \leqq p < 1$ のとき　最大値 $5p-1$,　最小値 0

13.19 (1) $m = 7$

(2)

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{7}{3}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	[illegible]	$+$	[illegible]
$f(x)$	$\frac{19}{8}$	$\nearrow$	極大 3	$\searrow$	極[illegible] $\frac{49}{27}$	[illegible]	[illegible]

(3)　$a > 1$ のとき　最大値 $\log_a 3$ $(x$ [illegible]

$0 < a < 1$ のとき　最大値 $\log$ [illegible] 49 [illegible]

13.20 (1) 省略　(2) 省略　(3) 最 [illegible] $\sqrt{6}$ / 9, $t =$ [illegible] き p [illegible] $q = \frac{-3+\sqrt{6}}{3}$,

$t = 3$ のと[illegible] $\frac{-3-\sqrt{15}}{3}$, $q = \frac{-3+\sqrt{15}}{3}$

13.21 (1) [illegible] co[illegible] $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

[illegible] $\frac{\pi}{4}$ の[illegible] $\sqrt{2}$, $\theta = \pi$ のとき最小[illegible]

(3) si[illegible] $\theta = \frac{t^2}{}$ [illegible]

[illegible] $\frac{\pi}{4}$ の[illegible]大値 1 [illegible] $\frac{}{4}\pi$ のと[illegible]値 $-\frac{1}{2}$

$\sin^3$ [illegible] $s^3\theta =$ [illegible]

[illegible] $\frac{\pi}{2}$ の[illegible]大値 [illegible] の[illegible]小値 -1

13.22 (1) 1 [illegible] $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \sin^3\theta + \cos^3\theta \leqq 1$

13.23 (1) $-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ [illegible] $y = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$　(3) 最大値 1, 最小値 -1

13.24 (1) $-1 \leqq t \leqq \sqrt{}$[illegible] $y = 2t^3 - 3t^2 + 3$　(3) 最大値 3, 最小値 -2

13.25 (1) $-1 \leqq t \leqq$ [illegible] (2) $g(t) = -2t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t + \frac{11}{2}$

(3) 最大値 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{57}{8}$, 最小値 $g(-1) = -3$

13.26 (1) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

(2) 最大値 $\dfrac{121}{54}$，最小値 $-\dfrac{5}{2}$

13.27 (1) $-\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $y = 4\cos^3\theta - 6\cos\theta + 1$

(3) $\theta = 120^\circ$ のとき最大値 $\dfrac{7}{2}$，$\theta = 45^\circ$ のとき最小値 $1 - 2\sqrt{2}$

13.28 (1) $a = 3$ (2) $f(\theta) = t^3 - 6t^2 + \dfrac{21}{4}t + 3$

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{17}{4}$，$\theta =$ [illegible] き最大 [illegible]

13.29 (1) $f(\theta) = 4x^3 - \sqrt{6}x^2 - 12x$ (2) $\theta =$ [illegible]

13.30 $x = \log_a(2 - \sqrt{3})$ のとき最小値 34

13.31 (1) $g(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 8$ [illegible]

(3)

t	[illegible]	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(t)$	[illegible]	$-$	0	$+$
[illegible]	[illegible]	[illegible]	8	$\nearrow$

(4) [illegible] $\log_2(2$ [illegible] とき，最小値 8

13.3[illegible] [illegible] $(0,\ 0)$ [illegible] $3\sqrt{}$ [illegible] $\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ (2) [illegible] < 4

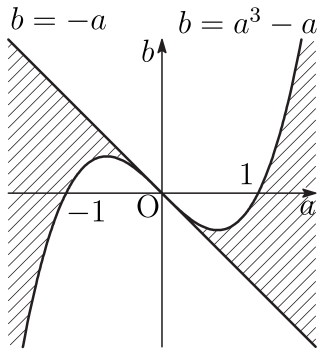
13.33 [illegible] a [illegible]

$a +$ [illegible]

[illegible] は [illegible] $a + b$ [illegible]

[illegible] $-a$ [illegible]

[illegible] 表す [illegible] 右の図の [illegible] 境界線を [illegible]



13.34 (1) $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ [illegible] 線 QR は定点 $\left(\dfrac{a}{2}, -b\right)$ を通る．

13.35 (1) $\mathrm{MB} = 2\sin$ [illegible] $\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ (2) $\mathrm{PB} = 1 - \cos 4\theta$

(3) $4t^3 - 4t +$ [illegible] (4) 省略

13.36 (1) $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2(3\beta - \alpha)}{2}$，$f(\beta) = \dfrac{\beta^2(3\alpha - \beta)}{2}$ (2) 1 個

13.37 (1) $-1 < a < 1$ (2) 省略 (3) 省略 (4) $\cos(\theta - 120°) > \cos(\theta + 120°)$

13.38 $\displaystyle\int_0^3 |x^2 - x - 2|\,dx = \frac{31}{6}$

13.39 (1) $S = -6m + 4n$, $T = -2m - 4n + 16$ (2) $m = 2$, $n = 3$

13.40 (1) 極大値 $f(0) = -\dfrac{a^3}{3} + \dfrac{a^2}{2}$, 極小値 $f(1) = -\dfrac{a^3}{3} + \dfrac{a^2}{2}$ [illegible]

(2) $-\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{3}{2}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$

13.41 (1) $x = 0,\ \dfrac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ (2) -9

13.42 (1) $f'(x) = \dfrac{3}{2}(x^2 - x - 2)$ (2) $\dfrac{27}{4}$

13.43 (1) $f(x) = 3ax^2$ (2) $a = 1$ の [illegible] 接点 [illegible]; $a =$ [illegible] き 接点 $\left(\text{[illegible]} \frac{1}{2} \right)$

13.44 (1) $g(t)$ [illegible] $^2 + 2at - b$ (2) $b = a + 1$, [illegible]

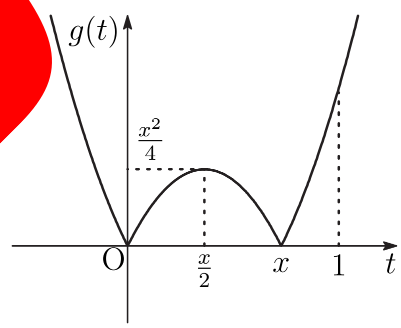
(3) [illegible] $= 2$

13.[illegible] [illegible] $S(t) =$ [illegible] $(t < 0)$; [illegible] $t^3 -$ [illegible] $(0 \leqq t \leqq 1)$; $\frac{1}{2}t$ [illegible] $t)$ (2) [illegible] 値 $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

[illegible] $(t) =$ [illegible] $(\text{[illegible]} x \leqq t)$; [illegible] $+ xt$ [illegible] $x < t)$

グ [illegible] 概形 [illegible]

[illegible] 図のよ [illegible] る.



(2) f [illegible] $+ \dfrac{1}{3}$

(3) 最大値 $f(0) =$ [illegible]

最小値 $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ [illegible] $3 - \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

13.47 (1) $a<0$ のとき $f'(0)=a+1$，$a>0$ のとき $f'(0)=-a-1$

(2) $S(a)=\begin{cases} \frac{1}{3} & (a<0) \\ -\frac{a^3}{3}+a^2-a+\frac{2}{3} & (0<a<1) \\ \frac{1}{3} & (1 \leqq a) \end{cases}$

(3) $0<a<1$ に極値をもたない．$S(a)$ の最小値は $\dfrac{1}{3}$ $(a<0,\ 1\leqq a)$

13.48 (1) 省略 (2) 省略 (3) $a=1+\sqrt{3}$，$c=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ の [illegible] $\int_0 [illegible] f(x)\,dx=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}$

13.49 $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{6+\sqrt{15}}{3}$

13.50 (1) $f(x)=3x^2-4x+9$ (2) $k=2$

13.51 (1) $f(x)=x^2+3x$ (2) $\dfrac{31}{6}$ (3) [illegible] 共有点 [illegible] 個
[illegible] 0 の [illegible] 共有 [illegible]
$0<k<3$ [illegible] k の [illegible] 個
$k=3,\ 4$ の [illegible] 3 個
$3<k<4$ [illegible] 個

13.52 (1) [illegible] -3 [illegible] $+1$ (2) $y=2x+1$ (3) [illegible] 8

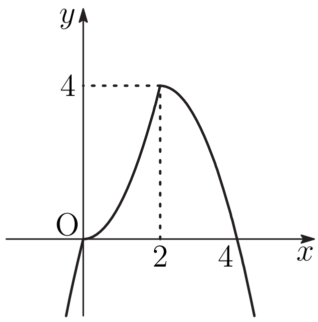
13.53 [illegible] 省略 [illegible] $f(x)$ [illegible] $\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}$

13.54 (1) [illegible] $b=$ [illegible] き，[illegible] の解は $x=-\dfrac{1}{3},\ 1$
[illegible] $=9$ [illegible] 6 の [illegible] $(x)=0$ の解は [illegible] $=\dfrac{8\pm\sqrt{109}}{3}$
[illegible] $-\dfrac{25}{4}\Big)$

13.55 (1) 省 [illegible] ，$2a$ (3) [illegible] 3

13.56 (1) $f(x)=x^2-4$ [illegible] (2) $g(x)=-x^2+2x-1$ (3) 36

13.57 (1)



