九州地区国立大学

大学受験　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B

2001－2016

解答

見本



はじめに

2014 年に開催された第 68 回九州算数・数学教育研究 (熊本) 大会で研究発表者 (熊本県数学部会) より九州地区国立大学の入試問題を分析した大学入試問題集の作成に向けた取り組みが報告されました．この報告に対し多くの先生[illegible]で賛同を頂き

『大学受験　数学Ⅰ・A・Ⅱ・[illegible]　『大学受[illegible]Ⅲ』

が作成されました．

また，情報化に対応するため，本書および[illegible]書化 (PDF) を推進し携帯端末やパソコンでの操作に対応した電子書[illegible]

本書の編集にあたり，以下の点に留意[illegible]

1. 本書に掲載した問題は，九州大[illegible]工業[illegible]福[illegible]学[illegible]大学・長崎大学・熊本大学・大分大[illegible]崎大学・鹿[illegible]大学[illegible]全学部全学科過去 16[illegible]分 (2001-2016) の[illegible]般前期試験問[illegible]ら厳選[illegible]

2. 本書は[illegible]題配置を行うと共に，難易[illegible]「[illegible]標準」「応[illegible]展」[illegible]明示しました．頻出問題[illegible]て[illegible]，□□を付[illegible]て繰り[illegible]心でき[illegible]慮しました．

[illegible]書に掲[illegible]題[illegible]記 10 大学の全学部全学科過去 16 年分 (2001-2016) の一[illegible]試験問[illegible]次のサイトから入手することもできます．

http[illegible]umoto.s12.xr[illegible]/ruihi.html

[illegible]に関[illegible]作[illegible]同サ[illegible]載しています．

平成 28 年 5 月　編者

見本

見本

目 次

はじめに i

第 1 章　数と式（数学 I） 1
1.1　数の計算 1
1.2　実数 1
1.3　集合と命題 2

第 2 章　2 次関数（数学 I） 5
2.1　2 次方程式・不等式 5
2.2　2 次関数の最大・最小 6

第 3 章　図形と計量（数学 I） 7
3.1　三角比 7
3.2　正弦定理・余弦定理 7
3.3　三角形の面積 7
3.4　平面図形への応用 8
3.5　問題 10
ブラーマグプタの公式 10

第 4 章　データの分析（数学 I） 15

第 5 章　場合の数と確率（数学 A） 17
5.1　場合の数 17
5.2　確率 20
5.2.1　さいころ 20
5.2.2　球 21
5.2.3　. 22
5.2.4　. 24
5.2.5　確率の最大・最小 26
5.2.6　独立試行の定理 28
5.2.7　反復試行の確率 30
5.2.8　条件付き 32

第 6 章　整数の性質（数学 A） 35
6.1　約数と倍数 35
6.2　不定方程式 35

見本

6.3 合同式 37
6.4 整数の性質の活用 37
6.5 問題研究 40
6.5.1 オイラーの φ 関数 40

第 7 章 図形の性質（数学 A） 45
7.1 角の大きさ 45
7.2 三角形の辺の比 45
7.3 三角形の外心・内心・重心 47
7.4 円と直線 48
7.5 方べきの定理 49
7.6 三角形と円 51
7.7 作図 53

第 8 章 式と証明（数学 II） 53
8.1 二項定理 53
8.2 等式と不等式の証明 54

第 9 章 複素数[illegible]式（数学 II） 57
9.1 複素[illegible] 57
9.2 [illegible]理 57
9.3 [illegible]方程式 58
[illegible]と係数[illegible]係 58
その[illegible]方程式 59
9.6 [illegible]究 60
[illegible] 無[illegible]解に[illegible]理係数の方 60

第[illegible] 図形[illegible]式（[illegible] 61
[illegible]線 61
10.2 [illegible]程[illegible] 61
10.3 軌[illegible] 63
10.4 不等[illegible]表す[illegible] 63

第 11 章 三角関数（数学[illegible] 67
11.1 三角関数 67
11.2 加法定理 67
11.3 方程式・不[illegible] 69
11.4 最大・最小 70
11.5 図形への応用 72

見本

第 12 章 指数関数と対数関数（数学 II） 75
12.1 指数関数 . . . 75
12.2 対数の値 . . . 76
12.3 対数方程式 . . . 77
12.4 対数不等式 . . . 78
12.5 対数関数の最大・最小 . . . 79
12.6 常用対数 . . . 80

第 13 章 微分法と積分法（数学 II） 83
13.1 微分係数と導関数 . . . 83
13.2 曲線の接線・法線 . . . 83
13.3 関数の増減・極値，グラフ . . .
13.4 最大・最小 . . .
13.4.1 3 次関数の最大・最小 . . .
13.4.2 三角関数の最大・最小 . . . 87
13.4.3 指数・対数関数の最 . . . 89
13.5 方程式・不等式への応用 . . . 90
13.6 定積分 . . . 91
13.7 積分 . . . 94
13 (定数型) . . . 94
積分 数型) . . . 95
13 . . . 96
13.8.1 線 . . . 96
13 物線 . . . 99
面積 値・ . . . 104
13.8.4 と接線 . . . 107
13.8 線と . . . 111
. . . 114
面 . . . 114

第 14 章 平面 (数学 B） 117
14.1 ベクト と図形 . . . 117
14.2 ベクトルの内積 . . . 120
14.3 三角形の内心・ ・垂心 . . . 127
14.4 三角形の面積 . . . 129
14.5 ベクトル方 . . . 130
14.6 問題研究 . . . 131
14.6.1 オイラー線 . . . 131
14.6.2 9 点円 (オイラー円) . . . 132

見本

第 15 章 空間のベクトル（数学 B） **133**
15.1 ベクトルの成分 133
15.2 ベクトルの内積 133
15.3 法線ベクトル 137
15.4 空間図形 140
15.4.1 四面体 140
15.4.2 その他の立体 148
15.4.3 直線・平面・球面 153
15.5 問題研究 156
15.5.1 ベクトル積 (外積) 156

第 16 章 数列（数学 B）
16.1 等差数列・等比数列 . . . . .
16.2 群数列 . . . . .
16.3 いろいろな数列の和 162
16.4 漸化式 168
16.4.1 2 項間の漸化式 168
16.4.2 3 項間の漸化式 173
16.4.3 [illegible]む漸化式 176
16.[illegible] 179
[illegible]連立[illegible] 179
16.4.6 [illegible] 181
16.4.7 [illegible]他の[illegible] 185
16.5 数[illegible]納法 186
16.6 [illegible]研究 192
16.6.1 [illegible]の漸化[illegible] 192
16.6.2 [illegible]漸化[illegible] 194
[illegible]ギャン[illegible]の[illegible] 196
[illegible]連[illegible]自然数の[illegible] 199

第 17 章 確率[illegible]統[illegible]学 B） **201**
17.1 確率分[illegible] 201
17.2 統計的な推測 205

解答 **213**

見本

第 1 章　数と式（数学I）

1.1　数の計算

□□ **1.1** $a^2(y-b)-(a+b)xy+ab(x+y)$ [illegible]分解せよ．
[illegible]岡教育大学 2004) 5

1.2　実数

□□ **1.2** α が無理数であり，a，b [illegible]である[illegible]

$$a+b\alpha=0 \text{ [illegible]ならば } a=$$

であることを[illegible]育大[illegible] 1

□□ **1** [illegible]計算[illegible]る．① から ⑥ の等号[illegible]誤っているものをすべてあげ[illegible]と判[illegible]理由[illegible]よ．(宮崎大学 2006) 2

$$\sqrt{64} \overset{①}{=} [illegible] \overset{③}{=} \sqrt{6} = \sqrt{((-2)^3)^2} \overset{④}{=} (-2)^3 \overset{⑤}{=} -8 \overset{⑥}{}$$

□[illegible] $a=$[illegible]，b[illegible]するとき

[illegible]

の値を求め[illegible] (宮崎大学 2001) 9

□□ **1.5** $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ の整数[illegible]を a，小数部分を b とする．このとき，a^2+ab+b^2 と $\dfrac{1}{a-b-1}-\dfrac{1}{a+b+1}$ [illegible]求めよ．(琉球大学 2011) 5

見本

標準 1.6 次の問に答えよ．　(佐賀大学 2013) 7

(1) $a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}$ が成り立つとき，a を b を用いて表せ．

(2) $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{y}{8}+\dfrac{8}{y}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ をみたす実数 x，y の組をすべて求めよ．

標準 1.7 次の問いに答えよ．　(大 [文]2001) 4

(1) 自然数 a，b が互いに素であるとはどういうことか．

(2) 自然数 a，b が互いに素であるなら a^2 は互いに ことを示せ．

(3) n を自然数とする．もしも $\sqrt{n}$ が有理 自然数であることを示せ．ただし，有理数とは分母と分子がとも る分数のことである．

(4) n が自然数のとき，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+$ ることを示せ．

応用 1.8 多項式 $f(x)=x^4-x^3+c$ $+d$ に ，$\sqrt{5})$ り立つとする．ここで，c，d は有理数 次の問い えよ．　011) 2

(1) $S=\{a+$ ，b は有理数 $\}$ とする．集合 S $z=$ し，a，b は有理 て，$j(z)=a-\sqrt{2}b$ と定義す の元 対して，$w)$ $j(w)$ および $j(zw)=j($ が り立つこと 示せ．

(2) いて $(z)=0$ を満たせば $z))=0$ が成り立つことを ．こ を用 $-\sqrt{2})=0$ を示 有理数 を求め $x)$ 数の範囲で因数分解せよ．

集合と命題

□□ $x+1$ を満た 3 の倍数でないものをすべて求めよ．　(鹿児島大学 2012) 1

□□ **1.10** 実数 y に 次の各命題の真偽を述べよ．真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ．　(鹿児島大学 2009) 1

(1) $x \geqq y$ ならば $x^2 \geqq$ ある．

(2) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$， ならば $x \geqq y$ である．

見本

□□ **1.11** 正の実数 x，y に関する次の各命題の真偽を述べよ．また，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ． (鹿児島大学 2014) 1

(1) x が無理数かつ y が有理数ならば，その和 $x+y$ は無理数である．

(2) x が無理数かつ y が無理数ならば，その和 $x+y$ は無理数である．

□□ **1.12** 正の実数 a に関する次の各命題の真偽を述べよ．また，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ． (学 2010) 1

(1) a が自然数ならば $\sqrt{a}$ は無理数である

(2) a が無理数ならば $\sqrt{a}$ も無理数である

□□ **1.13** a，b を実数とする．命題「$ab=0$ な
を書き，それぞれの真偽を答えよ．

□□ **1.14** 次の (1)，(2) に答えよ． 島大学) 2

(1) m，n が自然数ならば，$\dfrac{m}{n} \neq$ る．この を証明

(2) p，q が自 らば，$\sqrt{2}$ は $\dfrac{p}{q}$ と $\dfrac{2q}{p}$ の間にあ
すな $\dfrac{2q}{}$ または $\dfrac{2q}{p} < \sqrt{2} < \dfrac{p}{q}$
q
を証

基本 1.15 次 の真偽 また，その命題が真である場合には証明し，偽である場合 反例を .
(福岡教育大学 2007) 2

無理数 ，a なくとも一 理数である．
有理 が無理 $a+b$，ab に無理数である．

(3) 数と $n)=$ のとき，$f(2n-1)$ は 5 の倍数となる

基本 1.16 次 に 真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ．

(1) 有理数と有理数の 理数である． (佐賀大学 2007) 8

(2) 無理数と無理数の 無理数である．

(3) 無理数と無理数 無理数である．

(4) 無理数の無理数乗 無理数である．

見本

基本 1.17 a，b，c を奇数とする．x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ に関して，次の各問いに答えよ．（鹿児島大学 2003）3

(1) この 2 次方程式が有理数の解 $\dfrac{q}{p}$ をもつならば，p と q はともに奇数であることを背理法で証明せよ．ただし $\dfrac{q}{p}$ は既約分数とする．

(2) この 2 次方程式が有理数の解を持たないことを (1) を利用して証明せよ．

基本 1.18 $\sqrt{2}$ は $x^2=2$ を満たす正の実数 x を表したもので，このことを用いて，次の各問に答えよ．（宮崎大学 2005）12

(1) $\sqrt{2}$ は $1.4\cdots$ と無限に続く小数で表され，$\sqrt{2}$ の小数第 2 位の値が 1 であることを確かめよ．

(2) n を自然数とするとき，n^2 が偶数ならば

(3) (2) を利用して，$\sqrt{2}$ は有理数でない．有理数は最大公約数が 1 である 2 つの整数 a，b $(b\neq$ について $\dfrac{a}{b}$ できる．

見本

第 2 章　2次関数（数学I）

2.1　2次方程式・不等式

□□ **2.1** 連続する 3 つの自然数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$，$a<b<c$ をみたすとする．このような a，b，c はただ1 [illegible] を示せ．

基本 2.2 次の問に答えよ．　(佐賀大学 2014) 8

(1) 0 以上の整数 n に対して，2次 [illegible] $+2(n$ [illegible] $x+$ [illegible] 解をもつとする．このとき，n の [illegible] べて求めよ．

(2) 二桁の自然数 [illegible] 一の位の数と十の位の数の和 [illegible] 差が [illegible] 自然数になるよう [illegible] べて求めよ．

基本 2.3 [illegible] 実数と [illegible] 方程式 $x^2-2ax+a+$ [illegible] について，次の問いに答えよ．　(琉球大学 2001) 1

[illegible] 実数解 [illegible] ときの [illegible] を求めよ．

(2) 2 [illegible] の差 [illegible] ると [illegible] の値の [illegible] 求めよ．

[illegible] ての解 [illegible] より大 [illegible] 数であるとき [illegible] 値の範囲を求めよ．

見本

2.2　2 次関数の最大・最小

基本 2.4 関数

$$f(x) = ax^2 + 2x + \frac{1}{a} - 2$$

について，以下の問に答えよ．ただし，a は定数で，$a > 1$ とする．

(1) $f(x) > 0$ を満たす x の範囲を求めよ．（[illegible]大学 2006）1

(2) $y = f(x)$ のグラフをかけ．

(3) $-2 \leqq x \leqq 1$ において，$y = f(x)$ の最[illegible](a) を求[illegible]

応用 2.5 a，b，c を定数とし，$a > 0$ とする．[illegible]$ax + c$ とおく．実数 p に対し，x の関数 $px - f(x)$ の最大値を $g(p)$ とお[illegible]

(1) 2 つの関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が一[illegible]求めよ．

(2) 実数 x に対し，p の関数 $xp - g($[illegible]値を[illegible](x) を[illegible]

(3) 直線 $y = px + q$ が点 $(t,\ f(t))$[illegible]$g(x)$ のグ[illegible]に接[illegible]十分条件は $g(p) = pt - f(t)$ かつ $q =$ [illegible](p) であるこ[illegible]せ．

見本

第 3 章　図形と計量（数学I）

3.1　三角比

□□ **3.1**　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の不等式

岡教育大学 2001) 5

$$-1 \leqq \tan\theta \leqq$$

3.2　正弦定理・余弦定理

基本 3.2　次の問いに答えよ．

008) 8

(1) 鋭角三角形 の外接円の半径を R とし，頂 B う辺の長さを く．このとき，

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

証明

(2) $45°$ $75°$ にも を利用 $\sin 75°$ の値を求めよ．

△AP 辺の長 B = 6，BC = A = 4 であるとき，次の問い

(琉球大学 2013) 6

(1) c を

(2) ∠BA BC の交点 とする．線分 AL の長さを求めよ．

3.3　三角形の面

□□ **3.4**　三角形の 3 辺 a，b，c の比が $a : b : c = 7 : 6 : 5$ であり，面積が $12\sqrt{6}$ のとき，a の値を求め

(鹿児島大学 2011) 1

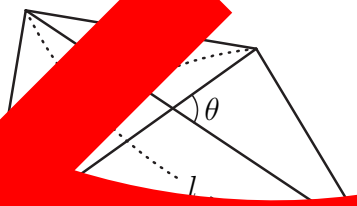
見本

基本 3.5 △ABC において，∠B = 45°，∠C = 75°，BC = 3 のとき，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2008) 6

(1) △ABC の面積を求めよ．

(2) 辺 BC 上に点 D を BD = 1 となるようにとる．このとき，△ABC と △DAC が相似となることを証明せよ．

基本 3.6 右図のような四角形において，対角線の長さを l，m，対角線のなす角を θ とする．次の問いに答えよ．　(佐賀大学 200



(1) 四角形の面積 S を l，m，θ を用いて表せ．

(2) 対角線の長さの和が k(定数) となる四角形の中で，その面積が最大となるものの面積を求めよ．

3.4　平面図形への応用

基本 3.7 △ $A = \frac{4}{3}$，BC = 6 を満たして る．A = ∠BAC と　(琉球大学 2008) 6

(1) および の れぞれ求めよ．

ABC 円の

) △A 面積 値と， きの辺 の長さを求めよ．

円に内 る五角 CDE において = 7，BC = 3，CD = 5，D ∠B 120° の問に答　(佐賀大学 2006) 5

(1) さを求

(2) ∠BA めよ．

(3) AE の長 求め

基本 3.9 二等辺三角形 において ∠BAC = 120°，AB = AC = 1 とする．辺 BC 上に点 D をとり，AD を する正三角形 ADE をつくるとき，次の問いに答えよ．　(熊大 [文]2002) 1

(1) BD : DC = m するとき，正三角形 ADE の面積を m，n で表せ．

(2) 二等辺三角形 ABC の面積が正三角形 ADE の面積の 3 倍になるとき，$m : n$ を求めよ．

見本

標準 3.10 3 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2-2x}$，$4-x$，2 で表される三角形がある．長さ $\sqrt{x^2-2x}$ の辺は他の 2 辺より短くないとする．このとき，次の問いに答えよ．

(九大 [文]2007) 4

(1) このような三角形が描けるための x の満たす範囲を求めよ．

(2) この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ．

(3) x が (1) で求めた範囲にあるときの $\cos\theta$ の最小値と，そ　　値を与える x の値を求めよ．

標準 3.11 三角形 ABC の 3 辺の長さを $a =$　　$c =$ AB とする．実数 $t \geqq 0$ を与えたとき，A を始点とし B を通る半直　　とる．次の問いに答えよ．

(1) CP^2 を a，b，c，t を用いて表せ．

(2) 点 P が $\mathrm{CP} = a$ を満たすとき，　　よ．

(3) (2) の条件を満たす点 P が辺 A　　にちょうど　　るとき　　B に関する条件を求

標準 3.12　　において，

　　AB =　　CD $= c$，DA $= d$，　　x，BD $= y$

　　．以下　　に答

(熊大 [文]2011) 1

(1) co　　os B　　，cos　　，b，c，　　y を用いて表せ．

　　形 AB　　円に内　　とき，

　　xu　　od

　　が成　　．

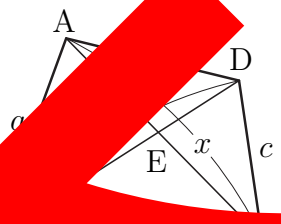
見本

3.5　問題研究

3.5.1　ブラマーグプタの公式

9 ページの 3.12(熊大 [文]2011) で出題された円に内接する四角形 ABCD 関する定理 (トレミーの定理) を含め，いくつかの公式を以下にまとめた.

円に内接する四角形 ABCD において，



$\mathrm{AB}=a,\quad \mathrm{BC}=b,\quad \mathrm{CD}=c,\quad \mathrm{DA}=$

$\mathrm{AC}=x,\quad \mathrm{BD}=y$

とすると，次が成り立つ.

(1)　$\cos A=\dfrac{d^2+a^2-b^2-c^2}{2(da+bc)}$,

(2)　$x^2=\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$,

(3)　$xy=ac+bd$　　(トレミー

(4) $2s=a+b+c$ ると，四角形 ABCD の 面積を S，外接円の半径を R ると (の公式)

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$R=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

(の交点

EA : EB : $=ac:ab:bc:cd$

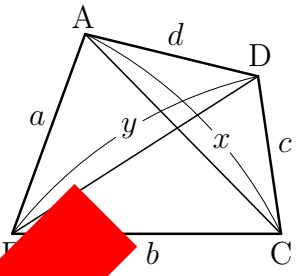
(6) $\theta=\angle$AE とする

$$\cos\theta=\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}$$

印刷本

解答 (1) 余弦定理により

$$y^2 = d^2 + a^2 - 2da\cos A$$
$$y^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$$



このとき，$\cos C = -\cos A$ であるから

$$d^2 + a^2 - 2da\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

よって　　$\cos A = \dfrac{d^2 + a^2 -$

上式から　　$\cos B = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2(ab + cd)}$

補足 $\cos B$ は $\cos A$ の結果を $a \to b,\ b \to$

(2) 余弦定理により　　$x^2 = a^2 +$

これに (1) の結果を代入

$$= a^2 + b^2 - 2ab \times \frac{+ b^2 - c^2 -}{2(ab + cd)} \qquad \frac{(ac +}{} \quad bc)$$

$$y^2 = \frac{(bd + ca)(ba + cd)}{bc + da}$$

(2) の結 $x^2 = (ac + bd)^2$　よ $xy = ac + bd$

(4) (1) から

$$1 + \cos A = \frac{a + d}{} \quad \frac{- c)^2}{bc)} = \frac{b - c + d)(a - b + c + d)}{2(ad + bc)}$$

$$\cos A = \frac{+ (b + c)^2}{c)} \quad \frac{b + c - d)(-a + b + c + d)}{2(ad + bc)}$$

が $\sin^2 A =$ $- \cos A)$

$$= \frac{(2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)(2s - 2d)}{4(ad + bc)^2}$$
$$= \frac{4(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}{(ad + bc)^2}$$

$\sin A = \sin$　　$S = \dfrac{1}{2}ad\sin A + \dfrac{1}{2}bc\sin C = \dfrac{1}{2}(ad + bc)\sin A$

$$= \frac{1}{2}(ad + bc) \times \frac{2\sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}}{ad + bc}$$
$$= \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

見本

$y=\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$，$\sin A=\dfrac{2S}{ad+bc}$ であるから，正弦定理により

$$R=\frac{y}{2\sin A}=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

(5) △EDA ∽ △ECB より　EA : EB = ED : EC = d : b

△EAB ∽ △EDC より　EA : ED = EB : EC = a : c

よって　　EA : EB : EC : ED = da : ab : bc : cd

(6) (2)，(3)，(5) の結果から

$$\mathrm{AE}^2=\left(\frac{ad}{ad+bc}x\right)^2=\frac{a^{\square}}{(ad+bc)}\cdots\frac{a^2d^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)},$$

$$\mathrm{ED}^2=\left(\frac{cd}{ab+cd}y\right)^2=\frac{c^2d^2}{(ab+\cdots}\cdots cd),$$

$$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{ED}=\frac{ad}{ad+bc}x\times\frac{cd}{ab+\cdots}\cdots\frac{acd^2(\cdots+bd)}{\cdots+cd)}$$

これらを $2\mathrm{AE}\cdot\mathrm{ED}\cos\theta=\cdots+\mathrm{ED}^2-a\cdots$ に代入し

$$\cdots\frac{d^2(ac+bd)}{\cdots)(ab+cd)}\cos\theta=\frac{acd\cdots}{(ad+bc)(\cdots}$$

て

$$\cdots\cos\theta=\frac{a^2+c^2-b^2-d\cdots}{2(ac+bd)}$$

(4) (6) の結果から

$$\cdots+\cos\cdots\frac{\cdots-d)^2}{2(\cdots}=\frac{(a-b+c+d)(a+b+c-d)}{2(ac+bd)}$$

$$1-\cdots\theta=\frac{(b\cdots-(a-c)^2}{\cdots+bd)}=\cdots\frac{b+c+d)(a+b-c+d)}{2(ac+bd)}$$

$\cdots+b\cdots$ で

$$\cdots\sin^2\theta=(1+\cdots\cos\theta)$$

$$=\frac{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)}{4(ac+bd)^2}$$

$$=\frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ac+bd)^2}$$

したがって $\cdots$ る面積 S は

$$S=\frac{1}{2}xy\sin\theta=\frac{1}{2}(ac+bd)\times\frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ac+bd}$$

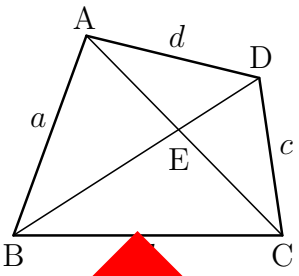
$$=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

印刷本

補足 たとえば，(1)，(6) から得られた

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

$$\cos\angle\mathrm{BEC} = \frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}$$



の符号から，これらの角の大きさに関する次の性質が分かる．

i) $\begin{cases} \angle\mathrm{ABC}\text{が鋭角} & a^2+ \quad + d^2 \\ \angle\mathrm{ABC}\text{が直角} & \quad c^2+d^2 \\ \angle\mathrm{ABC}\text{が鈍角} \quad \Leftarrow & \quad d^2 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} \angle\mathrm{BEC}\text{が鋭角} & \\ \angle\mathrm{BEC}\text{が直角} & \quad ^2+d^2 \\ \angle\mathrm{BEC}\text{が鈍} \quad \Rightarrow & \quad d^2 \end{cases}$

$d=0$ とすると，四角形 AB は三角形 AE に退化し，B，$\angle\mathrm{BEC} =$ り，$\cos B$，$\cos A$ は余弦定理に する

また，三角形 ABC における関係

，ブ タの公式

$$\sqrt{(s-)(s- - c)(s-d)} \qquad (s=a+b+c+d)$$

に ，$d=$ ると ヘロン を得る．

$$\sqrt{s(s- (s-c)} \qquad (2s=a+b+c)$$

印刷本

センター本試験 2011 から

点 O を中心とする円の円周上に 4 点 A，B，C，D がこの順にある．四角形 ABCD の辺の長さは，それぞれ

$$\mathrm{AB}=\sqrt{7},\quad \mathrm{BC}=2\sqrt{7},\quad \mathrm{CD}=\sqrt{3},\quad \mathrm{DA}=2\sqrt{3}$$

とする．$\angle\mathrm{ABC}=\theta$，$\mathrm{AC}=x$ とするとき，$\cos\theta$，x，円 O の半径 R，四角形 ABCD の面積 S

解答　$a=\sqrt{7}$，$b=2\sqrt{7}$，$c=\sqrt{3}$，$d=2$[illegible] と

$$ab+cd=20,$$
$$ad+bc=4\sqrt{21},$$

したがって

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-}{2(ab+}=\frac{20}{2\cdot20}=$$

$$=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}=\sqrt{}$$

2[illegible]$+2$[illegible]$\sqrt{3}$ より，$s=\frac{3}{2}(\sqrt{7}+$[illegible] であるから

$$s-a=$$[illegible]$\qquad s-b=\frac{1}{2}(3\sqrt{3}-\sqrt{7}),$$

$$s-c=\frac{1}{2}(3\sqrt{}$$[illegible]$),\qquad d=\frac{1}{2}(3\sqrt{7}-\sqrt{3})$$

が[illegible]$(s-$[illegible]$(s-c)($[illegible]$=15$

$$S=$$[illegible]

また [illegible]$c+bd)(ad+$[illegible]$)}=\sqrt{20\cdot5\sqrt{21}\cdot4\sqrt{21}}=20\sqrt{21}$

よって　$R=\frac{\sqrt{}$[illegible]$cd)(ac+bd)(ad+bc)}{4S}=\frac{20\sqrt{21}}{4\cdot5\sqrt{3}}=\boldsymbol{\sqrt{7}}$

印刷本

第 4 章　データの分析（数学I）

□□ **4.1** 変量 x の値が x_1，x_2，x_3 のとき，その平均値を $\overline{x}$ [illegible] 分散 s^2 を

$$\frac{1}{3}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2 \quad x_3$$

で定義するとき，$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$ となることを示[illegible]
均値を表す.

標準 4.2 1つのさいころを3回投げる[illegible]出[illegible]に出る[illegible]数，3回目に出る目の数をそれぞれ X_1，[illegible]し，5[illegible]数

$$2,\ 5,\ 2-X_1,\ 5+X_2,$$

からなるデ[illegible]以下の問いに答えよ. [illegible]点大 [illegible] 2

(1) デ[illegible]範囲[illegible]ある確率を求めよ.

(2) [illegible]データ[illegible]央値[illegible]い確率を求めよ.

[illegible] X_3 が[illegible]の平均[illegible]率を求めよ.

(4) デ[illegible]中央[illegible]均値[illegible]るとき[illegible]が中央値に等しい条件付き確率[illegible]よ.

見本

見本

第 5 章　場合の数と確率（数学 A）

5.1　場合の数

□□ **5.1** 0，1，2，3，4，5 の数字が 1 つ… さな…のカードが入っている箱から 1 枚ずつ 3 枚のカードを取り出し，左… 数 n を作るとき，次の (1)，(2) に答えよ．ただし，例えば 012 は 12 を…

(1) n が 3 桁の自然数になるのは何通りか… (福岡教育大学 …) 1

(2) 3 桁の自然数 n を作った後，箱の…て…ドを左…べて 3 桁の自然数 m を作るとき，…555 と…は…

□□ **5.2** $-2 \leqq m$…2 かつ $-2 < n \leqq$…であるような…の組 (…ち，条件「$1 \leqq m$ または…を満たすものの個数を求めよ…2) 1

□□ **5.3** …1 と…の 5 文字を並べて得られ…のう…，2 つの…が隣り合わな…の総数… (鹿児島大学 2012) 1

□□ **5.4** SA…という…べかえて得られる順列のうち，最初が子音文字…るもの…数を求… (鹿児島大学 2015) 1

…，2，…5 の 5…数字を，同…を繰り返し用いることを許し…整数…るとき…数字の和が…数になる整数は何個あるか．
(鹿児島大学 2009) 1

□□ **5.6** …等分した…い合う辺に垂線を下ろす．このとき，正方形の 4…の垂線を利用してできる長方形のうち，正方形でないものの個数を n を…いて… (福岡教育大学 2016) 1

基本 5.7 6 個の文字 A，…，D，E，F を 1 列に並べて文字列をつくる．このとき，次の問いに答えなさい． (大分大学 2009) 1

(1) 文字列の並べ方…ぶで何通りあるか．

(2) 文字 A と B が隣り合う並べ方は何通りあるか．

(3) 文字 A と B の間に他の文字が 1 個以上入るような並べ方は何通りあるか．

見本

基本 5.8 6個の数字1，2，3，4，5，6から重複を許して4個を取り出し，それらを並べて4桁の整数をつくる．千の位，百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ，a，b，c，dとおく．次のような整数は，それぞれ何通りできるか．

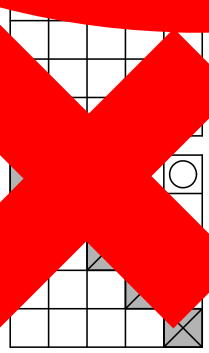
(佐賀大学 2001) 7

(1) $a < d$

(2) $a < b \leqq c < d$

基本 5.9 右上の図のような，縦方向に5行，横方向に5列の[illegible]個のマス目から，異なる5個のマス目を選んでマス目に○を[illegible]以下[illegible]答えよ．

(九工大 [情]2013) 4



(1) すべての列に○がついているようなマス目[illegible]数を求めよ．

(2) すべての行と列に○がついているよ[illegible]の総数を求めよ，

(3) ○のついている列が2列，○[illegible]いない列[illegible]列に[illegible]なるようなマス目の選び方の[illegible]を求めよ．

(4) 右下の図の[illegible]に，右上のマス目が選ばれて○[illegible]ており，[illegible]ついた対角線上のマス目を選[illegible]つけ[illegible]ものとする．このとき，[illegible]行[illegible]○が[illegible]ようなマス目の選び方[illegible]を[illegible]よ．

5.10 [illegible]9まで[illegible]ずつ書かれた9個の玉があり，これらのうち，2，3[illegible]れた[illegible]それぞれ[illegible]玉2，[illegible]呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(九工大 [情]2015) 4

([illegible]の[illegible]3個を[illegible]箱に入れ[illegible]の入れ方は何通りあるか．

(2) [illegible]入れ方の[illegible]箱に，[illegible]っしょに含まれず，玉1と玉3もいっ[illegible]いものは何[illegible]か．

(3) 9個の玉[illegible]3つの箱に分けて入れる．ただし，各箱にはそれぞれ3個ずつの玉を入[illegible]のとする．この入れ方は何通りあるか．

(4) (3)の入れ方のうち[illegible]の箱にも，玉1と玉2がいっしょに含まれず，玉1と玉3もいっしょに含[illegible]いものは何通りあるか．

見本

基本 5.11 1，2，3，4 を重複を許して並べてできる数について，次の問いに答えなさい． (大分大学 2008) 6

(1) 各けたの数の和が 6 となる 5 けたの数の個数を求めよ．

(2) 各けたの数の和が 7 となる 5 けたの数の個数を求めよ．

(3) 各けたの数の和が $k+3$ となる k けたの数の個数を求めよ．

基本 5.12 10 個のアルファベットの大文字 A，B，C，D，E，F，O，X を重複を許して並べてできる 5 文字の順列を 1 枚のカードに 1 つずつ書くことにする．なお，文字 H，I，O，X は上下を逆さまにしても H，I，O，X と読めるので，これらの文字で書かれた 5 文字の順列はカードごと上下を逆さまにすると，$i=1,2,3,4,5$ に対して i 番目の文字がもとの $6-i$ 番目の文字の順列が書かれたカードとして使えるとする．例えば，HIOXX と書かれたカードとして使えるとする．例えば，HIOXX と書かれたカードとしても使えて，XXOIH と書かれたカードとしても使えるとする．例えば，HIOXX と書かれたカードは上下を逆さまにすると 5 文字の順列を表すカードとはならない．これらを用いて，次の問に答えよ． (東京大学 2004) 3

(1) 上下を逆さまにして読んでも同じ順列を表すカードの総数を求めよ．

(2) 上下を逆さまにして読むと異なる順列を表すカードの総数を求めよ．

(3) 上下をひっくり返すことにより 1 枚のカードを別のカードにすることを許すとする．すべての順列を表すためには，最小限で何枚のカードが必要か．

標準 5.13 次の問いに答えよ． (鹿児島大学 2007) 3

(1) 10 桁の自然数で，各桁の数字がちょうど 3 になるものはいくつあるか．

(2) 以下の 5 桁の数で，各桁の数の合計がちょうど 4 になるものはいくつあるか．

(3) 前から読んでも左から読んでも同じ数になる数を「回文数」と呼ぶ．例えば，467 は回文数ではないが，2310 は回文数ではない．10 桁以下の回文数はいくつあるか．

標準 5.14 正の整数 A について，つぎの条件 (i)，(ii) をみたす整数の組 $(a,\ b)$ の総数を $N(A)$ と表わす． (分大 [医]2008) 7

(i) $a<b$

(ii) a と b の最小公倍数は A である．

(1) $N(105)$ を求めよ．

(2) $N(2310)$ を求めよ．

見本

応用 5.15　$n \geqq 4$ とする。$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 からなる数列 a_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ を考える。以下の問いに答えよ。　(熊大 [医]2012) 1

(1) このような数列 $\{a_k\}$ は何通りあるか求めよ.

(2) 数列 $\{a_k\}$ の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1 a_2 \cdots a_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ とおく．$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ.

(3) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ の最大値および最小値を与える数列 $\{a_k\}$ はそれぞれ何通りあるか求めよ.

5.2　確率

5.2.1　サイコロ

□□ **5.16**　4 個のさいころを同時に投げ[illegible]が出る確[illegible]を求めよ.　[illegible]島大[illegible] 1

□□ **5.17**　3 個のさいころを同時に[illegible]るとき，3 個[illegible]の積が[illegible]ある確率を求めよ.　([illegible]13) 1

□□ **5.18**　[illegible]を同時に投げるとき，目の[illegible]る確率を[illegible]よ.　(鹿児島大学 2010) 1

基[illegible]9　大[illegible]のサイ[illegible]げて，大きいサイコロの目の数を a，小さいサイコロの目の[illegible]とする[illegible]答えよ.　(熊大 [文]2006) 1

(2) [illegible]$= ax^2$[illegible]$- b$ の[illegible]が -5 より[illegible]なる確率を求めよ.

[illegible]数 $y = [illegible] + 2x -$[illegible]フと x 軸との[illegible]で，x 座標の大きい方を選ぶ.[illegible]が 1 よ[illegible]率を求[illegible]

(3) 関[illegible]ax^2[illegible]b のグラ[illegible]bx^2 のグラフが異なる 2 点で交わる確率[illegible]

標準 5.20　さいころを繰[illegible]投げて，n 回目に出た目の数を X_n とし，$a_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ とする．このとき，各 n[illegible]いて，$a_n \leqq 9$ となる確率を求めよ．(熊大 [文]2002) 2

見本

応用 5.21 X，Y は $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ の空でない部分集合で，$X \cap Y$ は空集合とする．また，n を自然数とする．A 君，B 君が以下のルールで対戦する．

(i) 1 回目の対戦では，まず A 君がさいころを投げて，出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする．出た目が X に属さなければ B 君がさいころを投げて，出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする．

(ii) 1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は，1 回目と同じ方[illegible]で 2 回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける．ただし，n 回[illegible]勝負がつかなかった場合は引き分けにする．

以下の問いに答えよ． (熊大 [医]2013) 1

(1) さいころを投げたとき，X，Y に属する[illegible]
A 君が勝つ確率を求めよ．

(2) A 君が勝つ確率が，B 君が勝つ確率[illegible]な集合の組 $(X,\ Y)$ は何通りあるか．

5.2.2 球

□□ **5.22** 1[illegible]整数がひとつずつ書かれた[illegible]ってい[illegible]中から玉を 3[illegible]出す[illegible]した玉に書かれた整数の[illegible]12 以上となる確率を求めよ． (福岡教育大学 2010) 5

[illegible].23 A[illegible]の 2 つ[illegible]箱 A には，赤玉が 1 個，青玉が 4 個，黄玉が[illegible]入っ[illegible]箱 B[illegible]当[illegible]3 本，[illegible]れくじが 7 本入っている．
[illegible]玉を 1[illegible]出し[illegible]が赤玉のと[illegible]B からくじを 5 本，青玉のと[illegible]，黄玉[illegible]は 2[illegible]する． (大分大学 2016) 3

(1) [illegible]出し[illegible]りく[illegible]なく[illegible]本引く確率を求めなさい．

(2) 当[illegible]とも 1 本引[illegible]めなさい．

(3) 当たり[illegible]1 本引く確率を求めなさい．

標準 5.24 赤球 4 個と白[illegible]の入った袋から 2 個の球を同時に取り出し，その中に赤球が含まれていたら，[illegible]個数だけさらに袋から球を取り出す．このとき，以下の問いに答えよ． (熊大 [医]2010) 2

(1) 取り出した赤球[illegible]数が 2 である確率を求めよ．

(2) 取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ．

見本

応用 5.25 n を2以上の自然数とする．1つの袋に1から n までの数を1つずつ書いた n 個の球と，数0を書いた2個の球が入っている．これら $(n+2)$ 個の球が入っている袋から，元に戻すことなく，1個ずつ3回球を取り出し，その3個に書かれている数を取り出した順に a，b，c とする．事象 $a+b \leqq c$ の起こる確率を $P(n)$ とするとき，次の各問に答えよ．　(宮大 [医]2015) 7

(1) $P(3)$ を求めよ．

(2) n を偶数とするとき，$P(n)$ を，n を用いて表せ．

5.2.3　カード

基本 5.26 100から999までの自然数の集合を全
と3余るものの集合を A，9の倍数の集合を

(1) A，B の要素の個数を求めなさい

(2) $A \cap B$ の要素のうち，最小の
大のも

(3) U の要素が1つずつ書かれた玉
った袋から
個取り
のとき，2個の玉に書
ている数がいずれも14で割ると
り，
れない場合の
さい．

基本 5
と3以
数とする．
1
までの
か
書かれた N 枚のカ
袋に入れ，「無作為に1枚の
を取
，そ
袋に戻さずに次のカードを取り出す」という作
3枚の
を取
ま
す．取り出された3枚のカードに書かれた数
最大
とす
から
の数
ずつ書かれた
のカードを袋に入れ，「無作為
カー
取り出
書かれた
録し，袋に戻す」という作業
を3
録され
最
とす
n を
自
する．X
率を p_n とし，$Y=n$ となる確率を q_n とする．
次の問いに
よ．　(琉球大学 2016) 4

(1) p_3，q_1，q_2，q_3 を

(2) p_n と q_n を求めよ

見本

基本 5.28 1から5の数字が書かれたカードが1枚ずつある．これらから4枚を選び，横1列に並べる．並べられたカードに書かれた数字を左から順に a，b，c，d とおく．このとき，次の問に答えよ． (佐賀大学 2016) 4

(1) カードの並べ方の総数を求めよ．

(2) 次のルールのもとで，3と4のカードを捨てる場合は何通りあるかを求めよ．

- $a<b<c<d$ ならば，b と c のカードを捨てる．
- $a<b<d<c$ ならば，b と d のカードを捨てる．
- $b<a<c<d$ ならば，a と c の[illegible]を捨て[illegible]
- $b<a<d<c$ ならば，a と d のカ[illegible]
- その他は何も捨てない．

(3) (2) のルールのもとで，何も捨てない[illegible]

基本 5.29 A，B，C の3人が自分の[illegible]いた[illegible]を[illegible]枚ず[illegible]箱の中に入れる．この箱の中から A，B[illegible]にそれぞ[illegible]枚ず[illegible]とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，引いたカー[illegible]に戻さ[illegible]とする．
[illegible]02) 2

(1) ひと[illegible]の名前のカードを引く確[illegible]

(2) [illegible]けが[illegible]のカードを引く確率を[illegible]

([illegible]人が自[illegible]の名[illegible]ドを引く確率を[illegible]

[illegible] 5.30 [illegible]中に1[illegible]まで[illegible]れかの数[illegible]を書いた同じ形の札が15枚入っ[illegible]ており，それらは[illegible]が1枚，[illegible]札が2枚，[illegible]が3枚，4の札が4枚，5の札[illegible]からなる[illegible]中から[illegible]の札のうち3[illegible]時にとり出すとき，札に書かれ[illegible]数の[illegible]S とす[illegible]次の問い[illegible]よ． (熊大 [理]2001) 4

(1) S [illegible]倍数[illegible]確率を求[illegible]

(2) S が[illegible]率を求めよ[illegible]

見本

標準 5.31 箱の中に，数字の 1 を記入したカード，2 を記入したカード，3 を記入したカードがそれぞれ n 枚，合計 $3n$ 枚入っている．ただし，$n \geqq 4$ であり，またカードの裏側には何も書かれていないものとする．以下の問いに答えよ．

(九工大 [情]2009) 4

(1) 箱の中からカードを 1 枚取り出し，数字を見ないでふせておく．次に箱の中から取り出したカードの数字が 1 である確率を求めよ．

(2) 箱の中から 2 枚のカードを同時に取り出したとき，カー[illegible]が異なる確率を n を用いて表せ．

(3) 箱の中から 3 枚のカードを同時に取[illegible]とき[illegible]の数字がちょうど 2 種類である確率を n を用いて表せ．

(4) 箱の中から 4 枚のカードを同時に取り出[illegible]種類である確率を n を用いて表せ．

標準 5.32 1 から 6 までの数字が 1 つず[illegible]れて[illegible]ドがあ[illegible]れら をよくきった上で，左から右に一列[illegible]る．カー[illegible]書か[illegible]う順に a，b，c，d，e，f とする．このとき[illegible]の問いに答[illegible]2009) 3

(1) $a + b = c$[illegible]確率を求めよ．

(2) $a + b$[illegible]a[illegible]確率を求めよ．

5[illegible]その

5.33 akata[illegible]字を[illegible]並べるとき，次の確率を求めよ．ただし，こ[illegible]字[illegible]母音[illegible]a で，[illegible]k，m，n，[illegible]る．(福岡教育大学 2009) 1

[illegible]端が[illegible]なる確[illegible]

(2)[illegible]音とな[illegible]

(3) 母[illegible]並ぶ確率

□□ **5.34** 正[illegible]形の[illegible]中から異なる 3 点を選んで三角形を作る．この三角形が正三角形にも二等辺三[illegible]こもならない確率を求めよ．　(鹿児島大学 2008) 1

見本

基本 5.35 A，B，C の 3 人がそれぞれある地域の東公園，西公園および北公園のいずれかに行こうとしている．この 3 人は次のように，硬貨の表裏によって，どの公園に行くのかを決める．

- A は手持ちの硬貨を 1 枚投げて，表が出たら東公園に行く．裏が出たら西公園に行く．
- B は手持ちの硬貨を 1 枚投げて，表が出たら西公園に行く．裏が出たら，もう 1 度その硬貨を投げて，表が出たら東公園に行き，裏が出たら北公園に行く．
- C は手持ちの硬貨を 1 枚投げて，表が出たら北公園に行く．裏が出たら，もう 1 度その硬貨を投げて，表が出たら東公園に行き，裏が出たら西公園に行く．

ただし，3 人が使用する硬貨は，表，裏がそれぞれ出る確率が等しいものとする．この
とき，次の各問に答えよ．

(1) A と B が同じ公園に行く確率を求めよ．ただし，どの公園に行くこともよいものとする．

(2) B と C が同じ公園に行く確率を求めよ．ただし，どの公園に行くこともよいものとする．

(3) 3 人が同じ公園に行く確率を求めよ．

(4) 少なくとも 2 人が同じ公園に行く確率を求めよ．

標準 1 個買うごとに 1 個もらえる商品があり，景品は全部で n 種類あり，それぞれ 1 から n までの番号がついている．また，1 から n までの数字が 1 つずつ記入されたカードがある．カードは外から数字が見えない箱の中に入れてあり，購入した商品 1 個ごとに箱の中から 1 枚引いて数字を確認して景品と交換するが，引いたカードはその都度箱に戻すものとする．もらえる景品の番号は，引いた数字と同じ番号である．この商品について次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2012) 7

(1) この商品を 3 個購入したとき，3 種類の景品が少なくとも 1 個もらえる確率を求めよ．ただし，$n \geqq 3$ とする．

(2) この商品を n 個購入したとき，全種類の景品がそろわない確率を求めよ．

(3) この商品を $n+1$ 個購入したとき，全種類の景品がもらえる確率を求めよ．

見本

標準 5.37 図のような番号のついたマス目と駒とサイコロを使って，以下に示す規則にしたがうゲームを考える．

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- 駒は最初0番のマス目に置く．
- サイコロを投げ，出た目の数だけ駒を10番のマス目に向かって進める．
- 駒がちょうど10番のマス目に止まればゴールとする．
- ただし，10番のマス目を超える場合は，その分だけ10番マス目から0番のマス目側に戻る．

たとえば，7番のマス目に駒があり，出た目が5であった場合は，駒は8番のマス目に移動し，その次に出た目が2であった場合は，

(九工大[前]) 1

(1) 2投目でゴールする確率を求めよ．

(2) 2投目の後，9番のマス目に駒がある確率を求めよ．

(3) 3投目でゴールする確率を求めよ．

(4) このゲームでA，Bの2名が対戦する．先にサイコロを投げる回数が少ない方を勝ちとする．ただし，どちらも6回投げてもゴールしない場合は引き分けとする．引き分ける確率を求めよ．

A，Bがそれぞれ k $(0 < k < 10)$ のマス目に置いて(4)と同様の対戦を開始するとき，Aが有利であることより，Bが勝つ確率の方が高くなるための k の値を求めよ．

5.2 [illegible]の最大・最小

基本 5.38 [illegible]数とする．袋の中に n 個の球が入っている．このうち6個は赤球で残りは白球である．この袋から6個の球を同時に取り出すとき，3個が赤球である確率を P_n とする．

(大分大学 2013) 1

(1) P_{10} を求めなさい．

(2) $\dfrac{p_{n+1}}{P_n}$ を求めなさい．

(3) P_n が最大となる n を求めなさい．

見本

基本 5.39 赤，青，黄 3 組のカードがある．各組は 10 枚ずつで，それぞれ 1 から 10 までの番号がひとつずつ書かれている．次の問いに答えよ．(福岡教育大学 2010) 3

(1) 30 枚のカードの中からカードを 4 枚取り出すとき，2 枚だけが同じ番号で残りの 2 枚は相異なる番号である確率を求めよ．

(2) 30 枚のカードの中から k 枚 $(4 \leqq k \leqq 10)$ を取り出すとき，2 枚だけが同じ番号で残りの $(k-2)$ 枚はすべて異なる番号が書かれている確率を $p(k)$ とする．

(ア) $\dfrac{p(k+1)}{p(k)}$ $(4 \leqq k \leqq 9)$ を求めよ．

(イ) $p(k)$ $(4 \leqq k \leqq 10)$ が最大となる k を求めよ．

基本 5.40 それぞれのカードに 1 から 25 までの [illegible] つずつ書かれた 25 枚のカードが箱に入っている．箱の中から無作 [illegible] 箱に戻すという操作を 32 回繰り返す．以下 [illegible] (九工大 [illegible]) 3

(1) 1 回の操作で取り出した 3 枚のカ [illegible] に数 [illegible] カー [illegible] まれている確率を求めよ．

(2) 32 回の操作が終わった時点において，数字 13 [illegible] れたカ [illegible] た回数が k である確 [illegible] を k を用いて表せ．

(3) (2) で [illegible] について $\dfrac{q_k}{q_{k-1}}$ を k を用いて

(4) ([illegible] めた P [illegible] となる k を求めよ．

基本 5.41 r [illegible] 上の整 [illegible] 赤球 r 個と白球 10 個が入っている袋がある．この [illegible] から 6 [illegible] 球を同 [illegible] り [illegible] のうちの赤球の個数を調べ，取り出した球 [illegible] 白球 [illegible] 加えて [illegible] 戻すと [illegible] 行を繰り [illegible] つまり，1 回の試行ごとに袋の [illegible] が 1 個 [illegible] えると [illegible] とになる．n [illegible] 試行において取り出された 9 個 [illegible] うち赤球がち [illegible] ある確率 [illegible] で表す． (琉球大学 2008) 4

(1) P [illegible] が成り [illegible] ことを示

(2) $P_n <$ [illegible] ための n の [illegible] r を用いて表せ．

(3) $r = 50$ の [illegible] き，P [illegible] 大となる n の値を求めよ．

見本

5.2.6　独立試行の定理

標準 5.42 9 枚のカードがあり，カードの表にはそれぞれ「2」「3」「4」「5」「6」「7」「8」「9」「10」の数が書かれている．また，裏にはすべて「1」が書かれている．これらのカードを投げたときに，それぞれのカードの表が上側になる確率と裏が上側になる確率は，ともに $\frac{1}{2}$ であるとする．9 枚のカードすべてを同時に投げて，各カードの上側に現れた数をすべて掛けあわせた値を得点とする．以下[illegible]答えよ．

(1) 得点が 8 点になる確率を求めよ．[illegible]大 [情]2005) 5

(2) 得点が偶数になる確率を求めよ．

(3) 得点が 8 の倍数になる確率を求めよ．

(4) 9 枚のカードからある 1 枚のカードを取り[illegible]
枚のカードを同時に投げたときに得点[illegible]
確率の $\frac{3}{4}$ 倍になった．取り除いたカ[illegible]る数として[illegible]えられるものをすべて答えよ．

標準 5.43 出席者 n 人の会議で，出[illegible]のうち $\frac{2}{3}$ 以[illegible]議案に賛[illegible]率 T_n と，$\frac{1}{2}$ 以上が賛成す[illegible]を考える．各出席者が議案[illegible]す[illegible]$\leqq 1$) とし，各出[illegible]賛[illegible]かしないかは互いにに独[illegible]る[illegible]る．
たとえば $T_2 = 2p($[illegible]$^2 = 2p - p^2$ である．[illegible]き，以下の問いに答えよ．
ただ[illegible]席者[illegible]いかのどちらかで[illegible]のとする．

T_3 を求[illegible]

(2) H[illegible]を示[illegible]

$T_2 - T$[illegible]大き[illegible]ときの p の値[illegible]よ．

($\frac{1}{2}$[illegible]，T[illegible]せ．

(5) p[illegible]き[illegible]$(k \geqq 1)$[illegible]

(九工大 [情]2008) 4

標準 5.44 大[illegible]の[illegible]コを投げ，大きいサイコロの目の数を p，小さいサイコロの目の数を q とする．$y = x^2$ のグラフと $y = qx + 1$ のグラフの交点のうち，x 座標が負のものを A，正の[illegible]を B とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分 AB の中点の[illegible]標が 2 より小さくなる確率を求めよ．(熊大 [理]2009) 3

(2) A の x 座標が有[illegible]となる確率を求めよ．

(3) $\angle$OAB が 90° より大きくなる確率を求めよ．ただし，O は座標平面の原点である．

見本

標準 5.45 1個のさいころを2回続けて投げるとき，1回目に出る目の数を a，2回目に出る目の数を b とする．これらの a，b に対して，実数を要素とする集合 P，Q を次のように定める．

$$P = \{x \mid x^2 + ax + b > 0\}$$
$$Q = \{x \mid 5x + a \geqq 0\}$$

このとき，以下の問いに答えよ． [理]2011) 1

(1) P が実数全体の集合となる確率を求め

(2) $Q \subset P$ となる確率を求めよ．

標準 5.46 さいころを3回続けて投げて出た目を b，c に対して2次方程式

$$(*) \qquad ax^2$$

を考える．ただし，さいころはどの に確か く のとき，次の問いに答えよ． 007) 4

(1) 2次方程式 が異なる二つの実数の解をもつと 積 ac を求め，積 ac の 可能な a と c の組 $(a,\ c)$ がそ る よ．

(2) 2次 $(*)$ 二つの有理数の解をも をめよ．ただし，一般 数 n が でなければ $\sqrt{n}$ は無 であることを用いてよい．

.47 3 いこ ろものとする．このとき，次の各問に答えよ．

) 次 を求 (鹿児島大学 2001) 8

の目 3個出 1 両方の の他の目 い確率

と3 類の目 率

(2) 出る 最小値を $M-m=k$ となる確率 p_k $(0 \leqq k \leqq 5)$ を求め 要ならば $k \leqq 2$ の計算には，次の事項 (i)，(ii) を用いてもよい．

(i) 出る目の数は $m+k$ の2種類の目のみの場合と m，$m+k$，$m+i$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$ の 類の目の場合のいずれかである．

(ii) $1 \leqq m \leqq 6$ ある．

見本

応用 5.48 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている．次の操作を繰り返し行う．

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる．袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう．

(1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ．[理]2015) 4

(2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ

(3) 8 回目の操作ではじめて硬貨をもら　求め

(4) 8 回の操作でもらう硬貨の総数がちょう　確率を求めよ．

5.2.7　反復試行の確率

基本 5.49 箱の中に 1 から 4 までの番　ずつ　た　カード　ている．また，手元に 0 の番号が書かれ　ドを持っ　とす　カードを 1 枚引き，手元のカードと比較し　番号の小さい　ードを　て，大きい方のカードを　残すという試行を繰り返す．　き　．

　貫大　11

(1) 3　返して　ードが 4 である確率を　．また，n 回繰り返して　のカー　　率を求めよ．

　回繰り　て手元　2 である確率を求めよ．また，n 回繰り返して手元　ードが　る確　うよ．

　り返し　元のカ　3 である確　めよ．

見本

基本 5.50 座標平面上に点Pがあり，次のルールにより，点Pは移動する．

a，b，cの文字がそれぞれ1つずつ書かれた球3個が入った袋から，1個取り出してそこに書かれている文字を読み，その文字が

aのとき，点Pはx軸の正の方向へ1だけ移動し，

bのとき，点Pはx軸の負の方向へ1だけ移動し，

cのとき，点Pはy軸の正の方向へ1だけ移動する．

最初，点Pは原点Oにあるものとする．この試行を，取り[illegible]ボを元に戻しながら，5回続けて行う．例えば，これによ[illegible]得られた5[illegible]字が順に$b \to a \to c \to c \to a$であるとすれば，上のルールに[illegible]点Pの[illegible]座標は，

$$(0,\ 0) \to (-1,\ 0) \to (0,\ 0) \to (0[illegible] \to (1,\ 2)$$

と変化する．

このとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学[illegible]) 3

(1) y軸上で点Pの移動が終了する場[illegible]了し[illegible]の座標[illegible]て求めよ．

(2) 点Pの移動が終了する位置の[illegible]なる座標の[illegible]求めよ．

(3) 点Pの移[illegible]了する位置の座標$(x,\ y)$が$|x[illegible]1$[illegible]確率を求めよ．

応用 5.5[illegible]中に[illegible]5個，青玉が10個，白[illegible]個入っている．袋の中から玉[illegible]取り出[illegible]玉の色に応じて，[illegible]操作で座標平面に置いたコ[illegible]動か[illegible]を考え[illegible]

(操作)[illegible]が点[illegible]にあ[illegible]とする．赤玉を取り出したときにはコ[illegible]ンを点[illegible]$1,\ y)$[illegible]青玉を取[illegible]たときには点$(x,\ y+1)$[illegible]に移[illegible]玉を取[illegible]たときには点[illegible]$1,\ y-1)$に移動し，取[illegible]球は[illegible]

最初に[illegible]$0)$に[illegible]を置き[illegible]り返して行う．指定した回数だけ操作を繰[illegible]ンが置か[illegible]を到達点と呼ぶことにする．このとき，以下の[illegible] (九大 [文]2016) 3

(1) 操作をn回繰り返[illegible]き，白玉を1度だけ取り出したとする．このとき，到達点となり得る点[illegible]て求めよ．

(2) 操作をn回繰り返[illegible]き，到達点となり得る点の個数を求めよ．

(3) 座標平面上の4[illegible]$1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,-1)$，$(1,-1)$を頂点とする正方形Dを考える．操作[illegible]回繰り返したとき，到達点がDの内部または辺上にある確率をP_nとする．P_3を求めよ．

(4) 自然数Nに対してP_{3N}を求めよ．

見本

5.2.8　条件付き確率

基本 5.52　2個のさいころを同時に1回投げる．出る目の和を5で割った余りをX，出る目の積を5で割った余りをYとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1)　$Y \geqq 1$である確率を求めよ．　(宮崎大学 2003) 7

(2)　$X = 2$または$Y = 2$である確率を求めよ．

(3)　$X = 2$である条件のもとで$Y = 2$である確率を求めよ．

基本 5.53　出る目の確率が次のようなさい[illegible]がひとつ[illegible]

・1，3の目が出る確率はそれぞれ　$\dfrac{1}{12}$

・5の目が出る確率は　$\dfrac{1}{3}$

・2，4，6の目が出る確率はそれぞれ[illegible]

そこで，さいころを1回ふり，出た目[illegible]し，Aを[illegible]割った[illegible]る．次にもう1回さいころをふり，出た目[illegible]こし，$A+$[illegible]で割った[illegible]とする．このとき，次の[illegible]に答えよ．[illegible]005) 9

(1)　事象X[illegible]起こる確率を求めよ．

(2)　事[illegible]$Y =$[illegible]る確率を求めよ．

(3)　[illegible]$X+Y$[illegible]という条件のもと[illegible]$X = 1$，$Y = 2$である条件[illegible]き確率[illegible]よ．

基本 5.5[illegible]ームA[illegible]ームB[illegible]回野球[illegible]合をする．毎回勝敗を決定し，引[illegible]いもの[illegible]る．どち[illegible]のチームが[illegible]したときにそのチームの優勝[illegible]1回目[illegible]合では[illegible]ムの勝つ確率[illegible]チームの勝つ確率の2倍である．[illegible]の試合[illegible]ムが勝[illegible]は，前日の試合で勝ったときはBチー[illegible]確率[illegible]であり，[illegible]Bチームの勝つ確率の$\dfrac{1}{3}$倍である．このとき，[illegible]えよ．　(鹿児島大学 2007) 7

(1)　1回目の試合でAチームが勝つ確率P_AとBチームが勝つ確率P_Bを求めよ．

(2)　前日の試合でAチ[illegible]が勝ったとき，今日の試合でAチームが勝つ確率P_{AA}と，前日の試合で[illegible]ームが勝ったとき，今日の試合でBチームが勝つ確率P_{BB}を求めよ．

(3)　4回以内の試合[illegible]が決まる確率を求めよ．

(4)　5回目の試合で優勝が決まったことがわかっている．このときAチームが優勝している確率を求めよ．

見本

標準 5.55 はじめに，4 枚の硬貨 A，B，C，D が，表が上の状態で置かれている．これらの硬貨に対して以下の試行を繰り返すものとする．

試行：4 枚の硬貨のうち，裏が上の硬貨はそのままにし，
表が上の硬貨はすべて拾って同時に投げる．

ただし，すべての硬貨が，裏が上の場合も，0 枚の硬貨を拾って投げるとみなして，試行を繰り返すものとする．以下の問いに答えよ． (北[illegible]大 [情]2016) 4

(1) 硬貨 A が 3 回目の試行の後に表が上である確率を求め

(2) 3 回目の試行の後，硬貨 A と B は表 かつ と D は裏が上である確率を求めよ．

(3) 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚で

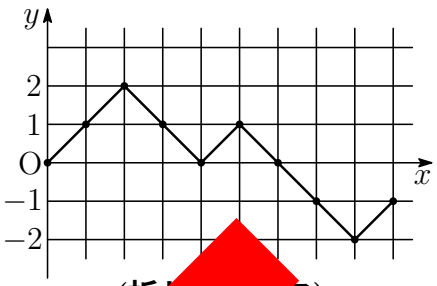
(4) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚 後に表が上の硬貨が 2 枚である確率

(5) 1 回目の試行の後に表が上の硬 で，3 行の が上の硬貨が 2 枚である確率を求

(6) 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚であっ のと の試行の後に表が が 3 枚である確率を求めよ．

見本

応用 5.56　平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき，その点を格子点という．与えられた格子点を第 1 番目とし，この点から右斜め 45°，または右斜め $-45°$ の方向にもっとも近い第 2 番目の格子点をとり，この 2 点を線分で結ぶ．同様にして第 2 番目の格子点から第 3 番目の格子点をとり，第 2 番目と第 3 番目を線分で結ぶ．以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということにする．右図に[illegible]格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例を示す．次の問いに[illegible]



(折[illegible]フ)

(九大 [理]2002) 6

(1) n は正の整数，k は $0 \leqq k \leqq n$ なる整数と[illegible]格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条[illegible]また，この必要十分条件がみたされて[illegible]ぶ折れ線グラフの数を求めよ．

(2) n は 2 以上の整数，k は $0 \leqq k \leqq$[illegible]る整数[illegible]k[illegible]す[illegible]と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グ[illegible]って格子[illegible]$k)$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも[illegible]つを通る折れ線グラフの数は，[illegible]と格[illegible]$k+1)$ を結ぶ折[illegible]フの数の 2 倍に等しいことを[illegible]

(3) コイン[illegible]回，[illegible]1 回から i 回までの試行に[illegible]，[illegible]出た回数[illegible]裏の出[illegible]を引[illegible]で表す．このとき各[illegible]$(i,\ T_i)$，$i = 0, 1, 2, \cdots, 9$，[illegible]番に線[illegible]れ線グラフが得ら[illegible]ただし，$T_0 = 0$ とする．[illegible]$= 3$[illegible]たとき[illegible]$i = 1, 2, \cdots, 7)$ も 3 にならない条件つき確率を求め[illegible]

見本

第 6 章　整数の性質（数学 A）

6.1　約数と倍数

□□ **6.1** 3 桁の自然数 a について，百の位[illegible]の数を a_2，一の位の数を a_3 とする．$a_1+a_2+a_3$ と a は 9 で割った[illegible]とを示せ．

□□ **6.2** n が 2 以上の整数のとき，n^3-[illegible]とを示せ．
([illegible]崎大学[illegible]) 1

□□ **6.3** 自然数 n が 6 と互いに素[illegible]とき，n^2-[illegible]で割[illegible]とを示せ．
([illegible]016) 1

□□ **6.4** m[illegible]数とする．n を m で割ると[illegible]13 は[illegible]り切れるとき[illegible]の値を[illegible]めよ．
(鹿児島大学 2011) 1

□□[illegible]$20!=$[illegible](k は[illegible]り立つとき，整[illegible]の値を求めよ．
(鹿児島大学 2009) 1

[illegible]y を[illegible]すると[illegible]、下の問い[illegible]よ．
(熊大 [医]2011) 1

[illegible]$-x$ [illegible]の倍数[illegible]を示せ．

(2)[illegible]は 30[illegible]であ[illegible]示[illegible]

6.2　不定[illegible]程式

□□ **6.7** 1 次不定方程式

$$37x+32y=1$$

の整数解を 1 組求めよ．
(鹿児島大学 2015) 1

□□ **6.8** $a^2b-3a^2+5b=21$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．
(福岡教育大学 2016) 1

見本

基本 6.9 n を整数とする方程式を $5x+3y=2n$ とする．　(大分大学 2005) 7

(1) $n=30$ のとき，この方程式をみたす正の整数 x，y の組をすべて求めなさい．

(2) この方程式をみたす整数 x，y の組をすべて求めなさい．

標準 6.10 100 人の団体がある区間を列車で移動する．このとき，乗車券が 7 枚入った 480 円のセット A と，乗車券が 3 枚入った 220 円のセット B を購入して，利用することにした．以下の問いに答えよ．　[文]2012) 3

(1) x が 0 以上の整数であるとき，次のこ　示せ．
$\frac{1}{3}(100-7x)$ は，x を 3 で割ったとき　整数であり，
それ以外の場合は整数ではない．

(2) 購入した乗車券は，余らせずすべて利
とセット B の購入の仕方をすべて

(3) 購入した乗車券は余ってもよい　る．　き，　B の
みを購入する場合も含めて，　額が最も低　るの　それぞれ
何セットずつ購入するときか．　たそのときの　金額は

標準 6.11 以　答えよ．　点大 [　1

(1) k　とする　の方程式 $x^2-k^2=12$　解をもつような k の値を
　求め

　の方程　$a-1$　$x+a+2=0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつ
よう　a の　のと　数解をすべて求めよ．

　次の　答え　　(分大 [医]2007) 7

(　y を　　用 x，y　て求めよ．

(2) $($　$z)$　$+yz+$　然数の組 $(x \leqq y \leqq z)$ をすべて求めよ．

応用 6.13 p を　数とす　，次の問に答えよ．　(佐大 [医]2015) 6

(1) 2 つの自然数 m，n　大公約数は 1 であるとし，$x=\dfrac{n}{m}$ とおく．p^x が有理数であるならば，n　であることを示せ．

(2) 方程式
$$p^x=-x^2+9x-5$$
が有理数の解 x をもつような組 $(p,\ x)$ をすべて求めよ．

見本

6.3 合同式

基本 6.14 a，bは自然数とする．aを8で割った余りをr，bを8で割った余りをsとする．このとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2002) 3

(1) $a+b$を8で割った余りと$r+s$を8で割った余りが等しいことを示せ．

(2) a^2を8で割った余りとr^2を8で割った余りが等しいことを示せ．

(3) 平方数を8で割ったとき，余りとしてえられる数をすべて求めよ．ただし，平方数とは自然数の平方となっている数のことである．

(4) 2つの平方数の和を8で割ると余りが3にならないことを示せ．

標準 6.15 自然数nに対して，10^nを13で割ったときの商をa_nとする．ただし，a_nは0から12までの整数である．以下の問いに答えよ．

(1) a_{n+1}は$10a_n$を13で割った余りに等しいことを示せ．

(2) a_1，a_2，$\cdots$，a_6を求めよ．

(3) 以下の3条件を満たす自然数Nをすべて求めよ．

(i) Nを10進数で表示したとき6桁となる．

(ii) Nを10進数で表示して，最初と最後の桁の数字を入れかえると$\frac{1}{2}N$となる．

(iii) Nは13で割り切れる．

応用 6.16 以下の問いに答えよ． (九大 [理]2015) 5

(1) nが正の奇数のとき，2^n-1は3の倍数であることを示せ．

(2) 自然数n，2^n+1，2^n-1は互いに素であることを示せ．

(3) qを異なる素数とし，$2^{q-1}-1=pq^2$を満たすp，qの組をすべて求めよ．

6.4 整数の活用

基本 6.17 2つの整数a，bの和で表される整数の集合をAとする．以下の問いに答えよ． (熊大 [文]2011) 2

(1) 集合Aのある要素a^2+b^2 (a，bは整数)が3で割り切れるとき，a，bはともに3で割り切れることを示せ．

(2) xを整数とするとき，x^2が集合Aの要素であるとき，xは集合Aの要素であることを示せ．

見本

基本 6.18 次の各問に答えよ．　(鹿児島大学 2001) 3

(1) 次の等式を証明せよ．

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

(2) 二つの整数の平方の和で表される数の全体からなる集合を A とする．x，y が集合 A の要素であるとき，積 xy もまた集合 A の要素であ[illegible]を証明せよ．

(3) (2) の集合 A に対して，5 および 5^5 は A の要素である[illegible]明せよ．

標準 6.19 次の問いに答えよ．　[illegible]岡教育大学 2003) 1

(1) a，b を正の整数とし，$f(x)=ax+b$ とす[illegible] $f(2)$ のうち，2 つの値が 3 の倍数ならば a，b はともに 3 の倍[illegible]

(2) a，b，c，d を正の整数とし，$f(x)=$[illegible] d とする．$F(x)=f(x)g(x)$ の係数，定数項[illegible] a，b は[illegible]に 3 の倍数であるか，または c，d は[illegible]の倍数[illegible]

標準 6.20 1 から n までの自然数のうちで，n と互[illegible]である[illegible]数を $\varphi(n)$ とする．ただし[illegible]数 a と b が互いに素であるとは[illegible] b [illegible] 1 になることであ[illegible]　[illegible]賀大[illegible]) 1

(1) φ[illegible]求め[illegible]

(2) [illegible]素数，[illegible]自然数[illegible]き，$\varphi(p^k)$ を求[illegible]

(3) $\varphi(100)$[illegible]よ．

(4) φ[illegible]を求[illegible]

1 $f($[illegible]-2[illegible]$-2)$ とおく[illegible]とき，次の問いに答えよ．
(九大 [文]2007) 1

(1) 方[illegible]数解 x を[illegible]小さい順に並べよ．

(2) 不等式[illegible]す整数 n をすべて求めよ．

(3) 不等式 $f(n)\leqq 1$ を[illegible]整数 n をすべて求めよ．

見本

応用 6.22 4次方程式の解について，次の問いに答えよ．ただし，右のことは既知としてよい． (長大 [医]2010) 7

自然数 k，l，m が次の条件
(イ) k と l は1以外の約数をもたない
(ロ) k は lm の約数である．
を満たすならば，k は m の約数である．

(1) a，b，c，d は整数で，$d \neq 0$ とする．次の方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

が有理数の解 r をもつとき，$|r|$ は[illegible]あり，[illegible]の約数に限ることを証明せよ．

(2) 次の方程式

$$2x^4 - 2x$$

の実数解はすべて無理数であること[illegible]

応用 6.23 以下の問いに答えよ． [illegible]4) 2

(1) 任意の自然数[illegible]に対し，a^2 を3[illegible]割った余りは[illegible]であ[illegible]明せよ．

(2) 自然数 a，b，c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定[illegible]c[illegible]3で割り[illegible]ないことを証明せよ．

(3) $a^2 + b^2 = 3c^2$[illegible]然数 a，b，c は存在し[illegible]とを証明せよ．

応用 6.24 n[illegible]整数[illegible] (分大 [医]2004) 8

(1) 整式 x^5[illegible]った[illegible]求めよ．

[illegible]$x^{4n} + x^{2n} + x^3 + x^2$[illegible]で割った余りを求めよ．

見本

6.5　問題研究

6.5.1　オイラーの φ 関数

38 ページの 6.20(佐賀大学 2005) は，オイラーの φ 関数に関する出題である．

1 から n までの自然数のうちで，n と互いに素であるものの個数を表す関数 $\varphi(n)$ を，オイラーのトーシェント関数 (Euler's totient function) または φ 関数 (phi function) という．6.20(2) の結果から，p を素数，k を自然数とするとき，次が成り立つ．

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

定理 1

p，q を素数，k，l を自然数，$n = p^k q^l$ とす

$$\varphi(n) = \varphi(p^k)\varphi(q^l) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

証明　1 から n までの自然数のうち，p，q，pq で割り切れる個数はそれぞれ $\dfrac{n}{p}$，$\dfrac{n}{q}$，$\dfrac{n}{pq}$ で，p または q で割り切れる個数は

$$\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{pq}$$

よって $\varphi(n) = n - \left(\dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{n}{pq}\right) = n\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)\left(1 - \dfrac{1}{q}\right)$

$= p^k\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)q^l\left(1 - \dfrac{1}{q}\right) = \varphi(p^k)\varphi(q^l)$

証終

補題 $\varphi(9)\varphi($ せよ．

証明 10 について，$9i + 10j$ とすると，次のページの表 1 のように，$9i + 10j$ を 90 で割った余り (ただし割り切れるときは，便宜上 90 とする) を求めると，表 2 のようになる．

表 2 からもわかるように，$9i - 10j$ $(1 \leqq i \leqq 10,\ 1 \leqq j \leqq 9)$ の値は，法 90 について，どの 2 つも合同ではない．実際，$1 \leqq i, i' \leqq 10,\ 1 \leqq j, j' \leqq 9$ に対して

$$9i + 10j \equiv 9i' + 10j' \quad \text{すなわち} \quad 9(i - i') \equiv 10(j' - j) \pmod{90}$$

が成立するとき

$$9(i - i') \equiv 0 \pmod{10}$$
$$10(j' - j) \equiv 0 \pmod{9}$$

$-9 \leqq i - i' \leqq 9$，$-8 \leqq j' - j \leqq 8$ であるから　$i = i'$，　$j = j'$

印刷本

したがって，表 2 には，1 から 90 までの自然数が 90 個並ぶ．

$9i + 10j$ の値 (表 1)

$i \diagdown j$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	19	29	39	49	59	69	79	89	99
2	28	38	48	58	68	78	88	98	108
3	37	47	57	67	77	87	97	107	117
4	46	56	66	76	86	96	106	116	126
5	55	65	75	85	95	105	115	125	135
6	64	74	84	94	104	114	124	134	144
7	73	83	93	103	113	123	133	143	15
8	82	92	102	112	122	132	142	152	
9	91	101	111	121	131	141	151	161	17
10	100	110	120	130	140	150	160	170	180

$9i + 10j$ を 90 で割った余り (表 2)

$i \diagdown j$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	19	29	39	49	59	69	79	89	9
2	28	38	48	58	68	78	88	8	18
3	37	47	57	67	77	87	7	17	27
4	46	56	66	76		6	16	26	36
5	55	65	75			25	35	45	
6	64	74	84		24	34	44	54	
7	73	83		23	33	43	53	63	
8	82			32	42	52	62	72	
9			31	41	51	61	71	81	
10			40	50	60	70	80	90	

$90 = 9 \times 10$ で 9 と 10 は互いに素であるから
互いに素である数は 9 または 10 と互いに
表 2 の 1 から 90 までの自然数のうち，
目，9 列目に並び，それ以外の列数
と互いに素でない数は，すべて 2 行
並び，それ以外の
あるものを残
ものが右下
よって

	29							
37			67			7		
			23					
					61	71		

19	29			9	79	89		
37	47	67	77	7	17			
73		13	23	43	53			
		31	41	61	71			

証終

補題の証明を一般化する
より，次の定理を得る．

定理 2

自然数 m，n が互い
あるとき，次式が成り立つ．

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

見本

定理 3

$p_1,\ p_2,\cdots,p_l$ を素数，$k_1,\ k_2,\cdots,k_l$ を自然数とすると

$$n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_l}^{k_l}$$

について，次式が成り立つ．

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

証明　定理 2 の乗法的性質を用いると

$$\varphi(n) = \varphi({p_1}^{k_1})\varphi({p_2}^{k_2})\cdots\varphi(p_l$$

$$= {p_1}^{k_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right){p_2}^{k_2}\left(1$$

$$= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1$$

証終

定理 4 フェルマー・オイラーの定理 (Fermat-Eu heor

自然数 n と ある自然数 a について，次

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

証 以下の で n である数を

$$r_1,\ r_2,\ \ (n)} \tag{6.1}$$

する ように n 素である自然 を掛けた数

$$r_{\varphi(n)} \tag{6.2}$$

は，と いて合同で ．$ar_i \equiv ar_j$ と仮定すると，$a(r_i - r_j) \equiv 0$ より，r_i r_j．ゆ 法 n に関して，(6.1) と (6.2) は順序を無視すると一致する．したがって をすべて掛け合わせたものと (6.2) をすべて掛け合わせたものは合同で すなわち

$$r_1r_2\cdots r_{\varphi(n)} \equiv r_1r_2\cdots r_{\varphi(n)} \pmod{n}$$

ゆえに $r_1r_{\varphi(n)}(a^{\varphi(n)}-1) \equiv 0 \pmod{n}$

よって $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

とくに，n が素数 p のとき (フェルマーの小定理)　$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$　**証終**

印刷本

定理 5

自然数 n と互いに素である自然数 a について

$$a^e \equiv 1 \pmod{n}$$

を満たす最小の自然数 e(位数) は，$\varphi(n)$ の約数である．

証明 $\varphi(n)$ が e で割り切れないと仮定し，$\varphi(n)$ を e で割った商を q，余りを r とすると

$$\varphi(n) = eq + r \qquad 0 < r < e$$

したがって $a^{\varphi(n)} = a^{eq+r}$

$a^{\varphi(n)} \equiv 1$，$a^e \equiv 1 \pmod{n}$ であるから

$$a^r \equiv 1 \pmod{n}$$

これは，e が位数であることに矛盾する． **証終**

例 例えば，7 と互いに素である数 1, 2, 3, 4, 5, 6 について

$$1^6 \equiv 1, \quad 3^6 \equiv 1, \quad 4^3 \equiv 1, \quad 5^6 \equiv 1, \quad 6^2 \equiv 1 \pmod{7}$$

このように 7 と互いに素な数は $\varphi(7) = 6$ の約数である．

一般について $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ が $p-1$ に等しいとき，a を法 p の原始根という．

このとき $a^1, a^2, \cdots, a^{p-1}$ は p に関して異なる．

実際 $a^i \equiv a^j \pmod{p}$ $(i < j < p)$ とすると

$$a^i(a^{j-i} - 1) \equiv 0 \pmod{p} \qquad a^{j-i} \equiv 1 \pmod{p}$$

これは a が法 p の原始根であることに反する．

上の例から 3 と 5 は法 7 の原始根であり，法 7 に関して次の巡回性がある．

$$3^1 \equiv 3, \quad 3^2 \equiv 2, \quad 3^3 \equiv 6, \quad 3^4 \equiv 4, \quad 3^5 \equiv 5, \quad 3^6 \equiv 1 \pmod{7}$$
$$5^1 \equiv 5, \quad 5^2 \equiv 4, \quad 5^3 \equiv 6, \quad 5^4 \equiv 2, \quad 5^5 \equiv 3, \quad 5^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

見本

見本

第 7 章　図形の性質（数学 A）

7.1　角の大きさ

□□ **7.1** 三角形 ABC において辺 AB 上に，辺 [illegible] 点 E をとり，線分 BE と線分 CD の交点を F とする．点 A，D，E，[illegible] にあり，さらに角のあいだに

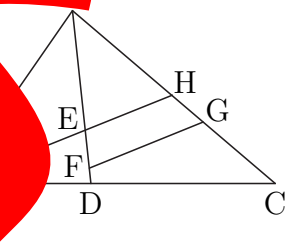
$$\angle AEB = 2\angle AB[illegible]$$

という関係が成り立つとき，∠BAC の値を求めよ．[illegible]児島大学 [illegible]4) 1

7.2　三角形の辺の比

□□ **7.2** △A[illegible] て ∠A の二等分線と辺 BC と [illegible] する [illegible] = 6, BC = 5, [illegible] の [illegible] 辺 AC の長さを求めよ．[illegible]児島大学 [illegible]16) 1

基 [illegible] 右図 [illegible] ABC [illegible] AB : 3 : [illegible] る．さ [illegible] 等分線 辺 BC [illegible] と点を [illegible] る．[illegible]



AD [illegible] に内分 [illegible] を E, F [illegible] : 1 に [illegible] F, [illegible] を 7 : [illegible] 分する [illegible] とする．[illegible] C との交点 [illegible] るとき，次の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{AH}{HC}$ の値を求めよ．(宮崎大学 2010) 8

(2) BH//FG であることを証明せよ．

(3) FG = 7 のとき，線分 DE の長さを求めよ．

見本

基本 7.4 △ABC は AB = AC で ∠C = 72° である．∠B の二等分線と AC との交点を D とする．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2009) 6

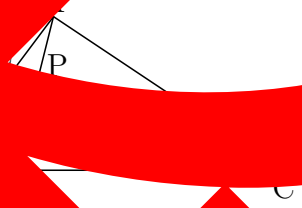
(1) △ABC と △BCD は相似であることを示せ．

(2) AD : DC を求めよ．

(3) 直線 BC 上の点 E を BC = BE となるようにとる．ただし，E は C と異なる点である．DE と AB の交点を F とするとき，AF : FB を求め

基本 7.5 右の図の三角形 ABC において，

$$\mathrm{AE} : \mathrm{EB} = 1 : a$$
$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = 1 : b$$



とする．ただし，$a > 0$，$b > 0$ である．この
次の各問に答えよ．　(宮崎大学 20

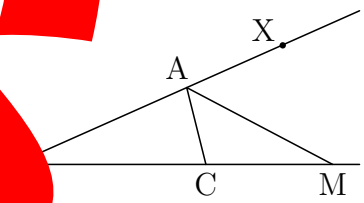
(1) AP : PD を a，b を用いて表せ．

(2) △APE : △ABC を a，b を用

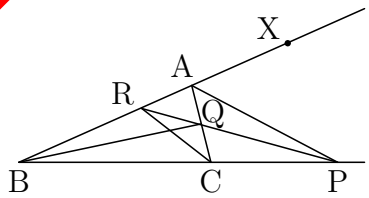
基本 7.6 AB > A である △ABC について，次の各 答えよ の 2 つの図において，BA の延長上の点とする．　) 13

(1) 右図 に，辺 BC の延長上に AB : BM MC を満た ように
このと (B) に答えよ．

) 点 AB AN を満た
にと である
ことを示
AM の外 分すること
を



(2) て，∠ 分線
辺 点 は ∠C の
AB と また，直線 辺
BC の延 の交 とする．このとき，
AP が ∠A の外角を 分することを示せ．



標準 7.7 △ABC におい C = 90°，AB : AC = 5 : 4 とする．辺 BC の点 C 側の延長上に，CA = CD と 点 D をとる．辺 AB の中点を E とし，点 B から直線 AD に下した垂線を BF と き，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2016) 7

(1) EF = EC を示せ．

(2) 面積比 △ABC : △CEF を求めよ．

印刷本

標準 7.8 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D，E，F とする．また，AE と BF，BF と CD，CD と AE の交点をそれぞれ P，Q，R とする．このとき，以下の問いに答えよ． (九大 [文]2016) 2

(1) 3 直線 AE，BF，CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ．

以下，t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする．

(2) $\mathrm{AP} = k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR} = \ell\mathrm{CD}$ を満たす実数 k，ℓ をそれぞれ

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ．

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ．

標準 7.9 △AOB は OA = OB = 1 なる二等

分 OB に関して A と対称な点を A′ とする (九大 [文]2002) 3

(1) $\alpha < 90°$ とする．右図のように

に点 C をとる．点 C を固定し，

に点 D を折れ線 ADC の長さが最小となる

ようにと OA′ 上に OC′ = OC を

みた 線分 AC′ は点 D を

通 を示せ (折れ線 ADC)



(2) 45° と 線 に点 E を，線分 に点 F を折れ線 AFE の長

が最小 ような のとき ∠AEF は直角となることを示せ．

(3) $\alpha <$ する OA を，線分 OB 上に点 H を折れ線 AHGB の

長 最小と ように このとき，線 AHGB の長さを α を用いて

．

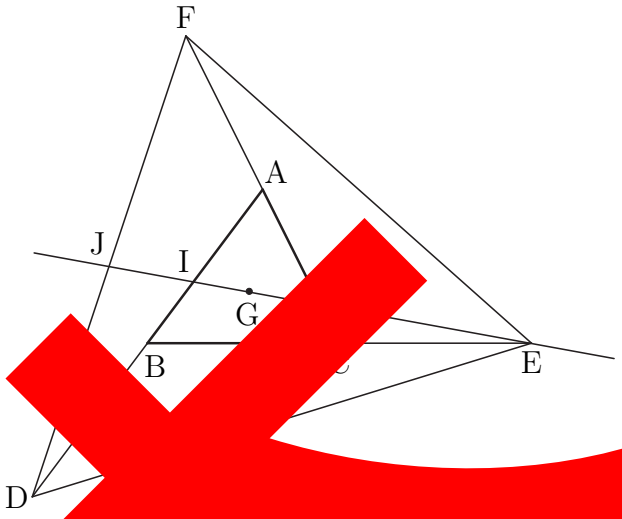
7.3 形 心・内心

□□ **7.10** A 鋭角三角形 ABC の外心を O，重心を G とする．直線 OG と A から辺 BC におろし 線との交点を H，BC の中点を M とするとき，AH : OM を求めよ． (鹿児島大学 2009) 1

□□ **7.11** 三角形 ABC いて，辺 AB の中点を D，辺 AC の中点を E とする．BE = CD ならば AB であることを示せ． (鹿児島大学 2012) 1

見本

基本 7.12 右図の △ABC において，辺 AB 上の延長上に AB ＝ BD となる点 D がある．同様に，辺 BC の延長上に BC ＝ CE となる点 E が，辺 CA の延長上に CA ＝ AF となる点 F がそれぞれある．△ABC の重心を G とし，直線 GE と線分 AC，AB，FD との交点をそれぞれ H，I，J とする．このとき，次の比を求めよ．　(宮崎大学 2015) 11

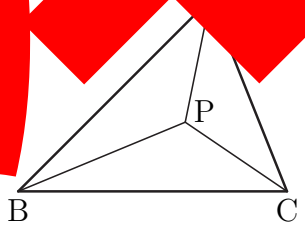


(1) CH : HA

(2) BI : IA

(3) DJ : JF

基本 7.13 右図のように，△ABC の内[illegible]を[illegible]△[illegible]PBC[illegible]A の面積をそれぞれ S_{AB}，S_{BC}，S_{CA} と[illegible]，次の[illegible]答え[illegible]2012) 9

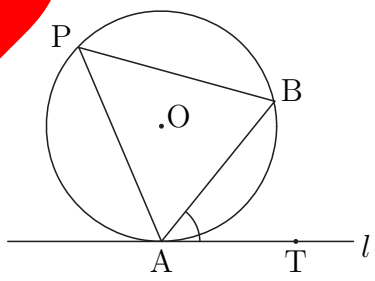


(1) 点 P が △[illegible]心で，$S_{AB}{}^2 + S_{CA}{}^2 = S_{BC}{}^2$ が成[illegible]AC の大きさを求めよ．

(2) $S_{[illegible]BC}$ [illegible]り立つとき，点 P は[illegible]C の重[illegible]示せ．

[illegible]と直

□□[illegible]のよう[illegible]を[illegible]る円[illegible]おいて，[illegible]と[illegible]ける接線[illegible]角 ∠BAT は[illegible]る弧 AB に対[illegible]円周角 ∠APB に[illegible]証明せよ．ただし，∠BAT は鋭角とする．[illegible]崎大学 2013) 12



見本

基本 7.15 次の問いに答えよ. (佐賀大学 2008) 10

(1) 平面において，一直線上に相異なる 3 点 A，P，B をこの順にとる．次に線分 AB を直径とする半円 C をかき，点 P を通る直線 AB の垂線と半円 C との交点を Q とする．このとき，半円 C の半径と線分 PQ の長さをそれぞれ線分 AP の長さと線分 BP の長さを用いて表せ.