(2) $S = \dfrac{13}{6}$

13.58 $p = \dfrac{5}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{58}{3}$

13.59 (1) $\dfrac{4(2t+a)}{t+2a}$ (2) 省略

13.60 (1) $\dfrac{16}{3}$ (2) $S(t) = -\dfrac{t^3}{3} + 2t$ (3) [illegible]

13.61 (1) $q = \dfrac{4p^2-3}{8p}$ [illegible] (2) $(p,\ q)$ [illegible] $\dfrac{}{2},\ \mp\dfrac{1}{2}\Big)$ [illegible]同順)

13.62 (1) x [illegible] $\dfrac{|2t-1|}{\sqrt{2}}$ (2) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

13.63 [illegible]$,\ 3)$, [illegible]$3)$ (2) $S = \dfrac{1}{3}a^3$ [illegible]の最小値 $\dfrac{8}{3}$ $(a=2)$

[illegible] (1) [illegible]), AB [illegible] $1+$ [illegible] (2) $S(a) = \dfrac{2a}{[illegible]} + \dfrac{1}{4a}$

[illegible] $= \dfrac{\sqrt{6}}{[illegible]}$ [illegible]き, 最[illegible] $\dfrac{[illegible]}{3}$

13.65 [illegible] x 座標 [illegible] の x [illegible] $S_2 = \dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{1}{4}t$ (3) $t > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

13.66 (1) x [illegible] $\sqrt{3}$ [illegible] $\dfrac{64\sqrt{3}}{9} - \dfrac{[illegible]}{3} + \dfrac{32}{3}$

13.67 $a = \dfrac{-4+\sqrt{22}}{2}$

13.68 (1) $\dfrac{4}{3}$ (2) $\dfrac{5\sqrt{[illegible]}}{[illegible]}$

13.69 (1) 省略 (2) $\dfrac{3}{4}\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$

13.70 (1) $f(-2)=0$ (2) $\dfrac{S_1}{S_2}=8$

13.71 (1) $(2,\ 0)$ (2) $(2,\ 0)$ (3) $\dfrac{20}{3}+2\pi$

13.72 (1) $-\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ (2) $x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4a+8}}{2}$ (3) $a=2$ のとき最小値 $\dfrac{4}{3}$

13.73 (1) $k=-\dfrac{3}{4}$ (2) $\left(\dfrac{3-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{3-2\sqrt{2}}{4}\right)$, $\left(\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}, [illegible]\right)$ (3) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

13.74 (1) 省略 (2) $\beta-\alpha=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}}$ (3) [illegible]

(4) $a=\pm1$ のとき最小値 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

13.75 (1) $a=2,\ b=-4$, 極大値 f [illegible] $\dfrac{121}{27}$, [illegible]

13.76 (1) A(3, [illegible] (2) $y=2x-4$ (3) $b=-4a+$ [illegible] $=3a$ [illegible]

13.77 (1) [illegible] $k-\dfrac{1}{6}$ (2) 省略 (3) [illegible]

13.78 (1) Q [illegible] (2) $S=\dfrac{1}{6}$ [illegible] $\dfrac{1}{2a}\Big)^3$

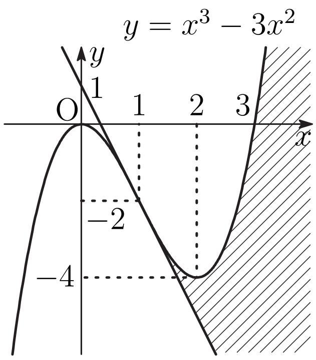
(3) [illegible] のとき [illegible] 値 [illegible]

13.79 (1) S_1 [illegible] $(a+2)$ [illegible] (3) a [illegible] $\sqrt{3}$ [illegible]

13.80 (1) [illegible] $-x+\dfrac{3}{4}$ [illegible] $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$

13.81 (1) 極大値 $3a+b-1$，極小値 $-a^3+3a^2+b$

(2)



(3) $\dfrac{1}{6}$

13.82 (1) $t \neq 2$ のとき　$y = \dfrac{1}{t-2}(x-t) -$ [illegible]

$t=2$ のとき　$x=2$

(2) $t=3$　(3) $\dfrac{32}{3}$

13.83 (1) $a = \dfrac{2}{\ldots}$ [illegible] 0，$c=0$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(3) $\dfrac{\pi}{3} +$ [illegible]

13.84 (1) [illegible] $= \sqrt{3}$ [illegible] $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$　(2) $x^2 +$ [illegible] $\Big)^2 = 1$　(3) $\dfrac{3}{4}\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$

13.85 (1) $y =$ [illegible] $a^2 +$ [illegible]

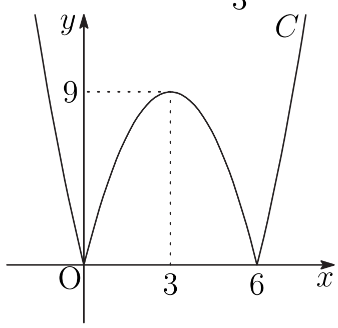
(2) [illegible] の値に [illegible] わら [illegible] 36.

13.86 (1) $\dfrac{1}{6}(a +$ [illegible]　(2) [illegible]　(3) 直線の方 [illegible] $= -ax+1$，面積 $\dfrac{4}{3}$

13.87 (1) [illegible] $x| = \begin{cases} \ldots & (x \leqq 0, \ldots) \\ \ldots(x-3)\ldots & (\ldots) \end{cases}$

[illegible] $= |x^2-6x|$

のグラフは，[illegible] のようになる．



(2) $0 < k < 6$

(3) $k = 6(3-2\sqrt{2})$

13.88 (1) $0 < k < 1$　(2) $S = \dfrac{1}{6}(-k^3+9k^2-3k+1)$　(3) $k = 3-2\sqrt{2}$

13.89 (1) $p = \frac{1}{9}$ (2) $(3,\ 1)$, $(-3,\ 1)$ (3) $y = \frac{2}{3}x + 3$, $\mathrm{B}(15,\ 13)$ (4) 32

13.90 (1) $\mathrm{H}\left(\frac{t^2+t}{2},\ \frac{t^2+t}{2}\right)$ (2) $\frac{1}{4}(t^4 - 2t^3 + t^2)$ (3) $S_1 = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{6}$

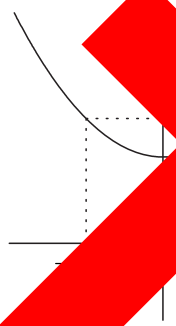
(4) $t = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$

13.91 (1) $-2 \leqq a \leqq 2$ (2) $S = \frac{1}{6}(4-a^2)^{\frac{3}{2}}$

13.92 (1) $a^2 + 8b > 0$

(2) $b = -\frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}$

(3) 右図



13.93 (1) $(0,\ 0)$, $\left(-\frac{1}{k},\ \frac{1}{k^2}\right)$ (2) $S_1 = \frac{k^3}{6}$, $S_2 =$ [illegible]

(3) k [illegible] 最小値 $\frac{1}{3}$

13.94 [illegible] $= 2(1$ [illegible] $t = 0$ のとき最大 [illegible] $= \frac{3}{2}$ のとき最小値 $\frac{9}{4}$

[illegible] (1) [illegible] $- a^2$ [illegible] $\frac{1}{\ }a^3 + a^2 - a + \frac{1}{3}$ (3) 最小値 $S\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{27}$

[illegible] $S_1 = \frac{2}{\ }$ [illegible] $S_2 = \frac{2}{\ }$ [illegible] $+ \frac{1}{3}$ (2) 最 [illegible] $\left(a = \frac{1}{2}\right)$

13.97 [illegible] $= -6$ [illegible] (2) g [illegible] (3) 最小値 $h(1) = \frac{127}{6}$

13.98 (1) $\frac{1}{3}m$ [illegible] n [illegible] (2) $S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$

13.99 $k = 1$

13.100 (1) 省略 (2) a [illegible] 1 のとき最小値 $\frac{1}{54}$

13.101 (1) $0 < p < 2\sqrt{2}$ (2) 省略 (3) $S(\sqrt{2}) = 2$

13.102 (1) $S = -\frac{1}{6}\alpha^4 + \frac{1}{3}\alpha^3\beta - \frac{1}{6}\alpha\beta^3 + \frac{1}{12}\beta^4$ (2) $\alpha = \frac{\beta}{2}$

13.103 (1) $b=3a^2-3$ (2) $-1<a<1$ (3) $a=0$ のとき，S は最小値 $\dfrac{9}{2}$ をとる．

13.104 (1) $a=\sqrt{3},\ b=-2$ (2) $(\sqrt{3},\ 1)$，$c=1$ (3) $\sqrt{3}$

13.105 (1) $y=-x^2+4$ (2) $\mathrm{E}(a-1,\ 4a+4)$ (3) $S=\dfrac{1}{3}(a+1)^3$

13.106 (1) $a=\dfrac{3}{4}$，$b=\dfrac{1}{2}$，$c=\dfrac{3}{2}$ (2) $y=-x+\dfrac{9}{4}$ (3) $\dfrac{1}{3}$

13.107 (1) $\mathrm{M}(a,\ a^2)$，$\mathrm{C}(a+2,\ a^2+4a)$ [illegible]