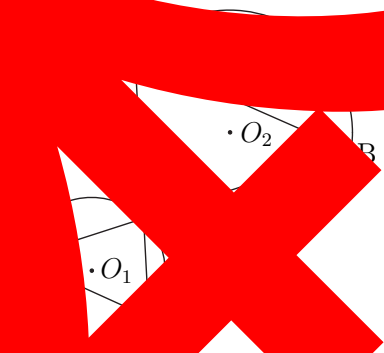
(2) (1) を用いて，2 つの正の数 a，b に対して，不等式

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

が成り立つことを示せ．また，等号[illegible]立つの[illegible]うな場合かも示せ.

基本 7.16 次の問に答えよ. (宮崎大学 2014) 9

(1) 右図のように半径 r_1 の円 O_1 と半径 r_2 の円[illegible] O_2 が外接している．円 O_1 と円 O_2 の[illegible] をPとする．円 O_1 の周上に点Pと[illegible] 点Aをとり，線分APの延長と[illegible]交点をBとする．また，円 O_1 [illegible]点P，点Aと異なる点Cをとり，線[illegible]の延長と円 O_2 の[illegible]をDとする.

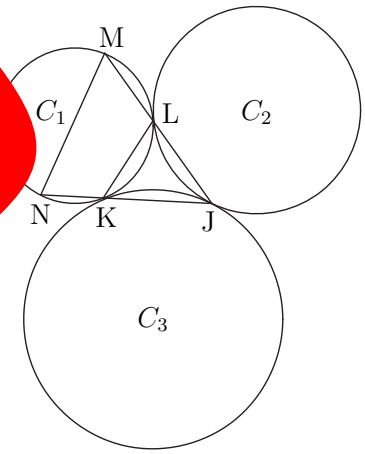


この[illegible]a)，(b) に答えよ.

(a) [illegible]おい[illegible]の接線を利用して，AC[illegible]であることを示[illegible]

([illegible]O_1 の[illegible]中心を結ぶ直線を利[illegible]，点Pは線分ABを $r_1 : r_2$ [illegible]に内分[illegible]こと[illegible]

右図の[illegible]と半径[illegible]の円 C_2，半[illegible]円 C_3 [illegible]に外接[illegible]る．円 [illegible] C_3 の接[illegible]，円 [illegible] C_1 の接点を[illegible]円 C [illegible] C_2 の[illegible]する．線分[illegible]円 C [illegible]を[illegible]線分[illegible]円 C [illegible]点をNと[illegible]



[illegible]LMNの面[illegible]K[illegible]の面積[illegible]を求めよ.

7.5 方べきの[illegible]

□□ **7.17** 四角形 ABCD において，線分 AC と線分 BD の交点を P とし，$\angle DAC = \angle CBD$，$AC = 8$，$AP = 2$，$PD = 4$ とする．このとき BD の長さを求めよ.

(鹿児島大学 2013) 1

基本 7.18 三角形 ABC の辺 AB，AC の中点をそれぞれ D，E とし，辺 BE，CD の交点を G とする．4 点 D，B，C，E が同一円周上にあるとき，次のことを証明せよ．

(1) AB = AC である．　(鹿児島大学 2006) 3

(2) $2\angle ABG = \angle BAE$ であるとき，$\angle BAG = \angle ABG$ である．

(3) (2) の条件を満たすとき，三角形 ABC は正三角形である．

基本 7.19 次の各問に答えよ．　大学 2009) 11

(1) 図 1 のように，直線 AD と BC は点 [illegible] わっている．

$$PA \cdot PD = PB \cdot PC$$

が成り立つとき，四角形 ABCD は円[illegible] することを示せ．

(2) 図 2 のように，鋭角三角形 A[illegible] 部に点 P をとり，直線 AP，BP，C[illegible] 辺 BC，CA，AB と[illegible] 点をそれぞれ D，E，F とする．次の[illegible] ともに成り立つとき，点 P は[illegible] あることを示せ．

[illegible] 角形[illegible] 内接する．

(2) 四[illegible] EPD[illegible] する．



図 2

[illegible] の各頂[illegible] 対辺[illegible] した 3[illegible] 線は 1 点で交わる．
[illegible] 点を[illegible] の垂心[illegible]．

基[illegible] [illegible] の点[illegible] [illegible] 接線上[illegible] 異なる点 P をとる．点 P を通る直線[illegible] から近[illegible] 2 点 B[illegible] [illegible] っている．∠APB の二等分線と線分 AB，A[illegible] ぞれ D，E[illegible] PA : PB = r : $1-r$ とおき，BD = s，CE = t とお[illegible] $r < 1$ とする．　(大分大学 2012) 3

(1) 線分 AD の長さを[illegible] で表しなさい．

(2) PB : PC = 2 : 3 と[illegible] き，r の値を求めなさい．

(3) (2) のとき，線分[illegible] 長さを t で表しなさい．

見本

7.6 三角形と円

□□ **7.21** 半径 r の円 O の外部の点 P からこの円に引いた接線の接点の一つを T とする．T を端点とする円 O の直径 TQ をとる．三角形 PTQ の辺 PQ と円 O との交点を R とするとき，PR の長さを求めよ．ただし，$\angle QPT = 30^\circ$ とする．

(鹿児島大学 2008) 1

□□ **7.22** △ABC において，$\angle A = 75^\circ$，$\angle B = 60^\circ$，AB = 1 と[illegible]頂点 A を通り辺 BC に垂直な直線と △ABC の外接円との交点を P とする[illegible]き，線分 AP の長さを求めよ．

[illegible]児島大学 2010) 1

□□ **7.23** 半径 r の円 O′ が半径 $2r$ の円 O に[illegible]さらに円 O′ は円 O の弦 AB に点 Q で接している．線分 PQ の延長が円 O[illegible] のとき，線分 QM の長さを求めよ．

[illegible]

基本 7.24 △ABC に対し，点 P は辺 A[illegible]点，[illegible]の B，[illegible]なる点，点 R は直線 AQ と直線 CP との[illegible]する．こ[illegible]，次[illegible]よ．

(1) $a = \dfrac{CR}{RP}$，b [illegible] $\dfrac{CQ}{QB}$ とおくとき，a と b の関係式[illegible]うよ．[illegible]005) 14

(2) △ABC[illegible]と直線 CP との点 C 以外の[illegible]る．[illegible]CR，CQ[illegible]であ[illegible]CR : RP : PX を求めよ

基本 [illegible]円 O[illegible]直径 PQ と RS に[illegible]，OR の延長上に点 A を[illegible]Q と[illegible]うに[illegible]円 O の交点を M とし，さらに線分 MQ と線分[illegible]の交点[illegible]とするとき[illegible]各問に答[illegible]よ．(鹿児島大学 2001) 5

[illegible]は線分[illegible]の中点[illegible]ことを証明せ[illegible]

[illegible]の[illegible]比 AP[illegible]RB を求[illegible]

(3) [illegible]な∠A[illegible]二等分[illegible]証明せよ．

基本 7.26 [illegible]接円の中心[illegible]I_1，この内接円と辺 AB，AC，BC との接点をそれぞれ[illegible]，P_2[illegible]する．また，辺 AB を B の方向に伸ばした延長線，辺 AC を C の方向に伸ばし[illegible]長線，および辺 BC と接する三角形 ABC の傍接円の中心を O_2 とし，この傍接[illegible]AB の延長線，辺 AC の延長線，辺 BC との接点をそれぞれ Q_1，Q_2，Q_3 と[illegible]このとき次の各問いに答えよ．(鹿児島大学 2004) 6

(1) $P_1Q_1 = P_2Q_2$[illegible]ことを示せ．

(2) $BP_3 + BQ_3 = CP_3 + CQ_3$ であることを示せ．

印刷本

標準 7.27 r を 1 より小さい正の定数とする．平面上の点 A を端点とする半直線 l 上の点で A からの距離が $1-r$，1，$1+r$ となるものをそれぞれ B，C，D とする．BD を直径とする円を描き，A を端点としその円に接する半直線のひとつを m とする．m 上の点で A からの距離が $1-r$，1，$1+r$ となるものをそれぞれ E，F，G とする．E，F を通り l に接する円を描きその接点を P とする．また F，G を通り l に接する円を描きその接点を Q とする．　(九大 [文]2001) 5

(1) A と P との間の距離 AP を r で表せ．

(2) CF を r で表せ．

(3) PQ = CF を示せ．

標準 7.28 次の各問に答えよ．

(1) 右図 I において，点 O を中心とする円の半径を R とする．この円の弦 XY の任意の点を P とするとき，等

$$\mathrm{OP}^2 = R^2 - \mathrm{XP}\cdot\mathrm{YP}$$

が成り立[illegible]示せ．



(2) 右図[illegible]AI[illegible]心を O，内心を I とする．[illegible]BC[illegible]外接円，内[illegible]円の半径[illegible]それぞれ[illegible]．また，直線 AI と[illegible]の外接円の，点 A と異なる[illegible]点を[illegible]ABC[illegible]円と辺 AB との接[illegible]とする．このとき，次の(A)，([illegible]) に答[illegible]

(A)[illegible] = DI[illegible]ことを[illegible]

[illegible]I·DI[illegible]であ[illegible]と示せ．

[illegible] OI^2[illegible] $= 2R$[illegible]とを示せ．

7.7 [illegible]

□□ **7.29** 平[illegible]で 2[illegible]を考える．共通接線がちょうど 3 本引けるような 2 つの円の位置関係の例を図示[illegible]また，3 本の共通接線も描け．

(鹿児島大学 2013) 1

見本

第 8 章　式と証明（数学II）

8.1　二項定理

□□ **8.1** $\left(x-\dfrac{5}{x^2}\right)^6$ を展開したときの x を[illegible]よ.

□□ **8.2** $(x-3y+2z)^7$ の展開式における[illegible]求めよ.
[illegible]教育大学[illegible]) 1

□□ **8.3** $(2x-y+z)^8$ の展開式に[illegible]$x^2y^3z^3$ の[illegible]求め[illegible]
([illegible]2011) 1

基本 8.4 次[illegible]なさい.
[illegible]分大[illegible] 2

(1) 正[illegible]n に[illegible]$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ の展開式に，定[illegible]が含まれるための n の条件[illegible]めな[illegible]

$\left(x+\dfrac{\quad}{x}\right)$ の[illegible]に[illegible]数項を求めなさい.

[illegible]n を自[illegible]とする[illegible])^n の展開式を[illegible]して，次の問いに答えなさい.
(大分大学 2006) 1

(1) [illegible]$_n+\cdots+{}_n=12$[illegible]を求めなさい.

(2) 31^{17}[illegible]きの余り[illegible]さい.

標準 8.6 n を3[illegible]上の[illegible]とする．以下の問いに答えよ.　(熊大 [文]2008) 2

(1) $2 \leqq k \leqq n$ を満た[illegible]数 k について，$k(k-1){}_n\mathrm{C}_k = n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ を示せ.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1){}_n\mathrm{C}_k$[illegible]よ.

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ.

印刷本

標準 8.7 n を 3 以上の奇数として，次の集合を考える．

$$A_n = \left\{ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}} \right\}$$

以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2013) 1

(1) A_9 のすべての要素を求め，それらの和を求めよ．

(2) ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$ が A_n 内の最大の数であることを示せ．

(3) A_n 内の奇数の個数を m とする．m は奇数であることを

8.2　等式と不等式の証明

□□ **8.8** $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

(琉球大学 2

□□ **8.9** $x > 0$，$y > 0$，$x + y = 1$ の

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqq$$

が成り立つ

また，等号が成り立つのは

か答

(宮崎大学

01) 9

□□

a，b

y

数とする．　(福岡教育大学 2011) 1

$(a^2 + b$

$)(x^2 +$

$x + by + cz)^2$ が成り立つことを示せ．

2) x

$= 1$

，x^2

z^2 の最

求めよ．

次の

答え

(福岡教育大学 2010) 2

(1)

$+ y$

$- z)$

$- x)^2\} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ が

成

(2) $a \geqq 0$,

とき，$\dfrac{a+}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つの

$b = c$ のときであることを示せ．

(3) 一辺の長さがそれ

b，c の三角形の面積は $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ で与えられることが知

いる．ただし，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とする．三辺の長さの和が $2s$ $(s > 0)$ で

うな三角形の面積は $\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ 以下であることを示せ．また，面積が $\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ となるのは，三角形が正三角形のときであることを示せ．

標準 8.12 次の各問いに答えよ. (鹿児島大学 2005) 3

(1) 2 個の負でない実数 a, b に対して, $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b} \geqq \dfrac{a+b}{1+a+b}$ が成り立つことを示せ.

(2) 負でない実数 a, b, c について, $a+b \geqq c$ ならば

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ.

(3) n を 2 以上の整数とする. n 個の負で[illegible] a_1, a_2, $\cdots$, a_n と負でない実数 c について, $a_1+a_2+\cdots+a_n \geqq c$ なら[illegible]

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\cdots \quad \cdots \geqq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ.

見本

見本

第 9 章　複素数と方程式（数学II）

9.1　複素数

□□ **9.1** 次の方程式を解け.

$$(1+i)x^2-(1+3i)x+$$

ただし，i は虚数単位，x は実数とする.

□□ **9.2** a，b を実数とする．x の方程式 $-1+bi$ をもつとき，a，b の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする． (琉球大学) 5

9.2　剰余の定理・因数定理

□□ **9.3** 整式 $P(x)$ について，$P\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{8}{3}$ と $P\left(-\frac{7}{2}\right)=$ 満たす $P(x)$ を $11x$ で割ったときの余りを求めよ． (琉球大学 2016) 5

基本 3次の $P(x)$ が条件 1)，2)，3) を満たしている.

1) $P(x)$ の係数 a

2) P は $(x-1$ で割り切れる

3) P を x で割った x^2-x-2 で割った余りは等しい.

この問に答えよ. (宮崎大学 2013) 11

(1) P を求めよ.

(2) $\{P($ を割った余りを求めよ.

標準 9.5 $P(x)$ は x^5 の係数が 1 であるような 5 次式とする．$P(x)$ を x^2-x-6 で割ったときの商を $Q(x)$，$Q(x)$ を $x-2$ で割ったときの商を $R(x)$ とおく.

$$P(-2)=P(3)=5,\quad Q(2)=Q(-2)=R(-3)=2$$

であるとき，次の各問に答えよ. (宮崎大学 2011) 5

(1) $P(x)$ を x^2-x で割ったときの余りを求めよ.

(2) $R(x)$ を求めよ.

(3) $P(x)$ を求め，展開して降べきの順に整理せよ.

見本

9.3　高次方程式

□□ **9.6**　3 次方程式 $x^3 - ax - 6 = 0$ が $x = -1$ を解にもつとき，定数 a の値と他の解を求めよ．　(琉球大学 2015) 5

□□ **9.7**　a，b，c を実数とする．$a+b+c = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = 1$ である．a，b，c のうち少なくとも 1 つは 1 に等しいことを示せ．　(福岡教育大学 2014) 1

□□ **9.8**　4 次方程式 $x^4 + ax^3 + 14x^2 + 16x + b = 0$ が $x = -$ 解としてもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ．　教育大学 2013) 1

基本 9.9　次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2016) 2

(1) 整式 $P(x)$ を 0 でない整式 $Q(x)$ で割った
と $Q(x) = 0$ の共通解は方程式 $Q(x)$
示せ．また逆に方程式 $Q(x) = 0$
$Q(x) = 0$ の共通解であることを

(2) 整式 $P(x)$，$Q(x)$ を

$(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$,　$Q($

とお
$= 0$ と $Q(x) = 0$ の共通解

9 解と

□□ **9.1** ついて
$2i$ も
な虚数

□□ 方程式
数の定

基本 9.12 以
よ．　(佐賀大学 2009) 9

(1) 次を満たす 2 数 x,
求めよ．

$$x + y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$$

(2) 次を満たす 3 数
z を求めよ．

$$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3, \quad xyz = 1$$

白本

9.5 その他の方程式・不等式

□□ **9.13** 方程式 $x^3-1=0$ の虚数解の一つを ω とするとき，$\omega^4+\omega^2+1$ の値を求めよ． (鹿児島大学 2008) 1

□□ **9.14** a を 0 でない実数とする．x についての 3 次方程式 $x^3-a^3=0$ の 2 つの虚数解を α，β とするとき，$\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ の値を求めよ． (福岡教育大学 2012) 5

□□ **9.15** 次の (1)，(2)，(3) に答えよ． (鹿児島大学 2014) 2

(1) $t=x+\dfrac{1}{x}$ とおく．このとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ [illegible] それ t についての多項式で表せ．

(2) $\dfrac{2x^4-3x^3-5x^2-3x+2}{x^2}$ を t について[illegible]

(3) 4 次方程式 $2x^4-3x^3-5x^2-3x+$[illegible]

基本 9.16 次の問いに答えよ． [illegible]02) 5

(1) 複素数 $1+$[illegible] 解にもつ実数係数の x の 2 次方[illegible]，x^2[illegible] であるものを求め[illegible]

(2) a，b[illegible] と[illegible] 次方程式 $x^4-x^3+2x^2+$[illegible] $=0$ が $1+2i$ [illegible] にもつ[illegible]，b の[illegible]

標[illegible]17 i [illegible] 単位と[illegible] 問いに答えよ． (長崎大学 2008) 2

(1) 3 次[illegible] $x^3=$[illegible] 解け．

(2) $n+\sqrt{}$[illegible] する[illegible] $=225+2\sqrt{}$[illegible] 成り立つ．このような整数 m，[illegible] の組を[illegible] よ．

(3) [illegible] $-2\sqrt{7}$[illegible] とす[illegible] を[illegible] めよ．

見本

9.6　問題研究

9.6.1　無理数を解にもつ有理係数の方程式

Q を有理数，$\sqrt{q}$ を無理数とするとき

$$Q[\sqrt{q}] = \{u + v\sqrt{q} \mid u, v \in Q\}$$

を考える．$x, \overline{x} \in Q[\sqrt{q}]$ を

$$x = u$$
$$\overline{x} = u -$$

と定義すると，$k \in Q,\ x, y \in Q[\sqrt{q}]$ について

$$\begin{cases} \overline{k} = \\ \overline{x} \quad + \overline{y} \\ \quad \overline{y} \end{cases} \tag{9.1}$$

第 3 式から　$\overline{x^2}$　，さらに　$\overline{x^n} = (\overline{x})^n$　(n は自

例えば，　る 3 次方程式

$$^3 + bx^2 + cx + d = \tag{9.2}$$

$Q[\sqrt{}$　をもつ　$z^2 + cz + d = 0$ であるから，(9.1) により

$$bz^2 + cz \quad \overline{0}$$
$$+ \overline{bz^2} + \overline{cz} +$$
$$\overline{z^2} + \overline{c} \quad 0$$
$$a(\overline{z})^3 \quad d = 0$$

これから $\overline{z}$ が　ることが分かる．

(9.1) において，k を実　$, y$ を複素数とし，x と $\overline{x}$ を互いに共役な複素数と考えても成り立つ．ゆえ　$, b, c, d$ を実数とするとき，(9.2) の方程式が複素数 z を解にもつとき，共　素数 $\overline{z}$ も (9.2) の解であることがわかる．
なお，n 次方程式に　もこれらのことが成立する．

印刷本

第 10 章　図形と方程式（数学II）

10.1　点と直線

□□ **10.1** 放物線 $y = x^2 - x$ の頂点を P と[illegible]放物線上の点であり，原点 O(0, 0) とも点 P とも異なるとする．∠O[illegible]るとき，点 Q の座標を求めよ．

基本 10.2 t を実数とし，点 P の座標を $(t$[illegible]線 $l_1 : 2x +$[illegible]$+3 = 0$ の距離を d_1 とし，点 P と直線 $l_2 : 2x -$[illegible]の距[illegible]$_2$[illegible]また[illegible]$+d_2$ とおく．[illegible]2) 7

(1) $t = 2$ のとき[illegible]d の値を求めなさい．

(2) 点 P が直[illegible]たはその上側にあるための t[illegible]

(3) d の[illegible]と[illegible]の t の値を求めなさい．

標準[illegible]$a > 1$[illegible]p[illegible]る．2 直線 $l_1 : y$[illegible]1，$l_2 : y = a$ の交点を S，l[illegible]の交[illegible]とし[illegible]P(0, p)，l_1 上の点 A(1, 1)，l_2 上の点 Q(q, a)[illegible]る．$\angle$[illegible]$= 135°$[illegible]QS[illegible]あるとき，次の問いに答えよ．

[illegible]それぞ[illegible]で表[illegible]　(熊大 [文]2002) 3

[illegible]AT[illegible]S で[illegible]a それぞ[illegible]を求めよ．

10.2[illegible]

基本 10.4 座標[illegible]面上[illegible]O(0, 0)，点 A(-1, 3)，点 B(4, 8) がある．さらに，2 次関数 $y = f(x)$ のグラ[illegible]円 C はそれぞれ 3 点 O，A，B を通るものとする．このとき，次の各問に答え[illegible]　(宮崎大学 2010) 2

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 円 C の中心の座標[illegible]よび半径を求めよ．

(3) グラフ G と円 C との交点のうち，3 点 O，A，B 以外の点の座標を求めよ．

見本

基本 10.5 座標平面上に 2 点 A(1, 3)，B(5, −5) があり，直線 AB に関して原点 O と対称な点を C とする．このとき，次の問いに答えなさい．　(大分大学 2009) 4

(1) 点 C の座標を求めよ．

(2) 3 点 A，B，C を頂点とする △ABC の外接円の方程式とその中心の座標を求めよ．

(3) 点 (0, 5) から △ABC の外接円に引いた接線の方程式を求め

基本 10.6 a を実数とする．円 $x^2+y^2-4x-8y+15=0$ と $ax+1$ が異なる 2 点 A，B で交わっている．　大分大学 2015) 1

(1) a の値の範囲を求めなさい．

(2) 弦 AB の長さが最大になるときの a の値

(3) 弦 AB の長さが 2 になるときの a の値を

基本 10.7 2 つの円 $C_1: x^2+y^2=4$，C_2 両方に接す 直線は全部で 4 本ある．この 4 本の直線の方 め 崎大学) 2

標準 10.8 直線 $l_1: y=mx+3$ (m ，点 A(5, 中心 接している．その接点を とする．直線 l_1 と y 軸との交点を 2 点 A 直線 l_2 と x 軸との交点を る．　1) 2

(1) 円 C を用いて表しなさい．

(2) 円 x 軸と 点で交わるような m の 囲を求めなさい．

(3) QR の の 求めなさい．

点 P を通 と円 C_1 の中心との距離を d とする．d の最小値 ときの 値を求 い．

平面 点 A(B(−1, 0)， を頂点とする △ABC につい 各問 よ．　(宮崎大学 2001) 2

(1) 心と 求め

(2) 内 を求めよ．

> 三角 円をその三角形の**外接円**という．
> また，三角形の べてに接する円をその三角形の**内接円**という．

標準 10.10 座標平面上 の円 C_1，C_2，C_3 は，それぞれ中心が (0, 0)，(0, 3)，(4, 0)，半径が r_1，r_2， り，どの 2 つの円も互いに外側で接しているとする．このとき，次の各問に ．　(宮崎大学 2004) 3

(1) r_1，r_2，r_3 の値 よ．

(2) 円 C が C_1，C_2，C_3 のそれぞれと互いに外接しているとき，円 C の半径 r と中心の座標 (a, b) を求めよ．

見本

10.3 軌跡の方程式

基本 10.11 円 $C : x^2 + y^2 - 4kx + 2ky - 5 = 0$ について，次の問いに答えよ．
(熊大 [文]2003) 3

(1) C は k の値に関係なくある 2 つの点 A，B を通る．A，B の座標を求めよ．ただし，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする．

(2) PA : PB = 2 : 1 となる点 P の軌跡を求めよ．

基本 10.12 座標平面上の 3 点 P(2, 1)，Q$\left(\quad, \dfrac{11}{5}\right)$，　　を通る円を C_1 とする．このとき，次の問いに答えよ．
(佐賀大学 2009) 5

(1) 円 C_1 の方程式を求めよ．

(2) 円 C_1 に内接する正三角形の面積を求

(3) 円 $C_2 : x^2 + y^2 = 5$ の円周上を動　　対　　P，Q　　形を作るとする．このとき，△MP　　の軌跡　　よ

標準 10.13 座標平面上に，2 つの放物線

$$C_1 : y = (x - t)^2 + t \qquad C_2 : y$$

がある　　し，t　　る．このとき，次の各　　答えよ．
(宮崎大学 2012) 8

　C_1，C　　なる　　き，t の値の範囲を求めよ．

(2) (1)　　き，C　　の 2　　点を結ぶ　　の中点の軌跡を図示せよ．

**　14** 円　　$+ y^2$　　$C_2 : (x - 2)$　　$- 4)^2 = 5$ とに点 P から接線を　　の接　　C_2 の　　の距離との比が 1 : 2 になるとする．　　，P　　を求め
(熊大 [文]2004) 1

10.4 不等式の　　領域

□□ **10.15** xy 平面で次　　等式で表される領域を図示せよ．(鹿児島大学 2016) 1

$$|x| \leqq y \leqq 1 - |x|$$

□□ **10.16** 実数 x，y が $(x - 2)^2 + y^2 \leqq 3$ を満たすとき，$\dfrac{y - 7}{x}$ のとりうる値の範囲を求めよ．
(福岡教育大学 2013) 1

見本

□□ **10.17** a を正の実数とするとき，座標平面において，連立不等式

$$x^2+y^2 \leqq 4ax, \quad x^2+y^2 \geqq 2ax, \quad \sqrt{3}\,x-y \leqq 2\sqrt{3}\,a$$

の表す領域を図示せよ．　(福岡教育大学 2006) 1

基本 10.18 座標平面上の 3 点を A(1, 0)，B(0, 1)，C(−1, 0) とし，△ABC の内部の点を P$(a,\ b)$ とする．ただし，点 P は △ABC の周上にはない．する．このとき，次の各問に答えよ．　大学 2007) 3

(1) 直線 AB に関して，点 P と対称な点 標を求

(2) 直線 BC に関して，点 P と対称な点を 2 点 Q，R を通る直線 l の方程式を求めよ．

(3) 原点 O と直線 l の距離が $\dfrac{4}{5}$ より小さく せよ．

基本 10.19 x，y が不等式 $|x-2|$ | $\leqq 2$ を満 とき， えよ．

(1) この不等式 す領域を図示しなさい．　010) 1

(2) $x+2y$ 小値を求めなさい．

基本 10 の問 (鹿児島大学 2009) 2

(4x − a が $-x^2+6x-5$ るとき，a の値と接点の座 標を求

2) 点 が連 式 x^2 25，$y \leqq$ $+6x-5$ の表す領域を動くとき， 5y の と最大 めよ．

基本 平面 軸 距離 $= \dfrac{3}{4}x$ までの距離の和が 1 以下である ような領域を D と ，次の各問に答えよ．

(1) 領域 D (宮崎大学 2003) 2

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 動くとき，$x+y$ が最大となる点の座標を求めよ．

見本

基本 10.22 直線 $l : y = x + 1$ と曲線 $C : y = 2x^2 - 4x + 1$ との交点を P，Q とするとき，次の各問に答えよ．ただし，P の x 座標は Q の x 座標より小さいものとする．
(宮崎大学 2005) 6

(1) 直線 l に平行で曲線 C に接する直線を m とするとき，点 P と直線 m との距離を求めよ．

(2) 曲線 C と (1) における直線 m との接点を R とする．このとき，△PQR の面積を求めよ．

(3) 点 $(x,\ y)$ が直線 l と曲線 C で囲まれる領域にあるとき，$\quad$ の最小値を求めよ．ただし，領域は境界を含むもの

基本 10.23 座標平面において，原点 O$(0,\ 0)$，$\quad$ 点 B$(1,\ 2)$ を頂点とする△OAB の内部またはその周上に点 P$(a,\ b)$ があ$\quad$ での距離の和を k とする．このとき，次の各

(1) k を a と b についての 1 次式で表せ

(2) k の最大値と最小値を求めよ．

標準 10.24 点 $(x,\ y)$ が連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 - 1 \\ y \leqq x + 1 \end{cases}$$

の表す領$\quad$くと$\quad$ $^2 - 4y$ の最大値と最小$\quad$めよ．(熊大 [文]2001) 1

標$\quad$ 25 連$\quad$式 $\begin{cases} \quad \\ \quad - 3| \end{cases}$ の表す領域$\quad$とする．

$\quad$) 領域$\quad$図示し$\quad$．
(大分大学 2013) 2

$\quad$でない$\quad$と数と$\quad$点 $(x,\ y)$ が$\quad$内を動くとき，$ax + y$ の最大$\quad$と最小$\quad$よび$\quad$の点 $(x,\ y)$ を$\quad$さい．

(3)$\quad$領域$\quad$動$\quad$ $x^2 +$ $\quad$小値とそのときの点 $(x,\ y)$ を求

標準 10.26 $\quad$次の連立不$\quad$の表す領域を D とする．

$$x \quad 2y \leqq \quad + y \leqq 8, \quad -2x - y \leqq 4, \quad -x - 4y \leqq 7$$

点 P$(x,\ y)$ が領域 D 内を$\quad$とき，$x + y$ の値が最大となる点を Q とし，最小となる点を R とする．以下の$\quad$答えよ．
(九大 [文]2013) 2

(1) 点 Q および点 P$\quad$標を求めよ．

(2) $a > 0$ かつ $b > 0$ と$\quad$る．点 P$(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax + by$ が点 Q でのみ最大値をとり，点 R でのみ最小値をとるとする．このとき，$\dfrac{a}{b}$ の値の範囲を求めよ．

見本

見本

第 11 章　三角関数（数学II）

11.1　三角関数

□□ **11.1** $\dfrac{\sin 105^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}$ の値を求めよ．(福岡教育大学 2004) 5

□□ **11.2** $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$，$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ と
めよ．(宮崎大学 2006) 2

11.2　加法定理

□□ **11.3** θ が $\dfrac{1}{}$ および $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす t 値を求
めよ．また $\dfrac{}{4}$ おくとき，$\tan\alpha$ の値を求 (長崎大学 1) 5

□□ 鋭角 の3 大きさを α，β，る．このとき，$\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$
α，t 用い (福岡教育大学 2007) 1

次の問 えよ (熊大 [文]2005) 2

角関 法定理 モアブル を用いて，任意の角 θ に対し，
成り とを

$$\sin 3\theta = \quad \theta - 4\sin^3\theta$$

(2) $\theta = 18^\circ$ き，$\quad = \sin 3\theta$ が成り立つことを示せ．

(3) $\sin 18^\circ$ の値を求め

基本 11.6 $0^\circ \leqq \alpha$，β とする．このとき，次の 2 つの等式

$$\sin\alpha = \cos\beta, \quad \cos\alpha = \sin\beta$$

が同時に成り立つための必要十分条件を α と β の関係式で表せ．(宮崎大学 2005) 10

見本

基本 11.7 x，y を実数とするとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2003) 1

(1) 等式 $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x+y) = 2 - \cos x \cos y \cos(x+y)$ が成り立つことを示せ．

(2) $x > 0$，$y > 0$，$x + y < \pi$ とする．$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x+y) > 2$ であるとき，不等式 $x + y > \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ．

標準 11.8 整数 m，n が $1 \leqq m < n$ を満たすとき，次の問い[illegible]
[illegible]大 [文]2004) 2

(1) $x > 3$ ならば，不等式

$$(mx - 1)(nx - [illegible]$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\tan\alpha = \dfrac{1}{m}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{n}$ を満たし[illegible]$\tan(\alpha$[illegible]となる[illegible]α，β があるとする．このような，[illegible]の組をすべて求め[illegible]

標準 11.9 平面上[illegible]点 $\mathrm{C}(c,\ 0)$ を通る直線 $l_1 : y = m($[illegible]を考[illegible]c，m は定数で，c[illegible]0 とする．直線 l_1 上で x 軸より[illegible]x[illegible]C より右側に点[illegible]次の問いに答えよ．　(長崎大学[illegible]2) 2

(1)[illegible]を通[illegible]等分線と平行な直線[illegible]方程式を求めよ．

[illegible]線 l[illegible]交点[illegible]線分 CP の長さを求めよ．

[illegible]直線[illegible]き m[illegible]ら[illegible]変化するとき，点 P が描く曲線の長さを求[illegible]

発展 11.10 [illegible]$f(x)$ が[illegible]数 p に対し[illegible]に $f(x+p) = f(x)$ を満たすとき[illegible]関数[illegible]こ[illegible]周期[illegible]．正の周期のうちで最小のものを特に[illegible]周期[illegible]とえば，[illegible]基本周期は 2π である．このとき，次の問いに答[illegible]　(九大 [理]2007) 5

(1) $y = |\sin x|$ のグラ[illegible]き，関数 $|\sin x|$ の基本周期を求めよ．

(2) 自然数 m，n に対[illegible]数 $f(x)$ を $f(x) = |\sin mx| \sin nx$ とおく．p が関数 $f(x)$ の周期ならば $f\left([illegible]\right.$[illegible]$f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = 0$ が成り立つことを示せ．また，このとき mp は π の整数倍[illegible]，np は 2π の整数倍であることを示せ．

(3) m，n は 1 以外の[illegible]数をもたない自然数とする．(2) の結果を用いて関数 $|\sin mx| \sin nx$ の基本周期を求めよ．

見本

11.3 方程式・不等式

□□ **11.11** $4\cos^3\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$ を満たす θ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ を求めよ.
(福岡教育大学 2003) 5

□□ **11.12** 不等式 $4\sin x \geqq \dfrac{3}{\sin x}$ $(0 < x < 2\pi,\ x \neq \pi)$ を解け.
(福岡[illegible]大学 2005) 1

□□ **11.13** $\dfrac{\pi}{6} \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，等式

$$(1+\sqrt{3})\sin x \tan x = 2\sqrt{3}[illegible]\cos x$$

を満たす x の値を求めよ.

□□ **11.14** $0 \leqq x \leqq \pi$，$0 \leqq y \leqq \pi$ のとき

$$3\sin x - \sin y = [illegible]\cos x + [illegible] =$$

を解け. (福岡[illegible]2014) 1

□□ **11.15** [illegible]° のとき，方程式 $\cos 2\theta + c$[illegible]
(琉球大学[illegible]05) 5

□□ [illegible] $0 \leqq$ [illegible]

[illegible]$\cos x + 1 > 0$

[illegible]の範囲[illegible]よ. (福岡教育大学 2016) 1

□[illegible] $\leqq \pi$ [illegible]

$$5\sin^2\theta [illegible] 13 \geqq 0$$

を満たす θ の[illegible]大[illegible]を α とするとき，$\cos\alpha$ と $\tan 2\alpha$ の値を求めよ.
(鹿児島大学 2010) 2

□□ **11.18** 方程式 $\sin[illegible]\cos 3x = 0$ を解け．ただし，$0 \leqq x \leqq \pi$ とする.
(福岡教育大学 2006) 1

□□ **11.19** $0 \leqq x \leqq \pi$ [illegible]き，次の方程式を解け. (宮崎大学 2009) 1

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

見本

□□ **11.20**　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，不等式 $\sin 3x + \sin 2x < \sin x$ を解け．
(長崎大学 2016) 1

基本 11.21　関数 $f(\theta) = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$y = f(\theta)$ のグラフをかけ．　(佐賀大学 2009) 10

(2)　$-\pi < \theta < \pi$ のとき，方程式 $f(\theta) = 1$ を解け．

(3)　$-\pi < \theta < \pi$ のとき，不等式 $\sin\theta > \sqrt{3}\cos\theta + 1$ を解け．

応用 11.22　実数 θ に対し，関数 $f(\theta)$ と $g($

$$f(\theta) = (\cos\theta)(\cos 2\theta)(\cos 3\theta),\quad \ldots 2\theta)(\sin 3\theta)$$

とおくとき，次の (1)，(2) に答えよ．

(1)　関数 $f(\theta)$，$g(\theta)$ は，それぞれ

$$f(\theta) = p + \ldots r\cos \ldots s\ldots$$
$$g(\theta) = t \ldots \theta + v\sin \ldots \sin\ldots$$

のように表 ることを示せ．ただし，p，q，$\ldots$ t，$\ldots$ よらない定数

(2)　$0 \leqq \ldots$ のと 式 $f(\theta) = g\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ を よ よ θ をすべ 求めよ．

最 最小

□ **11** $\ldots \leqq \theta \ldots$ とき $y = \sin \ldots \left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値と最小値を た，$\ldots$ きの $\ldots$ 求めよ．　(福岡教育大学 2013) 1

基本 $\ldots$ 実数と $\ldots$ のとき $y = a\cos\theta - 2\sin^2\theta$ の最大値，最小値 それ $M \ldots m(a)$ と いに答えよ．　(熊大 [文]2008) 1

(1)　$M(a)$.

(2)　a が実数 を動 ，$M(a)$ の最小値と $m(a)$ の最大値を求めよ．

基本 11.25　θ の範囲が $\ldots \leqq 180^\circ$ であり，$x = \sin\theta + \cos\theta$ とする．

(1)　$x = 0$ となる θ の めよ．　(佐賀大学 2002) 5

(2)　x の値の範囲を .

(3)　a を実数とするとき，$y = a\sin\theta - \sin\theta\cos\theta + a\cos\theta$ を，a，x を用いて表せ．

(4)　y の最小値を求めよ．

見本

基本 11.26 a，b を定数とし，$a > b$ をみたすものとする．

$$f(x) = a\cos^2 x + \sqrt{3}(a-b)\cos x \sin x + b\sin^2 x$$

とするとき，次の問いに答えよ． (熊大 [文]2009) 3

(1) $f(x)$ の最大値が 6，最小値が 2 となるときの a，b を求めよ．

(2) (1) で求めた a，b に対して，$f(x)$ を考える．$0 \leqq x \leqq \pi$ の $f(x) > 5$ となる x の範囲を求めよ．

基本 11.27 次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2003) 1

(1) a，b はともに 0 でない定数とするとき，

$$a\cos\theta - b\sin\theta =$$

が成り立つことを示せ．ここで c 定数

(2) $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta$ を (1) を用い 式で表せ 値も

(3) $0° \leqq \theta \leqq 180$ のとき，$\cos\theta - \sin\theta$ の最大値と 値を求 ときの θ の値もそ めよ．

標準 11. $y =$ $2x - \cos 2x + 2\sin x - 2$ x について，以 の問い に答え (熊大 [理]2010) 1

$x -$ $x = t$ y を t の式で表せ．

) $0 \leqq$ π の y の最 および最小 を求めよ．

29 0 $\leqq \frac{5}{6}\pi$ x の関数

$= \log$ $x + \sqrt{3}\sin$ $x + 2\sqrt{3}\cos x \sin x + 2$

について， (鹿児島大学 2006) 1

(1) $t = \cos x + \sqrt{3}\sin$ く．$0 \leqq x \leqq \frac{5}{6}\pi$ のとき，t の値の範囲を求めよ．

(2) $f(x)$ を (1) の t を 表せ．

(3) (2) で求めた t の $g(t)$ とおく．この $g(t)$ は $0 \leqq t_1 < t_2$ ならば $g(t_1) < g(t_2)$ を ことを示せ．

(4) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

11.5　図形への応用

基本 11.30　三角形 ABC は $AB=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$BC=4$，$AC=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ を満たしている．このとき，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2014) 9

(1) 角 A の大きさを求めよ．

(2) $\sin B$ と $\cos B$ の値を求めよ．

(3) 加法定理を用いて，角 B の大きさを求めよ．

基本 11.31　右図のように，直線 l 上にない　　H を
なる l 上の点 H，線分 AH 上の点 B をとる．
上を点 H から左へ動くものとする．



$$AH=a,\quad BH=b\ (a>b>0$$
$$PH=x\ (x>0),\quad \angle APB$$

とおくとき，次の問に答えよ．　崎大学 200

(1) $\tan\theta$ を a，　を用いて表せ．

(2) θ が最　　a，b を用いて表せ．ただし　　に対

$p>$　　(等号成り立つのは p　　ときに限る．)

成り　　とを用

基本 1　座標平　　，原　　中心とし　　A(1, 0)，B(0, 1)，C(−1, 0)，
　　通る　　る．　　AB 上にとり　　OA $=2\theta$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ)$ とす
る　　とき　　の各問　　(宮崎大学 2006) 9

(1) 　　さを θ　　て表せ．

(2) PA　　うる値の範　　めよ．

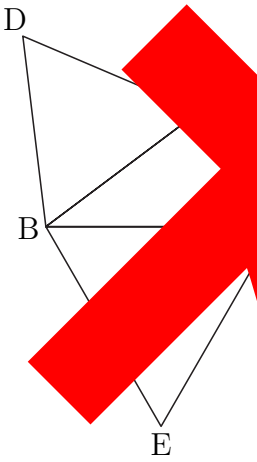
見本

標準 11.33 下図のように，△ABC の外部に 3 点 D，E，F を △ABD，△BCE，△CAF がそれぞれ正三角形になるようにとる．△ABC の面積を S，3 辺の長さを BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とおくとき，以下の問いに答えよ． (熊大 [文]2016) 1

(1) $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とおくとき，$\sin\theta$ を b，c，S を用いて，$\cos\theta$ を，a，b，c を用いて表せ．

(2) DC^2 を a，b，c，S を用いて表し，$\mathrm{DC}^2 = \mathrm{EA}^2 = \mathrm{FB}^2$ が成り立つことを示せ．

(3) 3 つの正三角形の面積の平均を T とおくとき，DC^2 を S [illegible] いて表せ．



標準 11.34 [illegible] 二等辺三角形 ABC を考え [illegible] 点を [illegible] 線分 AM を [illegible] 内 [illegible] を P とする．また，点 [illegible] り辺 BC に平行な直線と，辺 AB [illegible] との交 [illegible] Q，R とする．この [illegible] 次の問いに答えよ．

([illegible] ∠QM [illegible] めよ (九大 [文]2009) 1

[illegible] ∠QM [illegible] 倍と [illegible] 判定せよ．

[illegible] [illegible] 座標平 [illegible] x 軸 [illegible] 部分にある [illegible] と y 軸の正の部分にある点 B を [illegible] 原点 O [illegible] 点 A，[illegible] 直線 l におろ [illegible] 線と，直線 l との交点を P とす [illegible] るよ [illegible] が動くと [illegible] の問に答えよ．

(琉球大学 2009) 1

(1) $\theta =$ [illegible] き，OA + [illegible] を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表せ．

(2) OA + O [illegible] B [illegible] 値を求めよ．

標準 11.36 $\alpha > 1$，$x >$ [illegible] る．O を原点とする座標平面上に 3 点 A(0, 1)，B(0, α)，P($\sqrt{x}$, 0) がある．次に [illegible] (九工大 [工]2012) 3

(1) $\sin\angle\mathrm{OPB}$ と $\sin$ [illegible] を α と x を用いて表せ．

(2) $\sin\angle\mathrm{APB}$ を x [illegible] と考え，その関数を $f(x)$ とおく．$f(x)$ の最大値を α を用いて表せ．

(3) (2) で求めた最大値が $\dfrac{1}{2}$ となる α を求めよ．

見本

応用 11.37 鋭角三角形 △ABC について，∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とする．△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする．
(九大 [文]2014) 3

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD，OE とする．このとき，

$$\mathrm{AD} = 2R\sin B\sin C, \quad \mathrm{OE} = R\cos A$$

を証明せよ．

(2) G と O が一致するならば △ABC は正[illegible]形である[illegible]明せよ．

(3) △ABC が正三角形でないとし，さら[illegible]行であるとする．このとき，

$$\mathrm{AD} = 3\mathrm{OE}, \quad \tan$$

を証明せよ．

応用 11.38 いくつかの半径 3 の円を[illegible]の円[illegible]接[illegible]わらないように配置する．このとき，[illegible]に答えよ[illegible]008) 5

(1) 半径 3 の円[illegible]つを R とする．円 Q の中心を[illegible]し，[illegible]2 本の半直線[illegible]とおく．ただし，$0 < \theta <$ [illegible]とき[illegible]を求めよ[illegible]

(2) $\frac{\pi}{2}$ [illegible]

[illegible]置でき[illegible]全 3 の[illegible]数を求めよ．

応用 11[illegible]三角形[illegible]の 3[illegible]QR，[illegible]にそれぞれ点 A，B，C をとる．[illegible]QAB[illegible]BC の[illegible]の中心をそれ[illegible]O_1，O_2，O_3，その半径をそれ[illegible]r_2，[illegible]る．△[illegible]辺の長さを[illegible]，$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とするとき，[illegible]答えよ[illegible]
(熊大 [理]2003) 2

(1) r_1，[illegible]で表わせ[illegible]

(2) $\triangle \mathrm{O_1O_2}$[illegible]であることを示せ．

応用 11.40 円周率 π に[illegible]次の不等式が成立することを証明せよ．
ただし，数値 $\pi = 3.141$[illegible]を利用して直接比較する解答は 0 点とする．
(分大 [医]2010) 7

$$3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} < \pi < 24 - 12\sqrt{3}$$

見本

第 12 章　指数関数と対数関数（数学 II）

12.1　指数関数

□□ **12.1**　方程式 $2\cdot 8^x - 3\cdot 4^{x+1} + 5\cdot 2^{x+1} + 24 =$ [illegible]
めよ．

□□ **12.2**　不等式 $3^{3x+3} - 7\cdot 3^{2x+1} - 7\cdot$ [illegible] 0 を [illegible]育大学 [illegible]) 5

□□ **12.3**　a を実数とする．x に関 [illegible] 程式 $4^x -$ [illegible] $2^a =$ [illegible] を持つよ
うに a の値の範囲 [illegible] 求めよ．[illegible]010) 6

基本 12.4　[illegible] $f(x) = 2^{2x-1} - a\cdot 2^x +$ [illegible] [illegible]大分大学 [illegible]) 5

(1) [illegible] $= 4$ [illegible] 程式 $f(x) = 0$ の解を求 [illegible]さい．

([illegible] 0，b [illegible] とき [illegible] $f(x) = 0$ の解を [illegible]さい．

(3) 方程式 [illegible] $= 0$ [illegible] [illegible] 数解をもつとき，点 $(a,\ b)$ の表す領域を図示
し [illegible]．

[illegible] **5**　次 [illegible] に答え [illegible]　(福岡教育大学 2015) 2

(1) [illegible] の実 [illegible] へと [illegible] 2^{-x} [illegible] 値を m とする．次の (ア)，(イ)
に [illegible]

(ア) m [illegible] $+ 2^{-x} = m$ を満たす x を求めよ．

(イ) $k > m$ のとき [illegible] $- 2^{-x} = k$ を満たす x をすべて求めよ．

(2) a を定数とし，$a \leqq$ [illegible] する．方程式

$$4^{-x} - 3a\cdot 2^x - 3a\cdot 2^{-x} + 2(a^2+1) = 0$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

見本

12.2　対数の値

□□ **12.6**　$\log_2 \dfrac{1}{6} + \log_2 \dfrac{3}{4}$ の値を求めよ．　(琉球大学 2015) 5

□□ **12.7**　次の数を小さい順に並べよ．　(琉球大学 2012) 5

$$\log_3 5,\quad \frac{1}{2} + \log_9 8,\quad \log_9 26$$

□□ **12.8**　$0 < a < b < 1$ のとき，$\log_a b$ と $\log_b a$ の大小を比

教育大学 2002) 5

□□ **12.9**　定数 a は実数で，$a > 0$，$a \neq 1$ とす　すべての正の実数 x，y に対して $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ が成り立つ．このこ

□□ **12.10**　0 でない実数 a，b，c，d が 3^a　たすとき，

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{d}$$

が成り立つことを　．　(　015) 2

□□ **12.11**　に異なる実数で，$a > 1$，　とする．　の等式が成り立　，比　$\log_2 b : \log_2 c$ を求めよ．　(鹿児島大学 2014) 2

$$\log_2 a - \log_8 b - \log_8 c,\qquad \frac{\log_2 a}{\log_8 b} = \frac{\log_2 b}{\log_8 c}$$

□ **12**　次方程　$-(2$　$+a+3$　2 つの解が $\log_2 2b$ と $\log_2 4b$ で　定数　の値を　(福岡教育大学 2007) 1

応用　平面　等　$|x-$　$|-5| \leqq 3$，　$2\big||x|-4\big| + \big||y|-5\big| \leqq 3$ が表す　そ　，B とす　(九大 [文]2003) 2

(1) 領域 A

(2) 領域 B を図示せよ

(3) 領域 B の点 $(x,\ y)$　が正の整数であり y が整数であって，$\log_x |y|$ が有理数となる点を，理　示してすべて求めよ．

見本

12.3 対数方程式

□□ **12.14** 方程式 $2(\log_2 x)^2 - 7|\log_2 x| - 4 = 0$ を解け. (長崎大学 2016) 1

□□ **12.15** x を 1 と異なる正の数とする．このとき，x についての方程式 $\log_{10} x - 3\log_x 10 = 2$ を解け. (福岡教育大学 2008) 1

□□ **12.16** 次の方程式を解け. 大学 2011) 5

$$\log_5(1 - 4\cdot 5^x) = 2x + 1$$

□□ **12.17** $2\log_{10}(a-b) = \log_{10} a + \log_{10} b$ を求めよ.

□□ **12.18** 次の方程式を解け. (琉球大学 2005) 5

$$\log_4(4x-7) + \log_2(x-1) = 1 + 3\log_{\sqrt{2}}(\quad -$$

基本 12.19 角 θ は $0° < \theta < 90°$ を満たしていると 対数 $\log_{10}$ の値が 2 以下の整数であ $\sin\theta$ のとりうる値をすべて . 04) 9

標準 12.2 ，0 ない正の数とし，次の式 立 とする.

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a =$$

$\log_a b$ $\log_b c$ $\log_c$ とき，以下の問いに答えよ.

) 値を . (佐賀大学 2004) 2

$+\beta\alpha$ の値

(3)

$$- 5x^2 + \gamma\alpha)x - 3\alpha\beta\gamma = 0$$

の解で ，γ の値を求めよ．ただし，$\alpha < \beta < \gamma$ とする.

見本

12.4　対数不等式

□□ **12.21**　不等式

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(x+1)>3$$

を満たす x の値の範囲を求めよ．　(宮崎大学 2008) 1

□□ **12.22**　$0<a<1$ とする．次の不等式を解け．　(鹿[illegible]大学 2011) 1

$$\log_a(2x-1)+\log_a(x-1)\leqq 0$$

□□ **12.23**　$0<a<1$ とする．このとき，[illegible]$-1)\geqq\log_{a^2}(x+11)$ を解け．　(琉球大学 2009) 5

□□ **12.24**　不等式 $\log_a(x+6)+\log_a(x-1)$[illegible] $a\neq 1$ とする．　[illegible]教育大学 2004) 1

□□ **12.25**　a を正の数で $a\neq 1$ と[illegible]$=$ とおく[illegible]次の[illegible]　(福岡[illegible]2001) 1

$$\log_a\left(\frac{|x-1|}{3}\right)\leqq\log_b|x[illegible]$$

□□ [illegible]a は正[illegible]$\neq 1$ とする．不等式

$$[illegible]y)>\log_a x+\log_a y$$

[illegible]表す[illegible]図示[illegible]　(福岡教育大学 2015) 1

[illegible]27　[illegible]に対し[illegible]を超えない[illegible]整数を表す．例えば，$\left[\frac{3}{2}\right]=1$，$[2]=$[illegible]このと[illegible]$<$[illegible]と[illegible]問いに答えよ．ただし，必要なら $\sin\alpha$[illegible]と[illegible]$(0^\circ<\alpha$[illegible]てよい．　(九大 [文]2005) 3

(1) 不等式 $\log_{[illegible]}\left[\frac{5}{2}+[illegible]\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ．

(2) 不等式 $\left[\frac{3}{2}+\log_2[illegible]\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ．

(3) 不等式 $\log_2\left[\frac{5}{2}[illegible]\theta\right]\leqq 0\leqq\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ．

見本

12.5 対数関数の最大・最小

基本 12.28 関数 $f(x) = \log_2 x + 2\log_2(6-x)$ の最大値を求めよ.

(熊大 [文]2003) 2

基本 12.29 $a > 1$ とする.

$$y = -(\log_a x)^2 + \log_a x^4$$

について，次の問いに答えよ. (滋賀大学 2008) 5

(1) $\log_a x = t$ とおくとき，y を t の式と

(2) $0 \leqq y \leqq 3$ となる t の範囲を求めよ.

(3) $2 \leqq x \leqq 4$ を満たすすべての x に対して

標準 12.30 実数 $\theta\,(0 < \theta < \pi)$ が等式

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = 3 + 2\sqrt{}$$

を満たすとき 範囲で関数

$$= \left(\log_2 \frac{x}{2\sin\theta}\right)\left(\log_4 \right.$$

が最 なる x , そ の最小値を求めよ (宮崎大学 2007) 2

12.3 正の定 する 数

$$\left(\log_2 \frac{1+}{}\right)\left(\log_4 \frac{1+\sin}{2a}\right)\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

の最 を用い . (宮崎大学 2012) 2

見本

12.6　常用対数

□□ **12.32**　N は自然数で N^{10} が 16 桁であるとする．このとき，N^8 は何桁になるか求めよ．　(福岡教育大学 2011) 1

□□ **12.33**　$p=\dfrac{2^{148}+1}{17}$ は整数である．p は何けたの整数か答えよ．ただし，$0.301<\log_{10}2<0.302$ である．　(大学 2006) 2

基本 12.34　次の問いに答えなさい．　分大学 2004) 1

(1)　$2^{10}=1024>1000$ を利用して，$\log_{10}$ の べなさい．

(2)　(1) の結果を利用して，2^{21} と 5^9 の大小を

基本 12.35　関数 $f(x)=4^x-2^{x+2}+3$ につ 答

(1)　$f(x)>0$ を満たす x の値の範囲を 宮崎大学 1

(2)　$f(1.59)$ の値の正負を判定せ し，0.30 $_{10}2$
$0.477<\log_{10}3<0.478$ である．

基本 12.36 答えよ．ただし，$\dfrac{30}{100}<\log$ 3 る いて よい．　(福 教育大学 09) 7

(1) $<\log$ $\dfrac{}{100}$ す自然数 n を求め

^{21} は 整数か

(2) $\left($ を小 した 数第何位 て 0 と異なる数字が現れるか．

基 7 % (a 食塩水が このとき，次の問いに答えよ．　(佐賀大学 2009) 6

(1)　食塩 分の 1 を取 ，代わりに同じ質量の真水を加えて濃度が均 る した．このときの食塩水の濃度を求めよ．

(2)　(1) の操作を n 回 してできる食塩水の濃度を求めよ．

(3)　$0.4771<\log_{10}3<$ 2 を用いて，(2) において濃度が $\dfrac{a}{10}\%$ 以下になる n の最小値を求めよ．

見本

標準 12.38 半径 1 の円に内接する正十二角形 D がある．その面積を S とする．D の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_1 をつくる．さらに，D_1 の各辺の中点を結んで正十二角形 D_2 をつくる．このように，D_{n-1} の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_n をつくる $(n \geqq 2)$．D_n の面積を S_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) S と S_1 を求めよ． (長崎大学 2016) 3

(2) S_n を n の式で表せ $(n \geqq 1)$.

(3) $S_n \leqq \dfrac{1}{2}S$ となる最小の整数 n を求めよ．ただし，

$$1.89 < \log_2 \quad <$$

である．

見本

見本

第 13 章　微分法と積分法（数学II）

13.1　微分係数と導関数

□□ **13.1** 関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分[illegible]るとき，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(\quad)}{h}$$

を $f'(a)$ を用いて表せ．　[illegible]教育大学 2005) 1

13.2　曲線の接線・法線

□□ **13.2** 円[illegible]1 と放物線 $y=x^2+5$ との共[illegible]接線[illegible]象限で接する接[illegible]めよ．　([illegible]教育大学[illegible]) 1

基本[illegible]座標平[illegible]う放物線 $y=x^2$ へ 2[illegible]接線が引けて，かつ，この 2[illegible]線が直[illegible]よう[illegible]軌跡を求めよ．　(熊大 [文]2005) 1

[illegible] 13[illegible]の問[illegible]よ．　(佐賀大学 2007) 2

[illegible] $\alpha<$[illegible]る．[illegible] $\alpha-\beta=90°$[illegible]満たすとき，

$$=\frac{\tan}{\alpha}$$

が成[illegible]．

(2) $a>\dfrac{1}{2}$ と[illegible]．$f($[illegible]$^2-x+1$ とし，放物線 $y=f(x)$ の点 $(a,\ f(a))$ における接線を l_1 とする[illegible] x 軸とのなす角を α $(0°<\alpha<90°)$ とするとき，$\tan\alpha$ を a を用いて表せ

(3) l_1 に関して直線[illegible]と対称な直線を l_2 とするとき，l_2 の方程式を求めよ．

(4) a の値にかかわ[illegible] l_2 は定点を通ることを示し，その座標を求めよ．

見本

標準 13.5　$f(x) = x^3 - x$ とし，関数 $y = f(x)$ のグラフを C とする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2005) 1

(1) C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線の方程式を求めよ．

(2) $t \neq t'$ のとき，点 $(t,\ f(t))$ における C の接線と $(t',\ f(t'))$ における接線は異なることを示せ．

(3) C の接線で点 $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$ を通るものの方程式をすべて求め

(4) 点 $(u,\ v)$ を通る C の接線が 3 本存在す ための u，v べき条件を求めよ．また，その条件を満たす点 $(u,$ 在範囲 よ．

標準 13.6　a を定数とする．2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2, \qquad C$$

について，以下の問いに答えよ．　能大 [理) 1

(1) C_1，C_2 の両方に接する直線 存在するた の条

(2) C_1，C_2 の両 に接する 2 本の直線が，直交す の a

(3) C_1，C_2 する 2 本の直線が，$\dfrac{\pi}{4}$ の角度 a よ．

標準 1 物線 C の点 P における法線 点 P における C の接線と点 P に交 線 このとき，次の問 えよ．(九大 [文]2008) 2

点 $(p$ おけ 程式を求めよ．

y 点 $(0$ 通る C 線の本数 よ．

13. の増 極 グラ

□□ **13.** 下の条件 (イ)(ロ)(ハ) を満たす．そのような正の数 a の値と $f(x)$ (長崎大学 2016) 1

(イ) $f'(x) = x^2 + ax$

(ロ) $f(0) = -1$

(ハ) $f(x)$ の極大値と の差が $\dfrac{4}{81}$

見本

基本 13.9 $k>0$ とし，$f(x)=x(x+k)(x+2k)$ とおく．曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1) 関数 $f(x)$ は異なる 2 つの極値をもつことを示しなさい． (大分大学 2014) 1

(2) 曲線 C 上の極値をとる点を P，Q とする．線分 PQ の中点 R の座標を求めなさい．

(3) 点 R が曲線 C 上にあることを示し，点 R における曲線 C の接線の方程式を求めなさい．

基本 13.10 関数 $f(x)=x^3-6x^2+3kx$ (k は定数) を考え[illegible] 問いに答えよ．
(長崎大学 2001) 1

(1) $y=f(x)$ が極大値，極小値をもつような[illegible]を求めよ．

(2) $y=f(x)$ の極大値と極小値の差が 4 とな[illegible]

(3) (2) の場合について $y=f(x)$ のグラ[illegible]

標準 13.11 関数 $f(x)=x^3+3x^2\cos[illegible]\theta+2$[illegible]大値[illegible]する．ここで θ の範囲は $-90^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$[illegible] 次の問い[illegible]えよ．[illegible]004) 3

(1) θ の値の範[illegible]求めよ．

(2) 関数 f[illegible] 極小値に対応する $y=f($[illegible] 2 点[illegible]直線の傾[illegible] m と[illegible]を θ の関数として表せ．

(3)[illegible] のと[illegible]を求めよ．

標準 13.12 [illegible]数と[illegible] $-an^2$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定められている数列 $\{x_n\}$ が

[illegible]$_2>\cdots$[illegible]$_4>x_{15}$，x_{15}[illegible]$<x_{17}<\cdots$

[illegible]と[illegible]求め[illegible] (熊大 [理]2001) 3

標準 13.13 [illegible]数 f[illegible] $ax^3+(a$[illegible]$1)x$ を考える． (九大 [文]2001) 1

(1) 関数 $f($[illegible]ね[illegible]するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ．

(2) $a=0$ のとき，関数[illegible]が $x>-1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ が $x>$[illegible]においてつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上[illegible]示せよ．

見本

13.4　最大・最小

13.4.1　3 次関数の最大・最小

□□ **13.14**　3 点 O(0, 0)，A(t, 0)，B(0, $1-t$) ($0<t<1$) を頂点とする三角形 OAB を，x 軸の周りに 1 回転させてできる円錐の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ．　(琉球大学 2008) 5

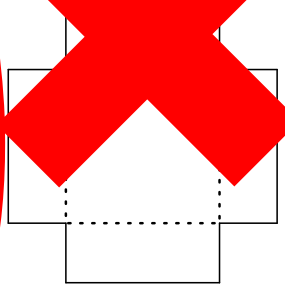
基本 13.15　t を $0 \leqq t < 2$ をみたす定数とする．放物線 $y = (x$ の点 $(t,\ (t-2)^2)$ における接線を l とする．このとき，次の問いに答えよ．　(琉球大学 2013) 5

(1) 接線 l の方程式を求めよ．

(2) 直線 l と x 軸の交点を求めよ．

(3) 直線 l と x 軸，y 軸によって囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ．また，t が $0 \leqq t < 2$ の範囲を動くとき，$S(t)$ が最大となるときの t の値を求めよ．

基本 13.16　1 辺の長さが 24cm の正方形の厚紙の 4 隅から合同な正方形を切りとり，その残りの部分 (右図) を点線に沿って折り曲げてふたのない箱 A を作る．同様に 1 辺の長さが x cm の正方形の厚紙からふたのない箱 B を作る．ここで，箱 A の底面が合同な正方形となるように作ることとするとき，2 つの箱 A，B の容積の最大値を求めよ．ただし，紙の厚みの影響は考えないものとする．　(宮崎大学 2003) 8



基本 13.17　座標平面上の曲線 C と m を $0 \leqq m \leqq 1$ とする．次の問いに答えよ．　(佐賀大学 2008) 7

(1) C 上の点 P における C の式を求めよ．

(2) P と Q(L_m 上の点) を通る直線 L_m の式 $y = mx + b$ の b を m の式で表せ．

(3) R(1, 0) とするとき，三角形 PQR の面積 S を m の式で表せ．

(4) 三角形 PQR の面積 S の最大値を求めよ．

基本 13.18　p を $0 < p <$ 満たす定数とする．関数 $y = x^3 - (3p+2)x^2 + 8px$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ．　(佐賀大学 2010) 11

印刷本

標準 13.19 m を定数とするとき，関数 $f(x)=x(x^2-5x+m)$ $(x>0)$ について，次の問いに答えよ． (長崎大学 2002) 1

(1) $x>0$ の範囲で関数 $f(x)$ が次の条件 (i)，(ii) を満たすような最小の整数 m を求めよ．
(i) $f(x)>0$　　(ii) 極大値および極小値をもつ

(2) m を (1) で求めた整数とするとき，関数 $f(x)$ の $\frac{1}{2}\leqq$ における増減表をつくれ．

(3) m を (1) で求めた整数とするとき，$f(x)$ $\leqq 3$ における最大値を求めよ．ただし，$a>0$，$a\neq 1$ と

応用 13.20 関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考え
下の問いに答えよ．

(1) $t\geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t 線 を示せ

(2) (1) において，傾きが t である 線と曲線 接点 $P(p,\ f(p))$，$Q(q,\ f(q))$ とする (ただし $p<$ このとき，と点 Q $,\ 0)$ に関して対称の にあることを示せ．

(3) $t\geqq 0$ Q の間の距離の最小値を 最小 える とき Q の q もそれぞれ求めよ．

三 数の

基本 13 の問 えよ． (佐賀大学 2011) 1

a, b て，$\cos\theta$ を $a\sin(\theta$ の形に表せ．ただし，$a>0$，b とする

(2) の範 $\sin\theta+$ 最小値を求めよ．

(3) $t=$ とき，sin を t を用いて表し，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で $\sin\theta\cdot\cos$ 小値を求めよ．

(4) $t=\sin\theta+\cos\theta$ と き，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ を t を用いて表し，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で，$\sin^3\theta+\cos$ 大値と最小値を求めよ．

基本 13.22 次の各問 よ． (琉球大学 2006) 6

(1) $\sin\theta+\cos\theta=t$ とおく．$0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ のとき，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ．

見本

基本 13.23　関数 $y = \sin^3 x - \cos^3 x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\sin x - \cos x = t$ とおいて，t のとり得る値の範囲を求めよ．(熊大 [文]2010) 1

(2) y を t の式で表せ．

(3) y の最大値および最小値を求めよ．

基本 13.24　$y = 2(\sin^3 x - \cos^3 x) - 6\sin x \cos x(\sin x - \cos x - 1$ $\leqq x \leqq \pi)$ に対して，次の問いに答えよ．　(福 大学 2010) 6

(1) $t = \sin x - \cos x$ とおくとき，t の範 めよ．

(2) y を t で表せ．

(3) y の最大値と最小値を求めよ．

基本 13.25　変数 θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲 数

$$f(\theta) = 4\sin^3\theta - \quad \cos\theta + \quad \theta$$

について，次の各問に答えよ．　(鹿 2001) 1

(1) $t = \sin\theta$ するとき，t のとる値の範囲 よ

(2) θ の関 数 $g(t)$ として表せ．

(3) t の範囲 関数 $g(t)$ の最大値 値を求めよ．また，その のとの 求め

13.2 問に

理を ，cos び $\cos 3x$ を で表せ．

x とき $= \cos 3x +$ $- 2\cos x$ の最大値および最小

基本 13.2 $\cos\theta + 1$ に 次の問いに答えよ．

(1) $30^\circ \leqq \theta \leqq 0^\circ$ の $\cos\theta$ の値の範囲を求めよ．　(福岡教育大学 2002) 7

(2) y を $\cos\theta$ を用いて

(3) $30^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ の y の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

見本

基本 13.28 a を定数とし，関数

$$f(\theta) = \sin^3\theta + a\cos 2\theta + \frac{21}{4}\sin\theta$$

は $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{13}{4}$ を満たすものとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) a の値を求めよ． (〇〇大学 2015) 9

(2) $t = \sin\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t を用いて表せ．

(3) $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ における $f(\theta)$ の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

標準 13.29 $f(\theta) = 4\left(\sin^3\frac{\theta}{2} + \cos^3\frac{\theta}{2}\right) + 6\left(\sin\right.$

とおく．ただし，θ の範囲は $0 \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi$ 答えよ．

(1) $x = \sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$ とおくとき x のみ 表せ 12) 3

(2) $f(\theta)$ の最小値 そのときの θ の値 求めよ．

13.4.3 ・ 数の最大・最小

□□ a は ，$a > 1$ とする．関数

$$a^{3x} + \quad a^{-2x}) + 27(a^x + a^{-x}) \quad (x \geqq 0)$$

求め， きの よ． (福岡教育大学 2005) 1

基 数 $f($ $- 9(4^x$ $+ 27(2^x + 2^{-x}) - 26$ について，次の えよ (鹿児島大学 2012) 2

(1) $t =$ $f(x)$ を t の て表したものを $g(t)$ とするとき，$g(t)$ を求め

(2) $t = 2^x + 2^{-x}$ のと 範囲を求めよ．

(3) t が (2) で求めた範 動くとき，関数 $y = g(t)$ の増減を調べよ．

(4) $x \geqq 0$ のとき，関) の最小値とその最小値を与える x の値を求めよ．

見本

13.5　方程式・不等式への応用

基本 13.32 a を実数とする．直線 $y=3x-a$ を l とし，曲線 $y=2x^3-3x$ を C とする． (大分大学 2013) 5

(1) $a=0$ のとき，直線 l と曲線 C の共有点の座標を求めなさい．

(2) 直線 l と曲線 C の共有点の個数が 3 個となるように a の範囲を求めなさい．

基本 13.33 点 $(a,\ b)$ を通り曲線 $y=x^3-x$ に接するような異なる[illegible]本の直線が存在するための実数 a，b が満たすべき必要十分[illegible]を求め，[illegible]たす点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示せよ． (琉球大学 2010) 3

基本 13.34 放物線 $C:y=x^2$ と，それと共有[illegible]える．直線 ℓ 上の点 P から放物線 C に相異な[illegible]ぞれ Q，R とする．このとき，次の問に答[illegible] (佐賀大学 [illegible]14) 10

(1) 点 Q，R の座標をそれぞれ $(\alpha$[illegible]$,\ \beta^2)$[illegible]．[illegible]座[illegible]β で表せ．

(2) 直線 QR は[illegible]を ℓ 上どのようにとっても，定[illegible]通るこ[illegible]と．

標準 13.35[illegible]点 O を中心とする半径 1 の[illegible]その上[illegible]C とし，そ[illegible]に A$(-$[illegible]$(1,\ 0)$ とする．C 上の[illegible]M を NM = MB となるよう[illegible]ただ[illegible]る．このとき，次[illegible]に答えよ． (九大[文[illegible]) 3

(1) $\angle$M[illegible]θ と置[illegible]と，弦[illegible]MB 及[illegible]M の座標を θ を用いて表せ．

(2) [illegible]から x[illegible]ろし[illegible]と NP とした[illegible]PB を θ を用いて表せ．

(3) sin[illegible]．多[illegible]B を t を用[illegible]せ．

(4)[illegible]となる[illegible]な点[illegible]つ[illegible]を示せ．

標準 13.36[illegible]多項式と[illegible]の係数は 1，定数項は 0 とする．2 つの異なる実数 α,[illegible]対[illegible]$(\alpha)=f'(\beta)=0$ が満たされているとする．以下の問いに答えよ． (熊大 [理]2015) 1

(1) $f(\alpha)$，$f(\beta)$ を α,[illegible]いて表せ．

(2) 不等式 $\alpha<\beta<$[illegible]成り立つとき，3 次方程式 $f(x)=-1$ の実数解の個数を求めよ．

見本

標準 13.37 a を実数とし，3 次方程式 $4x^3 - 3x - a = 0$ が 3 つの異なる実数解をもつとする．次の問いに答えよ． (長崎大学 2004) 1

(1) a はどのような範囲にあるか．

(2) 3 つの解はいずれも -1 と 1 の間にあることを示せ．

(3) 三角関数の加法定理および 2 倍角の公式を用いて，3 倍角の公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を導け．

(4) 上の方程式の 3 つの解のうち，最も大きなものを $\cos\theta$ ($\quad$ $180°$) と表す．このとき，残りの 2 つの解は $\cos(\theta +$) と $\cos(\theta -$ $\quad$ あることを示し，それらの大小を調べよ．

13.6 定積分

□□ **13.38** 次の定積分を求めよ． (琉球大学 $\quad$ 12) 5

$$\int_0^3 \quad - 2|\,dx$$

□□ **13.39** 関数 $\quad = -3mx + 2n$ と関数 $g(x) = 0$ $\quad 2nx$

$$\quad \int_0^2 f(x)\,dx, \quad T = \int_0^2 \quad$$

とお $\quad$ だし， $\quad$ ， $\quad$ とする．このとき， $\quad$ 各問いに答えよ．

$\quad$ と T $\quad$ n を $\quad$ (鹿児島大学 2015) 2

(2) $S \geqq 0$ $\quad$ ， m $\quad$ 大と $\quad$ うな m と n を求めよ．

基本 13.40 関 $\quad$ $) = \int_{\quad}^{x} \quad$ dt について， $\quad$ 問いに答えよ．ただし，a は実数 $\quad$ ．

(長崎大学 2007) 1

(1) 関 $\quad$ $f(x)$ $\quad$ を調べ， $\quad$ 値および極小値を，a を用いて表せ．

(2) 関数 y $\quad$ と x 軸が異 $\quad$ 3 点で交わるための a の範囲を求めよ．

基本 13.41 関数 $f(x)$ を

$$\quad) = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{7}t^2 - \frac{2}{3}t - 3\right) dt$$

で定める．このとき， $\quad$ 問いに答えよ． (熊大 [文]2009) 1

(1) $f(x) = 0$ をみたす x をすべて求めよ．

(2) $-3 \leqq x \leqq 6$ における $f(x)$ の最小値を求めよ．

印刷用

基本 13.42　$f(x)$ を $x=-1$ で極大，$x=2$ で極小となる 3 次関数で

$$\int_0^2 f'(x)\,dx=-5$$

を満たすものとする．以下の問いに答えよ．以下の問いに答えよ．

(1)　$f'(x)$ を求めよ．　(大 [文]2013) 2

(2)　$f(x)$ の極大値と極小値の差を求めよ．

基本 13.43　関数 $f(x)$ は $f(0)=0$ および　$f(1)$　満たす 2 次関数とし，関数 $g(x)$ を

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,a$$

とする．ただし，a は 0 でない定数である　問いに

(1)　関数 $f(x)$ を求めよ．　島大　) 2

(2)　直線 $y=3x+2$ が曲線 $y=g$　するよう　a の　さらに，その接点の座標を求めよ．

基本 13.44　で，関数

$$)=2^{3x}-a2^{2x}+a2^{x+}$$

の　は x 軸　異なる　β $(\alpha<\beta)$ で交わるものとする．このとき，次の問いに　．　(鹿児島大学 2007) 1

)　とおく　(x) を　した関数を　とする．$g(t)$ を求めよ．

よび　を，α　表せ．

(3)

$$\int_\alpha^{\beta}\left(3\right.\qquad\qquad=2(\beta-\alpha)$$

を満たす　，α　求めよ．さらに，そのときの α，β の値を求めよ．

標準 13.45　t は実数とす　$f(x)=x|x-t|$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$S(t)=\int_0^1 f(x)\,d$　めよ．　(福岡教育大学 2005) 7

(2)　(1) で求めた $S(t)$　最小値を求めよ．

見本

標準 13.46 $0 \leqq x \leqq 1$ とする．このとき，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^1 |t^2 - xt|\, dt$$

と定義する．次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2011) 2

(1) t の関数 $g(t) = |t^2 - xt|$ のグラフの概形をかけ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

標準 13.47 a を 0 でない定数とし，関数 $f(x$ $- a)|$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ におけ

(2) $b = f'(0)$，$c = f(0)$，$S(a) = \int^1$ $- (b$ とき を求めよ．

(3) $S(a)$ の最小

応用 13.48 数とする関数 $f(x) = ax^2 +$ の条 る．

$(*)$ $\leqq x \leqq$ で $f(x) \geqq (x+1)^2$ が成 る． (九大 [文]2003) 1

(1) のと 件(をす最小の c の値 $\frac{}{1}$ であることを示せ．

$a \leqq 2$ ，条 最小の c の値は $4 - a$ であることを示せ．

) $f(x)$ が) を満 いるとき，分 $\int_0^1 f(x)\, dx$ を最小にする a，

，そ の定積 求めよ．

応用 式 $\int^2$ $- 2x +$ $= a^2$ が成り立つような定数 a の値を求めよ (分大 [医]2006) 8

見本

13.7　積分方程式

13.7.1　積分方程式 (定数型)

基本 13.50　a，b，c，k を実数とし，$k>0$ とする．2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ は $f(0)=9$，$f(-1)=16$ をみたす．また，関数 $f(x)$ について，x に関する恒等式

$$f'(x)=6x-9k-4+\int_0^k f(t)\,dt$$

が成り立つ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である．　(大分大学 2013) 6

(1)　$f(x)$ を求めなさい．

(2)　k の値を求めなさい．

基本 13.51　等式

$$f(x)=\int_{-2}^{} 2xf(t$$

を満たす関数 $f(x)$ について，次の問いに答えなさい　2003) 5

(1)　関数 $f(x)$ を求めなさい．

(2)　$\int_{}^{1}$ ax を求めなさい．

(3)　定数 k について，直線 $y=x+k$ と曲線 $y=|f(x)|$ との共有点の個数を求めなさい．

基本 14　関数 $f(x)=x^3-3x^2\int_{1}^{}f(t)\,dt+\int_{0}^{}f(t)\,dt$ について，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2004) 7

(1)　[illegible]よ．

(2)　$y=$ [illegible]$f(a))$ における接線のうち，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通る接線の方程式を求めよ．ただし，$a>-\dfrac{1}{2}$ とする．

(3)　(2) で求めた接線と $y=f(x)$ とで囲まれた部分の面積を求めよ．

見本

13.7.2 積分方程式 (変数型)

基本 13.53 関数 $f(x)$ が等式

$$f(x) = x^2 - x\int_0^1 f(t)\,dt + 2\int_1^x f'(t)\,dt$$

を満たすとき次の問いに答えよ. (佐賀大学 2006) 10

(1) $f(x)$ は 2 次関数であることを示せ.

(2) $f(x)$ を求めよ.

基本 13.54 定数 a, b と関数 $f(x)$ が $\int_2^x f($ [illegible] $+ x + b)$ をみたすとする. 次の問いに答えなさい.

(1) $y = f(x)$ のグラフが点 $(-1,\ 4)$ を通る[illegible]

(2) 定数 a が負のとき, $y = f(x)$ のグ[illegible] 定点を通[illegible]ことを示し, その定点の座標を求めな[illegible]

標準 13.55 2 次関数 $f(x)$ に対して

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

とおく. [illegible]の数と[illegible]が $x = a$ と $x = -a$ で[illegible]となるとき, 以下の問いに答え[illegible] (熊大 [文]2016) 4

[illegible]べて[illegible]について[illegible] $F(x)$ が成り立つことを示せ.

[illegible] $F($[illegible]$(a) =$[illegible]にす[illegible]て求め[illegible]

$\dfrac{(x)}{F'(0}$[illegible]値を[illegible]

標準 [illegible]関数 f[illegible](x)[illegible]れぞれ

$$\frac{3x^2}{6}\int_0^1 f(t)$$[illegible]$$\int_{-1} f(t)\,dt + 7,$$

$$(x -$$[illegible]$$= \int_0^x g(t)\,dt - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 2x + 1$$

を満たすとする. 次の[illegible]答えよ. (佐賀大学 2012) 7

(1) $f(x)$ を求めよ.

(2) $g(x)$ を求めよ.

(3) 放物線 $y = f(x)$ の点 $(4,\ f(4))$ における接線を l とする. 直線 l と放物線 $y = g(x)$ とで囲まれた部分の面積を求めよ.