13.108 (1) $y=2(a-1)x-a^2+1$ (2) $a=$ [illegible]

(3) $a=\dfrac{1}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{27}$

13.109 (1) $y=(2t+p)x-t^2+q$ (2) [illegible] (3) [illegible]

13.110 (1) $f(x)=$ [illegible] $(t-2)^2\left(x-\dfrac{t}{2}\right)$ (2) $S(t)=$ [illegible] $2)^2$

(3) $t=$ [illegible] 大値 $\dfrac{64}{81}$

13.111 [illegible] $< \dfrac{2}{3}$ [illegible]

13.112 (1) b [illegible] (2) [illegible] $-2a$

(3) [illegible] $a<\dfrac{1}{}$ [illegible] $S=$ [illegible] $\leqq a<$ [illegible] き $S=1-\left(\dfrac{2a}{3}+\dfrac{1}{4a}\right)$

$a=$ [illegible] とき [illegible] 値 $1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ を [illegible]

13.113 (1) [illegible] $(2t$ [illegible] t^2 (2) [illegible] $y=\dfrac{a}{3}x-\dfrac{a^2}{9}$ (3) $a=3$

13.114 (1) $k(x$ [illegible] $x+$ [illegible] (2) $g(x)=x^2+x+2$ (3) $\dfrac{2}{3}$

13.115 (1) $b=-\left(a+\dfrac{1}{4}\right.$ [illegible] (2) $p=\sqrt{1-\dfrac{1}{4a^2}}$，$q=-\dfrac{1}{2a}$ (3) $\dfrac{1}{12}$

13.116 (1) $\mathrm{Q}(\sqrt{3},\ 1)$ [illegible] $=-\dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{R}(3\sqrt{3},\ 5)$ (3) $S=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2\pi}{3}$

13.117 (1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ (2) $y=x^2-\dfrac{1}{4}$ (3) $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{3}$

13.118 (1) $\frac{43}{48}$ (2) $\frac{43}{72}$

13.119 (1) $\mathrm{R}\left(\frac{p+q}{2},\ pq\right)$ (2) $\frac{9}{4}$

13.120 (1) $y=4x-4$ (2) $y=-x-\frac{1}{4}$ (3) $S=\frac{125}{96}$

13.121 (1) $b=-6a+3,\ c=5a-5$ (2) $a=1,\ b=-3,\ c$ [illegible] $\frac{16}{3}$

13.122 (1) $y=\frac{1}{8}x^2$ (2) $y=x-2,\ y=-$ [illegible] (3) [illegible]

13.123 (1) $(2-t,\ 1-2t)$ (2) $(1-t,\ -1+2t$ [illegible]
(3) $y=(x-1)^2\ (0\leqq x\leqq 2)$ (4) $\frac{2}{}$ [illegible]

13.124 (1) $y=5x-16,\ y=-3x$ (2 [illegible] x^2- [illegible]

13.125 (1) $\alpha+\beta=$ [illegible] $\alpha\beta=-1$ (2) [illegible] $=\frac{k}{2}$ (3) [illegible] $-4)^{\frac{3}{2}}$

13.126 (1) [illegible] (2) [illegible] $\pm 2\sqrt{6}x-y-5=0$ [illegible]

13.127 [illegible] $(x)=$ [illegible] $y=2(\pm\sqrt{k}+1)x$ [illegible] (ii) $k=3$

13.128 (1) l [illegible] $(a-$ [illegible] $m: y=2(b-p)x-b^2+2p^2$
(2 [illegible] $-\sqrt{2}$ [illegible] $\sqrt{2}$ [illegible] $=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

13.129 [illegible] β^2 [illegible] $=0$ [illegible] $=\frac{9}{16a}$ [illegible]
([illegible] x 座標 [illegible] $4a$, Q [illegible] $4a$ (4) $y=-\frac{5}{8}x$ (5) $\frac{9}{32a^2}$

13.130 (1) R [illegible] a [illegible] PQR $=\frac{1}{4}(b-a)^3$ (2) $\frac{5}{12}(b-a)^3$

14.1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+}{2}$ [illegible] (2) AQ : QP = 2 : 5 (3) $\frac{5}{14}\sqrt{3}$

14.2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=2\vec{b},$ [illegible] $3\vec{d}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}$ (3) 省略

14.3 (1) BR : RC = 1 : 2 (2) BR : RC = 2 : 1 (3) BR : RC = 1 : 4

14.4 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{h\vec{a} + (1-h)\vec{b}}{2-h}$ (2) $h = \dfrac{2}{3}$

14.5 (1) $\triangle\mathrm{POA} : \triangle\mathrm{POB} : \triangle\mathrm{PAB} = 2 : 1 : 4$ (2) 省略 (3) $\dfrac{9}{16}$ (倍)

14.6 (1) $\mathrm{BS} : \mathrm{SC} = r : q$, $\mathrm{CT} : \mathrm{TA} = p : r$ (2) 省略

14.7 (1) 省略 (2) 省略 (3) 省略

14.8 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \vec{b} + \beta\vec{a}$ (2) [illegible]R $= \dfrac{1-\beta}{1-\text{[illegible]}}$ [illegible] $= \dfrac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}(1-\alpha\beta)(1-\beta)}{2(2-\alpha-\beta)}$

14.9 (1) C(4, 2), $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 = 40s^2 + 25t^2 + 60$ [illegible]

(2) $s \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき $4s^2 + 8s + 4$, [illegible] 20

14.10 (1) 省略 (2) 省略

14.11 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} =$ [illegible]$)\vec{c} - \vec{b}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \Big(\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$ [illegible]

14.12 $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ [illegible] $\sqrt{5}$

14.1[illegible] [illegible] $3\vec{b}| =$ [illegible]

$\theta = \dfrac{\pi}{\text{[illegible]}}$ [illegible]き最大 [illegible]

[illegible] $= 6$, [illegible] $\dfrac{\sqrt{37}}{3}$

14.16 [illegible] cos [illegible] $|\vec{b}| =$ [illegible]

14.17 (1) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ [illegible] (2) [illegible] $\dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{2}{3}\vec{c}$ (3) $\mathrm{AD} : \mathrm{AE} = 2 : 3$

14.18 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2$ (2) [illegible] $-\dfrac{1}{4}\vec{a} + \dfrac{3}{4}\vec{b}$ (3) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ (4) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1}{10}\vec{a} + \dfrac{9}{20}\vec{b}$

14.19 (1) $\mathrm{BD} : \mathrm{DC} =$ [illegible] (2) $k = 5$ (3) $l = \dfrac{13}{3}$

14.20 $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{a^2+ab+b^2}\left\{\left(\dfrac{1}{2}ab + b^2\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(a^2 + \dfrac{1}{2}ab\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}$

14.21 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 20$ (2) $s = \dfrac{39}{68},\ t = \dfrac{39}{34}$

14.22 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{3\vec{a}+3\vec{b}}{5},\ \overrightarrow{\mathrm{DF}} = \dfrac{1}{5}\vec{a}$

14.23 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (2) $\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$

14.24 (1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})$ (2) $\mathrm{PQ} = \dfrac{\sqrt{19}}{4}$ (3) OR [illegible] : 3

(4) $\triangle\mathrm{PQR} = \dfrac{9\sqrt{3}}{112}$

14.25 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$ (2) $s = \dfrac{4}{3}$ (3) [illegible]

14.26 (1) $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{k^2+k+1}$ (2) [illegible] $k = $ [illegible]

(4) $k = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

14.27 省略

14.28 (1) [illegible] (ア) $\dfrac{1}{2}$ (イ) 最大値 $\dfrac{1}{2}$, [illegible]

14.2[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = $ [illegible] $= \dfrac{t}{2}\vec{a} - \vec{b}$ (3) [illegible] $= \dfrac{\pi}{3},\ \mathrm{OC} = \dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

[illegible] (1) [illegible] $= \sqrt{7}$ [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ [illegible] $\dfrac{3}{9}\vec{b}$ [illegible] $\triangle\mathrm{OAB} : \triangle\mathrm{PBA} = 3 : 2$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ [illegible]

14.31 [illegible] $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ [illegible] B [illegible] : P [illegible] 4

14.32 (1) $l($[illegible]$)$ $l = 3(k-1)\ \left(k > 1,\ k \neq \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ (3) $k = 2$

14.33 (1) $k = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2},$ [illegible] $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}(\vec{b}-\vec{a}),\ \vec{y} = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a} + \vec{b}$

(2) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{\text{[illegible]}}$ (3) $\vec{a}\cdot\vec{x} = \dfrac{1}{2}$

14.34 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\vec{a} + 2t\vec{b}$ (2) $t = \pm\dfrac{1}{2}$

14.35 (1) $a = \dfrac{1}{1+x^2}$, $b = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ (2) 省略

14.36 (1) $\left(\dfrac{1-n}{n^2+1}, \dfrac{n^2-n}{n^2+1}\right)$ (2) $\dfrac{n-1}{\sqrt{2(n^2+1)}}$ (3) 202

14.37 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\vec{a} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1-2\alpha}{1+\alpha}\vec{a}$ (3) $\alpha = \dfrac{1}{5}$

14.38 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1$ (2) $\dfrac{7}{25}$ (3) $1 -$ [illegible]