見本

13.8　面積

13.8.1　放物線

基本 13.57 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+4x & (x \leqq 0,\ x \geqq 2 \text{ のとき}) \\ x^2 & (0<x<2) \end{cases}$$

とする．座標平面上の曲線 $C : y=f(x)$ と直線 $l : y=x$ で囲まれる部分の面積を S とする．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2011) 13

(1) 曲線 C の概形をかけ．

(2) S の値を求めよ．

基本 13.58 放物線 $C : y=(x-p)^2+q$ の頂点 $(p,\ q)$ が放物線 $y=-4x^2+1$ $(x \geqq 0)$ 上を動くとき，放物線 C と x 軸および $x=0$，$x=2$ で囲まれる部分の面積の最大値と，そのときの p の値を求め　　007) 5

基本 13.59 a を　　数とし，放物線 $y=x^2$ の x ≧　　部分を C とする．また a 　　に対して，曲線 C と 2 つの　　$y=t$ 　　て囲まれる図　　積を　　く．このとき次の問い　　よ．　(熊大 [文] 2001) 2

(1)　$\left(\dfrac{t+}{}\right.$　　t で

(2)　　$\dfrac{+a}{2}$　　ポせ．

基本　　線 y 　　$+4$ $(0 \leqq$ 　　する．曲線 C と y 軸との交点を P とし，x 軸　　する．さら　　O と点 Q を結ぶ線分上に点 R をとる．点 R を通り，　　線がこの曲線 C と交わる点を S とする．このとき，次の各問に答えよ．　(鹿児島大学 2001) 13

(1) 曲線 C と x 軸および　　とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(2) R の座標を $(t,\ 0)$ 　　とき，線分 PR と線分 RS および曲線 C とで囲まれる部分の面積 $S(t)$ 　　よ．

(3) $S(t)$ の最大値を求めよ．また，そのときの t の値を求めよ．

印刷本

基本 13.61 放物線 $y=4x^2+3$ を C とする．x 軸上に点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ $(p\neq 0$ とする$)$，C 上に点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2+3)$ をとり，点 A における C の接線 l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ とする．さらに，点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2+3)$ における C の接線を m とする．以下の問いに答えよ．

(1) q を p を用いて表せ． (熊大 [文]2008) 3

(2) 接線 m が点 P を通るとする．p，q の値を求めよ．

(3) (2) で求めた p，q に対して，放物線 C と 2 つの接線 l，m で囲まれた部分の面積を求めよ．

基本 13.62 2 つの放物線 $C_1: y=x^2$，C_2 [illegible] と考える．

点 $\mathrm{A}\left(t,\ -t^2+2t-\dfrac{1}{2}\right)$ における C_2 の接線を ℓ [illegible] 問いに答えよ．

(1) ℓ と C_1 との交点の x 座標を，t を用い[illegible]

(2) 点 A の x 座標を $t=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ とす[illegible] 第[illegible] ℓ，C_1 [illegible] y 軸で囲まれた部分の面積を求め[illegible]

標準 13.63 $a>$ [illegible] する．2 つの 2 次関数 $f(x)=-$ [illegible] $x+2$ [illegible] $-2(a-1)x+3$ につい[illegible] 各問いに答えよ． (九[illegible]) 3

(1) 2 つ[illegible] $y=$ [illegible] $=g(x)$ の交点の x 座標[illegible] 座標を求めよ．

(2) [illegible] 曲線 [illegible] (x) とで囲まれた[illegible] 面積 S を a の式で表せ．

[illegible]) で求[illegible] つの[illegible] 点 $\mathrm{C}(1,\ 4)$ を頂点とする三角形 ABC の面積を T と[illegible] $T:S$ [illegible] k と[illegible] き，k の最小値およびそのときの a の値を求め[illegible]

標[illegible] [illegible] の実数 [illegible] $\left(0,\ a+\dfrac{1}{4}\right)$ [illegible] 線 $C: y=ax^2$ $(x\geqq 0)$ を考える．[illegible] の点で [illegible] との距[illegible] ものを P とする．このとき，次の問いに答[illegible] (九大 [文]2005) 1

(1) 点 P の座[illegible] 線[illegible] の長さを求めよ．

(2) 曲線 C と y 軸，お[illegible] 分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

(3) $a>0$ のとき，面積[illegible] の最小値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

白本

標準 13.65 曲線 $C : y = x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ をとり，点 P における曲線 C の接線を l，点 P を通り l に垂直な直線を m とする．ただし，$t > 0$ とする．接線 l と x 軸との交点を Q とし，直線 m と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ R_1，R_2 とする．また，$\triangle \mathrm{PQR}_1$ の面積を S_1 とし，曲線 C と y 軸および線分 PR_2 で囲まれる図形の面積を S_2 とする．このとき次の問いに答えよ．　(九大 [文]2006) 1

(1) 点 Q と点 R_1 の x 座標を t を用いて表せ．

(2) 面積 S_2 を t を用いて表せ．

(3) $S_1 > S_2$ が成り立つ t の範囲を求めよ

標準 13.66 関数 $f(x) = x^2$，$g(x) = |2x^2 -$ の問いに答えよ．

(1) $f(x) = g(x)$ を満たす x の値を求めよ．

(2) $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラ の面積

標準 13.67 a が正の値をとりながら

$$I(a) = \int_0 (x-a)(x-2$$

が最小とな よ．　貫大 10

標準 1 を実 線 $C_1 : y = x^2$ 上の (t, t^2) における接線を l とする C_2 を -1 以下の問いに答 (熊大 [文]2015) 1

l と C 囲ま 求めよ．

) $\frac{}{\sqrt{2}}$ とす 線 C $-x^2+1$ と で囲まれた部分は l によって 2 の部 けら うち，点 $\left(\frac{}{2}\right)$ を含む部分の面積を求めよ．

標準 13. 半径 1 の $\cos\theta, a+\sin\theta)$ について，θ が $180^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ の 点 P の軌跡 とする．C が不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域にあるとき，次の各問 よ．　(宮崎大学 2004) 5

(1) $a \geqq \dfrac{5}{4}$ であること

(2) $a = \dfrac{5}{4}$ のとき，C 物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

印刷

標準 13.70 3次関数 $f(x)$ は $x=-1$ と $x=1$ で極値をとり，$f(1)=0$ である．次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2003) 8

(1) $f(-2)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分のうち，y 軸の左側にある部分の面積を S_1，y 軸の右側にある部分の面積を S_2 とする．このとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\int x^3\,dx=\frac{1}{4}x^4+C$ (C は積分定数) である．

標準 13.71 座標平面上の円 $(x-1)^2+(y$ [illegible] -2 を C [illegible] 以下の問いに答えよ． (九大 [文]2013) 4

(1) 直線 $y=x-2$ は円 C に接することを示せ [illegible]

(2) 円 C と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ の共有点の [illegible] よ．

(3) 不等式 $y \geqq \dfrac{1}{4}x^2-1$ の表す領域を [illegible] る．[illegible] $+|y$ [illegible] 表す領域を A とし，不等式 $(|x|-$ [illegible] $y-1)^2 \leqq$ [illegible] 表す領域を B [illegible]．そして，和集合 $A \cup B$，すなわち領域 A と領域 B [illegible] せた領域 [illegible] する．このとき，領域 A と領域 E の共通部分 $D \cap E$ を [illegible]，[illegible] 積を求めよ．

13 [illegible] 放物 [illegible] 直線

13.72 [illegible] 問いに [illegible] (琉球大学 2001) 6

[illegible] 実数 α [illegible] ついて [illegible] 分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha$ [illegible] $\beta)\,dx$ を求めよ．ただし，$\alpha<\beta$ [illegible] する．

(2) [illegible] の点 [illegible] を通 [illegible] の [illegible] L とする．直線 L と放物線 $y=x^2$ と [illegible] の交 [illegible] 座標を求め [illegible]

(3) (2) の [illegible] $=x^2$ で囲まれる面積が最小になる a の値と，そのときの面積を [illegible] よ．

基本 13.73 曲線 $C: y=$ [illegible] $2x+1$ と直線 $l: y=x+k$ が異なる2点P，Qで交わり，点Pにおける曲線 [illegible] 線と，点Qにおける曲線 C の接線が直交している．

(1) k の値を求めよ [illegible] (大分大学 2001) 3

(2) 2点P，Qの座標を求めよ．

(3) 曲線 C と直線 l で囲まれる部分の面積を求めよ．

印刷本

基本 13.74　a を 0 でない実数とする．2 つの放物線 $y=x^2$，$y=-x^2+2ax+\dfrac{1}{2a^2}$ がある．　(大分大学 2016) 2

(1) 2 つの放物線は異なる 2 点で交わることを示しなさい．

(2) 2 つの放物線の交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，$\beta-\alpha$ を a の式で表しなさい．

(3) 2 つの放物線で囲まれた部分の面積 S を a の式で表しなさ

(4) (3) で定めた面積 S の最小値を求めなさい．

基本 13.75　a，b を実数とし，関数 $f(x)=$ は $x=-\dfrac{2}{3}$，2 で極値をとる．　(大分大学 2005) 6

(1) a，b の値と，関数 $f(x)$ の極大値，極小

(2) 曲線 $y=f'(x)+\dfrac{7}{3}$ と x 軸で囲まれ　い．

基本 13.76　放物線 $y=-x^2+6x$　とし，C　点を　$(1,-2)$ を B とする．点 A，B を通る直線を　し，点 A，B　る放物　$+bx+c$ を C_2 とする．　a，b，c は実数，$a>0$ である　と　答えよ．

(1) 点 A　(佐賀大学　) 7

(2) 直　方程

(c を a　て表

C_2 と　まれた　を用いて表せ．

　$k>1$　．2　$=kx$，$y=$　$1)x$ と放物線 $y=x^2$ によって　図形の　S と　．次の問い　よ．　(佐賀大学 2009) 8

(1)　いて

(2) S　に増加する

(3) $6S<$　成り立つような k の値の範囲を求めよ．

基本 13.78　$a>0$ のとき　物線 $C:y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における C の接線を l_1 とし，P を通り l_1 と垂直　線を l_2 とする．次の問いに答えよ．(佐賀大学 2012) 9

(1) 直線 l_2 と放物線　交点のうち，点 P と異なる方を Q とする．点 Q の座標を a の式で表せ

(2) 放物線 C と直線 l_2 とで囲まれた部分の面積を S とする．S を a の式で表せ．

(3) (2) の S の最小値を求めよ．またそのときの a の値を求めよ．

見本

基本 13.79 放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P，Q がある．P，Q の x 座標がそれぞれ a，$a+2$ であるとき，次の問いに答えよ．ただし，$-2<a<0$ とする． (熊大 [文]2003) 4

(1) 原点を O とするとき，△OPQ の面積 S_1 を求めよ．

(2) 直線 PQ と放物線で囲まれた部分の面積 S_2 を求めよ．

(3) $S_2=2S_1$ となる a の値を求めよ．

基本 13.80 関数 $f(x)=|x(x+1)|-x+1$ に対して，$y=f(x)$ [illegible] を C とする．次の問いに答えよ． [illegible]熊大 [文]2006) 3

(1) 曲線 C 上の点 $(a,\ f(a))$ $(-1<a<0$ [illegible] 点 $\mathrm{P}(-1,\ 2)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1)$ を通る直線に平行になるとき，a の値お [illegible] の方程式を求めよ．

(2) 放物線 $y=x^2+1$ と曲線 C で囲まれた図 [illegible]

(3) (1) の接線 ℓ と曲線 C で囲まれた図形 [illegible]

基本 13.81 a，b は実数で，$a>1$ と [illegible] の関数

$$f(t)=2t^3-\square(a+1)t^2+6$$

について，次 [illegible] えよ． [illegible]崎大 [illegible] 1

(1) 関 [illegible] の極 [illegible] b を用いて表せ．

(2) [illegible]を x [illegible] 座標とする xy 平面 [illegible] 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を考える．この [illegible] き，3 [illegible] 式 $f($ [illegible] 異なる 3 つの実数解をもつような点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在 [illegible] 域 D [illegible] 平面 [illegible] 示せよ．

(3) [illegible] び D [illegible] からな [illegible] を E とす [illegible] 領域 E のうち，

$$\square \leqq -x^2+4$$

を [illegible] 部分 [illegible] を求めよ [illegible]

基本 13.82 [illegible] $x^2+2|x+1|+1$ に対し，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする．点 $\mathrm{P}(t,\ f(t)$ [illegible] $-1)$ における曲線 C の接線に垂直で，点 P を通る直線を ℓ とする．このとき， [illegible] 各問に答えよ． (宮崎大学 2016) 11

(1) 直線 ℓ の方程式を [illegible] 用いて表せ．

(2) 直線 ℓ が点 $(-1$ [illegible] $1))$ を通るとき，t の中で最も小さいものを求めよ．

(3) (2) で求めた t が定める直線 ℓ と曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ．

見本

基本 13.83　座標平面上の原点 O，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ の 3 点を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を C_1 とし，原点 O を中心とする半径 1 の円を C_2 とする．
次の問いに答えよ．　(琉球大学 2016) 6

(1) a，b，c の値を求めよ．

(2) 放物線 C_1 と線分 PQ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) 放物線 C_1 と円 C_2 で囲まれた図形のうち，放物線 C_1 の[illegible]部分の面積を求めよ．

基本 13.84　次の問いに答えよ．　(長崎大学 2001) 2

(1) 放物線 $y=x^2$ について，傾きが $\sqrt{3}$ の接[illegible]を求めよ．

(2) y 軸上に中心をもち，P において[illegible]よ．

(3) (1) の放物線と (2) の円の下の[illegible]って囲[illegible]部[illegible]．

標準 13.85　放物[illegible]$=x^2$ を C とする．点 $(a,\ a^2-$[illegible]る C[illegible]線の接点をそれぞれ A[illegible]2 点 A，B を通る直線を l と[illegible]以[illegible]

(1) 直線[illegible]程[illegible]用いて表せ．　(佐賀大学[illegible]07) 6

(2)[illegible]で囲[illegible]面積が，a の値にかか[illegible]，一定であることを示せ．

[illegible]3.86[illegible]$C:y$[illegible]ついて，次の問いに答えなさい．ただし，$a>0$ とする．　(長崎大学 2003) 2

[illegible]線 C と[illegible]$y=-$[illegible]で囲まれる[illegible]面積を求めなさい．

2 [illegible]直線[illegible]って (1) の[illegible]面積が二等分されるように k [illegible]なさ[illegible]

(3) 放[illegible]を通る直線[illegible]る図形の面積が最小となるとき，直線の方[illegible]図形の面積を求めなさい．

標準 13.87　曲線 $C:y=$[illegible]$6x|$ と直線 $\ell:y=kx$ (k は実数) について，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2015) 12

(1) 曲線 C を座標平[illegible]図示せよ．

(2) 曲線 C と直線[illegible]なる 3 つの共有点をもつような k の値の範囲を求めよ．

(3) (2) のとき，曲線 C と直線 ℓ で囲まれた 2 つの部分の面積の和が最小になるような k の値を求めよ．

見本

標準 13.88 k を実数とする．関数 $y=|x(x-1)|$ のグラフと直線 $y=kx$ が異なる 3 点を共有している．これらで囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする．

(1) k の値の範囲を求めなさい． (大分大学 2015) 3

(2) S を k の式で表しなさい．

(3) S が最小になるときの k の値を求めなさい．

標準 13.89 2 つの関数

$$f(x)=-px^2 \quad (p>0)$$
$$g(x)=|x|-2$$

が与えられていて，放物線 $y=f(x)$ が 2 点 $(-$

(1) p の値を求めよ． (九大 [文]2004) 1

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点をす よ．

(3) (2) で求めた交点のうち，x 小になる $(a,$ このとき，点 A における $y=f(x)$ の接 $y=h(x)$ を求 また $y=h(x)$ と $y=g($ 点 A とは異なる，交点 $\mathrm{B}(b,\ g($ 求め

(4) 次の ある図形の面積を求めよ．

$$y \leqq h(x), \quad y \geqq \quad y \geqq g(x)$$

標準 13.90 $y=$ $t^2)$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H る．$t>$ る．以下の問いに答えよ．(九大 [文]2011) 1

座標を いて表

通 に平行 $y=x$ と の座標を R とするとき，三角 の面積 いて

(3) $x \leqq$ で，放物線 直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形 るとき，S_1 を t を用いて表せ．

(4) 放物線 $y=x^2$ と直 $=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求

見本

標準 13.91　座標平面上の直線 $y = -1$ を ℓ_1，直線 $y = 1$ を ℓ_2 とし，x 軸上の 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$ を考える．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，次の条件を考える．

$$d(\mathrm{P}, \ell_1) \geqq \mathrm{PO} \quad \text{かつ} \quad d(\mathrm{P}, \ell_2) \geqq \mathrm{PA} \quad \cdots ①$$

ただし，$d(\mathrm{P}, \ell)$ は点 P と直線 ℓ の距離である．　(九大 [文]2014) 1

(1) 条件 ① を満たす点 P が存在するような a の値の範囲を求め

(2) 条件 ① を満たす点 P 全体がなす図形の面積 S を a を用 ．ただし，a の値は (1) で求めた範囲にあるとする．

標準 13.92　座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$
$$C_2 : y = -$$

を考える．ただし，a，b は実数とす 大) 1

(1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わる の a，b に 条件を

以下，a，b が を満たすとし，C_1 と C_2 で囲 る する．

(2) b を いて

(3) べての 変化するとき，放 の頂点が描く軌跡を座標 面上に よ．

8 面積の 値・ 値

標 93 $= x^2$ $k > 0$ に 直線 $y = kx$ を l_1 とし，原点を通 垂直な と l_2　(大分大学 2010) 6

(1) 曲線 点の座標を い．

(2) 曲線 C と l_1 まれる部分の面積を S_1，曲線 C と直線 l_2 とで囲まれる部分の面積を S_2 と S_1，S_2 をそれぞれ k の式で表しなさい．

(3) $S_1 + S_2$ の最小値を なさい．

見本

基本 13.94 次の問いに答えよ. (琉球大学 2010) 5

(1) t を実数とする. 放物線 $y=x(2-x)$ 上の点 $(t,\ t(2-t))$ における接線の方程式を求めよ.

(2) (1) で求めた直線と放物線 $y=x(2-x)$ および 2 直線 $x=0$, $x=3$ とで囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする. $0 \leqq t \leqq 2$ における $S(t)$ の最大値, 最小値とそのときの t の値を求めよ.

基本 13.95 放物線 $C: y=x^2$ とその上の点 $(a,\ a^2)$ $(0<a$ [illegible] における接線を l とするとき, 次の各問に答えよ. (宮崎大学 2001) 5

(1) 接線 l の方程式を求めよ.

(2) 直線 $x=0$, $x=1$, 放物線 C と接線 l で [illegible] の面積 $S(a)$ を求めよ.

(3) $S(a)$ の最小値を求めよ.

基本 13.96 a を $0<a<1$ の範囲 [illegible] する. 直 [illegible] $y=$ [illegible] $C: y=1-x^2$ $(x \geqq 0)$ について, 次の各問に [illegible] えよ. [illegible] 2004) 10

(1) 曲線 C [illegible] 線 l で囲まれる部分の面積を [illegible], [illegible] 直線 $x=$ [illegible] の面積を S_2 とする. S_1, [illegible] a [illegible] いて表せ.

(2) [illegible] $+S_2$ [illegible] $0<a<1$ の範囲おい [illegible] の最小値を求めよ.

基 **.97** [illegible] 点とす [illegible] 上に 2 点 $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{P}(t,\ 0)$ をとる. ただし, $0<$ [illegible] とす [illegible] らに [illegible] $C:$ [illegible] $+7x$ 上に 2 点 $\mathrm{B}(4,\ 12)$, $\mathrm{Q}(t, -t^2+7t)$ を [illegible]. [illegible] の面 [illegible] (t) と [illegible] 物線 C, [illegible] Q, 線分 OP によって囲まれた [illegible] 積を a [illegible] る. [illegible] さ, 次の問に答 (佐賀大学 2016) 9

(1) [illegible] 用いて [illegible]

(2) g [illegible] を用 [illegible] さ.

(3) $h(t)$ [illegible] く. $0<t$ [illegible] における $h(t)$ の最小値とそのときの t の値を求め [illegible]

基本 13.98 $0 \leqq m \leqq 1$ [illegible]. $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で, 曲線 $y=x^2$ と直線 $y=mx$ で挟まれた部分の面積を [illegible] とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $S(m)$ を求めよ [illegible] (琉球大学 2002) 6

(2) $S(m)$ が最小となる m の値と, そのときの $S(m)$ の値を求めよ.

見本

基本 13.99 k を正の数とし，放物線 $y = x(x-1)$ と直線 $y = kx$ と原点 O 以外の交点を A とする．x 軸上の点 B を，直線 AB が y 軸と平行になるようにとる．放物線と線分 OA とで囲まれた部分の面積を S_1，放物線と線分 AB および x 軸とで囲まれた部分の面積を S_2 とおく．このとき面積の差 $S_1 - S_2$ を最大とする k の値を求めよ．
(佐賀大学 2004) 11

基本 13.100 次の問に答えよ．　(宮崎大学 2005) 5

(1) $\alpha < \beta$ のとき，次の等式 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (\beta - x)(x - \alpha)\,dx = \frac{1}{6}(\beta -$ 立つことを示せ．

(2) $-2 \leqq a \leqq 2$ のとき，曲線 $y = (3x - a$ 軸で囲まれる部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ．

標準 13.101 実数 $p > 0$ と関数 $f(x) = x^3 -$ $C_2 : y = f(x+p) - p$ について，次に答え (九工大 [工]2011) 3

(1) 曲線 C_1 と C_2 が共有点を 2 個も p の

(2) 実数 α，β に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\beta - x)(x - \alpha)\,dx = \alpha)^3$$

を示

(3) で求 くとき，曲線 C_1，C って囲まれた図形の面積 の最 求め

13.10 平面 に 3 点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0 < \alpha < \beta)$ めり，$: y = ax^2 +$ 軸とこ で交わっているものとする．た は実数 る．こ ，以下の問 えよ．　(九大 [文]2016) 1

線 C で囲 部分の面 を S とする．S を α と β の式

(2) β 定 $< \alpha < \beta$ を動かすとき，S を最小とする α を β の式

標準 13.103 a，b を実 ，曲線 $C : y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を考える．C の接線の傾きの最小値が -3 であ ，以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2016) 4

(1) b を a を用いて表

(2) C が x 軸の正の 負の部分とそれぞれ 1 点で交わるとする．このとき a の値の範囲を求め

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき，C と x 軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め，そのときの a の値の範囲を求めよ．

見本

13.8.4 放物線と接線

□□ **13.104** 直線 $l : y = ax + b$ が原点を中心とする半径 1 の円と点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ で接しているとする．また，直線 l は放物線 $C : y = x^2 - \sqrt{3}x + c$ とも接しているとする．このとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2010) 2

(1) 定数 a，b の値を求めよ．

(2) 放物線 C と直線 l との接点の座標および定数 c の値を

(3) 放物線 C と直線 l および y 軸とで囲 形の めよ．

基本 13.105 頂点が点 A(0, 4) で，点 B(2, 0) 考える．次の問いに答えよ．

(1) この放物線をグラフとする 2 次関数

(2) この放物線上にあり，x 座標が 2) で を 線と x 軸との交点で，点 B と異な とする． お 線 l_1 と点 D における放物線の接線 l_2 交点 E の座 a を使

(3) この放物 l_2，および点 E を通り y 軸に 直 分の面積を求

基本 曲線 $2x$ と，直線 $l : y =$ なる 2 つの共有点 Q(b, a)，R($< c$) とす l と y 軸との交 $0, a)$ とおくとき，次の各 えよ (宮崎大学 2007) 8

1) 点 線分 P : 2 に るとき， c の値をそれぞれ求めよ．

で求め b，c 曲線 C の点 R する接線 m の方程式を求めよ．

(，y 軸 n とす で求めた接線 m，曲線 C，お n で囲 る部分

基本 13.10 x^2 上の点 A(a, a^2) における接線が曲線 $C_2 : y = x^2 - 4$ と交わる点を B，C とす ただし，B の x 座標は C の x 座標より小さいとする．以下の問いに答えよ． (熊大 [文]2010) 2

(1) 線分 BC の中点 M び C の座標を a を用いて表せ．

(2) M を通り y 軸に 直線，線分 MC および曲線 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

見本

標準 13.108 定数 a は $0 < a < 1$ をみたすとする．曲線 $C : y = (x-1)^2$ と C 上の点 $(a,\ (a-1)^2)$ における接線 ℓ について，以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2012) 4

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C と接線 ℓ および 2 直線 $x = 0$，$x = 1$ とで囲まれた 2 つの部分の面積の和 $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(3) 曲線 C と 2 直線 $x = 0$，$y = 0$ とで囲まれ，接線 ℓ の上側に [illegible] つの部分の面積の和 $T(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

基本 13.109 曲線 $C : y = x^2 + px + q$ と [illegible] 交点 [illegible]，x 座標 t が正である曲線 C 上の点を P とする．点 P における [illegible] とする．曲線 C，接線 l および y 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とし，[illegible] で囲まれた部分の面積を S_2 とする．

(1) l の方程式を求めなさい．

(2) S_1 を t で表しなさい．

(3) $S_1 : S_2$ を求めなさい．

基本 13.110 [illegible] $(x-2)^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ (t-2)^2)$ [illegible] $)^2)$ を考える．[illegible] < 2 とする．このとき，[illegible] 答えよ．
(鹿児島大学 2002) 13

(1) [illegible] 関数 $y = f(x)$ の [illegible] C は 2 点 P，Q を [illegible] 軸に接する．この $f(x)$ を [illegible] めよ．

(2) 線分 [illegible] と C [illegible] で囲ま [illegible] 分の面積 S を求めよ．

[illegible] に指定 [illegible] ある範 [illegible] 変化するとき，[illegible] の最大値とそのときの t の値 [illegible] 求め [illegible]

標準 [illegible] 放物線 [illegible] のグラ [illegible] $a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ (ただし，$a < b$) がある．ま [illegible] A と点 B [illegible] $(p,\ p^2)$ をとり，点 P における放物線の接線，線分 [illegible] $= a$，$x = p$ で囲まれた部分の面積を S_1，放物線，点 P における放物線の接線，[illegible] $x = a$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする．点 P が点 A と点 B の間 (両端を含む) [illegible] を放物線のグラフに沿って動くとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ のとる値の範囲を求めよ．　(佐賀大学 2009) 12

見本

標準 13.112 実数 a, b $(a>0,\ b>0)$ に対して，点 $(1,\ 1)$ を通る放物線 $C : y=ax^2+b$ と，放物線 C の点 $(1,\ 1)$ における接線 l を考える．以下の問いに答えよ．

(1) b を a を用いて表せ． (九工大 [情]2008) 2

(2) 接線 l の方程式を a を用いて表せ．

(3) 放物線 C，接線 l および y 軸で囲まれた図形のうち，$y \geqq 0$ の部分の面積 S を a を用いて表せ．

(4) S が最大となるときの a の値とそのときの S の値を求

標準 13.113 $a>0$ とし，2 つの放物線を

$$C_1 : y = x^2 +$$

$$C_2 : y = \frac{1}{-}$$

とする．次の問いに答えよ． 育大学) 7

(1) 放物線 C_1 上の点 $(t,\ t^2+at)$ る接線の方 を求め

(2) 放物線 C_1, の両方に接する直線の方程式を .

(3) (2) で求 うち，傾きが正であるもの 物線 および接 囲 分の面積が 1 となるよう 値 めよ．

標準 14 x 整式 $f(x)$ は，次の (i)，(ii)，(iii) を満たして

(i) $f($ 次の 1 であ

$) = 0$ $= -1$

(iii) $-3x$ 余 $+5$

$f(x)$ を x たときの商 余りを $k(x)$ とするとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2008) 10

(1) $k(x)$ を求めよ．

(2) $g(x)$ を求めよ．

(3) 座標平面上に おい つの関数 $y=x^2-3x+2$，$y=g(x)$，$y=k(x)$ のグラフで囲まれた部 面積を求めよ．

見本

標準 13.115　$a < -\dfrac{1}{2}$，$b > 1$ とする．放物線 $C : y = ax^2 + b$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の共有点が，$\mathrm{P}_1(p,\ q)$，$\mathrm{P}_2(-p,\ q)$ の 2 点のみとなるとき，次の問いに答えよ．ただし，$p > 0$ とする．　(熊大 [文]2002) 4

(1) b を a で表せ．

(2) p，q それぞれを a で表せ．

(3) 座標平面の原点を O とする．$\angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2 = 90^\circ$ のとき，P[illegible] 放物線 C の接線と放物線 C および y 軸とで囲まれ[illegible]部分の面積を[illegible]

標準 13.116　座標平面上に，半円 $C : x^2$ [illegible] $(\quad x > 0)$ と放物線 $D : x^2 - 6y + 3 = 0$ がある．半円 C 上の点 $\mathrm{P}(2\cos$ [illegible] だし，$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) における半円 C の接線を l とするとき，次の各問[illegible]

(1) 半円 C と放物線 D との交点 Q の座標[illegible]

(2) 直線 l が放物線 D に点 R において[illegible]とき[illegible]の座標[illegible]よ．

(3) (2) のとき，半円 C と放物線[illegible]び直線 l に[illegible]て囲[illegible]積を求めよ．

標準 13.117　[illegible]において，点 A(0, 1) を中心[illegible]通る[illegible]ついて，点 B([illegible]から[illegible]本の接線の接点を P，[illegible]る．ただし，点[illegible]の x 座標は正[illegible]．さ[illegible]関して対称な放物線[illegible]直線 BP と直線 BQ にそれぞれ[illegible]点 O[illegible]る[illegible]る．このとき，次[illegible]問に答えよ．

(1) 2 点 P[illegible]の座標[illegible]よ　(宮崎大学 2011) 2

(2) 放[illegible]C_2 を表[illegible]程式を[illegible]．

(3) A から[illegible]C_2 上[illegible]きでの距離は[illegible]であることを示せ．

(4) 点 O を[illegible]物線 C[illegible]れる部分の面積 S を求めよ．

応用 13.[illegible]3 点 $\mathrm{P}(0,$ [illegible]$,\ 0, -1)$，$\mathrm{R}(t,\ t^2 - t + 1,\ 0)$ を考える．t が $0 \leqq$ [illegible]動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする．以下の問い[illegible]答え[illegible]　(熊大 [医]2011) 4

(1) K を xy 平面で切[illegible]きの断面積を求めよ．

(2) K の体積を求め[illegible]

見本

13.8.5 放物線と2本の接線

基本 13.119 放物線 $y=x^2$ 上の異なる2点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における接線が点Rで交わっている．次の問いに答えよ． (琉球大学 2011) 6

(1) Rの座標を求めよ．

(2) $p=-1$，$q=2$ のとき，2本の接線と放物線で囲まれた図形の面積を求めよ．

基本 13.120 座標平面において，曲線 $C:y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(2,$ [illegible] る接線を l とし，l と直線 $y=-1$ との交点を Q とする．[illegible] 点 Q を通り [illegible] と接する直線のうち，l と異なるものを m とする．この [illegible] の各問 [illegible] ．

(1) 直線 l の方程式を求めよ． (宮崎大学 2006) 7

(2) 直線 m の方程式を求めよ．

(3) 曲線 l，m および曲線 C で囲まれる部 [illegible] よ．

基本 13.121 放物線 $C:y=ax^2+bx$ [illegible] $0)$ か [illegible] $1,$ [illegible] $0(5,\ 1$ [illegible] るとし，P，Q における C の接線をそれ [illegible] m とす [illegible] 下の [illegible]

(1) b，c をそれぞれ a を用いて表せ [illegible] 2014) 3

(2) l と m の [illegible] 座標が -4 であるとき，a，b, [illegible] 求め [illegible]

(3) (2) で [illegible] について，放物線 C と l, [illegible] 囲まれた部分 [illegible] 積を求め [illegible]

基 [illegible].122 [illegible] $+y^2-$ [illegible] で外接し，[illegible] $y=$ [illegible] 接する [illegible] 心 [illegible] C と [illegible] る．[illegible] に答え [illegible] ただし [illegible] つの円が [illegible] とは，[illegible] のよう [illegible] のことであ [illegible] 外接する円 [illegible] る [illegible] 003) 6

(1) [illegible] 式を求 [illegible]

(2) C 上 [illegible] $(x_2,\ 2)$ に [illegible] の接線の方程式を求めよ．

(3) C と (2) [illegible] の [illegible] 接線で囲まれた部分の面積を求めよ．

基本 13.123 $\mathrm{A}(2,\ 1)$, [illegible] $1)$，$\mathrm{C}(0,\ 1)$ とする．$0 \leqq t \leqq 1$ に対して線分 AB を $t:1-t$ の比に内分する [illegible]，線分 BC を $t:1-t$ の比に内分する点を Q，線分 PQ を $t:1-t$ の比に内分 [illegible] を R とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) P の座標を t を [illegible] 表せ． (佐賀大学 2005) 6

(2) R の軌跡を求めよ．

(3) 線分 AB，BC と (2) で求めた軌跡によって囲まれた図形の面積を求めよ．

白本

基本 13.124 放物線 $C : y = x^2 - 3x$ と点 $\mathrm{A}(2, -6)$ がある．　(大分大学 2006) 2

(1) 点 A から放物線 C へ引いた接線の方程式を求めよ．

(2) 放物線 C 上を動く点 P に対して，線分 AP の中点 Q の軌跡の方程式を求めなさい．

(3) (1) で求めた接線と，(2) で求めた軌跡とで囲まれる部分の面積を求めなさい．

基本 13.125 座標平面上の放物線 $y = x^2$ と直線 $y = kx + 1$ (k [illegible] の 2 つの交点を P，Q とし，点 P の x 座標を α，点 Q の x [illegible] 標を β ($\alpha <$ [illegible]．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2012) 11

(1) $\alpha + \beta$ および $\alpha\beta$ の値を，k を用いて表[illegible]

(2) 2 点 P，Q における放物線の接線をそれ[illegible]
とき，点 R の x 座標を，k を用いて表[illegible]

(3) 放物線と (2) の 2 つの接線 l，m で[illegible]を用い[illegible]せ．

標準 13.126 次の問いに答えよ．　[illegible]02) 1

(1) 原点を中心[illegible]する半径 r ($r > 0$) の円 $x^2 + y^2$ [illegible] の点[illegible]ける接線の方程式[illegible]

$$ax + by = r^2$$

[illegible]れる．

(2) [illegible]$+ y^2$[illegible]と放物[illegible]$= x^2 + 1$ の両方[illegible]する直線は 3 本ある．これら接線[illegible]式を[illegible]

(3) 問[illegible]おける[illegible]接線[illegible]x 軸[illegible]部分と交わる接線を l_1，x 軸に平[illegible]接線を[illegible]る．[illegible]l_2 および放[illegible]とで囲まれる部分の面積を求[illegible]よ．

標準 [illegible]次関数[illegible]が

[illegible]$\{2f'(x) - x[illegible]6f(x) + 2x + 8$

を満たしているとする．[illegible]問いに答えよ．　(福岡教育大学 2006) 8

(1) 2 次関数 $f(x)$ を求[illegible]

(2) k は正の実数とす[illegible]次の (i)，(ii) に答えよ．

(i) 点 $(0, -k)$[illegible]曲線 $y = f(x)$ に引いた 2 本の接線の方程式を求めよ．

(ii) (i) で求めた 2 本の接線と曲線 $y = f(x)$ によって囲まれた部分の面積が $2\sqrt{3}$ となるような k の値を求めよ．

見本

標準 13.128 p を正の定数として，放物線 $C : y = (x-p)^2 + p^2$ を考える．C の 2 本の接線 l，m を考え，接点の x 座標を，それぞれ a，b とする．ただし，$a < 0$，$b > 0$ とする．次の問いに答えよ． (長崎大学 2014) 1

(1) l と m の方程式を求めよ．

(2) l，m が原点を通るとき，a，b を p を用いて表せ．

(3) l，m が原点を通るとき，放物線 C と 2 本の接線 l および m によって囲まれた図形の面積を S とする．S を p を用いて表せ．

標準 13.129 放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ を考え[illegible]本の直線

$$\ell_1 : y = \frac{5}{2}x \quad \text{および} \quad \ell$$

は C に接するものとする．C と ℓ_1 の接点を[illegible]Q と[illegible]
いに答えよ． [illegible]工大 [情[illegible]4) 1

(1) α, β, γ $(\alpha \neq 0)$ を定数とする[illegible]2 次方程式 $[illegible] + \beta$ [illegible]解をもつための条件を求めよ．

(2) b の値を求[illegible]また，c を a を用いて表せ．

(3) P，Q[illegible]を用いて表せ．

(4) a[illegible]かかわ[illegible]頂点は直線 m 上にあ[illegible]の方程式を求めよ．

(5) ℓ_1，ℓ[illegible]まれ[illegible]の面積を a を用い[illegible]

13.1[illegible]線 $y =$[illegible]点 P[illegible]における接線と点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線が R で[illegible]とす[illegible]だし，[illegible]$< b$ とす[illegible]のとき，次の問いに答えよ．

(1) R の座[illegible]および三[illegible]の面積を求[illegible] (九大 [文]2009) 4

(2) 線分[illegible]に[illegible]平行[illegible]RQS とする．折れ線 PSQ と曲線[illegible]で囲[illegible]図形の面[illegible]

(3) ∠PR[illegible]ながら P と[illegible]動くとき，(2) で求めた面積の最小値を求めよ．

印刷本

13.9　問題研究

13.9.1　面積公式

$f(x)=\dfrac{1}{2}(x+k)^2$，$g(x)=\dfrac{1}{3}(x+k)^3$ とすると (k は定数)

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+kx+\frac{1}{2}k^2$$

$$g(x)=\frac{1}{3}x^3+kx^2+k^2x+\frac{1}{3}k^2$$

したがって　　$f'(x)=x+k$,　　$g'(x)=x^2+2kx+k^2=(x+k)^2$

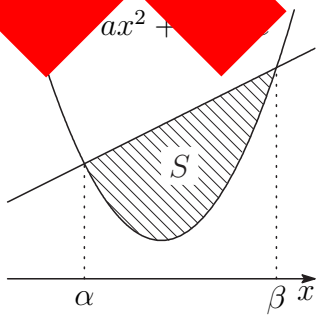
よって　　$\boldsymbol{\displaystyle\int (x+k)\,dx=\frac{1}{2}(x+k)^2+C}$

$$\boldsymbol{\displaystyle\int (x+k)^2\,dx=\frac{1}{3}(x+k)^3+C}$$

上の積分公式を使って，$a>0$ の放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線で囲まれた部分の面積を求めてみる ($\alpha<\beta$).

［1］直線の方程式を $y=mx+n$ とすると

$$ax^2+bx+c-(mx+n)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$



したがって

$$S=\int_\alpha^\beta \{a(x-\alpha)(x-\beta)\}dx$$

$$=-a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx$$

$$=-a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\,dx+a(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\,dx$$

$$=-a\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta+a(\beta-\alpha)\left[\frac{1}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$

$$=\boldsymbol{\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

また，a の符号に関係なく　$\boldsymbol{S=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3}$

印刷本

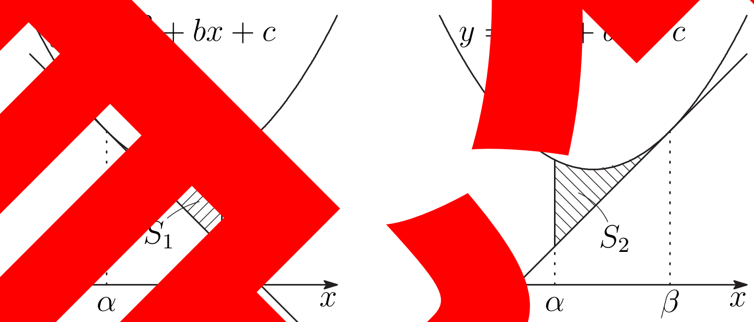
106 ページの 13.100(宮崎大学 2005) や 13.101(九工大 [工]2011) では

$$\int_\alpha^\beta (\beta - x)(x-\alpha)\,dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を証明させる問題も出題されている．これらの公式を覚えるだけでなく，自分でも導けるようにしておくことも大切である．

［2］ 下の図の直線の方程式を $y = mx + n$ とすると

$$S_1 = \int_\alpha^\beta \{(ax^2+bx+c) - (mx+n)\}\,dx$$
$$= a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\,dx = a\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta = \boldsymbol{\frac{a}{3}(\beta-\alpha)^3}$$
$$S_2 = \int_\alpha^\beta \{(ax^2+bx+c) - (mx+n)\}\,dx$$
$$= a\int_\alpha^\beta (x-\beta)^2\,dx = a\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_\alpha^\beta$$
$$= -\frac{a}{3}(\alpha-\beta)^3 = \boldsymbol{\frac{a}{3}(\beta-\alpha)^3}$$



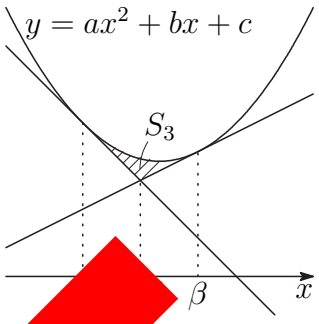
[illegible] S [illegible] の符号に [illegible] $(\beta-\alpha)^3$

数学 [illegible] 線と直線で囲 [illegible] た図形の面積を求める問題は頻出である．入試 [illegible] とし [illegible] 重要な単元である．

見本

［3］ $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，$f'(x)=2ax+b$.
$y=f(x)$ 上の 2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ における接線の方程式は，それぞれ

$$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha),$$
$$y=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$$



上の 2 式から y を消去すると

$$f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$$

ゆえに　　$\{f'(\beta)-f'(\alpha)\}x+f(\beta)-\beta f'(\beta)=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)$　$\cdots(*)$

このとき　　$f'(\beta)-f'(\alpha)=2a(\beta-\alpha)$
$f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)\{a(\alpha+\beta)+b\}$
$\beta f'(\beta)-\alpha f'(\alpha)=\beta\{2a\beta+b\}-\alpha\{2a\alpha+b\}$

これらを $(*)$ に代入すると

$$2a(\beta-\alpha)x+(\beta-\alpha)\{a(\alpha+\beta)+b\}=(\beta-\alpha)\{2a\beta+b\}-a(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)$$

$\beta-\alpha\neq 0$ より　　$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$=\dfrac{\alpha+}{}$　線部分を 2 つに分け ると

［2］の　と利用

$$_3=\frac{a}{}\left(\frac{}{}-\alpha\right)^3\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$$

$\boldsymbol{\alpha)^3}$

ま　　なく　$\boldsymbol{S_3}$　$\boldsymbol{-\alpha)^3}$

見本

第 14 章　平面上のベクトル（数学B）

14.1　ベクトルと図形

基本 14.1 正六角形 ABCDEF において，[illegible]し，線分 AP と BF の交点を Q とする．次の問いに答えよ．[illegible]福岡教育大学 2014) 5

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を用いて表せ．

(2) AQ : QP を最も簡単な整数の比で表[illegible]

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$ のとき，△BPQ の面積[illegible]．

基本 14.2 平面に四角形 ABCD があ[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，A[illegible]$\vec{d}$ とお[illegible]点 C は

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{4}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{d}$$

を満た[illegible]とする[illegible]き，次の各問いに答え[illegible] (鹿児島大学 2008) 4

([illegible]線 AB [illegible]の交[illegible]直線 AD と BC の[illegible]を F とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ [illegible]と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ [illegible] d を[illegible]

(2) 線[illegible]の中[illegible]，線分[illegible]中点を[illegible]るとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ [illegible]いて表[illegible]

[illegible]分 A[illegible]点を P[illegible]3 点 P，[illegible]同一直線上にあることを証明[illegible]

基本 14.3 [illegible]辺 AB を[illegible]内分する点を P，辺 AC を 1 : 2 に内分する点を Q と[illegible]辺 B[illegible]点 R があるとする． (大分大学 2015) 2

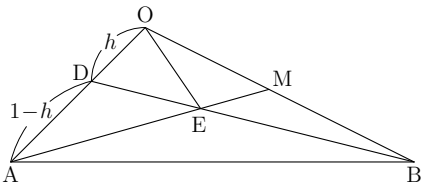
(1) 線分 PQ の中点を[illegible]，点 A，M，R が一直線上にあるとき，BR : RC を求めなさい．

(2) △ABC の重心 G[illegible]RQ の重心 H が一致するとき，BR : RC を求めなさい．

(3) 直線 AR，BQ[illegible]が一点で交わるとき，BR : RC を求めなさい．

見本

基本 14.4 △OAB において，辺 OB の中点を M，辺 OA を $h : (1-h)$ $(0 < h < 1)$ に内分する点を D とし，線分 AM，BD の交点を E とする．次の各問に答えよ．　(琉球大学 2006) 5



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および h で表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 4$，$\angle \mathrm{AOB} = 60°$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ のとき　　を求めよ．

基本 14.5 平面上に △OAB と点 P があり　　k，m，　　て

$$k\overrightarrow{\mathrm{PO}} + m\overrightarrow{\mathrm{PA}} +$$

が成り立つとする．次の問いに答えよ．

(1) $k = 4$，$m = 1$，$n = 2$ のとき，△P　　P　　の面積比を　も簡単な整数の比で表せ．

(2) k を 0 以上の定数とする．点　　$\geqq 0$，$n \geqq$　　$+ n =$　　ながら動くとき，点　の軌跡は線分になることを示せ．

(3) 点 P が　　> 0，$n \geqq 0$，$m + n = 3$ を満　　こ　　の存在す　　よ．また，領域 D の面積　　面積の　　になるか　　よ．

基　　6 平　　△AB　　がある．△ABC の内部に点 D があって，三角形　　比が

　　DBC　　A : △D　　$p : q : r$

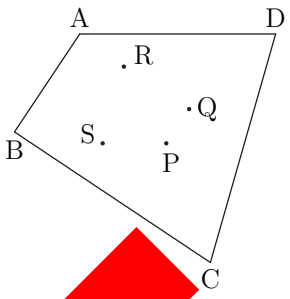
　　る．　　いに　　(福岡教育大学 2015) 3

(1)　　辺 BC　　を　　BD　　の交点を T とするとき，BS : SC　　T : T　　q，r を

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} =$　　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　　$+ q$　　となることを示せ．

見本

基本 14.7 右図のような四角形 ABCD について，すべての内角の大きさは 180° 未満とする．△BCD の重心を P，△CDA の重心を Q，△DAB の重心を R，△ABC の重心を S とする．ただし，点 P と点 R は直線 AC 上になく，点 Q と点 S は直線 BD 上にないものとする．このとき，次の各問に答えよ．



(宮崎大学 2013) 10

(1) AC//RP を示せ．

(2) AB//QP を示せ．

(3) 四角形 ABCD が円に内接するとき，4 点 P，Q，R，S は同一円周上にあることを示せ．

標準 14.8 $0 < \alpha < 1$，$0 < \beta < 1$ とする．△ABC の辺 BC を $\alpha : 1-\alpha$ に内分する点を P とし，辺 CD を $1-\beta : \beta$ に内分する点を Q とする．また，線分 QP と平行四辺形の対角線 AC の交点を R とする．$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(2004) 3

(1) ベクトル $\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) 長さの比 $\dfrac{AR}{AC}$ を求めよ．

(3) AB = 1，AD = 2，$\angle B = 60°$ とするとき，△ABR の面積を求めよ．

標準 14.9 座標平面に 3 点 O(0, 0)，A(2, 6)，B(3, 4) をとり，点 O から直線 AB に下ろした垂線を OC とする．また，実数 s に対し，点 P を

$$\overrightarrow{OP} = s\,\overrightarrow{OA}$$

で定めるとき，次の問いに答えよ．

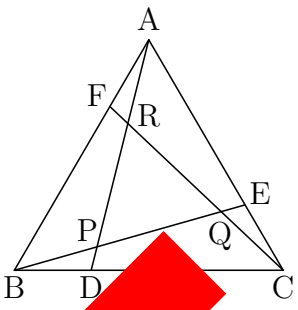
(九大 [理]2009) 1

(1) 点 P の座標を s を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{CP}|^2$ を s を用いて表せ．

(2) s を $s \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{CP}|^2$ の最小値を求めよ．

印刷本

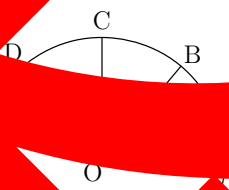
標準 14.10 右図の正三角形 ABC において，辺 BC，CA，AB を $m : n$ $(0 < m < n)$ に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．また，線分 AD と BE の交点を P，線分 BE と CF の交点を Q，線分 CF と AD の交点を R とする．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2003) 11



(1) △PQR は正三角形であることを示せ．

(2) AR : AP $= m : n$ であることを示せ．

標準 14.11 右図のように，中心 O，半径 1 の
相異なる 4 つの点 A，B，C，D を ∠AOB = ∠B
$\angle \mathrm{COD} = \theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ となるようにとる．
ル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{c}$ とするとき，
答えよ．　(宮崎　　5)



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，θ を用い　表せ．

(2) 線分 AC　　D の交点を P とするとき，ベ　　いて
表せ

1　ベクトルの

□ **14**　面上の　A，B　して $|\overrightarrow{\mathrm{A}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 5$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3$ であ
　求め　とし，　は AB と　積とする．
(福岡教育大学 2010) 5

□□　$= 3$　2 で，　60° であるとき，$|\vec{a} - 3\vec{b}|$ を求めよ．
(琉球大学 2012) 5

□□ **14.14** 平面上に 3　0)，A(1, $\sqrt{3}$)，P($\cos\theta$, $\sin\theta$) をとる．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の　と，そのときの θ の値を求めよ．(琉球大学 2015) 5

□□ **14.15** 三角形 A　三辺を AB = 4，AC = 3，BC = $\sqrt{13}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおくとき，$\vec{b} \cdot \vec{c}$ の値を求めよ．また，三角形 ABC の重心を G とするとき，線分 AG の長さを求めよ．
(琉球大学 2010) 6

見本

基本 14.16 大きさ 1 のベクトル $\vec{a}$ と，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{b}$ のなす角を θ とする．
(大分大学 2016) 1

(1) $|3\vec{a}+t\vec{b}|$ が最小となるような実数 t の値を $|\vec{b}|$，θ を用いて表しなさい．

(2) $|3\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$ をとる．$|\vec{b}|$ および $\cos\theta$ の値を求めなさい．

基本 14.17 △ABC において，$\angle A=60^\circ$，$AB=2$，$AC=1$ と[illegible] $\angle A$ の 2 等分線と辺 BC の交点を D とする．また，$\angle A$ の 2 等分線と辺 BC[illegible] 等分線の交点を E とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき[illegible]の問いに答[illegible]
(福岡教育大学 2008) 2

(1) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{AD}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) AD : AE を求めよ．

基本 14.18 一辺の長さが 2 の正三角形[illegible]おい[illegible]を 1 : 3 [illegible]する点を P，線分 OB を 3 : 1 に内分する[illegible]とする．[illegible]$=\vec{a}$[illegible]とき，次の問に答えよ．
[illegible]2013) 1

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内[illegible]の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{PQ}$ を[illegible]表せ．

(3) 線[illegible]の長さ

([illegible]OB の[illegible]と C[illegible]分 AC と線分 PQ[illegible]点を R とする．$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ [illegible]用い[illegible]．

基本 1[illegible]三角形[illegible]にお[illegible]$AB=2$，[illegible]1，$\angle BAC=120^\circ$ とし，実数 [illegible]>0 に[illegible]，$4\overrightarrow{P}$[illegible]$+k\overrightarrow{PC}=\vec{0}$[illegible]れている点を P，直線 AP と直[illegible]との[illegible]と D と[illegible]$\overrightarrow{D}$ で与え[illegible]いる点を Q とする．このとき，次の[illegible]よ．
(鹿児島大学 2001) 6

(1) 線分[illegible]DC を k を[illegible]せ．

(2) $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$[illegible]ると[illegible]の値を求めよ．

(3) (2) の k の値に対し[illegible]点 Q が三角形 ABC の外接円の周上にあるとき，l の値を求めよ．

基本 14.20 △OAB に[illegible]$\angle AOB=\dfrac{2}{3}\pi$ であり，$|\overrightarrow{OA}|=a$，$|\overrightarrow{OB}|=b$ とする．点 O から辺 AB に垂線をおろし，辺 AB との交点を H とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，a，b を用いて表せ．
(福岡教育大学 2003) 3

見本

基本 14.21　平面上の 3 点 O，A，B は同一直線上にないとし，ベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AB}$ の長さはそれぞれ $|\overrightarrow{OA}| = 8$，$|\overrightarrow{OB}| = 5$，$|\overrightarrow{AB}| = 7$ とする．点 P を線分 AB を 2 : 1 に内分する点とする．また，2 点 O，P を通る直線と，線分 AB の垂直二等分線との交点を E とする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2002) 6

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OE} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ を満たす実数 s，t を求めよ．

基本 14.22　△OAB において，OA = 3，OB = 2 とし，辺 [illegible] 点を M，∠AOB の二等分線と辺 AB の交点を D とする．[illegible] OD に [illegible] ろした垂線の足を E とし，直線 OM と直線 AE の交点を F と [illegible] $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ として，次の各問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OM}$ および $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OF}$ および $\overrightarrow{DF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表[illegible]

基本 14.23　△ABC において，辺 [illegible] 1 に内分 [illegible] 点を E [illegible] 1 に内分する点を E とし [illegible] 線分 CD，BE の [illegible] 点を P とする [illegible] の問い[illegible]

(1) $\overrightarrow{AP}$ を，[illegible] を用いて表せ．　[illegible] 5

(2) AB [illegible] AC [illegible] $= \sqrt{7}$ のとき，∠BAC の [illegible] さを求めよ．

基本 [illegible] OA [illegible] OB [illegible] AOB = 60° の △O [illegible] おいて，辺 AB を 3 : 1 に [illegible] る点を [illegible] OB [illegible] OP と AQ の交点を R とする．

(1) PQ [illegible] A と O [illegible] しな[illegible]　(大分大学 2005) 2

[illegible] PQ の [illegible] 求め[illegible]

[illegible] P [illegible] めな[illegible]

(4) [illegible] 面積 [illegible] なさい[illegible]

基本 14.25 [illegible] があり，$\overrightarrow{OA}$ [illegible]，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくと，$|\vec{a}| = 3$，$|\vec{b}| = 2$，$\cos\angle AOB = \frac{\sqrt{6}}{6}$ [illegible] 成り立 [illegible] る．OA の中点を P とし，半直線 AB 上に AB : AH = 1 : s $(s > 0)$ [illegible] 点 H をとる．　(大分大学 2011) 3

(1) $\overrightarrow{OH}$ を s，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を [illegible] 表しなさい．

(2) 直線 OH と直線 [illegible] 垂直に交わるような s の値を求めなさい．

(3) (2) のとき，直線 OH と直線 PB の交点を Q とする．$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい．

白本

基本 14.26 平面上に一辺の長さが k の正方形 OABC がある．この平面上に $\angle AOP = 60°$，$\angle COP = 150°$，$OP = 1$ となる点 P をとり，線分 AP の中点を M とする．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ とおいて，次に答えよ． (九工大 [工]2006) 2

(1) $\overrightarrow{OM}$ の長さを k を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OC}$ を k と $\vec{a}$，$\vec{p}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{OM}$ が平行になるときの k の値を求めよ．

(4) $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{AP}$ が垂直になるときの k の値を求めよ．

基本 14.27 四角形 ABCD に対して次の ㋐ が成り する．

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}$$
$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$$

このとき，四角形 ABCD は向かい合う とが なわち 辺形になる) ことを示せ．) 3

基本 14.28 △AB を 1 辺の長さが 1 の正三角形と ABC 中心を O とする．次の問 よ． ( ) 7

(1) ベク A い を求めよ．

(2) △AP を動くとき，次の (イ) に答えよ．

( ) 内積 PA·PB + PC·PA の値 よ．

(イ) A·PB く値 を求めよ

) 平面 いに 3 点 O，A， り，それらは同一直線上には とす とする． ，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とし，その内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ∠AOB 分 AB 点を C とし，直線 OA に関して点 B と を る．この 問いに答えよ．

(鹿児島大学 2012) 3

(1) $\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}$， を用い .

(2) $\overrightarrow{OD}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用 表せ．

(3) $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OD}$ となると AOB と OC を求めよ．

見本

標準 14.30 平面上に OA⊥AP，OB⊥BP を満たす四角形 OAPB がある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ と表すと，

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \frac{1}{7}$$

が成立している．　(大分大学 2010) 3

(1) ∠AOB = θ として，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい．

(3) △OAB と △PBA の面積比を求めな

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 2\sqrt{7}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を求めなさ

標準 14.31 △OAB において，OA = 1，OB =
2 : 1 に内分する点を P，線分 OP を P の方
の点を
次の問いに答えなさい．　大分大学 3) 3

(1) △PQB = 2△POA のとき，$\overrightarrow{\mathrm{Q}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なさ

(2) ∠OQA = ∠QOB のとき，OP : Q を求めなさ

標準 14.32 1 の正三角形 OAB がある OL 線
分 AB を 内分 を C とする．さらに，2 Q は 正の実数 l につ
いて，$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たすものとする とき，次の各問に答えよ．
(宮崎大学 2011) 4

3 点 Q が 上 き，k と l の関係式を求めよ．

P, 直線上 ものとし，PQ の重心が ∠AOB の二等分線
ある この k と l の関係式 りよ．

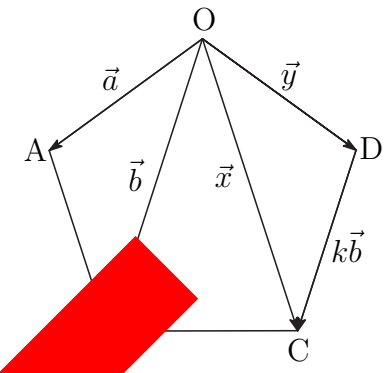
，AP き，k 求めよ．

見本

標準 14.33 一辺の長さ 1 の正五角形 OABCD について，OB と DC は平行である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{x},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{y},\quad \overrightarrow{\mathrm{DC}}=k\vec{b}\ \ (k\text{ は実数})$$

とするとき，次の各問に答えよ．



(宮大 [医]2016) 5

(1) k の値を求め，$\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の

(3) $\vec{a}$ と $\vec{x}$ の内積を求めよ．

標準 14.34 相異なる 3 点 O，A，B に対し

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\quad \vec{a}$$

を満たしているものとする．$t=\vec{a}\cdot\vec{b}$ くとき，次

し，記号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ の内積を，また，$|\vec{a}|$ はベクト

大き

6

(1) 直線

と関し

A と対称な点を C とす

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ と

て表

線 OC

て，

な点を D とするこ

，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\vec{b}$ が平行

となる

な t の

と．

座標

おいて

$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を

し，半径が $\dfrac{1}{2}$ の円を S とする．

S

N(

とり

る．この

次の各問いに答えよ．ただし，

O は

もの

(鹿児島大学 2010) 3

(1) x 軸

とり，直線

S との交点のうち，N と異なるもの

を Q と

とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=a\vec{p}+b\vec{n}$ の形で表したとき，a，b を x で表せ．

(2) x 軸上に 2 点 $\mathrm{P}_1(x$

$\mathrm{P}_2(x_2,\ 0)$ をとる．直線 NP_1 と円 S との交点のうち，N と異なるものを

し，直線 NP_2 と円 S との交点のうち，N と異なるものを Q_2 とする．

き，$x_1x_2=-1$ が成り立っていれば

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}_1}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}_2}=\vec{0}$$

が成立することを証明せよ．ただし，$\vec{0}$ は零ベクトルを表すものとする．

正本

標準 14.36 座標平面上の点 $P_n(n,\ 1)$，$n = 1, 2, \cdots$ に対して，点 P_1 から原点 O と点 P_n $(n \geqq 2)$ を通る直線へ下ろした垂線を P_1Q_n とし，2 つのベクトル $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{Q_nP_1}$ のなす角を θ_n とする．このとき，次の問いに答えよ．　(熊大 [文]2001) 3

(1) ベクトル $\overrightarrow{Q_nP_1}$ の成分を求めよ．

(2) $\cos\theta_n$ を求めよ．

(3) $\tan\theta_n < 1.01$ をみたす最小の n の値を求めよ．

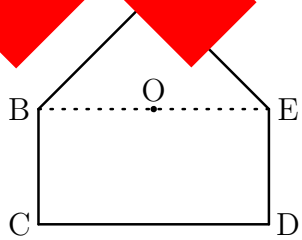
標準 14.37 △OAB において，辺 OB の中点を M，辺 AB を α に内分する点を P とする．ただし，$0 < \alpha < 1$ とする．線 P と AM Q とし，Q を通り，線分 AM に垂直な直線が，辺 OA またはそ 交 R とする．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ として，次の問いに答えよ．　(九大 [理]2006) 2

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および α を用

(2) $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$，$\angle AOB = \theta$ で cos き，ベクト OR を $\vec{a}$ と α を用いて表せ．

(3) (2) の条件のもとで，点 R が 中点であ きの α .

標準 14.38 図の な五角形 ABCDE(角 A が直角で 二等辺三角形 A 形 BCDE をあわせた図形) に 辺 BC と辺 辺 CD と線分 BE の長さ と する．線 の中 する．また，5 枚のカー あり， れに A C, と書いてある．カー よ く 1 枚 もとの操作を n 回繰り返し，i に引 ードの を たとえば，i 回目 B を とす $_i$ = る．この 次の問 (九大 [ ]) 3



(内積

(2) $\overrightarrow{P_2}$ の 1 であ

(3) $\overrightarrow{OC}$ 積を q_i とす のとき，$q_1q_2\cdots q_n = 0$ となる確率を求めよ．

標準 14.39 平面上に直 形 ABC があり，その斜辺 BC の長さを 2 とする．また，点 O は $4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ $= \vec{0}$ をみたしているとする．このとき，以下の問いに答えよ．　(九大 [文]2011) 3

(1) 辺 BC の中点を するとき，点 A は線分 OM の中点となることを示せ．

(2) $|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 = 10$ となることを示せ．

(3) $4|\overrightarrow{PA}|^2 - |\overrightarrow{PB}|^2 - |\overrightarrow{PC}|^2 = -4$ をみたす点を P とするとき，$|\overrightarrow{OP}|$ の値を求めよ．

14.3 三角形の内心・外心・垂心

□□ **14.40** 三角形 ABC の垂心を H とする．次の等式が成り立つことを示せ．

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$$

ただし，三角形の各頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わる．この点を三角形の垂心という．（[illegible]大学 2013） 3

基本 14.41 平面上に 3 点 O，A，B があり，[illegible]$= 2$，OB[illegible]$\angle AOB = \dfrac{\pi}{3}$ とする．点 A から直線 OB に垂線を下ろし，直線[illegible]点[illegible]る．また，点 B から直線 OA に垂線を下ろし，直線 OA との交点[illegible]線 AH と直線 BI の交点を P とし，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき，次の[illegible]

(1) $\overrightarrow{OH}$ を，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OP}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) 線分 OP の長さを求めよ．

基本 14.42 △O[illegible]において，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$|\vec{a}$[illegible]B，$|\vec{b}$[illegible]$= t$ とする．点 A から[illegible]垂線 AP を下ろし，点 B か[illegible]O[illegible]線[illegible]ろし，直線 AP と[illegible]を R とする．（[illegible]大分大学[illegible]3） 3

(1)[illegible]積を求[illegible]

[illegible]を t[illegible]，$\overrightarrow{OQ}$[illegible]表しなさい．

[illegible]$t =$[illegible]き，$\overrightarrow{O}$[illegible]と[illegible]$|\overrightarrow{OR}|$ を求めなさい．

[illegible]平面[illegible]角形[illegible]点 O があり，[illegible]$= \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく[illegible]

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} =$[illegible]

を満たし[illegible]．辺 BC[illegible]，線分 OB の中点を N とし，三角形 OBC の外心[illegible]のとき，次の[illegible]問いに答えよ．（鹿児島大学 2015） 4

(1) M ≠ P のとき，線[illegible]と線分 OA は平行であることを示せ．

(2) $\overrightarrow{MP} = t\vec{a}$ とおいて[illegible]と $\overrightarrow{NP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および実数 t を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{NP}$ を $\vec{a}$，[illegible]用いて表せ．

印刷本

基本 14.44 △ABC において，AB = 5，BC = 7，CA = 6 とする．$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおく．次の問いに答えよ．　(長崎大学 2014) 2

(1) △ABC の内心を I とする．∠A の 2 等分線と ∠B の 2 等分線は点 I で交わる．∠B の 2 等分線と辺 AC の交点を D とするとき，AD : DC と BI : ID を求めよ．

(2) $\overrightarrow{AI}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) ∠A = θ とする．$\cos\theta$ と内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(4) 実数 x，y を用いて $\overrightarrow{AP} = x\vec{b} + y\vec{c}$ と表される点 P を考[illegible]，P が辺 AB の垂直 2 等分線上にあるとき，x と y が[illegible]関係式を

(5) △ABC の外心を O とする．辺 AB の垂[illegible]AC の垂直 2 等分線は点 O で交わる．$\overrightarrow{AO}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．

標準 14.45 3 辺の長さが AB = 4，BC = 3[illegible]角[illegible]の内側にあって 2 辺 AB および AC に接[illegible]円の半径[illegible]とし，中心 O から AB に引いた垂線と AB [illegible]を H と[illegible]$\overrightarrow{AC}$ と同じ向きで大きさが 1 のベクト[illegible]それぞれ $\vec{u}$[illegible]し，[illegible]0) とする．次の問いに答[illegible]よ．　[illegible]2011) 2

(1) 直線 AC[illegible]の交点を M とするとき，[illegible]$\vec{u}$[illegible]いて表せ[illegible]

(2)[illegible]レ $\vec{u}$，[illegible]を求め，ベクトル $\overrightarrow{AO}$[illegible]を，それぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ およ[illegible]を用い[illegible]せ．[illegible]O の半径 r を t で[illegible]

円 O[illegible]にも[illegible]の中心を I とする．すなわち，I は三角形 ABC の[illegible]ある[illegible]ときの[illegible]と，内[illegible]の半径を求めよ．

[illegible]と内接[illegible]共有[illegible]にないような[illegible]囲を求めよ．

標準[illegible]形 AB[illegible]= AC[illegible]∠A = θ とし，この三角形の外接円の中[illegible]すると，$\overrightarrow{AB}$ =[illegible]し，実数 s，t に対し，$\overrightarrow{AP} = s\vec{b} + t\vec{c}$ となる点 P[illegible]= $\frac{1}{3}$ であり，[illegible]外接円の周上にあるとき，次の問いに答えよ．　(長崎大学 2008) 5

(1) $\overrightarrow{AO}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用い[illegible]せ．

(2) s，t の満たすべき[illegible]式を求めよ．

(3) $s + t = u$，$st =$[illegible]くとき，v のとりうる値の範囲を求めよ．

(4) 上の (3) において，v が最小値をとるときの $\overrightarrow{AP}$ を，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．また，中心 O との位置関係が分かるように，点 P を図示せよ．

見本

標準 14.47 △OAB において，辺 AB 上に点 Q をとり，直線 OQ 上に点 P をとる．ただし，点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする．3 つの三角形 △OAP，△OBP，△ABP の面積をそれぞれ a，b，c とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ および a，b を用いて表せ． (九大 [理]2008) 3

(2) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ および a，b，c を用いて表せ．

(3) 3 辺 OA，OB，AB の長さはそれぞれ 3，5，6 であるとする[illegible] P を中心とし，3 直線 OA，OB，AB に接する円が存在するとき，$\overrightarrow{OP}$ [illegible] $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

応用 14.48 三角形 OAB で $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ [illegible]，$\angle AOB = \dfrac{\pi}{6}$ とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) 三角形 OAB の外接円の中心 (外心)Q [illegible]

(2) 原点 O と A からそれぞれの対辺 [illegible] の交点 ([illegible]) を H とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表[illegible]

(3) $|\overrightarrow{AB}|$ の値を求めよ．

(4) 三角形 OA[illegible]内接円の中心 (内心)P の位置ベ[illegible] $\overrightarrow{OP}$ [illegible]せ．

14.4 [illegible]角形

標[illegible]49 △[illegible]の辺 [illegible] 中点をそれぞれ C，D とする．辺 OA 上に OE : [illegible] 1 : 4 [illegible]点 F [illegible]．[illegible] と線分 BE，AD との交点をそれぞれ P，Q [illegible]し，[illegible] と線[illegible]の交[illegible]とする．[illegible]$\overrightarrow{OA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおくとき，次の [illegible]よ． (熊大 [文]2006) 4

([illegible] [illegible]をベ[illegible]表せ．

(2) [illegible] $\overrightarrow{PR}$ [illegible]トル $\vec{a}$，[illegible]

(3) $|\vec{a}| =$ [illegible]積 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$ [illegible]，△PQR の面積を求めよ．

印刷本

標準 14.50 放物線 $C : y = x^2$ 上に異なる 2 点 P，Q をとる．P，Q の x 座標をそれぞれ p，q (ただし，$p < q$) とする．直線 PQ の傾きを a とおく．以下の問いに答えよ．

(1) a を p，q を用いて表せ．　(長崎大学 2015) 3

(2) $a = 1$ とする．直線 PQ と x 軸の正の向きとなす角 θ_1(ただし，$0 < \theta_1 < \pi$) を求めよ．

(3) $a = 1$ とする．放物線 C 上に点 R をとる．R の x 座標を r(ただし，$r < p$) とする．三角形 PQR が正三角形になるとき，直線 PR と x 軸の正の向きとのなす角 θ_2(ただし，$0 < \theta_2 < \pi$) を求めよ．また，このとき直線 PR の傾き，および直線 QR の傾きを，それぞれ求めよ．さらに，正三角形 PQR の面積を求めよ．

(4) $a = 2$ とする．放物線 C 上に点 S$(1,\ 1)$ をとる．三角形 PQS が $\angle \mathrm{S} = \dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形になるとき，この三角形の面積を求めよ．

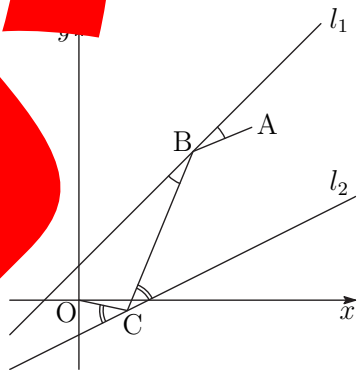
応用 14.51 曲線 $y = f(x) = x(4 - x)$ 上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(a,\ f(a))$，B$(b,\ f(b))$，C$(3,\ 3)$ $(0 < a < b < 3)$ をとる．　(京都大学 [理系]) 9

(1) 四角形 OABC の面積が最大になるときの a，b の値を求めよ．

(2) 角 OAC の大きさが最小になるときの a の値を求めよ．

14.5 ベクトル方程式

標準 14.52 O を原点とする平面上の 2 直線 $l_1 : y = x$ と $l_2 : y = -2x$ がそれぞれ l_2 と点 A$(5,\ 0)$ をとる．また，l_1 上に点 C をとる．ただし，右図のように，線分 AB，線分 BC，C を通る直線 l_2 と x 軸の正の向きとのなす角は等しい．　(佐賀大学 2) 2



(1) $a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$ を満たす定数 a，b，c に対して，直線 $ax + by + c = 0$ を l とする．直線 l に関して点 P$(m,\ n)$ と対称な点 Q の座標は

$$\left(m - \frac{2a(am + bn + c)}{a^2 + b^2},\ n - \frac{2b(am + bn + c)}{a^2 + b^2} \right)$$

であることを証明せよ．ただし，P は l 上の点でないとする．

(2) 点 B と点 C の座標を求めよ．

14.6 問題研究

14.6.1 オイラー線

△ABC の垂心 H について，$\vec{a} = \overrightarrow{HA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{HB}$，$\vec{c} = \overrightarrow{HC}$ とする．線分 AB および BC の垂直二等分線の方程式は，実数 s，t を用いて

$$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) + s\vec{c}, \quad \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) + t\vec{a}$$

△ABC の外心を O とすると，O はこれらの[illegible]であるか

$$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) + s\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) + t\vec{a} \quad \text{すなわち} \quad \left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{c} = \vec{0}$$

$\vec{a}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立であるから $s = t =$ [illegible]

したがって $\overrightarrow{HO} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

また，△ABC の重心を G とすると [illegible] $= \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}$

上の 2 式から [illegible] $= \frac{2}{3}\overrightarrow{HO}$

よって，[illegible]重心[illegible]同一直線 (**オイラー線**) [illegible]り，G は線分 HO を 2 : 1 に内分[illegible]であ[illegible]

[illegible]，127[illegible]の 14[illegible]島大学 2013) の[illegible]ら

[illegible] $\kappa =$ [illegible] $\vec{c}\cdot\vec{a}$ [illegible] $(*)$

[illegible]ABC[illegible]接円の[illegible] R とすると

$$R^2 = |\overrightarrow{O}|^2 = \left|\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|^2$$

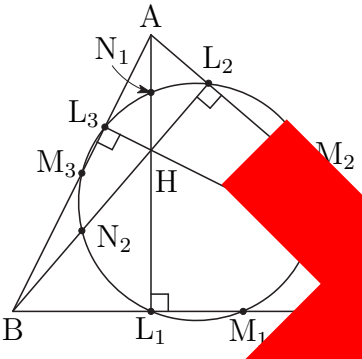
$$= |\vec{b}-\vec{c}|^2$$

$$= \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2k)$$

見本

14.6.2　9 点円 (オイラー円)

△ABC の垂心 H から辺 BC，CA，AB にそれぞれ垂線 HL_1，HL_2，HL_3 を引く．また，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ M_1，M_2，M_3 とし，さらに，HA，HB，HC の中点をそれぞれ N_1，N_2，N_3 とする．



3 点 L_i，M_i，N_i を通る円を C_i とする（$i=1,2,3$）．C_i は $\overrightarrow{HP_i}$ を直径とする円である．C_i 上の点 P_i に対して $\vec{x}=\overrightarrow{HP_i}$ とおく．まず C_1 の方程式を

$$\left(\vec{x}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot\left(\vec{x}-\frac{\vec{a}}{2}\right)=0$$

(∗) に注目して $\left|\vec{x}-\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right|^2=\frac{1}{16}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k)\quad\cdots(**)$

と変形．計算により C_2，C_3 の方程式も (∗∗) に一致する[1]．ゆえに C_i ($i=1,2,3$) は同一の円であり，この円を **9 点円 (オイラー円)** という．△ABC の重心を G とすると，Q も直線 OG 上にあり，Q は △ABC の垂心 H と外心 O の中点である．(∗∗) の半径を r とすると

$$r=\frac{1}{4}\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k)}$$

したがって，前ページの結果から

$$r=\frac{1}{4}R^2\quad\text{すなわち}\quad r=\frac{1}{2}R$$

これらの内容については，図形の性質 (数学 A) の分野からの出題が多いが，複素数平面 (数学 III) で出題されることもある[2]．

[1] ベクトル方程式における $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の対称性からも明らか．
[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf 5

第 15 章　空間のベクトル（数学B）

15.1　ベクトルの成分

□□ **15.1** O を原点とする xyz 座標空間に [illegible] 4 [illegible], $5,\ 5)$，$\mathrm{B}(1,\ 4,\ -2)$，$\mathrm{C}(3,\ 1,\ -3)$，$\mathrm{D}(4,\ -2,\ 1)$ を考える．また，点 [illegible] 置ベクトルが，定数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と表される点を E とする．[illegible] にあるように t の値を定め，AE : EC を求め [illegible]

基本 15.2 点 O を原点とする空間の 2 [illegible] $3,$ [illegible]) の位[illegible]トル をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とし，直線 AB 上の [illegible] 位置ベ[illegible] を $\vec{p}$ [illegible]

(1) $|\vec{p}|$ が最小となる点 P を求めな[illegible].　[illegible] 2002) 5

(2) (1) で求め [illegible] に対して，△OAP の面積を求 [illegible]

基本 15.3 [illegible] が $(2$ [illegible] 半径が $2\sqrt{5}$ の球面が y [illegible] と [illegible] ってでき [illegible] 円を C とする [illegible] 問い [illegible]　(琉球大学 2011) 2

[illegible] の中心 [illegible] と半 [illegible]

点 P [illegible] を動 [illegible] Q [illegible] 面上の直線 $x=y$ 上を動くとする．線分 PQ [illegible] の最小 [illegible] よび [illegible] きの P, [illegible] 標を求めよ．

15. [illegible] トル [illegible] 程

□□ **15.** [illegible] 点 A(3, 0, [illegible] 3, 0)，C(1, s, t) を頂点とする三角形 ABC の重 [illegible] O とする．OG⊥AG，OG⊥AB となるときの s と t の値を求めよ．　(琉球大学 2016) 5

基本 15.5 空間に 3 点 A [illegible] 6)，B(7, 0, 9)，C(s, t, 0) がある．ただし，s，t は実数とする．このとき [illegible] 問に答えよ．　(佐賀大学 2016) 8

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を [illegible] を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ となるとき，s と t の関係式を求めよ．

(3) △ABC が $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ の直角二等辺三角形となるとき，s と t の値を求めよ．

白本

基本 15.6 a を定数とする．座標平面において，3 点 A$(3, -2, -2)$，B$(-1, -1, 3)$，C$(1, a, 3a+2)$ がある．線分 AB を 3 : 2 に外分する点を D とするとき，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2006) 7

(1) 直線 AB と直線 CD が直交するときの a の値を求めよ．

(2) a は (1) で求めた値とし，G を三角形 BCD の重心とする．このとき，原点からの距離が 5 となるような線分 AG 上の点の座標を求めよ．

基本 15.7 a，b，c を定数とする．O を原点とする xyz 座標空間において，3 点 A$(a, -9, b)$，B$(2, c, 3)$，C$(-3, 2, 0)$ を考える．この次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2001) 7

(1) $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ かつ $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$ かつ $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$ を満

(2) (1) で定めた a，b，c の値に対して，次

(ア) 点 D$\left(-\dfrac{8}{5}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{19}{5}\right)$ について O 用いて

(イ) 点 O に関する位置ベク 定数 t を用 $\overrightarrow{OB}+$ れる点を E とす 3 点 A，C，E が同一直線上に き， めよ．

基本 15.8 A(2, 1, 4)，B(3, 0, 1)， 頂点と 面体 AOBC が

(1) O，B 定め 点 A から垂線 A す．点 H の座標を求めよ．

三角形 の面積 BC の体積を求めよ．

(3) 四 OBC する 球 わち，A，O，B，C を通る球面を考え の球 程式 よ．

基本 間内 0, 0) $b_2, 0)$，C(c_1, c_2, c_3) を頂点とする 考え だし， る．次の問いに答えよ．

(1) b_1，b_2 c_3 を求めよ．　(佐賀大学 2012) 1

(2) $\overrightarrow{OA}$ と BC 垂直 ことを示せ．

(3) P は直線 BC 上の OP と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であるとする．P の座標を求めよ．また $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂 ることを示せ．

見本

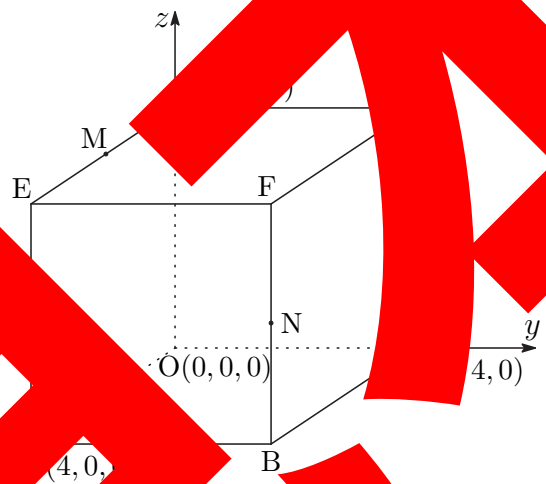
基本 15.10 xyz 空間に点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1)，D(1, 1, 1) をとる．点 A，B，C，D を頂点とする四面体 T について，次の問いに答えよ．

(長崎大学 2001) 5

(1) z 軸上の点 $(0,\ 0,\ a)$ を通り z 軸に垂直な平面で T を切ったときの切り口の頂点 P，Q，R，S の座標を，a を用いて表せ．ただし，a は $0 < a < 1$ なる定数とし，P，Q，R，S はそれぞれ線分 AC，AD，BD，BC 上にあるものとする．

(2) (1) における切り口の面積 $S(a)$ と，その最大値，および[illegible]の a の値を求めよ．

基本 15.11 4 点 O(0, 0, 0)，A(4, 0, 0)，C[illegible], 4) をとり，下図のように線分 OA，OC，OD を 3 辺とする立方体 O[illegible]える．辺 DE，BF の中点を，それぞれ M，N とする．以下の問い[illegible]



[illegible]トル[illegible]よび[illegible]分で表せ．

(2) [illegible]とす[illegible]求めよ．

(3) 3[illegible]M，[illegible]点とする[illegible]の面積を求めよ．

(4) 三角錐[illegible]，三角形 GMN を底面としたときの高さを求めよ．

(5) 三角形 GMN を含[illegible]と線分 OF との交点を P とする．このとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OF}$ を用いて表せ．

見本

基本 15.12 空間上に相異なる 4 点 O，A，B，C があり，線分 OA，OB，OC は互いに直交している．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2010) 4

(1) 4 点 O，A，B，C からの距離が全て等しくなる点がただ一つ存在する．この点を G とする．線分 OA の中点を M とする．$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{MG}$ が直交することを用いて

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|^2$$

となることを示せ．ただし，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OG}$ の内[illegible]る．

(2) (1) を用いて

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+$$

が成り立つことを示せ．

(3) O(0, 0, 0)，P(1, $\sqrt{3}$, 0)，Q$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\right.$ [illegible] $-\frac{}{4}$, $\frac{}{2}$ [illegible]

このとき線分 OP，OQ，OR は[illegible]交し[illegible]，[illegible]点 O，P，Q，R を通る球面の半径[illegible]．

基本 15.13 原点[illegible]とする座標空間に，3 点 A(1, [illegible] B(0, [illegible], 1, 3) がある．この[illegible]の問いに答えよ．　[illegible]大[illegible]) 1

(1) △A[illegible]おい[illegible]は $\frac{\pi}{2}$ より大きいことを[illegible]

(2) [illegible]から直[illegible]い[illegible]た垂線と直線 BC と[illegible]点を H とする．

[illegible]H の[illegible]求めよ．

[illegible]△O[illegible]面積を[illegible]．

[illegible]座標[illegible]に 4 点[illegible]0, 0)，B(0, [illegible] C(0, 2, 0)，D(3, 2, 0) を考[illegible]CD[illegible]P(x, [illegible]て，三角形[illegible]の面積を S とするとき，次の問い[illegible]　(熊大 [文]2005) 3

(1) ∠[illegible]き，$\cos\theta$[illegible]

(2) S の最[illegible]

標準 15.15 3 点 O(0, 0[illegible]A(3, 0, 0)，B(1, 2, 1) がある．　(琉球大学 2010) 2

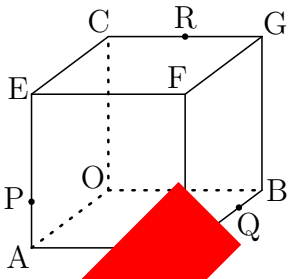
(1) z 軸上の点 C(0, 0[illegible]ら直線 AB 上の点 H におろした垂線を CH とする．このとき，点 H が[illegible]B 上にあるような m の値の範囲を求めよ．

(2) 点 H が線分 AB[illegible]るとき，垂線 CH の長さの最大値，最小値とそのときの H の座標を求めよ．

(3) 三角形 OAB に外接する円の中心 P の座標とその半径 r を求めよ．

見本

標準 15.16 右図のような1辺の長さが1の立方体OADB-CEFGがある．辺AEおよび辺BDを $x : (1-x)$ に内分する点をそれぞれP，Qとする．また辺CGを $t : (1-t)$ に内分する点をRとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，x および t の範囲は $0 < x < 1$，$0 < t < 1$ である．



(長崎大学 2002) 5

(1) △PQRの重心を S とするとき，ベ… $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$ …用いて表せ．

(2) 直線OSが△PQRに垂直となるとき，…せ．

(3) (2)の場合の△PQRの面積を $f(x)$ とする… 小値を求めよ．

(4) $f(x)$ が最小となるとき，四面体OP…

基本 15.17 空間内の点A，Bの座…ぞれ $(0,$ …，$(0$ …原点をOとする．このとき，次の各問いに…よ．(…2005) 6

(1) 点 $\mathrm{P}(x,$ … Bと異なる点で，ベクトル …ベ… …直となるよ… …する．このとき，x，y，z … …条件を…．

(2) P… …の条件… …き，直線APと xy 平… …交点を $\mathrm{Q}(u,\ v,\ 0)$ とする．… …と x，…と)… …せ．

…のと… y，… …いて表せ．

(4) P… …の条件… …し，… …クトル… …がベクトル $\vec{a} = (1,\ 1,\ 1)$ に垂直… …ような… …とき，… y 平面上の… …うな図形をえがくかを答えよ．

15.3 …線ベ…ル

□□ **15.18** … $\left(\sqrt{2}, \ldots, 0\right)$，$\vec{b} = \left(\dfrac{\ }{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ．

(福岡教育大学 2002) 5

基本 15.19 座標空間内… …点A(1, 1, 1)，B(3, 0, 1)，C(1, 2, 0)を含む平面を H とする．以下の問いに…よ．

(熊大 [文]2015) 2

(1) 点P(−3, 2, 2)は H 上の点であることを示せ．

(2) 点Q(1, −3, −4)を通る直線が H と直交するとき，その交点の座標を求めよ．

印刷本

基本 15.20 空間内に 3 点 A(1, 2, 3)，B(2, −1, 4)，P がある．原点を O とするとき，次の問いに答えよ．（福岡教育大学 2004）6

(1) ∠AOB = θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) 線分 OA と線分 OB を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ．

(3) $\overrightarrow{OP}$ がそれぞれ $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ に垂直で，$|\overrightarrow{OP}| = S$ のとき，P の座標を求めよ．

基本 15.21 空間内に 4 点 A(0, 0, 0)，B(2, 1, 1)，C(−2, 2, −[illegible], 2, −4) がある．[illegible]大学 2006）3

(1) ∠BAC = θ とおくとき，$\cos\theta$ の値と[illegible]の面[illegible]なさい．

(2) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直なベクトルを 1[illegible]

(3) 点 D から，3 点 A，B，C を含む平面に垂[illegible]
るとき，線分 DE の長さを求めなさい[illegible]

(4) 四面体 ABCD の体積を求めなさい[illegible]

標準 15.22 $A_1(1, 1, 1)$，$A_2(2, 3$[illegible]$(2, 2, 2)$[illegible]$4, 2$[illegible]4 点とし，O を原点とするとき，次の問い[illegible]えよ．[illegible]2009）7

(1) A_3 と A_4[illegible]B とするとき，△A_1A_2B の[illegible]求め[illegible]

(2) 2 つの[illegible]B，および $A_1A_2A_4B$ の体[illegible]求めよ[illegible]

(3)
$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$$[illegible])

を位[illegible]トルに[illegible]る．$\overrightarrow{A_1P}$ を $\overrightarrow{A_1A_2}$ と $\overrightarrow{A_1B}$ を用いて表し，4 点 A[illegible]，B，[illegible]一平面[illegible]ること

[illegible]と A_2[illegible]を C と[illegible]き，4 点 A_3，[illegible]，P は同一平面上にあること[illegible]せ

標準 1[illegible]間に[illegible]，3 点 A([illegible]2, 0)，C(0, 1, 5) を頂点とする三角形 ABC[illegible]いに答え[illegible]（長崎大学 2016）2

(1) 線分 AB，[illegible]C，C[illegible]さを求めよ．

(2) 三角形 ABC の面積[illegible]求めよ．

(3) 原点 O(0, 0, 0) か[illegible]面 ABC に垂線を下し，平面 ABC との交点を H とする．$\overrightarrow{AH} = \ell\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{A}$[illegible]くとき，実数 ℓ，m の値を求めよ．

(4) 直線 AH と直線[illegible]の交点を M とする．$\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AM}$ とおくとき，実数 k の値と三角形 HBC の面積 T を求めよ．

(5) 原点 O を頂点，四角形 ABHC を底面とする四角錐(すい)O-ABHC の体積 V を求めよ．

見本

標準 15.24 a, b, c を正の定数とし，3 点 A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ の定める平面を α とする．また，原点を O とし，平面 α に垂直な単位ベクトルを $\vec{n} = (n_1,\ n_2,\ n_3)$ とする．ただし，$n_1 > 0$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(佐賀大学 2015) 8

(1) $\vec{n}$ を求めよ．

(2) 平面 α 上に点 H があり，直線 OH は α に垂直であるとする．$\overrightarrow{\text{OH}}$ および $|\overrightarrow{\text{OH}}|$ を求めよ．

(3) △ABC の面積を S，△OBC の面積を S_1 とする．四面体 OABC の体積を考えることにより，$S_1 = n_1 S$ であること

応用 15.25 空間内に四面体 OABC があり，∠A[illegible] あるとする．辺 OA，OB，OC の長さを，それ[illegible] 心を G とする．

(九大 [文]2003) 3

(1) ∠OGA，∠OGB，∠OGC がすべ[illegible] ある[illegible] a, b, [illegible] 式で表せ．

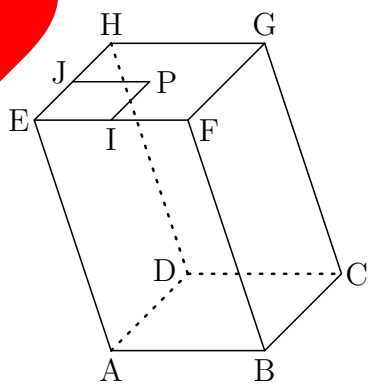
(2) 線分 BC を 1[illegible]2 に内分する点を D とする．点 P[illegible] 線 AD [illegible] の点を動き，点 Q[illegible] 形 APQ の重心が点 G になるよ[illegible] 動く[illegible] 分 OQ の長さ[illegible] めよ．

応用 [illegible] 空間内[illegible] て次の問いに答えよ．

(九大 [理]2002) 4

△ABC [illegible] 積は $\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\text{AB}}|^2|\overrightarrow{\text{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}})^2}$ に等しいことを示せ．ここで，$\overrightarrow{\text{AB}}$ [illegible] ベク[illegible] B とベ[illegible] $\overrightarrow{\text{AC}}$ と[illegible] 積を表す．必要ならば，二つのベ[illegible] のな[illegible] コサ[illegible] 積の関係式[illegible] てよい．

[illegible] 図の[illegible] 面体[illegible] H を考え[illegible] $= |\overrightarrow{\text{AI}}$[illegible], [illegible] と[illegible] ∠[illegible] ∠P[illegible] $\frac{\pi}{2}$, ∠EA[illegible] る．[illegible] $< \pi$ なる[illegible] する．面 E[illegible] 上に[illegible] とり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を[illegible]，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下[illegible] $= |\overrightarrow{\text{EI}}|$, $y = |\overrightarrow{\text{EJ}}|$ とするとき，△A[illegible] 面積を θ, x, y を用いて表せ．



(平行六面体 ABCD-EFGH)

(3) (2) で点 P が面 E[illegible] H 上を動くとき，△ACP の面積の最小値を求めよ．

印刷本

15.4　空間図形

15.4.1　四面体

基本 15.27 四面体 OABC を考える．辺 OA を 1 : 1 に内分する点を P とする．また辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q として，辺 OC を 3 : 1 に内分する点を R とする．さらに三角形 ABC の重心を G とする．3 点 P，Q，R を通る平面と線分 OG の交点を K とする．線分 OK と KG の長さの比を求めよ．　(大学 2016) 4

基本 15.28 四面体 OABC がある．辺 AC を 2 に内分 D とし，線分 DB を 1 : 2 に内分する点を E とする．また，線 直線と辺 AB の交点を F とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする に答えよ．

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を使って，$\overrightarrow{OD}$ および $\overrightarrow{OE}$ を表

(2) CE : EF を最も簡単な整数比で表せ

(3) 四面体 OABC の体積を V とする 面体 V を 表せ．

基本 15.29 四面体 OABC の 3 辺 OA AB，BC 上に れぞれ R がある．OP = PA，AQ B とし，点 R は点 B と異なる する 心を H とするとき， 答えよ．ただし，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$， C

(1) $\overrightarrow{OH}$ $\vec{a}$，$\vec{b}$， いて表せ．　(宮崎大学 2015) 8

(2) C の重 G 3 点 O，G，H が同 線上にあるとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{b}$， を用い .