14.39 (1) 省略 (2) 省略 (3) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 1$

14.40 省略

14.41 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{3}\vec{b}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2}{3}\vec{a}$ [illegible] (3) OP [illegible]

14.42 (1) $-\sqrt{6} <$ [illegible] $< \sqrt{6}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} =$ [illegible] $\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{t}{3}\vec{a}$ [illegible]

(3) [illegible] $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

14.43 [illegible] 省略 [illegible] $\dfrac{1}{2}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{NP}} = t\vec{a}$ [illegible]

(3) [illegible] $\dfrac{1}{2}\vec{a} +$ [illegible] $= -\dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$

[illegible] D : D [illegible] : 7, [illegible] $= 2:1$ (2) [illegible] $\dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{5}{18}\vec{c}$

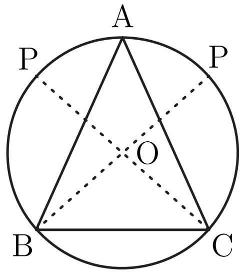
cos [illegible] $\vec{b}\cdot\vec{c}$ [illegible] $+ 6y =$ [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \dfrac{19}{48}\vec{b} + \dfrac{125}{288}\vec{c}$

14.45 (1) [illegible] (2) [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{HO}} = \dfrac{t}{9}(-4\vec{u} + 5\vec{v})$, $r = \dfrac{t}{3}$

(3) $t =$ [illegible] 接 [illegible] 径 1 (4) $0 < t < \dfrac{11 - 2\sqrt{10}}{3}$

14.46 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{3}{8}(\vec{b}+\vec{c})$ (2) $s^2+\frac{2}{3}st+t^2-s-t=0$ (3) $-\frac{3}{16}\leqq v\leqq\frac{9}{16}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{c}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}$



14.47 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{}$ [illegible]

14.48 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2-\sqrt{3})(\vec{a}+\vec{b})$ (2) [illegible]

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (4) [illegible] $\frac{2}{[illegible]+\sqrt{6}-[illegible]}$ [illegible] $\vec{b})$

14.49 (1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=$ [illegible] $\frac{1}{[illegible]}\vec{b}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=-\frac{1}{18}\vec{a}+\frac{5}{18}\vec{b}$ [illegible]

14.50 (1) [illegible] $+q$ [illegible] $=\frac{\pi}{4}$

[illegible] $=\frac{7}{[illegible]}$ [illegible] $-2-\sqrt{3}$, QR の傾 [illegible] $+\sqrt{3}$, $\triangle\mathrm{PQR}=6\sqrt{3}$

[illegible] $\triangle$P [illegible] $5\sqrt{5}$

14.51 (1) [illegible] 1, b [illegible] (2) a [illegible]

14.52 [illegible] 省 [illegible] B$\Big($ [illegible] $\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$ [illegible]

15.1 $t=$ [illegible] 1

15.2 (1) P(0, [illegible] 4) [illegible] OAP $=2\sqrt{6}$

15.3 (1) 中心 (0, 0, 1) [illegible] 4 の円

(2) P(0, $\pm 2\sqrt{3}$ [illegible] Q($\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3}$, 0) (複号同順) のとき,

PQ の最小値 [illegible]

15.4 $s=1$, $t=\pm 2$

15.5 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6s-2t-20$ (2) $(s-1)^2+(t-2)^2=20$

(3) $(s,\ t)=(3,-1)$, $\left(\dfrac{22}{5},\ \dfrac{16}{5}\right)$

15.6 (1) $a=6$ (2) $(0,\ 0,\ 5)$

15.7 (1) $a=-6,\ b=13,\ c=3$

(2)(ア) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ （イ） $\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=$

15.8 (1) $\mathrm{H}\left(\dfrac{31}{11},\ \dfrac{20}{11},\ \dfrac{17}{11}\right)$

(2) $\triangle\mathrm{OBC}=\sqrt{11}$，四面体 AOBC の体

(3) $x^2+y^2+z^2-\dfrac{17}{9}x+\dfrac{1}{9}y-\dfrac{13}{3}z=0$

15.9 (1) $b_1=\dfrac{1}{2},\ b_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ c_1=\dfrac{1}{2},$ … 略

(3) $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$，後半の … は省略

15.10 (1) P … $\mathrm{Q}(1,\ a,\ a)$，$\mathrm{R}(a,\ 1,\ a)$，

(2) … のと …

15.11 (1) $\overrightarrow{\mathrm{GM}}$ … $-4,\ 0$ … $4,\ 0,-2)$ (2) $\cos\theta=\dfrac{2}{5}$ (3) $\triangle\mathrm{GMN}=2\sqrt{21}$

(4) … (5) … $=\dfrac{5}{7}$ …

省略 … 省略

15.13 (1) … $-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}\Big)$

15.14 (1) … $\sqrt{x^2-6x+1}$ … $+1$ $(0\leqq x\leqq 3)$ (2) $\dfrac{\sqrt{70}}{5}$

15.15 (1) $-6\leqq m\leqq 3$

(2) $\mathrm{H}(3,\ 0,\ 0)$ … 最大値 $3\sqrt{5}$，$\mathrm{H}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$ のとき最小値 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

(3) $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{3}{10}\right)$，$r=\dfrac{3\sqrt{30}}{10}$

15.16 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \dfrac{1}{3}\{(x+1)\vec{a} + (t+1)\vec{b} + (x+1)\vec{c}\}$ (2) $t = x$

(3) 最小値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ (4) $\dfrac{3}{16}$

15.17 (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (2) $u = \dfrac{x}{1-z},\ v = \dfrac{y}{1-z}$

(3) $(x,\ y,\ z) = \left(\dfrac{2u}{u^2+v^2+1},\ \dfrac{2v}{u^2+v^2+1},\ \dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$

(4) 点 $(-1, -1)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円

15.18 $\pm\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4},\ \dfrac{\sqrt{6}}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$

15.19 (1) 省略 (2) $(3,\ 1,\ 0)$

15.20 (1) $\cos\theta = \dfrac{2}{7}\sqrt{6}$ (2) $S = 5\sqrt{6}$ [illegible]

15.21 (1) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, $\triangle\mathrm{ABC} = 3$ [illegible] $(-1,\ 1,$ [illegible] (3) [illegible]

15.22 (1) $\triangle\mathrm{A}$ [illegible] 3 (2) ともに $\dfrac{1}{2}$ (3) 省略 [illegible] 省略

15.23 (1) [illegible] $= \sqrt{6}$ [illegible] $\sqrt{42}$, $\mathrm{CA} = \sqrt{42}$ (2) [illegible] $\sqrt{3}$ (3) $\ell = \dfrac{7}{9},\ m = \dfrac{2}{9}$

$k = \dfrac{11}{}$ [illegible] $= \sqrt{}$ [illegible] $V = 11$

15.24 (1) [illegible] $ca,$ [illegible]

$\sqrt{(}$ [illegible] $(ca)^2$ [illegible]

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} =$ [illegible] $\dfrac{abc}{\ )^2 + (}$ [illegible] $(bc,\ ca,\ ab)$ [illegible] $| = \dfrac{abc}{\sqrt{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}}$

15.25 (1) a [illegible] $\sqrt{\dfrac{b^2c^2 + 4}{9a^2 + 4b^2 + c^2}}$ [illegible]

15.26 (1) 省略 (2) $\dfrac{1}{2}\sqrt{}$ [illegible] $x - 2\cos\theta)^2 + 8\sin^2\theta$

(3) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ の [illegible] $\dfrac{1}{2}\sqrt{9 - 4\cos\theta - 4\cos^2\theta}$

$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{2\pi}{}$ [illegible] き $\sqrt{2}\sin\theta$

$\dfrac{2\pi}{3} < \theta < \pi$ のとき $\dfrac{1}{2}\sqrt{9 + 4\cos\theta - 4\cos^2\theta}$

15.27 OK : KG = 18 : 11

15.28 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$ (2) $\mathrm{CE}:\mathrm{EF}=7:2$ (3) $\frac{8}{63}V$

15.29 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{5}{18}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{5}{6}\vec{c}$

15.30 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{10}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{DE}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ (3) $S_1:S_2:S_3=5:2:3$

15.31 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ (2) $s=\frac{1}{3}$, $t=\frac{1}{2}$, [illegible] (3) $2:5$

15.32 (1) $\vec{e}=\frac{1}{4}(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})$ (2) 省略 [illegible]

15.33 (1) $\vec{d}=\frac{t-1}{2t-5}\vec{a}+\frac{t-4}{2t-5}\vec{b}$ (2) $|\vec{c}|^2=$ [illegible]

15.34 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{5}$ (2) $\mathrm{CR}=\frac{\sqrt{21}}{[illegible]}$ [illegible]

15.35 (1) $\vec{d}=\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{[illegible]}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{FG}}=$ [illegible] $(1-t)\vec{b}+$ [illegible] $\vec{c}$, [illegible] (3) 省略

(4) $t=1$ [illegible] 最小値 $\frac{1}{2}$

15.36 [illegible] $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (2) $\frac{5}{48}$ (3) [illegible]

[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\left(0,\ \frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)$ (3) $\frac{3\sqrt{30}}{25}$

[illegible] (2) [illegible] $q=\frac{1}{6}$ (3) [illegible]

[illegible] (2) [illegible]

15.40 (1) [illegible] $\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=4$, [illegible] $=3$ (2) 省略 (3) $\frac{5}{3}$

15.41 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{[illegible]}{8}\vec{b}$ (2) [illegible] $\mathrm{PC}=\frac{\sqrt{11}}{8}$ (3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{49}{120}(\vec{c}+\vec{a})$

15.42 (1) $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}-s\vec{a}$, [illegible] $=t\vec{c}-s\vec{a}$ (2) $t=\frac{s(1-2s)}{1-s}$

(3) $s=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ [illegible] き t は最大値 $3-2\sqrt{2}$ をとる． (4) $\mathrm{PQ}^2=\frac{27-19\sqrt{2}}{2}$

15.43 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=20,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=44,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=5$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{7}{15}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}$ (3) $\mathrm{CH}=\frac{2\sqrt{33}}{3}$

(4) $V_1=\frac{20\sqrt{11}}{3},\ V_2=\frac{10\sqrt{11}}{9}$

15.44 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{2s}{3}\vec{a}+\frac{s}{3}\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}=\frac{2s}{3}\vec{a}+\frac{s}{3}\vec{b}-\vec{c}$ (2) $s=\frac{3\cos\theta+3}{14}$

(3) $\cos\theta=\frac{2}{5},\ s=\frac{3}{10}$ (4) $V=\frac{\sqrt{6}}{5}$

15.45 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{s}{3}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{3}\vec{c}$

(2) (a) $s=\frac{1}{2},\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{15}}{5}$

(b) $\mathrm{OG}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \mathrm{BC}=\sqrt{31},\ \angle\mathrm{BAC}$ [illegible]

(c) $V=\frac{1}{2}$

15.46 (1) 省略, $S(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t$ [illegible] (2) 省略 [illegible] $=\frac{\ }{3}$ [illegible] 6

15.47 (1) $\vec{a}\cdot\vec{c}=$ [illegible] $=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2\cos\theta$

(2) [illegible] $2($ [illegible] $),\ |\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ [illegible] $\angle\mathrm{ACB}$ [illegible]

15.4[illegible] (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=$ [illegible] $+\vec{c},$ [illegible] (2) $\overrightarrow{\mathrm{BR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=$ [illegible] $)\left(t-\frac{1}{2}\right)$

(3)(i) [illegible] $\frac{-t^2+}{t^2}$ [illegible] (ii) [illegible] $=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{1}{3}$, $S=\frac{\sqrt{5}}{6}$

[illegible] $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ [illegible] $\vec{c}\cdot\vec{a}=$ [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{7}{15}(\vec{a}+$ [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{14}{15}\vec{a}+\frac{14}{15}\vec{b}-\vec{c}$

[illegible] $\frac{\ }{8}\vec{a}-$ [illegible] $\vec{a}=$ [illegible] $=\frac{7}{\ }$ [illegible] $=\frac{\sqrt{15}}{4}$

(4) [illegible] $\frac{7\sqrt{11}}{48}$

15.50 (1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=s\vec{b}-s\vec{a}$ [illegible] $=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}-s\vec{a},\ \vec{b}\cdot\vec{c}=9$ (2) $\mathrm{OH}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$

(3) $s=\frac{9}{16}$ (4) [illegible] $\frac{1\sqrt{7}}{32}$

15.51 (1) 省略, $\triangle$A[illegible] $2a\sqrt{a^2+2b^2}$ (2) $\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+2b^2}},\ \mathrm{OH}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$

(3) $\frac{2a}{3}\left(\sqrt{(a^2+2b^2)(a^2+2b^2)}+ab\right)$

15.52 BQ : QC $= 1 : 5$, $\mathrm{OP} = \dfrac{\sqrt{21}}{4}$

15.53 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{2}{3}\vec{a}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{7}{30}\vec{a} + \dfrac{13}{30}\vec{b} + \dfrac{13}{60}\vec{c}$

15.54 (1) $\mathrm{PR} = \sqrt{\dfrac{3-3x^2}{4-3x^2}}$ (2) $x = \dfrac{2}{3}$

15.55 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{1+2t}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \dfrac{1}{3-2t}\vec{c}$ (2) $\triangle\mathrm{QMN} =$ [illegible] $(3-2t)$

(3) $t = \dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{16}$

15.56 (1) $\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq \dfrac{3}{4}$ (2) $\left(\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},\ 2\sqrt{\ }\right.$ [illegible]

15.57 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ [illegible] (3) [illegible]

(4) OP : PQ $= 3 : 1$

15.58 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} =$ [illegible] $t\Big)\vec{a} + t\vec{c} + (1-t)\vec{d}$

(2) [illegible] $(1 -$ [illegible] $\left(\dfrac{3}{\ } - \dfrac{1}{4}s\right)\vec{c} + s\vec{d}$

[illegible] : HM [illegible]

15.59 (1) [illegible] $-\vec{b}+$ [illegible] $\vec{c} = \dfrac{1}{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$

(2) [illegible] $= -$ [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OP}} =$ [illegible] $\vec{b} + \dfrac{2}{3}\vec{c}$

15.60 (1) $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ [illegible] $+ \Big(\dfrac{5}{\ }$ [illegible] (2) $\dfrac{1}{4} \leqq$ [illegible] (3) $t = \dfrac{5}{8}$

15.61 (1) [illegible] $= \vec{c} + \vec{a}$, [illegible] $\vec{c}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

(3) AK [illegible] 3 [illegible] $\mathrm{CLN} = \dfrac{1}{2}\sqrt{26}$

15.62 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} +$ [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{\ }$ [illegible] $t = \dfrac{1}{3}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

15.63 (1) $\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{c} - t\,\vec{d}$, $\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}$, $\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c} + (1-t)\vec{d}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \dfrac{2+t}{3}\vec{a} + \dfrac{4-t}{6}\vec{c} + \dfrac{2-2t}{3}\vec{d}$ (3) $\dfrac{12}{5}$

15.64 (1) 省略

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ES}} = \vec{a} + \dfrac{x}{2}\vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{ET}} = \dfrac{2-x}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2 = x^2 + 8$, $|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2 = (2-x)^2 + 8$, $\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}} = 8$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\{(x-1)^2+7\}^2 - 32}$

(4) $x = 0$, 2 のとき最大値 $2\sqrt{2}$ をとり，$x = 1$ のとき最小値 [illegible] $\sqrt{17}$ をとる．

15.65 (1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{2}{5}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{ML}} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \dfrac{1}{[illegible]}$ [illegible], $\overrightarrow{\mathrm{MK}} = -\dfrac{1}{[illegible]}$ [illegible]

(2) $k = \dfrac{2}{9}$ (3) $\dfrac{2}{7} \leqq k \leqq \dfrac{2}{3}$

15.66 (1) $\mathrm{OH} : \mathrm{HF} = 1 : 2$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{HE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HF}} = \dfrac{4}{[illegible]}$ [illegible]

15.67 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{a^2\overrightarrow{\mathrm{OE}} + b^2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + b^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a^2 + 2b^2}$ [illegible] $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ [illegible]

15.68 (1) $\vec{g} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{[illegible]}$, $\vec{h} = \dfrac{\vec{b} + \vec{c} + [illegible]}{3}$

(2) s, t [illegible] 数とすると

$l_1 :$ [illegible] $\dfrac{s}{[illegible]}\vec{b} + \dfrac{s}{3}\vec{c} + (1-s)\vec{d}$, [illegible] $(1-t)\vec{a} + \dfrac{t}{3}\vec{b} + \dfrac{t}{3}\vec{c} + \dfrac{t}{3}\vec{d}$

(3) $\dfrac{1}{4}($ [illegible] $c + \vec{d}$ [illegible]

15.69 [illegible] $\mathrm{A}| =$ [illegible] $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ [illegible] (2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} =$ [illegible] $\sqrt{3}$ [illegible] $(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})$ (3) $150°$

15.70 [illegible] 1, $\dfrac{3}{[illegible]}\Big)$ [illegible] D [illegible] (3) 1 [illegible]

15.71 (1) [illegible] $\dfrac{[illegible]}{\sqrt{2(a^2 - ab + [illegible])}}$ [illegible] $, -a,\ a-b)$,

内積の絶対値 [illegible] $\dfrac{[illegible]c + (a-b)d}{[illegible](a^2 - ab + b^2)}$

(2) $\dfrac{bc + (a-b)d}{6}$

(3) 体積の最大 [illegible] $\dfrac{[illegible]}{6}$ で，そのときの A，B は次の 3 組．

A$(1,\ b,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ 1)$ $(0 < b < 1)$
A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(c,\ 0,\ 1)$ $(0 \leqq c \leqq 1)$
A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ d)$ $(0 \leqq d \leqq 1)$

15.72 (1) 省略 (2) 省略 (3) $x=-1$，$y=2$ のとき最小値 $\sqrt{6}$

15.73 (1) $t=\dfrac{2}{5}$ (2) $0<t<\dfrac{2}{13}$

16.1 求める数列を $\{a_n\}$ とすると $a_n=n^2+n-1$

16.2 (1) $a_n=(2n-1)a+b$ (2) 公差 $2a$ の等差数列

16.3 (1) $a=8$，$b=16$，$c=24$ (2) $b_n=2^{n+1}$ (3) $p_n=$ [illegible]