基本 15 面体 において 辺 OA を D，辺 OB を 1 : 2 に内分する OC を に内分 点を F とする． ，△ABC の重心を G とする．こ $\overrightarrow{OP}$ $\overrightarrow{OC}$ = き，次の問 えよ．
(福岡教育大学 2007) 6

(1) 3 点 る平面を 直線 OG と平面 α の交点を P とするとき， 用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{DP}$ を $\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{DF}$ を 表せ．

(3) △PDE，△PEF， の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とするとき，$S_1 : S_2 : S_3$ を最も な整数の比で表せ．

見本

基本 15.31 四面体 ABCD がある．点 P が $10\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} + 3\overrightarrow{PD}$ を満たしているとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2004) 7

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ．

(2) 直線 AP と三角形 BCD との交点を Q としたとき，次の式を満たす実数 s，t，k を求めよ．

$$\overrightarrow{BQ} = s\overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{BD}, \quad \overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP}$$

(3) 四面体 ABCD と四面体 PBCD の体積の比を求めよ．

基本 15.32 四面体 OABC において，OA あ さらに，BC を 1 : 2 に内分する点を D，AD を 3 : 1 に内分する点 を，OE⊥AC であるとする．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$，$\overrightarrow{OE} = \vec{e}$ とお

(1) $\vec{e}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ． (宮崎大学

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c}$ であることを示せ．ただ $x\cdot$ $\vec{y}$ の内 表す．

(3) OA : OB = 2 : 1，OE⊥BC で ，∠AO 求め

基本 15.33 四面 OABC において，OA = 2，OB OC OB であるとする．点 AB 上に，OD⊥AB となる $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OD} = \vec{d}$，と 次の各問に答えよ．た $\vec{a}$ ベクトル $\vec{b}$ の内積を表 (宮崎大学 2004) 6

($\vec{a}$，$\vec{b}$ 用いて

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ す角が $\vec{a}$ $\vec{d}$ のなす角が 60° であるとき，$|\vec{c}|^2$ の値を求め

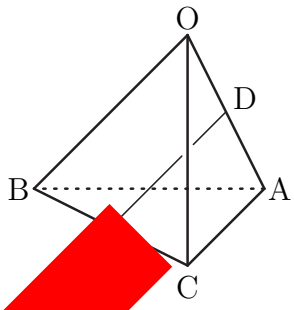
34 四 OABC OB = OC ∠AOB = ∠BOC = ∠COA = $\frac{\pi}{3}$ と の重 ，を 1 : 2 する点を P，辺 OA の中点を Q とし，2 P，交点を R と $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき，次の各問に (宮崎大学 2007) 4

(1) $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$， を用い .

(2) $\overrightarrow{BG}\perp\overrightarrow{CR}$ であると A の長さを求めよ．さらに，CR の長さを求めよ．

見本

基本 15.35　正四面体は，4 つの面が全て合同な正三角形からなる四面体である．右の図のような 1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える．OA，BC の中点をそれぞれ D，E とする．



$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}$$

とおく．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2011) 3

(1) $\vec{d}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2) t を実数とし，F，G を $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=t\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}}$ [illegible] $t)\vec{d}$ [illegible] 点とする．$\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ の内 [illegible] よ．

(3) E は線分 FG の中点であることを示せ．

(4) 四角形 BFCG の面積の最小値と，その [illegible]

基本 15.36　1 辺の長さが 1 である正四 [illegible] BC [illegible] A の中 [illegible]．辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q，辺 O [illegible] に内分 [illegible] 点を [illegible] 問いに答えよ．

[illegible] 2015) 2

(1) 線分 PQ の [illegible] と線分 PR の長さを求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と [illegible] $\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ．

(3) 三 [illegible] QR の [illegible] めよ．

基本 [illegible]．原点 [illegible] す [illegible] 間の 4 点 A($\sqrt{3}$, 3 [illegible] 3($-\sqrt{3}$, 3, 0)，C(0, 2, 2)，[illegible] 0) お [illegible] 平面 [illegible] ABC 上にそれぞれ点 Q，R，S をとる．ベク [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ が [illegible] AC, [illegible] ABC にそれぞれ直交するとき，次の問いに [illegible] よ．

(熊大 [理]2006) 2

[illegible] クトル [illegible] 成分 [illegible]

(2) [illegible] S を成 [illegible] せ [illegible]

(3) △ [illegible] 面積 [illegible] よ．

基本 15.38 [illegible] において，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=\mathrm{B}=3,\ \angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$$

とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$ [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{C}}=\vec{c}$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値 [illegible] よ．　(宮崎大学 2012) 3

(2) 平面 ABC 上の [illegible]，直線 OD が平面 ABC に垂直に交わるようにとる．$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくとき，p と q の値を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

見本

基本 15.39 四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であり，△OABの面積と△OACの面積が等しいとする．このとき，次の問いに答えよ． (熊大 [文]2009) 4

(1) OB = OC を示せ．

(2) △ABC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{OG}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ．

標準 15.40 四面体 OABC の 6 つの辺の長さを

$$OA = \sqrt{10},\ OB = \sqrt{5},\ OC = \sqrt{6},\ AB = \sqrt{5},\ AC = \quad ,\ BC = \sqrt{5}$$

とする．以下の問いに答えよ． (熊大 [文]2007) 2

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ の値をそ

(2) $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ とおくとき，$\overrightarrow{CH}$ を
を示せ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ

標準 15.41 四面体OABCにおいて，OA = OB = C ，AB A = 1 と
する．また，辺 に点Pを AP⊥OB となるよう ，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$
をそれぞれ ．このとき，次の各問に答 (熊大) 5

(1) ベ OP を 表せ．

(C の 求め

平面 に点 が平面 OAC に垂直となるようにとる．このと
き トル $\vec{a}$，$\vec{c}$ を 表せ し，平面 OAC は 3 点 O，A，C
平面

標 の長さ OABC ．$0 < s < \frac{1}{2}$ に対し OA を
$s : (1-$ 分す P とし， し OC を $t : (1-t)$ に内分する点を
Q とする． $\vec{b}$，$\overrightarrow{OC} =$ き，以下の問いに答えよ．
(熊大 [理]2016) 1

(1) $\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PQ}$ をそれぞ $\vec{b}$，$\vec{c}$，s，t を用いて表せ．

(2) $\angle BPQ = 90^\circ$ であ ，t を s を用いて表せ．

(3) (2) の条件の下で 最大値とそのときの s の値を求めよ．

(4) (3) で求めた s して，PQ^2 を求めよ．

白本

標準 15.43 四面体 OABC の面はすべて合同であり，OA = 5，OB = 8，AB = 7 である．$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$，$\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ として，次に答えよ．　(九工大 [工]2016) 1

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) 3 点 O，A，B の定める平面を α とし，α 上の点 H を直線 CH と α が垂直になるように選ぶ．$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) (2) の点 H に対して，線分 CH の長さを求めよ．

(4) 四面体 OABC の体積 V_1 を求めよ．また，辺 OC の中点 [illegible]，さらに辺 OB 上に点 E を AE + ED が最小となる[illegible]る．この[illegible]四面体 OAED の体積 V_2 を求めよ．

標準 15.44 四面体 OABC は OA = OB = 2，O[illegible] たしている．線分 AB を 1 : 2 に内分する点を M[illegible] に内分する点を H とする．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB}$ [illegible] $= \theta$ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ として，次に答えよ．　[illegible]工大 [工[illegible]) 1

(1) ベクトル $\overrightarrow{OH}$，$\overrightarrow{CH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，[illegible]用いて表[illegible]

(2) $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{OM}$ の[illegible]き，s を θ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{C}$[illegible] $\sqrt{17}$ とするとき，$\cos\theta$ と s [illegible]

(4) [illegible]M，[illegible]するとき，四面体 O[illegible]体積 V を求めよ．

15.45 [illegible]体 OA[illegible] O[illegible] $\mathrm{B} = \sqrt{15}$，OC = 2，$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{AOC} =$ [illegible]満[illegible]いる[illegible] OA [illegible] と $s : 1 - s$ [illegible] $s < 1$) に内分する点をそれぞ[illegible] とし[illegible] Q の[illegible]する．$\overrightarrow{OA}$ [illegible] $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$，$\angle\mathrm{BOC} =$ θ (0[illegible]して，[illegible]え　(九工大 [工]2012) 2

(1) ベ[illegible] $\overrightarrow{OG}$ [illegible] $\vec{c}$ と s を[illegible]

(2) ベクト[illegible]よ[illegible]BC に垂直であるとする．

(a) s と $\cos\theta$ の値[illegible]よ．

(b) 線分 OG と BC[illegible]さ，および $\angle\mathrm{BAC}$ を求めよ．

(c) 四面体 OABC[illegible]積 V を求めよ．

見本

標準 15.46 t を $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす数とし，空間内の 4 点 $\mathrm{A}(t,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ t,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ t)$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{9}t,\ \dfrac{4}{9}t,\ \dfrac{4}{9}t\right)$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(九大 [文]2007) 2

(1) △ABC は正三角形であることを示し，その面積 $S(t)$ を求めよ．

(2) △ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{PG}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直であることを示せ．

(3) 四面体 PABC の体積 $V(t)$ を求めよ．また $V(t)$ の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ．

標準 15.47 四面体 OABC は，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$，$\angle\mathrm{OCA} = \angle\mathrm{OCB} = 90^\circ$ をみたしている．点 C から 3 点 O，A，B を通る平面に下ろした垂線とその平面との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\angle$

(九

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{c}$ と $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．また $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}$ とおくとき，s，t を θ を用いて表せ．また，線分 CH の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|$ を θ を用いて表せ．

(3) △AOB と △ABC の面積をそれぞれ S と T とするとき，S を θ と ∠ACB

標準 1 頂点が の長さが 1 である正 O-ABCD がある．辺 OA，CO $1-t$ < 1，する点をそれぞれ とし，辺 OD を $k : 1-k$ < 1) する点 また，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．次 えよ

(九工大 [工]2013) 1

と $\vec{a}$，$\vec{}$ 用い また，内積 値を求めよ．

(2) 線 P を k， せ．

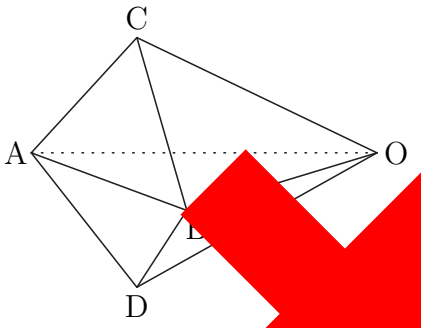
(3) 点 P の定め とする．

(i) 表せ．

(ii) t の 変化 き，k の最大値を求めよ．また，k が最大値をとるときの四角形 の面積 S を求めよ．

印刷不可

標準 15.49 四面体 OABC において，三角形 ABC は 1 辺の長さが 1 の正三角形であり，OA = OB = OC = 2 とする．また，点 C を通り平面 OAB に垂直な直線上に点 D があり，線分 CD の中点 H は平面 OAB に含まれるとする．すなわち，点 D は平面 OAB に関して，点 C と対称な点である．



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおいて，次に答

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\overrightarrow{BC}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．また，$\overrightarrow{OD}$ [illegible] $\vec{c}$ で表

(3) 直線 BH と直線 OA の交点を P [illegible] る．$\overrightarrow{BP}$ を [illegible] 表し，[illegible] めよ．さらに，OP [illegible] BP の長さを求めよ．

(4) (3) で定 [illegible] 対して，四角形 BCPD の面 [illegible] また [illegible] 錐(すい) O-BCP [illegible] 積 [illegible] よ．

応用 空間 [illegible] を固定し，O に関 [illegible] 置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P [illegible] $\vec{p}$) で表 [illegible] 点 O [illegible] $\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする四面体 OABC において，OA [illegible] BC を s [illegible] $-s$ [illegible] 1) に内分する点をそれぞれ D，E，F とする [illegible] 点 A [illegible] の定 [illegible] 面を α と [illegible] $\vec{a}-\frac{9}{16}\vec{b}+\frac{9}{16}\vec{c}$ を位置ベクト [illegible] 平面 [illegible] 点を H [illegible]．OA = A [illegible] OB = $3\sqrt{2}$，OC = BC = 4，AC [illegible] 次に答 (九工大 [工]2014) 1

(1) ベ [illegible] $\overrightarrow{OH}$ [illegible] $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ [illegible] いて表せ．また，内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2) 線分 O [illegible] よ．

(3) 3 点 D，E，F の定 [illegible] 平面が点 H を通るときの s の値を求めよ．

(4) s を (3) で求めた値 [illegible] とき，四面体 OAFC の体積 V を求めよ．

応用 15.51 a, bを正の数とし，空間内の3点A$(a, -a, b)$，B$(-a, a, b)$，C$(a, a, -b)$を考える．A，B，Cを通る平面をα，原点Oを中心としA，B，Cを通る球面をSとおく．このとき，次の問いに答えよ． (九大 [理]2007) 3

(1) 線分ABの中点をDとするとき，$\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AB}$および$\overrightarrow{DO} \perp \overrightarrow{AB}$であることを示せ．また△ABCの面積を求めよ．

(2) ベクトル$\overrightarrow{DC}$と$\overrightarrow{DO}$のなす角をθとするとき$\sin\theta$を求めよ．また，平面αに垂直で原点Oを通る直線と平面αとの交点をHとするとき，OHの長さを求めよ．

(3) 点Pが球面S上を動くとき，四面体[illegible]の体積の最大値を求めよ．ただし，Pは平面α上にはないものとする．

応用 15.52 一辺の長さが1の正方形OABC[illegible]POABCがある．ただし，点Pは内積に関[illegible]および$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = -\frac{1}{2}$をみたす．辺APを2 : 1に内分する点[illegible]，辺[illegible]とするように，点Pと直線BC上の点Qを通る直線[illegible]，平面[illegible]に垂[illegible]このとき，長さの比BQ : QC，および線[illegible]Pの長さを[illegible]． 2013) 2

応用 15.53 [illegible]が$\sqrt{2}$の正四面体OABCに[illegible]，辺BCを1 : 2[illegible]N，辺OCの中点をLとす[illegible]$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$[illegible]$= \overrightarrow{OC}$とおく[illegible]の問い[illegible] (熊大 [医]2012) 4

([illegible]L，M[illegible]通る[illegible]線OAの交点を[illegible]る．$\overrightarrow{OD}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ[illegible]

(2) 辺[illegible]中点[illegible]直線[illegible]の点Pを[illegible]Pを引く．$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用い[illegible]表せ．

応用[illegible] [illegible]体OA[illegible]A = 1[illegible]OC = $\sqrt{3}$，$\angle AOB = \angle AOC = 90°$，[illegible]$\alpha$ $(0° < \alpha < 90°)$[illegible]の点Pと辺AB上の点Rを，線分PRの長[illegible]うな位置に[illegible]た，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$とおく．次の問い[illegible]よ． (長大 [医]2009) 6

(1) $\cos\alpha = x$とし，線[illegible]の長さをxの関数として表せ．

(2) 線分OAの中点を[illegible]線分BCを5 : 9に内分する点をNとする．線分PRと線分MNが交わ[illegible]にxの値を定めよ．

見本

応用 15.55　空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$．$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，OA の中点を P とする．以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2014) 1

(1) $0<t<1$ に対し，BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．また，PM＋MQ が最小となる OB 上の点を M とし，PN＋NQ が最小となる OC 上の点を N とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) △QMN の面積を t を用いて表せ．

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△QMN の最大値を求

応用 15.56　O を原点とする空間内の 2 点 A(　　1)，P(　　2) に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点　　を D とする．以下の問いに答えよ．

(1) 実数 k に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-$　　る点　　まれるとき，k の値の範囲を求め

(2) 点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の　　D に含　　と　　なる C の座標を求めよ．

15.4.2　　大

基本 1　　四角形　　面とし O を頂点とす　　錐 O-ABCD において，底面の　　ABC　　AD　　みたしている．　　の中点を M とし，3 点 A，　　通る　　辺 OC　　を N とする．次に，四角形 ABNM の対角線の　　を P　　直線　　面　　と交わる　　を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=$　　いて　　答えよ　　(九工大 [工]2008) 2

(1)　　M を　　を用

(2)　　用い

(3) OP　　表せ．

(4) 線分の　　Q を求めよ．

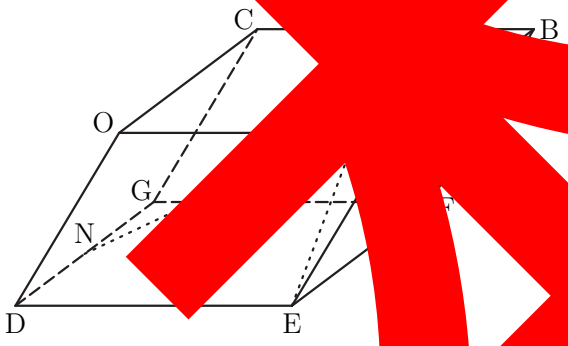
見本

基本 15.58 平行六面体 OABC-DEFG において，辺 AB を 3 : 1 の比に内分する点を L とし，辺 BC，DG の中点をそれぞれ M，N とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とおくとき，以下の問に答えよ． (佐賀大学 2007) 1

(1) 線分 EM を $t:(1-t)$ の比に分ける点を I とするとき，$\overrightarrow{OI}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(2) 線分 LN を $s:(1-s)$ の比に分ける点を J とするとき，$\overrightarrow{OJ}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(3) 線分 EM と線分 LN とが交わることを[illegible]，その交点[illegible]るとき，比 EH : HM を求めよ．



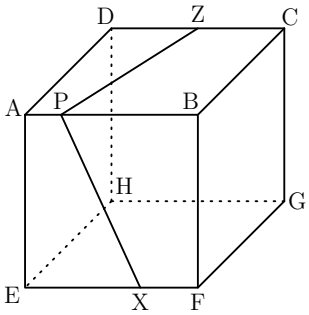
基本 15.59 [illegible]の長さが 1 の四角錐がある．[illegible]点[illegible]面を正方形 AB[illegible]し，[illegible]，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とす[illegible]き，次の各[illegible]に答えよ． (宮崎大学 2010) 4

([illegible]を $\vec{a}$[illegible]を用い[illegible]

(2) 内積 $\vec{c}$，$\vec{c}\cdot$[illegible]よ．

(3) 点[illegible]，B[illegible]四面[illegible]点となる[illegible]すべての点 P について，$\overrightarrow{OP}$ を[illegible]，$\vec{c}$ を[illegible]表せ．

基本 [illegible]間内に[illegible]よう[illegible]長[illegible]1 である[illegible]EF を 3 : 1[illegible]点を X，辺[illegible]する．さらに辺 AB を $t:1-t$ $(0<$[illegible]$<1)$[illegible]する点を P とする．3 点 P，X，Z を通る平[illegible]線 GH との交点を Y とおく．$\overrightarrow{AE}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}$[illegible]$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ とするとき，次の各問に答えよ[illegible] (宮崎大学 2008) 4



(1) $\overrightarrow{PY}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$[illegible]t を用いて表せ．

(2) 点 Y が辺 GH 上にあるとき，t の値の範囲を求めよ．

(3) (2) において四角形 PXYZ がひし形になるとき，t の値を求めよ．

白本

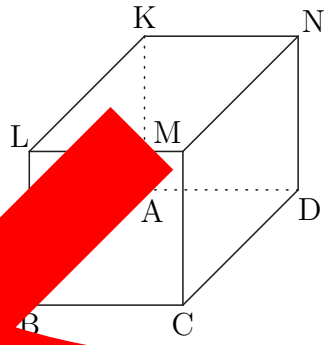
基本 15.61　図の長方体 ABCD-KLMN において，辺 AB の長さは 2，辺 AD の長さは $\sqrt{2}$ である．三角形 CLN の重心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\vec{c}$ とおく．次に答えよ．　(九工大 [工]2001) 2

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) ∠AGC が直角となるように辺 AK の長さを定めよ．

(4) 辺 AK が (3) で定めた長さのとき，三角形 CLN の面積を求めよ．



基本 15.62　一辺の長さが 1 の正方形 OABC を
みたす点 P を頂点とする四角錐 POABC が
辺 CP の中点を E，辺 BC を $t:(1-t)$ に
このとき，以下の
問いに答えよ．
大 [ ]) 1

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用い
.

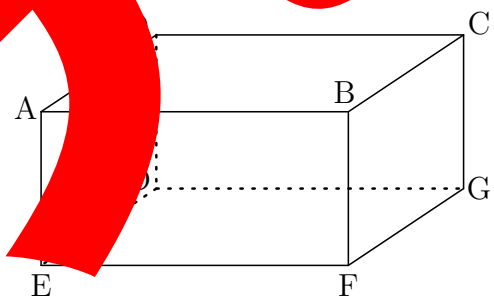
(2) ベクトル
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と t を用いて

(3) 内積
求めよ．

(4) 直
が平面
垂直であるとき，t の値
線分 OP の長さを求めよ．

標
3　長
ABC
において，OA =
1，OC = 2 とし，辺 EF
を M
．ま
$(0 \leqq t \leqq 1)$ とし，点 P から線分 CM におろ
た垂線
CM
点を
る．$\vec{a}$
$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくとき，
に答え
(熊大 [文]2013) 3

C
M
を
て表せ
(2)
$\vec{c}$，$\vec{d}$
いて
(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}$
値を求め



印刷用

標準 15.64 1辺の長さが2の立方体 ABCD-EFGH がある．下の図1にように，2辺BC，CD上に，BS = CT = x $(0 \leqq x \leqq 2)$ を満たす点S，Tをとる．このとき，三角形ESTの面積の最大値と最小値を求めたい．以下の問いに答えよ． (長崎大学 2016) 4

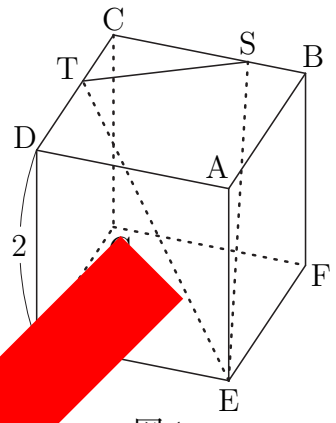


図1

(1) 右の図2を参考にして，三角形OPQにおい
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{q}$ とおくとき，三角形O
の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

と表される
を証明せよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \vec{a}$
$\overrightarrow{\mathrm{EA}} = \vec{c}$ とおく．立方体の1
あ
注意
して
E
$\vec{c}$ および x を用いて表
た，$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2$
を，そ
の式
さらに，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ET}}$
$\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ は，x によらない
の値
こと
上の(
用し
の面積 $f(x)$ を求めよ．

4) 0
2 の範
$f(x)$
値と最
求めよ．また，そのときの x の
答えよ

見本

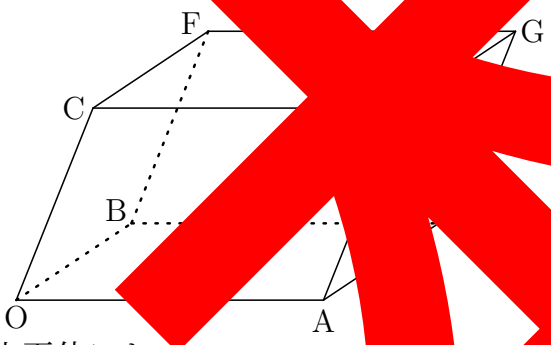
標準 15.65 平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を 2 : 3 に内分する点を N，辺 DG を 1 : 2 に内分する点を L とする．また，辺 OC を k : $1-k$ $(0<k<1)$ に内分する点を K とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(熊大 [理]2011) 2

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

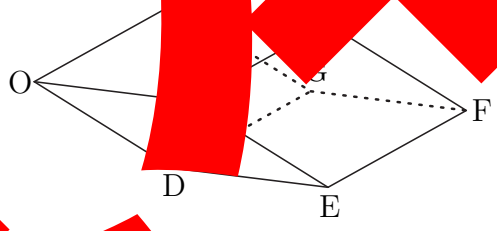
(2) 3 点 M，N，K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ．

(3) 3 点 M，N，K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ．



標準 15.66 右図の平行六面体において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とし，△ACF の重心を H とする．さらに四面体 OACF は 1 辺の長さ 1 の正四面体とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(宮 20)



(1) 点 H は △ACF の重心であることを示し，線分 OH と HF の比 OH : HF を求めよ．

(2) $\vec{a}\cdot\vec{d}$ の値を求めよ．

(3) △ACF の面積を求めよ．

見本

応用 15.67 1辺の長さ $\sqrt{2}a$ の正方形の折り紙がある．正方形 ABCD の中心を点 O とし，AO 上に点 E をとり，$EO = b$ とする．図1の斜線部分を取り去り，OB，OE に沿って折り，OC と OD を貼り合わせ，図2のように三角錐 O-BCE を作って平面に置いた．O より三角形 BCE に下ろした垂線と三角形 BCE との交点を H とするとき，次の問いに答えよ． (長大 [医]2008) 7

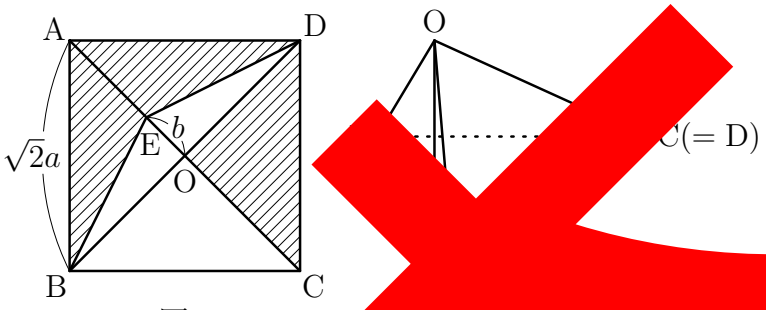


図1

(1) $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OE}$ を用いて表

(2) 三角形 BCE の外心を点 P とし $= \frac{a}{4}$ のと H の長 て表せ．

15.4.3 直 ・球面

基本 15 点 A($\vec{a}$) C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$) を頂点する 本 ABCD について，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ 問いに答えよ． (鹿児島大学 2007) 4

△ABC G の $\vec{g}$ と，△BCD の重心 H の位置ベクトル $\vec{h}$ を求め

，G 直線 l 式を求めよ A，H を通る直線 l_2 の方程式 求め

(3) 線 l_1，点を を三 の交点の位置ベクトルを求めよ．

基本 15.6 とする半径 面 S 上に3点 A，B，C があり，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 4, \quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 5, \quad \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = 6$$

をみたしている．三角形 の重心を G とし，直線 OG と球面 S の交点のうち G から遠い方を P とする (大分大学 2014) 2

(1) $|\overrightarrow{OA}|$，$|\overrightarrow{OG}|$ の めなさい．

(2) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表しなさい．

(3) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ のなす角を求めなさい．

印刷本

標準 15.70　空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(0,\ 2,\ 3),\ \mathrm{B}(1,\ 0,\ 3),\ \mathrm{C}(1,\ 2,\ 0)$$

を考える．このとき，以下の問いに答えよ．　(九大 [理]2011) 4

(1) 4 点 O，A，B，C を通る球面の中心 D の座標を求めよ．

(2) 3 点 A，B，C を通る平面に点 D から垂線を引き，交点を F とする．線分 DF の長さを求めよ．

(3) 四面体 ABCD の体積を求めよ．

応用 15.71　座標空間内の三角柱

$$0 \leqq x \leqq 1,\quad 0 \leqq y \leqq 1,\quad$$

を考え，その xy 平面内の面を S，xz 平面内の面を T とする．点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を S 内に，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また点 $(1,\ 1,\ 1)$ と点 A，原点 O とは異なるとする．　(九大 [理]2004) 4

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め，ベクトルとベクトルの内積の絶対値を求めよ．

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ．ただし，点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．

(3) 点 A が S 内を，点 B が T 内を動くとする．このとき，四面体 OABC の体積の最大値および最小値と，そのときの点 A，B の位置をすべて求めよ．

応用 15.72　空間ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について次の問いに答えよ．ただし，h と k は実数とする．　(九大 [文]2006) 3

(1) $\vec{a}$ と垂直なすべてのベクトル $\vec{b}$ に対して

$$|\vec{b}| \leqq |h\vec{a} + \vec{b}|$$

が成り立つような h を求めよ．ただし，$\vec{0}$ はすべてのベクトルと垂直であるとする．

(2) $h\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$ のいずれとも垂直であるとき，すべての実数 x，y に対して

$$|x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}| \geqq |h\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}|$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\vec{a} = (1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b} = (1,\ 4,\ -2)$，$\vec{c} = (-3,\ -6,\ 6)$ とするとき，$|x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}|$ の最小値を与える実数 x，y と，そのときの最小値を求めよ．

見本

応用 15.73 原点をOとし，空間内に3点A(4, 0, 0)，B(1, 2, 0)，C(2, 1, 2)をとる．線分BCを$t : (1-t)$ $(0 < t < 1)$に内分する点をPとおく．このとき，以下の問いに答えよ． (熊大 [医]2010) 1

(1) △OAPの面積を最小にするtの値を求めよ．

(2) Cを通り，3点O，A，Pを通る平面に垂直な直線とxy平面との交点をDとする．Dが△OABの内部にあるとき，tの範囲を求めよ．

見本

15.5　問題研究

15.5.1　ベクトル積 (外積)

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と[illegible] $\vec{a}\times\vec{b}$ で表す．

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b[illegible]-a_1b_3,\ a_1b[illegible])}$$

であるから，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．[illegible]その大[illegible]ついて

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1[illegible]b_1)^2\\&=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+[illegible]\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

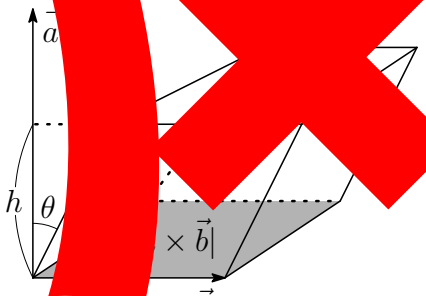
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ [illegible]行四[illegible]い

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ [illegible]と

$$(\vec{a}\times\vec{b})[illegible]\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

絶対値をと[illegible]

$$[illegible]\times\vec{b})\cdot\vec{c}[illegible]\theta|$$



[illegible]$\vec{c}$ の張[illegible]角六面[illegible]$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，[illegible]の高さ[illegible]るか[illegible]の平行[illegible]体の体積[illegible]

$$[illegible]=|(\vec{a}\times\vec{b})$$

O[illegible]$\overrightarrow{\text{OC}}$

四面体[illegible]の体[illegible]$\boldsymbol{V}$[illegible]

また，対称[illegible]$\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．

例えば，138 ページの[illegible]（大分大学 2006）の四面体 ABCD の体積 V は

$$\overrightarrow{\text{AB}}\times\overrightarrow{\text{AC}}=(2,\ 1,\ 1)\times(-2,\ 2,-4)=(-6,\ 6,\ 6)$$

$$(\overrightarrow{\text{AB}}\times\overrightarrow{\text{AC}})\cdot\overrightarrow{\text{AD}}=(-6,\ 6,\ 6)\cdot(1,\ 2,-4)=-18$$

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\text{AB}}\times\overrightarrow{\text{AC}})\cdot\overrightarrow{\text{AD}}|=\frac{1}{6}\times18=3$$

注意　ベクトル積 (外積) は，センター試験などでは利用できるが，高校数学の範囲外であるから，筆記試験では $\vec{a}\times\vec{b}$ などの痕跡を残さないようにする．

見本

第 16 章　数列（数学B）

16.1　等差数列・等比数列

□□ **16.1** 次の数列の一般項を求めよ．　(琉球大学 2012) 5

$$1,\ 5,\ 11,\ 19,\ 29,\ \cdots$$

基本 16.2 次の問いに答えよ．　(岡教育大学 2021) 6

(1) 第 1 項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = an^2 + bn$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．ただし，a，b は定数とする．

(2) (1) における数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示し，その公差を求めよ．

基本 16.3 次の問いに答えよ．　(広島大 2021) 11

(1) a を定数とする．2 つの有限数列

$$a,\ b \quad \text{および} \quad b,\ c$$

はいずれも等比数列をなし，

$$a,\ b,\ c$$

は等差数列をなすとする．a，b，c の値を求めよ．

(2) 定数 a に対して数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = a$，$a_{n+2} = a$ の等比数列とし，数列 $\{b_n\}$ は $b_1 = 1$ を満たし，その階差数列が $\{a_n\}$ と等しいとする．このとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 初項を p とする数列 $\{p_n\}$ において，その階差数列が元の数列と等しいとする．このとき，この数列の一般項 p_n を求めよ．

見本

基本 16.4 等差数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = \frac{1}{6}, \qquad \sum_{k=11}^{40} a_k = 250$$

を満たすとする．このとき，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2015) 7

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $a_n \leqq 10$ となる n の最大値 N を求めよ．

(3) (2) で求めた N に対して，和 $\sum_{k=1}^{N} a_k$ [illegible]

基本 16.5 等比数列 3, 6, 12, $\cdots$ を $\{a_n\}$ とし[illegible]
までの和を T_n とする．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい．

(2) T_n を求めなさい．

(3) $\sum_{k=1}^{n} T_k$ を求[illegible]さい．

基本 16.6 [illegible]数列 [illegible] $\cdots$ を $\{a_n\}$，等比数列 [illegible]，[illegible] $\cdots$ を $\{b_n\}$ とする．次の問[illegible]えよ．　(大分大学 2008) 1

[illegible]列 $\{a$[illegible]項か[illegible]での和を求めよ．

[illegible]数列[illegible]の初項[illegible]から n [illegible]和が 300 [illegible]超える最小の n を求めよ．

[illegible]$\{a_n\}$ と[illegible]$\{b_n\}$ と[illegible]に含まれる[illegible]項に取り出してできる数列 $\{c_n\}$ [illegible]一般項[illegible]よ．

基本 [illegible]$\{a_n\}$ [illegible]項 a_1 [illegible]差数列で，数列 $\{b_n\}$ は初項 b_1 から第 n 項[illegible]$^{n+1} - 2$ で[illegible]る．このとき，次の問に答えよ．

(1) b_n を n [illegible]て[illegible]　(宮崎大学 2004) 12

(2) $c_n = b_n - a_n$ とお[illegible]$\geqq 5$ のとき，$c_{n+1} > c_n$ となることを示せ．

(3) $a_n = b_n$ となる n の[illegible]すべて求めよ．

見本

基本 16.8 数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 2$ で，第 3 項 $a_3 = -\dfrac{1}{2}$ である．$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，数列 $\{S_n\}$ は等比数列となった．このとき次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2004) 5

(1) S_n を n の式で表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ．

基本 16.9 △OAB において，OA $= a$，OB $= b$，∠AOB $= \theta$ ．ただし，$a \geqq b$ および $0° < \theta < 90°$ とする．点 B から辺 OA に下ろした垂線の足を A_1 とする．また点 A_1 を通って辺 AB に平行な直線と，辺 OB とする．次に点 B_1 から辺 OA_1 に下ろした垂線の足を A_2 とし，点 A_2 を 平行な直線と，辺 OB_1 との交点を B_2 とする．以下，この操作を

$$\triangle OA_1B_1,\ \triangle OA \quad ,$$

をとる．このとき，次の問いに答え 12) 8

(1) $\triangle OA_nB_n$ は △OAB に相似であることを示せ

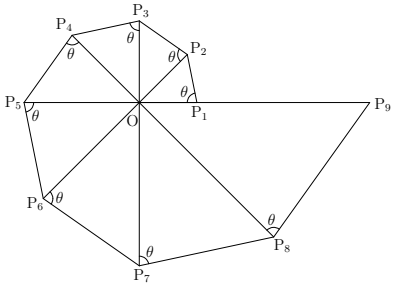
(2) $\dfrac{A_nB_n}{A_{n-1}}$ θ の式で表せ．

(3) △ の面 する．$a = 2$，$b = 1$， のとき，

$S_1 + S_2 + \cdots +$

を で表せ

10 カ の つ の 三 OP , 2, 3, し， であり ついて $_nP_{n+1}$ $= \dfrac{}{2}\Big)$，$\angle P_nOP_{n+1}$ のとき，次 問に答えよ． (宮崎大学 2005) 1



(1) 辺 OP_2 の長さを θ いて表せ．

(2) 辺 OP_9 の長さを いて表せ．

(3) 辺 OP_9 の長さ あるとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．

見本

標準 16.11 座標平面上に原点 O(0, 0) と点 A(3, 0) がある．自然数 n に対して，点 $B_n(0,\ n)$ をとり，$\triangle AB_nO$ の境界を除いた内部に含まれる格子点の個数を a_n とする．ただし，x 座標と y 座標がともに整数の点を格子点という．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2010) 3

(1) $a_1,\ a_2,\ a_3$ の値を求めよ．

(2) 自然数 k に対して，$n = 3k$ とする．このとき，$\triangle AB_nO$ の境界を除いた内部に含まれる格子点のうち，x 座標が 1 であるものの個数を k を用いて表せ．

(3) 自然数 k に対して，a_{3k} を，k を用いて表せ．

(4) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする．自然数 m に対して，S_{m^2} を，m を用いて表せ．

標準 16.12 自然数 n について，a_n を $\sqrt{n}$ 以下の最大の整数とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ の値を求めよ．

(2) 自然数 m について，$S = a_1 + \cdots + a_{m^2}$ を m を用いて表せ．

16.2　群数

基本 16.13 自然数の列を，以下のように群に区切り，第 n 群には 2^{n-1} 個の数がある．ただし，n は自然数とする．

$$1 \mid 2,\ 3 \mid 4,\ 5,\ 6,\ 7 \mid 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ \cdots,\ 23 \mid 24\ 27\ 30\ 33\ 36\ \cdots\ 45 \mid 48\ \cdots$$

このとき，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2002) 6

(1) 第 n 群の最後の数を求めよ．

(2) 第 n 群の項の総和を n を用いて表せ．

(3) 第 n 群の項の総和を求めよ．

基本 16.14 第 n 項に m 個ずつ n が並んだ数列

$$1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ \cdots$$

を $\{a_n\}$ とする．　(大分大学 2011) 5

(1) 正の偶数 $2t$ が数列 $\{a_n\}$ の第何項に初めて現れるかを自然数 t を用いて表しなさい．

(2) a_{100} を求めなさい．

(3) a_1 から a_{100} までの和を求めなさい．

見本

基本 16.15 a を定数とする．$a_n = -2n + a$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を次のような群に分け，第 k 群には k 個の項が入るようにする．

$$\underbrace{a_1}_{\text{第 1 群}} \mid \underbrace{a_2,\ a_3}_{\text{第 2 群}} \mid \underbrace{a_4,\ a_5,\ a_6}_{\text{第 3 群}} \mid \underbrace{a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10}}_{\text{第 4 群}} \mid \cdots$$

第 k 群に含まれるすべての項の和を S_k とするとき，次の問いに答えよ．

(1) S_k を求めよ． (福[illegible]大学 2014) 3

(2) $a = 212$ のとき，S_k が最大となる群に[illegible]れる項の[illegible]求めよ．

(3) $a = 92$ のとき，$|S_k| = |S_{k+1}|$ を満た[illegible]

基本 16.16 次の数列について，各問いに答え[illegible]

$$\overbrace{\frac{1}{1},}^{\text{第 1 群}}\ \overbrace{\frac{1}{2},\ \frac{2}{1},}^{\text{第 2 群}}\ \overbrace{\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},}^{\text{第 3 群}}\ \cdots\ \overbrace{\frac{1}{k-1},\ \cdots\ \frac{k}{1},}^{\text{第 } k \text{ 群}}\ \cdots$$

([illegible]2009) 4

(1) $\dfrac{n}{m}$ は第何[illegible]何項か．ただし，m と n は正[illegible]と[illegible]

(2) $\dfrac{n}{m}$ [illegible]先[illegible]数えると何番目の項か．

(3) [illegible]先頭[illegible]番目の項 a を求め[illegible]

[illegible]値が[illegible]項の[illegible]に現れるのは，数列の先頭から数えて何番目か．

基本 16[illegible] 数列

$$1,\ \frac{3}{2^2},\ \frac{1}{[illegible]},\ \frac{7}{2^3},\ \cdots,\ \frac{[illegible]}{2^n},\ \cdots,\ \frac{2^n-1}{2^n}$$

[illegible]が 2^n[illegible]項を[illegible]第[illegible]よぶことにする．次に答えよ．

(1) 第 n[illegible]和を求め[illegible] (九工大 [工]2003) 1

(2) 分子に初[illegible]51[illegible]るのは第何項目か．

(3) 初項から (2) で求[illegible]までの和を求めよ．

(4) 第 2003 項を求め[illegible]

見本

標準 16.18　初項 1，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ と，一般項が $b_n = \left[\dfrac{2n+2}{3}\right]$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ がある．ここで，実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．たとえば，$b_1 = \left[\dfrac{4}{3}\right] = 1$，$b_2 = [2] = 2$，$b_3 = \left[\dfrac{8}{3}\right] = 2$ である．数列 $\{a_n\}$ を次のように，b_1 個，b_2 個，b_3 個，$\cdots$ の群に分け，第 k 群には b_k 個の数が入るようにする．

| a_1 | $a_2,\ a_3$ | $a_4,\ a_5$ | $a_6,\ \cdots$

第 1 群　第 2 群　第 3 群　$\cdots$

第 k 群の最初の数を c_k とする．次に答えよ．　(九工大 [工]2015) 2

(1) 自然数 m に対して，b_{3m-2}，b_{3m-1}，b_{3m} を [illegible] 式で表せ．また，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 $3m$ 項までの和 [illegible]

(2) 自然数 m に対して，c_{3m-2}，c_{3m-1}，[illegible] 多項式で表せ．また，数列 $\{c_k\}$ の初項から第 $3m$ 項まで [illegible] を [illegible]

(3) 1000 は第何群の何番目の数か．

(4) $x \geqq 1$ のとき $\sqrt{x^2+1} < x + \dfrac{1}{2}$ であることを用いて，次の [illegible] 立つことを示せ．ただし，m は自然数とする．

$$\sum_{k=1}^{3m} (\sqrt{c_k} - k) < [illegible]$$

16.3 [illegible] 数列

[illegible] $n \geqq$ [illegible] るような自然数 n に対し

[illegible] $\cdots + n)(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)(2 + 3 + \cdots + n)$

が成り立つ [illegible]　(福岡教育大学 2010) 1

基本 16.20　$a_n = \log_{10}\left(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}\right)$ について，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2003) 6

(1) a_n を求めよ．

(2) $a_1 + a_2 + \cdots +$ [illegible] 求めよ．

見本

基本 16.21 連続する自然数について，以下のような関係がある．

$$\begin{aligned} 1+2&=3 && \cdots ① \\ 4+5+6&=7+8 && \cdots ② \\ 9+10+11+12&=13+14+15 && \cdots ③ \\ &\vdots \end{aligned}$$

n 番目の式を ⓝ とし，その左辺の和を $S(n)$ で表す．このとき[illegible]問に答えよ．

(1) 4 番目の式 ④ と $S(4)$ を求めよ．[illegible]崎大学 2001) 10

(2) n 番目の式 ⓝ を予想し，その等式が[illegible]こと

基本 16.22 下記の一連の等式が成立している[illegible]は自然数)．これについて，次の各問いに答えよ．

(1) ① の等式を証明せよ．

(2) 最下行の右辺の空欄に入る式を[illegible]最下[illegible]式[illegible]つこ[illegible]明せよ．なお，推測する式の中で[illegible]辺と同様[illegible]を用

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+\quad 2) \qquad \cdots ①$$

$$\sum_{k=1}^{n}\quad +2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=1}^{n}\quad +1)(l\quad m) = \boxed{\qquad\qquad}$$

**基本 16.[illegible]数[illegible]て，$f(n)$[illegible]$(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)$ とおく．

(1) k を自然数とする[illegible]等式 (大分大学 2005) 5

$$f(k)\quad -1) = a(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)$$

が成立するよう[illegible]数 a の値を定めなさい．

(2) m が自然数であるとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)$ を $f(m)$ を用いて表しなさい．

見本

基本 16.24 n を自然数とするとき，和

$$S_n = n + (n-1)x + (n-2)x^2 + \cdots x^{n-1}$$

について，次の問いに答えなさい．　(大分大学 2007) 2

(1) $x \neq 1$ のとき，$(1-x)S_n$ を求めなさい．

(2) $x = \dfrac{1}{2}$ のとき，$S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ を求めなさい．

標準 16.25 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項ま[illegible]和 S_n が

$$S_n = n^4 + 6n^3 +$$

で表されるとする．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = 4n(n +$ [illegible] 示しなさい．

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によ[illegible]る数列 [illegible]の和 T_n を n の式で表しなさい．

標準 16.26 自[illegible]対して

$$(a) = \sum_{k=1}^{a} \frac{1}{\sqrt{k+1} +$$

[illegible]．以下[illegible]に答[illegible]　(熊大 [文]2016) 3

(1) 和[illegible]を求め[illegible]

[illegible]が整[illegible]る自然[illegible]小さい順に並[illegible]数列を

$$a_3 [illegible], \cdots$$

とす[illegible]求めよ．

(3) (2) の数[illegible]$\}$[illegible]て，a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を 4 で割った余りは 0 か 3 であることを示せ．

(4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と[illegible]N に対して和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n}$ を求めよ．

印刷本

標準 16.27 以下の問いに答えよ. (佐賀大学 2010) 8

(1) 等式 $2\sin k\theta \sin\dfrac{\theta}{2} = \cos\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\theta$ を示せ.

(2) n が自然数のとき，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$ を求めよ.

標準 16.28 次の各問いに答えよ. (大学 2005) 4

(1) m を正の整数とする．実数の集合 $\{y \mid \leqq y < m^2\}$ る整数の個数を求めよ.

(2) 座標平面において，x 座標と y 座標が整 格子点という．n を正の整数とするとき，集合 A，B を

$$A = \{(x,\ y) \mid 1 \leqq x \leqq \quad x^2\}$$
$$B = \{(x,\ y) \mid 1 \leqq \quad 1 \leqq \quad \}$$

によって定める．集合 A，B る格子点の をそれ .

(3) 正の整数 して，集合 C を

$$\{(x,\ y) \mid 1 \leqq x \leqq n^2,\ 1 \leqq \quad y \quad x\}$$

て定 属する格子点の個 めよ.

6.29 問い だけでなく，必ず証明も記せ.

1) 和 $+\cdots$ n の 表せ. (九大 [文]2010) 4

$+2^2$ $+n^2$ 項式で表せ.

($\cdots+$ 式で表せ

標準 16. $\cdots+n$ ( ) で定められる数列 $\{a_n\}$ において，a_n が 6 の倍 から順に $b_1,\ b_2,\ b_3,\cdots$ とする．次に答えよ.

(1) $b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4$ を求 (九工大 [工]2004) 1

(2) すべての自然数 n て，$a_{n+12} - a_n$ は 6 の倍数であることを示せ.

(3) $b_{4k-3},\ b_{4k-2},\ b_{4k}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ を k を用いて表せ.

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4n} b_k$ を求め

印刷本

標準 16.31　2 以上の自然数 n と自然数 a について，和

$$1\cdot(1+a)+2\cdot(2+a)+\cdots+(n-1)\{(n-1)+a\}$$

を S とおく．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2016) 8

(1) 6 と n が互いに素であるとき，すべての自然数 a に対して，S は n で割り切れることを示せ．

(2) n を 6 で割った余りが 2 であるとき，すべての奇数 a に対[illegible] S は n で割り切れることを示せ．

(3) n を 6 で割った余りが 3 であるとき，[illegible]の自然[illegible]して，S を n で割った余りを，n を用いて表せ．ただし，[illegible]以上 $n-1$ 以下の範囲で求めよ．

標準 16.32　n を正の整数，r を 1 でない実数[illegible]

$$S=\sum_{k=1}^{n} r^{k-1},\quad T=\sum^{n}$$

とする．このとき，次の各問いに答[illegible]　([illegible]2009) 9

(1) S を $\sum$ を[illegible]に，r，n で表せ．

(2) T を $\sum$[illegible] S，r，n で表せ．ただし，[illegible]こと．

(3) U [illegible]用い[illegible] T，r，n で表せ．ただ[illegible] S と T を必ず用いること．

応用[illegible]　実数[illegible]し[illegible]は x 以下の最大の[illegible]表すものとする．

$\sum_{k=}\Big[$[illegible] 238 [illegible]数 n の値を求めよ．　(分大 [医]2009) 8

[illegible]整数[illegible]して $\left[\quad+\frac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{}\quad\right]$ の値を求めよ．

応用[illegible]の和[illegible]の問[illegible]なさい．　(分大 [医]2014) 8

(1) $\sum$[illegible]示しなさい

(2) 多項式 $(k+1)^3-$[illegible]展開を利用して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を示しなさい．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n$[illegible]を示しなさい．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4$ を求めなさい．結果は因数分解すること．

印刷本

応用 16.35 n を 2 以上の自然数とする．数列 $\{S_k\}$ が $S_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{k}$ で与えられている． (九大 [理]2003) 9

(1) 不等式 $\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$ が成り立つことを示せ．

(2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して，$\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とおく．数列 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$

が成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k =$ となる n の整式 $p(n)$ を求めよ．

(3) 不等式

$$\left| \frac{2}{n(n} \sum_{k=1} kS_k - \log \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つ を示せ．

発展 16.36 対し，a の正の約数全体の す．た 1 および a 自 数と えば $f(1) = 1$ であり， 5 ならば 15 の正の約数は 1，3 なの となる．次の問い よ． (九大 [理]2002) 2

が正 b と正 用いて $a = 2^m b$ と表されるとする．このとき $f(a)$ $^{m+1} -$ が成 ことを示

以上の p と正 q を用いて と表されるとする．このとき $) \geqq ($ q が成 を示せ．ま 号が成り立つのは，$q = 1$ か であ を示せ

(3) 正 q，る整数 数 r，s を用いて $a = 2^m r$，$b = 2^n s$ のよ きる．この ，b が

$$\begin{cases} f(a) = 2b \\ f(b) = 2a \end{cases}$$

をみたせば，r， 数であり，かつ $r = 2^{n+1} - 1$，$s = 2^{m+1} - 1$ となること を示せ．

16.4　漸化式

16.4.1　2 項間の漸化式

基本 16.37　$a_1 = \dfrac{1}{15}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 4(2n+3)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2004) 2

(1) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．また，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 1 項から第 n 項までの和を求めよ．

基本 16.38　数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義されるとき，次の問いに答えよ．　(佐賀大学 2010) 5

(1) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} + 3^{n+1} = 2(a_n + 3^n)$ が成り立つような定数 b を求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

(3) $\dfrac{a_{2n}}{a_n} > 10^{10}$ となる最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

基本 16.39　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$b_n = a_n \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2008) 7

(1) $b_{n+1} - b_n$ を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

基本 16.40　数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 5$，$a_n = 3a_{n-1} - 2^{n-1}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ で定められているとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2009) 8

(1) a_{n+1} を，a_{n-1} を用いて表せ．

(2) n が奇数のとき，a_n は 5 で割り切れることを示せ．

(3) $b_n = a_n - 2^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，b_n を n を用いて表せ．

(4) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を求めよ．

見本

標準 16.41 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} + a_n = 3n - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

次の問いに答えよ． (熊大 [文]2006) 2

(1) $b_n = a_n - \dfrac{6n-7}{4}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求め

(2) 一般項 a_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} a_n$ の値を求めよ．

基本 16.42 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 0,\ a_n = \frac{(n-1)(n-}{2} \underbrace{\qquad}_{k=1} a_{} = \qquad \cdot)$$

によって定められている．以下の問 答えよ． 2008) 4

(1) $b_n = n$ $2, 3, \cdots)$ とおくとき，$b_n =$ $\underbrace{\qquad}_{k=1}$ $= 2,$) を

示

(2) $\{b_n\}$ 数列 とを示せ．

a_n を求

$\displaystyle\sum_{}^{n}$ を求め

基 の数 $b_n =$ a_n とするとき，数列 $\{b_n\}$ は初項 6， 等比 める． (大分大学 2016) 5

(1) $c_n =$ $_{n+1} - c_n$ を ょさい．

(2) a_n を n の で表し い．

(3) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする S_n を n の式で表しなさい．

見本

標準 16.44 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 0$，$a_{n+1} - a_n = \dfrac{n\{1 + (-1)^{n+1}\}}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ により定まるものとして，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2015) 3

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 をそれぞれ求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$b_n = a_{2n-1}, \quad c_n = a_{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定めるとき，一般項 b_n，c_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} (-1)^n a_n$ を求めよ．

標準 16.45 数列 $\{a_n\}$ を次の条件で定義する

$$a_1 = 100, \quad a_{n+1} = 1.05$$

(1) 一般項 a_n を求めなさい．

(2) $a_n \leqq 0$ となる最小の n を求めなさい．
ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，lo

標準 16.

$$a_k = 3^n - a_n -$$

(鹿児島大学 2008) 9

(1) 項 a_1 を

(2)

$$a_{n+1}$$

$(n \geqq 1)$

が成り

(3) 一般項 a_n を求め

標準 16.47 $a_1 = \dfrac{1}{2}$，$a_{n+1} = a_n + \dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列を $\{a_n\}$ とする．　(大分大学 2005) 1

(1) a_4 を求めなさい．

(2) 一般項 a_n を求めなさい．

印刷本

標準 16.48 数列 $\{a_n\}$ は次の 2 つの条件 (ア), (イ) を満たす.

(ア) $a_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(イ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$

このとき次の問いに答えよ. (福岡[illegible]大学 2009) 2

(1) a_1, a_2, a_3 を求めよ.

(2) ${a_{n+1}}^2 = a_{n+1} + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ が成り立つこ[illegible]

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

応用 16.49 数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a}{1}\ n = 1,$$

をみたしている[illegible]る. このとき, 以下の問いに答[illegible]2011) 3

(1) $a_1 = \frac{1}{}$ 一般項 a_n を求めよ.

(2) t[illegible]の値を[illegible]

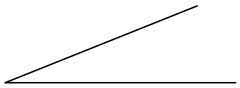
[illegible] $= \tan$[illegible]する[illegible]

[illegible] a_n, [illegible] $5, \cdots$

[illegible]みたす[illegible]自然[illegible]めよ.

見本

応用 16.50 n を正の整数とする．平面を n 本の直線，または 1 回折れ線でいくつかの領域に分けることを考える．ここで直線は両側に無限にのびているものとし，**1 回折れ線**とは，右図のように直線の途中を 1 回折り曲げたものである．次の問いに答えよ．　(九大 [文]2002) 5


(1 回折れ線)

(1) 平面が次の条件 (i)，(ii) をみたす異なる n 本の直線のみで分割されているとする．

(i) n が 2 以上ならば，どの 2 本の直線も交わる．

(ii) n が 3 以上ならば，どの 3 本の直線も交わらない．

分割される平面の領域の個数を L_n で表す．L_n と L_{n-1} の間の関係式を求めよ．また，$L_n\ (n \geqq 1)$ を求めよ．

(2) 平面が次の条件 (i)，(ii) をみたす異なる n 本の 1 回折れ線のみで分割されているとするとする．

(i) n が 2 以上ならば，どの 2 本の 1 回折れ線も異なる 4 点で交わる．

(ii) n が 2 以上ならば，どの 3 本の 1 回折れ線も交わる点でない (右図を参照せよ)．


(交わる 1 回折れ線)

分割される平面の領域の個数を H_n で表す．H_n を求めよ．

(3) $(n \geqq$ 求めよ．

応用 16 $\{a_k\}$ を の等 とする 関数 $y = x^2$ のグラフを C とし，a_1 をとる 自然数 し，点 P_k が P_{k+1} を順次つぎのように定める を通る m_k の とし，この直 C とのもう一つの交点を P_{k+1} とする C と は P_{k+1} とする．点 P_k の x 座標を a_k とする．

(1) a_{k+1} を . (九大 [文]2003) 4

(2) 数列 $\{a_k\}$ の一般 m_1，r，k で表せ．

(3) $a_1 = \dfrac{m_1}{1+r}$ とする ∞ とき，ある 2 次関数 $y = bx^2$ があって，すべての自然数 k に対し直線 ℓ_k この 2 次関数のグラフに接することを示し，b を r で表せ．ただし，$m_1 \neq 0$ $-1, 0$ とする．

見本

応用 16.52 a と b を正の実数とする．△ABC において，∠B と ∠C は鋭角とする．点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする．また，$BX_1 = a$，$CX_1 = b$ とする．各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して以下の操作を行う．

> 辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする．また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 [illegible] との交点を Z_n とする．点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き [illegible] との交点を X_{n+1} とする．

線分 Z_nX_{n+1} の長さを l_n とするとき，以下 [illegible] 答 (熊大 [医]2015) 3

(1) l_1 を a，b を用いて表せ．

(2) l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ．

(3) $b = 8a$ のとき，$l_n > \dfrac{1}{2}$ となる最小 [illegible] 要ならば $\log_2 169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてもよい．

16.4.2 3項 [illegible] 漸化式

基本 16.53 [illegible]

a_1 [illegible] $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

[illegible] られ [illegible] 次の (宮崎大学 2007) 7

(1) b_n [illegible] $_{n+1} - c$ [illegible] $1, 2, 3$ [illegible] こすると [illegible] $_{n+1}$ を b_n を用いて表せ．

[illegible] $\{b_n\}$ [illegible] 項 b [illegible] を用いて表せ．

([illegible] [illegible] 一般項 [illegible] いて表

基本 16.54 [illegible] の条件を

$a_1 = 1$, [illegible] 1, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

このとき次の問いに答え (福岡教育大学 2010) 7

(1) a_3，a_4，a_5 を求め

(2) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} =$ [illegible] $_{n+1} - \alpha a_n)$ を満たす実数 α，β の組を全て求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

印刷不可

基本 16.55 r を実数とする．$\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = ra_{n+1} - 4a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められる数列とする．次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2014) 3

(1) $r = 0$ の場合に，以下のそれぞれについて一般項 a_n を n の式で表せ．

(i) n が奇数のとき．

(ii) n が偶数のとき．

(2) $r = 5$ の場合に，次の (a)，(b) に答え

(a) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$
$$c_n = a_{n+1} - 4a_n$$

で定めるとき，一般項 b_n，

(b) 一般項 a_n を求めよ．

(3) $r = 4$ の場合

(c) 数列

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} \quad (n =$$

定め

一般

基本 16

以下

(1) 定数

$$2 - 5b_{n+1} + 6b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

を満たす c の値を

(2) a_n を n の式で表

見本

基本 16.57 c を実数とし，$a_1 = c$，$a_2 = c^2 - 2$ および

$$a_{n+2} = a_1 a_{n+1} - a_n \quad (n \geqq 1)$$

で数列 $\{a_n\}$ を定義する． (佐賀大学 2011) 6

(1) $n \geqq 1$ のとき $a_{n+4} = a_2 a_{n+2} - a_n$ となることを示せ．

(2) $c = \sqrt{2}$ のとき a_{100} を求めよ．

標準 16.58 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = (5+\sqrt{26})^{n-1} + (5-\sqrt{26})^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定義する． (琉球大学 2004) 1

(1) すべての自然数 n に対して，$a_{n+2} = 1$ ことを示せ．

(2) すべての自然数 n に対して，a_n は自然数

(3) 実数 $(5+\sqrt{26})^{99}$ を無限小数で表すと，
がすべて 0 であることを示せ．-0.1 用なしで用いてよい．

標準 16.59 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = a_2 = 1$ a_{n+1} n て定める．また α を $\alpha = 1 + \dfrac{1}{\alpha}$ を満た 実数とする の各問

(016) 3

(1) 数列 $\{b$ $\dfrac{a_{n+1}}{}$ で定める．b_{n+1} を b_n を

(2) n $, 3, \cdots$ $b_n \geqq 1$ となることを示

(3) $1, 2, 3$ 対し $- \alpha| \leqq \dfrac{1}{\alpha}|b_n - \alpha|$ ることを示せ．

$n =$ $\cdots$ に $|b_n|$ $\dfrac{1}{\alpha^n}$ となることを示せ．

赤玉 置 M は，1 分経過 個の白玉に変化する．白玉は，
中で 分経過 赤玉と 1 個 に変化する．時刻 $t = 1$(分) に
装置 1 個入 過ご M へ赤玉を 1 個追加する．時刻
$t = n($ する 中の赤玉 それぞれ a_n と b_n $(n = 1, 2, \cdots)$ と
する．この (分) までの 玉の個数は，$a_1 = 1$，$a_2 = 1$，$a_3 = 3$，
$b_1 = 0$，$b_2 =$ ．以下に答えよ． (九工大 [情]2006) 3

(1) a_{n+1} を b_n を用いて b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ．

(2) a_{n+2}，a_{n+1}，a_n $(n$ $2, \cdots)$ が満たす関係式を求めよ．

(3) $c_n = a_{n+1} - 2a_n$ とき，数列 $\{c_n\}$ の一般項が $c_n = (-1)^n$ となることを示せ．

(4) $d_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とするとき，数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

見本

標準 16.61 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \frac{10}{9},\quad a_2 = 2,\quad 100a_{n+2} - 180a_{n+1} + 81a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって与えられている．次に答えよ．　(九工大 [工]2002) 2

(1) $b_n = a_{n+1} - \dfrac{9}{10}a_n$ とおく．数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．

(2) $a_n = \dfrac{9}{10}b_n c_n$ により数列 $\{c_n\}$ を定める．一般項 c_n およ[illegible]求めよ．

(3) a_n が最大になるときの自然数 n を求[illegible]

標準 16.62 袋の中に白色と黄色の 2 枚のカー[illegible]る．袋から無作為に 1 枚取り出してその色を記録し，袋にもどす試行を[illegible]行，つまり，$n-1$ 回目と n 回目にはじめて[illegible]る場合の数を $f(n)$ とおく．ただし $n \geqq 2$[illegible]　[illegible]大 [illegible] 5

(1) $f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$ を求め[illegible]

(2) $f(n-2),\ f[illegible]1),\ f(n)\ (n \geqq 4)$ の間の関係式[illegible]たい[illegible]イ),(ウ) に当て[illegible]求めよ．
1 枚[illegible]で，さらに $n-1$ 回の試[illegible]結果最後の[illegible]回では[illegible]枚連続[illegible]のカードが取り出され[illegible]の数は［（ア）］である．1[illegible]のカー[illegible]色[illegible]に $n-1$ 回の試行[illegible]た結果最後の 2 回ではじ[illegible]て 2 枚[illegible]して黄[illegible]が取り出される場合の数は［（イ）］である．したが[illegible] $f(n[illegible] f(n[illegible](n)\ (n \geqq [illegible])$ の間に［（ウ）］の関係式が成り[illegible]

[illegible]方程[illegible]$x -$[illegible]2 つの解を α[illegible]し，$a_n = f(n) - \alpha f(n-1)$,
[illegible]$\beta f(n[illegible]$[illegible]のとき[illegible]$_n\}$ は公比 β の等比数列であり，
[illegible]は公[illegible]等比数[illegible]示せ．

(4) $f(n)$[illegible]

16.4.3　S_n を含む[illegible]式

□□ **16.63** 第 1 項から[illegible]項までの和 S_n が，$S_n = an^2 + bn + c$ で表される数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を求め[illegible]だし，a，b，c は定数とする．　(福岡教育大学 2001) 1

見本

基本 16.64 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．いま $S_n = n^2 - 25n$ のとき，次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2005) 6

(1) 初項 a_1 を求めよ．

(2) この数列が等差数列であることを示せ．

(3) $S_n > 396$ となる最小の n を求めよ．

基本 16.65 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする

$$a_1 = 1, \quad S_{n-1} - a_n =$$

が成り立つとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2008) 9

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 の値をそれぞれ求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

基本 16.66 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 での和 と $S_n =$ $2a_n + n$ が成り立っている．このとき の各問に答 2006) 8

(1) $n \geqq 2$ のと を a_{n-1} を用いて表せ．

(2) $n \geqq 1$ $_{n+1} - a_n$ とおく．b_n を n

(3) a と用い

基 .67 数 $n\}$ の 項までの和 S_n が $S_n = \dfrac{3}{2}a_n - n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ たす (大分大学 2012) 1

求めな

を求 い．

(3) を求め い．

標準 16.6 項 a_1 から第 n までの和を S_n とする．

$$a_1 = \quad _{n+1} = 4a_n - S_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つとき，次の問 答えなさい． (大分大学 2009) 2

(1) $n \geqq 1$ のとき， a_{n+1} と a_n を用いて表せ．

(2) $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

見本

標準 16.69 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n + n^2$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2013) 4

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(2) a_n を n の式で表せ．

標準 16.70 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を s_n，t_n とおく．

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

とおいたとき

$$s_n = \frac{3n^2 + n}{2}, \quad \log_2(t_n + 2) = n$$

が成り立つ．次の問いに答えよ．　(福[illegible]16) 2

(1) $\{a_n\}$ の一般[illegible]を求めよ．

(2) $\{b_n\}$ の[illegible]めよ．

(3) $\sum_{k=1}^{n}$[illegible]を求め[illegible]

[illegible]16.71 [illegible]$\{a_n\}$ の[illegible]項までの和を S_n とする．数列 $\{a_n\}$ が

$$a_2 = [illegible]_n = ([illegible](2a_n + 2[illegible](n = 1, 2, 3, \cdots)$$

[illegible]ており，次の[illegible]えよ．　(鹿児島大学 2001) 4

(1) [illegible]は n[illegible]$2(n +$[illegible]$= 1, 2, 3, \cdots)$ をみたすことを証明せ[illegible]

(2) $b_n = \frac{}{n}$([illegible]られる数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．

(3) $\sum_{k=1}^{n}(2a_k + 1)$ を n [illegible]表せ．

印刷本

16.4.4 分数漸化式

基本 16.72 数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{3a_n+5}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をみたす．

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{a_n+1}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ． (大分大学 2001) 1

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

基本 16.73 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1=1,\quad a_n=\frac{a_{n-}}{(4n+3)a_{n-}}\qquad(n=\qquad\cdots)$$

次の問いに答えよ．

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおくとき，

(2) (1) の b_n を用いて $c_n=b_{n+1}-b_$ $2,3,$ と 数列 の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

16.4.5 漸

基本 2 つの $\{$ $\}$ が初項 $a_1=1$，b あり，また

$$a_{n+1}=\qquad+2,\quad b_{n+1}=a_n+2b_n$$

関係 して する．き次の問 えよ． (佐賀大学 2002) 1

b_3 を よ．

(2) c_n b_n とき 一般項を求めよ．

(3) 数 般項を求

(4) 数列 $\{$ n 項までの和 S_n を求めよ．

見本

標準 16.75 数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ は以下の条件を満たしているものとする．

$$\begin{aligned} &x_1 = 8, \qquad y_1 = -5 \\ &x_{n+1} = 2x_n + y_n + 3n - 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ &y_{n+1} = 2y_n + x_n - 3n + 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2007) 4

(1) $z_n = x_n + y_n$，また $w_n = x_n - y_n$ とおく．数列 $\{z_n\}$ および $\{w_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) xy 平面上の点 $(x_n,\ y_n)$ と直線 $y = x$ との距離が $\sqrt{2}$ 以下となるような n の値をすべて求めよ．

標準 16.76 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，

$$\begin{cases} 2a_{2k+1} - 3a_{2k} + a_{2} \\ 2a_{2k+2} - 3a_{2k+1} \quad 1 \end{cases} \quad (\quad 2$$

をみたしている．次に答えよ．　(九 2005) 1

(1) a_3，a_4，それぞれ求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ と b_n $- a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で b_{n+2} を b_n を用いて

( ) $\{b_n\}$ 項 b .

数列 の一般

数列 ，$a_{n+2} =$ a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める．

列 $\{b$ $= c$ $= 1, 2, 3, \cdots$ め，数列 $\{c_n\}$ を

c_n $(n =$ る．次 よ．　(九工大 [工]2007) 2

(1) b_1， b_6 の値を

(2) b_{n+3} $(n$ 3， b_n を用いて表せ．

(3) b_{100} の値を求めよ．

(4) c_1，c_2，c_3，c_4，c の値を求めよ．

(5) c_{2007} の値を求め

見本

応用 16.78 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ の間に次の漸化式が成立する．

$$x_{n+1}=2x_n,\ y_{n+1}=3x_n+y_n,\ z_{n+1}=x_n-2y_n+3z_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ． (分大 [医]2013) 8

(1) 初項 $(x_1,\ y_1)=(2,\ 0)$ に対して，一般項 x_n と y_n を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が定数 c，d，r，s に対して，関係 $a_{n+1}=ra_n+$ [illegible] d で定義されるとき，$f_n=ps^n+q$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が次式を満たす [illegible] 数 p と q を求めよ．ただし，$r\neq s$，$r\neq 0,1$，$s\neq 0$ [illegible] る．

$$a_{n+1}+f_{n+1}=r(a_n+$$ [illegible] $$3,\cdots)$$

(3) 初項 $(x_1,\ y_1,\ z_1)=(2,\ 0,\ 0)$ に対して，

16.4.6 確率漸化式

標準 16.79 平面の上に正四面体が [illegible] 平面と接し [illegible] る面の [illegible] を任意に選び，これを軸 [illegible] て正四面体をたおす．この操作 [illegible] 続け [illegible] き，最初に平面と接し [illegible] び再び平面と接する確率を p_n [illegible]) 4

(1) p_1 [illegible] $_3$ を求

(2) [illegible] $_n$ を用 [illegible]

[illegible]16.80 [illegible] の中に [illegible] がいて，この容器の中では増殖しない．この [illegible] に関 [illegible] 次の [illegible] 満た [illegible] p があ [illegible] が知られている．

この [illegible] 個体は [illegible] 生存してい [illegible] 他の個体が何匹いるかにかかわらず [illegible] は確率 p で [illegible] ている $(k=1,2,3,\cdots)$．

k 日目に [illegible] ている [illegible] 数を X_k [illegible] n とするとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2009) 7

(1) $X_2=0$ と [illegible] る確率 [illegible] よ．

(2) $X_3=0$ となる確率 [illegible] よ．

(3) $X_k>0$ であるが [illegible] $=0$ となる確率を求めよ．

印刷本

標準 16.81　正三角形 ABC があり，点 X は正三角形 ABC の頂点を移動する点である．サイコロを投げて 5 の目が出たとき点 X は時計回りに隣の頂点に移動し，6 の目が出たとき点 X は反時計回りに隣の頂点に移動し，それ以外の目が出たとき点 X は移動しない．はじめに点 X は頂点 A にあるとし，サイコロを n 回投げたとき点 X が頂点 A にある確率を P_n とする．　(大分大学 2014) 6

(1)　P_1，P_2，P_3 を求めなさい．

(2)　P_{n+1} を P_n を用いて表しなさい．

(3)　P_n を求めなさい．

標準 16.82　1 辺の長さが 1 の正三角形の頂[illegible]P，Q，R とする．これらの頂点のいずれかにある動点が，次のように[illegible]を 1 回の試行とする．さいころを 1 回投げて，1 の目が出れば[illegible]目が出れば移動せず，それ以外の場合は時[illegible]移動する．[illegible]初に点 P にあり，n 回の試行後に動点[illegible]Q，[illegible]それぞれ q_n，r_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．以下の[illegible]えよ．　[illegible]) 4

(1)　p_1，p_2 をそれぞれ求めよ．

(2)　q_2，r_2 を[illegible]求め，さらに p_3 を求めよ．

(3)　p_{n+1}[illegible]せ．

(4)　q_n[illegible]p_n を用[illegible]

([illegible]を n を[illegible]と表せ[illegible]

[illegible] 16.8[illegible]形の[illegible]頂点[illegible]回りに順[illegible]A，B，C，D とする．頂点 A から出発[illegible]点上[illegible]回り[illegible]を進める[illegible]を行う．硬貨を 1 回投げるごと[illegible]出たと[illegible]は頂点[illegible]だけ点 P を進め[illegible]が出たときには頂点 2 つ分だけ[illegible]進[illegible]のとお[illegible]点 P が頂[illegible]とまった時点でゲームは終わるも[illegible]硬貨[illegible]投げ終[illegible]頂点 A に到達する確率を p_n とするとき，[illegible]　(佐賀大学 2015) 4

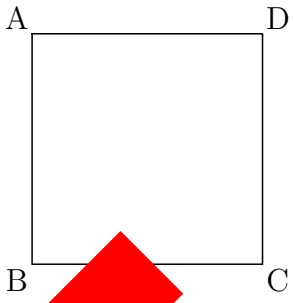
(1)　p_2，p_3 [illegible]よ．

(2)　p_4，p_5 を求めよ．

(3)　p_{12} を求めよ．

見本

標準 16.84 図のような一辺の長さが 1 の正方形 ABCD がある．この正方形の辺上の点 Q を，コインを投げて表が出れば反時計まわりに 1，裏が出れば時計まわりに 1 動かす試行を考える．点 Q が頂点 A から出発してこの試行が繰り返し行われるものとする．このとき，次の問いに答えよ． (九大 [文]2007) 3



(1) 表の出る確率が $\frac{1}{2}$ のコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，各頂点 A，B，C，D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ．また，上記の試行を 3 回および 4 回繰り返すとき，各頂点 A，B，C，D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ．

(2) 裏の出る確率 p が $\frac{1}{2}$ より大きいコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，頂点 A，B，C，D のうち点 Q がある確率が最大となることを示せ．同様に 3 回繰り返すとき，点 Q がある確率が最大となることを示せ．

標準 16.85 A と B は，赤球 2 個と白球 1 個が入った袋をそれぞれ持っている．次のような操作を考える．

A と B は，それぞれ自分の持っている袋の中から無作為に球を 1 つ選び，その球の色を見てから袋に戻す．

この操作を n ($n \geqq 2$) 回繰り返すとき，n 回の試行の中で A と B が取り出した球の色が一致することが少なくとも 1 回あるが続けては起こらない確率を P_n とする．このとき，次の各問いに答えよ． (宮崎大学 2016) 4

(1) 1 回の試行で A と B が取り出した球の色が一致する確率を求めよ．

(2) P_2 を求めよ．

(3) $n \geqq 3$ のとき，

$$P_n = \frac{4}{9}P_{n-1} + \frac{5}{81}P_{n-2} + \frac{5 \cdot 4^{n-1}}{9^n}$$

が成り立つことを

見本

応用 16.86 k は 2 以上の自然数とする.「1」と書かれたカードが 1 枚,「2」と書かれたカードが 2 枚，$\cdots$,「k」と書かれたカードが k 枚ある．そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M，奇数が書かれたカードの枚数を N で表す．この $(M+N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し，そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す．記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．　(九大 [理]2009) 2

(1) p_1 と p_2 を M，N で表せ.