16.4 (1) $a_n=\dfrac{1}{3}n-\dfrac{1}{6}$ (2) $N=30$ (3) [illegible]

16.5 (1) $a_n=3{\cdot}2^{n-1}$ (2) $T_n=3(2^{2n-1}-$ [illegible]

16.6 (1) 610 (2) $n=9$ (3) $c_n=$ [illegible]

16.7 (1) $b_n=2^n$ (2) 省略 (3) [illegible]，7

16.8 (1) S_n [illegible] (2) $a_1=2$，$n\geqq 2$ のとき [illegible]

16.9 [illegible]略 (2) [illegible] $=\dfrac{b\cos\theta}{a}$ (3) S_1+ [illegible] $\cdots+S_n=\dfrac{3}{26}\left\{1-\left(\dfrac{3}{16}\right)^n\right\}$

[illegible] (1) [illegible] $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin}$ [illegible] $\cos\theta$ [illegible] $_{+1}=\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{OP}_n\sin\theta}{\text{[illegible]}\cos\theta}$，$\mathrm{OP}_9=16\left(\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^8$

[illegible] $\tan\theta=$ [illegible] 3

16.[illegible] [illegible] $a_2=$ [illegible] $2k-1$ [illegible] (3) $a_{3k}=3k-2$

[illegible] $=\dfrac{1}{2}n$ [illegible] $5)$

16.12 (1) a_1 [illegible] $=1$，$a_4=2$ (2) $S=\dfrac{1}{6}m(4m^2-3m+5)$

16.13 (1) 93 (2) $3{\cdot}2^{n-}$ [illegible] $9{\cdot}2^{2n-3}-3{\cdot}2^{n-2}$

16.14 (1) t^2-t+1 項 [illegible] 20 (3) 1340

16.15 (1) $S_k=-k^3$ [illegible] $1)k$ (2) 147 (3) $k=5$，9

16.16 (1) $m+n-1$ 群の第 n 項 (2) $\dfrac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+n$ (番目)
(3) 第 45 群の第 10 項 (4) 236 (番目)

16.17 (1) 2^{n-2} (2) 第 57 項 (3) $\dfrac{417}{16}$ (4) $\dfrac{1959}{2048}$

16.18 (1) $b_{3m-2} = 2m-1$，$b_{3m-1} = 2m$，$b_{3m} = 2m$，$S_{3m} = m(3m+2)$

(2) $c_{3m-2} = (3m-2)^2$，$c_{3m-1} = (3m-1)^2$，$c_{3m} = 9m^2+1$，

$T_{3m} = \dfrac{3}{2}m(6m^2+3m+1)$

(3) 第 31 群の 14 番目 (4) 省略

16.19 省略

16.20 (1) $a_n = n\log_{10}3 - \log_{10}2$ (2) $\dfrac{n(}{}$ ... $\log_{10} 3$ ... $\log_{10} 2$

16.21 (1) ④ は　$16+17+18+19+20 = 21+$ ... よって　$S(4) = 90$

(2) ⓝ は

$$n^2 + (n^2+1) + \cdots + \quad \cdots \quad + \cdots + (n^2+2n)$$

等式の証明は省略

16.22 (1) 省略 ... $\dfrac{1}{m+2}n(n+1)(n+2)\cdots(n+$ ... m

16.23 (1) ... $f(m) - 945\}$

16.2... $n - \dfrac{x(\quad)}{x}$ ... $n+2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-}$

16.25 (1) ... (2) ... $\dfrac{n}{16(\quad)(n+2)}$

16.2... ... -1 ... 2) (3) ... (4) $\dfrac{N(3N+5)}{4(N+1)(N+2)}$

16.27 (1) ...

(2) m ...

$\theta \neq 2m\pi$ の ... $S_n = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\left\{\cos\dfrac{\theta}{2} - \cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta\right\}$

$\theta = 2m\pi$ の ... $S_n = 0$

16.28 (1) m^2-1 (個 ... $n(A) = \dfrac{1}{6}n(n-1)(2n+5)$，$n(B) = \dfrac{1}{6}n(4n^2-3n+5)$

(3) $n(C) = \dfrac{1}{6}n(4n^2-3n+5)$

16.29 (1) 省略 (2) 省略 (3) 省略

16.30 (1) $b_1=6,\ b_2=36,\ b_3=66,\ b_4=78$ (2) 省略

(3) $b_{4k-3}=6(4k-3)(3k-2)$, $b_{4k-2}=6(3k-1)(4k-1)$,

$b_{4k-1}=6k(12k-1)$, $b_{4k}=6k(12k+1)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4n} b_k = 6n(16n^2+12n+3)$

16.31 (1) 省略 (2) 省略 (3) $\dfrac{2}{3}n$

16.32 (1) $S=\dfrac{1-r^n}{1-r}$ (2) $T=\dfrac{S-nr^n}{1-r}$ [illegible] $U=\dfrac{2T-\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$

16.33 (1) $n=73$

(2) k を自然数として

$\left[\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]=$ [illegible]

16.34 (1) 省略 (2) 省略 (3) 省[illegible] $\dfrac{1}{30}n(n$ [illegible]

16.35 (1) 省[illegible] $) = \dfrac{1}{2}n(n-1)$ (3) 省略

16.36 (1) [illegible] (2) [illegible] 3) 省略

16.3[illegible] $b_n=$ [illegible] $1)(2$ [illegible] $=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ (2) $S_n=\dfrac{n}{3(2n+3)}$

[illegible] (1) [illegible] (2) [illegible] 2^{n+1} [illegible] (3) n [illegible]

[illegible] b_1 [illegible] (2) [illegible] $+\dfrac{3}{2}$ (3) [illegible] $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}-\dfrac{9}{4}$

16.40 [illegible] $=9$ [illegible] $3\cdot2^{n-1}$ [illegible] $b_n=3^n$

(4) [illegible] $^{+2}-7)$

16.41 (1) $b_{n+1}+b_n=0$ [illegible] $a_n=-\dfrac{7}{4}\cdot(-1)^{n-1}+\dfrac{6n-7}{4}$ (3) 1825

16.42 (1) 省略 (2) 初[illegible]公比 2 の等比数列 (3) $a_n=2^{n-1}-n$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 2$ [illegible] $\dfrac{1}{2}n(n+1)$

16.43 (1) $c_{n+1}-c_n=\dfrac{2}{3}$ (2) $a_n=(2n+1)\cdot3^{n-1}$ (3) $S_n=n\cdot3^n$

16.44 (1) $a_2=1,\ a_3=1,\ a_4=4,\ a_5=4$ (2) $b_n=(n-1)^2,\ c_n=n^2$ (3) 625

16.45 (1) $a_n=200-100\times 1.05^{n-1}$ (2) $n=16$

16.46 (1) $a_1=-1$ (2) 省略 (3) $a_n=\dfrac{3^n}{4}-\dfrac{7}{4{\cdot}3^{n-1}}$

16.47 (1) $a_4=\dfrac{37}{16}$ (2) $a_n=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$

16.48 (1) $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3$ (2) 省略 [illegible] (3) $a_n=n$ [illegible]

16.49 (1) $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ a_n=(-1)^n\sqrt{3}\ (n\geqq$ [illegible] (3) $k=4$

16.50 (1) $L_n=L_{n-1}+n\ (n\geqq 2),\ L_n=\dfrac{1}{2}($ [illegible]
(3) $H_n=2n^2-n+1$

16.51 (1) $a_{k+1}=-a_k+m_k$

(2) $r\neq -1$ のとき $a_k=(-1)$ [illegible] $a_1+\dfrac{(-1)^k\ [illegible]}{1+\ [illegible]}m_1$
$r=-$ [illegible] き $a_k=(-1)^k\{-a_1+(k-1)$ [illegible]

(3) [illegible] $4r$ [illegible]

16.5[illegible] [illegible] $_1=-$ [illegible] (2) [illegible] $\dfrac{b}{a+b}l_n+1$ (3) [illegible] 25

[illegible] (1) [illegible] $=-2$ [illegible] $b_n=$ [illegible] (3) [illegible] $=\dfrac{4-(-2)^{n-1}}{3}$

[illegible] $a_3=$ [illegible] $_4=49$ [illegible] 179 (2) $(\alpha,$ [illegible] $(2,\ 3),\ (3,\ 2)$
[illegible] -2^{n+} [illegible]

16.55 (1) [illegible] (ii) a_n [illegible]
(2)(a) [illegible] $^{2n-1},\ c_n=$ [illegible] (b) $a_n=\dfrac{1}{3}(2^{2n-1}+1)$
(3)(c) $d_n=\dfrac{1}{4}$ [illegible] $=(n+1){\cdot}2^{n-2}$

16.56 (1) $c=-\dfrac{1}{2}$ (2) [illegible] $\dfrac{3^n-2^n+1}{2}$

16.57 (1) 省略 (2) [illegible] $=-2$

16.58 (1) 省略 (2) 省略 (3) 省略

16.59 (1) $b_{n+1}=1+\dfrac{1}{b_n}$ (2) 省略 (3) 省略 (4) 省略

16.60 (1) $a_{n+1}=b_n+1,\ b_{n+1}=2a_n+b_n$ (2) $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$