(2) p_{n+1} を p_n，M，N で表せ.

(3) $\dfrac{M-N}{M+N}$ を k で表せ.

(4) p_n を n と k で表せ.

応用 16.87 はじめに，袋 A には赤玉が 1 個[illegible]ている．袋 A から無作為に玉を 1 個取り[illegible]続き袋 B [illegible]ら無作為に玉を 1 個取り出して袋 A に戻す[illegible]の操[illegible]回[illegible]す[illegible]n 回 $(n \geqq 1)$ の試行の後，袋 A に赤玉が[illegible]入ってい[illegible]率を p_n[illegible]いる確率を q_n，1 個も入[illegible]ていない確率を r_n とする．以下[illegible]よ．([illegible]2003) 5

(1) p_1，q_1[illegible]求めよ.

(2) p_{n+1}[illegible]，r_{n+1}[illegible] q_n，r_n を用いて表せ.

(3) [illegible]n であ[illegible]

[illegible]，q_n，[illegible]求めよ

応用 16[illegible]くつか[illegible]が入っ[illegible]と箱 B [illegible]ろとき，次の試行 T を考える.

[illegible]箱 A [illegible]個の[illegible]出して箱 B [illegible]その後，

[illegible]ら 2 個[illegible]て箱 A [illegible]る.

最初に[illegible]玉[illegible]箱 B に[illegible]っているとき，以下の問いに答えよ.　(九大 [文]2012) 4

(1) 試行 T を 1 回行っ[illegible]に，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n=1,2,3)$ を求めて既約分数[illegible].

(2) 試行 T を 2 回行っ[illegible]に，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n=1,2,3)$ を求めて既約分[illegible]せ.

(3) 試行 T を 3 回行[illegible]ときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ.

見本

応用 16.89 点Pは次の(i)，(ii)，(iii)の規則に従って数直線上を動く．

(i) 時刻0で，Pは整数座標点0から10のいずれかの位置i $(1 \leqq i \leqq 10)$にある．

(ii) 時刻t $(t = 0, 1, 2, \ldots)$に位置i $(1 \leqq i \leqq 9)$にあるPは，$t+1$には確率p $\left(0 < p < \dfrac{1}{2}\right)$で位置$i+1$に，確率$1-p$で位置$i-1$に移動する．

(iii) 時刻tに位置0または10にあるPは，$t+1$にもその位置にとどまる．

以下の問いに答えよ．(宮大 [情]2014) 4

(1) Pが時刻0で位置2にあるとき，時刻4に位置0にいる確率を求めよ．

(2) Pが時刻0で位置1にあるとき，時刻3に位置1にいる確率を求めよ．

時刻0で位置iにあるPが，いずれかの時刻に位置0に到達する確率をq_iとおく．ただし，$q_0 = 1$，$q_{10} = 0$である．$1 \leqq i \leqq 9$を満たすiについて，q_{i-1}，q_i，q_{i+1}の間に$pq_{i+1} + (1-p)q_{i-1}$の関係が成り立つ．

(3) $q_{i+1} - q_i = \boxed{\text{(a)}}(q_i - q_{i-1})$である．空欄の(a)に入る式を求めよ．

(4) q_iをq_1とiを用いて表せ．

(5) q_1を求めよ．

16.[illegible] その他の漸化

16.90 数列$\{a_n\}$が

$$a_{n+2}{}^3 \quad a_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしており，$a_1 = 1$のとき，a_{2k-1} (kは自然数)を，kを用いて表せ．(宮大 [医]2015) 5

標準 16.[illegible]

$$a_1 = \quad a_{n+1} = a_n{}^2 - a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で与える．$a_1, \ldots, a_n$の積をP_nとおく．(九大 [文]2001) 3

(1) 各nについてa_nとa_{n+1}は互いに素であることを示せ．

(2) 各nについて$a_{n+1} = P_n + 1$であることを示せ．

(3) $S_n = \dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}$とおく．$S_1$，$S_2$，$S_3$，$S_4$を求めよ．

(4) 各nについてS_nをP_nで表せ．

見本

応用 16.92 放物線 $C : y = x^2 - 1$ と $a_1 > 1$ を満たす実数 a_1 を考える．このとき，次の問いに答えよ．　(九大 [文]2008) 4

(1) C 上の点 $(a_1,\ {a_1}^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_2 とするとき，a_2 を a_1 を用いて表せ．

(2) (1) で求めた a_2 に対して，C 上の点 $(a_2,\ {a_2}^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_3 とする．この操作を繰り返してできる数列を a_1，a_2，$\cdots$，$a_n \cdots$ とする．このとき，すべての n に対して $a_n > 1$ を示せ．

(3) $b_n = \dfrac{1}{2}(a_n - 1)$ とおくとき，すべての n に対して，$b_{n+1} < \dfrac{1}{4} b_n$ を示せ．

(4) $a_1 = 2$ のとき，$b_n < 10^{-12}$ となる n の値を求めよ．ただし，必要があれば，$\log_{10} 2$ を 0.3010 として計算してよい．

16.5　数学的帰納法

□□ **16.93** 次の (1)，(2) に答えよ．　(　　) 3

(1) 自然数 n に対して自然数 a_n を次のように定義する．

$$a_n = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot 1$$

この a_n について，自然数 k に対して $(2k)! = 2^k \cdot a_k \cdot k!$ が成り立つ．このことを示せ．

(2) すべての自然数 n について $n!$ は $2^{(2^n-1)}$ で割り切れる．このことを数学的帰納法で示せ．

□□ **16.94** 数列 $\{a_n\}$ を，$a_1 = \theta$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\sin a_n + a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定めるとき，次の (1)，(2) に答えよ．　(宮崎大学 2013) 2

(1) $\sin a_n$ を θ を用いて表せ．

(2) a_n を n を用いてどのように表されるか予想し，それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ．

□□ **16.95** n は 5 以上の自然数とする．数学的帰納法によって，次の不等式を証明せよ．　(福岡教育大学 2015) 1

$$2^n > \frac{1}{2}n^2 + n$$

□□ **16.96** 自然数 n について $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ．　(福岡教育大学 2013) 5

見本

基本 16.97 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 6$，$a_{n+1} = a_n + 16n + 8$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ により，定まるものとして，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2002) 4

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) 和 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$ を求め

基本 16.98 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = \dfrac{3}{2}$，$a_{n+1} = 3 -$ $\cdots)$ により定まるものとして，次の各問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n について，$1 < a_n$ よ．

(2) $x_n = \dfrac{1}{2 - a_n}$ とおくとき，x_{n+1} 求め

(3) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ 項を求めよ．

基本 16.9 $\dfrac{1}{p} > 0)$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n}$ (2,) で定義 数列 $\{a_n\}$ て，次 よ． (宮崎大学 2003) 12

, a_3, めよ

一般 を推定 , p, て表せ さらに，その推定が正しいことを 帰納法 て証

基 100 $\{a_n\}$

, a_{n+1} $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

で定められて き 各問に答えよ． (宮崎大学 2012) 10

(1) a_2，a_3，a_4 の値を .

(2) 一般項 a_n を予想 れが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

見本

基本 16.101　初項 $a_1 = 0$ と漸化式

$$a_{n+1} = (1-r)r^{n-1} + r^2 a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって与えられる数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．ただし，$r \neq 0$，$r \neq 1$ とする．　(宮崎大学 2015) 10

(1) a_2，a_3，a_4 を，r を用いてそれぞれ表せ．

(2) 第 n 項 a_n を推測して，それが正しいことを，数学的帰[illegible]いて証明せよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を計算し，r，n を用いて表せ[illegible]

基本 16.102　条件 $a_1 = 0$，$na_{n+1} = (n+1)a_n +$[illegible]
を $\{a_n\}$ とし，条件 $b_1 = 1$，$nb_{n+1} = (n+1)$[illegible]
れる数列を $\{b_n\}$ とする．　(大分大学 [illegible]02) 1

(1) a_n，b_n を表す n の式を推定し[illegible]が正しい[illegible]を数[illegible]て証明しなさい．

(2) $\{a_n\}$ と $\{b$[illegible]共通に含まれる数を小さい順に[illegible]でき[illegible]とするとき，c[illegible]の式を求め，簡潔にその理由[illegible]

(3) $\{c_n\}$[illegible]項か[illegible]までの和を求めなさい．

標準 16.103　次[illegible]に[illegible]　(長崎大学 2012) 2

m を[illegible]の自然[illegible]の不等式が成り立つことを，数学的帰納法によ[illegible]明せ[illegible]

$$m! > 2^m >$$

[illegible]数[illegible]する[illegible]と．

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + [illegible] + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$$

(3) (2) で求め[illegible]S_n に[illegible]，$S_n < \dfrac{3}{4}$ が成り立つことを示せ．

(4) (2) で求めた S_n に[illegible]，$S_n > \dfrac{2}{3}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

見本

標準 16.104 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ に対し，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．すべての自然数 n に対して，$\dfrac{a_n+3}{2} = \sqrt{3S_n}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ． (佐賀大学 2012) 5

(2) a_{n+1} を S_n を用いて表せ．

(3) n が自然数であるとき，数学的帰納法を用いて，$S_n = 3n$ [illegible] 立つことを証明せよ．

標準 16.105 関係式

$$a_1 = \beta, \quad a_{n+1} = 2a_n(1-a_n)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の各 [illegible] $\beta < \dfrac{1}{2}$ とする．

(1) $n \geqq 1$ に対して，不等式 $a_n <$ [illegible] り立つこ [illegible] せ． [illegible]05) 13

(2) $n \geqq 1$ に対 [illegible] $b_n = \log_2\left(\dfrac{1}{2} - a_n\right)$ とおく． [illegible] き，

$$b_{n+1} = 2b_n + 1$$

[illegible] 立つ [illegible] 分

[illegible] $_n$ を n [illegible] 用い

準 16 [illegible] 1 次関 [illegible] $(x) =$ [illegible] $_n$ $(n =$ [illegible] $\cdots)$ は以下の 2 つの条件を満た

(i) [illegible]

(ii) f_{n+1} [illegible] $= \displaystyle\int_1^x 6t f_n$ [illegible] $+ x$ で割った余りに等しい．

以下の問いに答 [illegible] よ． (熊大 [文]2014) 4

(1) $n \geqq 1$ のとき，a_{n+} [illegible] $_{+1}$ を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，$|a$ [illegible] $_n|$ は偶数であることを示せ．

(3) $n \geqq 2$ のとき， [illegible] $|b_n|$ は 3 の倍数ではないことを示せ．

見本

標準 16.107 n を 2 以上の整数とする．n 個の実数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ が与えられたとき，

$$P_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2,\quad Q_n={a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2$$

とおく．次に，$1\leqq i<j\leqq n$ を満たすすべての番号 i，j に対する a_ia_j の和を R_n とする．たとえば，$R_2=a_1a_2$，$R_3=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3$ である．同様に，$1\leqq i<j\leqq n$ を満たすすべての番号 i，j に対する $(a_i-a_j)^2$ の和を S_n とする．たとえば，$S_2=(a_1-a_2)^2$，$S_3=(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_2-a_3)^2$ である．次の問いに答

(1) P_4 を Q_4 と R_4 を使って表せ．　　(長崎大学 2013) 3

(2) すべての $n\geqq 2$ に対して $S_n=(n-1$ R ることを，数学的帰納法で証明せよ．

(3) Q_4 を P_4 と S_4 を使って表せ．

(4) $a_1+a_2+a_3+a_4=1$ のとき，Q_4 の最 a_1，a_2，a_3，a_4 の値をそれぞれ求めよ．

標準 16.108 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n$ $a_1=b_1=$ び，

$$a_{n+1}=2a_nb_n$$
$$b_{n+1}={a_n}^2+{b_n}^2$$

をみた とする 次の問いに答えよ．　　(九大 [文]2006) 2

$\geqq 3$ の a_n は れるが，b_n は 3 で割り切れないことを示せ．

$n\geqq$ き，a は であることを示せ．

9 自 に対し $=(\cos 2^n)(\cos$ $)\cdots(\cos 2)(\cos 1)$ とおく．た の大 表す を用いる． き，次の問いに答えよ．

(1) $\frac{}{1}$ を 　　(九大 [文]2008) 1

(2) $a_n=\frac{}{2^n}$ 1

(3) $a_n<\dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ．

見本

応用 16.110 次の問いに答えよ. (九大 [文]2002) 4

(1) n を正の整数とする．どんな角度 θ に対しても

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

が成り立つことを示せ．また，ある n 次式 $p_n(x)$ を用いて $\cos n\theta$ は

$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

と表されることを示せ.

(2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数な[illegible]ることを示せ.

(3) 整式 $p_n(x)$ の定数項を求めよ．また，$p_n($[illegible]

見本

16.6　問題研究

16.6.1　3 項間の漸化式

数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_{n+2}-pa_{n+1}+qa_n=0$ の特性方程式

$$x^2-px+q=0$$

の解を α，β とすると，与えられた漸化式は　　$a_{n+2}-(\alpha+$　　$+\alpha\beta a_n=0$

これから　　$\begin{cases} a_{n+2}-\beta a_{n+1}= & -\beta a_n) \\ a_{n+2}-\alpha a_{n+1}= & \alpha \end{cases}$

ゆえに　　$\begin{cases} a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a \\ a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1} \end{cases}$

i) $\alpha\neq\beta$ のとき，$(*)$ の第 1 式から第　　く

$$a_n=\frac{(a_2　　^{n-1}-(a_2　　)\beta^n}{\alpha-\beta}$$

ii) $\alpha=\beta$ の　　ら　　$\dfrac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\dfrac{a_n}{\alpha^n}=\dfrac{a_2}{\alpha^2}-$

数　　$\left\{\dfrac{a_n}{\alpha^n}\right\}$ は　　α　　$\dfrac{a_2}{\alpha^2}-\dfrac{a_1}{\alpha}$ の等差数列　　るから

$$\alpha^{n}　　+(n-1)\left(\frac{a_2}{　　^2}-\frac{a_1}{\alpha}\right)$$

$$a　　^{n-1}\left\{a　　-1)\left(\frac{a_2}{\alpha}-\alpha\right.\right.$$

i)，　　，定数　　を用い

α　　き　　$A\alpha^{n-1}+$　　$=\beta$ のとき　$a_n=(Cn+D)\alpha^{n-1}$

例えば，　　5(鹿児島大　　14) について，(2) は特性方程式 $x^2-5x+4=0$ の解が 1，　　あ　　一般項を

$$a_n=A+B\cdot 4^{n-1}$$

とおける．$a_1=1$，a_2　　あるから

$$A+B=1,\quad A+4B=3\quad \text{これを解いて}\quad A=\frac{1}{3},\quad B=\frac{2}{3}$$

よって　　$a_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot 4^{n-1}=\dfrac{1}{3}(1+2^{2n-1})$

印刷本

(3) は特性方程式 $x^2-4x+4=0$ が重解 2 をもつから，一般項を

$$a_n=(Cn+D)\cdot 2^{n-1}$$

とおける．$a_1=1$，$a_2=3$ であるから

$$C+D=1,\quad (2C+D)\cdot 2=3\quad \text{これを解いて}\quad C=D=\frac{1}{2}$$

よって $\quad a_n=\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{n-1}=(n+1)\cdot 2^{n-1}$

(1) は特性方程式 $x^2+4=0$ の解が $\pm 2i$ [illegible] を

$$a_n=C(2i)^n+D(-2i)^n$$

とおくと，$a_1=1$，$a_2=3$ であるから

$$2i(C-D)=1,\quad -4(C+D)=3\quad \text{に}\quad C=\frac{1}{4}-\frac{3}{8}i,\ D=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}i$$

したがって (ド・モアブルの定理 [数学Ⅲ] を用いる)

$$a_n=\{C(2i)^n+D(-2i)^n\}$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}i\right)2^n\left(\cos\frac{n}{2}\pi+i\sin\frac{n}{2}\pi\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}i\right)2^n\left(\cos\frac{n}{2}\pi-i\sin\frac{n}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=2^n\left\{\frac{1}{4}\cos\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{8}\sin\frac{n}{2}\pi\right\}$$

$$=2^{n-2}\left(\cos\frac{n}{2}\pi+2\sin\frac{n}{2}\pi\right)$$

i) n が奇数のとき，$\cos\frac{n}{2}\pi=0$，$\sin\frac{n}{2}\pi=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ より

$$a_n=2^{n-2}\cdot 2(-1)^{\frac{n-1}{2}}=(-4)^{\frac{n-1}{2}}$$

ii) n が偶数のとき，$\cos\frac{n}{2}\pi=(-1)^{\frac{n}{2}}$，$\sin\frac{n}{2}\pi=0$ より

$$a_n=2^{n-2}\cdot(-3)\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}=3\cdot(-4)^{\frac{n-2}{2}}$$

見本

16.6.2　分数漸化式

p，q，$r \neq 0$，s を定数とする漸化式

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \cdots (*)$$

の一般項について，以下に述べる．
$ps - qr = 0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps - qr \neq 0$ とする．
$(*)$ の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + \cdots \quad \cdots (**)$$

の解を α，β とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} \quad \cdots (***)$$

$$a_{n+1} - \beta = \frac{(ps - qr)(a_n - \cdots}{(r\beta + s)(ra_n + \cdots}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき，$\cdots$ の 2 式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n \cdots}{a_n \cdots}$$

$$\cdots \text{がっ} \cdots \frac{a_n - \beta}{a_n \cdots} = \cdots \beta \left(\frac{r\alpha + s}{r\beta + s}\right)^{n-1} \cdots$$

上式から，a_n を求める．

β の $\cdots$ $(*)$ の $\cdots$ について

$$\cdots (s - \cdots rq = 0 \cdots)^2 = 4(ps - qr) \quad \cdots ①$$

また，α $\cdots$ であるから

$$\alpha = \cdots \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \cdots ②$$

①，② により，$(*)$ $\cdots$

$$\cdots - \alpha = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(p + s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p + s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p + s)\}}$$

見本

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\dfrac{1}{a_n-\alpha}+\dfrac{2r}{p+s}$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項が $\dfrac{1}{a_1-\alpha}$，公差が $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる．

例えば，179 ページの 16.72(大分大学 2 漸化式

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=$$

の特性方程式 $x=\dfrac{2x}{3x+5}$ の解が $0,-1$ で

$$a_{n+$$ $$\frac{(a_n+1$$ $$3a_n+5$$

したがって $$= \frac{2}{5}\cdot\frac{a_n}{a_n+1}$$ ゆえに $$\frac{a_n}{a_n+}$$

よっ $$\frac{3\cdot2^{n-1}}{4\cdot5^{n-1}-3\cdot2^{n-1}}$$

と，18 ジの 1 003) の漸化式

$$(p>$$ $$a_{n+1}=\frac{}{2}$$ $$(n=1,2,\cdots)$$

の特 $$=\frac{1}{2}$$ な $$2x$$ は重解 1 をもつから

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$$

ゆえに $$\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{\frac{q}{p}-$$ $$-1)$$ よって $$a_n=\frac{(n-1)p-(n-2)q}{np-(n-1)q}$$

見本

16.6.3　ギャンブラーの破産問題

ランダムウォークの応用として，ギャンブラーの破産問題と呼ばれているものを考える．あるギャンブラーの最初の所持金を 2 ドルとする．1 回賭けを行うごとに，勝てば所持金が 1 ドル増え，負ければ 1 ドル失うものとする．所持金がなくなればギャンブラーは破産しそこで賭けは終わり，また，所持金が 5 ドルになれば賭けは終了する．1 回の賭けで勝つ確率を $\frac{2}{3}$，負ける確率を $\frac{1}{3}$ としたとき，このギャンブラーが破産して終了する確率はいくらとなるかを考えてみよう．これを数直線上で考えると，数直線上の位置 2 からスタートし，0 と 5 の間で + 方向へ移動する確率が $\frac{2}{3}$，− 方向へ移動する確率が $\frac{1}{3}$ のランダムウォークとなる．0 と 5 の間で + 方向へ移動する確率が $\frac{2}{3}$，− 方向へ移動する確率がランダムウォークとなる．0 または 5 に達したときに賭けは終了する．

さて，ランダムウォークでは，状態の変化は確率的に決まる．すなわち，ある状態にある場合，それまでの履歴に関係なく確率的に定まる．したがって，ギャンブラーの破産する確率は，現在のときの所持金の額で決まる．これを $r(i)$ $(i = 0, 1, \cdots, 5)$ とおく．$r(i)$ は所持金が i ドルのとき，破産して終了する確率である．　　(九州大・後期)

(1) $r(2)$ を $r(1)$ と $r(3)$ で表せ．

(2) このようすを 5 つの状態について表し，それらの状態の所持金が 2 ドルのギャンブラーが破産して終了する確率を求めよ．

解　(1) $\boldsymbol{r(2) = \frac{1}{3}r(1) + \frac{2}{3}r(3)}$

(2) $r(0)$ と同様に $r(1) = \frac{1}{3}r(0) + \frac{1}{3}r(2)$，$r(0) = 1$

$r(2)$ などおいて代入すると　$r(3) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

この結果をさらに代入して

$$r(1) = \frac{1}{3}r(0) + \frac{2}{3}r(2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}$$

$$r(4) = \frac{3}{2}r(3) - \frac{1}{2}r(2) = \frac{3}{2}\left(\frac{7}{6}x - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2}x = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$r(5) = \frac{3}{2}r(4) - \frac{1}{2}r(3) = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{31}{24}x - \frac{7}{24}$$

$r(5) = 0$ であるから　$x = \frac{7}{31}$　よって　$\boldsymbol{r(2) = \frac{7}{31}}$

印刷本

補足 確率漸化式 $r(i)=\dfrac{2}{3}r(i+1)+\dfrac{1}{3}r(i-1)$ の特性方程式 $2x^2-3x+1=0$ の解が $\dfrac{1}{2}$, 1 から，定数 A，B を用いて

$$r(i)=A\left(\frac{1}{2}\right)^i+B$$

とおくと，$r(0)=1$，$r(5)=1$ であるから

$$A+B=1,\quad \frac{A}{32}+B=0 \quad \text{を解いて} \quad \cdots,\quad B=-\frac{1}{31}$$

よって $\qquad r(i)=\dfrac{1}{31}\qquad (i=0,1,\cdots,5)$

次の問題も (185 ページの 16.89)，破産問題

点 P は次の (i)，(ii)，(iii) の規則に従って 上 (九工大 2014)

(i) 時刻 0 で，P は整数座標点 0 いずれか 置 i ある．

(ii) 時刻 t $(t=1,2,\ldots)$ に位置 i $(1\leqq i\leqq 9$ る P は確率 p $\left(0<$ 位置 $i+1$ に，確率 $1-p$ で

(iii) 時 位置 0 にある P は，$t+1$ に 位置に留まる．

(i) の規則 とき に q_i を求めさせ 題であるが，次の確率漸化 り立 先の

$$q_0= \quad =0 \qquad q_{i+1}+(1 \qquad _1 \qquad (i=1,2,\cdots,9)$$

ルコ ように 確率過程を

$$(\times) \qquad -p)q_{i+1}$$

とす より，$i=1$ き上式は成立しない．これ以外で成立し たとして 確率 式は，連立方程式であるから，間違いである．

確率漸化式 $(*)$ の特性方 $x^2-x+1-p=0$ の解は

$$1 \qquad 2 \qquad \left(0<p<\frac{1}{2}\ \text{より}\ 1\neq\frac{1-p}{p}\right)$$

$\alpha=\dfrac{1-p}{p}$ とおくと，実数 C，D を用いて

$$q_i=C+D\alpha^i$$

とおける．$q_0 = 1$，$q_{10} = 0$ であるから

$$C + D = 1,\quad C + D\alpha^{10} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad C = \frac{\alpha^{10}}{\alpha^{10} - 1},\quad D = -\frac{1}{\alpha^{10} - 1}$$

よって　　$q_i = \dfrac{\alpha^{10} - \alpha^i}{\alpha^{10} - 1} = \dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - 1}$　　$(i = 0, 1, \cdots, 10)$

本題を次のように書き直すこともできる．

破産問題 (Ruin problem)

P は所持金 i 万円で $(1 \leqq i \leqq 9)$，1 回の[illegible]万円だけ増え，負ければ 1 万円だけ減るゲームに参加する．P は[illegible]円 (目標金額) になるか，所持金がなくなったときにゲームは終了[illegible]を p $(0 < p < \frac{1}{2})$ とし，P の所持金がなく[illegible]

本題の結果から，$\alpha = \dfrac{1-p}{p}$ とおくと[illegible]

$$q_i = \frac{\alpha^{10} - \alpha^{i}}{\alpha^{10} - 1} \qquad (i = 0, 1, \cdots)$$

また，この[illegible]額を E_i とすると

$$10^5(1 - q_i) = \frac{10^5(\alpha^{i}[illegible]}{\alpha^{10}}$$

[illegible]P の[illegible]が 5 万[illegible]破産する確率 q_5 およびゲームの期待金額 E_5 は[illegible]の 1 円[illegible]な切り[illegible]

	q_5	
	0.88364	[illegible]
[illegible]	[illegible]6055	[illegible]
0.42	[illegible]	5605
0.43	[illegible]	19635
0.44	0.76956	23044
0.45	0.73172	26828
0.46	0.69035	30965
0.47	0.64583	35417
0.48	0.59874	40126
0.49	0.54985	45015

このような不利なゲーム $(0 < p < \frac{1}{2})$ に時間をかけて参加するより，1 回勝負で 5 万円をかけることができるならば，1 回勝負の期待金額の方が大きい．

印刷本

16.6.4 連続する自然数のべき乗和

165 ページの 16.29(九大 [文]2010) や 166 ページの 16.34(大分大学 2014) で出題されたように，連続する自然数のべき乗和の公式を証明させる問題が出題されている．

一般には，次の定理が成り立つ．

ファウルハーバー (Faulhaber) の定理

0 以上の整数 i に対して，$S_i(n)=\sum_{k=1}^{n}k^i$ とすると，次式が成り立つ．

$$S_i(n)=\frac{1}{i+1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i+1}{j}B_j n^{i+1-j}$$

ただし $B_j=\sum_{p=0}^{j}\frac{(-1)^p p!}{p+1}\left\{\begin{matrix} j \\ p \end{matrix}\right\}=\sum_{p=0}^{j}\frac{1}{p+1}\binom{j}{p}(-1)^p q^j$

なお，B_j はベルヌーイ数，$\left\{\begin{matrix} j \\ p \end{matrix}\right\}$ は第 2 種スターリング数，$\binom{j}{p}$ は二項係数．

0^0 は定義されないが，ここでは便宜的に，$0^0=1$ として計算する．

証明 第 2 種スターリング数[1] を Coupon collector's problem[2] から求め，独自の方法を与える．**証終**

まず，ベルヌーイ数を計算すると

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0,\ B_6=\frac{1}{42},\ \cdots$$

これより，$\sum_{k=1}^{n}k^i$ は n^{i+1} の係数は $\frac{1}{i+1}$，n^i の係数は $\frac{1}{2}$．例えば，

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{5}\sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{5}{j}B_j n^{5-j}$$

$$=\frac{1}{5}\left(n^5-5B_1n^4+10B_2n^3-10B_3n^2+5B_4n\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(n^5+\frac{5}{2}n^4+\frac{5}{3}n^3-\frac{1}{6}n\right)$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2014.pdf 8

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2012.pdf 7

印刷用

見本

第 17 章　確率分布と統計（数学B）

17.1　確率分布

基本 17.1 次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2016) 5

(1) 1個のさいころを10回投げるとき，1また[illegible]
と標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の確率密度関数が $f(x)$[illegible]えられて[illegible]ろとき，
X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$[illegible]．

(3) 2つの事象 A，B について，[illegible]が独立な[illegible] B も[illegible]ことを示せ．ただし $\overline{A}$ は A の余事象を表す．

標準 17.2 [illegible] n 個の値 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を[illegible]とる[illegible]る．
このとき[illegible]各問[illegible]　(鹿児島大学 2001) 12

(1)[illegible]変数 X[illegible]均値[illegible]偏差を求めよ．

[illegible]確率変[illegible] $2X$[illegible] a と標準偏差 σ を求めよ．

(2) $|Y$[illegible] $< \sqrt{3}$[illegible]明せよ[illegible]し，n[illegible]する．

発展 1 1か[illegible] $n > 3$)[illegible]数字 $1,\ 2,\ 3,$ [illegible]を1つずつ書いた n 枚のカードか[illegible]の中か[illegible]枚のカー[illegible]り出す．この2枚のカードに書いてあ[illegible] $X,$ [illegible] $> Y$) と[illegible]然数 s，t は $1 \leqq s < t \leqq n$ を満たしている[illegible]いに答えよ[illegible]　(鹿児島大学 2002) 8

(1) 次の各確[illegible]求め[illegible]

(a) $X = t$ かつ Y[illegible]ある確率 $P(X = t,\ Y = s)$

(b) $X = t$ である[illegible] $P(X = t)$

(c) $Y = s$ であ[illegible] $P(Y = s)$

(d) $X = 3Y$ [illegible]確率 $P(X = 3Y)$

(2) X，Y の平均をそれぞれ $E(X)$，$E(Y)$ とするとき，$E(X) + E(Y)$ を求めよ．

見本

標準 17.4 1，2，3，4，5 の番号をつけた 5 枚のカードがある．カード 1 枚をでたらめに取り出し，取り出したカードはもとに戻す試行を繰り返す．ただしこの試行は，取り出したカードの番号が 4 以上であるか，または取り出したカードの番号の和がはじめて 4 以上になったときに終了する．カードを取り出した回数を X とするとき，次の問いに答えよ．　(鹿児島大学 2003) 8

(1) 確率 $P(X=1)$ および $P(X=2)$ を求めよ．

(2) X の確率分布および平均 (期待値)$E(X)$ を求めよ．

(3) 取り出したカードの番号の和が 8 であ[illegible]率を求めよ[illegible]，取り出したカードの番号の和が 8 であるときに，カ[illegible]り出[illegible]が 2 回である条件つき確率を求めよ．

標準 17.5 A チームは B，C，D，E の 4 チー[illegible]チームが B，C，D，E のチームに勝つ確率[illegible]$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$[illegible]はないものとする．A チームが勝つ試合[illegible]X[illegible]き次の[illegible]に答えよ．

([illegible]2004) 9

(1) A チーム[illegible]くとも 1 つのチームに勝つ確率[illegible]よ

(2) A チー[illegible]1 つのチームに勝つ確率を[illegible]

(3) X[illegible]分布[illegible]値(期待値)$E(X)$ を求め[illegible]

基[illegible] 区別[illegible]ない[illegible]箱と，1 から 4 [illegible]番号をつけた 4 個の玉があ[illegible]号 1,[illegible]4 の[illegible]．次の (ア)，(イ) のように箱に入れる．

(ア) 番[illegible]の玉を[illegible]一つに[illegible]．

[illegible]2, 3,[illegible]いて[illegible]の玉を番号 1 の[illegible]入っている箱かまたは空箱の[illegible]る．た[illegible]の玉が入[illegible]る箱へ入れる確率は $1-\frac{1}{j}$ で，空[illegible]れる[illegible]$\frac{1}{j}$ である．

$j=1,\ 2,\ 3,$[illegible]い[illegible]号 j の玉を入れ終わったとき，玉が入っている箱の個数を X_j とする．このとき[illegible]各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2005) 8

(1) 確率 $P(X_2=1)$,[illegible]$=1)$，$P(X_4=1)$ を求めよ．

(2) 確率 $P(X_2=2)$,[illegible]$=3)$，$P(X_4=4)$ を求めよ．

(3) $j=3,\ 4$ につ[illegible]$2 \leqq i \leqq j-1$ を満たす i に対し，確率 $P(X_j=i)$ を $P(X_{j-1}=i)$ と $P(X_{j-1}=i-1)$ を用いて表せ．

(4) X_4 の確率分布を求めよ．

見本

標準 17.7 2つのさいころを投げ，出た目を X，Y $(X \leqq Y)$ とする．このとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2006) 7

(1) $X=1$ である事象を A，$Y=5$ である事象を B とする．確率 $P(A \cap B)$，条件つき確率 $P_B(A)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 確率 $P(X=k)$，$P(Y=k)$ をそれぞれ k を用いて表せ．

(3) $3X^2+3Y^2$ の平均 (期待値) $E(3X^2+3Y^2)$ を求めよ．

標準 17.8 1，2，3，4 の番号をつけた 4 枚のカードがあ[illegible]中からカードを 1 枚取り出しそこに書かれている番号を見[illegible]う試行[illegible]返す．ただし，取り出したカードはもとに戻さない．この試行[illegible]ードに書かれた番号の合計が 3 の倍数になるか，または 4 枚全部を取[illegible]する．取り出したカードに書かれた番号の合計が 3 の倍数に[illegible]ぶ．4 枚全部を取り出したとき，この試行[illegible]この試行の得点は，成功したときは取り出したカードの枚数[illegible]とする．[illegible]とき，次の各問いに答えよ． [illegible]) 7

(1) 確率 $P(X=1)$ および $P(X=2)$ を求めよ．

(2) この試行[illegible]る確率を求めよ．また，得点[illegible]求めよ．

(3) 取り[illegible]書かれた番号の和が 6 とな[illegible]よ．さ[illegible]取り出[illegible]ードに[illegible]番号の和が 6 であるこ[illegible]かっているとき，$X=3$ [illegible]条件[illegible]よ．

17.9 [illegible]に 1 [illegible]ている球が 5 個，2 の数字が書かれている球が [illegible]，5 [illegible]が書[illegible]ている球[illegible]の合計[illegible]球が入っている．1 個の球を取[illegible]その球[illegible]かれて[illegible]を確認し，[illegible]戻すことを繰り返す．i 回目に[illegible]た球[illegible]れて[illegible]とする．[illegible]，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2010) 7

(1) X_1 [illegible]表せ．ま[illegible]均と分散を求めよ．

(2) $Z=X_1$ [illegible]布を表で表せ．また，確率 $P(Z \leqq 4)$ の値を求めよ．

(3) $S=X_1-X_2$ とす[illegible]

$$P(W \leqq a) \leqq P(Z \leqq 4)$$

を満たす整数 a [illegible]値を求めよ．

(4) $S=X_1+X_2+\cdots X_n$ が $n+1$ となる確率を求めよ．

印刷不可

標準 17.10 大小 2 個のさいころを同時に投げる試行を考える．この試行で，大きいさいころの出た目を X，小さいさいころの出た目を Y とする．$T = 2X - Y$ とするとき，次の各問いに答えよ．（鹿児島大学 2011）7

(1) 確率 $P(T = 6)$，$P(T \geqq 0)$ を求めよ．

(2) 分散 $V(X)$，平均 $E(T)$ を求めよ．

(3) $V(aT) = 25$ となる定数 a の値を求めよ．

標準 17.11 0，1，2，3，4 の数字が 1 つずつ記入された 5 枚[illegible]ドがある．この 5 枚のカードの中から 1 枚引き，数字を記[illegible]戻すとい[illegible]3 回繰り返す．ただし，3 回ともどのカードを引く確率も等[illegible]る[illegible]3 つのカード数字の最小値を X とするとき，次の各問いに答えよ[illegible]（鹿児島大学 2013）7

(1) $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ に対して確率 $P(X \geqq k$[illegible]

(2) 確率変数 X の確率分布を表で表せ．

(3) 確率変数 X の平均 (期待値) $E(X$[illegible]ょ．

(4) 確率変数 X の分散 $V(X)$ を求[illegible]

標準 17.12 2 つの[illegible]率変数 X，Y の確率分布を同[illegible]えた表[illegible]率分布表) が以下のよう[illegible]れている．ただし，X，Y は[illegible]独[illegible]< 1，$0 < b < 1$ と[illegible]き，次の各問いに答えよ．[illegible]島大学[illegible]7

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	計
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
計	[illegible]	[illegible]	1	

[illegible]成さ[illegible]

[illegible]率変数[illegible]$X - Y$[illegible]$E(W)$ を求め[illegible]

(3) [illegible]$Z = \dfrac{Y}{}$[illegible]率分[illegible]成[illegible]平均 $E(Z)$ を求めよ．

(4) $E(Z$[illegible]$-\dfrac{3}{2}$ となる[illegible]Z の分散 $V(Z)$ を求めよ．

標準 17.13 整[illegible]n $(n \geqq$[illegible]対し，2 枚のコインを同時に投げる試行を繰り返し，2 枚とも表が出るか，また[illegible]回繰り返した時点で試行を終了するときの試行の回数を X_n とする．確率変数[illegible]ついて，次の各問いに答えよ．（鹿児島大学 2015）5

(1) $n-1$ 以下の自然数[illegible]対して，確率 $P(X_n = k)$ を求めよ．また，確率 $P(X_n > 3)$ を求めよ．

(2) 確率 $P(X_n = n)$ を n を用いて表せ．

(3) X_n の平均を E_n とかくとき，$E_{n+1} - E_n$ を求めよ．

見本

17.2 統計的な推測

標準 17.14 2つの変量 x, y の値からなる N 個の資料 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_N, y_N)$ がある．この資料による x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とし，標準偏差をそれぞれ σ_x，σ_y とする．また，σ_{xy}，$E(x^2)$ および $E(xy)$ を次で定める．

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}), \quad E(x^2) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}{x_k}^2, \quad E(xy) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k y_k$$

このとき，次の文中にある空欄□に式を求めよ．結果だけを答えよ．

(鹿児島大学 2002) 12

(1) σ_x を $\overline{x}$ および $E(x^2)$ を用いて表すと $\sigma_x =$

(2) σ_{xy} を $\overline{x}$，$\overline{y}$ および $E(xy)$ を用いて表

(3) x，y の相関係数 r を σ_x，σ_y および

ただし，$\sigma_x\sigma_y \neq 0$ とする．

(4) $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - \quad - 1)^2$ の値を最小にする実数 t の $\overline{x}$，$E($ $E(xy)$ を用いて である．ただし，E

標準 1 確率変 0，分散 1 の標準正規 $N(0, 1)$ に従うとする．$P(0 \leqq 1.5)$ 32 して，次の各問い よ．

(鹿児島大学 2003) 12

(1) 確 X に 40，分 の正規 $N(40, 20^2)$ に従うとする．確率 $\leqq 10)$ よ．

(均 分散 から，大 の無作為標本を抽出するとき， 均を る． き，$\overline{X}$ が近似的に従う確率分布を の確率分 確に従うと仮定して，$P(39 \leqq \overline{X} \leqq 41) \geqq$ の値の範囲 よ．

印刷本

標準 17.16 母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，その標本平均を $\overline{X}$ とする．また，標本平均 $\overline{X}$ は平均 m，分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ の正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ にしたがうとする．このとき次の各問いに答えよ．(鹿児島大学 2004) 13

(1) $\overline{X}$ の変換 $\dfrac{\overline{X}-a}{b}$ が，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ にしたがうように a と b を定めよ．

(2) 標本平均 $\overline{X}$ を用いて母平均 m に対する信頼度 95% の信[illegible]を求めよ．また，その信頼区間を導きだす過程も示せ．ただし，確[illegible]が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ にしたがうとき，$P(Z > 1.[illegible]025 で[illegible]る．

(3) 母標準偏差 σ が 5 のとき，母平均 m に[illegible]5% の信頼区間の幅が 2 以下となる標本の大きさ n の最小値を求め[illegible]

標準 17.17 ある工場で生産されている製品[illegible]，[illegible]
n 個を無作為に抽出して調べるとき，その[illegible]良[illegible]個とする[illegible]お，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 Z について，

$P(|Z| \leqq 1.96) = 0.95$,　　$P(0 \leqq Z \leqq 1.8) = 0.464$[illegible]　$P(0 \leqq Z \leqq$[illegible]0.4713

$P(0 \leqq Z \leqq 2$[illegible]72,　　$P(0 \leqq Z \leqq 2.1) = 0.482$[illegible]

であると[illegible]この[illegible]次の各問いに答えよ．[illegible]鹿児島大学[illegible]05) 12

(1)[illegible]このよ[illegible]従うかを答えよ．ま[illegible]が大きいとき X の確率分[illegible]は何で[illegible]される[illegible]

[illegible]標本[illegible]率 (標[illegible]p_0[illegible]値が得られるものとする．このとき，信頼度 9[illegible]信頼区[illegible]を，標[illegible]きさ n [illegible]の半分にするには，標本の大き[illegible]いくら[illegible]ればよ[illegible]求めよ．

([illegible]の[illegible]率を p[illegible]る．標本[illegible]さが $n = 1900$ のとき，確率 $P($[illegible]$\leqq 1$[illegible]二項[illegible]による近似値を用いて表せ．

印刷

標準 17.18 次の各問いに答えよ．ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，

$$P(Z > 1.96) = 0.0250,\quad P(Z > 2.00) = 0.0228,\quad P(Z > 2.58) = 0.0049$$

である． (鹿児島大学 2006) 8

(1) 1 枚の硬貨を 100 回投げる試行において，表の出た回数を X とする．次の (i), (ii), (iii) に答えよ．

(i) X はどのような確率分布に従うか答えよ．また $P(X = k)$ を k を用いて表せ．

(ii) X を正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ で近似するときの値をそれぞれ求めよ．

(iii) (ii) において，確率 $P(50 \leqq X \leqq 60)$ を求めよ．また，$P(X \leqq a) \geqq 0.95$ となる最小の整数値 a をそれぞれ求めよ．

(2) 変形した硬貨が 1 枚ある．この硬貨を投げたとき，表が出る確率 p（p という）を推定するために，400 回投げたところ，表が 100 回出たとき，p の信頼度 99%の信頼区間の幅を求めよ．

標準 17.19 次の各問いに答えよ．ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，

$$P(Z \geqq 1.53) = 0.0630,\quad P(Z \geqq 1.96) = 0.0250,\quad P(Z \geqq 2.32) = 0.0102$$

である． (鹿児島大学 2007) 8

(1) 確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$\dfrac{X-a}{b}$ は，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとする．また，確率変数 Y が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$\dfrac{Y-c}{d}$ は，n が十分大きいならば近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとする．このとき，a, b, c, d を m, σ, n, p を用いて表せ．

(2) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $0 \leqq x \leqq 2$ で，その確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられている．

$$f(x) = k - |x-1|$$

このとき，次の (a), (b) に答えよ．

(a) k の値を求めよ．

(b) X の平均と標準偏差を求めよ．

(3) ある工場で 1kg と表示する製品が生産されている．この製品の重さは，平均 1kg，標準偏差 50g の正規分布に従っているという．この工場より 1000 個の製品を仕入れた．この中に 902g 以下の製品は何個あると推測されるか．

見本

標準 17.20 確率変数 Z が平均 0，分散 1 の標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとするとき，$P(Z > 1.65) = 0.05$，$P(Z > 1.96) = 0.025$ であるとして，次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2008) 8

(1) 確率変数 X は平均 65，分散 20^2 の正規分布 $N(65,\ 20^2)$ に従うとする．確率 $P(X > c)$ が 0.05 となるような c を求めよ．

(2) 母平均 m，母分散 20^2 の母集団から大きさ 100 の無作為標本を抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とする．標本の大きさ 100 は十分大きい数であるとみなせるとする．このとき，$\overline{X}$ が近似的に従う確率分布を答えよ．また，母平均 m の信頼度 95%の信頼区間を $\overline{X}$ を用いて表せ．

基本 17.21 次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2009) 8

(1) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $-1 \leqq x \leqq 1$ で，X の確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられている．

$$f(x) = \begin{cases} \quad\quad & (-1 \leqq x < 0) \\ \quad\quad + k & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

(a) k の値を求めよ．また，X の平均を求めよ．

(b) 確率 $P(X \leqq 0.5)$ を求めよ．

(2) 母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，標本平均 $\overline{X}$ と標本平均 $\overline{X}$ は，n が大きいとき，近似的に正規分布 $N(m,\ y)$ に従う．確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うならば $P(Z \geqq 1.$ 0.15 $P(Z \geqq 2.00) = 0.0228$ である．

このとき y を σ，n を用いて表せ．

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ 100 の無作為標本を抽出するとき，確率 $P(m - 0.46\sigma \leqq \overline{X} \leqq m + 0.52\sigma)$ を求めよ．ただし，標本の大きさ 100 は大きいとみなせるとする．

見本

標準 17.22 数字 1 が書かれたカードが 1 枚，数字 2 が書かれたカードが 2 枚，数字 3 が書かれたカードが 1 枚の合計 4 枚のカードがある．この 4 枚のカードを母集団とし，カードに書かれている数字を変量とする．このとき，次の各問いに答えよ．ただし，母集団の中から標本を抽出するのに，毎回もとに戻してから次のものを 1 個ずつ取り出すことを復元抽出といい，取り出したものをもとに戻さずに続けて抽出することを非復元抽出という． (鹿児島大学 2010) 8

(1) 母平均 m と母標準偏差 σ を求めよ．

(2) この母集団から，非復元抽出によって大きさ 2 の無[illegible]本を抽出し，そのカードの数字を取り出した順に Y_1, [illegible]る．[illegible] $\overline{Y} = \dfrac{Y_1 + Y_2}{2}$ の確率分布，期待値 $E(\overline{Y})$，標準偏差 $\sigma(\overline{Y})$ を求[illegible]

(3) この母集団から，復元抽出によって，大[illegible]標本平均を $\overline{X}$ とする．このとき，標本[illegible]に正[illegible]なすことができるとして，$P(\overline{X} <$ [illegible]を求めよ．ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0$ [illegible]うと[illegible]$(Z$ [illegible]$=$ [illegible]る．

標準 17.23 次の各問いに答えよ． (鹿[illegible]2011) 8

(1) 確率変数[illegible]以上 3 以下の値をとり，その確[illegible]度関[illegible]）[illegible]えられて[illegible]のとき，定数 k，平均 $E(X$[illegible]め

$$f([illegible]) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 \leqq x [illegible] \text{とき}) \\ \frac{1}{4}x + k & (1 \leqq x [illegible] \text{とき}) \end{cases}$$

(2) Z を[illegible]正規分[illegible]$0,\ 1)$[illegible]確率変数[illegible]する．また，任意の x $(x \geqq 0)$ に[illegible]，関数[illegible]を $g([illegible]$ $(0 \leqq Z \leqq$[illegible]く．このとき，次の各問いによ．

([illegible]$a \leqq Z$[illegible]表せ[illegible]，a と b は定数で $a < b$ とする．

([illegible]均 50[illegible]準偏差 5[illegible]ら大きさ 10 の標本を抽出すると[illegible]1.0 以上 48[illegible]なる確率を関数 g で表せ．

(c) $0 <$[illegible]と[illegible]は $g(l_p) = \dfrac{p}{2}$ をみたすものとする．母分散 25 の母集団から大きさ 20[illegible]本を抽出したところ，標本平均が 45 であった．母平均 m に対する信[illegible]$0p\%$ の信頼区間の区間幅を l_p を用いて表せ．

印刷[illegible]

標準 17.24 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，

$$P(Z > 1.96) = 0.025, \quad P(Z > 2.58) = 0.005, \quad \frac{2.58}{1.96} \fallingdotseq 1.32$$

であるとして，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2012) 8

(1) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $-1 \leqq x \leqq 1$ で，その確率密度関数が $f(x) = k(1-x^2)$ で与えられている．このとき，定数 k の値と X [illegible] を求めよ．

(2) 母平均 m，母標準偏差 10 の母集団から大きさ 100 の [illegible] 本を抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とする．標本の大き[illegible]は十分大[illegible]であるとみなせるとする．

(a) 標本平均 $\overline{X}$ を用いて，母平均 m の信[illegible]間を求めよ．

(b) 母平均 m を信頼度 99%の信頼区間を[illegible]幅を (a) で求めた幅より小さくす[illegible]の大きさ n を[illegible]以上にとればよいか求めよ．

標準 17.25 確率変数 X のとる値[illegible] $0 \leqq X \leqq$ [illegible] その[illegible] $f(x)$ が次の式で与えられ[illegible]ものとする．

$$\begin{cases} \dfrac{k}{a} & (0 \leqq \text{[illegible]}) \\ \dfrac{k}{2-a}(2-x) & (a < \text{[illegible]}) \end{cases}$$

[illegible]，a，[illegible] $< a <$ [illegible] 満たす定数である．次の各問いに答えよ．

(1) 定[illegible]値を[illegible]．

[illegible]平均[illegible]値) $E($[illegible]を用いて表せ．

([illegible] 0.5 と[illegible] を用い[illegible]．

(鹿児島大学 2013) 8

見本

標準 17.26 次の各問いに答えよ. (鹿児島大学 2014) 8

(1) 数字 1 が書かれた玉 a 個 $(a \geqq 1)$ と，数字 2 が書かれた玉 1 個がある．これら $a+1$ 個の玉を母集団として，玉に書かれている数字を変量とする．このとき，この母集団から復元抽出によって大きさ 3 の無作為標本を抽出し，その玉の数字を取り出した順に X_1，X_2，X_3 とする．標本平均 $\overline{X} = \dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$ の平均 $E(\overline{X})$ が $\dfrac{3}{2}$ であるとき，$\overline{X}$ の確率分布とその分散 $V(\overline{X})$ [illegible] よ．ただし，復元抽出とは，母集団の中から標本を抽出するのに，毎[illegible]に戻してから次のものを 1 個取り出す抽出法である

(2) ある企業の入社試験は採用枠 300 名の[illegible]募があった．試験の結果は 500 点満点の試験に対し，平均点 24[illegible]点であった．得点の分布が正規分布であるとみなせるとき[illegible]標準正[illegible]小数点以下を切り上げて答えよ．ただ[illegible]き，$P(Z > 0.25) = 0.4$，$P(Z > 0$[illegible]，[illegible]0.2 とす[illegible]

見本

見本

解答

1.1　$a^2(y-b)-(a+b)xy+ab(x+y)+b^2(x-a)$
$=a^2(y-b)-a(x-b)(y-b)-bx(y-b)$
$=(y-b)\{a^2+(b-x)a-bx\}$
$=\boldsymbol{(y-b)(a+b)(a-x)}$

1.2　$a+b\alpha=0 \quad \cdots(*)$ とする．

$b\neq 0$ のとき，$(*)$ より　$\alpha=-\dfrac{a}{b} \quad \cdots$

a，b は有理数であるから，$-\dfrac{a}{b}$ は有理数

このとき，α は無理数であるから，

したがって　$b=0$　これを $(*)$ して

よって，$a+b\alpha=0$ ならば a $=0$

1.3　⑤

a が実 一般に $\sqrt{a^2}=|a|$ である $=(-2)$ るか
ら $)^3|=$

$=\dfrac{1+}{}$ $=\dfrac{1-}{}$　　$a+b=1,\ ab=-1$

よ　　a^3 $(a+$ $ab(a+$ $-3\cdot(-1)\cdot 1=\mathbf{4}$
$^3=($ $^2-2(ab)^3=$ $(-1)^3=\mathbf{18}$

1.5　$\sqrt{3}+$ $+(\sqrt{}$ ゆ $=2,\ b=\sqrt{3}-1$

した

$+b^2=2^2+2(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)^2=\mathbf{6}$

$$\frac{1}{a-b-1}\ \ \frac{1}{b+1}=\frac{1}{2-(\sqrt{3}-1)-1}-\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)+1}$$
$$=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\mathbf{2\sqrt{3}}$$

1.6　(1)　$a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}$ の両辺に ab を掛けると

見本

$$a^2b+b=ab^2+a$$
$$ab(a-b)-(a-b)=0$$
$$(a-b)(ab-1)=0$$

よって　　$\boldsymbol{a=b}$ **または** $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{b}}$

(2) 与式から

$$x+\frac{1}{x}=\frac{y}{8}+\frac{8}{y}\cdots①\quad\text{かつ}\quad x+\frac{1}{x}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\cdots②$$

① から　$x=\dfrac{y}{8}$　または　$x=\dfrac{8}{y}$

② から　$x=\dfrac{x}{y}$　または　$x=\dfrac{y}{x}$

したがって，4 つの連立方程式

$$\left\{\begin{array}{l}x=\frac{y}{8}\\ x=\frac{x}{y}\end{array}\right.,\quad\left\{\begin{array}{l}x=\frac{y}{8}\\ x=\frac{y}{x}\end{array}\right.,\quad\left\{\begin{array}{l}x=\frac{8}{y}\\ x=\frac{x}{y}\end{array}\right.,\quad\left\{\begin{array}{l}x=\frac{8}{y}\\ x=\frac{y}{x}\end{array}\right.$$

を解くと，それぞれ次の解を得る．

$$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(\frac{1}{8},\ 1\right),\ (8,\ 64),\ (1,\ 1),\ (1,\ -1)}$$

1.7　a, b は 1 以外の約数をもたないこと，である．

(1) a, b の素因数分解を

$$a=a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_k^{m_k},\quad b=b_1^{n_1}b_2^{n_2}\cdots b_l^{n_l}$$

とする．a と b が互いに素であるならば，$a_1, a_2, \cdots a_k$ と $b_1, b_2, \cdots b_k$ のどの 2 つも異なるから

$$a^2b^2=(a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_k^{m_k})^2(b_1^{n_1}b_2^{n_2}\cdots b_l^{n_l})^2$$

$b_1, b_2, \cdots b_k$ で割れない．また，b^2 も $a_1, a_2, \cdots a_k$ で割れないことから，a^2 と b^2 は互いに素である．

(3) $\sqrt{n}$ が有理数のとき　　$\sqrt{n}=\dfrac{p}{q}$　$(p, q$ は互いに素$)$

したがって　　$n=\dfrac{p^2}{q^2}$

上式および q は自然数であり，p，q は互いに素であるから

$$q^2=1\quad\text{ゆえに}\quad q=1,\ \sqrt{n}=p$$

よって，$\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は自然数である．

印刷本

(4) $\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は自然数であるから，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ の中に有理数が 2 個以上あれば，それらの差で整数になるものがある．

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leqq\frac{1}{\sqrt{2}+1}<1$$

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\leqq\frac{2}{\sqrt{3}+1}<1$$

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+}\quad\sqrt{n+1}}\leqq-\quad<1$$

上の 3 式より，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n}$ 以上が有理数となることはない．したがって，有理数は 1 個以
よって，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ の

1.8 (1) $z=a+\sqrt{2}b$，$w=a'+\sqrt{2}b'$

$$z+w=(a+a')+\sqrt{2}(\quad),$$
$$zw=(a+\sqrt{2}b)(a'+\quad)$$
$$=(aa'+2bb')+\quad+$$

こき $\quad=a-\sqrt{2}b,\quad j(w)=a'\quad b',$
$\quad=(a+a')-\sqrt{2}(b$
$j($ $+2bb')-\sqrt{2}(ab'+a'b)$
て $+j(w$ $\sqrt{2}b)$ $-\sqrt{2}b')$
$(a+a')-\sqrt{\quad}b')=j(z+w),$
$(a-\sqrt{2}b)(a'\quad b')$
$+2$ $b'+a'b)\sqrt{2}=j(zw)$

(2 結 n を自然 $(i=1,2,\cdots,n)$ とすると

$$j(z_2)+\cdots+j(z_n)=j(z_1+z_2+\cdots+z_n)$$
$$j(z_1)j(z_2)\cdots j(z_n)=j(z_1z_2\cdots z_n)$$

また上の第 2 $\quad\{j(z)\}^n=j(z^n)$

印刷不可

a が有理数のとき $j(a) = a$ であるから，上の諸式により

$$\begin{aligned} f(j(z)) &= \{j(z)\}^4 - \{j(z)\}^3 + c\{j(z)\}^2 - 11j(z) + d \\ &= j(z^4) + j(-1)j(z^3) + j(c)j(z^2) + j(-11)j(z) + j(d) \\ &= j(z^4) + j((-1)z^3) + j(cz^2) + j((-11)z) + j(d) \\ &= j(z^4 + (-1)z^3 + cz^2 + (-11)z + d) \\ &= j(z^4 - z^3 + cz^2 - 11z + d) \\ &= j(f(z)) \end{aligned}$$

$f(z) = 0$ のとき，$j(f(z)) = j(0)$ ゆえ $f(z)) = 0$

$f(1+\sqrt{2}) = 0$ であるから，上の結

$$f(j(1+\sqrt{2})) = j(f(1+$$

よって　　$f(1-\sqrt{2}) = j(0)$

(3) $\alpha = 1+\sqrt{2}$，$\beta = 1-\sqrt{2}$ $f(\alpha)$ $(\beta$ り，

$$(x-\alpha)(x-\beta) \quad -(\alpha+\beta) \quad \beta = x$$

を因 つ．このとき，$f(x)$ の最高次 と定 て

$$) = (x^2-2x-1)(x^2+e \quad (e$$ 定数)

おい 現すると

$$(x) = \quad)x^3 + (-d-2e-1)x^2 + (2d-e)x + d$$

の両 次，2 次の項 を比較して

$$e - \qquad -d-2e- \qquad 2d-e = -11$$

解い $= \mathbf{-5}$,

て $\mathbf{) = (x^2 \quad ^2 + x + 5)}$

1.9 $x^2 - 9x$ さない整数は，$x^2 - 9x + 14 \leqq 0$ を満たす整数.

ゆえに，$2 \leqq x \leqq$ たす整数で，3 の倍数でないものは　**2，4，5，7**

1.10 (1) **偽** 反例：$x = \quad = -2$

(2) **真**

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \geqq 0$$

ここで $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ より　$x+y \geqq 0$ であるから

$$x - y \geqq 0 \quad \text{よって} \quad x \geqq y$$

見本

1.11 (1) 真である．

(背理法で証明する)

x が無理数かつ y が有理数ならば，$x+y$ が有理数であると仮定すると

$$x = (x+y) - y$$

において，左辺は無理数，右辺は有理数となり，矛盾が生じる．

よって，x が無理数かつ y が有理数ならば，$x+y$ [illegible] である．

(2) 偽である．

(反例) $x = 1+\sqrt{2}$，$y = 1-\sqrt{2}$ [illegible]

(1) の結論から x，y は無理数である [illegible]

$$x + y = (1 + [illegible]$$

よって，x，y は無理数であ [illegible] $+ y$ [illegible]

1.12 (1) **偽，反例　$a = 4$**

(2) **真**

対偶 [illegible] 有理数ならば，a も有理数で [illegible]

[証 [illegible] a が [illegible] のとき，整数 m と 0 でな [illegible] 数 n [illegible] 用いて

$$\sqrt{a} = [illegible]$$

表さ [illegible] と [illegible] 辺を平方すると

$$a = \left([illegible] \right)^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

[illegible] は整 [illegible] n [illegible] ない整 [illegible] で，a は有理数である．

対偶 [illegible] されたの [illegible] 真である．

1.13 逆の命 [illegible] **「$ab = 0$ かつ $b = 0$ ならば $ab = 0$」 (真)**

対偶命題 [illegible] **「$a \neq$ [illegible] は $b \neq 0$ ならば $ab \neq 0$」 (偽)**(反例 $a = 0, b = 1$)

1.14 (1) m と n の最大 [illegible] 数を G とし

$$m = Gm', \quad n = Gn'$$

とすると (m', n'は互いに素)

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$$

見本

が成り立つ．ここで，$\dfrac{m'}{n'} = \sqrt{2}$ であると仮定すると

$$m' = \sqrt{2}n'$$

この両辺を平方すると

$$m'^2 = 2n'^2$$

よって，m'^2 は偶数，すなわち m' は偶数である．偶[illegible]ある自然数 k を用いて，$m' = 2k$ と表されるか[illegible]

$$(2k)^2 = 2n'[illegible]$$

よって，n'^2 は偶数となり，n' も偶数[illegible]
m' と n' がともに偶数となること[illegible]
する．

したがって　$\dfrac{m'}{n'} \neq \sqrt{2}$[illegible]て　[illegible]

(2) (1) の結果から，p，q が自[illegible]数ならば $\dfrac{p}{q} \neq$[illegible]である

[illegible]のとき　$\dfrac{q}{p} > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち

$\dfrac{p}{}$[illegible]　$\dfrac{q}{} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち[illegible]$< \sqrt{2}$

[illegible]，$\dfrac{p}{}$[illegible]と $\dfrac{2q}{p} < \sqrt{2} < \dfrac{p}{q}$ が成り立つ．

真　命[illegible]と b[illegible]と有理数なら[illegible]有理数である」は真である．
こ[illegible]の対偶[illegible]ある．
[illegible]反例：$b =$[illegible]

(3) [illegible]$f(2[illegible] = 2^{2n-1} +$[illegible]$+ (-2)^{2n-1} \equiv 0 \pmod 5$

1.16　(1) **真**

2 つの有理数[illegible]a，b，c，d $(b \neq 0,\ d \neq 0)$ を用いて $\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{c}{d}$ とおくと，その和

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

は有理数[illegible]

(2) **偽**

［反例］2 つの無理数 $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ の和 0 は有理数である．

見本

(3) **偽**

［反例］2 つの無理数 $\sqrt{2}$ と $\sqrt{2}$ の積 2 は有理数である．

(4) **偽**

［反例 1］$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ を考える．

「$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ が有理数」ならば，これが反例を与える．

「$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ が無理数」ならば，

$$\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2})^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{2} = 2$$

となり，無理数 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ の $\sqrt{2}$ 乗（有理数となる．

［反例 2］$(\log_2 9$ が無理数であるこ

なお，$\log_2 9$ が有理数 $\frac{p}{q}$（整数，$q \neq$ する

$9 = 2^{\frac{p}{q}}$　すなわち　2^p

偶数 p，q はないので，$\log_2$ 理数である．

1.17　次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が有理数の解 $\frac{q}{p}$ をもつとき

$a\left(\frac{q}{p}\right)^2 + b\left(\frac{q}{p}\right) + c = 0$　ゆえに $aq^2 + bpq + cp^2 = 0 \quad \cdots (*)$

「p と q ともに奇数」の否定は「p, q 少なくとも一方が偶数」である

a, b, c は既約分数より，次の (i), (ii) である．

(i) p が偶数，q が奇数のとき，$(*)$ より

$$p(bq + cp) = -aq^2$$

上式において，左辺は偶数，右辺は奇数となり，矛盾．

(ii) p が奇数，q が偶数のとき，$(*)$ より

$$q(aq + bp) = -cp^2$$

上式において，左辺は偶数，右辺は奇数となり，矛盾．

(i)，(ii) より，p と q はともに奇数である．

見本

(2) この 2 次方程式が有理数の解をもつとき，$(*)$ をみたす p，q が存在する．
また，(1) の結果から，aq^2，bpq，cp^2 は奇数である．
このとき，$(*)$ の左辺は奇数，$(*)$ の右辺は偶数であるから，矛盾する．
よって，この 2 次方程式は有理数の解をもたない．

1.18 (1) $1.41^2 = 1.9881$，$1.42^2 = 2.0164$ であるから

$$1.41^2 < 2 < 1.42^2 \quad \text{ゆえに} \quad 1.41 < \sqrt{}$$

よって，$\sqrt{2}$ の小数第 2 位の値[illegible]ある．

(2) 「n^2 が偶数なら[illegible]ある．」
この命題の対偶は

「n が奇数ならば[illegible] $\cdots (*)$

奇数 n は，ある整数 m を用[illegible] $= 2m$[illegible]

$$n^2 = [illegible] + 1)^2 = 4m[illegible] m + 1$$
$$= 2(2m^2 + 2m) +$$

[illegible] m は整数であるから，n^2[illegible]数[illegible]る．
[illegible]って，[illegible]真であり，元の命題も[illegible]る．

[illegible]「[illegible]理数[illegible]仮定すると，
[illegible]整数[illegible]用い[illegible] b は互いに素)

$$\sqrt{2} =$$

[illegible]こと[illegible]る．[illegible] $\sqrt{2}$[illegible] これを平方すると

$$\cdots ①$$

よ[illegible] a^2[illegible]である．(2) の結果から，a は偶数である．
偶数 a は，整[illegible]用いて，$a = 2c$ と表されるから，① に代入して

$$2b^2 = (2c)^2 \quad \text{ゆえに} \quad b^2 = 2c^2$$

よって，[illegible]数となり，b も偶数である．
a と b が偶数となることは，a と b が互いに素であることに反する．
よって，$\sqrt{2}$ は有理数ではない．

見本

2.1 a，b，c は連続する 3 つの自然数であるから　$a=b-1$，$c=b+1$

これを $a^2+b^2=c^2$ に代入すると

$$(b-1)^2+b^2=(b+1)^2 \quad \text{整理すると} \quad b(b-4)=0$$

$b>0$ であるから　$b=4$　　よって　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5)$ の 1 組のみ

2.2　(1) 2 次方程式 $x^2+2(n-5)x+n^2-n=0$ の判別式を D とすると

$$D/4=(n-5)^2-1\cdot(n^2-n)=-9$$

方程式が実数解をもつので，D [illegible] り

$$-9n+25 \geqq 0 \quad \text{こ} \quad < \frac{25}{}$$

n は 0 以上の整数であるから　　$\boldsymbol{n}$ [illegible]

(2) 求める 2 桁の自然数の十の位を [illegible] と

$(x+n)^2=10x+n$　ゆ [illegible] $x^2+2($ [illegible] $x+$ [illegible] $(*)$

x は実数であるから，(1) の結果より　n [illegible]，2

i) [illegible] とき，$(*)$ は

$x^2-10x=0$　これを解 [illegible]，10

x は [illegible] であるから，これらは

ii) [illegible] のとき

x [illegible] 0　これを解いて　$x=0,\ 8$

x [illegible] 位の数 [illegible] から，適す [illegible]　$x=8$

iii) [illegible] のとき

[illegible] $-$ [illegible] 0 [illegible] 解いて　$x=3\pm\sqrt{7}$

[illegible] 数である [illegible] らは不適.

i) [illegible] り [illegible] る 2 けた数は　　**81**

2.3　(1) $x^2-2ax+a$ [illegible] 0　$(*)$ の判別式を D とすると

$$= (-2a)^2-4\cdot1\cdot\left(a+\frac{1}{4}\right)=4a^2-4a-1$$

2 次方程式 $(*)$ が実数解をもつとき，$D\geqq 0$ であるから

$$4a^2-4a-1\geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a\leqq\frac{1-\sqrt{2}}{2},\ \frac{1+\sqrt{2}}{2}\leqq a}$$

印刷本

(2) 2つの解の差は $\dfrac{2a+\sqrt{D}}{2}-\dfrac{2a-\sqrt{D}}{2}=\sqrt{D}$

このとき $\sqrt{D}=1$ ゆえに $D=1$

したがって $4a^2-4a-1=1$ ゆえに $2a^2-2a-1=0$

これを解いて $\boldsymbol{a=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$

(3) $(*)$ の解について，次式が成り立てばよいから

$$\frac{2a-\sqrt{D}}{2}>1 \quad \text{ゆ} \quad >\sqrt{D}$$

したがって $\begin{cases} a-1>0 \\ 4(a-1)^2>4a^2 \end{cases}$ か

よって，上の結果と (1) の範囲を求め $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

別解 $f(x)=$ $2ax+a+\dfrac{1}{4}=(x-a)^2-\dfrac{D}{4}$ から

$a>1, \quad f(1)>0, \quad \leqq 0$

すな a $+\dfrac{5}{4}>0, \quad 4a^2-4a-1\geqq 0$

これを解 $-\leqq a<$

f 0 より $2x+\dfrac{1}{}$ 0

ゆえに x^2 $1>0$

したがって $\left(x+\dfrac{1}{a}+1\right)\left(x+\dfrac{1}{a}-1\right)>0$

よって $\boldsymbol{<-\dfrac{1}{a}-1, \quad -\dfrac{1}{a}+1<x}$

見本

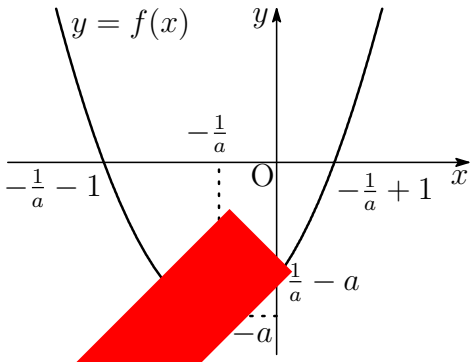
(2) $f(x)=a\left(x+\dfrac{1}{a}\right)^2-a$ であるから，

$y=f(x)$ は

$$\left(-\frac{1}{a},\ -a\right)$$

を頂点とする下に凸の放物線.

グラフは，右の図のようになる.



(3) 放物線 $y=f(x)$ の軸は　$x=-$

$-2\leqq x\leqq 1$ の中央は　$x=-\dfrac{1}{2}$

i) $-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{1}{a}$　すなわち　$a>$

$f(-2)=$　$\dfrac{1}{a}-$

ii)　$\dfrac{1}{2}$　すなわち　$1<a\leqq 2$ の

$m(a)=f(1)=$　$\dfrac{1}{a}$

$=\begin{cases} \mathbf{2} & \textbf{(1<a≦2のとき)} \\ \dfrac{1}{a}+ & \textbf{<a} \end{cases}$

2 次関　に凸の　線) の閉区間に　最大値は

定　の中央　にあると　域の左端で最大値をとり，

域の中　値より　義域の右端で最大値をとる.

2.5 (1)　$=px-(ax^2+c)$

$=-ax^2+(p-b)x-c$

$=-a\left(x-\dfrac{p-b}{2a}\right)^2+\dfrac{(p-b)^2}{4a}-c$

$-a<0$ より　$f(x)$ の最大値 $g(p)$ は

$$g(p)=\frac{(p-b)^2}{4a}-c$$
$$=\frac{1}{4a}p^2-\frac{b}{2a}p+\frac{b^2}{4a}-c$$

見本

したがって　　$g(x)=\dfrac{1}{4a}x^2-\dfrac{b}{2a}x+\dfrac{b^2}{4a}-c$

$f(x)=g(x)$ であるから

$$a=\frac{1}{4a},\quad b=-\frac{b}{2a},\quad c=\frac{b^2}{4a}-c$$

$a>0$ より　$a=\dfrac{1}{2},\ b=0,\ c=0$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{2}x^2}$

(2)　　$xp-g(p)=xp-\left(\dfrac{1}{4a}x^2-\dfrac{}{2a}\right.$

$=-\dfrac{1}{4a}p^2+\dfrac{b+}{}$

$=-\dfrac{1}{4a}\{x^2-(2ax)\}^{2}+$

$-\dfrac{1}{4a}<$ より，求める最大値 $h(x)$ は

$\boldsymbol{h(x)=a}$

条件

$q(p)$　したがって　$xp-g(p)\leqq f(x)$

第 2 ，p の　$p-g(p)$　大値 $h(x)$ は

$\boldsymbol{h(x)}$　$\boldsymbol{x^2+bx+c}$

$px+$　t で　ときに，2 式から y を消去すると

$\cdots$①　す　$ax^2+(b-p)x+c-q=0\cdots$②

$x=t$ は，① あるから

$$f(t)=pt+q\cdots③$$

$x=t$ は② であるから，$D=0$ より

$(b-p)^2-4a(c-q)=0$　ゆえに　$q=-\dfrac{1}{4a}(p-b)^2+c$

よって　　$q=-g(p)\cdots④$

見本

③，④ より　　$\boldsymbol{pt-f(t)=g(p)},\ \boldsymbol{q=-g(p)}\quad\cdots(*)$

逆に，$(*)$ の第 1 式から

$$pt-(at^2+bt+c)=\frac{1}{4a}(p-b)^2-c$$

$$t^2-\frac{1}{a}(p-b)t+\frac{1}{4a^2}(p-b)^2=0$$

したがって　　$\left(t-\dfrac{p-b}{2a}\right)^2=$

ゆえに　　$t=\dfrac{p-b}{2a}$　よって

$(*)$ より　　$q=-pt+f(t)$

⑤，⑥ および $p=f'(t)$ であるから　　は

$y=px-pt+f(t)$　すなわち

上式は，$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における

別解　$(*)$ の最大値が $g(p)$ であることを

が $x=t$ で $y=f(x)$ に接す

2 次

$q=f(x)$ は $x=t$ を

$\Longleftrightarrow$

$f(x)=-q$ は $x=t$ に

$\Longleftarrow$ 凸の

$-f(x)$ と直線 $y=-q$ は点 $(t,\ g(p))$ で接する．

$pt-f$ (p)，　(p)，　すなわち $g(p)=pt-f(t)$ かつ $q=-g(p)$

$\theta \leqq$ 135°　　**80°**

3. で，　の半径

BD　BC の直

と中心角

により，

$\angle$B　$\angle$BAC $=A$

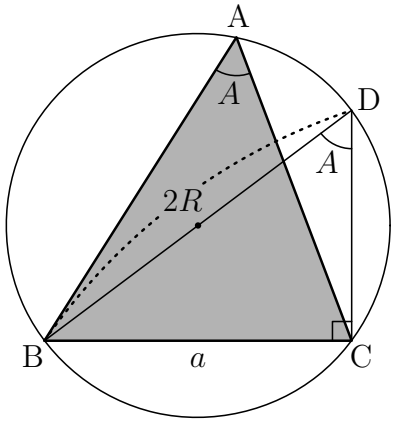
$\angle$B　$90°$

が成り立つ．　$\mathrm{BD}=2R$ である．

よって，　において

$$a=2R\sin A$$

が成り立つ．



印刷本

$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とおくと，同様に

$$b = 2R\sin B, \quad c = 2R\sin C$$

が成り立つ．よって，次の正弦定理を得る．

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

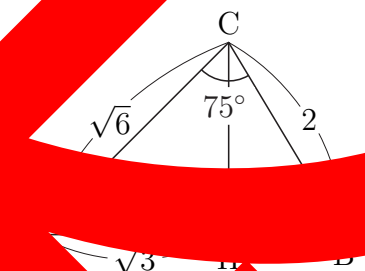
(2) $A = 45°$，$B = 60°$，$C = 75°$，$a = 2$ の △ABC
の C から辺 AB に垂線 CH を引 BH = 1
AH = CH = $\sqrt{3}$ であるから

$$b = \sqrt{6}, \quad c = \sqrt{3} + 1$$

△ABC に正弦定理を適用すると

$$\frac{2}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{3}+}{\sin}$$

ゆえに $\sin 75° = \dfrac{(\sqrt{3}+1)\sin 45°}{2} = \dfrac{\sqrt{}}{}$ $\boldsymbol{\sqrt{2}}$



3.3 (1) C に 理を適用すると $\cos\angle B$ $\dfrac{4}{2\cdot4\cdot6} = \dfrac{-5^2}{}$ $= \boldsymbol{\frac{}{16}}$

(1) と

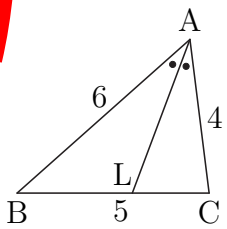
$$\frac{}{} = \frac{-4^2}{} = \frac{3}{4}$$

AL は 二等分 るから

$$\mathrm{BL} = \frac{3}{+4} \times 5$$

理を適用

$$\mathrm{AL}^2 = 3^2 - 2\cdot6\cdot3\cos B = 18 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\mathrm{AL} = 3\sqrt{2}}$$



3.4 $a : b : c = 7 : 6 : 5$

$$a = 7k, \quad b = 6k, \quad c = 5k$$

とおくと (k は正の定数)，余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(6k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2\cdot6k\cdot5k} = \frac{1}{5}$$

印刷本

ゆえに　　$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

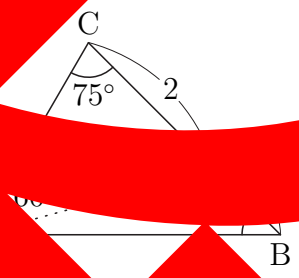
$\frac{1}{2}bc\sin A = 12\sqrt{6}$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 6k\cdot 5k \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 12\sqrt{6} \quad \text{これを解いて} \quad k=\sqrt{2}$$

よって　　$a = \mathbf{7\sqrt{2}}$

3.5　(1) 正弦定理により

$$\frac{3}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} \quad \text{ゆえに}$$



加法定理により

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ+30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ\cos 3\quad 45^\circ\sin\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{}{\sqrt{2}}\frac{}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{}}{4}\end{aligned}$$

△　　を S とすると

$$S = \quad 75^\circ = \frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{6}\times\quad\frac{\sqrt{2}}{} = \mathbf{\frac{3}{4}(3+\sqrt{3})}$$

第　　理に

$$c \quad B+\quad = 3\cos\quad\sqrt{6}\cos 60^\circ = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

よ　　$= \frac{1}{}$　　$\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}+}{}\quad\times 3\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}(3+\sqrt{3})$

余1余

$$\begin{aligned}a &= \quad + c\cos B\\ b &= c\cos A + a\cos C\\ c &= a\cos B + b\cos A\end{aligned}$$

単に余弦定理　　と第2余弦定理を指す.

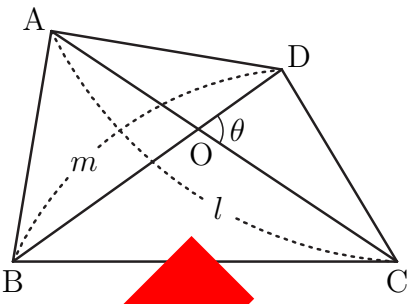
(2) △DAC と　　について

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CA}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}, \quad \angle\mathrm{C}\text{ は共通}$$

2組の辺の比とその間の角が等しいから　　△ABC ∽ △DAC

見本

3.6 (1) 右の図において，$a=\mathrm{OA}$，$b=\mathrm{OB}$，$c=\mathrm{OC}$，$d=\mathrm{OD}$ とおくと



$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}ab\sin\theta,$$
$$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}bc\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}bc\sin\theta$$
$$\triangle\mathrm{OCD}=\frac{1}{2}cd\sin\theta,$$
$$\triangle\mathrm{ODA}=\frac{1}{2}da\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}d\quad\theta$$

よって　　$S=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC}+\quad\quad\mathrm{DA}$
$$=\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)$$
$$=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)$$

(2) 条件より　　$l+m=k$

相加平均・相乗平均の関係 $\dfrac{l+m}{2}\geqq\sqrt{lm}$ の式を代

$$\frac{k}{2}\geqq\sqrt{lm}\quad\text{ゆえに}\quad\quad 4$$

が成り立つ．等号が成立するのは $l=m$ のときである．

よって，$l=$ $\dfrac{k}{2}$，のとき面積の最大値 $\boldsymbol{\dfrac{k^2}{8}}$ をとる．

$\tan A$ と $1+$ $=\dfrac{1}{\cos^2 A}$ に代入すると

$$+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 A}\quad\text{これに}\quad\cos^2 A=\frac{9}{25}$$

$\tan A$ は鋭角であるから，$\cos A>0$ より

$$\boldsymbol{\cos A=\frac{3}{5}}$$

また　　$\sin A=\tan A\cos A=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{5}=\boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$

(2) 外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$2R=\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=6\div\frac{4}{5}\qquad\text{よって}\qquad\boldsymbol{R=\frac{15}{4}}$$

印刷本

(3) $b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とおくと，余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

に $a = 6$，$\cos A = \dfrac{3}{5}$ を代入すると

$$6^2 = b^2 + c^2 - \frac{6}{5}bc \quad \text{ゆえに} \quad 36 - \frac{4}{5}bc = (\quad c)^2$$

したがって　$36 - \dfrac{4}{5}bc \geqq 0$　すな　　$bc \leqq 45$

上式において，等号が成立するの　　のときである．

よって，△ABC の面積は，$\mathbf{AB = 3}$

$$\frac{1}{2}bc\sin$$

3.8　(1) △BCD に余弦定理を適

$$^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot3\cdot5\cos 120^\circ$$

$$49$$

> 0 こ　　$\mathbf{BD = 7}$

四角　CD が　　接しているので，

対　　角は 1　　て

$= 180$　　CD = **60**

(1)　　から　　の二等辺三　　あるから　$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BDA}$

に，(2)　　に　　BA　　DA = 60°

が　　ABD は正　　る．

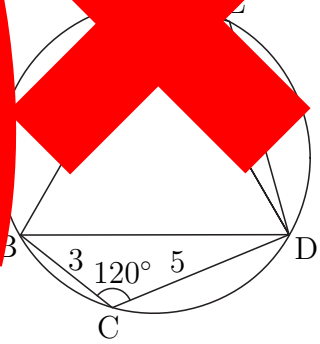
　　DE も円に内接するので

$$\angle\mathrm{AED} = 180^\circ - \angle\mathrm{ABD} = 120^\circ$$

$x = \mathrm{AE}$ とお　　△ADE に余弦定理を適用すると

$$7^2 \quad + x^2 - 2\cdot6\cdot x\cos 120^\circ \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 6x - 13 = 0$$

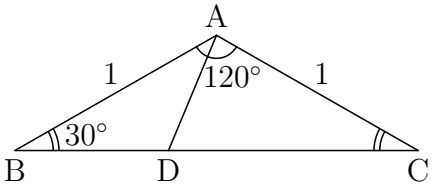
$x > 0$ に注意して，これを解くと　$\mathbf{AE = -3 + \sqrt{22}}$



見本

3.9 (1) △ABC に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cos A \\ &= 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cos 120^\circ \\ &= 3 \end{aligned}$$



$\mathrm{BC} > 0$ より　$\mathrm{BC} = \sqrt{3}$

D は，BC を $m : n$ に内分する点であるから

$$\mathrm{BD} = \frac{m}{\quad + n}$$

△ABC は，$\angle \mathrm{BAC} = 120^\circ$ の二等辺

△ABD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} \mathrm{AD}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B} \quad \mathrm{AB}\cdot \\ &= 1^2 + \left(\quad + n \right)^2 - 2 \quad \frac{\sqrt{3}}{m+n} \\ &= \frac{m^2 - mn + n^2}{(m+n)^2} \end{aligned}$$

って，　DE の面積は

$$\triangle \quad {}^2 \sin 60^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}(m^2 - mn + n^2)}{4(m+n)^2}}$$

$$= \frac{1}{\quad} \quad \sin A = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 \quad 0^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

き，△　　ADE で　　っ

$$\sqrt{\quad} \quad \frac{\sqrt{3}(m^2 - \quad}{4(m+n)} \quad \text{ゆえに} \quad 2m^2 - 5mn + 2n^2 = 0$$

これから　　$2n)(2m - n) = 0$　すなわち　$m = 2n$，$n = 2m$

よって　　$= \mathbf{2 : 1}$　**または**　$\mathbf{1 : 2}$

3.10 (1) 辺の長さは　　るから　$x^2 - 2x > 0$　かつ　$4 - x > 0$

これを解)　　$x < 0,\ 2 < x < 4$　$\cdots$①

題意より　$\sqrt{x^2 - 2x} \geqq 4 - x$，　$\sqrt{x^2 - 2x} \geqq 2$

第 1 式から　　$x^2 - 2x \geqq 16 - 8x + x^2$　ゆえに　$x \geqq \dfrac{8}{3}$　$\cdots$②

見本

第 2 式から　　$x^2-2x \geqq 4$　ゆえに　$x \leqq 1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5} \leqq x$　$\cdots$③

3 辺の長さによる三角形の存在条件から　$\sqrt{x^2-2x} < (4-x)+2$

したがって　$\sqrt{x^2-2x} < 6-x$　ゆえに　$x^2-2x < 36-12x+x^2$

これを解いて　　$x < \dfrac{18}{5}$　$\cdots$④

①，②，③，④ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{1+\sqrt{5} \leqq x}$ <

(2)　$2-(4-x)=x-2$

(1) の結果から　　$\sqrt{5}-2 \leqq x$ <

また，$\sqrt{5}-2>0$ であるから　x <　$2-(4-x)>0$

すなわち　$2>4-x$　よって，最短

余弦定理により　$\cos\theta = \dfrac{(x^2-$ <　$\dfrac{3(x-$ <

このとき，$x-2>0$ であ <

$$\cos\theta = \frac{3(x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{(x-2)^2}{x^2-2x}} = \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{2}{x}}$$

(<の結果 $\theta = \dfrac{3}{2}\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}$

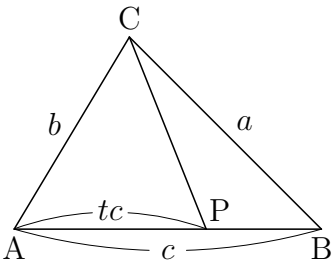
上式 <の結果 $\cos\theta$ は $\boldsymbol{x=1+}$ <とき最小となり，最小値は

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5}-2)^2}{1+\sqrt{5}}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}} = \frac{\boldsymbol{3(\sqrt{5}-1)}}{\boldsymbol{4}}$$

3 <) △ <と余弦 <すると

$A = \dfrac{b^2$ <

△ <と余 <を適用すると



$\mathrm{CP}^2 =$ <$(tc)^2 - 2b\cdot tc\cos A$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{CP}^2 &= b^2+(tc)^2-2b\cdot tc\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ &= b^2+t^2c^2-t(b^2+c^2-a^2)\\ &= \boldsymbol{ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2}\end{aligned}$$

見本

(2) CP $= a$ を (1) の結果に代入すると

$$a^2 = ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2-t)c^2$$

ゆえに　　$(t-1)(a^2 - b^2 + tc^2) = 0$

$t \geqq 0$ に注意して

$b \geqq a$ のとき　$t = 1,$ $\dfrac{b^2 - a^2}{c^2}$

$b < a$ のとき　$t = 1$

(3) AB 上にちょうど 2 つあるのは，$t = 1$ と (2) の条件を満たす t が 2 個あればよい．したがって，(2)

$b \geqq a$ のとき $(B \geqq A)$

$$\frac{b^2 - a^2}{c^2} < 1 \quad \text{すなわ} \quad c \quad B < 9$$

よって　　$\boldsymbol{A \leqq B < 9}$

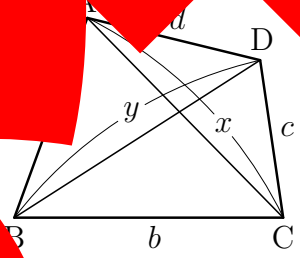
3.12　(1) 余弦定理より

$$\boldsymbol{\frac{a^2 + d^2 - y^2}{2ad}}$$

$$\boldsymbol{\cos B = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab}}$$

$$\boldsymbol{\cos C = \frac{b^2 + c^2 - y^2}{2bc}}$$

$$\boldsymbol{\cos D = \frac{c^2 + d^2 - x^2}{2cd}}$$



四角形 ABC に内接するとき　$\angle B + \angle D = 180°$ より　$\cos B + \cos D = 0$

結果を x に代入して

$$\frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab} + \frac{c^2 + d^2 - x^2}{2cd} = 0$$

したがって　$(ab + cd)x^2 = cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)$

$$x^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd} \quad \cdots ①$$

同様に，$\cos A + \cos C = 0$ に (1) の結果を代入して

$$\frac{a^2 + d^2 - y^2}{2ad} + \frac{b^2 + c^2 - y^2}{2bc} = 0$$

印刷本

したがって　　$(ad+bc)y^2 = bc(a^2+d^2) + ad(b^2+c^2)$

$$y^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc} \quad \cdots ②$$

①，② より　　$x^2y^2 = (ac+bd)^2$　よって　$xy = ac+bd$

解説　トレミーの定理 (熊大 [文]2011) 1

4.1　分散 s^2 の定義により

$$s^2 = \frac{1}{3}\{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + (x_3-\overline{x})^2$$
$$= \frac{1}{3}\{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 - 2\overline{x}(x_1+x_2+x_3) + 3\overline{x}^2\}$$

$\overline{x} = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$ より，$x_1+x_2+x_3 = 3\overline{x}$

$$s^2 = \frac{1}{3}\{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 - 6\overline{x}^2 + 3\overline{x}^2\}$$
$$= \frac{1}{3}({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2) - \overline{x}^2$$
$$= \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

4.2　(1)　X_1 の最大値と最小値はそれぞれ 6，1 で $X_2 - X_1$ であるから，データの

$$(2-X_2) - (2-X_1) = X_1 - X_2 + 3$$

7 以下となる

$$X_1 - X_2 + 3 \leqq 7 \quad \text{すなわち} \quad X_1 + X_2 \leqq 4$$

これを満たす (X_1, X_2) は，次の

$$(X_1, X_2) = (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$$

$1 \sim 6$ の 6 通りであるから，求める確率は

$$\frac{6\times 6}{6^3} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

(2)　$2 - X_1 < 2 < 2 + X_2$ であるから，X_3 がデータの中央値であるとき

$2 \leqq X_3 \leqq 5$　これを満たす X_3 は 4 通り

このとき，X_1，X_2 は，ともに $1 \sim 6$ の 6 通りであるから，求める確率は

$$\frac{4\times 6\times 6}{6^3} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

印刷本

(3) 条件から　　$X_3 = \dfrac{2+5+(2-X_1)+(5+X_2)+X_3}{5}$

整理すると　　$4(X_3-3) = X_2 - X_1 + 2 \quad \cdots ①$

このとき，$1 \leqq X_1 \leqq 6$，$1 \leqq X_2 \leqq 6$ であるから

$$-3 \leqq X_2 - X_1 + 2 \leqq 7 \quad \cdots ②$$

①，② より，$X_2 - X_1 + 2 = 0,\ 4$ であるから

$X_2 = X_1 - 2$ $(X_1$ [illegible] $6)$ の [illegible] $X_3 = 3$

$X_2 = X_1 + 2$ $(X_1 =$ [illegible] $X_3 = 4$

よって，求める確率は　$\dfrac{4+4}{6^3}$ [illegible]

(4) $2 - X_1 < 2 < 5 < 5 + X_2$ より [illegible] いずれか [illegible] る．

i) 中央値が 2 のとき

$\dfrac{2+5+(2-X_1)+(5}{5}$ [illegible] $X_2) + X_3$ $=$ [illegible] えに [illegible] $X_3 + 4$

[illegible] $(X_1,\ X_2,\ X_3) = (6,\ 1,\ 1)$ [illegible]

中央 [illegible] き

[illegible] $+ (2 -$ [illegible] $(5 + X_2) + X_3 = 5$　ゆえに　$X_1 + 11 = X_2 + X_3$

この [illegible] $(X_1,$ [illegible] $_3) = (1,$ [illegible] の 1 通り

iii) 中 [illegible] が X_3 [illegible] (3) の結果より [illegible] 通り

[illegible] $\dfrac{8}{6^3}$

[illegible] か [illegible] る条 [illegible] $\dfrac{1+1+8}{6^3} = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$

5.1　(1) 0, [illegible] 3, [illegible] の 6 枚のカードから 3 枚のカードを取り出し左から並べてできる自然 [illegible] 個数は

$${}_6\mathrm{P}_3 = 120 \text{ (通り)}$$

このうち，[illegible] 自然数の個数は

$${}_5\mathrm{P}_2 = 20 \text{ (通り)}$$

よって，求める個数は　$120 - 20 = \mathbf{100}$ (通り)

見本

(2) $A=\{0,\ 5\}$，$B=\{1,\ 4\}$，$C=\{2,\ 3\}$，$a\in A$，$b\in B$，$c\in C$ とすると，3 桁の自然数 n は a，b，c を並べる次の 4 通りである．

$$bac,\quad bca,\quad cab,\quad cba$$

a，b，c の選び方は，それぞれ 2 通りであるから，求める場合の数は

$$4\times 2^3=\mathbf{32}\ (\text{通り})$$

5.2 「$1\leqq m$ または $n<0$」の整数の組は

$$(m,\ n)=(1,-1),\ (1,\ \quad),\ \quad,\ 2),$$
$$(-2,-1),\ (-\quad)$$

よって，求める整数の組の個数は

5.3 KADAI の 5 文字の並べ方の総数は $\dfrac{5!}{2!}=(\quad)$ り)

その中で 2 つの A が隣り合う並べ方の総数は $\quad 24$ (通

したがって，2 つの A が隣り合わない場合の総数は $60-24$ 通

5.4 最初の $\quad$ が $\quad$ N のとき，ともに $\dfrac{5!}{2!}$ (

$\quad$ 文字 $\quad$ (通り)

よって，求める総数は $\quad\times 5!=\mathbf{240}$ (通り)

5 $\quad,\ 4\}$，$\quad\{2,\ 5\}$，$\quad\{3\}$ とす

$\quad$ の要素 $\quad$ らなる $\quad$ 整数は 2^3 個

$\quad$ けか $\quad$ は 2

C $\quad$ だけからなる 3 桁の整数は

A，B，$\quad$ つからなる 3 桁の整数は

$$2\times 2\times 1\times 3!=24\ (\text{個})$$

よって，求める 3 $\quad$ 整数の個数は $2^3+2^3+1+24=\mathbf{41}$ (個)

5.6 正方形の一辺の $\quad$ n とすると，一辺の長さが k の正方形の個数は

$$(n+1-k)^2\qquad(1\leqq k\leqq n)$$

見本

であるから，その総数は

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

また，長方形の総数は

$${}_{n+1}\mathrm{C}_2\times{}_{n+1}\mathrm{C}_2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

よって，求める個数は

$$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+n-1)=\boldsymbol{\frac{1}{12}n(n+1)(3n+2)}$$

5.7 (1) 異なる 6 文字の並び方は　$6!=\mathbf{720}$ (通り)

(2) A，B をひとまとめにする．

残りの 4 文字と A，B ひとまとめにしたもの，計 5 つの並び方は　$5!$ (通り)

また，ひとまとめにした A，B の並び方は　$2!$ (通り)

よって，並び方の総数は　$5!\times 2=\mathbf{240}$ (通り)

(3) A と B が隣り合わない並び方であるから，(1)，(2) より

$$720-240=\mathbf{480}$$

5.8 a と d の選び方は　6^2 (通り)，　b と c の選び方は　6^2 (通り)

よって　${}_6\mathrm{C}_4\times 36=\mathbf{540}$ (通り)

(別解) $b<c$ のとき　${}_6\mathrm{C}_2$ (通り)，$b=c<d$ のとき　${}_6\mathrm{C}_3$ (通り)

よって　${}_6\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_2\times 15+20=\mathbf{35}$

5.9 (1) 1 列目の○のつけ方は 5 通り．2〜5 列目の○のつけ方も同様に 5 通り．

よって　$5^5=\mathbf{3125}$

(2) 1 行目に○をつけ，2 行目には，それぞれ b 列目，c 列目，d 列目，e 列目に○をつけるとする．求める選び方の総数は，a，b，c，d，e に 1 から 5 の数を並べる順列の総数に等しい．よって　$5!=\mathbf{120}$ (通り)

(3) ○のついている 2 列の選び方は　${}_5\mathrm{P}_2$ (通り)

○のついている 2 列が，4 個と 1 個の場合は　${}_5\mathrm{C}_4\cdot{}_5\mathrm{C}_1$ (通り)

○のついている 2 列が，3 個と 2 個の場合は　${}_5\mathrm{C}_3\cdot{}_5\mathrm{C}_2$ (通り)

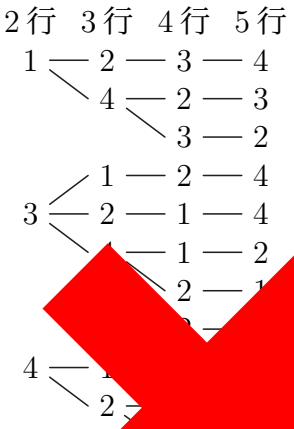
よって，求める選び方の総数は

$${}_5\mathrm{P}_2({}_5\mathrm{C}_4\cdot{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_3\cdot{}_5\mathrm{C}_2)=20(5\times 5+10\times 10)=\mathbf{2500}\text{ (通り)}$$

見本

(4) 2行から5行までの列の番号を樹形図で示すと次のようになる．

よって　**11** (通り)



5.10　(1) ${}_9\mathrm{C}_3 = \dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} = \mathbf{84}$ (通り)

(2) 玉1と玉2がいっしょに含まれる場合の数は 7 (通り)

玉1と玉3がいっしょに含まれる場合の数は 7 (通り)

玉1，玉2，玉3の3個がいっしょに含まれる場合の数は

$$84 - (7 + 7 - 1) = 71 \text{ (通り)}$$

9個の玉から，3つの箱に3個ずつ入れる場合の数は

$${}_6\mathrm{C}_3 \times {}_6\mathrm{C}_3 = 84 \times 20 \text{ (通り)}$$

これらの場合には，A，B，Cの区別をなくせばよいので

$$\frac{84 \times 20}{3!} = \mathbf{280} \text{ (通り)}$$

玉1と玉2がいっしょに含まれる場合の数は

$$7 \times {}_6\mathrm{C}_3 = 70 \text{ (通り)}$$

玉1と玉3がいっしょに含まれる場合の数は

$$7 \times \frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!} = 70 \text{ (通り)}$$

玉1，玉2，玉3がいっしょに含まれる場合の数は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!} = 10 \text{ (通り)}$$

よって，求める場合の数は

$$280 - (70 + 70 - 10) = \mathbf{150} \text{ (通り)}$$

見本

5.11 (1) 各桁の数の組合せは　$\{1,1,1,1,2\}$
したがって，求める個数は　${}_5\mathrm{C}_1 = \mathbf{5}$ (個)

(2) 各桁の数の組合せは　$\{1,1,1,1,3\}$, $\{1,1,1,2,2\}$
したがって，求める個数は　${}_5\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 = 5 + 10 = \mathbf{15}$ (個)

(3) 各桁の数の組合せは

$$\{\overbrace{1,1,\cdots,1}^{k-1\text{ 個}},4\},\ \{\overbrace{1,1,\cdots,1}^{k-2\text{ 個}},2,3\},\ \{\overbrace{1,\cdots,1}^{k-2},2,2,2\}$$

したがって，求める個数は

$${}_k\mathrm{C}_1 + {}_k\mathrm{C}_2 \times 2 + {}_k\mathrm{C}_3 = k + \frac{k(}{}$$

$$= \mathbf{1}$$ 個)

5.12 (1) 上下を逆さまにしても読めるカードは H，I，[illegible] の 4 文字で，これらの 4 文字から重複を許して並べるとき，上下を逆さまにして同じ順列を表すのは 1 番目と 5 番目，2 番目と 4 番目が同じ文字である．
[illegible] 順列の総数は，4 文字から重複を許して (4) 番目[illegible]目の[illegible]と重複を許して並べるカードの総数で

$$4^3 = \mathbf{64}\quad (\text{[illegible]})$$

(2) [illegible] を逆さまにしても読めるのは H，I，O，X の 4 文字で，これらの 4 文字から重複を許して[illegible]カードの[illegible]

$$4^5 = 10[illegible]\ )$$

[illegible]うち[illegible]を逆さまにしても同じ順列を表すのが，(1) の結果[illegible]って，求める[illegible]の総数は

$$1024 - 64 = \mathbf{960}\quad (\text{枚})$$

(3) 上下を逆さま[illegible]と読めないカードの総数は

$$10^5 - 4^5\quad (\text{枚})$$

(1) の結果から．上下を逆さまにしても読めるが，1 度しか使えないカードの総数は

$$4^3\quad (\text{枚})$$

印刷本

(2) の結果から，上下を逆さまにしても読めて，2 度使えるカードの総数は

$$\frac{4^5-4^3}{2}\quad (\text{枚})$$

よって，求めるカードの総数は

$$(10^5-4^5)+\frac{4^5-4^3}{2}+4^3=10^5-\frac{4^5}{2}+\frac{4^3}{2}=\mathbf{99}\square\mathbf{30}\quad (\text{枚})$$

5.13 (1) (i) 最高位が「3」のとき
残りの 9 個の位に「0」が[illegible]（通り）
(ii) 最高位が「2」のとき
残りの 9 個の位に「1」が 1 個と[illegible]（通り）
(iii) 最高位が「1」のとき
残りの 9 個の位に「2」が[illegible] 9（通り）
また「1」が 2 個と「0」[illegible]り）
(i)〜(iii) から　$1+9$[illegible]$=\mathbf{55}$（[illegible]

(2) (i) 「[illegible]」が 1 個,「0」が 9 個並ぶ　10（通[illegible]
(ii) [illegible]個,「1」が 1 個,「0」が 8 個[illegible]（通[illegible]
「2」[illegible]「0」が 8 個並ぶ　$\dfrac{10!}{2!8!}=$[illegible]通り）
(iv) [illegible]が 1 個[illegible]2 個,「0」が 7 個[illegible] $\dfrac{10!}{2!7!}=360$（通り）
「1」[illegible]「0」[illegible]並ぶ　$\dfrac{10!}{\square!\square!}=210$（通り）
(i)〜(v)[illegible] $1+45+360+$[illegible]$=\mathbf{715}$（通り）

2[illegible]回文数[illegible]を決めれ[illegible]ので $(n=1,2,3,4,5)$，その最[illegible]が 0 で[illegible]とに[illegible]

（通り）

$2n-$[illegible]桁の回[illegible]は，上位 n 桁を決めればよいので $(n=1,2,3,4,5)$，その最高位が 0[illegible]ことに注意して

$$9\cdot 10^{n-1}\quad (\text{通り})$$

よって，[illegible]回文数の総数は

$$2\sum_{n=1}^{5}9\cdot 10^{n-1}=18\sum_{n=1}^{5}10^{n-1}=18\times 11111=\mathbf{199998}\quad (\text{通り})$$

見本

5.14 (1) $105 = 3 \times 5 \times 7$

105 を最小公倍数とする 2 数 a，b について，次の場合がある．

「a だけが 3 を因数にもつ」

「b だけが 3 を因数にもつ」

「a と b がともに 3 を因数にもつ」

5，7 についても同様であるから，$(a,\ b)$ の組合せは全[illegible] 3^3 個ある．

このうち，$a = b$ となるのは a と b がともに 3，5[illegible]にもつ，すなわち，$a = b = 3 \times 5 \times 7$ のときで[illegible]．残りが[illegible]たは $a > b$ であり，これらの個数は等しい．

したがって　　$N(105) = \dfrac{3^3}{2}$[illegible]

(2) $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$

2310 を最小公倍数とする 2 数[illegible]合がある．

「a だけが 2 を因数に[illegible]

「b だけが 2 を因数に[illegible]」

「[illegible] b がともに 2 を因数にもつ」

3[illegible]についても同様であるから，[illegible]は全[illegible]個あ[illegible]この[illegible] $= b$ となるのは a と b が[illegible]2，[illegible]5，7，11[illegible]因数につ，さ[illegible] $b = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times$[illegible]ときである．残りが $a < b$ また[illegible] b で[illegible]れらの個数は等[illegible]

[illegible]って[illegible] $= \dfrac{3^5 - 1}{2} = \mathbf{121}$

$(n-4)$[illegible]と 4[illegible]1 を並べる[illegible]総数であるから

[illegible] $= [illegible]!4!$ $\boldsymbol{(n-[illegible]2)(n-3)}$　(通り)

(2)[illegible]が最大と[illegible] $\{a_n\}$ において -1 が連続して偶数回並[illegible]このとき，数列 $\{b_n\}$ は $n-2$ 個の 1 と 2 個の -1 からなる．したがっ[illegible]求める最大値は

$$(n-2)\cdot 1 + 2\cdot(-1) = \boldsymbol{n-4}$$

$b_1 + b_2 + \cdots$[illegible]が最小となるのは，$\{a_n\}$ において $a_1 = a_n = -1$ であり，残り[illegible]の -1 が連続して並ぶ場合であり，このとき，数列 $\{b_n\}$ は $n-2$ 個の -1 と 2 個の 1 からなる．したがって，求める最小値は

$$(n-2)\cdot(-1) + 2\cdot 1 = \boldsymbol{-n+4}$$

印刷本

(3) $b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大となるのは，$\{a_n\}$ において -1 が連続して偶数回並ぶ場合であるから，連続する 2 つの -1 をひとまとめにしたものを c とする．このとき，$n-4$ 個の 1 と 2 個の c を並べる順列の総数であるから

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)!2!}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{(n-2)(n-3)}\quad(\text{通り})$$

$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最小となるのは，$\{a_n\}$ において $a_{\square}=-1$ であり，2 つの -1 が連続して並ぶ場合であるから，連続する 2 つの -1 をひとまとめにしたものを d とする．このとき，$n-4$ 個の 1 個の d を並べる順列の総数であるから

$$\frac{(n-3)!}{(n-4)!1!}$$

5.16 目の出方の総数は　6^4 (通り)

3 の倍数の目，すなわち 3 または 6 が出る [illegible] 2^4 (

よって，求める確率は　$\dfrac{2^4}{6^4}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{81}}$

5.17 3 個と[illegible]目でない確率は　$\left(\dfrac{4}{6}\right)^3$

[illegible]確率は [illegible] (少なくとも 1 個は [illegible]数) の確率であるから

$$1-\frac{8}{27}=\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{27}}$$

[illegible]得る[illegible]総数[illegible] (通り)

[illegible]のうちの[illegible]なるのは

$\{1$ [illegible] $\}$ $\cdots$ [illegible]

$1,$ [illegible] $\cdots$ $\dfrac{4!}{2!}=12$ (通り)

$\{1,\ 2,\ 2$ [illegible] $\cdots$ $\dfrac{4!}{3!}=4$ (通り)

よって，求める[illegible]　$\dfrac{4+12+4}{6^4}=\dfrac{20}{6^4}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{324}}$

5.19 (1) $y=ax^2+2x-b=a\left(x+\dfrac{1}{a}\right)^2-\dfrac{1}{a}-b$

見本

$a>0$ であるから　最小値は $-\dfrac{1}{a}-b$

条件より　$-\dfrac{1}{a}-b<-5$　すなわち　$5-b<\dfrac{1}{a}$

$0<\dfrac{1}{a}\leqq 1$ であり，$5-b$ は整数であるから

$$5-b\leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b=5,\ 6$$

また，a は 1，2，3，4，5，6 の 6 通りある．

よって　$\dfrac{6\times 2}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(2) $f(x)=ax^2+2x-b$ とおくと

$$f(0)=-b<0$$

$a>0$ かつ $f(0)<0$ より $f(1)$ [illegible] ばよいから

$$f(1)=a+2-b<0 \qquad b>a+$$

これ[illegible]すのは，

[illegible] $5),(1,6),(2,5),(2,6),(3$

[illegible] 6 通) [illegible] $\dfrac{6}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(3) 2 [illegible] ax^2 [illegible] bx^2　すなわち　$(a-b)x^2+2x-b=0$

[illegible] を満た[illegible]，a [illegible] かつ判別式 $D>0$ のときであるから

[illegible] $=1+$ [illegible] $)>0$ より [illegible] $a)<1$

$b($ [illegible] は整数 [illegible] 0 である[illegible]

[illegible] ゆえに　$b<a$

b [illegible] b の組は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{6^2}=\boldsymbol{\frac{5}{12}}$$

5.20 $a_n\leqq 9$ となる確[illegible] とする．

[1] $n=1$ のと[illegible] すべての X_1 に対して $a_1=X_1\leqq 9$ であるから　$p_1=1$

[2] $n=2$ のとき

1 の目が 2 回出るのは，1 通り

見本

1 の目が 1 回だけ出るのは，残りの目が 1 以外で　$5 \times {}_2\mathrm{C}_1$ (通り)
1 の目が出ないのは，次の 6 通り

$$(X_1,\ X_2) = (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)$$

したがって　　$p_3 = \dfrac{1 + 5 \times {}_2\mathrm{C}_1 + 6}{6^2} = \dfrac{17}{36}$

[3] $n \geqq 3$ のとき，1 以外の目が出る回数は 3 回以内であることに注意して
1 の目が n 回出るのは，1 通り
1 の目が $(n-1)$ 回だけ出るのは，残りの目が　　$5 \times {}_n\mathrm{C}_1$ (通り)
1 の目が $(n-2)$ 回だけ出るのは，　　合せで　$6 \times {}_n\mathrm{C}_2$ (通り)

$$(2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2$$

1 の目が $(n-3)$ 回だけ出るのは

したがって　　$p_n = \dfrac{1}{6^n}(1$ $C_1 +$ $_2$

$= \dfrac{1}{6^n}\{$ $5n + 3n(n$ $\dfrac{n(n$ $\}$

$= \dfrac{1}{6^{n+1}}(n^3 + 15n^2 + 14$ $\cdots$ ①

① $= 1$ きも成り立つので

$$\boldsymbol{= \frac{1}{6^{n+1}}(n^3 + 15n^2 + 14n + 6)}$$

21 (君が k $\leqq n$) 勝つ確率　　$(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}p$
条件 $0 < p$ $< q < 1$ であ　　$(1-p)(1-q) \neq 1$
k 求め

$$\boldsymbol{= \frac{p\{1 - (1-p)^n(1-q)^n\}}{1 - (1-p)(1-q)}}$$

$p)^{k-1}(1$

(2) B 君 k $(1 \leqq$ $)$ 回目に勝つ確率は　　$(1-p)^k(1-q)^{k-1}q$
(1) と同様に， 勝つ確率は

$$\sum_{k}^{n} \quad)^k(1-q)^{k-1}q = \frac{q(1-p)\{1 - (1-p)^n(1-q)^n\}}{1 - (1-p)(1-q)}$$

A 君の勝つ確率が B 君の勝つ確率よりも大きくなるのは，上式および (1) の結果から

$$p > q(1-p)$$

見本

このとき，$p+q \leqq 1$ に注意して　　$\dfrac{q}{1+q} < p \leqq 1-q$

p，q は $\dfrac{j}{6}$ $(j=1,2,3,4,5)$ であるから

(i) $q=\dfrac{1}{6}$ のとき　$\dfrac{1}{7} < p \leqq \dfrac{5}{6}$　ゆえに　$p=\dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{6}, \dfrac{3}{6}, \dfrac{4}{6}, \dfrac{5}{6}$

(ii) $q=\dfrac{2}{6}$ のとき　$\dfrac{1}{4} < p \leqq \dfrac{4}{6}$　ゆえに　$p=\dfrac{2}{6}, \dfrac{3}{6}, \dfrac{4}{6}$

(iii) $q=\dfrac{3}{6}$ のとき　$\dfrac{1}{3} < p \leqq \dfrac{3}{6}$　ゆえに　$p=\dfrac{3}{6}$

(iv) $q=\dfrac{4}{6}$ のとき　$\dfrac{2}{5} < p \leqq \dfrac{2}{6}$　これを満たす p は存在しない

(v) $q=\dfrac{5}{6}$ のとき　$\dfrac{5}{11} < p \leqq \dfrac{1}{6}$　これを満たす p は存在しない

よって，求める $(X,\ Y)$ の組

$${}_6\mathrm{C}_1 \sum_{k=1}^{5} {}_5\mathrm{C}_k \times {}_3\mathrm{C}_{\square} + {}_6\mathrm{C}_2 \sum_{k=2}^{4} {}_4\mathrm{C}_k \times {}_3\mathrm{C}_{\square}$$

$$=6(2^5-1)+15(2^4-1-4)\times \square = \square$$

5.22 9個から3個取り出す場合の総数は　${}_9\mathrm{C}_3$ (通り)

取り出した3個の整数の和が12未満となる組は，次の16通り．

$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 6\}$,
$\{1, 2, 7\}$, $\{1, 2, 8\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$,
$\{1, 3, 6\}$, $\{1, 3, 7\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 4, 6\}$,
$\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$

よって　$1-\dfrac{16}{84}=\dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{21}}$

5.23　(1) 箱Aから青玉を1個取り出す確率は　$\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

箱Bからくじを3本引くとき，少なくとも当たりくじを1本引く確率は

$$1-\frac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{17}{24}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{17}{24}=\dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{60}}$

見本

(2) (1) と同様に，箱 A から赤玉を取り出し，箱 B から少なくとも当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{1}{10}\left(1-\frac{{}_7\mathrm{C}_5}{{}_{10}\mathrm{C}_5}\right)=\frac{11}{120}$$

また，箱 A から黄玉を取り出し，箱 B から少なくとも当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{5}{10}\left(1-\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\right)=\frac{4}{15}$$

よって，求める確率は，これと (1) の結果により

$$\frac{11}{120}+\frac{1}{60}$$

(3) 箱 A から赤玉を取り出し，箱 B から

$$\frac{1}{10}\times\frac{}{{}_{10}\mathrm{C}_5}$$

箱 A から青玉を取り出し，箱 B から当たりくじを

$$\frac{4}{10}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}$$

取り出し，箱 B から当たりくじを引く確率

$$\frac{5}{10}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}$$

求める確率は

$$\frac{1}{4}+\frac{21}{100}+\frac{7}{20}=\frac{\mathbf{97}}{\mathbf{200}}$$

取り出す赤球の個数が 2 であるのは，[1]，[2] の場合である．

[1] 1 回目に赤球 1 個と白球 1 個を取り出し，箱の中には赤球 2 個，白球 6 個が残り，2 回目に箱から 2 個取り出す場合で，その確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{6}{45}\times\frac{15}{28}=\frac{1}{14}$$

[2] 1 回目に白球をそれぞれ 1 個ずつ取り出し，箱の中には赤球 3 個，白球 5 個残り，2 回目に赤球 1 個を取り出す場合で，その確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{3}{8}=\frac{4\times6}{45}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{5}$$

[1]，[2] は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{14}+\frac{1}{5}=\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{70}}$$

見本

(2) 取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえるのは，上の［2］と次の［3］の場合である．

［3］1回目に赤球を2個取り出し，2回目に取り出した球が2個とも赤球，または，赤球と白球が1個ずつの場合で，その確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{6}{45}\times\frac{1+2\times6}{28}=\frac{13}{210}$$

［2］，［3］は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{}+\frac{13}{}=\frac{}{\mathbf{42}}$$

5.25 (1) $n=3$ のとき，0, 0, 1, 2, 3 の数が書[illegible]数の[illegible]が書かれた2個の球を 0_1, 0_2 と区別する．

0_1, 0_2, 1, 2, 3 の5つから3つ[illegible]総数は

$$[illegible]3=6[illegible])$$

$a+b\leqq$[illegible]となる $(a,\ b)$ の組は c の値によ[illegible]の場合[illegible]れる．

(i)[illegible]とき，0_1, 0_2 の2つを並べる順[illegible]総[illegible]

$$2!=2\cdot1=2$$

(ii) c[illegible]と[illegible]$_2$, 1 の3つから2[illegible]順列の総数であるから

$$[illegible]\mathrm{P}_2=3\cdot2=6\ (\text{通り})$$

(iii) $c=$[illegible]とき，[illegible]1, 2 の4つ[illegible]つとる順列の総数であるから

$$[illegible]{}_4\mathrm{P}_2=4[illegible]\ (\text{通り})$$

[illegible]て $\qquad P(3)=[illegible]=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

(2) (iv) [illegible]$=$[illegible]) を満たすのは $c\geqq3$，$a\neq0$，$b\neq0$ のときである．

c が奇数[illegible]，① を満たす $(a,\ b)$ の組数は下に示した $c-1$ (組)

[illegible]$b)=(1,\ c-1),\ (2,\ c-2),\cdots,(c-1,\ 1)$

c が偶数[illegible]き，$a\neq b$ により，① を満たす $(a,\ b)$ の組数は $c-2$ (組)

したがって，① を満たす $(a,\ b)$ の組数は

$$c-1-\frac{1+(-1)^c}{2}=c-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{c-1}\quad(c\geqq3)$$

印刷不可

(v) a, b の少なくとも 1 つが 0 で $a+b \leqq c$ $(c \geqq 3)$ を満たす $(a,\ b)$ の組数は，$0_1,\ 0_2,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ c-1$ の $c+1$ 個から 2 個とる順列の総数から $1,\ 2,\ \cdots,\ c-1$ の $c-1$ 個から 2 個とる順列の総数を引いたものであるから

$$ {}_{c+1}\mathrm{P}_2 - {}_{c-1}\mathrm{P}_2 = (c+1)c - (c-1)(c-2) = 4c-2 $$

$a+b \leqq c \cdots$② を満たす c の値は　$c \geqq 1$

c の値に対して ② を満たす $(a,\ b)$ の組の総数を [illegible] る．

$c \geqq 3$ のとき，(iv)，(v) から

$$ f(c) = \sum_{k=3}^{c} \left\{ k - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{k-1} \right. $$

$$ = \frac{1}{2}(c-2)(3+c) - [illegible] + 4c[illegible]2 $$

$$ = \frac{1}{2}c^2 + 3c - \frac{7}{4} + \frac{1}{4}(-1)^{c-1} \quad (*) $$

(i)，(ii) から　$f(1) = 2,\quad f(2) = 6$

[illegible] $c = 1,\ 2$ のときも $(*)$ は成[illegible]

$$ \sum_{c=1}^{n} [illegible] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{7}{4}n + \frac{1}{4}\cdot\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} $$

$$ = \frac{1}{12}n(2n^2+21n-2) + \frac{1}{8}\{1-(-1)^n\} $$

偶数 c [illegible] $\displaystyle\sum_{c=1}^{n} [illegible] = \frac{1}{12}n(2n^2+21n-2)$

よって

$$ = \frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{P}_3}\sum_{c=1} f(c) $$

$$ = \frac{1}{(n+2)(n+1)n} \times \frac{1}{12}n(2n^2+21n-2) $$

$$ = \boldsymbol{\frac{2n^2+21n-2}{12(n+1)(n+2)}} $$

5.26　(1)　$A = \{a \,|\, a = 14m+3\ (m \text{ は整数}),\ 100 \leqq a \leqq 999\}$

$B = \{b \,|\, b = 9n\ (n \text{ は整数}),\ 100 \leqq b \leqq 999\}$

印刷見本

ゆえに　　$100 \leqq 14m+3 \leqq 999, \quad 100 \leqq 9n \leqq 999$

m，n が整数であることに注意してこれらを解くと

$$7 \leqq m \leqq 71, \quad 12 \leqq n \leqq 111$$

A の要素の個数 $n(A)$ および B の要素の個数 $n(B)$ は

$$n(A) = 71 - 7 + 1 = \mathbf{65},$$
$$n(B) = 111 - 12 + 1 = \mathbf{100}$$

(2) $c \in A \cap B$ とすると，(1) の結果

$$c = 14m + 3 = 9n \quad \text{ゆえに} \quad \text{－ 3)} = 9(n-5)$$

$m-3$ は 9 を因数にもつので，m －

$$c - 45 = 14 \cdot 9 \quad \text{の} \quad 45$$

ゆえに　　$A \cap B = \{c \mid \quad k + 45 \ (c \quad), \ 1$

したが　て　　$100 \leqq 126k + 45 \leqq$

k　　ことに注意してこれを解く

て，　　素のうち　最小のも　$126 \cdot 1 + 45 = \mathbf{171}$

最大のも　$126 \cdot 7 + 45 = \mathbf{927}$

(3) 　素の　　3 余り，かつ 9 で割り切れない要素の個数は

$n(A$　　$n(A) - n($　　$) = 65 - 7 = 58$

，求め　　$_{58}\mathrm{C}_2 =$　　$\times \dfrac{2 \cdot 1}{900 \cdot 899} = \dfrac{\mathbf{19}}{\mathbf{4650}}$

5.27　(1)　　ードから　　したとき (非復元抽出)，1，2，3 を取

　　から

$$p_3 = \frac{{}_3\mathrm{P}_3}{{}_N\mathrm{P}_3} = \frac{\boldsymbol{6}}{\boldsymbol{N(N-1)(N-2)}}$$

q_1 は，N 枚　　ドから 3 枚取り出したとき (復元抽出)，すべて 1 だけの確率であ

$$q_1 = \left(\frac{1}{N}\right)^3 = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{N^3}}$$

印刷本

q_2 は，N 枚のカードから 3 枚取り出したとき (復元抽出)，すべて 2 以下の確率からすべて 1 だけの確率を引いた確率であるから

$$q_2 = \left(\frac{2}{N}\right)^3 - \left(\frac{1}{N}\right)^3 = \frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{N^3}}$$

q_3 は，N 枚のカードから 3 枚取り出したとき (復元抽出)，すべて 3 以下の確率からすべての 2 以下の確率を引いた確率であるか

$$q_3 = \left(\frac{3}{N}\right)^3 - \left(\frac{2}{N}\right)^3 = \mathbf{1}$$

(2) p_n は，N 枚のカードから 3 枚取り[illegible]復元抽出)，1 枚は n で，残りの 2 枚が $n-1$ 以下の確率であ

$$p_n = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2 \times 3!}{{}_N\mathrm{P}_3} = \frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}$$

q_n は，N 枚のカードから[illegible]り出した[illegible]復元[illegible]n 以下の確率からすべての $n-1$ [illegible]下の確率を引[illegible]確率で

$$q_n = \left(\frac{n}{N}\right)^3 - \left(\frac{n-1}{N}\right)^3 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

5.28 [illegible]なる[illegible]ら 4 枚を 1 列に並べ[illegible]列の総数であるから

[illegible] $= 5\cdot4\cdot3\cdot2 = \mathbf{120}$ (通り)

i) $a <$ [illegible] $< d$ [illegible]，$(b,\ c)$ [illegible]) のとき，次の 2 通り．

[illegible] $d) = (1,$ [illegible]$),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$

ii) $a <$ [illegible] c [illegible] [illegible]$3,\ 4)$ のとき，次の 2 通り．

$(a,\ b,\ d,\ c) = (1,\ 3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$

iii) $b < a <$ [illegible]において，$(a,\ c) = (3,\ 4)$ のとき，次の 2 通り．

$(b,\ a,\ c,\ d) = (1,\ 3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$

iv) $b < a$ [illegible] c において，$(a,\ d) = (3,\ 4)$ のとき，次の 2 通り．

$(b,\ a,\ d,\ c) = (1,\ 3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$

i)〜iv) の総数であるから　$2+2+2+2 = \mathbf{8}$ (通り)

見本

(3) 捨てられるカードは，3 と 4，2 と 3，2 と 4 の 3 つの場合がある．
2 と 3 の場合は，(2) で求めた 3 と 4 の場合と同様に 8 通り．
また，2 と 4 の場合は，次の i)〜iv) の 4 通り．

i) $a<b<c<d$ において，$(b,\ c)=(2,\ 4)$ のとき

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 2,\ 4,\ 5)$$

ii) $a<b<d<c$ において，$(b,\ d)=(2,\ 4)$ のとき

$$(a,\ b,\ \quad =(1,\ 2,$$

iii) $b<a<c<d$ において，$(a,$ $\quad$ き

$$(b,\ a,\ c,\ d)$$

iv) $b<a<d<c$ において，$(a$ $\quad$

$$(1$$ $\quad c)=$ $\quad 4,$

したがって，カードを捨 確率は $\dfrac{8-}{}=\dfrac{1}{6}$

求 この余事象の確率であるか $\quad$ **6**

5.29 (けが 名前のカードを引く確 右の計算から

$$+\frac{1}{2}$$

A	B	C	確率
B	B	C	$\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{28}$
C	B		$\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{28}$

B また が自分 名前のカード 確率もこれに等しい．

，求め $\quad \times 3$

(2) 名前のカ 確率は，右の計算から

$$\frac{2}{168}+\frac{6}{168}\quad +\frac{9}{168}=\frac{23}{168}$$

A	B	C	確率
A	A	A	$\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{2}{168}$
A	A	B	$\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{6}{168}$
A	C	A	$\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{168}$
A	C	B	$\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{168}$

B または C だ が自分の名前のカードを引く確率もこれに等しい．

よって，求める確率は $\quad \dfrac{23}{168}\times 3=\mathbf{\dfrac{23}{56}}$

見本

(3) A，B，C の 3 人が自分の名前のカードを引く確率は

$$\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{56}$$

求める確率は，これと (1)，(2) の余事象の確率であるから

$$1-\left(\frac{3}{56}+\frac{3}{14}+\frac{23}{56}\right)=\boldsymbol{\frac{9}{28}}$$

5.30 (1) S が偶数になるのは，3 枚が偶数…は 1 枚が…枚が奇数の場合である．したがって，S が 2 の倍…確率…

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_9\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_3}=\boldsymbol{\frac{236}{}}$$

(2) 3 で割った余りが 0 となる数の…数の札が 5 枚，2 となる数の札が 7 枚あり，S が…となる…わせは…0)，(1, 1, 1)，(2, 2, 2)，(0…ある．…っ…になる確率は

$$\frac{{}\cdot\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{\quad}\quad 35\quad =$$

5.31 …初のカ…次に取り出したカ…1 である確率は

$$\quad\times\frac{n-1}{3n-1}=\frac{\quad}{3(3n-1)}$$

…初のカ…が 1 以…次に取り…カードも 1 である確率は

$$\quad\times\frac{n}{3n-\quad}\quad\frac{n}{n-1)}$$

…確率は $\quad 1)+\dfrac{2n}{3(3n-1)}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

解説 取り…す順番…係なく，カードが 1 である確率は $\dfrac{1}{3}$

(2) 異なる数字の…合わせは，${}_3\mathrm{C}_2$(通り) であるから

$$\frac{{}_2\times n^2}{{}_{3n}\mathrm{C}_2}=3n^2\times\frac{2}{3n(3n-1)}=\boldsymbol{\frac{2n}{3n-1}}$$

(3) 3 枚のカードの組み合わせは，次の 6 通り．

$$\{1,1,2\},\ \{1,1,3\},\ \{2,2,1\},\ \{2,2,3\},\ \{3,3,1\},\ \{3,3,2\}$$

印刷本

よって，求める確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2 \times {}_n\mathrm{C}_1}{{}_{3n}\mathrm{C}_3} \times 6 = \frac{n(n-1)}{2} \times n \times \frac{6}{3n(3n-1)(3n-2)} \times 6$$
$$= \frac{\boldsymbol{6n(n-1)}}{\boldsymbol{(3n-1)(3n-2)}}$$

(4) 4 枚のカードの組み合わせは，次の場合に分けて求め

i) $\{1,1,1,2\}$, $\{1,1,1,3\}$, $\{2,2,2,1\}$,
$\{2,2,2,3\}$, $\{3,3,3,1\}$, $\{3$

ii) $\{1,1,2,2,\}$, $\{1,1,3,3,\}$, $\{2,$

i) の場合の確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3 \times {}_n\mathrm{C}_1}{{}_{3n}\mathrm{C}_4} \times 6 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}$$
$$= \frac{8n(n$$
$$3(3n$$

ii) の場合の確率は

$$\frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n(n-1)}{2} \times$$
$$C_4$$
$$\frac{2n(n-1)}{1)(3n-2)}$$

は互

$$\frac{(n-2)}{-1)}$$

5.32 $b = c$ $a <$ 通り

き $(a,\ b)$ $2)$
き $(a,\ b) = (1,\ 3)$
$c = 5$ $(a,\ b) = (1,\ 4),\ (2,\ 3)$
$c = 6$ $(a,\ b) = (1,\ 5),\ (2,\ 4)$

このとき，の場合も含めて $6 \times 2!$ 通りある．また，d，e，f の並べ方が $3!$ 通 ので，求める確率は

$$\frac{6 \times 2! \times 3!}{6!} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{10}}$$

見本

(2) $a+b=c+d$ を満たす $a<b$，$c<d$ の組は，次の 14 通り

$a+b=5$ のとき　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 4,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1,\ 4)$

$a+b=6$ のとき　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 5,\ 2,\ 4),\ (2,\ 4,\ 1,\ 5)$

$a+b=7$ のとき　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 6,\ 2,\ 5),\ (2,\ 5,\ 1,\ 6),$
$(1,\ 6,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 1,\ 6),$
$(2,\ 5,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 2,\ 5)$

$a+b=8$ のとき　$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 6,\ 3,\ 5),\ (3,\ 5,\ 2,\ 6)$

$a+b=9$ のとき　$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 6,\ 4,\ 5),\ (4,\ 5,\ 3,\ 6)$

このとき，$a>b$，$c>d$ の場合も 2! 通りある．また，e，f の並べ方が 2! 通りあるので，求め

$$= \frac{}{\mathbf{45}}$$

5.33 母音を X，子音を Y で表すと Y4 個

$$\frac{}{4!4!} = 70 \text{ (通り}$$

(1) 両 とき，X4 個と Y2 個の並 るか

$$\frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ (通}$$

，求 $\frac{15}{} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{14}}$

(1) に X と 入れ替えたもの から，求める確率は

(3) 互に並ぶの 2 通りである

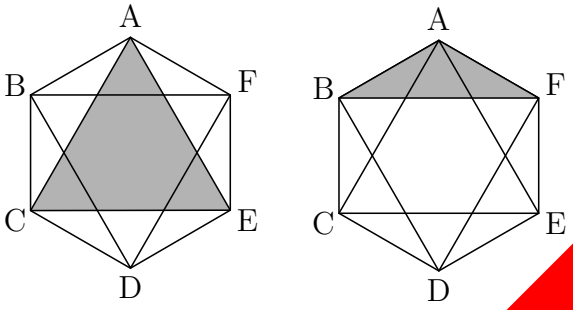
XYXYXYXY，　YXYXYXYX

よって，求め 率は　$\frac{2}{70} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{35}}$

5.34 三角形の総数は $= \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$ (個)

正三角形が 2 個，正三角形でない二等辺三角形 6 個

見本



よって，求める確率は　$\dfrac{20-(2+6)}{20}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$

5.35　(1) A，B，C の 3 人が東公園，西公園，[illegible]確率は，次のようになる．

	東	[illegible]
A		
[illegible]	$\frac{1}{2}$	
[illegible]	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

A と B [illegible]東公園に行く確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=$

A [illegible]園に行く確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=$

[illegible]って，[illegible]は　$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$

(2) [illegible]が東公[illegible]は　$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$

[illegible]と C [illegible]園に行く[illegible]率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$

[illegible]が北公[illegible]は　$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

[illegible]確率は　$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}}$

(3) 3 人が東公園[illegible]確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{32}$

3 人が西公園[illegible]確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$

よって，求[illegible]確率は　$\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{32}}$

(4) A，B，C の 3 人が異なる公園に行くのは，次の場合である．

見本

東　西　北

A　B　C $\cdots \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

A　C　B $\cdots \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$

B　A　C $\cdots \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

C　A　B $\cdots \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$

ゆえに，A，B，Cの3人が異なる公園に行く確率は　$\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{1}{4}$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1-\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$

5.36　(1)　番号1の景品をもらえない確率は

求めるのはこの余事象の確率であるから　$\boldsymbol{1-\left(\frac{1}{n}\right)^n}$

(2)　全種類の景品がそろう確率は　$\frac{n!}{n^n}$

求めるのはこの余事象の確率であるから　$\boldsymbol{1-\frac{n!}{n^n}}$

1個目にn種類，景品のもらい方の総数は　n^{n+1} (通り)

1種類の景品が2つずつあるので，その総数は　$n\times\frac{(n+1)!}{2!}$ (通り)

よって，求める確率は　$\frac{n\times\frac{(n+1)!}{2!}}{n^{n+1}}=\boldsymbol{\frac{(n+1)!}{2n^n}}$

(鹿児島大・改題)　[7]

5.37　(1)　1投目に出た目がi，2投目に出た目がjである場合を$(i,\ j)$と表す．2投目の目の和が7となるのは，$(1,\ 6)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$，$(5,\ 2)$，$(6,\ 1)$の6通り．2投目の目の和が11となるのは，$(5,\ 6)$，$(6,\ 5)$の2通り．

よって，求める確率は　$\frac{6+2}{6^2}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$

(2)　1投目に出た目が3の倍数で，2投目に出た目の和が9または11である．

出た目の和が9となるのは，$(3,\ 6)$ $(4,\ 5)$，$(5,\ 4)$，$(6,\ 3)$の4通り．

出た目の和が11となるのは，$(5,\ 6)$，$(6,\ 5)$の2通り．

よって，求める確率は　$\frac{4+2}{6^2}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(3) 3 投の目の和が 10 となる組合せは次のとおりである．

$$\{1,\ 3,\ 6\},\ \{1,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 2,\ 6\},\ \{2,\ 3,\ 5\},\ \{2,\ 4,\ 4\},\ \{3,\ 3,\ 4\}$$

これらの場合の総数は　$3! \times 3 + \dfrac{3!}{2!} \times 3 = 27$ (通り)

また，最初の 2 投の和が 11 または 12 となるのが，それぞれ 2 通り，1 通りであるから，求める確率は

$$\frac{27+2+1}{6^3} = \frac{30}{6^3} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}$$

(4) A，B がともに 2 投目でゴール[illegible]確率であ[illegible](1) の結果から

$$\left(1-\frac{1}{12}\right)$$

(5) (i) $k \geqq 4$ のとき，B が勝つのは，[illegible]でゴールできず B が 2 投目[illegible]ある．この[illegible]B が 1 投目でゴールする確率 $\frac{1}{12}$[illegible]2 投[illegible]る確率[illegible]きいので，A の勝つ確率[illegible]の勝つ確[illegible]大[illegible]

(ii) $k = 3$ のとき，B が勝[illegible]確率は (A が 2[illegible]ゴール[illegible]が 2 回で[illegible]するときで，B の目の和は 7 て[illegible]あ[illegible]

$$\left(1-\frac{1}{12}\right) \times \frac{6}{6^2} = \frac{11}{12} \times [illegible] > \frac{1}{12}$$

(i) k [illegible]が勝つ確率は

$$[illegible] \times \frac{5}{6^2} = \frac{11}{12} \times \frac{5}{36} = \frac{1}{12} \times \frac{55}{36} > \frac{1}{12}$$

) $k =$ [illegible]き，B [illegible]の確率は

$$[illegible]\right) \times \frac{4}{6^2} = \frac{11}{[illegible]} = \frac{1}{12} \times \frac{11}{9} > \frac{1}{12}$$

[illegible]て，[illegible]k の値[illegible]$\leq \boldsymbol{k} \leqq \mathbf{9}$

5.38 (1) $P = \dfrac{{}_{6}\mathrm{C}_3 \times {}_{4}\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_6} = \dfrac{20 \times 4}{210} = \dfrac{\mathbf{21}}{}$

(2) $P_n = \dfrac{{}_{6}\mathrm{C}_3 \times {}_{n-3}\mathrm{C}_3}{{}_{n}\mathrm{C}_6}$　$P_{n+1} = \dfrac{{}_{6}\mathrm{C}_3 \times {}_{n-5}\mathrm{C}_3}{{}_{n+1}\mathrm{C}_6}$ より

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{{}_{6}\mathrm{C}_3 \times {}_{n-5}\mathrm{C}_3}{{}_{n+1}\mathrm{C}_6} \times \frac{{}_{n}\mathrm{C}_6}{{}_{6}\mathrm{C}_3 \times {}_{n-6}\mathrm{C}_3}$$

$$= \frac{{}_{n-5}\mathrm{C}_3}{{}_{n-6}\mathrm{C}_3} \times \frac{{}_{n}\mathrm{C}_6}{{}_{n+1}\mathrm{C}_6}$$

$$= \frac{n-5}{n-8} \times \frac{n-5}{n+1} = \frac{\boldsymbol{(n-5)^2}}{\boldsymbol{(n+1)(n-8)}}$$

印刷本

(3) (2) の結果から

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} - 1 = \frac{(n-5)^2}{(n+1)(n-8)} - 1 = \frac{3(11-n)}{(n+1)(n-8)}$$

したがって　$P_9 < P_{10} < P_{11} = P_{12} > P_{13} > P_{14} > \cdots$

よって，P_n が最大となる n の値は　$\boldsymbol{n = 11,\ 12}$

5.39 (1) 30 枚から 4 枚取る取り出し方の総数は　${}_{30}\mathrm{C}_4$ (通り)

2 枚だけ同じ番号の取り出し方は　${}_{10}\mathrm{C}$ (通り)

残り 2 枚の相異なる番号の取り は　(通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}$ **12**

(2)(ア) 30 枚から k 枚取る取り出し方

2 枚だけ同じ番号の取り出 ${}_{10}\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_2$ (通り)

残り $k-2$ 枚の相異な 取り は ${}_2 \cdot 3^k$ り)

したがって　$P(k) = \dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_9\mathrm{C}_k \cdot 3^{k-2}}{{}_{30}\mathrm{C}_k}$

$$\frac{P(k+1)}{P(k)} = \frac{{}_{10}\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_9\mathrm{C}_{k-1} \cdot 3^{k-1}}{{}_{30}\mathrm{C}_{k+1}} \cdot \frac{{}_{30}\mathrm{C}_k}{{}_{10}\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_9\mathrm{C}_{k-2} \cdot 3^{k-2}}$$

$$= 3 \times \frac{{}_9\mathrm{C}_{k-1}}{{}_9\mathrm{C}_{k-2}} \times \frac{{}_{30}\mathrm{C}_k}{{}_{30}\mathrm{C}_{k+1}}$$

$$= \frac{9!}{(k-1)!(10-k)!} \cdot \frac{(k-2)!(11-k)!}{9!} \times \frac{k!(30-k)!}{(k+1)!(29-k)!} \cdot \frac{30!}{}$$

$$= \frac{11-k}{1} \times \frac{k}{}$$

$$= \frac{\boldsymbol{3(}}{\boldsymbol{(k-}} \qquad (4 \leqq k \leqq 9)$$

(イ) の

$$\frac{P(}{} - 1 = \frac{3(k+1)(11-k)}{(k-1)(30-k)} - 1 = \frac{63 - k(2k+1)}{(k-1)(30-k)}$$

したが $4 \leqq k \leqq 5$ のとき　$\dfrac{P(k+1)}{P(k)} > 1$

$6 \leqq k \leqq 9$ のとき　$\dfrac{P(k+1)}{P(k)} < 1$

よって，$P(k)$ を最大にする k の値は　$\boldsymbol{k = 6}$

印刷

5.40 (1) $\dfrac{{}_{24}\mathrm{C}_2}{{}_{25}\mathrm{C}_3} = \boldsymbol{\dfrac{3}{25}}$

(2) $\boldsymbol{q_k = {}_{32}\mathrm{C}_k \left(\dfrac{3}{25}\right)^k \left(\dfrac{22}{25}\right)^{32-k}}$

(3) (2) の結果から

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{{}_{32}\mathrm{C}_k \left(\frac{3}{25}\right)^k \left(\frac{22}{25}\right)^{32-k}}{{}_{32}\mathrm{C}_{k-1} \left(\frac{3}{25}\right)^{k-1} \left(\frac{22}{25}\right)^{33-k}} = \frac{{}_{32}\mathrm{C}}{}$$

$$= \frac{32!}{k!(32-k)!} \times \frac{(k-1)}{}$$

(4) (2) の結果から

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{(}{22k}$$

$1 \leqq k$ のとき $\dfrac{q_k}{q_{k-1}} - 1 > 0$ すな

$=$ き $\dfrac{q_k}{q_{k-1}} - 1 < 0$ すな

たが

よ

5.41 (1) $P_1 = \dfrac{{}_r\mathrm{C}_4 \cdot}{}$ $P_2 = \dfrac{}{{}_r\mathrm{C}_9}$ で ら

$$\frac{P_2}{} \cdot \frac{{}_{11}\mathrm{C}_5}{{}_9\mathrm{C}_5} = \times \frac{11}{6} = \frac{11r+22}{6r+66}$$

$$\frac{P_2}{P_1} - 1 =$$

$r >$ である $\dfrac{P_2}{P_1} - 1 > 0$ よって $P_2 > P_1$

(2) $P_n = \dfrac{{}_r\mathrm{C}_4 \cdot {}_{n+}}{{}_{n+r+}}$ $P_2 = \dfrac{{}_r\mathrm{C}_4 \cdot {}_{n+10}\mathrm{C}_5}{{}_{n+r+10}\mathrm{C}_9}$ であるから

$$\frac{P}{P_n} \cdot \frac{{}_{n+r+9}\mathrm{C}_9}{{}_{n+r+10}\mathrm{C}_9} \times \frac{{}_{n+10}\mathrm{C}_5}{{}_{n+9}\mathrm{C}_5}$$

$$= \frac{n+r+1}{n+r+10} \times \frac{n+10}{n+5} = \frac{n^2+(r+11)n+10r+10}{n^2+(r+15)n+5r+50}$$

印刷

したがって　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}-1=\dfrac{-4n+5r-40}{n^2+(r+15)n+5r+50}$

$P_{n+1}>P_n$ が成り立つとき

$$-4n+5r-40>0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{n<\frac{5}{4}r-10}$$

(3) $r=50$ のとき，(2) の結果から

$$n<\frac{5}{4}\cdot 50-10 \quad \text{こ}\cdots\text{みたす最大}\cdots 52$$

したがって　$P_1<P_2<\cdots<P\cdots\geqq\cdots$

よって，P_n が最大となる n は　$\boldsymbol{n}$

5.42　(1) 得点が 8 点になるのは，次の (i)

(i) 「8」のカードが表で，…人の…な…

(ii) 「2」，「4」のカー…，他の 7 …ード…

よって…求める確率は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^8+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^7=\cdots$$

得点が…偶数のカード「2…」，「6」，「8」，「10」の 5 枚の…ドすべ…なる確率であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\cdots$$

求…率は…の確率で…ら

$$\cdots=\boldsymbol{\frac{31}{32}}$$

(3) 得…8」…枚になる確率を，次の (i)〜(iii) の場合に分けて求める．

(i) 「8」が表…るとき

$$\frac{1}{2}$$

(ii) 「8」が…「4」が表であるとき，

「2」…10」の少なくとも 1 枚は表であるから

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}=\frac{7}{32}$$

印刷本

(iii) 「8」,「4」が裏であるとき,
「2」,「6」,「10」の 3 枚がすべて表であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

(i)〜(iii) は，互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{32} + \frac{1}{32} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

(4) 奇数のカードを取り除いても[illegible]に等[illegible]，取り除いたカードは,「2」,「4」,「6」,「8」,「10」[illegible]る.

(i) 「2」,「6」,「10」のいずれか 1[illegible]
確率は，(3) と同様にして

$$\frac{1}{[illegible]}\left\{1 - \left([illegible]\right.\right. = [illegible]$$

(ii) 「[illegible]を取り除いたとき，8 の倍数に[illegible]率は[illegible]にして

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

(iii) 「[illegible]取[illegible]とき，8 の倍数に[illegible]率は，(3) と同様にして

$$[illegible] - \left(\frac{1}{2}\right)^3\Big\} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

よ[illegible]取り除[illegible]の表に書か[illegible]る数は「**4**」

5.43 [illegible]のうち[illegible]または[illegible]確率であるから

$$T_3 = {}_3\mathrm{C}_2 p^2(1-p) + p^3 = \mathbf{3p^2 - 2p^3}$$

(2) (1) の結果お[illegible]$_2 = 2p - p^2$ から

$$\begin{aligned} H_2 - T_3 &= (2p - p^2) - (3p^2 - 2p^3) \\ &= 2p^3 - 4p^2 + 2p \\ &= 2p(p-1)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

よって　　$H_2 \geqq T_3$

見本

(3) $f(p) = H_2 - T_3$ とおくと　$f(p) = 2p^3 - 4p^2 + 2p$

ゆえに　　$f'(p) = 6p^2 - 8p + 2 = 2(3p-1)(p-1)$

$0 \leqq p \leqq 1$ における $f(p)$ の増減表は次のようになる．

p	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$		↗	極大	↘	

よって，$H_2 - T_3$ が最大になる $\boldsymbol{p = \frac{1}{}}$

(4)　　$T_{3n} = \sum_{k=2n}^{3n} {}_{3n}\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)$

上式に $n = 1,\ 2,\ 3$ をそれぞれ

$$T_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \sum_{k=2}^{3} = \frac{1}{8}\left({}_3\mathrm{C}_2 + \right.$$

$$= \frac{3+1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{128}{256},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 \sum_{k=4}^{6} {}_6\mathrm{C}_k = \frac{1}{64}\left({}_6\mathrm{C}_4 \quad + {}_6\mathrm{C}_6\right)$$

$$= \frac{+1}{64} = \frac{22}{64} = \frac{88}{256},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \quad \mathrm{C}_k = \frac{1}{512}\left(+ {}_9\mathrm{C}_7 + {}_9\mathrm{C}_8 + {}_9\mathrm{C}_9\right)$$

$$\frac{+9+1}{} = \frac{6}{}$$

て　$T_6 \geqq T_9$

見本

(5)
$$H_{2k+1} = \sum_{j=k+1}^{2k+1} {}_{2k+1}\mathrm{C}_j \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{2k+1-j}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \sum_{j=k+1}^{2k+1} {}_{2k+1}\mathrm{C}_j$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2} \sum_{j=k+1}^{2k+1} (2 \times {}_{2k+1}\mathrm{C}_j)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2} \sum_{j=k+1}^{2k+1} ({}_{2k+1}\mathrm{C}_j + {}_{2k+1}\mathrm{C}_{2k+1-j})$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2} \sum_{j=0}^{2k+1} {}_{2k+1}\mathrm{C}_j$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2} \times 2^{2k+1}$$

5.44 (1) $y = px^2$, $y = qx + 1$ から y を消去すると

$$px^2 - qx - 1 = 0 \quad \cdots ①$$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-q)^2 - 4 \cdot p \cdot (-1) = q^2 + 4p$$

$p > 0$ より $D > 0$ であるから，2次方程式 ① は異なる2つの実数解をもつ．

その解を α, β ($\alpha < \beta$)，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{q}{p}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{p}$$

$\alpha < \beta$ より $\alpha < 0$ であるから，A, B の x 座標はそれぞれ α, β となる．

AB の中点の y 座標は，$x = \alpha, \beta$ を $y = qx + 1$ に代入して加えてから

$$\frac{\alpha + \beta}{2} + 1 = \frac{q}{2p} + 1 = \frac{q^2}{2p} + 1$$

これが 2 より小さいので

$$\frac{q^2}{2p} + 1 < 2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{q^2}{2} < p \leqq 6$$

上式より，p は自然数であるから

$q = 1$ のとき　$1 \leqq p \leqq 6$　の 6 通り
$q = 2$ のとき　$3 \leqq p \leqq 6$　の 4 通り
$q = 3$ のとき　$5 \leqq p \leqq 6$　の 2 通り

印刷本

よって，求める確率は　$\dfrac{6+4+2}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(2) A の x 座標 α は 2 次方程式 ① の負の解であるから

$$\alpha=\frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2p}\quad\cdots②$$

これが有理数となるは，q^2+4p が平方数のときである

q^2+4p の値は次のようなる．

q \ p	**1**	**2**	**3**		**5**	**6**
1	5	9	13			25
2	8	12	16	2		
3	13	17	21	25		
4	20	24	28	3		
5	29	33	37			
6	40	44			56	

したがって条件をみた　の組は，　組で

$(p,\ q)=(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),$　$(6$

，　確率は　$\dfrac{6}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

$(\alpha,\ q$　② から，直線 AO の

$$\frac{q\alpha+}{\qquad}q+\frac{2p}{q-\sqrt{q^2+4p}}=\frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2}$$

，B　直線の　から，直線　傾きは　q

直　　およ　　方向ベク　　それぞれ

$$1,\ \frac{q-}{2}=(1,\ q)$$

と　　，　　は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角である．$\angle\mathrm{OAB}$ が 90° より大きくなるとき，$\vec{u}\cdot\vec{v}$　あるから

$$+\frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2}\cdot q<0$$

ゆえに　　$2+q^2<q\sqrt{q^2+4p}$

上式の両辺がともに正であることに注意して，両辺を平方して整理すると

$$p>1+\frac{1}{q^2}$$

印刷本

したがって　$q=1$ のとき　　$3 \leqq p \leqq 6$　の 4 通り

　　$2 \leqq q \leqq 6$ のとき　$2 \leqq p \leqq 6$　の 5 通り

よって，求める確率は　　$\dfrac{4+5\times 5}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{29}{36}}$

5.45　(1) 2 次不等式 $x^2+ax+b>0$ の係数について，$D=a^2-4b$ とおくと，P が実数全体となるのは，$D<0$ のときであるから

$$a^2-4b<0$$

上式より，$a \leqq 4$ であるから

$a=1$ のとき　$1 \leqq b \leqq 6$

$a=2$ のとき　$2 \leqq b \leqq$

$a=3$ のとき　$3 \leqq$

$a=4$ のとき　5　の

よって，求める確率は　　$\dfrac{5+4+2}{6^2}$

(2) Q

と　　の個数について D の符　　り，場合分けを行う．

［1］ D　　で P が成り立ち，(　　結果により 17 通り

［2］　　のと　　x^2+ax+b とおくと

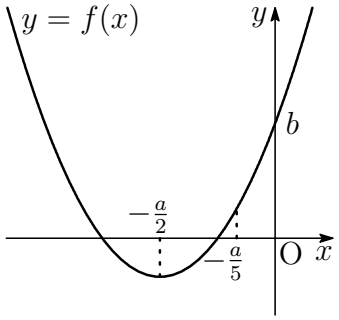
$$(x)=\left(x\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$$

　　から　　$\dfrac{a}{}$

$y=$　　グラフ　　を満

　　から

$$b-\frac{4a^2}{25}>0$$



a^2-4b　　注意して　　$\dfrac{4a^2}{25}<b \leqq \dfrac{a^2}{4}$

これを　　$(a,\ b)$ の組は，次の 7 通り

$(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4)\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 6)$

［1］，［2］より，求める確率は　　$\dfrac{17+7}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

見本

別解 Q は　$x \geqq -\dfrac{a}{5}$

$Q \subset P$ となる事象の個数について D の符号により場合分けを行う.

［1］$D < 0$ のとき，$Q \subset P$ が成り立ち，(1) の結果により 17 通り

［2］$D \geqq 0$ のとき，P は

$$x < \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2},\ \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$Q \subset P$ となるための条件は

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < -\frac{a}{5}$$

$$\sqrt{a^2 - 4b} < 3a$$

両辺を平方して整理すると

$a^2 - 4b \geqq 0$ に注意して

これをみたす $(a,\ b)$ 次の 7

$(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4)$ $(5,\ 6$

，求める確率は $\dfrac{17 +$
6^2

5.46 方程 る 2 つの実数解をも は

$- 4ac > 0$　ゆえに　$ac < \dfrac{b^2}{4}$

$\dfrac{}{4} \leqq \dfrac{6^2}{}$ であ　$ac < \dfrac{b^2}{4} \leqq$ なわち　$ac \leqq 8$

って, 値は 1 4, 5, 6, 8

て, とその は次のとおりである.

き　$(a,\ c) =$ の **1 通り**

$= 2$　$(a,\ c) = (1,\ 2),\ (2,\ 1)$ の **2 通り**

$ac = 3$ の　$(a,\ c) = (1,\ 3),\ (3,\ 1)$ の **2 通り**

$ac = 4$ の　$(a,\ c) = (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$ の **3 通り**

$ac = 5$　$(a,\ c) = (1,\ 5),\ (5,\ 1)$ の **2 通り**

$ac =$ き　$(a,\ c) = (1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$ の **4 通り**

$ac = 8$ のとき　$(a,\ c) = (2,\ 4),\ (4,\ 2)$ の **2 通り**

印刷本

(2) (1) の場合において，$D=b^2-4ac$ が平方数となる b の個数を調べる．

$ac=1$ のとき　$D=b^2-4$ より　b の値はなし
$ac=2$ のとき　$D=b^2-8$ より　$b=3$ の 1 通り
$ac=3$ のとき　$D=b^2-12$ より　$b=4$ の 1 通り
$ac=4$ のとき　$D=b^2-16$ より　$b=5$ の 1 通り
$ac=5$ のとき　$D=b^2-20$ より　$b=6$ の 1 通り
$ac=6$ のとき　$D=b^2-24$ より　$b=5$ の 1
$ac=8$ のとき　$D=b^2-3$　　$b=6$

よって，求める確率は，(1) の結

$$\frac{2\cdot1+2\cdot1+3\cdot1+2\cdot1}{6^3}$$

5.47　(1)　(a) 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ ら，

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3=$$

の目が出る確率から 1 だけ　が出る　の確率
を引

$$\left(\frac{2}{6}\right)^3-2\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$$

2，　から 1　出る確率は

$$\frac{3!}{6^3}$$

$=0$ の　3　で　$(1\leqq m\leqq 6)$，(1)-(a) より

$$\frac{1}{216}\times 6=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$$

ii) $k=1$ の　m または $m+1$ である確率であるから $(1\leqq m\leqq 5)$，(1)-(b) よ

$$p_1=\frac{1}{36}\times 5=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}$$

iii) $2\leqq k$　とき
m，$m+k$ の 2 種類の目である確率は $(1\leqq m\leqq 6-k)$，(1)-b より

$$\frac{1}{36}(6-k)$$

見本

m, $m+k$, $m+i$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$ の3種類である確率は $(1 \leqq m \leqq 6-k)$, (1)-c より

$$\frac{1}{36}(k-1)(6-k)$$

したがって　　$p_k = \dfrac{1}{36}(6-k) + \dfrac{1}{36}(k-1)(6-k) = \dfrac{1}{36}k(6-k)$

よって　　$\boldsymbol{p_2 = \dfrac{2}{9}}$, $\boldsymbol{p_3 = \dfrac{1}{4}}$, $\boldsymbol{p_4 = \dfrac{2}{9}}$, $\boldsymbol{p_5 =}$ **5**

5.48　(1) 求める確率は，2回連続して赤[illegible]り出す確[illegible]から

$$\frac{2}{3} \times$$

(2) 1回の操作で青玉の個数は1個だ[illegible]
であるから，奇数回目の操作で[illegible]したがって，奇数回目の操作で青玉が3個 (奇[illegible]ならな[illegible]よ[illegible]数回[illegible]作で硬貨をもらうことはない[illegible]

(3) 偶数回[illegible]の操作で青玉の個数は1個または[illegible]である[illegible]目の操作で青[illegible]個である確率を p とすると，([illegible]果

$$p = 1 - \frac{2}{9} =$$

8回[illegible]作で[illegible]硬貨をもらう確率

$$pp(1[illegible]p^3(1[illegible]\left(\frac{7}{9}\right)^3 \frac{2}{9} = \boldsymbol{\frac{686}{6561}}$$

[illegible]青玉[illegible]の状態[illegible]回連続して青[illegible]り出す確率を q とすると

$$[illegible] = \frac{2}{3}$$

2[illegible]きに限り，硬貨を1枚もらう確率は

$$(1-p)qpp = p^2(1-p)q$$

4回目の操作[illegible]に限り，硬貨を1枚もらう確率は

$$p(1-p)qp = p^2(1-p)q$$

6回目の操作のときに限り，硬貨を1枚もらう確率は

$$pp(1-p)q = p^2(1-p)q$$

印刷本

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned} 3\times p^2(1-p)q+p^3(1-p) &= 2p^2(1-p)+p^3(1-p)\\ &= p^2(1-p)(2+p)\\ &= \left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{25}{9}=\boldsymbol{\frac{2450}{6561}} \end{aligned}$$

5.49 (1) 3 回繰り返して手元のカードが 3 以下である確率は，4 以外のカードの確率であるから

^{3}

よって，3 回繰り返して手元のカー

$$1-\left($$

同様に，n 回繰り返して手 ードが も 4 以外のカードの確率で

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \cdots$$

返して手元のカードが 4 は

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{\boldsymbol{4^n}}{}$$

(2) り返し 元の が 2 以下である確率は，3 回とも 3,4 以外のカードの である

$$\left(\frac{2}{4}\right.$$

り返し 元の が 1 率は，3 回とも 2,3,4 以外のカード確率 から

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

ゆえに，3 回 して手元のカードが 2 である確率は

$$\left(\frac{2}{4}\right)^3-\left(\frac{1}{4}\right)^3=\boldsymbol{\frac{7}{64}}$$

同様に， 返して手元のカードが 2 以下である確率は，n 回とも 3,4 以外のカードの確率であるから

$$\left(\frac{2}{4}\right)^n \quad \cdots ②$$

見本

n 回繰り返して手元のカードが 1 である確率は，n 回とも 2,3,4 以外の確率であるから

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

よって，n 回繰り返して手元のカードが 2 である確率は

$$\left(\frac{2}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\boldsymbol{2^n - 1}}{\boldsymbol{4^n}}$$

(3) n 回繰り返して手元のカードが [illegible] る確率は [illegible] より

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left([illegible]\right)$$

5.50 (1) a，b，c の文字が書かれた球を取 [illegible] ると，y 軸上で点 P の移動が [illegible] $+k_b+k$ [illegible] 5 より

$k_a = k_b = 0$ [illegible] $k_c =$

$k_a = k_b = 1$ [illegible] き $k_c =$

$k_a = k_b = 2$ のとき $k_c =$

[illegible] 点 P の座標は $\boldsymbol{(0,\ 5)}$, [illegible] $\boldsymbol{1)}$

[illegible] P の [illegible] る位置の座標を $(x,\ y$ [illegible] ると

$x =$ [illegible] $= 5 - (k_a + k_b) \quad (0 \leqq k_a + k_b \leqq 5)$

[illegible] で，[illegible] $k =$ [illegible] k_b とおく [illegible] $\leqq j \leqq k$，$0 \leqq k \leqq 5$)，

$k_b =$ [illegible] であ [illegible]

[illegible] $= 2j$ [illegible] $y = 5 - k \quad \cdots (*)$

[illegible] に，点 $(x$ [illegible] $\leqq j \leqq k$ の $k+1$ 個.