(3) 省略 (4) $d_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

(5) $a_n=\dfrac{1}{3}\{2^n-(-1)^n\},\ b_n=\dfrac{1}{3}\{2^{n+1}-(-1)^{n+1}-3\}$

16.61 (1) $b_n=\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1}$ (2) $c_n=\dfrac{100}{81}n,$ [illegible] $=n\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-2}$ [illegible] $n=9,\ 10$

16.62 (1) $f(2)=1,\ f(3)=1,\ f(4)=2,\ f($[illegible]

(2) (ア) $f(n-1)$ (イ) $f(n-2)$ (ウ) $f($[illegible]$2)$

(3) $f(n)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\right.$ [illegible]

16.63 $a_1=a+b+c,\ a_n=2an-$ [illegible] $\geqq 2)$

16.64 (1) $a_1=-$[illegible] (2) 省略 (公差 2 の等差数列) [illegible] $=3$[illegible]

16.65 (1) [illegible] $a_4=20,\ a_5=40$ (2) a[illegible] $(n=$[illegible] $5\cdot2^{n-2}$ $(n=2,3,\cdots)$

16.66 [illegible] $a_n=$ [illegible] -1 [illegible] $=-2^n$ (3) $a_n=$ [illegible] $+1$

16.67 (1) [illegible] (2) [illegible] 3^n-1

16.68 [illegible] $a_{n+2}=$ [illegible] $-4a$[illegible] $b_n=2^n$ (3) [illegible] $=(n+1)2^{n-1}$

16.69 [illegible] $2a_n-$ [illegible] $=2n$ [illegible] 2^n

16.70 (1) [illegible] $3n$ [illegible] (2) $b_n=3$[illegible] $a_n=(3n-2)\cdot2^{2n}+2$

16.71 (1) 省略 (2) b_n [illegible]$^{n+1}$ (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2a_k+1)=(n-1)2^{n+1}+2-n$

16.72 (1) $b_n=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-}$[illegible] (2) $a_n=\dfrac{3\cdot2^{n-1}}{4\cdot5^{n-1}-3\cdot2^{n-1}}$

16.73 (1) $b_n=5b_{n-1}+$[illegible]$+3$ (2) $c_n=16\cdot5^{n-1}-1$ (3) $a_n=\dfrac{1}{4\cdot5^{n-1}-n-2}$

16.74 (1) $a_3 = 15$, $b_3 = 11$ (2) $c_n = 3^n - 1$

(3) $a_n = \dfrac{3^n + 2n - 3}{2}$, $b_n = \dfrac{3^n - 2n + 1}{2}$

(4) $S_n = \dfrac{1}{4}(3^{n+1} + 2n^2 - 4n - 3)$

16.75 (1) $z_n = 3^n$, $w_n = 3n^2 - 19n + 29$ (2) $n = 3,\ 4$

16.76 (1) $a_3 = \dfrac{5}{2}$, $a_4 = \dfrac{13}{4}$, $a_5 = \dfrac{29}{8}$

(2) n が奇数のとき，$b_{n+2} = \dfrac{1}{4}b_n +$ [illegible] が偶数の [illegible] $= \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{4}$

(3) n が奇数のとき，$b_n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n +$ [illegible] き，$b_n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{3}$

(4) n が奇数のとき，$a_n = \dfrac{7}{6} + \dfrac{n}{2} - \dfrac{4}{3}$ [illegible]

n が偶数のとき，$a_n = \dfrac{4}{3} +$ [illegible]

16.77 (1) $b_1 = -1$, $b_2 = -1$, $b_3 = 1$, [illegible] $= -1$, b_5 [illegible] $b_6 =$ [illegible] $= b_n$

(3) b_{100} [illegible] $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = -1$, [illegible]

(5) [illegible]

16.78 [illegible] $= 2^n$ [illegible] 6 (2) $p = \dfrac{c}{r - s}$, [illegible]

$z_n =$ [illegible] $4 \cdot 3^n$ [illegible]

16.79 (1) [illegible] 0, [illegible] $p_3 =$ [illegible] $p_n =$ [illegible] $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\Big\}$

16.80 (1) [illegible] (2) [illegible] $(1 -$ [illegible] $- p^{k-1})^n$

16.81 (1) [illegible] $P_3 =$ [illegible] $= \dfrac{1}{2}P_n + \dfrac{1}{6}$

(3) P_n [illegible]

16.82 (1) $p_1 = \dfrac{1}{6}$, $p_2 =$ [illegible] $q_2 = \dfrac{1}{4}$, $r_2 = \dfrac{1}{2}$, $p_3 = \dfrac{5}{12}$ (3) $p_{n+1} = \dfrac{1}{2}r_n + \dfrac{1}{6}$

(4) $p_{n+3} = \dfrac{1}{8}p$ [illegible] (5) $p_{3n} = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{8}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{3}$

16.83 (1) $p_2 = \dfrac{1}{4}$, $p_3 = \dfrac{1}{8}$ (2) $p_4 = \dfrac{1}{16}$, $p_5 = \dfrac{1}{16}$ (3) $p_{12} = \dfrac{3}{1024}$

16.84 (1) 試行を n 回繰り返したとき，点 Q が，頂点 A，B，C，D にある確率をそれぞれ，$P_n(\mathrm{A})$，$P_n(\mathrm{B})$，$P_n(\mathrm{C})$，$P_n(\mathrm{D})$ とすると

$$P_2(\mathrm{A}) = P_2(\mathrm{C}) = \frac{1}{2}, \qquad P_2(\mathrm{B}) = P_2(\mathrm{D}) = 0,$$
$$P_3(\mathrm{A}) = P_3(\mathrm{C}) = 0, \qquad P_3(\mathrm{B}) = P_3(\mathrm{D}) = \frac{1}{2},$$
$$P_4(\mathrm{A}) = P_4(\mathrm{C}) = \frac{1}{2}, \qquad P_4(\mathrm{B}) = P[illegible]0$$

(2) 省略

16.85 (1) $\frac{5}{9}$ (2) $P_2 = \frac{40}{81}$，$P_3 = \frac{340}{729}$ (3) [illegible]

16.86 (1) $p_1 = \frac{M}{M+N}$，$p_2 = \frac{M^2+N^2}{(M+N)^2}$ [illegible]

(3) $\frac{M-N}{M+N} = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & (k \text{ が偶[illegible]}) \\ -\frac{1}{k} & (k\text{[illegible]のとき}) \end{cases}$

(4) p[illegible] $\begin{cases} [illegible]\left(\frac{1}{[illegible]+1}\right)^n + \frac{1}{2} & (k \text{ が偶数のとき[illegible]}) \\ [illegible]^n + \frac{1}{2} & (k \text{ が奇数のとき[illegible]}) \end{cases}$

16[illegible] p_1[illegible]$_1 = \frac{1}{[illegible]}$

(2)[illegible]$_1 = \frac{2}{[illegible]}$[illegible]$q_n +$[illegible]$_{n+1} = \frac{1}{6}$[illegible]$q_n$，$r_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2}r_n$

省略[illegible] $p_n =$[illegible]$\left.1\right)^n$，$q_n = r$[illegible]$-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

16.88 (1)[illegible]$\frac{1}{[illegible]}$[illegible] $p_3 = \frac{1}{6}$[illegible]$\frac{[illegible]}{18}$，$q_2 = \frac{11}{18}$，$q_3 = \frac{1}{9}$ (3) $z_3 = \frac{11}{108}$

16.89 (1) $(1-$[illegible] (2)[illegible]$p)(1+p-p^2)$ (3) $\frac{1-p}{p}$

(4) $q_i = \frac{p}{1-2p}\Big[$[illegible]$\left(\frac{1-p}{p}\right)^i - 1\Big\} - \left\{\left(\frac{1-p}{p}\right)^i - \frac{1-p}{p}\right\}\Big]$

(5) $q_i = \dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10}[illegible]\left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{\left(\frac{[illegible]}{p}\right)[illegible] - 1}$

16.90 $a_{2k-1} = 3^{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}\right\}}$

16.91 (1) 省略　(2) 省略　(3) $S_1 = \frac{1}{2}$，$S_2 = \frac{5}{6}$，$S_3 = \frac{41}{42}$，$S_4 = \frac{1805}{1806}$

(4) $S_n = 1 - \frac{1}{p_n}$

16.92 (1) $a_2 = \frac{{a_1}^2 + 1}{2a_1}$　(2) 省略　(3) 省略　(4) $n = 7$

16.93 (1) 省略　(2) 省略

16.94 (1) $a_1 = \sin^2 2\theta$，$a_2 = \sin^2 4\theta$　(2) a [illegible] $\sin^2(2^{n-1}\theta)$ [illegible]

16.95 省略

16.96 省略

16.97 (1) $a_n = 8n^2 - 2$　(2) 省略　(3) $n($ [illegible] $)$

16.98 (1) 省略　(2) $x_{n+1} = 2x_n - 1$ [illegible] $= 2^n$ [illegible] $\frac{2^n}{}$ [illegible]

16.99 (1) $a_2 = \frac{p}{2p - q}$，$a_3 = \frac{2p - }{3p - 2q}$ [illegible] $a_4 = \frac{3p - 2q}{4p - 3q}$ [illegible]

(2) a_n [illegible] $\frac{- (n-2)q}{-1)q}$ (証明は省略)

16.100 [illegible] $= \frac{3}{7}$ [illegible] $\frac{15}{31}$　(2) $a_n = \frac{2^n}{2^{n+}}$ [illegible] (証明は省略)