よ [illegible] 求 [illegible] 標の個数は

$\sum$ [illegible] $1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = \boldsymbol{21}$

(3) $1 \leqq y \leqq 2$ [illegible] $k = 3,\ 4$ であるから

$k = 3$ のとき $x = 2j - 3$, $\quad k = 4$ のとき $x = 2j - 4$

また，$|x| \leqq 1$ であるから $\quad (k,\ j) = (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 2)$

白本

$k_a = j$，$k_b = k - j$，$k_c = 5 - k$ であるから，上の $(k,\ j)$ に対して

$$(k_a,\ k_b,\ k_c) = (1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 2,\ 1)$$

これらの場合の数は　$\dfrac{5!}{1!2!2!} \times 3 = 90$

よって，求める確率は　$\dfrac{90}{3^5} = \boldsymbol{\dfrac{10}{27}}$

5.51　(1) 白玉を 1 度だけ取り出すので，赤玉を m 回 $(m = 0, \cdots, n-1)$ 取り出すとすると，青玉を取り出す回数は $n - m - 1$ で，到達点 $(x,\ y)$ は

$$x = m - 1, \quad y = (n - m - 1) \times 2 = 2n - 2m - 2$$

よって，到達点は　$\boldsymbol{(m-1,\ 2n-2m-2)}$

(2) 赤玉，青玉，白玉を取り出す回数を i，j，k とすると，到達点 $(x,\ y)$ は $(i + j + k = n)$

$$x = i - k, \quad y = j \times 2$$

この $k = n - i - j$ であるから

$$\begin{cases} x = i - (n - i - j) = 2i + j - n \\ y = 2j \end{cases}$$

ここで

$$2i + j - n = i' + 2j' - n,\ 2j = 2j' \quad \text{すなわち} \quad i + 2j - n = i' + 2j' - n$$

とすると

$$(i - i') + 2(j - j') = 0$$

よって　$(i,\ j) = (i',\ j')$

したがって $(i,\ j) \neq (i',\ j')$ のとき

$$(2i + j - n,\ i + 2j - n) \neq (2i' + j' - n,\ i' + 2j' - n)$$

このことから $(i,\ j,\ k)$ の組合せの個数とその到達点の個数は一致する．

よって，求める到達点の個数は，赤玉，青玉，白玉の 3 種類の玉から n 個取り出す重複組合せの総数に一致するので

$${}_3\mathrm{H}_n = {}_{3+n-1}\mathrm{C}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_2 = \boldsymbol{\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}}$$

印刷本

(3) $(*)$ から

$$i=\frac{2x-y}{3}+\frac{n}{3},\quad j=\frac{2x-y}{3}-x+y+\frac{n}{3}\quad\cdots(**)$$

$n=3$ のとき，上式より

$$i=\frac{2x-y}{3}+1,\quad j=\frac{2x-y}{3}-x+y+$$

$(x,\ y)$ が D 内にあるとき $(k=3-i-j)$

$$(x,\ y,\ i,\ j,\ k)=(-1,\ 1,\ 0,\ \quad 0\quad),\ (1,-1,\ 2,\ 0,\ 1)$$

よって，求める確率は

$$P_3=\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{6}+\frac{3!}{}\quad\frac{1}{6}=\mathbf{72}$$

(4) $n=3N$ のとき，$(**)$ よ

$$i=\frac{2x-y}{3}+N,\quad j=\frac{2x}{3}\quad x+$$

あるとき $(k=3N-i-j$

$$(x,\quad(-1,\ 1,\ N-1,\ N\quad),\ (0,\ 0,\ N,\ N,\ N),$$
$$-1,\ N+1,\ N\quad)$$

て，求 確率は

$$\frac{}{(N\quad)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{\quad}\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}$$
$$\frac{(3\quad)}{N!N!N}\quad\left(\frac{1}{6}\right)^{N}$$
$$+\frac{\quad N)!}{(N+1)!(N-1)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}$$
$$=\frac{\mathbf{+6)(3N)!}}{\mathbf{6^2}\quad\mathbf{N!)^2(N+1)!}}$$

5.52 (1) 求める確率

$$P(Y\geqq 1)=1-P(Y=0)$$
$$=1-\frac{11}{6^2}=\mathbf{\frac{25}{36}}$$

X(和を5で割った余り)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	0	1	2
2	3	4	0	1	2	3
3	4	0	1	2	3	4
4	0	1	2	3	4	0
5	1	2	3	4	0	1
6	2	3	4	0	1	2

Y(積を5で割った余り)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	0	1
2	2	4	1	3	0	2
3	3	1	4	2	0	3
4	4	3	2	1	0	4
5	0	0	0	0	0	0
6	1	2	3	4	0	1

(2) $X=2$, $Y=2$ となる事象をそ… P …, 上の表から

$$P(A\cup B)=P(A)\quad\quad B)$$

$$=\frac{8}{36}\quad\quad \mathbf{3}$$

(3) $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{2}{36}\quad\quad \mathbf{4}$

5.53 (1) $X=0$ となるのは，A が … は6のとき … このとき … となるのは，… または6のときである．よって …

$$\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)^2=$$

$X+Y$ … となる … 次の場合である．

($X=1$, Y …

A が … は4, … または4 … その確率は

$$=1,\ Y=2)\quad\quad +\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{16}$$

$X=2$ … 1 の …

4 … は5, B … で，その確率は

$$P(X=2,\ Y=1)=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(i), (ii) は，… 排反であるから，求める確率は

$$P(X+Y=3)=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{5}{16}}$$

(3) (2) の結果から，求める確率は

$$\frac{P(X=1,\ Y=2)}{P(X+Y=3)}=\frac{1}{16}\div\frac{5}{16}=\mathbf{\frac{1}{5}}$$

印刷本

5.54 (1) $P_A = 2P_B$, $P_A + B_B = 1$ より　$\boldsymbol{P_A = \dfrac{2}{3},\ P_B = \dfrac{1}{3}}$

(2) $P_{AA} = 2P_{AB}$, $P_{AA} + P_{AB} = 1$ より　$P_{AA} = \dfrac{2}{3},\ P_{AB} = \dfrac{1}{3}$

$P_{BA} = \dfrac{1}{3}P_{BB}$, $P_{BA} + P_{BB} = 1$ より　$P_{BA} = \dfrac{1}{4},\ P_{BB} = \dfrac{3}{4}$

よって　$\boldsymbol{P_{AA} = \dfrac{2}{3},\ P_{BB} = \dfrac{3}{4}}$

(3) 3 回で優勝が決まる確率は (AA と BB の場合)

$$P_A \cdot (P_{AA})^2 + P_B \cdot (P_{BB})^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{8}{27} + \frac{3}{16}$$

4 回で優勝が決まる確率は (BAA と ABB の場合)

$$P_B \cdot P_{BA} \cdot (P_{AA})^2 + P_A \cdot P_{AB} \cdot (P_{BB})^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{27} + \frac{1}{8}$$

よって 4 回以内に優勝が決まる確率は

$$\left(\frac{8}{27} + \frac{3}{16}\right) + \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{8}\right) = \frac{4}{16} + \frac{2}{8} = \frac{\boldsymbol{31}}{\boldsymbol{48}}$$

(4) 5 回目に A が優勝する確率は ($ABAAA$ と $BAAAA$ の場合)

$$P_A \cdot P_{AB} \cdot (P_{AA})^2 + P_B \cdot P_{BA} \cdot P_{BB} \cdot P_{BA} \cdot (P_{AA})^2$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{17}{324}$$

5 回目に B が優勝する確率は ($BABBB$ と $AABBB$ の場合)

$$P_B \cdot P_{BA} \cdot P_{AB} \cdot (P_{BB})^2 + P_A \cdot P_{AA} \cdot P_{AB} \cdot (P_{BB})^2$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{19}{192}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{\dfrac{17}{324}}{\dfrac{17}{324} + \dfrac{19}{192}} = \boldsymbol{\dfrac{272}{785}}$

5.55 (1) 硬貨 A が 3 回続けて表が上の確率であるから　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

見本

(2) それぞれの硬貨は3回目の試行の後，表が上である確率が $\frac{1}{8}$ であるから，
それぞれの硬貨が3回目の試行の後，裏である確率は

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

よって，求める確率は $\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^2=\mathbf{\frac{49}{4096}}$

(3) 3回目の試行の後に表が上の硬貨が2枚の場合の[illegible] ${}_4\mathrm{C}_2$ (通り)

よって，(2) の結果により ${}_4\mathrm{C}_2\left([illegible]\right)^2$ [illegible]$\mathbf{048}$

(4) 1枚の硬貨が2回連続して表が上で[illegible]

3枚の硬貨について，2枚が2[illegible] 残りの1枚が裏が上
の確率であるから

[illegible] $\left(1-\frac{1}{4}\right)=\mathbf{\frac{9}{64}}$

(5) 1回[illegible]行の後に表が上の硬貨が3枚で[illegible]確率

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

この[illegible]の結[illegible] $\frac{1}{4}\times\frac{9}{64}=\mathbf{\frac{}{256}}$

(6)[illegible]目の試[illegible]後に表[illegible]硬貨が[illegible]で，かつ，3回目の試行の後に表
が上の[illegible]2枚で[illegible]確率は

[illegible] $\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{128}$

[illegible]後に表が上[illegible]4枚で，かつ，3回目の試行の後に表
が[illegible]裏[illegible]である確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{2048}$$

(5) と以上[illegible]果により，求める確率は $\dfrac{\frac{9}{256}}{\frac{3}{128}+\frac{9}{256}+\frac{3}{2048}}=\mathbf{\frac{24}{41}}$

不正

5.56 (1) 原点Oから格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき，右斜め 45° の方向に $\dfrac{n+k}{2}$ 回，右斜め -45° の方向に $\dfrac{n-k}{2}$ 回進む．

$$\frac{n-k}{2}=\frac{n+k}{2}-k$$

であるから，$\dfrac{n+k}{2}$ が整数であればよい．したがって $n+k$ は偶数である．

逆に $n+k$ が偶数，すなわち $n+k=2m$ をみたす整数 m が存在するとき，折れ線グラフは，右斜め 45° の方向に m 回，右斜め -45° の方向に $m-k$ 回 (または $n-m$ 回) 進む．

また，原点Oから格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$

(2) 原点Oと格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(1,\ 1)$ を通る格子点を $\mathrm{A}(a,\ k)$ とする $(0\leqq$ 格子点 $(n-2,\ k)$ を通る折れ線グラフの数，A 点 を通る数 直線 $y=k$ に関する対称性により数は等 も 原点Oと格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフ 子点 $(n-1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2$ の少なくとも1つを通る数はその和で

$$N+N=2$$

である．

原点Oと格子点 $(n$ 結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(1,$ $(n-2,\ k)$ の少 とも1つを通る数は，原点O 点 $(n$ を通る折れ線グラフの数の2倍に等しい．

(2) の事象 を A 3，B ての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i\neq 3$ とする

$$P_A(B)=\frac{P(A)}{P(}=\frac{P(A\cap\overline{B})}{1)}=1-\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)}$$

2) を結ぶ折 フの数は，(1) の結果より ${}_9\mathrm{C}_6$ (本)

したがって $A)=\dfrac{{}_9\mathrm{C}_6}{2^9}$

原点Oと点 (結ぶ折れ線グラフで，少なくとも $(1,\ 3)$，$(2,\ 3)$，$\cdots$，$(7,3)$ を通る数 2) の結果から，Oと $(8,\ 4)$ を結ぶ折れ線グラフの数の2倍であるから 1) の結果より $2\times{}_8\mathrm{C}_6$ (本)

したがって $P(A\cap\overline{B})=\dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{2^9}$

よって $P_A(B)=1-\dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{{}_9\mathrm{C}_6}=1-\dfrac{2\times 8\cdot 7}{2\cdot 1}\times\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{9\cdot 8\cdot 7}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

見本

解説 ランダム・ウォーク (九大 [理]2002) 6

6.1
$$\begin{aligned} a &= 100a_1 + 10a_2 + a_3 \\ &= 9(11a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) \end{aligned}$$

$9(11a_1 + a_2)$ は，9 の倍数であるから，3 桁の自然数 a と $a_1 + a_2 + a_3$ を 9 で割った余りは等しい．

別解 $10 \equiv 1,\ \ 10^2 \equiv 1 \pmod 9$ であるから

$$a = 10^2 a_1 + 10a_2 + \quad a_1 + a_2 + \quad \pmod 9)$$

よって，3 桁の自然数 a と $a_1 +$ に余りは等しい．

6.2
$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+$$

連続する 3 数の積 $(n-1)n(n+1)$ は

$n^3 - n$ は 6 で割り切れる．

6.3 連続する 3 数 $n-1,\ n,\ n+1$ は，必ず 3 の

n が 6 と互いに素であるから，n は偶数でなく 倍数で

したがって $1)(n+1)$ は偶数であり，か 倍

よって $1)(n+1)$ は 6 で割り切

補足 き，数 ら，$n-1$，$n+1$ に偶数である．

際は 1 は る．

6.4 n 割っ q とす $n = m$ $(m > 7)$

がって $(n+1$ $= 20$

が m で ，m 意して $\boldsymbol{m = 10,\ 20}$

6.5 2 も 次の 10

$= 2^2,$ $6 = 2{\cdot}3,$ $8 = 2^3,$ $10 = 2{\cdot}5,$

$12 = 2^2{\cdot}3,$ $= 2{\cdot}7,$ $16 = 2^4,$ $18 = 2{\cdot}3^2,$ $20 = 2^2{\cdot}5$

よって $m = 1$ $1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 4 + 1 + 2 = \mathbf{18}$

6.6 (1)
$$\begin{aligned} x^5 - & (x^2+1)(x^2-1) \\ & x\{(x^2-4)+5\}(x^2-1) \\ & = (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2) + 5(x-1)x(x+1) \end{aligned}$$

$(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$ は連続する 5 整数の積で 5! の倍数であり，$5(x-1)x(x+1)$ は 5·3! の倍数であるから，$x^5 - x$ は 30 の倍数である．

印刷本

別解 2 項定理により

$$(a+b)^5 - a^5 - b^5 = \sum_{j=1}^{4} {}_5\mathrm{C}_j a^{5-j} b^j$$

${}_5\mathrm{C}_j$ $(1 \leqq j \leqq 4)$ は 5 の倍数であるから，a，b が整数であるとき，上式は 5 の倍数である．k が整数のとき，$a = k-1$，$b = 1$ とし，数列 $\{a_k\}$ を

$$a_k = k^5 - (k-1)^5$$

とおく．この数列の初項から第 n 項までの和をとると

a_k は 5 の倍数であるから，自然数 n は 5 の倍数である．
また，負の整数 m について $-n$ とおくと

$$m^5 - (m-1)^5 = (-n)^5 - (-n-1)^5 = -(n+1)^5 + n^5$$

したがって，上式は 5 の倍数である．
$x^5 - x$ が 5 の倍数であることと以上のことから，整数 x について，$x^5 - x$ は 5 の倍数である．次に

$$x^5 - x = (x-1)x(x+1)(x^2+1)$$

から，$x^5 - x$ は連続する 3 数の積を因数にもち，2×3 の倍数である．
よって，$x^5 - x$ は 2 と 3 の倍数，すなわち 30 の倍数である．

$$x^5 y - xy = xy(x^4 - 1) = xy(x^5 - x)$$

この結果と x，y のとり方から，$x^5 - x$，$y^5 - y$ は 30 の倍数であるから，$x^5 y - xy$ は 30 の倍数である．

6.7 $37x + 5$ $\cdots$ り，$37 \equiv 5$，$32 \equiv 0 \pmod{32}$ であるから

$$5x \equiv 1 \pmod{32} \quad \text{ゆえに} \quad 5x = 32k + 1 \ (k \text{ は整数})$$

これを満たす整数 x の 1 つは $k = 2$ ゆえに $x = 13$

$(*)$ より，$5x + 32y = 1$ であるから

$$5 \times 13 + 32(13 + y) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 64 + 32(13 + y) = 0$$

これを解いて $y = -15$ よって $\boldsymbol{(x,\ y) = (13, -15)}$

印刷本

6.8 $a^2b-3a^2+5b=21$ より　$(a^2+5)b=3a^2+21$

したがって　　$b=\dfrac{3a^2+21}{a^2+5}=3+\dfrac{6}{a^2+5}$　$\cdots(*)$

$a^2+5\geqq 5$ は 6 の約数であるから　　$a^2+5=6$

ゆえに　$a=\pm 1$　これを $(*)$ に代入して　$\boldsymbol{(a,\ b)=(\pm 1,\ 4)}$

6.9　(1)　　$5x+3y=2n$　$\cdots$①

をみたす整数解の 1 つが $(x,\ y)=$　$-n)$ であ

$5n+3($

①，② から　$5(x-n)+3(y+n)$　　$5(n-x)=3(y+n)$

ここで，5 と 3 は互いに素であるか

$n-x=3k,\quad y+n=5k$　ゆえ　　$=-n+5k$　$\cdots(*)$

$n=30$ のとき　　$x=30$　　$=-3$

x，y は，正の整数であ

$30-3k>0,\quad -30+5k>0$　こ

$k=7,\ 8,\ 9$

って　　$\boldsymbol{(9,\ 5),\ (6,\ 10),\ (}$

$(*)$　　$\boldsymbol{(x,}$　　$\boldsymbol{3k,\ -n+5k)}$　**(k は整数)**

0　(1)　　$\dfrac{1}{3}($　　$x)=$　　$-6x+$　　$)=33-2x-\dfrac{x-1}{3}$

上式　　であ　　$x-1$ が 3 の　　すなわち x を 3 で割ったとき

の　　1 の

x セ　　を y　　へ　　枚の乗車券を購入すると

$+3y=100$　　なわち　$y=\dfrac{1}{3}(100-7x)$

ここで，y は　　あるから，(1) の結果より，k を 0 以上の整数とすると，

$x=3k+1$ $\cdots$　　おける．このとき

$=\dfrac{1}{3}\{100-7(3k+1)\}=31-7k$ $\cdots$②

y は 0 以上　　枚であるから　$31-7k\geqq 0$　ゆえに　$k\leqq 4$

$k=0,1,2,3,4$ であるから ①，② より，A，B それぞれの組合せは

$$\boldsymbol{(A,\ B)=(1,\ 31),\ (4,\ 24),\ (7,\ 17),\ (10,\ 10),\ (13,\ 3)}$$

見本

(3) セット A とセット B を組み合せて購入金額が最も低くなるのは，同じ購入枚数であれば，セット A を最大に組み合せた場合である．A だけで 15 セット (乗車券 105 枚) 購入した場合は

$$480 \times 15 = 7200 \text{ (円)}$$

100 枚以上 104 枚以下の枚数の乗車券を A と B で組み合わせる場合，B セットが 3 枚入りであるから

$$100 + 3 = 1 \qquad 101 + 3$$

したがって，乗車券を 100 枚，10 する場合について調べればよい．

i) 乗車券を 100 枚購入する場合
3 セット購入するとき，購 その金額は

$$13 + 220 = 6$$

ii) 乗車券を 101 枚購入する場合，A を x ト，B ト購入す

$7x_1 + 101$ ゆえに $y_1 = \dfrac{1}{3}(1 \quad x_1) = 33 - 2x_1 - \dfrac{x_1 - 2}{3}$

以上 を用いて，$x_1 = \quad 2$ とおけるので，
$= 29$ は 0 以上の整数であるから，$0 \leqq k_1 \leqq 4$
購入 最小と は，k すなわち A を 14 セット，B を 1 セ 入す ，その金

$\times 14 + 2 = 6940$ (円)

乗車 02 枚購入 を x_2 セット，B を y_2 セット購入す

$7x_2 + 102$ ゆえに $y_2 = \dfrac{1}{3}(102 - 7x_2) = 34 - 2x_1 - \dfrac{x_2}{3}$

x_2 は 0 以 整数 k_2 を用いて，$x_2 = 3k_2$ とおけるので，
$y_2 = 34$ となり，y_2 は 0 以上の整数であるから，$0 \leqq k_2 \leqq 4$
購入 最小となるのは，$k_2 = 4$，すなわち A を 12 セット，B を 6 セット購入するときで，その金額は

$$480 \times 12 + 220 \times 6 = 7080 \text{ (円)}$$

印刷

以上のことから，**A を 13 セット**，**B を 3 セット**購入したとき，購入金額は最小となり，その金額は **6900 円**である．

補足

(2) d を整数とする．整数 x，y を解とする次の 1 次不定方程式を考える．

$$7x+3y=d\cdots(*)$$

$7x+3y=1$ の整数解の 1 つは $(x,\ y)=(1,-2)$ であ

$(*)$ の整数解の 1 つは　$(x,\ y)=($　$-2d)$

$7x+3y=0$ の整数解は，整数　　て　　$(-3k,\ 7k)$

ゆえに，$(x,\ y)=(d-3k,\ -2d+$　　である．

$(x',\ y')$ が $(*)$ の解であるとすると

$$7x'+$$

$(*)$，$(**)$ より　$7(x'-x)+$　　$)=$

ゆえに，整数 k' を用いて　　$x=-3k$　　$y=$

したがって　　$x'=d-3($　　$+k'),\ y'=-$　　$7(k+$

よって　　$y)=(d-3k,\ -2d+7k)$ は　　一解

　　，$(*)$ の解は　$(x,\ y)=($　　3　　$0+7k)$

　　とき　　$\geqq 0$ であるから　29　　33

よって　　$y)$　　$3),\ (10,\ 10),\ (7,$　　$,\ 24),\ (1,\ 31)$

(3) $(x$　　$(d-$　　$)$ より，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ であるから，購入金額は

$$48($　　$3k)+$　　$2d+7k)$　　$+100k\quad\left(\frac{2d}{7}\leqq k\leqq\frac{d}{3}\right)$$

購　　が最小　　d に対し　　小の整数 k をとるときである．

　　00 に　　購入　　最小　　は，$d=100$ のとき，$k=29$ で，

　　購入　　6900 円　　とき，$x=13$，$y=3$ である．

6.11　(1) 整　　m　　と　　$m^2-k^2=12$

$|m|^2-|k|^2=12$

ゆえに　　$(|m|+|k|)(|m|-|k|)=12$

ここで，$|m|$　　$(|m|-|k|)+2|k|$ および上式の偶奇性により，$|m|+|k|$，$|m|-|k|$ は　　偶数であるから

$$\begin{cases}|m|+|k|=6\\ |m|-|k|=2\end{cases}\quad\text{ゆえに}\quad |m|=4,\ \ |k|=2$$

よって　　$\boldsymbol{k=\pm 2}$

印刷本

(2) a は整数であるから　$2a-1 \neq 0$

したがって，x の方程式 $(2a-1)x^2+(3a+2)x+a+2=0$ の解は

$$x=\frac{-(3a+2)\pm\sqrt{(3a+2)^2-4(2a-1)(a+2)}}{2(2a-1)}$$
$$=\frac{-(3a+2)\pm\sqrt{a^2+12}}{2(2a-1)}$$

この方程式が整数解をもつとき

$$l^2=a^2+$$ すなわち $$=12$$

を満たす整数 l が存在するから，(1) $+2$

ゆえに，　$a=2$ のとき　　$x=-2$

$a=-2$ のとき　x 5

よって　　**$a=2$ のと $=-2$**

$a=-2$ のとき　$x=0$

6.12　(1) $6($ より　　$(6+x)(6-y)=3$

は自 るから

$(6$ $y)=(9,\ 4),\ (12,$ $8,\ 2),\ (36,\ 1)$

($=$ **$(6,\ 3),(12,\ 4),(30,\ 5)$**

$(x+$ $=2(x$ $+zx)\cdots(*)$

$2z-7)x$ $7z-2yz$

は整 るから， 0 より

$=\dfrac{7($ $-2yz}{2($ $-7}$　ゆえに　$x-\dfrac{7}{2}=\dfrac{2\left(\dfrac{49}{4}-yz\right)}{2(y+z)-7}$　$\cdots(**)$

$x\geqq 4$ のとき $y\leqq z$ であるから，$(**)$ の左辺は正，右辺は負となり，不適．した ，$x=1,\ 2,\ 3$ の場合について求めればよい．

(i) $x=1$ に代入して整理すると　$(2y-5)(2z-5)=39$

$-3\leqq 2y-5\leqq 2z-5$ より

$(2y-5,\ 2z-5)=(1,\ 39),\ (3,\ 13)$　すなわち　$(y,\ z)=(3,\ 22),\ (4,\ 9)$

見本

(ii) $x=2$ を $(*)$ に代入して整理すると　$(2y-3)(2z-3)=37$

$1 \leqq 2y-3 \leqq 2z-3$ より

$$(2y-3,\ 2z-3)=(1,\ 37)\quad \text{すなわち}\quad (y,\ z)=(2,\ 20)$$

(iii) $x=3$ を $(*)$ に代入して整理すると　$(2y-1)(2z-1)=43$

$5 \leqq 2y-3 \leqq 2z-3$ より，これを満たす自然数 y [illegible] は存在しない．

(i)，(ii)，(iii) より　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(1,\ 3,\ 22),\ (1\ \ \ ,\ \ \ ,\ \ \ ),\ (2,\ 2,\ 20)}$

解説 $(*)$ より　　$x(2y-7)+y(2z$ [illegible] $(2x-7$ [illegible]

$x(2y-7)$，$y(2z-7)$，$z(2x-7)$ [illegible] で，これらの少なくと 1 つは負である．このとき

$$2x-7 \leqq 2y-7 \leqq$$ [illegible] $-7<0$

6.13　(1) p^x が有理数 $\dfrac{a}{b}$ に等しいと [illegible] は互い [illegible]

$$p^{\frac{n}{m}}=\frac{a}{b}\quad \text{ゆえに}\quad p^{\ \ \ }=\ \ \ \cdots$$

① [illegible] るから　$b^m=1$　ゆえに　b [illegible]

[illegible] ① [illegible] すると　　$p^n=a^m\quad \cdots$ [illegible]

より [illegible] 数にもつから，$a=p$ [illegible] く (k は整数)．

これ [illegible] に代入

$$p^{\ \ \ }\ \ \ \text{ゆえに}\quad p^n=p^{km}$$

正の第 [illegible] ら　　$n=km$　　ゆ [illegible]　　$k=\dfrac{n}{m}$

n [illegible] の最大 [illegible] るから [illegible] $=1$

([illegible] の結 [illegible]　x は整数

$$p^x=-x^2+9x-5\quad \cdots(*)$$

は正の整数で [illegible]　$f(x)=-x^2+9x-5$ とおくと，$f(x)>0$ となる x は

	1	2	3	4	5	6	7	8
	3	9	13	15	15	13	9	3

上の表か [illegible] を満たすのは，次の 2 つである．

$$3^1=f(1),\quad 3^2=f(2)$$

よって　　$\boldsymbol{(p,\ x)=(3,\ 1),\ (3,\ 2)}$

印刷本

6.14 (1) $a \equiv r,\quad b \equiv s \pmod 8$

したがって $a+b \equiv r+s \pmod 8$

$a+b$ を 8 で割った余りと $r+s$ を 8 で割った余りは等しい.

(2) 仮定より $a-r \equiv 0 \pmod 8$

$a^2-r^2=(a+r)(a-r)$ であるから

$a^2-r^2 \equiv (a+r)\cdot 0 \pmod 8$

したがって $a^2-r^2 \equiv 0 \pmod 8$

よって，a^2 を 8 で割った余りと [illegible] で割 [illegible] は等しい.

(3) $(2k+1)^2=4k(k+1)$ [illegible]

k が整数のとき，$k(k+1)$ は偶数 [illegible]

k が偶数のとき $(2k)^2 \equiv 0$ [illegible] $(2k)^2$ [illegible] $\pmod 8$

よって，平方数を 8 で割 [illegible] は [illegible] **4**

(4) (3) の結果から 2 つの平方数の和を 8 で割 [illegible] りは

[illegible] $1+1,\ 0+4,\ 1+4,\ 4+$ [illegible] $0,\ 1,$ [illegible]

[illegible] って，[illegible] 数の和を 8 で割った余 [illegible] にはならない.

6 [illegible] (2) 仮定 [illegible] $10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

[illegible] から [illegible] $\pmod{13}$

[illegible] たが [illegible] a_{n+1} [illegible] $_n \pmod 1$

[illegible] 10^1 [illegible] より

[illegible] 結果を [illegible] につい

[illegible] $\equiv 100 \equiv 9$

$a_3 \equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12$

$a_4 \equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3$

$a_5 \equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4$

$a_6 \equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1$

よって [illegible] $\boldsymbol{a_3=12,\ a_4=3,\ a_5=4,\ a_6=1}$

(3) 整数 p，q を $1 \leqq p \leqq 9$，$0 \leqq q \leqq 9$ とし，求める自然数 N を

$$N=p\cdot 10^5+2\cdot 10^4+10^2+6\cdot 10+q$$

見本

とおくと，法 13 に関して

$$\begin{aligned} N &\equiv p\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 10^2 + 6\cdot 10 + q \\ &\equiv p\cdot 4 + 2\cdot 3 + 9 + 6\cdot 10 + q = 4p + q + 75 \\ &\equiv 4p + q - 3 \end{aligned}$$

このとき，$N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 $(p,\ q)$ の組は

$$(p,\ q) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ \ ),\ (5,\ 9),\ (6,\ \ \ \ 1),\ (9,\ 6)$$

よって，求める自然数 N は

220168，320164，420160，520

6.16 (1) n が正の偶数のとき，$\dfrac{n}{2}$ は自然

$$2^n - 1 \equiv \equiv 1^{\frac{n}{2}} -$$

よって $2^n - 1$ は 3 の倍数である．

(2) n き，$2^n - 1$ は奇数である．

$n =$ $2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互い である．

ii) n と

$$2^n + 1 = 1(2^n - 1) + 2$$

正式 $+ 1$ 1 で割 余りは 2.

2^n 2 で割 りは 1 で あ ，ユークリッドの互除法によ

$+ 1$ の最大公約数 である．

，2^n いに

$-$ $(p,\ q$ は $\cdots (*)$

$= 2$ のとき $= 2q^2$

これ 満た は存在しない．

$p \neq 2$ となり， 奇素数であるから，$\dfrac{p-1}{2}$ は自然数である．

(1) の結果か $^{-1} - 1$ は 3 の倍数であるから，pq^2 は 3 を因数にもつ．

i) $p = 3$ ，$(*)$ より $3 = 3q^2$

q は素数であるから，不適．

印刷本

ii) $q=3$ のとき，$(*)$ より

$$2^{p-1}-1=9p \quad \text{ゆえに} \quad (2^{\frac{p-1}{2}}+1)(2^{\frac{p-1}{2}}-1)=(2^3+1)p$$

(2) の結果から，$2^{\frac{p-1}{2}}+1$ と $2^{\frac{p-1}{2}}-1$ は互いに素であることに注意して

$$\frac{p-1}{2}=3, \quad 2^{\frac{p-1}{2}}-1=p \quad \text{これを解いて} \quad p=7$$

よって　　$\boldsymbol{(p,\ q)=(7,\ 3)}$

6.17　(1) k を整数とすると

$$(3k)^2=3\cdot 3k^2, \quad (3k$$

したがって，a^2+b^2 が 3 で割り切
るときに限る．

(2) $9x\in A$ のとき

$$a^2+b^2 \quad =3\cdot 3x$$

を
a，b が存在する．このとき，
ら，
$a=3p$，$b=3q$ をみた
p，
が存在し

$$^2+(3q)^2=9x \quad \text{ゆ}$$
$$p^2+q^2=x$$

x

$$(a$$
$$+a^2d^2+b^2c^2$$
$$=(a^2+b$$
$$-d^2)$$

$$+b^2$$
$$\text{く}$$
c，d は整数)

$$=(a^2+b^2)($$
$$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

$ac+$，ad 整数であるから，xy は A の要素である．

(3) $5=1^2+2^2$ で
ら

$$5^$$
$$5=5^4(1^2+2^2)=(5^2)^2+(5^2\cdot 2)^2=25^2+50^2$$

よって，5，
は A の要素である．

補足　n を自然数とすると，5^n は A の要素である．

i) $5=1^2+2^2$ より，$n=1$ のとき成立する．

印刷本

ii) $n=k$ のとき，成立すると仮定すると，(2) において，$x=5$，$y=5^k$ とすると，$xy=5^{k+1}$ は A の要素である．

i), ii) により，すべての自然数 n に対して，5^n は A の要素である．

6.19 (1) $f(0)=b$，$f(1)=a+b$，$f(2)=2a+b$ より

$$f(1)-f(0)=a,\quad f(2)-f(1)=a,\quad f(2)-f(0)=2a$$

$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ のうち，2 つの値が 3 の倍数で[illegible]，上の 3 つの値のうち少なくとも 1 つは 3 の倍[illegible]るから[illegible]は 3 の倍数である．
また

$$b=f(0),\quad b=f(1)[illegible]2)-2a$$

であるから，b も 3 の倍数である．

(2) $F(x)=f(x)g(x)$ の係数，定数[illegible]あるから

$$F(0)=f(0)g(0[illegible])=f(1)[illegible]\quad F([illegible]$$

は，す[illegible]て 3 の倍数である．a，b，c，d [illegible]であ[illegible]
$f([illegible]$，$f(2)$，$g(0)$，$g(1)$，$g(2)$ は整[illegible]

[illegible](0)，[illegible]f(2) のうち，2 つの値が[illegible]数であるとき
(i)[illegible]，b はともに 3 の倍[illegible]る．

(ii)[illegible]，$f(1)$[illegible]ち，2 つの値が 3 の倍数でないとき
[illegible](0)，[illegible]f(2)[illegible]2 つ値が 3 の倍数であるから，
(i) [illegible]に，c[illegible]ともに 3 の[illegible]である．

[illegible]1 か[illegible]までの[illegible]うち，10 と[illegible]素である数は

[illegible]9

[illegible]$=\mathbf{4}$

(2) 1 から p^k まで[illegible]数のうち (p は素数)，p^k と互いに素でない数は，p の倍数の $\dfrac{p^k}{p}$ 個[illegible]から

$$\varphi(p^k)=p^k-\frac{p^k}{p}=\boldsymbol{p^k-p^{k-1}}$$

見本

(3) $100 = 2^2 \times 5^2$

1 から 100 までの自然数の中で，2 の倍数，5 の倍数の集合をそれぞれ A, B とすると

$$n(A) = \frac{100}{2} = 50, \quad n(B) = \frac{100}{5} = 20, \quad n(A \cap B) = \frac{100}{10} = 10$$

ゆえに　$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 50 + 2 \quad - 10 = 60$

よって　$\varphi(100) = 100 - n(A \cup B) = 100 - 60 = \mathbf{40}$

(4) $1500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$

1 から 1500 までの自然数の中で 倍数 ，5 の倍数の集合をそれぞれ X，Y，Z とすると

$$n(X) = \frac{1500}{2} = 750, \quad n(Y) = \frac{1}{}$$

$$n(X \cap Y) = \frac{1500}{6} = 250, \quad Z \quad 0$$

$$n(Z \cap X) = \frac{1500}{10} = \quad (X \cap Y \quad = \frac{1}{30}$$

したが て

$$Z) = n(X) + n(Y) + n(Z) \quad n(Y$$

$$- n(Z \cap X) \quad X \cap Y \cap Z)$$

$$50 + 500 + 300 - 2 \quad 00 - 150 + 50 = 1100$$

よ $\varphi($ $- n(X \cup Y \cup Z) = 1500 - 1100 = \mathbf{400}$

解説 ルマ イラー 2 (佐賀 005) 1

$f(x)$ り $($ $x^2 - 4x + 2)$

解いて $2 \pm \sqrt{2}$

て, 0 の解 ると

$$\mathbf{-\sqrt{2}, \quad \sqrt{2}, \ \sqrt{2}, \ 2 + \sqrt{2}}$$

(2) $f(x) \leqq 0$ の解 1) の結果から

$$\sqrt{2} \leqq x \leqq 2 - \sqrt{2}, \quad \sqrt{2} \leqq x \leqq 2 + \sqrt{2}$$

したがって $) \leqq 0$ を満たす整数 n は

$$-\sqrt{2} \leqq n \leqq 2 - \sqrt{2}, \quad \sqrt{2} \leqq n \leqq 2 + \sqrt{2}$$

よって　$\boldsymbol{n = -1, \ 0, \ 2, \ 3}$

見本

(3) n が整数のとき，$f(n)$ は整数であるから，$f(n) \leqq 1$ を満たす整数 n を，次の 2 つの場合に分けて求める．

i) $f(n) \leqq 0$ のとき，(2) の結果から　$n = -1,\ 0,\ 2,\ 3$

ii) $f(n) = 1$ のとき　$(n^2-2)(n^2-4n+2) = 1$

n^2-2 は整数であるから，上式から　$n^2-2 = \pm 1$

$n^2-2 = 1$ を満たす整数 n は存在しないから

$$n^2-2 = n^2-4n+2 = -1 \quad \text{これを解} \quad n = 1$$

i)，ii) から，求める整数 n は　**-1，0，2，3**

補足 (高次不等式)

$\alpha < \beta < \gamma < \delta$ とすると

1 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) < 0$ の解は　$x < \gamma$

2 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) > 0$ の解は　$\alpha < x < \beta,\ \gamma < x$

3 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) < 0$ の解は　$\alpha < x < \beta,\ \gamma < x < \delta$

4 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) > 0$ の解は　$x < \alpha,\ \beta < x < \gamma,\ \delta < x$

6.22 $a,\ b,\ c$ $(a \neq 0)$ とする 4 次方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \cdots (*)$$

有理数解は 0 でないので，q を用いて $(p \neq 0)$

$$x = \frac{p}{q} \quad (p,\ q \text{ は互いに素})$$

とおく．$(*)$ に代入すると

$$\left(\frac{p}{q}\right)^4 + a\left(\frac{p}{q}\right)^3 + b\left(\frac{p}{q}\right)^2 + c\left(\frac{p}{q}\right) + d = 0$$

したがって　$p^4 + ap^3q + bp^2q + cpq^2 + dq^3 = -\dfrac{p^4}{q}$

上式から，q は整数である．p，q は互いに素であるから　$q = 1$

よって，解 r は整数であるから $(r \neq 0)$

$$r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d = 0 \quad \text{ゆえに} \quad r^3 + ar^2 + br + c = -\frac{d}{r}$$

印刷本

上式から，$-\dfrac{d}{r}$ は整数であるから，r は d の約数である．

以上のことから，$|r|$ は整数であり，かつ $|d|$ の約数に限る．

(2) 方程式 $2x^4-2x-1=0$ の解は 0 ではないので，有理数の解 α $(\alpha \neq 0)$ をもつと仮定すると

$$2\alpha^4-2\alpha-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4+2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{3}-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2}-2\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$$

上式より，方程式

$$t^4+2t^3-t^2-2t=0 \quad (**)$$

が有理数の解 $\dfrac{1}{\alpha}$ をもつ．

このとき，(1) の結論から，その有理数の解は $t^4+2t^3-t^2-2t=t(t-1)(t+1)(t+2)$ の約数であり，

$t=\pm 1$，± 2 は $(**)$ の解では[illegible]，

よって，方程式 $2x^4-2x-1=0$ の実数[illegible]

6.23 (1) 自然数 a を 3 で割った商を k，余りを r とすると $(r=0,1,2)$

$r=0$ のとき　$a^2=(3k)^2=3(3k^2)$

$r=1$ のとき　$a^2=(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1$

$r=2$ のとき　$a^2=(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1$

よって，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である．

(2) 自然数 a，b が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすとき，a^2+b^2 は 3 の倍数であるから，(1) の結果より a^2，b^2 がともに 3 の倍数である．

このとき，自然数 l，m を用いて

$$a=3l, \quad b=3m$$

と表されるので

$$(3l)^2+(3m)^2=3c^2 \quad \text{ゆえに} \quad c^2=3(l^2+m^2)$$

c^2 は 3 の倍数であるから，(1) の結果により，c も 3 の倍数である．

よって，a，b，c はすべて 3 で割り切れる．

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c が存在すると仮定すると，(2) の結果から

$$a=3^nA, \quad b=3^nB, \quad c=3^nC$$

見本

とおける (n は自然数，3 つの自然数 A，B，C の少なくとも 1 つは 3 で割り切れない)．このとき

$$(3^nA)^2+(3^nB)^2=3(3^nC)^2$$
$$A^2+B^2=3C^2$$

上式および (2) の結果から，A，B，C はすべて 3 で割り切れることになり，A，B，C の仮定に反する．
よって，$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c は

6.24 (1) $x^{n+5}-$

x^{n+5} と x^n を x^5-1 で割った余りは

x^m と x^n を x^5-1 で割った余りは

よって，n を 5 で割った余りを

$$\begin{cases} \mathbf{0<} & \mathbf{のとき} \\ r & \mathbf{とき} \end{cases}$$

(2) 整数 r を $1\leqq r,s\leqq 4$，$r\neq s$ とする．

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ に

$n\not\equiv 0$ のとき，$rn\not\equiv sn \pmod 5$ であるから，(1) の結果から $x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n$ を x^5-1 で割った余りは，$x^4+x^3+x^2+x$ を

で割

に等しいから

$$+x \qquad x=(x^4 \quad x^3+x^2+x+1)\cdot 1-1$$

よって，余りは -1

$n\equiv 0$ ((1) の結果から，$x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n$ を x^5-1 で割った余りは，x $=4x^5$ を x^5-1 で割った余りに等

$$4x^5=(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot 4(x-1)+4$$

したがって，求める余りは 4

よって $\begin{cases} r & \equiv \pmod 5 \text{ のとき} \quad \text{余り } -1 \\ & \equiv \pmod 5 \text{ のとき} \quad \text{余り } 4 \end{cases}$

解説 $n\not\equiv 0$ (とき，$rn\equiv sn \pmod 5$ が成り立つ仮定すると

$$(r-s)n\equiv 0 \pmod 5$$

このとき，$-3\leqq r-s\leqq 3$，$n\not\equiv 0 \pmod 5$ であるから，矛盾．

見本

法5について，n，$2n$，$3n$，$4n$ はどれも合同ではないので，これらは順序を無視すると，法5について，1，2，3，4である．
したがって，x^n，x^{2n}，x^{3n}，x^{4n} を x^5-1 で割った余りは，順序を無視すると，x．x^2，x^3，x^4 で割った余りに等しい．
よって，$x^n+x^{2n}+x^{3n}+x^{4n}$ を x^5-1 で割った余りは，$x^4+x^3+x^2+x$ を x^5-1 で割った余りに等しい．

7.1 $\theta=\angle\mathrm{ACD}$ とおくと

$$\angle\mathrm{AEB}=4\theta,\quad \angle\mathrm{ABE}=2\theta$$

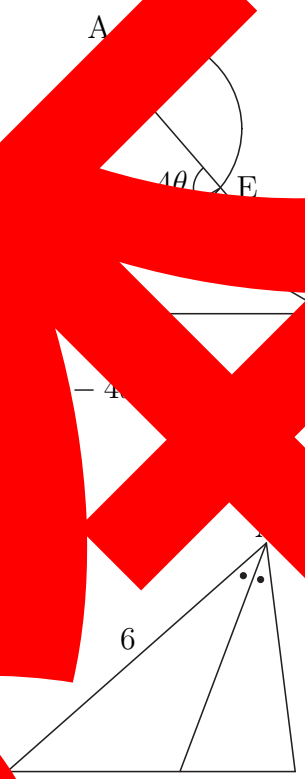
点A，D，E，Fが同一円周上にあるの

$$\angle\mathrm{ADF}=180^\circ-4\theta$$

△ABEおよび△ACDの内角の和

$$A+2\theta+4\theta=1 \qquad A+\theta+ \quad -4$$

これを解いて　　$\theta=20^\circ$，$\boldsymbol{A=60^\circ}$



7.2 BC＝5　り

　　C＝　＝5−3＝2

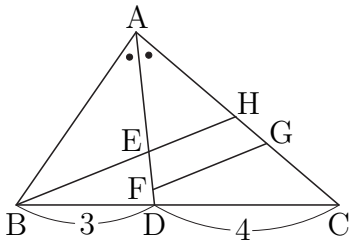
　は∠　等分線　ら，
AB：　AD：

　：AC　　ゆ　$\mathbf{AC=4}$

　△　直線　て，メネラ
　適用

　　$\frac{\mathrm{B}}{}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EA}}=1$

仮定より　　$\frac{3}{5}$　…②



ADは，∠A　分線であるから

$$\mathrm{B}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=3:4 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}}=\frac{7}{3} \quad \cdots③$$

②，③を①に代入すると

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}}\times\frac{7}{3}\times\frac{3}{5}=1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}}=\frac{5}{7}}$$

見本

(2) (1) の結果から　$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{5}{12}$　$\cdots$④,　仮定から　$\dfrac{\mathrm{AG}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{7}{12}$

上の 2 式から　$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AG}} = \dfrac{5}{7}$　$\cdots$⑤

仮定から　$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{ED}} = \dfrac{5}{3}$, $\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{ED}} = \dfrac{2}{3}$

上の 2 式から　$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EF}} = \dfrac{5}{2}$　ゆえに　$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AF}} = \dfrac{5}{7}$　$\cdots$⑥

⑤, ⑥ より　EH//FG　よって　H//FG

(3) (2) の結果から，△AEH ∽ △AF　　$= \dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AF}}$

上式に FG = 7 および ⑤ を代入する

仮定より　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{3}{4}$　これと C　　$\cdots$⑧

AE は ∠A の二等分線であ　　BE :　A

⑦, ⑧ により　BE : 5 =　　よって　　= **9**

7.4　(1) ∠B　　$^\circ - 2 \times 72^\circ = 36^\circ$

　　$= \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ACB} = 36^\circ$

　ABC　　いて

　　C は共

　　∠B　　∠CB

　角が　　から　　C ∽ △BCD

　　果より　　等辺三　　あるから

$\cdots$①

∠　　$\dfrac{1}{2}$　　$= 36^\circ$ より，△ABD は二等辺三角形であるから

$$\mathrm{AD} = \mathrm{BD} \quad \cdots ②$$

①, ② より　　$= \mathrm{BD} = \mathrm{BC} = 1$, $\mathrm{DC} = x$ とおくと

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AD} + \mathrm{DC} = 1 + x$$

(1) の結果より，AB : BC = BC : DC であるから

$$(1 + x) : 1 = 1 : x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + x - 1 = 0$$

見本

$x>0$ に注意して，これを解くと　$x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

よって　　$\mathrm{AD}:\mathrm{DC}=1:\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=\boldsymbol{2:\sqrt{5}-1}$

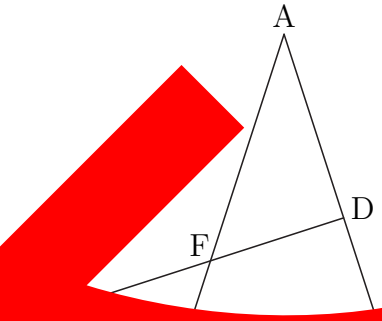
(3) △ABC と直線 DE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1}=1$$

よって　　$\mathrm{AF}:\mathrm{FB}=2:x$

$$=2:\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$=\boldsymbol{\sqrt{5}+1:1}$$



7.5　(1) △ABD および直線 EP について　　を適用すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\quad}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\quad}{b+1}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=(b+1):ab}$

(2)　　$\dfrac{1}{\quad+1}$，$\dfrac{\triangle\mathrm{APE}}{\triangle\mathrm{ABD}}=\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}\cdot\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}$　　$\dfrac{\quad}{(\quad+1)+ab}$

この 2　　ると　　$\dfrac{\triangle\mathrm{APE}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\dfrac{1}{\quad1)(ab+b+1)}$

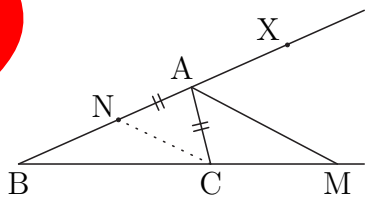
よって　　$\triangle$　　$\mathrm{C}=\boldsymbol{1:(a+1)(ab+b+1)}$

6　　$\mathrm{B}:\mathrm{AC}$　　$1:\mathrm{MC}$　　①

(A)　　AN と

　　AN　　MC

　　MA//CN



(B)　　の結

　　∠XAN　　ANC（同位角），∠CAM = ∠ACN（錯角）　…①

　　△ANC　　辺三角形であるから

　　∠ANC = ∠ACN　…②

　　①，② から　　∠XAM = ∠CAM

　　よって，AM が ∠A の外角を二等分する．

見本

(2) BQ，CR はそれぞれ∠B，∠C の二等分線であるから

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AQ}{QC},\quad \frac{BC}{AC}=\frac{BR}{RA}$$

上の 2 式の辺々を掛けると　$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AQ}{QC}\cdot\dfrac{BR}{RA}$　…③

△ABC と直線 QR について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1\quad \text{ゆえに}\quad \frac{BP}{PC}=\frac{BR}{RA}\cdot\frac{AC}{\ \ }$$　④

③，④ より　$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BP}{PC}$

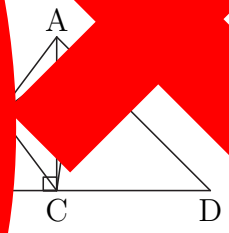
よって，AP は∠A の外角を二等分

7.7 (1) ∠AFB = ∠ACB = 90° であるから
上にある．このとき，E はこの

$$= EC$$

(2) ∠C = 90°，AB : AC = 5 : より

$$: BC = 5 : 4 : \sqrt{5^2-4^2}$$
$$= 5 : 4 : 3$$



条件か

$$AB = 3k,\quad AC = CD = 4k,\quad AD = 4\sqrt{2}k$$

く．　の面

$$\frac{1}{2}BD\cdot A\ \ D\cdot BF\quad \text{ゆえ}\quad \frac{1}{2}\cdot k\cdot 4k=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}k\cdot BF$$

から　$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}k$,　$\sqrt{\ \ - BF^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}k$

$= 1 : 7$　ま　AE : EB = 1 : 1,　BC : CD = 3 : 4

△AB の面　とすると

$$\triangle ABC=\frac{3}{7}S$$
$$\triangle AEF=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}S=\frac{1}{16}S$$
$$\triangle BCE=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}S=\frac{3}{14}S$$
$$\triangle CDF=\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{8}S=\frac{1}{2}S$$

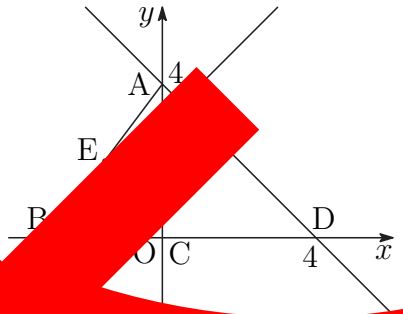
見本

したがって　　$\triangle \mathrm{CEF} = S - \dfrac{1}{16}S - \dfrac{3}{14}S - \dfrac{1}{2}S = \dfrac{25}{112}S$

よって　　$\triangle \mathrm{ABC} : \triangle \mathrm{CEF} = \dfrac{3}{7}\mathrm{S} : \dfrac{25}{112}\mathrm{S} = \mathbf{48 : 25}$

別解　$\angle \mathrm{C} = 90°$，$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 5 : 4$ より

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} : \mathrm{BC} = 5 : 4 : \sqrt{5^2 - 4^2}$$
$$= 5 : 4 : 3$$



C を原点とし，条件から

$\mathrm{A}(0,\ 4)$，$\mathrm{B}(-3,\ 0)$，$\mathrm{C}(4,$

とおき，求める三角形の面積比を示

E は AB の中点であるから　E

直線 AD の方程式は　　$+4$　$\cdots$

直線 BE の方程式は　　y　$+3$　$\cdots$②

①

て　$\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

こがっ

$\mathrm{BC} = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6$

$1\left|-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{7}{2} - 2\cdot\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{}{8}$

って　　ABC

$= 6 : \dfrac{2}{8}$　　**25**

の定理

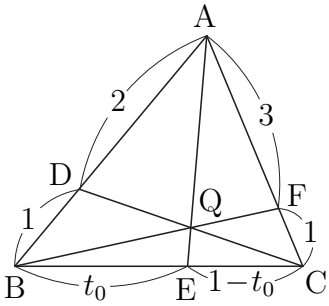
E C

$= 1$　ゆえ

$\dfrac{}{0}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{1} = 1$

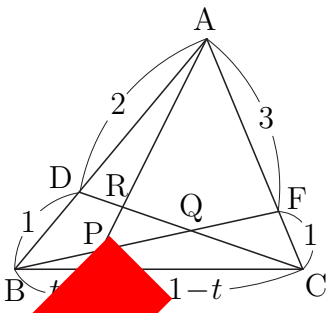
これを解いて

$= \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$



見本

(2) △AEC および直線 BF について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

したがって $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}=\dfrac{3}{t}$

よって $k=\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AE}}=\dfrac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{3+t}}$

△BCD および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

したがって $\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}=\dfrac{3(1-t)}{2t}$

よって $\ell=\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{3(1-t)}{3(1-t)+2t}=\dfrac{\boldsymbol{3(1-t)}}{\boldsymbol{3-t}}$

(3) (2) について，△BCF および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{4}{t}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1$$

よって $\dfrac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=\dfrac{3t}{4(1-t)}$ $\cdots$①

$\ell=\dfrac{3}{4}$ で，P は Q と一致するので $\dfrac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{QB}}=\dfrac{1}{2}$ $\cdots$②

よって $\mathrm{CQ}=\dfrac{2}{3}\mathrm{CD}$ $\quad \mathrm{BC}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 1=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(4) P は Q に一致するので，(2) の結果から

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CD}}=\frac{3\left(1-\frac{3}{5}\right)}{3-\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

したがって $\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{3(1-t)}{3-t}-\dfrac{1}{2}=3-t:3-5t$

また，①，②から

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{PQ}=\frac{2}{3}:\frac{3(1-\mathrm{t})}{3(1-\mathrm{t})+4\mathrm{t}}-\frac{1}{3}=3+\mathrm{t}:3-5\mathrm{t}$$

見本

△BCQ : △PQR = BQ·CQ : PQ·QR であるから

$$\triangle BCQ : \triangle PQR = (3+t)(3-t) : (3-5)^2$$

(3) の結果から　　$\triangle PQR = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)} = \boldsymbol{\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}}$

解説 $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とおくと

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}}{2+1} = \frac{\vec{b} + 2\cdot\frac{3}{4}\vec{c}}{3} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AE} = \frac{3}{3+t}(\vec{b} + t\vec{c})$$

CR : RD = $3(1-t) : 2t$ であるから

$$\overrightarrow{AR} = \frac{2t\overrightarrow{AC} + 3(1-t)\overrightarrow{AB}}{3(1-t)+2t} = (3-3t)\vec{b} + 2t\vec{c}$$

したがって　$\overrightarrow{QP} = \dfrac{3-5t}{6(3+t)}(3\vec{b} + 3\vec{c})$,　$\overrightarrow{QR} = \dfrac{3}{6(3+t)}(3-$

これらを空間ベクトルと考え，外積の性質を用いると

$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR} = -\frac{(3-$$

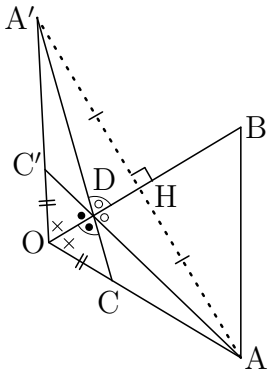
って　　$\triangle ABC = \dfrac{(5-3t)}{6(3+t)(3-$

外[redacted]校数学[redacted]あるから，2 次試験では使えないが，センター[redacted]では，[redacted]有効な[redacted]法である．なお，外積 (ベクトル積) の演算[redacted]ついて[redacted]式が成[redacted]ことに注[redacted]い．

$$\vec{b} \times \vec{c} =$$

[redacted]，これ[redacted]b を[redacted]と[redacted]$b = \vec{0}$

7.9　(1)[redacted]と



$$[redacted]PC = A'P + PC$$
$$\geqq AC$$

等号が成り[redacted]は，P を A′C と OB の交点とすると[redacted]この点が D である．
A から OB に下ろした垂線を AH とすると

$$\angle AOH = \angle A'OH$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

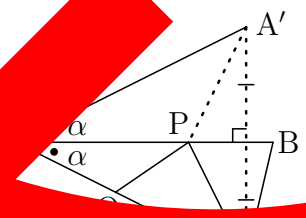
印刷本

△OCD ≡ △OC′D より　∠CDO = ∠C′DO　…①
△ADH ≡ △A′DH より　∠ADH = ∠A′DH　…②
OB と A′C の対頂角から　∠CDO = ∠A′DH　…③

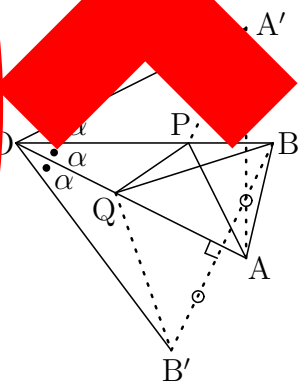
①，②，③ より　∠ADH = ∠C′DO
よって，3 点 A，D，C′ は，同一直線上にあり，線分 AC′ は D を通る．

(2) 線分 OB 上に P，線分 OA 上に Q をとると

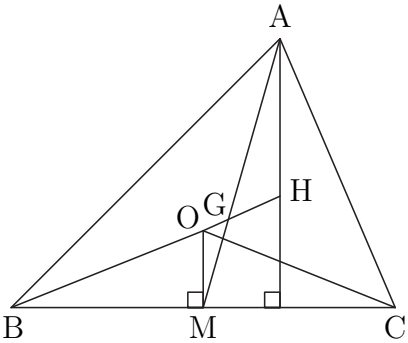
$$\begin{aligned} AP + PQ &= A'P + PQ \\ &\geqq A'Q \end{aligned}$$



等号が成り立つのは，P を A′Q と OB
とするときで，この点が F である
さらに，A′Q が最小となるのは
するときで，この点が E で
よって，折れ線 AFE が
(3) 線分 O
分 O
AP +
A′B′
等
Q を
のとき
れ
A′B′ =



7.10 △OBM
OB = OC
あるから，△OBM
したがって
ゆえに　△OM
また，AG : GM



AH : OM = 2 : 1

印刷本

別解 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$$

△ABC の重心 G の位置ベクトルは　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

BC の中点 M の位置ベクトルは　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\alpha}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OM}})$　$\cdots$①

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\cdot($　　$\dfrac{1}{2}($　　$)=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+$

①，② より　$\dfrac{\alpha}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OM}})$

ゆえに　$\left(\dfrac{\alpha}{3}-1\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left($　　$\right)\overrightarrow{\mathrm{O}}$

$\dfrac{\alpha}{3}-1\neq0$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}//$　となり，この　A は　二等分線上に　AB = AC となり不適．したが

　0，　$\dfrac{2}{3}\alpha-\beta=0$　これを　て　$=3$，$\beta=$

$\beta=2$　に代　とにより　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$

CD は　BC の　あるから，　点 (重心) を G とすると

　GB =　　$\dfrac{1}{3}$BE,　　$\dfrac{1}{3}$CD,　GD $=\dfrac{1}{3}$CD

∠B　るから，　とき，△BGD ≡ △CGE

ゆえに　　って　AB = AC

7.12　(1) B，C の中点　し，直線 GE を ℓ とする．

△AMC と ℓ に　て，メネラウスの定理を適用すると

　　G/GM · ME/EC · CH/HA = 1　ゆえに　$\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=1$

したがって　$\dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=\dfrac{1}{3}$　　よって　　**CH : HA = 1 : 3**

印刷本

(2) △ABC と ℓ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

したがって $\quad \dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}}=\dfrac{3}{2} \quad$ よって $\quad$ **BI : IA = 2 : 3**

(3) (1),(2) の結果から

$$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = 3 : 2+5 = 3 : 7 \qquad \mathrm{FH} : \mathrm{HA} = \qquad = 7 : 3$$

△ADF と ℓ について，メネラウ　　を　　ると

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{ID}}\cdot\frac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{JF}}\cdot\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{HA}}=1 \quad \text{ゆ}$$

したがって $\quad \dfrac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{JF}}=1 \quad$ 　　**1**

7.13 (1) $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=$　　，△ABC　　接円　　ると

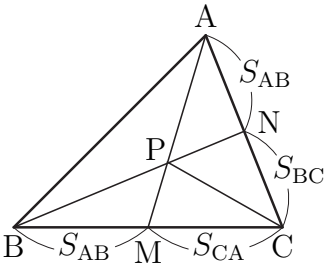
$$S_{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}cr, \quad S_{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}ar \quad A=$$

　を　　$S_{\mathrm{CA}}{}^2=S_{\mathrm{BC}}{}^2$ に代入する

$$\left(\frac{1}{2}cr\right)^2=\left(\frac{1}{2}ar\right)^2 \quad \text{に} \quad c^2+b^2=a^2$$

　て　　C =

直線　　辺 BC　　を M，直線　　辺 CA　　点を N



　MC =

　NA = S_{BC}

S_{AB}　S_{BC} =　　であるとき，M，N は，それぞれ辺 BC　　の中点である．このとき，P は中線 AM　　N の交点であるから，P は △ABC の重　　る．

補足 上の図に　　メネラウスの定理により

$$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AN}}\cdot\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PB}}=\frac{S_{\mathrm{CA}}}{S_{\mathrm{AB}}+S_{\mathrm{BC}}}$$

見本

したがって

$$(S_{\mathrm{AB}}+S_{\mathrm{BC}})\overrightarrow{\mathrm{PN}}+S_{\mathrm{CA}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$$

$$(S_{\mathrm{AB}}+S_{\mathrm{BC}})\cdot\frac{S_{\mathrm{BC}}\overrightarrow{\mathrm{PA}}+S_{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{S_{\mathrm{AB}}+S_{\mathrm{BC}}}+S_{\mathrm{CA}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$$

$$S_{\mathrm{BC}}\overrightarrow{\mathrm{PA}}+S_{\mathrm{CA}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}+S_{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

一般に，△ABC の内部の点 P について

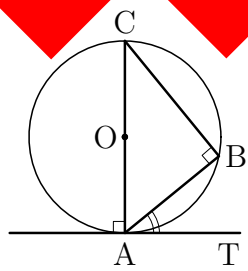
$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\quad+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=$$

であるとき，$S_{\mathrm{BC}}:S_{\mathrm{CA}}:S_{\mathrm{AB}}=\alpha$

また，$\mathrm{P}(\vec{p})$，$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ とす

$$\vec{p}\quad+\beta$$

7.14　右の図のように，円 O の弦 の端点 A に
おける円の接線 AT と弦 AB が作る ∠BAT を考
える．



直角

$\mathrm{B}=90^\circ$

ACB　90°

とから，次の成り立つ

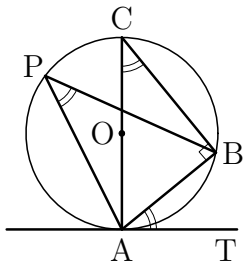
$\angle\mathrm{BAT}$　B

$\angle\mathrm{AC}$　AB　で，

右

$=\angle\mathrm{APB}$

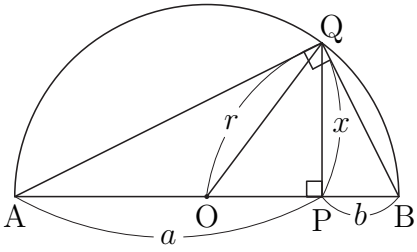
となる．



7.15　(1) 半円 C の半径 とすると，
右の図から

$$2r=\mathrm{AB}=\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$$

よって　$\boldsymbol{r=\dfrac{AP+BP}{2}}$



印刷本

$a = \mathrm{AP}$，$b = \mathrm{BP}$，$x = \mathrm{PQ}$ とし，3 つの直角三角形 APQ，BPQ，ABQ に三平方の定理を適用すると

$$\mathrm{AQ}^2 = a^2 + x^2, \quad \mathrm{BQ}^2 = b^2 + x^2, \quad \mathrm{AQ}^2 + \mathrm{BQ}^2 = (a+b)^2$$

第 1，2 式を第 3 式に代入すると

$$(a^2 + x^2) + (b^2 + x^2) = (a+b)^2 \quad \text{整理すると} \quad x^2 = ab$$

$x > 0$ より　$x = \sqrt{ab}$　よって　$\mathrm{PQ} = \sqrt{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{PB}}$

(2) (1) の結果から　$r = \dfrac{a+b}{2}$，$x =$

(1) の図から　$r \geqq x$　ゆえに　$\dfrac{a+}{}$

(∗) について，等号が成立するとき，すなわち，$a = b$ のときである．

7.16　(1) (a) P における共通接線を引く．

接弦の作る角により

$= \angle\mathrm{ACP}$，$\angle\mathrm{RPB} = \angle\mathrm{BDP}$

AB，QR の対頂角によ

$= \angle\mathrm{RPB}$

から　$= \angle\mathrm{BDP}$ である

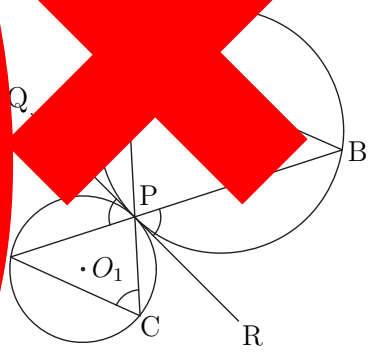
が等　//BD

△AC　△BD　定理を　ると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{CP}} = 2r_1 \qquad \frac{\mathrm{PB}}{\angle\mathrm{BDP}} = 2r_2$$

∠AC　BDP よ　$= \sin\angle\mathrm{BDP}$ であるから

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = r_1 : r_2$$

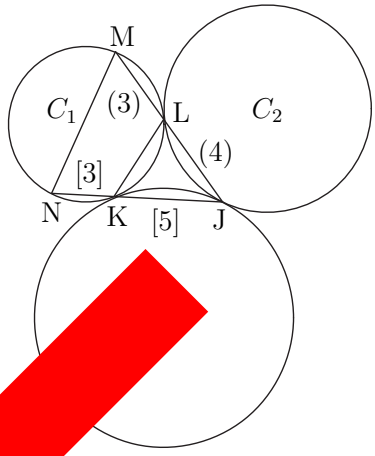


別解　(その 1)　AB，$\mathrm{O_1O_2}$ の対頂角により，$\angle\mathrm{APO_1} = \angle\mathrm{BPO_2}$．
2 つの二　角形 $\triangle\mathrm{APO_1}$，$\triangle\mathrm{BPO_2}$ の相似比を利用する．
(その 2)　$_1$，O_2 の中心を通る直線とこれらの円の P 以外の交点を，そ　S，T とすると，$\angle\mathrm{APS} = \angle\mathrm{BPT}$ である．
2 つの直　三角形 $\triangle\mathrm{APS}$，$\triangle\mathrm{BPT}$ の相似比を利用する．

印刷本

(2) (1)(b) の結果により

$$\mathrm{ML} : \mathrm{LJ} = 3 : 4$$
$$\mathrm{NK} : \mathrm{KJ} = 3 : 5$$



したがって

$$\triangle\mathrm{JMN} : \triangle\mathrm{JLK} = (3+4)(3+5) : 4{\cdot}5$$
$$= 56 : 20 = 14 : 5$$

ゆえに，四角形 KLMN と △JLK の[illegible]比は

$$(\triangle\mathrm{JMN} - \triangle\mathrm{JLK}) : \triangle\mathrm{JLK} = (14[illegible]$$
$$= 9 : [illegible]$$

よって，四角形 KLMN の面積は[illegible]倍.

7.17 ∠DAC = ∠CBD であるから，[illegible]定理により，四角形 ABCD は円[illegible]る.



AC = 8，A[illegible] = 2 より　　PC = 6

方べきの[illegible]り

[illegible] = PB[illegible]えに　2·6 = PB·4

[illegible]がっ[illegible]B = 3

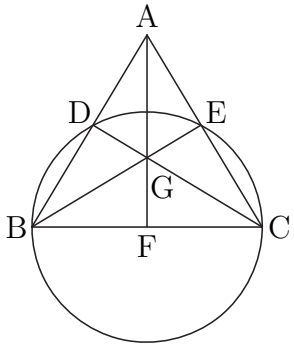
よっ[illegible]D = B[illegible]D [illegible] = **7**

[illegible]べきの[illegible]により

A[illegible]AC　…①

[illegible]は[illegible]れ辺 AB, [illegible]あるから

$$[illegible] = \frac{1}{2}\mathrm{AB}, \quad \mathrm{AE} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}$$



上の 2 式を ① [illegible]入すると

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}[illegible]\mathrm{AC}^2 \quad \text{よって} \quad \mathrm{AB} = \mathrm{AC}$$

(2) △ABC の中[illegible]BE，CD の交点 G は △ABC の重心であるから，AG の延長と辺 BC の交点を F とすると，F は辺 BC の中点である.

見本

△ABF と △ACF について

AB = AC ((1) の結果から),　BF = CF,　AF は共通

3 辺の長さがそれぞれ等しいので　　ABF ≡ ACF

よって　　∠BAE = 2∠BAG　…②

これを条件式 2∠ABG = ∠BAE に代入すると

2∠ABG = 2∠BAG　よ　　∠BAG　　G　…③

(3) (2) の結果から，中線 AF は BC に　　であり，G は AF を 2 : 1 に内分する．また，△ABG は二等辺
このとき，直角三角形 AGF にお　　

∠GBF = 　　BGF

また，△ABG について　　G + ∠ABG　　BGF

③，　より　∠BAG = 30°　これを　　代入　　= 60°

さ　　結果により，△ABC は正三

7.19 (　　AB と　　おいて　∠APB = ∠　　(共通)

条件　　A·P　　·PC であるから　　: PB = PC : PD

2　　の比　　間の角が等しいので

△PAB ∽ 　CD

し　　て　　PCD

に，∠　　∠D　　80°　　，四角形 ABCD は，向かい合う

和　　であるから　　BCD は円に内接する．

(2) 1

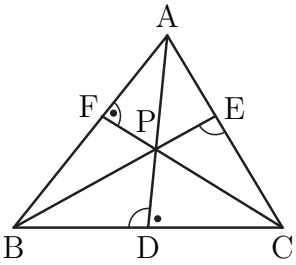
∠PF　　PEC = ∠PDB = α

とおく．

1) より　　A = BP·BE　…①

2) より　　BF·BE = BD·BC　…②

①，② より　　BF·BA = BD·BC



印刷本

したがって，方べきの定理の逆により，四角形 AFDC は円に内接するので

$$\angle \mathrm{PFA} = \angle \mathrm{PDC} = \beta$$

とおくと，このとき

$$\alpha = \beta, \quad \alpha + \beta = 180^\circ \quad \text{すなわち} \quad \alpha = \beta = 90^\circ$$

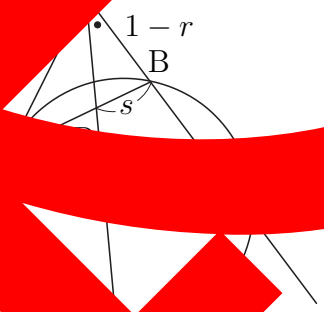
よって，点 P は △ABC の垂心である．

7.20 (1) D は ∠APB と線分 AB の交点であるから

$$\mathrm{AD} : \mathrm{DB} = \mathrm{PA} : \mathrm{PB}$$

ゆえに　$\mathrm{AD} : s = r : 1 - r$

よって　$\mathbf{AD = \dfrac{rs}{1-r}}$



(2) △PAB ∽ △PCA であるから

$\mathrm{PA} : \mathrm{PB} = \mathrm{PC} : \mathrm{P}$　…①

$\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC} = \mathrm{PA}^2$　…

PB : 2 : 3 であるから

P　PB　…②

② を ①

$\frac{3}{2}\mathrm{PB}^2 = \mathrm{PA}^2$

し　て　2　ゆえに　$\mathrm{PA} : \mathrm{PB} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$　…③

PB =　− r で　ら　$r = \sqrt{3} : \sqrt{2}$

よって　$\mathbf{= 3}$

③ より　$\sqrt{3} : \sqrt{2}$

∠CP　等分線　　点であるから

= PC : PA　　がって　$t : \mathrm{AE} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$

よっ　A　$\mathbf{\frac{\sqrt{6}}{3}t}$

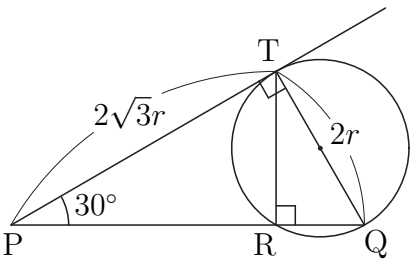
7.21 直角三角形 TPQ　て，

TQ = 2r より　P　$\sqrt{3}r$

直角三角形 TP　)

$$\mathrm{PR} = \mathrm{PT}\cos 30^\circ$$

$$= 2\sqrt{3}r \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{3r}$$

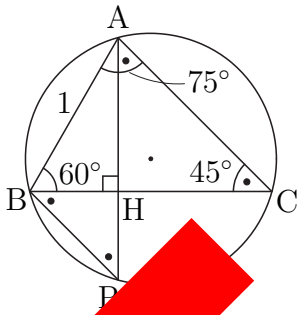


見本

7.22 AP と BC の交点を H とすると，

$$\mathrm{AH} = \mathrm{AB}\sin 60^\circ = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{BH} = \mathrm{AB}\cos 60^\circ = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



右の図から　　$\mathrm{HP} = \mathrm{BH} = \dfrac{1}{2}$

よって　$\mathrm{AP} = \mathrm{AH} + \mathrm{HP} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}$

7.23 Q は弦 AB と円 O′ の接点であるから

$$\angle\mathrm{POQ} = \angle\mathrm{PQB} = 60^\circ$$

弦 OP は，円 O′ の直径であるから

$$\angle\mathrm{OQP} = 90^\circ$$

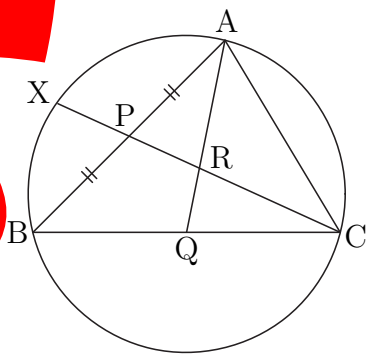
△OMQ ≡ △PQ であるから

$$= \mathrm{PQ} = \mathrm{OP}\sin 60^\circ = 2r$$

7.24 △BCP [illegible] について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CR}}\cdot\frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}} = 1$$

ゆえに　$\dfrac{1}{b}\cdot a\cdot\dfrac{1}{\mathrm{QB}} = 1$



て

(2) C[illegible] は △ABC の重心であるから

$$\mathrm{CR} = 2k,\quad \mathrm{RP} = k \quad (k \text{ は定数})$$

とおくと，A[illegible]R より　$\mathrm{AP} = \mathrm{PB} = 2k$

方べきの定[illegible]より

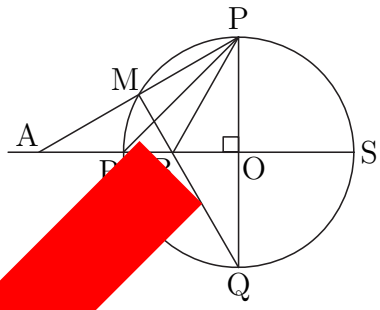
$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{CP}\cdot\mathrm{PX} \quad \text{ゆえに} \quad 2k\cdot 2k = 3k\cdot\mathrm{PX}$$

したがって　　$\mathrm{PX} = \dfrac{4}{3}k$

白本

よって　　CR : RP : PX $= 2k : k : \dfrac{4}{3}k =$ **6 : 3 : 4**

7.25　(1) 円 O の半径を r とする．PA = PQ より，直角三角形 APO について，PA $= 2r$，PO $= r$ であるから　　$\angle$APO $= 60^\circ$



PQ は円 O の直径であるから　$\angle$PMQ $= 90^\circ$

ゆえに　PM $= \mathrm{PQ}\cos 60^\circ = 2r \cdot \dfrac{1}{2} = r$

よって　PA : PM $= 2r : r = 2$:

したがって，M は PA の中点で

(2) (1) の結果から，△PQM について

$\angle$PQM $= 180^\circ -$ $= 30^\circ$

△PBO $\equiv$ △QBO であるか $\angle$BPO $=$ °

ゆえに　PB $= \dfrac{\mathrm{PO}}{\cos 30^\circ} =$ $\sqrt{3}$　よって　PB $= 2$ $\sqrt{3}$ **: 1**

ま AO − RO $= \mathrm{AP}\sin 60^\circ -$ RO $=$ $\sqrt{3}$ $($√

RP BO $= \mathrm{RO} - \mathrm{PO}\tan 30^\circ =$ $- \dfrac{r}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}r$

よ AP $-1)r : \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}r =$ **$\sqrt{3}$: 1**

2) の結 ら PA $=$ AR : RB

よ PR は 等分線で

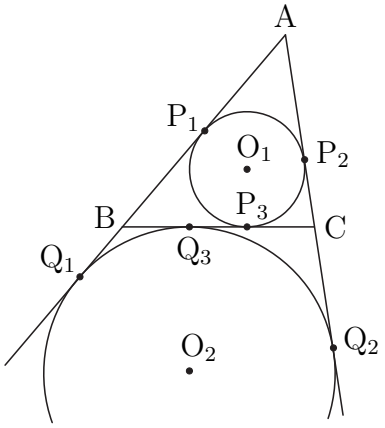
7.26　ら O に引いた

AQ$_1$ = AQ$_2$

第 2 式から第 辺々の差をとると

AQ$_1$ − = AQ$_2$ − AP$_2$

よって　 = P$_2$Q$_2$



印刷用

(2) B から O_1，O_2 に引いた 2 接線により　$BP_3 = BP_1$,　$BQ_3 = BQ_1$

上の 2 式の辺々を加えると　　$BP_3 + BQ_3 = BP_1 + BQ_1 = P_1Q_1$　　$\cdots$①

C から O_1，O_2 に引いた 2 接線により　$CP_3 = CP_2$,　$CQ_3 = CQ_2$

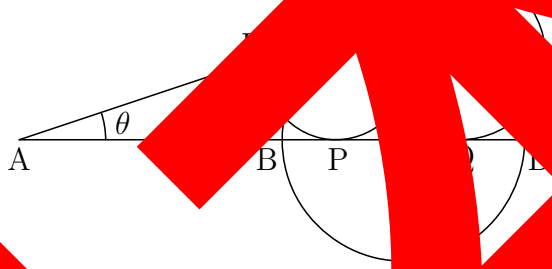
上の 2 式の辺々を加えると　　$CP_3 + CQ_3 = CP_2 + CQ_2 = P_2Q_2$　　$\cdots$②

①，② および (1) の結果から　　$BP_3 + BQ_3 = CP_3 + CQ_3$

7.27　(1) 方べきの定理により

$$AP^2 = AE\cdot(1-r)\cdot 1$$

よって　　$\mathbf{AP = \sqrt{1-r}}$



(2) FA て，△FAC に余弦定理を す

$-2\cdot1\cdot1\cos\theta$　ゆえ $F = \sqrt{2-2\cos\theta}$

C C sin

$\cdot\sin\theta$ に　co $\sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-r^2}$

よっ **CF** $\mathbf{\sqrt{2\sqrt{1-r^2}}}$

の定

F·AG = $+r$　ゆえに　$AQ = \sqrt{1+r}$

上 の 結果から

$$PQ = AQ - AP = \sqrt{1+r} - \sqrt{1-r}$$
$$PQ^2 = (\sqrt{1+r} - \sqrt{1-r})^2$$
$$= (1+r) - 2\sqrt{1+r}\sqrt{1-r} + (1-r)$$
$$= 2 - 2\sqrt{1-r^2}$$

したがって　　$PQ = \sqrt{2-2\sqrt{1-r^2}}$

よって，上式および (2) の結果から　　PQ=CF

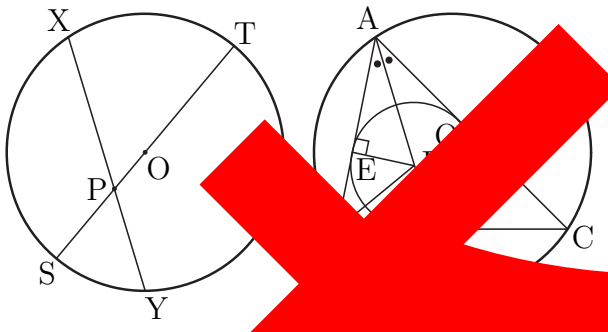
見本

7.28 (1) 直線 OP と円の交点を S，T とすると，方べきの定理により

$$\mathrm{XP}\cdot\mathrm{YP} = \mathrm{SP}\cdot\mathrm{TP} = (R-\mathrm{OP})(R+\mathrm{OP}) = R^2 - \mathrm{OP}^2$$

よって　　$\mathrm{OP}^2 = R^2 - \mathrm{XP}\cdot\mathrm{YP}$

図 I　　図 II



(2) (A) △ABC において，$A = 2\alpha$

∠CAD，∠CBD は，弦 [illegible] する [illegible] 角 [illegible] ら

$\angle\mathrm{CAD} =$ [illegible] ゆえに [illegible] $= \alpha$

∠[illegible] は，∠AIB の外角であるから

$\angle\mathrm{DIB} = \angle\mathrm{IAB} + \angle\mathrm{IBA}$　　②

①，② DBI は，二等辺三角形 [illegible] から　DB = DI

(B) r [illegible] △AIE について [illegible] $\sin\alpha = r$　　$\cdots$③

ABD [illegible] 用すると　$\dfrac{\mathrm{DB}}{\sin\alpha} = 2R$

(A) [illegible] 果から [illegible] DI である [illegible] $\dfrac{\mathrm{DI}}{\sin\alpha} = 2R$　　$\cdots$④

④ の [illegible] と　AI [illegible] $= 2Rr$

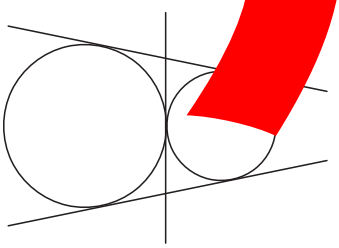
図 I の [illegible]，P に [illegible] をそれぞれ適用すると，

[illegible] ら

$\mathrm{OI}^2 = R^2 - \mathrm{AI}\cdot\mathrm{DI}$

これに (A) [illegible] 果を代入すると　　$\mathrm{OI}^2 = R^2 - 2Rr$

7.29 共通接線が 3 本引 [illegible] は，2 円が外接するときで，次の図のようになる．



印刷用

8.1 $\left(x-\dfrac{5}{x^2}\right)^6$ の展開式の一般項は

$$ {}_6\mathrm{C}_k x^{6-k}\left(-\frac{5}{x^2}\right)^k = {}_6\mathrm{C}_k(-5)^k x^{6-3k} $$

定数項 (x を含まない項) は，$6-3k=0$，すなわち $k=2$ より

$$ {}_6\mathrm{C}_2(-5)^2 = \mathbf{375} $$

8.2 $(x-3y+2z)^7$ の展開式における x^4y^2 [illegible] 項は

$$ \frac{7!}{4!2!1!}x^4(-3y)^2 $$

よって，x^4y^2z の係数は　**1890**

8.3 $(2x-y+z)^8$ の展開式における x^2y^3 [illegible]

$$ \frac{8!}{2!3!3!}(2x \quad z)^3 = - \quad y^3z $$

よって，x^2y^3 [illegible] の係数は　**−22[illegible]0**

8.4 (1) $\left($ [illegible] 展開式の一般項は

$$ \quad {}^{-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = {}_n\mathrm{C}_k x^{n-} \quad (0 \leqq k \leqq n) $$

[illegible] って [illegible] **n は偶数**

$= x$ [illegible] おくと $\left(\quad + 1 + \dfrac{1}{x}\right)$ [illegible] $+A)^7$

$(1$ [illegible] の展開 [illegible] 項は

$$ {}_7\mathrm{C}_n \quad (0 \leqq n \leqq 7) $$

$\left($ [illegible] 定数項の一般 [illegible] は，上式および (1) の結果から

$$ {}_7\mathrm{C}_n \cdot {}_n\mathrm{C}_k \quad (n=2k,\ k=0,1,2,3) $$

よって，求め [illegible] 数項は

$$ \sum_{k=0}^{3} {}_{\quad}\cdot{}_{2k}\mathrm{C}_k = {}_7\mathrm{C}_0\cdot{}_0\mathrm{C}_0 + {}_7\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1 + {}_7\mathrm{C}_4\cdot{}_4\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_6\cdot{}_6\mathrm{C}_3 $$

$$ = 1\times 1 + 21\times 2 + 35\times 6 + 7\times 20 $$

$$ = \mathbf{393} $$

見本

別解 (大分大学 2010) 2

8.5 (1) 2 項定理により

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k \qquad \cdots (*)$$

これに $x=1$ を代入することにより

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k =$$

条件により $2^n - 1 = 127$ ゆえ [illegible] て $\boldsymbol{n=7}$

(2) $(*)$ に $x=30$, $n=17$ を代入すると

$$31^{17} = \sum_{k=0}^{17} {}_{17}\mathrm{C}$$

$$= \quad 1\cdot 30 + 30^{\quad} \quad \mathrm{C}_k \cdot 3$$

$$= 511 + 900 \sum_{k=2}^{17} {}_{17}\mathrm{C}$$

[illegible] って, [illegible] で割った余りは $\mathbf{51}$

[illegible] $2 \leqq$ [illegible] のと

$$\quad 1)_n\mathrm{C}_{\quad} - 1) \times \frac{\quad}{k\quad)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}$$

$$\quad - 1) \times \frac{\quad}{\quad 2)!\,(n-k)!}$$

$$= \quad {}_{\quad 2}$$

(2) [illegible]

$$\sum_{k=1}^{n} k(\quad {}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k$$

$$= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\,{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$$

$$= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} {}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} = \boldsymbol{n(n-1)\cdot 2^{n-2}}$$

見本

(3) $1 \leqq k \leqq n$ のとき

$$\begin{aligned} k\,{}_n\mathrm{C}_k &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)} \\ &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \end{aligned}$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{\square}$ $^{n-1}$

したがって，上式および (2) の

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\,{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n} k(k$$

$$= n($$

$$\cdot 1)\cdot$$

8.7 (1) $A_9 = \{{}_9\mathrm{C}_1,\ {}_9\mathrm{C}_2,\ {}_9\mathrm{C}_3,\ {}_9\mathrm{C}_4\}$

$= \{9,\ 36,\ 84,\ 126\}$

は $9 + 36 + 84 + 126 = 2$

3 以 あるから，$n = 2l + 1$ 然数) とおくと

$= \{{}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_l\}$

数 k $k < l$ と

$$\mathrm{C}_{k+1} \quad \frac{n!}{+1)!(n-} - \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\{(\quad) - (k+1)\}}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!(n-2k-1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!\{(2l-1)-2k-1\}}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\cdot 2(l-k)}{(k+1)!(n-k)!} > 0$$

ゆえに ${}_n\mathrm{C}_1 < {}_n\mathrm{C}_2 < \cdots < {}_n\mathrm{C}_l$

よって，A_n 内の最大の数は ${}_n\mathrm{C}_l$，すなわち ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$ である．

印刷本

(3) 2 項定理により　${}_nC_0 + \sum_{k=1}^{l} {}_nC_k + \sum_{k=l+1}^{2l} {}_nC_k + {}_nC_n = 2^n$　$\cdots$①

ここで　$\sum_{k=l+1}^{2l} {}_nC_k = \sum_{k=n-l}^{n-1} {}_nC_k = \sum_{k=1}^{l} {}_nC_{n-k} = \sum_{k=1}^{l} {}_nC_k$　$\cdots$②

② を ① に代入して整理すると　$\sum_{k=1}^{l} {}_nC_k = 2^{n-1}$

n は 3 以上の奇数であるから，　が奇数

よって，A_n 内の奇数の個数 m は，

8.8 $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ より

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

よって，$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り

8.9 $x + y = 1$ して

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$= 1 + \frac{x+y}{xy} + \frac{2}{xy} \quad \cdots ①$$

$x >$ > 0 て ら，　　均・相乗平均の関係により

$1 = x$ $2\sqrt{xy}$　ゆえに $\geqq 8$　$\cdots$②

り $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1$

また，　　のは，② より，次のときである．

$x = y$　すなわち　$x = y = \frac{1}{2}$

8.10 (1)　$(a^2 + b^2 +$ $+ y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$

$= (bz - c$ $)^2 + (az - cx)^2 + (ay - bx)^2 \geqq 0$

よって　$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geqq (ax + by + cz)^2$

印刷本

(2) (1) の不等式に $a=b=c=1$ を代入すると

$$3(x^2+y^2+z^2) \geqq (x+y+z)^2$$

$x+y+z=1$ であるから　$x^2+y^2+z^2 \geqq \dfrac{1}{3}$

よって，$x^2+y^2+z^2$ の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

別解 (福岡教育大学 2011) 1

8.11　(1)　$\dfrac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)$ $z)^2$ $)^2\}$

$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2$ $)$

$= \{(x+y)+z\}\{(x+y)^2-($ $)$

$= \{(x+y)+z\}\{(x+y)^2$ $3xy\{($ $)$

$= (x+y)^3+z^3-3x$ $-$ $)$

$= x^3+y^3+z^3-$ $)$

(2) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ のと

$x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z$ $\geqq 0$

が成立するとき，$x=y=z$ のときで

(1) の $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ のと

$+y^3+$ $\geqq$ (等号が成立するのは $x=y=z$ のとき)

$\geqq 0$, $c \geqq 0$ 式に $x=$ $=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt{3}$ を代入すると

$a+$ $\sqrt[3]{b} \geqq 0$ こ　$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$

いて等号が $\quad$ のは，次のときである．

$\sqrt{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}$　すなわち　$a=b=c$

見本

(3) (2) の結果から　$\dfrac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geqq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$

ゆえに　$(s-a)(s-b)(s-c) \leqq \dfrac{1}{27}\{3s-(a+b+c)\}^3 = \dfrac{s^3}{27}$

したがって　$s(s-a)(s-b)(s-c) \leqq \dfrac{s^4}{27}$

よって　$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leqq \dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$

また，上式において，等号が成[illegible]のは，[illegible]である．

$s-a = s-b = s-c$ [illegible] $b = c$

よって，面積が $\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ となるのは [illegible]

8.12　(1) $a,\ b \geqq 0$ より，$\dfrac{a}{1+a} \geqq$ [illegible] b，$\dfrac{b}{1+b}$ [illegible] $+a$ [illegible] ると

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geqq \frac{1}{1+}$$ [illegible] b

(2) [illegible] $\geqq c$ [illegible] $\dfrac{1}{1+a+b} \leqq \dfrac{1}{1+c}$ で[illegible]ら

[illegible] $\dfrac{1}{1+c}$　すなわち　$\dfrac{a+b}{1+a+b} \geqq \dfrac{c}{1+c}$

[illegible]式お[illegible]の結[illegible] $\dfrac{a}{1+a}$ [illegible] $\geqq \dfrac{c}{1+c}$

[illegible] $(k =$ [illegible] $\cdot,$ [illegible]るか[illegible] $= \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと

[illegible] $\dfrac{a_k}{1+a_k} \geqq \sum_{k=1} \dfrac{a_k}{1+S_n} = \dfrac{S_n}{1+S_n}$　$\cdots$①

$S_n \geqq c \geqq 0$ [illegible] $\dfrac{1}{1+S_n} \leqq \dfrac{1}{1+c}$ であるから

$1 -$ [illegible] $\geqq 1 - \dfrac{1}{1+c}$　すなわち　$\dfrac{S_n}{1+S_n} \geqq \dfrac{c}{1+c}$　$\cdots$②

①，② から　$\dfrac{a_1}{1+a_1} + \dfrac{a_2}{1+a_2} + \cdots + \dfrac{a_n}{1+a_n} \geqq \dfrac{c}{1+c}$

見本

9.1 与えられた方程式から

$$x^2 - x - 2 + (x^2 - 3x + 2)i = 0$$

ゆえに　$(x-2)(x+1) + (x-2)(x-1)i = 0$

x は，実数であるから

$$(x-2)(x+1) = 0 \text{ かつ } (x-2)(x-1) =$$

よって　　$\boldsymbol{x = 2}$

9.2 実数を係数とする 2 次方程式 $x^2 + ax$ が 解にもつとき，これと共役な複素数 $-1 - bi$ も解にもつので 係により

$$(-1 + bi) + (-1 - bi) = -a$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = 2},\ \boldsymbol{b = \pm\sqrt{}}$

9.3 $P(x)$ を $6x^2 + 11x - 35$ で割っ 商を Q 余 $ax + b$ と

$$P(x) = (6x^2 + 11x - 35)Q(x) + ax + b$$
$$= (3x - 5)(2x + 7)Q(x) + ax +$$

$P\left(\frac{5}{3}, \right) = -\frac{5}{2}$ であるから

$$= \frac{8}{3}, \quad -\frac{7}{2}a + b = -\frac{5}{2}$$

これ いて $= 1$ ，求め りは　$\boldsymbol{x + 1}$

3 次式 の x^3 が 1 で $(x-1)$ り切れるので

$$(x-1)(\quad) \quad \cdots ①$$

数).