16[illegible] [illegible] a_2 [illegible] r，a [illegible] $= r^2 - r^5$

(2) [illegible] r^{n-2}

[illegible] $r \neq -$ [illegible] き，$\sum^{n}$ [illegible] $\frac{(r^n - 1)(r}{(r+1)(}$ [illegible] $)$，

[illegible] -1 の [illegible] $\sum_{k=1} a_k$ [illegible]

16.102 (1) a_n [illegible] $- 2$，[illegible] n^2　(2) $c_n = 4n^2$　(3) $\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

16.103 (1) 省略　(2) S_n [illegible] $\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$　(3) 省略　(4) $n = 11$

16.104 (1) $a_1 = 3$　(2) [illegible] $= 3 + 2\sqrt{3S_n}$　(3) 省略

16.105 (1) 省略　(2) 省略　(3) $a_n = \frac{1}{2}\left\{1 - (1 - 2\beta)^{2^{n-1}}\right\}$

16.106 (1) $a_{n+1} = 2a_n - 3b_n$，$b_{n+1} = -2a_n - 3b_n$　(2) 省略　(3) 省略

16.107 (1) $P_4 = Q_4 + 2R_4$ (2) 省略 (3) $Q_4 = \dfrac{1}{4}(P_4 + S_4)$

(4) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dfrac{1}{4}$ のとき Q_4 は最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる．

16.108 (1) 省略 (2) 省略

16.109 (1) 省略 (2) 省略 (3) 省略

16.110 (1) 省略 (2) 省略

(3) $p_n(x)$ の定数項を a_n，1 次の係数 [illegible] とすると

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n : \text{奇数}) \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & (n : \text{偶数}) \end{cases}$$

b_n [illegible] $(n : \text{奇数})$ [illegible] $(n : \text{偶数})$

17.1 (1) $E(X) = \dfrac{10}{3}$，$\sigma(X) = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ (2) [illegible] $\dfrac{\ }{18}$

17.2 (1) $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$，$\sqrt{V(X)}$ [illegible] 3 (2) [illegible] $= n$ [illegible] $\sqrt{n^2}$ [illegible] (3) 省略

17.3 (1) (a) [illegible] (b) $\dfrac{2(t-$ [illegible] $}{n(n-1)}$ (c) $\dfrac{2(n-}{n(n-}$ [illegible]

[illegible] $\begin{cases} \frac{2}{3(n-1)} & (n \equiv 0 \ (\text{mo} \\ \frac{2}{3n} & (n \equiv 1 \ (\text{mo} \\ \frac{2(n-2)}{3n(n-1)} & (n \equiv 2 \ (\text{mo} \end{cases}$ [illegible]

$n+1$ [illegible]

(1) [illegible] $1) = $ [illegible] $\dfrac{12}{\ 25}$ (2) $E(X) = \dfrac{216}{125}$

[illegible] ード [illegible] の和 [illegible] る確率は $\dfrac{\ }{62}$ [illegible] める条件つき確率は $\dfrac{25}{36}$

17.5 [illegible] (2) $\dfrac{3}{\ }$ [illegible]

X	1	[illegible]	[illegible]	4	計
P	[illegible]	[illegible]	$\frac{24}{120}$	$\frac{4}{120}$	1

$E(X) = \dfrac{109}{60}$

17.6 (1) $P(X_2$ [illegible] $1) =$ [illegible] $X_3 = 1) = \dfrac{1}{3}$，$P(X_4 = 1) = \dfrac{1}{4}$

(2) $P(X_2 = 2) =$ [illegible] $X_3 = 3) = \dfrac{1}{6}$，$P(X_4 = 4) = \dfrac{1}{24}$

(3) $P(X_j = i) =$ [illegible] $_{-1} = i) \times \left(1 - \dfrac{1}{j}\right) + P(X_{j-1} = i-1) \times \dfrac{1}{j}$

(4)

X_4	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	1

17.7 (1) $P_B(A) = \dfrac{2}{9}$ (2) $P(X = k) = \dfrac{13-2k}{36}$, $P(Y = k) = \dfrac{2k-1}{36}$ (3) 91

17.8 (1) $P(X = 1) = \dfrac{1}{4}$, $P(X = 2) = \dfrac{1}{3}$ (2) 試行が成功する確率は $\dfrac{3}{4}$, $E(X) = \dfrac{17}{12}$

(3) 番号の和が 6 となる確率は $\dfrac{1}{4}$, $X = 3$ である条件付き確率は $\dfrac{1}{3}$

17.9 (1)

X_1	1	2	5	計
P	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

$E(X_1) = \dfrac{21}{10}$, $V(X_1) = \dfrac{229}{[illegible]}$

(2)

Z	2	3	4	6	7	[illegible]	計
P	$\frac{25}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{[illegible]}{100}$	[illegible]

$[illegible] = \dfrac{16}{25}$

(3) $a = -1$ (4) $\dfrac{3n}{5{\cdot}2^n}$

17.10 (1) $P(T = 6) = \dfrac{1}{12}$, $P(T \geqq 0) = \dfrac{5}{[illegible]}$ [illegible] $(T) = \dfrac{[illegible]}{2}$

(3) $a = \pm\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

17.11 (1) $P(X \geqq [illegible]) = \left(\dfrac{5-k}{5}\right)^3$

(2)

X	[illegible]	[illegible]	2	3	4	計
[illegible]	$\frac{[illegible]1}{125}$	[illegible]	[illegible]	$\frac{7}{125}$	$\frac{1}{125}$	1

[illegible] (X) [illegible] (4) [illegible] $= \dfrac{112}{125}$

[illegible] (1)

[illegible]	2	[illegible]	[illegible]	計
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	a
2	[illegible] $a)b$	([illegible]	[illegible] $- b)$	$1-a$
[illegible]	b	1 [illegible]	[illegible]	1

(2) [illegible] $b - 2$ (3) [illegible] $+ 2a - b - ab$ (4) $V(Z) = \dfrac{19}{16}$

17.13 (1) $P(X_n = k) = [illegible]\Big)^{k-1}$, $P(X_n > 3) = \dfrac{27}{64}$ (2) $P(X_n = n) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

(3) $E_{n+1} - E_n = [illegible]$

17.14 (1) $\sigma_x = \sqrt{E([illegible]) - \overline{x}^2}$ (2) $\sigma_{xy} = E(xy) - \overline{x}\,\overline{y}$ (3) $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$ (4) $t = \dfrac{E(xy) - \overline{x}}{E(x^2)}$

17.15 (1) $P(X \leqq 10) = 0.0668$ (2) $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(40,\ \dfrac{20^2}{n}\right)$ に従う, $n \geqq 900$

17.16 (1) $a=m,\ b=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (2) $\overline{X}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (3) 97

17.17 (1) X は 2 項分布 $B(n,\ p)$ に従う．
n が大きいとき，X は正規分布 $N(np,\ np(1-p))$ に従う．
(2) 標本の大きさを 4 倍にする． (3) 0.9544

17.18 (1)(i) 2 項分布 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う．$P(X=k) = {}_{100}\mathrm{C}_k \left(\dfrac{1}{\ }\right.$ [illegible]
(ii) $m=50$，$\sigma=5$ (iii) $P(50 \leqq X$ [illegible] $60) = 0.4772$ [illegible] 8 (2) 0.112

17.19 (1) $a=m,\ b=\sigma,\ c=np,\ d=\sqrt{np($ [illegible]
(2)(a) $k=1$ (b) 平均 $E(X)=1$，標準 [illegible] $\sqrt{6}$ [illegible] (3) 25 (個)

17.20 (1) $c=98$
(2) 正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{20^2}{100}\right)$ に従 [illegible]
母平均 m の信頼度 95% の [illegible] 間は $\overline{X}$ − [illegible] $\leqq m \leqq$ [illegible]

17.21 (1)(a) k [illegible] $(X)=0$ (b) $\dfrac{3}{4}$ (2)(a) $x=$ [illegible] $=$ [illegible]

17.22 (1) [illegible] 2，σ [illegible] (2) $E(\overline{Y})=2$，$\sigma(\overline{Y})=$ [illegible] (3) $a=\dfrac{767}{400}$

17.2[illegible] [illegible] $k=\dfrac{3}{\ }$ [illegible] $X)=$ [illegible]

[illegible] $g(a)$ [illegible] $(0 \leqq a)$
(2) [illegible] $P(a$ [illegible] $b)=$ [illegible] $a)+g(b)$ [illegible] $\leqq 0 \leqq b)$
[illegible] $(-a)-g(-b)$ [illegible] $0)$
(b) [illegible] $-\ g(0$ [illegible]

17.24 (1) [illegible] 3 [illegible] 0 (2)(a) [illegible] $\overline{X}+1.96]$ (b) n を 175 以上

17.25 (1) $k=$ [illegible] (2) [illegible] $=\dfrac{a+2}{3}$ (3) $u=2-\sqrt{2-a}$

17.26 (1)

$\overline{X}$	1	[illegible]	[illegible]	2	計
$P(\overline{X})$	$\frac{1}{8}$	[illegible]	[illegible]	$\frac{1}{8}$	1

$V(\overline{X})=\dfrac{1}{12}$ (2) 233 (点)