で割った商 $Q(x)$ とし，余りは，$P(x)$ を $x+1$ で割った余 $P(-1)$ しいので，次式が成り立つ.

$$P(x) = (x^2 - x - 2)Q(x) + P(-1)$$
$$= (x+1)(x-2)Q(x) + P(-1)$$

これに $x =$ 入すると　$P(2) = P(-1)$　$\cdots ②$

①，② より　　$(2-1)^2(2+a) = (-1-1)^2(-1+a)$

これを解いて　$a = 2$　　よって　$\boldsymbol{P(x) = (x-1)^2(x+2)}$

印刷本

(2) (1) の結果から

$$P(x) = x^3 - 3x + 2 = (x+1)^2(x-2) + 4$$

したがって

$$\begin{aligned}\{P(x)\}^2 &= \{(x+1)^2(x-2)+4\}^2 \\ &= (x+1)^4(x-2)^2 + 8(x+1)^2(x \\ &= (x+1)^2\{(x+1)^2(x-2)^2 + \} + 16\end{aligned}$$

よって，$\{P(x)\}^2$ を $(x+1)^2$ で

9.5 (1) 求める余りを $ax+b$ とおくと

$$P(x) = (x^2 - b$$

このとき，$Q(x)$ は最高次の 1 の

$P(-2) = -10$，$P(3) =$ から

$$-2a + b = -10, \quad 3 = 5$$

$= 3$，$b = -4$　よって，　**$3x -$**

次式 割ったときの商 R 最高次の係数が 1 の 2 次式で $Q(2$

$) = (x$ $(x) + 2$

また $2) =$ から

$- 2$ $+ 2$ えに　$R(-2) = 0$

$x + 2$ を因 ので，x^2 の係数に注意して

$$R(x) = (x+2)(x+c)$$

とおける．R $= 2$ より

$(-3+2)(-3+c) = 2$　ゆえに　$c = 1$

よって　$R(x) = (x+2)(x+1) = \boldsymbol{x^2 + 3x + 2}$

印刷

(3) (2) の結果から　　$Q(x) = (x-2)(x^2+3x+2)+2$
$= x^3+x^2-4x-2$

これを (1) の結果に代入すると

$P(x) = (x^2-x-6)(x^3+x^2-4x-2)+3x-4$
$= \boldsymbol{x^5-11x^3-4x^2+29x+8}$

9.6 $x^3-ax-6=0\cdots(*)$ が $x=-1$ を解にもつから

$(-1)^3-a(-1)-6$　　ゆえに

これを $(*)$ に代入すると

$x^3-7x-6=0$　ゆえに　$(x$

よって，求める他の解は　$\boldsymbol{x=-2,\ 2}$

9.7 与えられた条件から

$1-(a+b+$　　$ab+bc$　　$-ac$

ここで，$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ とおくと　次方程式　の解は，a，b，c で　このとき，上の 2 式より

$= (1-a)(1-b)(1-c)$
$1-(a+b+c)+ab+$　　$a-abc$

したが　，1 は　　である．
a，b，c のうち少　も 1 つは　　しい．

次方程　$+ax^3$　　$6x+b=0$ が　-2 を 2 重解としてもつから

$+ax^3$　　$+1$　　$(x^2$　　$4)(x^2+px+q)\quad\cdots(*)$

と　　数)，右辺を　　と

x^4+ax　　x^2　　$b = x^4+(p+4)x^3+(4p+q+4)x^2+(4p+4q)x+4q$

となる．上式は，　　する恒等式であるから，2 次の項と 1 次の項の係数を比較すると

$14=4p$　　4，　$16=4p+4q$　これを解いて　$p=2,\ q=2$

また，3 次の項　　数と定数項を比較して

$a=p+4,\ \ b=4q$　ゆえに　$\boldsymbol{a=6,\ b=8}$

求める他の解は $(*)$ より，$x^2+2x+2=0$ を解いて　$\boldsymbol{x=-1\pm i}$

印刷本

別解 (福岡教育大学 2013) 1

9.9 (1) $P(x)$ を $Q(x)$ で割ったときの商を $S(x)$ とすると

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x) \qquad \cdots ①$$
$$R(x) = P(x) - Q(x)S(x) \qquad \cdots ②$$

② より，$P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の共通解は，$R(x) = 0$ [illegible] である．
① より，$Q(x) = 0$ と $R(x) = 0$ の共通解は，$P(x)$ [illegible] である．
よって，上の 1 番目の結論から
$P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の共通解 [illegible] $= 0$ の共通解である．
また，上の 2 番目の結論から
$Q(x) = 0$ と $R(x) = 0$ の共通解は，P [illegible]

(2) $P(x)$ を $Q(x)$ で割ることにより [illegible]

$P(x)$ を $Q(x)$ で割った余り [illegible] とす [illegible]

$Q(x)$ を $R(x)$ で割ること [illegible] $Q(x) =$ [illegible]

(1) の [illegible] から，$P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の [illegible] 解で [illegible] $= 0$ と [illegible] の共通解であることは同値で [illegible] と，[illegible] 0 と [illegible] 解は，$Q(x) = 0$ と $R(x) =$ [illegible] であるか

[illegible] $= 0$ これを解い [illegible] $= \dfrac{\mathbf{-1 \pm \sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$

$P(x)$ [illegible] $+ a$ [illegible] $+$ [illegible] $P(x)$ を $x^2 - 2x + 5$ で割った商と余りは，
x [illegible] $2x$ [illegible]，$(2a$ [illegible] $2)x + (-$ [illegible] $- 20)$ であるから

$(x) =$ [illegible] $2x +$ [illegible] $+ 4) + (2a +$ [illegible] $x + (-5a + c - 20) \quad \cdots (*)$

[illegible] とす [illegible] (z) [illegible] $= 0$ であるから

[illegible] $(2a + b -$ [illegible] $5a + c - 20) = 0$

$2a + b -$ [illegible] $-5a$ [illegible] 0 は実数であるから

[illegible] $+ b - 2 = 0, \quad -5a + c - 20 = 0$

これを $(*)$ に代入 [illegible]

$$P(x) = (x^2 - 2x + 5)(2x + a + 4)$$

$\overline{z} = 1 + 2i$ とすると　　$\overline{z}^2 - 2\overline{z} + 5 = 0$

したがって，$P(\overline{z}) = 0$ となる．よって，$1 + 2i$ も $P(x) = 0$ の解である．

見本

参照 (九大 [理]2012) 4 の補足

9.11 実数を係数とする3次方程式の解の1つが $2+\sqrt{3}\,i$ であるから，他の解は $2-\sqrt{3}\,i$ で，これらを α，β とする．また残りの解を γ とおくと

$$\alpha+\beta=4,\quad \alpha\beta=7$$

3次方程式 $x^3+ax^2+bx-14=0$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta+\gamma=-a,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\quad \alpha\beta\gamma=14$$

したがって

$$(\alpha+\beta)+\gamma=-a \qquad \alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)=b$$
$$4+\gamma=-a$$

上の第3式から　$\gamma=2$　これを第2式に代入して　$a=$　$b=\mathbf{15}$

9.12 (1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$ より　$\dfrac{x+y}{xy}=2$

$x+y=2$ であるから　$xy=1$

x，y を2解とする2次方程式は　$t^2-2t+1=0$

これを解いて　$t=1$　よって　$\boldsymbol{x=y=1}$

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3$ より　$\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=3$

$xyz=1$ であるから　$xy+yz+zx=3$

上の2式および $x+y+z=3$ から，x，y，z を解とする3次方程式は

$t^3-3t^2+3t-1=0$ を解いて　$t=1$

$\boldsymbol{x=y=z=1}$

9.13 ω は方程式 $x^3-1=0$ の解であるから　$\omega^3-1=0$　$\cdots$①

したがって　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

ω は虚数であるから　$\omega-1\neq 0$ より　$\omega^2+\omega+1=0$　$\cdots$②

①，② より　$\omega^2+1=\omega^3\omega+\omega^2+1$

$=\omega+\omega^2+1=\mathbf{0}$

印刷本

9.14 $x^3 - a^3 = 0$ より　$(x-a)(x^2+ax+a^2) = 0$

虚数解 α，β は $x^2+ax+a^2=0$ の解であるから，これを解いて

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{3}\,ai}{2}$$

ゆえに　　$\alpha+\beta = -a$，$\alpha-\beta = \mp\sqrt{3}\,ai$

よって　　$\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \dfrac{\mp\sqrt{3}\,ai}{-a} = \pm\sqrt{\boldsymbol{3}}\,\boldsymbol{i}$

9.15 (1) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 = \boldsymbol{t^2 -}$

$x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

(2) (1) の最初の結果を用いると

$$\frac{2x^4 - 3x^3 - 5x^2 \quad 2}{x^2} = 2\left(x^2 \quad\right) - 3\left(\quad - 5$$

$$= 2(t^2 - \quad t$$

$$= \boldsymbol{2t^2} - \quad \boldsymbol{9}$$

$= 0$ $x^2 - 3x + 2 = 0$ の ないので，この両辺を x^2 で

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2} = 0$$

(2) の より　$2t - 3t - 9 = 0$　　$t = 3,\ -\dfrac{3}{2}$

のとき $x + \dfrac{1}{x} = 3$　より　$x^2 - 3x + 1 = 0$　$\cdots$①

$x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{3}{2}$　より　$2x^2 + 3x + 2 = 0$　$\cdots$②

①，② を解い $= \dfrac{\boldsymbol{3 \pm \sqrt{5}}}{\boldsymbol{2}},\ \dfrac{\boldsymbol{-3 \pm \sqrt{7}\,i}}{\boldsymbol{4}}$

9.16 (1) 実数係数の2 程式が $1+2i$ を解にもつとき，これと共役な複素数 $1-2i$ もこの方程 であるから，

$$(1+2i) + (1-2i) = 2,\quad (1+2i)(1-2i) = 5$$

よって，求める方程式は　$\boldsymbol{x^2 - 2x + 5 = 0}$

印刷本

(2) 実数係数の 4 次方程式 $x^4-x^3+2x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつので，これと共役な複素数 $1-2i$ もこの方程式の解である．したがって，(1) の結果から 4 次式 $x^4-x^3+2x^2+ax+b$ は x^2-2x+5 を因数にもつ．

$$x^4-x^3+2x^2+ax+b=(x^2-2x+5)(x^2+x-1)+(a-7)x+(b+5)$$

上式から　$a-7=0$，$b+5=0$　すなわち　$\boldsymbol{a=7,\ b=-5}$

9.17　(1) $x^3=1$ より　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

これを解いて　$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{-1\pm}{2}}$

(2) $\alpha=m+\sqrt{7}\,ni$ より　$\alpha^3=m^3-21m$

$\alpha^3=225+2\sqrt{7}\,i$ であるから

$$m^3-21mn^2+\quad -7n^{\quad}=\quad \sqrt{7}\,i$$

m，n は整数であるから，　の両辺の実　虚部を

$$^3-21mn^2=225,\quad n(3m^2-\quad =$$

$\quad$ は整　るから，$(*)$ の第 2 式か　$n=\pm1,\ \pm2$

これを　　代入して，m が整数　るのは，次の 2 組

$$m)=(-3,-2),\ (3,\ 2)$$

のうち　　の第　　メたすのは　　$\boldsymbol{n)=(-3,-2)}$

β　　より　　$(\alpha$

$$\frac{\beta}{\alpha}=1,\quad -$$

したがって　　α，$\beta=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\alpha$

これに，(2)　　を代入して

$$\beta\quad -2\sqrt{7}\,i,$$

$$\frac{1}{2}\left\{3\pm2\sqrt{21}+(2\sqrt{7}\mp3\sqrt{3})i\right\}\quad \textbf{(複号同順)}$$

印刷本

10.1 $y = x^2 - x = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$　ゆえに　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$

直線 OP の傾きは　$\dfrac{-\frac{1}{4} - 0}{\frac{1}{2} - 0} = -\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{Q}(t,\ t^2 - t)$ とすると，直線 OP と直線 PQ は垂直であるから

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 - t - \left(-\frac{1}{4}\right)}{t - \frac{1}{2}} = -1$$　整理すると　$(2t - 1)$　$= 0$

$t \neq \dfrac{1}{2}$ であるから　$t = \dfrac{5}{2}$　よって　$($　$\mathbf{15}\backslash$

10.2　(1)　$t = 2$ のとき　$\mathrm{P}(2, -4)$

P と直線 $l_1 : 2x + y + 3 = 0$ の距

$$d_1 = \frac{}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \quad \sqrt{5}$$

P と直線 $l_2 : 2x - y + 4 = 0$ の距離 d_2 は

$$d_2 = \frac{|2 \cdot 2 - (-4) +}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \quad \sqrt{5}$$

よって　$d =$　$= \dfrac{3}{\sqrt{5}} + \dfrac{12}{\sqrt{5}} = \dfrac{15}{\sqrt{5}} =$　$\sqrt{5}$

(2)　上ま　の　す領域は　$y \geqq -2x - 3$

$t, -t^2)$　の領域　とき　$-t^2 \geqq -2t - 3$

ゆえ　$- 2t$　これを解い　$\boldsymbol{1 \leqq t \leqq 3}$

$t^2)$ と　$: 2$　$3 =$　d_1 は

$$d_1 = \frac{}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|t^2 - 2t - 3|}{\sqrt{5}}$$

$\mathrm{P}(t, -t^2)$ と直　$2x - y + 4 = 0$ の距離 d_2 は

$$\frac{2t + t^2 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|(t+1)^2 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{t^2 + 2t + 4}{\sqrt{5}}$$

ゆえに　$d = d_1 + d_2 = \dfrac{|t^2 - 2t - 3|}{\sqrt{5}} + \dfrac{t^2 + 2t + 4}{\sqrt{5}}$

見本

(i) $t^2-2t-3 \geqq 0$　すなわち　$t \leqq -1,\ 3 \leqq t$ のとき

$$d=\frac{t^2-2t-3}{\sqrt{5}}+\frac{t^2+2t+4}{\sqrt{5}}=\frac{2t^2+1}{\sqrt{5}}$$

このとき，d は，$t=-1$ のとき，最小値 $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ をとる．

(ii) $t^2-2t-3<0$　すなわち　$-1<t<3$ のとき

$$d=\frac{-(t^2-2t-3)}{\sqrt{5}}+\frac{t^2+2t+4}{\sqrt{5}}=\frac{\quad+7}{\sqrt{5}}$$

このとき，d は，最小値をとら

よって　$\boldsymbol{t=-1}$ のとき最小値 $\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}$

10.3　(1) $a>1,\ a>p,\ \angle \mathrm{PQS}=135^\circ$　=

であるから，直線 AQ の傾　，直線 P

の傾きは 1 である．

したが　て，直線 AQ の方程式は

$$1=-1(x-1)$$

ち　　$+2$　$\cdots$①

線 ①　　$=a\cdots$② の交点が

であ　ら，①　いて

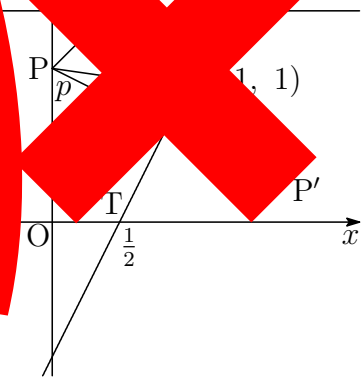
$$($$

線 PQ　Q を通　1 の直線　から，その方程式は

$$y-\{(2-a)\}$$　ら　$y=x+2a-2$

に，　標は　(

$\boldsymbol{2a-2,\ q}$　$\boldsymbol{a}$



(2) l_1 に　して，　称な点を $\mathrm{P}'(s,\ t)$ とする．

l_1 の傾きは 2，PP′ の傾きは $\dfrac{t-2a+2}{s}$ である．$l_1 \perp \mathrm{PP}'$ であるから

$$2\times \frac{\quad+2}{s}=-1　\text{すなわち}　s+2t=4a-4　\cdots③$$

線分 PP′ の中点 $\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{2a-2+t}{2}\right)$ が l_1 上にあるから

$$\frac{2a-2+t}{2}=2\times\frac{s}{2}-1　\text{すなわち}　2s-t=2a　\cdots④$$

印刷本

③，④ を解いて $s=\dfrac{8a-4}{5}$，$t=\dfrac{6a-8}{5}$　ゆえに　$\mathrm{P}'\left(\dfrac{8a-4}{5},\ \dfrac{6a-8}{5}\right)$

$\angle\mathrm{PAT}=\angle\mathrm{QAS}$ であるとき，P' は直線 ① 上にあるので

$$\frac{6a-8}{5}=-\frac{8a-4}{5}+2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=\frac{11}{7}}$$

これを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{p=\frac{8}{7}}$

10.4　(1) G は，原点を通るから，$f(x)=$ $+bx$ とお

$f(-1)=3$，$f(4)=8$ であるか

$a-b=3,\ 4a+b=2$　こ

よって　$\boldsymbol{f(x)=x^2-2x}$

(2) C は，原点を通るから，そ は x $+$ $=0$.

2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$，$\mathrm{B}(4,\ 8)$ から

$-p$ $10=0,\quad p+2q+20=0$　こ い $=-6$

の方程式は

$6y=0$　すなわち $4)^2+(y-3)^2=5^2$

中心

(1)，(果か $=x^2-2x$　$\cdots$①

x^2+y^2-8x $=0$　$\cdots$②

② に $(x^2-$ $8x-6(x^2-2x)=0$

x^4-4x^3 $=0$

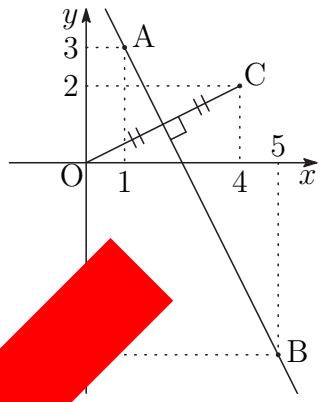
$(x-4)(x+1)(x-1)=0$

3 点 O，A， の点の x 座標は　$x=1$

これを ① に て　$y=-1$　よって，残りの交点は　$\boldsymbol{(1,\ -1)}$

見本

10.5 (1) 2 点 A(1, 3)，B(5, −5) を通る直線の方程式は



$$y-3=\frac{-5-3}{5-1(x-1)}$$

すなわち　$y=-2x+5$　$\cdots$①

原点 O を通り，① に垂直な直線の方程式は

$$y=\frac{1}{2}x \quad \cdots②$$

①，② の交点は　(2, 1)

線分 OC の中点が (2, 1) であるから

(2) △ABC の外接円の方程式を

$$x^2+y^2+$$

とおくと，円 $(*)$ は，3 点

$+3b+c=-10$, $5a-5b+c=$　$4a$

$a=-2$，$b=4$，$c=-20$

C の外接円の方程式は

$-2x+4y-20=0$

$\boldsymbol{(y+2)^2=25}$

て，中 $\boldsymbol{(1,-2)}$，5 の円

求め は，y 軸 はないので 方程式を

$x+5$ $(+5=0)$

き，この 心 $(1,-2)$ との距離は 5 であるから

$\frac{|(-2)+5|}{\sqrt{(-1)^2}}=5$　ゆえに　$|m+7|=5\sqrt{m^2+1}$

この両辺を平 て整理すると

$-7m-12=0$　これを解いて　$m=\frac{4}{3},-\frac{3}{4}$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=\frac{4}{3}x+5,\quad y=-\frac{3}{4}x+5}$$

印刷本

10.6 (1) $x^2+y^2-4x-8y+15=0$ より　　$(x-2)^2+(y-4)^2=5$　$\cdots(*)$

円 $(*)$ の中心 $(2,\ 4)$ から直線 $ax-y+1=0$ までの距離 d は

$$d=\frac{|\,a\cdot 2-4+1\,|}{a^2+(-1)^2}=\frac{|\,2a-3\,|}{\sqrt{a^2+1}}\quad\cdots①$$

また，円 $(*)$ の半径 r は　　$r=\sqrt{5}$

円と直線が異なる 2 点で交わるとき，$d<r$ であるか

$$\frac{|\,2a-3\,|}{\sqrt{a^2+1}}<\sqrt{5}\quad\text{整理すると}\quad a^2+\qquad>0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a<-6-2\sqrt{}\qquad 0<a}$

(2) 直線 $y=ax+1$ が円の中心 $(2,\ 4)$ を

$$4=a\cdot 2+1$$

(3) $d^2+\left(\dfrac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2=r^2$ であ

$$d^2+1^2=(\sqrt{5})^2\qquad \text{ゆえに}\qquad d$$

すると

$$\frac{|\,a-3\,|}{\sqrt{}+1}=2\qquad \text{よって}\qquad a=\boldsymbol{\frac{5}{12}}$$

求め は，y い ので，$l:y=ax+b$ とおく．

l の距離 である

$$\frac{|b|}{\sqrt{}}\qquad \text{ゆえに}\quad b^2\ +1)\quad\cdots①$$

の距 である

$$|b|=1\quad \text{ゆえに}\quad (a+b)^2=a^2+1\quad\cdots②$$

①，② か

$$(4a+b)^2\quad \text{ゆえに}\quad b^2=(8a+2b)^2$$

(i) $b=8a+2b$ すなわち　$b=-8a$ のとき

これを ① すると

$$(-8a)^2=4(a^2+1)\quad \text{ゆえに}\quad 15a^2=1$$

すなわち　　$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{15}}(x-8)$

見本

(ii) $b=-(8a+2b)$　すなわち　$b=-\dfrac{8}{3}a$ のとき

これを ① に代入すると

$$\left(-\frac{8}{3}a\right)^2=4(a^2+1)\quad \text{ゆえに}\quad 7a^2=9$$

すなわち　　$y=\pm\dfrac{3}{\sqrt{7}}\left(x-\dfrac{8}{3}\right)$

よって　　$\boldsymbol{y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{15}}(x-8)}$，$\boldsymbol{y=\quad 3\left(x\right.}$

10.8　(1) 円の中心 A$(5,\ 3)$ から直線 $mx-y+$
$(m>0)$ までの距離が，円 C_1 の半
あるから

$$r=\frac{|m\cdot 5-3+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\qquad\qquad \sqrt{\quad+1}$$

(2) C_1 が x と異なる 2 点で交わるとき，
$r>$　　から，(1) の結果より

$$-\qquad 3\quad m>0 \text{ に注意して}\qquad \text{解くと}\quad \boldsymbol{m>\frac{\ }{4}}$$

(3) l_2 $(5,\ 3)$　　に垂直な直線であるから，l_2 の方程式は

$$=-\frac{1}{\ }\qquad)\quad \text{すな}\qquad x+my-3m-5=0$$

l_2　　との共　　は，これ　　を代入して　$x=3m+5$
に，点　　標は　　-5
　　R の中点 S　　$\boldsymbol{\left(\dfrac{3m+5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)}$

(4) $\angle$Q　　$=90$　　C_2 は線分 QR を直径とする円であるから，その中心は S である．　　S 間の距離であるから

$$d^2=\mathrm{AS}^2=\left(\frac{3m+5}{2}-5\right)^2+\left(\frac{3}{2}-3\right)^2=\left(\frac{3m-5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

よって　$\boldsymbol{m=\dfrac{5}{3}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

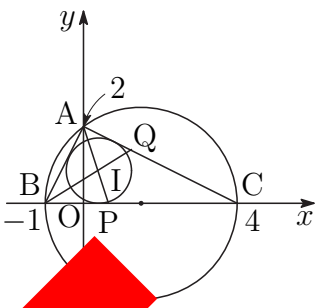
印刷本

10.9 (1) $\mathrm{AB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AC}=2\sqrt{5}$，$\mathrm{BC}=5$ であるから

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2$$

したがって，△ABC は $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ の直角三角形であり，BC はこの三角形の外接円の直径である．よって，外接円の中心と半径は

中心 $\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0}\right)$，半径 $\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$



(2) ∠CAB，∠ABC の二等分線と B[illegible] の[illegible]れぞれ P，Q とすると

$$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=1:2,$$

したがって　P の座標は $\left(\dfrac{2\cdot(-[illegible]}{[illegible]}\right)$ すなわち $\left(\dfrac{[illegible]}{3}\right)$

Q の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{5}\cdot 0+1\cdot 4}{\sqrt{5}+1}\right.$ [illegible] $\left.\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

これ[illegible]2 直線 AP，BQ の方程式は，[illegible]れ

$$y=-3x+2,\quad y=\frac{\sqrt{[illegible]}}{[illegible]}x+[illegible]$$

△AB[illegible]接[illegible]をI とすると，I は[illegible]2 直線の交点であるから

$$\left(\frac{[illegible]-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3\sqrt{5}-5}{[illegible]}\right)$$

ま[illegible]接円の[illegible]の y 座標に[illegible]．よって

[illegible]心 $\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right.$ [illegible] $\left.\right)$，半径 $\dfrac{\mathbf{3\sqrt{5}-5}}{\mathbf{2}}$

10.10 (1) 2 点[illegible]3)[illegible]0) 間の距離は 5

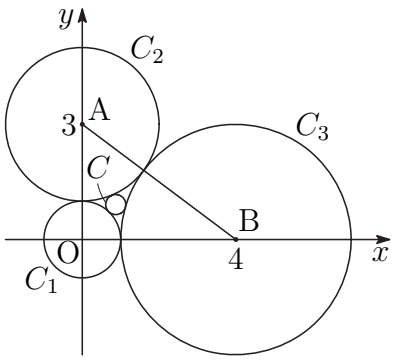
右の図から

$r_2=3$

$r_3=5$

$+r_1=4$

よって　$\boldsymbol{r_1=1,\ r_2=2,\ r_3=3}$



印刷用

(2) C の中心を $\mathrm{P}(a,\ b)$，半径 r について

$$\mathrm{OP}=1+r,\quad \mathrm{AP}=2+r,\quad \mathrm{BP}=3+r$$

である．したがって

$$\begin{aligned} a^2+b^2&=(1+r)^2 &&\cdots①\\ a^2+(b-3)^2&=(2+r)^2 &&\cdots②\\ (a-4)^2+b^2&=(3+r)^2 &&\cdots③ \end{aligned}$$

② − ① および ③ − ① より

$$\begin{cases} -6b+9=2r+3\\ -8a+16=4r+8 \end{cases}$$

ゆえに $\quad\cdots④$

④ を ① に代入すると

$$\left(\frac{2-r}{\quad}\right)^2+\left(\frac{3-r}{3}\right)^2=(1+$$

$$2\quad+132r-3$$

$$(r+6)(23r-6$$

$$\boldsymbol{r=\frac{6}{23}}$$

0 で

これ に代

$$\boldsymbol{(a,\ b)=\left(\frac{20}{23},\ \frac{}{23}\right)}$$

1 (C の方 ら

$$^2+y^2-5\quad x-y)=0$$

が k 関係な の条件は

$$x^2+y^2-5=0,\quad 2x-y=0$$

上の 2 式を解 $(x,\ y)=(-1,-2),\ (1,\ 2)$

求める 2 定点 は，x 座標に注意して $\quad\mathbf{A(-1,\ -2),\ B(1,\ 2)}$

(2) 点 P の座標 $(x,\ y)$ とする．

P に関す な $\quad\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=2:1$

これより $\quad\mathrm{PA}=2\mathrm{PB}$

すなわち $\quad\mathrm{PA}^2=4\mathrm{PB}^2$

見本

上式に

$$\mathrm{PA}^2=(x+1)^2+(y+2)^2,\quad \mathrm{PB}^2=(x-1)^2+(y-2)^2$$

を代入すると

$$(x+1)^2+(y+2)^2=4\{(x-1)^2+(y-2)^2\}$$

整理すると　$x^2+y^2-\dfrac{10}{3}x-\dfrac{20}{3}y+5=0$

すなわち　$\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(\quad\right)^2=\dfrac{80}{}$

よって，点 P の軌跡は，**点** $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)$ $\dfrac{4\sqrt{5}}{}$ **の円**

10.12　(1) C_1 が O を通ることに注意して　式を

$$+ax+\quad=0$$

とおく．これが 2 点 P(2, 1)，Q$\left(-\dfrac{2}{5},-\right.$ を通る

$$2a+b+5=0,\quad -\frac{2}{5}a-\quad+3\quad=0$$

これを　$b=3$　よって　$\boldsymbol{x^2+y^2-4x+3y=0}$

(2)　結果を　$\left(x-\right.\quad\left.y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$　ゆえに　C_1 の半径は $\dfrac{5}{2}$

C_1 に内接する正三　一辺の長さ　すると，正弦定理により

$$\sin\quad 2\times\frac{5}{}\quad d=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

三角形の面積は　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin 60^\circ=\boldsymbol{\dfrac{75\sqrt{3}}{16}}$

(3) C_2 上の点 M　を $(s,\ t)$ とすると，M は P，Q 以外の点であるから

$$=5\cdots①,\quad (s,\ t)\neq(2,\ 1),\ \left(-\frac{2}{5},-\frac{11}{5}\right)$$

△MPQ の重心を G$(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{s+2-\frac{2}{5}}{3},\quad y=\frac{t+1-\frac{11}{5}}{3},\quad (x,\ y)\neq\left(\frac{6}{5},-\frac{1}{15}\right),\ \left(\frac{2}{5},-\frac{17}{15}\right)$$

すなわち　　$s = 3x - \dfrac{8}{5},\ t = 3y + \dfrac{6}{5}$

これを ① に代入して　$\left(3x - \dfrac{8}{5}\right)^2 + \left(3y + \dfrac{6}{5}\right)^2 = 5$

$$\left(x - \frac{8}{15}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

よって　**中心** $\left(\dfrac{8}{15}, -\dfrac{2}{5}\right)$**，半径** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ **の円，**

ただし，2 点 $\left(\dfrac{6}{5}, -\dfrac{1}{15}\right)$**，**$\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{17}{15}\right)$ **を除く**

10.13　(1)　$C_1 : y = (x-t)^2 + t$ と $C_2 : y = -x^2 + 4$ から y を消去すると

$(x-t)^2 + t = -x^2 + 4$　整理すると

2 次方程式 $(*)$ の判別式を D

$$D/4 = (-t)^2 - 2(t^2 - t - 4) = -t^2 + 2t + 8 = -(t+2)(t-4)$$

C_1，C_2 が異なる 2 点で交わるので，$D > 0$

$(t+2)(t-4) < 0$　これを解いて　$-2 < t < 4$

2 次方程式 $(*)$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = t, \qquad \alpha\beta = \frac{t^2 + t - 4}{2}$$

C_1，C_2 の交点は $(\alpha, -\alpha^2 + 4)$，$(\beta, -\beta^2 + 4)$ の中点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{t}{2}$$

$$y = \frac{(-\alpha^2 + 4) + (-\beta^2 + 4)}{2} = \frac{-(\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta + 8}{2}$$

$$= \frac{-t^2 + (t^2 + t - 4) + 8}{2} = \frac{t+4}{2}$$

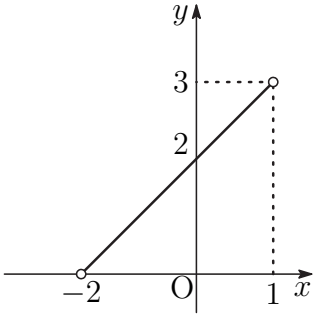
上の 2 式から t を消去すると　$y = x + 2$

また，(1) の結果から　$-2 < \dfrac{t}{2} < 1$

したがって，求める軌跡の方程式は

$$y = x + 2 \quad (-2 < x < 1)$$

よって，軌跡は右の図のようになる．



印刷本

10.14 C_1，C_2 の中心をそれぞれ O，A とし，P から C_1，C_2 に引いた接線の接点を，それぞれ Q，R とする．

P の座標を $(x,\ y)$ とすると，P に関する条件は

$$\mathrm{PQ} : \mathrm{PR} = 1 : 2$$

これより　　$2\mathrm{PQ} = \mathrm{PR}$

すなわち　　$4\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{PR}^2$　　$\cdots$①

△OQP，△ARP において，∠OQP =

∠ARP $= 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{OP}^2 - \mathrm{OQ}^2 =$$

$$\mathrm{PR}^2 = \mathrm{AP}^2 - \mathrm{AR}^2 \qquad - 5$$

上の 2 式を ① に代入して，整

$$4(x^2 + y^2 - \quad) = (x-2)^2 - \quad 4)^2 -$$

$$3x^2 + 3y^2 + 4x - \quad 19$$

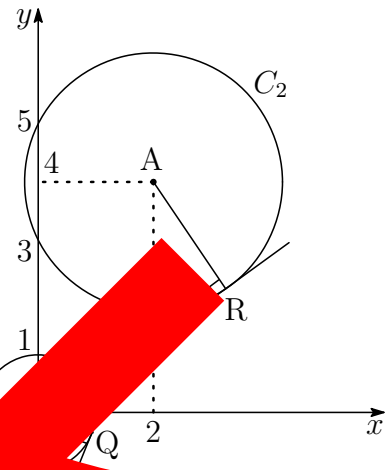
$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 \qquad \cdots$$②

C_2 の　　それ　　r_2 とすると　　，$r_2 = \sqrt{5}$

OA =　　より，　　$_2$　　あるから，2 円 C_1，C_2 は互いに外部にある．

　　，点 P　　② 上

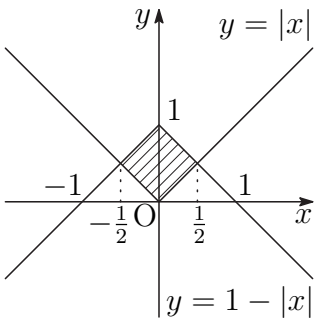
が　　求める　　$\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$　　**心とする半径 $\dfrac{\sqrt{77}}{3}$ の円**である．



10.15　　$\geqq 0$　　$x \leqq y \leqq$

$-x \leqq y \leqq 1 + x$

よって，求める領　　右の図の斜線部分で，境界線を含む．



10.16　$k = \dfrac{y-7}{x}$ とおくと　$y = kx + 7$

これを $(x-2)^2 + y^2 \leqq 3$ に代入すると　$(x-2)^2 + (kx+7)^2 \leqq 3$

白本

整理すると　　$(k^2+1)x^2+2(7k-2)x+50 \leqq 0$

$k^2+1>0$ であるから，この不等式が実数解をもつとき

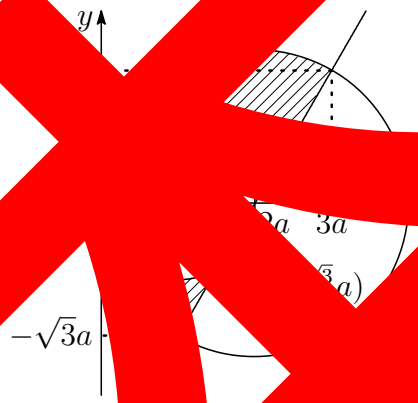
$$D/4=(7k-2)^2-(k^2+1)\cdot 50 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad k^2+28k+46 \leqq 0$$

よって　　$\boldsymbol{-14-5\sqrt{6} \leqq k \leqq -14+5\sqrt{6}}$

別解　(福岡教育大学 2013) 1

10.17　与えられた不等式から

$$\begin{cases} (x-2a)^2+y^2 \leqq (2a)^2 \\ (x-a)^2+y^2 \geqq a^2 \\ y \geqq \sqrt{3}(x-2a) \end{cases}$$



よって，右の図の斜線部分で境界線
含む.

10.18　(1) 直線 l に関して，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と対称な点 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$ とする.

中点 $\left(\dfrac{x_1+a}{2},\ \dfrac{y_1+b}{2}\right)$ は直線 $y=$ 上にあるから

$= \dfrac{a}{}+1$　ゆえに　$x_1 - y_1 = 2-a-b$　$\cdots$①

Q は直線 l に垂直であるから

$\dfrac{y_1-}{x_1} = -1$　ゆえに　$x_1 + y_1 = a-b \cdots$②

① より　$1 = 1$　よって　$\boldsymbol{\mathrm{Q}(1-b,\ 1-a)}$

(2) 点 P(a, b) と直線 l に関して対称な点 R の座標を $(x_2,\ y_2)$ とする.

PR の中点 $\left(\dfrac{a}{},\ \dfrac{y_2+b}{2}\right)$ は直線 $y=x+1$ 上にあるから

$\dfrac{y_2+b}{2} = \dfrac{a}{} + 1$　ゆえに　$-x_2+y_2 = a-b+2$　$\cdots$③

直線 PR は直線 $y=x+1$ に垂直であるから

$$\frac{y_2-b}{x_2-a} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad x_2+y_2 = a+b \cdots ④$$

③，④ より　$x_2 = b-1$，$y_1 = a+1$　よって　$\mathrm{R}(b-1,\ a+1)$

印刷本

2 点 $Q(1-b,\ 1-a)$，$R(b-1,\ a+1)$ を通る直線 l の方程式は

$$y-(1-a)=\frac{(a+1)-(1-a)}{(b-1)-(1-b)}\{x-(1-b)\}$$

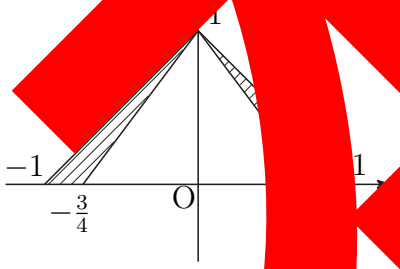
すなわち　　$\boldsymbol{ax+(1-b)y+b-1=0}$

(3) (2) の結果から，$\dfrac{|b-1|}{\sqrt{a^2+(1-b)^2}}<\dfrac{4}{5}$ であるから

$16\{a^2+(1-b)^2\}>25(b-$　　ゆえに　　$9(b-1)^2>0$

したがって　　$(4a+3b-3)(4a-$

よって，求める領域は，下の図の斜



10.19　$|x-2|$　　り　$|y-2|\leqq 2-$　　$\cdots$①

ゆえ　　$\leqq 2$　　これを解いて　$0\leqq x\leqq 4$

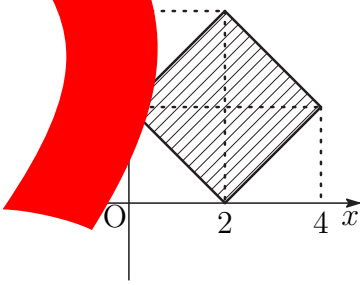
　ち　　$2|-$　　$2\leqq 2$　　$-2|$

ゆえに　　$|x$　　$y\leqq 4-|x-$

　　0　　を　$-x+$　　$\leqq x+2$

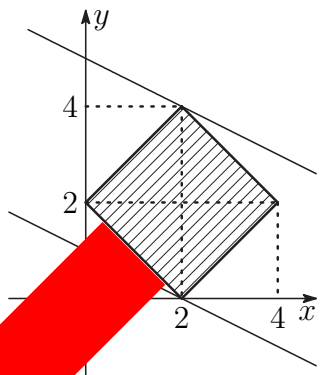
　　$\leqq 4$ の　　$\leqq -x+6$

　の表す領域は　　斜線部分で，境界線を含む．



見本

(2) $x+2y=k\cdots(*)$ とおくと，これは傾きが $-\dfrac{1}{2}$，y 切片が $\dfrac{k}{2}$ である直線を表す．この直線 $(*)$ が (1) で求めた領域と共有点をもつときの k の値の最大値，最小値を求めればよい．右の図から，直線 $(*)$ が



$(2,\ 4)$ を通るとき k は最大で　　$k=10$

$(2,\ 0)$ を通るとき k は最小で　　$k=2$

よって　　$x=2,\ y=4$ のとき，**最大値 10**

$x=2,\ y=0$ のとき，**最小値 2**

10.20　(1) $4x-3y=a\cdots①$ と $y=-x^2+6x-$

$3x^2-14x$

上の 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=$　　$-3(15-$　　$+3a$

① と　　接するとき，$D=0$ であるから

　　$4+3a=0$　これを解いて　　$a=$ **$-\dfrac{4}{3}$**

③ か　　点の　　は　　$x=-\dfrac{-14}{2\cdot3}$

と x の　　① に　　すると

　　$3y=-\dfrac{4}{3}$　　$y=\dfrac{32}{9}$

　，接点　　**$\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{32}{9}\right)$**

(2)　　と放物線　　$5x-5$

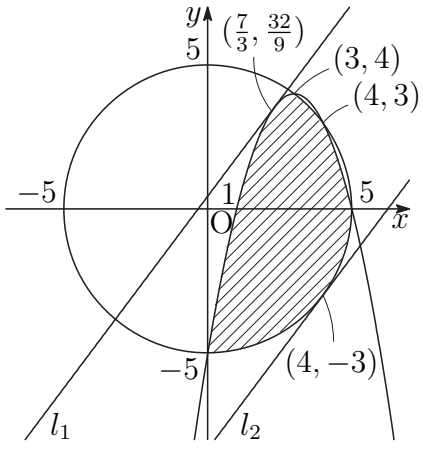
　　は

x^2+　　$+6x-5)^2=25$

x^4-　　$47x^2-60x=0$

$x(x$　　$-4)(x-5)=0$

　　$x=0,\ 3,\ 4,\ 5$



したがって，連立不等式

$$x^2+y^2\leqq 25,\quad y\leqq -x^2+6x-5$$

印刷本

の表す領域は，右の図の斜線部分で，境界線を含む．

(1) で求めた接線を $l_1 : 4x - 3y = -\dfrac{4}{3}$ とし，円周上の点 $(4, -3)$ における接線を $l_2 : 4x - 3y = 25$ とすると，l_1，l_2 の接点は領域内の点である．

したがって，$4x - 3y$ のこの領域内における値は

$$-\frac{4}{3} \leqq 4x - 3y \leqq 25$$

よって　**最小値** $-\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$　$\left(x = \dfrac{7}{3}, \quad y = \dfrac{32}{9}\right.$ のとき

最大値 25　$(x = 4,$ [illegible]

10.21　(1)　領域 D 内の点 $(x,\ y)$ について，条件 [illegible]

$$|y| +$$

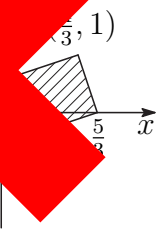
ここで，$y = s$，$3x - 4y$ [illegible] くと

$$(x,\ y) = s\left(\frac{4}{3},\ 1\right) + t\left(\frac{1}{3},\ 0\right), \quad |s| +$$

[illegible] $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$，$\left(-\frac{4}{3}, -1\right)$，$\left(-$ [illegible] $\frac{1}{3}, -1\right)$

[illegible] する [illegible] の周およびその内部で

右の図 [illegible]



(2)　$\left(\quad t\right) + s = \dfrac{7}{3}s + \dfrac{5}{3}t$

[illegible] 式か [illegible] $+ y$ か [illegible] となるとき，$t \geqq 0$ であるから $(s + t \leqq 1)$

$s = 1$ [illegible] ち　$\left(\dfrac{4}{3},\ 1\right)$ のとき最大値 $\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}$

10.22　(1) [illegible] $+ 1$ と l : [illegible] から，y を消去すると

$$4x + 1 = x + 1 \quad \text{ゆえに} \quad x(2x - 5) = 0$$

印刷本

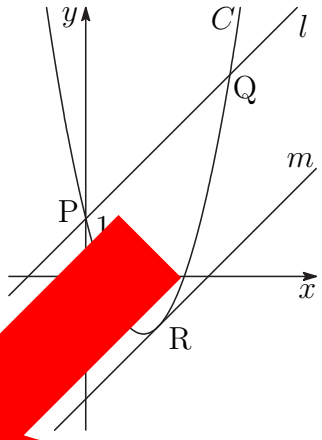
したがって　　P$(0,\ 1)$，Q$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

$f(x)=2x^2-4x+1$ とおく．

これを微分すると　　$f'(x)=4x-4$

$f'(x)=1$ とすると　　$4x-4=1$

ゆえに　　$x=\dfrac{5}{4}$，$f\left(\dfrac{5}{4}\right)=-\dfrac{7}{8}$



m は，R$\left(\dfrac{5}{4},-\dfrac{7}{8}\right)$ を通り，傾[illegible]線

であるから

$$y-\left(-\frac{7}{8}\right)=x-\frac{5}{4}$$

P と m の距離を d とする[illegible]

(2) PQ$=\sqrt{\left(\dfrac{7}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}-0\right)^2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$

[illegible]て　$=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$[illegible]$=\dfrac{\mathbf{25}}{\mathbf{32}}$

$x+$[illegible]とお[illegible]$=-x+k$

[illegible]線が C[illegible]k は最小になるから，$f'(x)=-1$ より

[illegible]$4x-$[illegible]ゆえに[illegible]$f\left(\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{7}{8}$

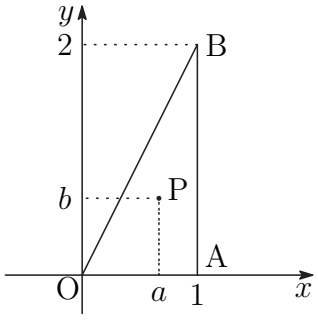
[illegible]，$\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{7}{8}\right)$[illegible]

$$k=\frac{3}{4}+\left(-\frac{7}{8}\right)=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$$

10.23　(1) P$(a,\ b)$ から[illegible]AB までの距離は，それぞれ b，$1-a$ であ[illegible]

直線 OB の[illegible]は $2x-y=0$ であるから，P から OB [illegible]離は，$b\leqq 2a$ に注意して

$$\frac{|\,2a-b\,|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2a-b}{\sqrt{5}}$$



印刷本

よって　　$k = b + (1-a) + \dfrac{2a-b}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}a + \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}b + 1}$

(2) (1) の結果より，k は a，b の 1 次式であるから，k の最大値・最小値は境界線上でとるから，△OAB の周上における k の値を調べればよい．

i) P が OA 上にあるとき，$b = 0$ より

$$k = \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}a + 1 \quad (0 \leqq a \leqq$$

よって　　$\dfrac{2}{\sqrt{5}} \leqq k \leqq 1$

ii) P が AB 上にあるとき，$a = 1$ よ

$$k = \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}$$

よって　　$\dfrac{2}{\sqrt{5}} \leqq k$

iii) P　B 上にあるとき，$b = 2a$ より

$$\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}a + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\cdot 2a +$$

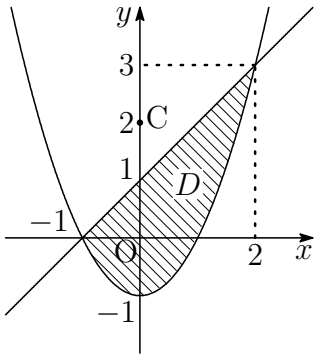
ii), ii

($a = 1$, $b = 2$ のとき)

(a　$b = 0$ のとき)

(宮

10.24 式の表



域を D，右の図

界を含む．

$x^2 + y^2 - \quad = x^2 + (y-2)^2 - 4$

であるから，点 (　2) をとると，D 内の点 P$(x,\ y)$ について

$y^2 - 4y = \mathrm{CP}^2 - 4$

CP は D の境界で最大値・最小値をとるので，P が次の Q および R にあるとき，その最大値・最小値を調べる．

印刷用

$$\mathrm{Q}(s,\ s+1)\ (-1 \leqq s \leqq 2), \qquad \mathrm{R}(t,\ t^2-1)\ (-1 \leqq t \leqq 2)$$

したがって

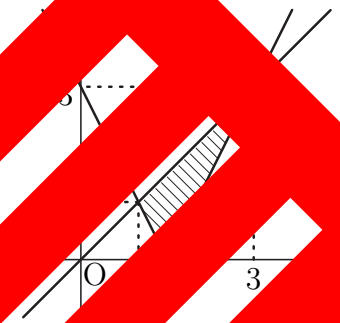
$$\begin{aligned}
\mathrm{CQ}^2 - 4 &= s^2 + \{(s+1)-2\}^2 - 4 \quad (-1 \leqq s \leqq 2) \\
&= 2s^2 - 2s - 3 \\
&= 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{CR}^2 - 4 &= t^2 + \{(t^2-1) \quad 2\}^2 - 4 \quad (\qquad \leqq 2) \\
&= t^4 - 5t^2 + \\
&= \left(t^2 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

ゆえに $\quad -\dfrac{7}{2} \leqq \mathrm{CQ}^2 - 4 \leqq 1,$

よって，x^2+y^2-4y は，D **最大値** 5 **値** −

10.25 (1) D の 域は図の斜線部分で，境界を含



$y) =$ と の 、D における $f(x,\ y)$ の最大値
小値 の 3 つの

$$f(\quad a+1, \quad f\left(\frac{3}{2},\ 0\right) = \frac{3}{2}a, \quad f(3,\ 3) = 3a+3$$

の中から選べ ので (a は 2 でない正の定数)

$$f\left(\frac{3}{2},\ 0\right) - f(1,\ 1) = \frac{1}{2}(a-2)$$

$$f(3,\ 3) - f\left(\frac{3}{2}a,\ 0\right) = \frac{3}{2}a + 3 > 0$$

$$f(3,\ 3) - f(1,\ 1) = 2a + 2 > 0$$

見本

よって　　点 $\mathbf{(3,\ 3)}$ で最大値 $\boldsymbol{3a+3}$

$0<a<2$ のとき点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ で最小値 $\dfrac{3}{2}a$

$2<a$ のとき点 $\mathbf{(1,\ 1)}$ で最小値 $\boldsymbol{a+1}$

(3) D において x^2+y^2 の最小値を与える点 $(x,\ y)$ は，2点 $(1,\ 1)$，$\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を結ぶ線分上にあるから，この点を $(t,\ -2t+3)$ とお[illegible] $\left(1 \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}\right)$

$$x^2+y^2 = [\text{illegible}]$$

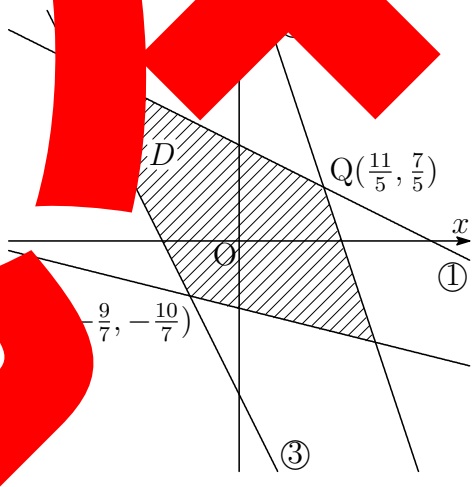
$$= [\text{illegible}]$$

$$= 5\left([\text{illegible}]\right)$$

よって　$t=\dfrac{6}{5}$　すなわち　$\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$　[illegible]る．

10.26 (1) $x+2y=5\cdots①$，$3x+y=[\text{illegible}]\cdots②$，$-2x-[\text{illegible}]\cdots③$，$[\text{illegible}]=7\cdots④$

とおく[illegible]の表す領域は，図の斜線部分[illegible]を含む．直線 $x+y=k$ [illegible]傾き -1 の直線で，[illegible]②[illegible]きは，それぞれ $-\frac{1}{2}$，[illegible]り



$-3<$[illegible]

えに[illegible]の点 $\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$ で，k は[illegible]$\left(-\frac{9}{7},-\frac{10}{7}\right)$

最[illegible]る．

③，④[illegible]ぞれ -2[illegible]

であ[illegible]

$<-\frac{1}{4}$

ゆえに，D [illegible]$\left(-\dfrac{9}{7},-\dfrac{10}{7}\right)$ で，k は最小となる．

よって　　$\mathbf{C}$[illegible]$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$，　$\mathbf{R}\left(-\dfrac{9}{7},-\dfrac{10}{7}\right)$

(2) 直線 $ax+$[illegible] を l' とする．

l' は傾き $-\dfrac{a}{b}$，切片 $\dfrac{k'}{b}$ の直線である．$b>0$ であるから，k' が最大・最小となるのは，それぞれ $\dfrac{k'}{b}$ が最大・最小となるときである．

見本

k' が Q で最大値をとるとき，l' と ①，② の傾きから

$$-3 < -\frac{a}{b} < -\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 3 \qquad \cdots (*)$$

k' が R で最小値をとるとき，l' と ③，④ の傾きから

$$-2 < -\frac{a}{b} < -\frac{1}{4} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{4} < \frac{a}{b} < 2 \qquad \cdots (**)$$

$a > 0$，$b > 0$ より，$\dfrac{a}{b}$ の符号に注意し，$(*)$，$(**)$ [illegible] 範囲を求めて

1

11.1 $\sin 105^\circ + \cos 75^\circ = \cos 15^\circ + \sin 15^\circ$

よって $\dfrac{\sin 105^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ} = \mathbf{1}$

11.2 $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より $\sin\theta - c$ [illegible] $\sqrt{2}\sin\left(\theta - $ [illegible] < 0

$(\sin\theta + c$ [illegible] $\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2$ であるから [illegible] 1 を代入す [illegible]

1 [illegible] $\theta)^2 = 2$ ゆえに [illegible] $-\cos\theta)^2 = \dfrac{7}{4}$

① [illegible] $\sin\theta$ [illegible] $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

[illegible] $= \dfrac{2\cdot}{1}$ [illegible] $\dfrac{2\cdot\frac{1}{5}}{\left(\frac{1}{\quad}\right)^2}$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2 2\theta} = \frac{2\cdot\frac{1}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \mathbf{\frac{120}{119}}$$

$4\theta = \dfrac{\pi}{4} + \alpha$ より [illegible] $4\theta - \dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\tan\alpha = \tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\theta - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan 4\theta \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}\cdot 1} = \mathbf{\frac{1}{239}}$$

見本

11.4 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ であるから，$\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$ より

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\boldsymbol{\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}}$$

11.5 (1) (加法定理による証明)

$$\sin 3\theta=\sin(2\theta+$$
$$=\sin 2\theta\cos\theta+$$
$$=2\sin\theta\cos\theta\cdot c$$
$$=2\sin\theta(1-$$
$$=3\sin\theta$$

(ド・モアブルの定理に

$$(\cos\ \ i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3\cos^2\theta\cdot i\sin\ \ \cos\theta(i\ \ \sin\theta)^3$$
$$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta\ \ \ \ -$$

モア　　理により　$(\cos\theta+i\sin\ \ \cos\ \theta+i\sin 3\theta$

の 2

$$3\theta+i\ \ \ \ \theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$$

の虚　　しいの

$$\sin 3\theta=3\cos\ \ \theta-\sin^3\theta$$
$$=3(\ \ \theta)\sin\theta-\sin^3\theta$$
$$\ \ -4\sin^3\theta$$

(2) $\ \ \theta=90^\circ$ よ$\ \ 2\theta=90^\circ-3\theta$

ゆえ　　$\ \ \cos(90^\circ-3\theta)=\sin 3\theta$

(3) (2) の結果に　　よび $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ を代入して整理すると

$$1-2\sin^2\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$
$$4\sin^3\theta-2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$$
$$(\sin\theta-1)(4\sin^2\theta+2\sin\theta-1)=0$$

$0<\sin 18^\circ<1$ であるから　　$\boldsymbol{\sin 18^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

見本

11.6　$(\sin\alpha-\cos\beta)^2+(\cos\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

$=2\{1-\sin(\alpha+\beta)\}$　$\cdots(*)$

$\sin\alpha=\cos\beta$，$\cos\alpha=\sin\beta$ のとき，$(*)$ より，$0^\circ\leqq\alpha,\ \beta<360^\circ$ より

$\sin(\alpha+\beta)=1$　すなわち　$\boldsymbol{\alpha+\beta=90^\circ,\ 450^\circ}$

逆に，$\alpha+\beta=90^\circ,\ 450^\circ$ のとき，$(*)$ より

$\sin\alpha=\cos\beta$，$\cos\alpha=\sin\beta$

11.7　(1)　$\sin^2x+\sin^2y+\sin^2(x+y)$

$=\dfrac{1}{2}(1-\cos2x)+\dfrac{1}{2}(1-\cos2y)+\sin^2(x+y)$

$=2-\dfrac{1}{2}(\cos2x+\cos2y)+\sin^2(x+y)$

$=2-\cos(x+y)\cos(x-y)+\sin^2(x+y)$

$=2-\{\cos(x-y)-\sin(x+y)\}\cos(x+y)$

$=2-2\cos x\cos y\cos(x+y)$

(2)　$\sin^2x+\sin^2y+\sin^2(x+y)>2$ のとき，

$2\cos x\cos y\cos(x+y)>2$　ゆえに　$\cos x\cos y\cos(x+y)<0$　$\cdots(*)$

$x>0,\ y>0$ のとき，$x+y<\pi$ と仮定すると

$0<x<\pi,\ 0<y<\pi,\ 0<x+y\leqq\dfrac{\pi}{2}$

このとき，$\cos x>0,\ \cos y>0,\ \cos(x+y)\geqq0$

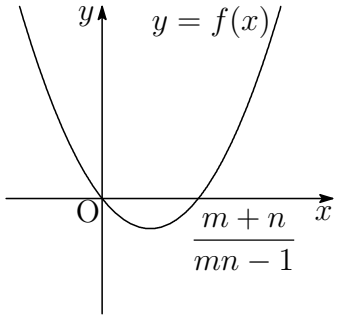
これは，$(*)$ を満たすことを示している．$x+y>\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ．

11.8　(1)　$f(x)=(mx-1)(nx-1)-(\cdots)$ とおくと

$f(x)=mnx^2-(m+n)x$

$1\leqq m<n$ より，$mn-1>0\cdots①$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，x 軸との交点の x 座標は

$x=0,\ \dfrac{m+n}{mn-1}$



印刷本

ここで

$$3-\frac{m+n}{mn-1}=\frac{3(mn-1)-(m+n)}{mn-1}$$
$$=\frac{(9mn-3m-3n+1)-10}{3(mn-1)}$$
$$=\frac{(3m-1)(3n-1)-10}{3(mn-1)} \quad \cdots ②$$

m，n は $1 \leqq m < n$ である整数であるから　$n \geqq$

ゆえに　　$3m-1 \geqq 2$，$3n-$

$mn-1>0$，$(3m-1)(3n-1) \geqq$　　ら

$$3-\frac{m+n}{mn-1} \geqq 0 \quad \text{すな}$$

③ より，$x>3$ のとき　$f(x)>$

すなわち　$x>3$ のとき　$($　　$(nx$

(2)　　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{t \quad \tan\beta}{1- \quad \alpha\tan\beta}=\dfrac{}{1 \quad }=\dfrac{}{m}$

$1 \leqq$　　①，③ より，$\tan(\alpha+\beta)$ が と　　数値　　数で

　　3 つに場合に分けて求める

　$\tan($　　のとき

　　$=1$　ゆえに　$(m$　　$)(n-1)=2$

　このと　　$\leqq m$　　-1 に注意して

　　$m-$　　$n-1=2$　　ち　$(m,\ n)=(2,\ 3)$

　$(\alpha+$

　　$\dfrac{m+n}{mn-1}$　　$(2m-1)(2n-1)=5$

　と　　$2m-1<2n-1$ に注意して

　　2　　$=1$，$2n-1=5$　すなわち　$(m,\ n)=(1,\ 3)$

iii)　$\tan(\alpha+$　　のとき

　　$\dfrac{n+n}{mn-1}=3$　ゆえに　$(3m-1)(3n-1)=10$

このとき，$2 \leqq 3m-1<3n-1$ に注意して

　　$3m-1=2$，$3n-1=5$　すなわち　$(m,\ n)=(1,\ 2)$

印刷本

i)〜iii) より　　$\boldsymbol{(m,\ n) = (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3)}$

11.9　(1) l_1 と x 軸のなす角を θ とすると　　$m = \tan\theta$

このとき，l_2 の傾きを k とすると　　$k = \tan\dfrac{\theta}{2}$

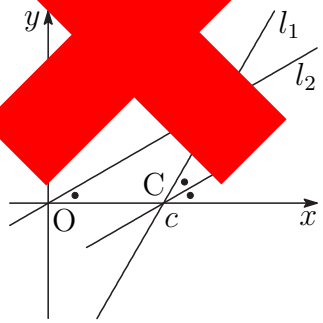
2 倍角の公式により　　$\tan\theta = \dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$

したがって　$\dfrac{2k}{1-k^2} = m$　整[illegible]　m[illegible]$- m = 0$

$k > 0$ に注意してこれを解くと　k[illegible]

よって，l_2 の方程式は　$\boldsymbol{y}$[illegible]

(2) 右の図から，△OCP は C[illegible]CP $= c$ の二[illegible]
三角形[illegible]るから



$\overrightarrow{}$[illegible]$= (c\cos\theta,\ c\sin\theta)$

このと[illegible]　$\dfrac{1}{\tan^2\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{1+}}$

[illegible]$\sqrt{1}$[illegible]$\theta} = \dfrac{m}{\sqrt{1}$[illegible]^2

したが[illegible]

C[illegible]　(c, 0)[illegible]$\dfrac{c}{\sqrt{1+m^2}},\ \dfrac{cm}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

$\left(c+\dfrac{}{\sqrt{1+}}\right.$[illegible]$\left.\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

よって　**P**[illegible]$\left(\boldsymbol{\dfrac{c}{\sqrt{1+m^2}},\ \dfrac{cm}{\sqrt{1+m^2}}}\right)$，CP $= \boldsymbol{c}$

(3) (2) の結果から[illegible]は，C を中心とする半径 c の円周上にある．

[illegible]1 のとき　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$，　$m = \sqrt{3}$ のとき　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$

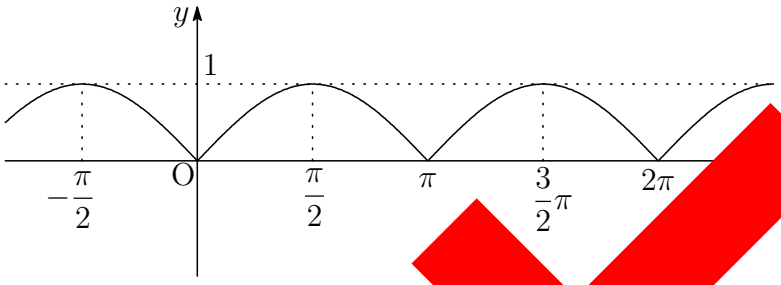
よって，点 P が描く曲線の長さは　　$c\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\pi c}{12}}$

印刷本

11.10 (1) $\sin x \geqq 0$ のとき　$|\sin x| = \sin x$

$\sin x < 0$ のとき　$|\sin x| = -\sin x$

$y = |\sin x|$ のグラフは，下の図のようになる．



任意の実数 x について $|\sin(x+p)| =$

これを満たす最小の正の数

実際，任意の実数 x に

よって 求める基本周期は　π

(2) 任

に x 代入して　$f\left(-\frac{p}{2}\right) =$　$\cdots$①

また $x) =$ $nx)|\sin(-nx)$

$\sin nx = -f(x)$

に $\left(-\frac{p}{2}\right)$ $\left(\frac{p}{2}\right)$

① f $\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$

$\left.\right) =$ $\left|\sin\right.$ p

0　または　$\sin\frac{np}{2} = 0$

したがって　$2k\pi$　または　$np = 2l\pi$　(k，l は整数)

i) $mp = 2k$ 整数) のとき

$$\begin{aligned} f(x+p) &= |\sin m(x+p)|\sin n(x+p) \\ &= |\sin(mx+mp)|\sin(nx+np) \\ &= |\sin(mx+2k\pi)|\sin(nx+np) \\ &= |\sin mx|\sin(nx+np) \end{aligned}$$

印刷本

このとき，$f(x+p)=f(x)$ が成り立つ，すなわち

$$|\sin mx|\sin(nx+np)=|\sin mx|\sin nx \quad \cdots(*)$$

任意の実数 x に対して $(*)$ が成り立つとき　$\sin(nx+np)=\sin nx$
ゆえに，np は 2π の整数倍．

ii) $np=2l\pi$ (l は整数) のとき

$$\begin{aligned} f(x+p) &= |\sin m(x+p)|\sin n(\\ &= |(+ mp)| (np) \\ &= |\sin (x+2l\pi) \\ &= |\sin(m. \end{aligned}$$

このとき，$f(x+p)=f(x)$ ら

$$|\sin(mx+ nx = mx \cdots$$

任意の実数 x に対し *) が成り立

$$|\sin(mx+ = |$$

式 を代入すると　$|\sin mp|$
ゆ の整数倍である．
mp 数倍であれば，(成り立つ．
より π であり，p は 2π の整数倍である．
の結 ，改 $np=k\pi$，$2l\pi$ とおくと (k，l は整数)

$$\frac{k\pi}{n}=2l \quad \text{えに} \quad \frac{kn}{m}=2l$$

素である n の倍数．
とおくと (k は整数)，$p=k'\pi\cdots$③ であるから

$$\begin{aligned} f( ) &= f(x+k'\pi) \\ &= |\sin m(x+k'\pi)|\sin n(x+k'\pi) \\ &= |\sin(mx+mk'\pi)|\sin(nx+nk'\pi) \\ &= |\sin mx|(\sin nx\cos nk'\pi+\cos nx\sin nk'\pi) \\ &= (-1)^{nk'}|\sin mx|\sin nx \\ &= (-1)^{nk'}f(x) \quad \cdots④ \end{aligned}$$

見本

i) n が偶数のとき
$k'=1$ とすると，③，④ より　$f(x+\pi)=f(x)$
したがって，基本周期は π

ii) n が奇数のとき
$k'=2$ とすると，③，④ より　$f(x+2\pi)=f(x)$
したがって，基本周期は 2π

よって，基本周期は，n が偶数のとき $\boldsymbol{\pi}$，n が奇数の

11.11 $4\cos^3\theta-7\cos\theta+3=0$ より

$$(\cos\theta-1)(2\cos\theta-$$

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから　　$\cos\theta=1$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　　$\boldsymbol{\theta=0^\circ,\ }$

11.12　i) $0<x<\pi$ のとき，$\sin x>$ るから

$\sin^2x\geqq3$　ゆえ　　$(2\sin x+$　$2\sin x$　0

$\sin x\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　すなわち

$<x<$　$\sin x<0$ であるから

$4\sin^2$　　$(2\sin x+\sqrt{3})(2\sin x-\sqrt{3})\leqq0$

$\sin x<$　　$\leqq\sin x<0$

ら　　$\dfrac{5\pi}{3}\leqq x$

i)，　$\boldsymbol{x\leqq\dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}\leqq}$　$\boldsymbol{\dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3}\leqq x<2\pi}$

11.13 $\dfrac{\pi}{6}\leqq x<\dfrac{}{2}\cdots$①　$\tan x\neq0$ であるから，与えられた等式は

$$(1+\sqrt{3})\tan x=2\sqrt{3}+\frac{1-\sqrt{3}}{\tan x}$$

整理すると　　$(+1)\tan^2x-2\sqrt{3}\tan x+(\sqrt{3}-1)=0$

ゆえに　　$(\tan x-1)\{(\sqrt{3}+1)\tan x-(\sqrt{3}-1)\}=0$

見本

① より，$\tan x \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{4}{3}\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) > 0$$

したがって　$\tan x = 1$　① に注意して　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{4}}$

別解（宮崎大学 2008）[1]

11.14 与えられた 2 式から

$$\sin y = 3\sin x - \sqrt{3} \quad \cdots ①, \qquad \quad - 1 \quad \cdots ②$$

①，② を $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ に代入する

$$(3\sin x - \sqrt{3})^2 \quad \cos$$

整理すると　$\sqrt{3}\sin x - \cos x$　ゆえに　s　$- \dfrac{\pi}{6}$

$0 \leqq x \leqq$　から　　$\boldsymbol{x = \dfrac{2}{3}\pi}$

これ　②　すると

$$\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos y$$

$0 \leqq$　であ　　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$

$\theta + c$　より　$\theta - 1) + \cos$

$(\cos\theta$　c　$= 0$

$0° \leqq$　c　から　　$\boldsymbol{80°, 300°}$

11.16 $\cos 2x =$　x　あるから，不等式 $\cos 2x + \cos x + 1 > 0$ は

$$(2\cos^2 x -$$　$\cos x + 1 > 0$　ゆえに　$\cos x(2\cos x + 1) > 0$

したがって　c　$-\dfrac{1}{2}, \quad 0 < \cos x$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ に注意して，これを解くと

$$\boldsymbol{0 \leqq x < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi < x \leqq 2\pi}$$

見本

11.17 $5\sin^2\theta + 14\cos\theta - 13 \geqq 0$ より

$$5(1-\cos^2\theta) + 14\cos\theta - 13 \geqq 0$$
$$5\cos^2\theta - 14\cos\theta + 8 \leqq 0$$

整理すると　　$(\cos\theta - 2)(5\cos\theta - 4) \leqq 0$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから　　$\dfrac{4}{5} \leqq \cos\theta \leqq$

これを満たす θ で最大なものが α であるから　$\boldsymbol{\cos\alpha}$

このとき　　$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，$\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$

よって　$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2\times\frac{3}{4}}{1-($

11.18 $\sin 3x + \cos 3x = 0$ において，　　0 であ

$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$0 \leqq 3x \leqq 3\pi$ であるから

$\dfrac{7}{4}\pi$，$\dfrac{11}{4}\pi$，　すなわち　$\boldsymbol{x}$　　$\dfrac{11}{12}\boldsymbol{\pi}$

11.19 定理に

$+\sin$　　$\cos x$，　$\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x\cos x$

方程式

$\sin$　　$\sin 3x = c$　　$\cos 2x + \cos 3x$

ると

$\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos 2x\cos x + \cos 2x$

$2\cos x + 1)\sin 2x = (2\cos x + 1)\cos 2x$

$(2\cos$　　$(\sin 2x - \cos 2x) = 0$

ゆえに　　$(2\cos$　　$)\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より　　$\boldsymbol{x = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{5}{8}\pi}$

見本

11.20 与えられた不等式から　$(\sin 3x - \sin x) + \sin 2x < 0$

$$2\cos 2x \sin x + 2\sin x \cos x < 0$$
$$\sin x(\cos 2x + \cos x) < 0$$
$$\sin x(2\cos^2 x + \cos x - 1) < 0$$
$$\sin x(\cos x + 1)(2\cos x - 1) < 0$$

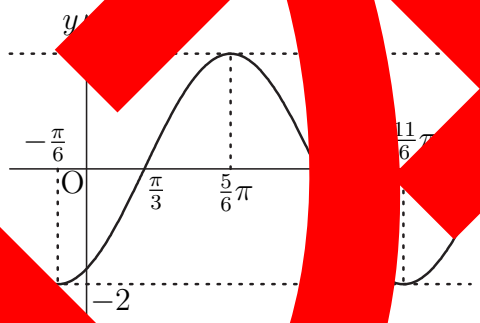
$\sin x > 0$　すなわち　$0 < x < \pi$ のとき　$\cos x < \dfrac{1}{2}$

$\sin x < 0$　すなわち　$\pi < x < 2\pi$ のとき　$\cos x > \dfrac{1}{2}$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} < x < \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi < x <}$

11.21　(1)　$f(\theta) = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$

$y = f(\theta)$ は $y = 2\sin\theta$ のグラ　平行移動したもの．



(2)　結果を　$= 1$　すると

$2\sin$　$= 1$　ゆえ　$\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$< \theta <$　π　$-\dfrac{}{3}$　において，上の方程式を解くと

$\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{}{6}$　よって　$\boldsymbol{\theta = -\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{\pi}{2}}$

(3)　$\sin\theta > \sqrt{3}\cos$　より　$\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) > \dfrac{1}{2}$

(2) の結果に　して

$$-\frac{4}{3}\pi < \theta - \frac{\pi}{3} < -\frac{7}{6}\pi,\quad \frac{\pi}{6} < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi$$

よって　$\boldsymbol{-\pi < \theta < -\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi}$

見本

11.22 (1)
$$f(\theta)=(\cos\theta)(\cos 2\theta)(\cos 3\theta)$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)\cos 3\theta$$
$$=\frac{1}{2}(\cos^2 3\theta+\cos\theta\cos 3\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\cos 6\theta+1)+\frac{1}{2}(\cos 4\theta+\cos 2\theta)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cos 4\theta+\frac{1}{4}\cos 6\theta$$
$$g(\theta)=(\sin\theta)(\sin 2\theta)(\sin$$
$$=\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos 3\theta)\sin$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 3\theta\cos\theta-\sin$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\sin 4\theta$$
$$=\frac{1}{4}\sin 2\theta+$$

よっ

$\boldsymbol{r=s=\frac{1}{4},\ t=0,\ u=}$ $\boldsymbol{w=-\frac{1}{4}}$

こすれ

(2) (1)の結果から

$$g\left(\quad\right)=\frac{1}{4}\left(\quad+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}(\quad+\pi)-\frac{1}{4}\sin\left(6\theta+\frac{3}{2}\pi\right)$$
$$=-\frac{1}{4}\sin 4\theta$$

$\left(\quad\right)$ より

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos\quad+\frac{1}{4}\cos 4\theta+\frac{1}{4}\cos 6\theta=\frac{1}{4}\cos 2\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta+\frac{1}{4}\cos 6\theta$$

ゆえに　$\sin\quad\cos 4\theta=-1$　すなわち　$\sin\left(4\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より　$\frac{\pi}{4}\leqq 4\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{17}{4}\pi$ であるから

$$4\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi,\ \frac{15}{4}\pi$$　よって　$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{8}\pi}$

印刷本

11.23 $0 \leqq \theta < 2\pi$ より $x = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$ とおくと　$-1 \leqq x \leqq 1$

また，$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - x^2$ であるから

$$y = -x^2 - x + 1 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$
$$= -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

よって　$x = -\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi}$ のとき　**最**

$x = 1$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 0}$　**き**　**最−1**

11.24　(1)　$a\cos\theta - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta + a\cos$

$\cos\theta = x$ とおくと，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$y = 2x^2 + ax - 2 = 2\left($$　$-1 \leqq x \leqq$

ゆえに，この関数のグラフ　の放　で，

軸は $x = -\dfrac{a}{4}$ である．　$\leqq 1$ の中央　$= 0$

最大値 $M(a)$ は，次の 2 つの場合に分けて　る．

下に凸の放物線) の閉区間に　最

域　軸より左側にあるとき定　の左端で最大値をとり，

定義域　より右側にあるとき定　の右端で最大値をとる．

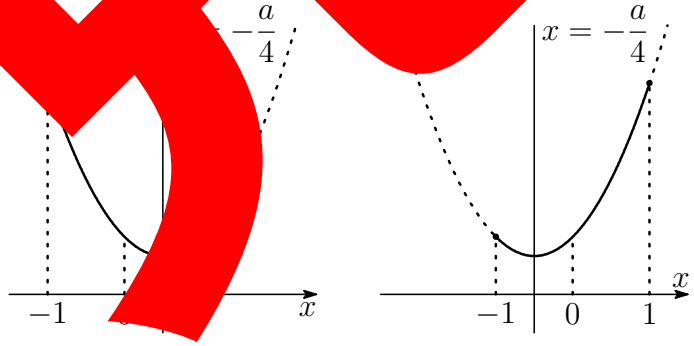
$-\dfrac{a}{4}$　< 0 のとき

$x =$　大値　ら　M　$= 2(-1)^2 + a(-1) - 2 = -a$

n)　$-\dfrac{a}{4}$　すな　$a \geqq 0$ のと

で最　から　$M(a)$　$^2 + a\cdot 1 - 2 = a$

$< -\dfrac{a}{4}$　き $(a <$　のとき $(a \geqq 0)$



したがって　$\boldsymbol{M(a) = \begin{cases} -a & (a < 0) \\ a & (a \geqq 0) \end{cases}}$

印刷

最小値 $m(a)$ は，次の 3 つの場合に分けて求める．

i) $1 < -\dfrac{a}{4}$　すなわち　$a < -4$ のとき

$x = 1$ で最小値をとるから　$m(a) = 2\cdot 1^2 + a\cdot 1 - 2 = a$

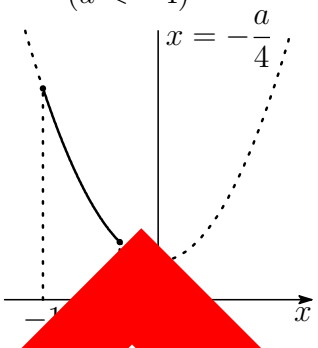
ii) $-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$　すなわち　$-4 \leqq a \leqq 4$ のとき

$x = -\dfrac{a}{4}$ で最小値をとるから　$m(a) = -\dfrac{a^2}{8} - 2$

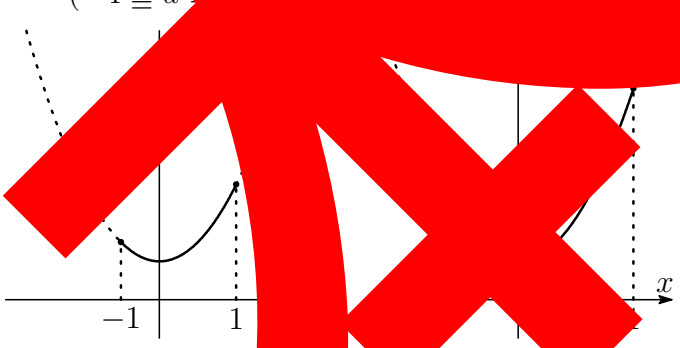
iii) $-\dfrac{a}{4} < -1$　すなわち　$4 < a$ のとき

$x = -1$ で最小値をとるから　$m(a) = 2\cdot(-1)^2 + a\cdot(-1) - 2 = -a$

i) $1 < -\dfrac{a}{4}$ のとき　$(a < -4)$



ii) $-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$ のとき　$(-4 \leqq a \leqq 4)$



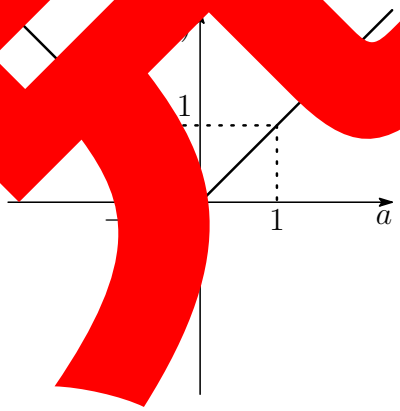
iii) $-\dfrac{a}{4} < -1$ のとき　$(4 < a)$

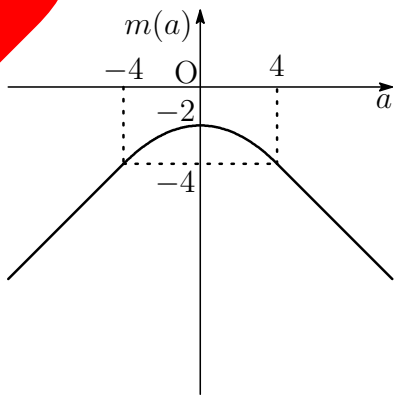
したがって

$$\begin{cases} a & (a < -4) \\ -\dfrac{a^2}{8} - 2 & (-4 \leqq a \leqq 4) \\ -a & (4 < a) \end{cases}$$

の結果

$m(a)$ の最小値は -2





11.25　(1)　$x = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45^\circ)$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$45^\circ \leqq \theta + 45^\circ \leqq 225^\circ$ であるから，$x = 0$ となるのは

$$\theta + 45^\circ = 180^\circ \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\theta = 135^\circ}$$

(2) $45^\circ \leqq \theta + 45^\circ \leqq 225^\circ$ であるから

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin(\theta + 45^\circ) \leqq 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}}$$

(3) $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta)^2 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(x^2 - 1)$ で

$$y = -\sin\theta\cos\theta +$$
$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 1) + ax$$

(4) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + ax + \dfrac{1}{2}$ とお

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x - a)^2 + \frac{1}{2}$$

定 $\leqq \sqrt{2}$ の中央が $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$ で

のとき，$f(x)$ の最小 $-1)$

$a <$ $f(x)$ の最小値は $f(\sqrt{2})$

って る y の は

$\boldsymbol{-1} \leqq \boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{-a}$

$\boldsymbol{a} <$ **のとき** $\boldsymbol{\sqrt{2}a - \dfrac{1}{2}}$

11.26 (1) $y = a$ $+ \sqrt{3}(a - b)\cos x \sin x + b\sin^2 x$

$$= a \cdot \frac{\cos 2x}{2} + \sqrt{3}(a - b)\cdot\frac{\sin 2x}{2} + b\cdot\frac{1 - \cos 2x}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x) + \frac{a + b}{2}$$
$$= (a - b)\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{a + b}{2}$$

$a > b$ より $a - b > 0$，$-1 \leqq \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq 1$ であるから

印刷本

$$-(a-b)+\frac{a+b}{2} \leqq (a-b)\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{a+b}{2} \leqq (a-b)+\frac{a+b}{2}$$

ゆえに $\quad \dfrac{-a+3b}{2} \leqq f(x) \leqq \dfrac{3a-b}{2}$

したがって $\quad \dfrac{3a-b}{2}=6,\ \dfrac{-a+3b}{2}=2$ $\quad$ これを解いて $\quad \boldsymbol{a=5,\ b=3}$

(2) (1) の結果から $\quad f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+4$

$f(x)>5$ より $\quad \sin\left(2x+\square\right)>\dfrac{1}{2}$ $\quad \cdots$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $\quad \dfrac{\pi}{6} \leqq 2x+\dfrac{\pi}{6} \leqq$

この範囲で ① を解くと

$$\frac{\pi}{6}<2x+\frac{\pi}{6}<\frac{5}{6}\pi \quad \text{す}$$

11.27 (1) $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha$ $\qquad +b^2}$ とす

$$a\cos\theta-b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\ \alpha-\sin$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos($$

(の結果 $\quad b=1$ を代入すると $\quad \alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ より

$\sqrt{}$ $\quad \sin\theta=\boldsymbol{2\cos(\theta}$

$\boldsymbol{30^\circ\times n}$ **(**$\boldsymbol{n}$ **は整数)**

) の結 用す

$-\sin\theta=\sqrt{}$ $+45^\circ)$

$\theta \leqq 1$, $\quad 45$ であるから

$=45^\circ$ す $\quad \boldsymbol{=0^\circ}$**のとき** $\quad$ **最大値 1**

180° すなわち $\quad \boldsymbol{\theta=135^\circ}$**のとき** $\quad$ **最小値** $\boldsymbol{-\sqrt{2}}$

11.28 (1) $\quad t=\sin$ $\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$x-\dfrac{\pi}{3}=\theta$ と $\quad t=2\sin\theta\cdots$① であるから

$$\sqrt{3}\sin\ \cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left\{2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{6}\right\}$$
$$=2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2\theta$$
$$=2(1-2\sin^2\theta)=2-(2\sin\theta)^2=2-t^2$$

印刷本

また　　$2\sin x - 2\sqrt{3}\cos x = 2(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 2t$

よって　　$y = (2 - t^2) + 2t = \boldsymbol{-t^2 + 2t + 2}$

(2) ① より $0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$　ゆえに　$-\sqrt{3} \leqq t \leqq \sqrt{3}$

(1) の結果から　$y = -(t-1)^2 + 3$

よって

$t = 1$　　すなわち　$\theta = \dfrac{\pi}{6}\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき　**最大値 3**

$t = -\sqrt{3}$　すなわち　$\theta =$　　) のとき　**最小値 $-2\sqrt{3} - 1$**

11.29　(1)　　$t = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sin\left($

$0 \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ より　$\dfrac{\pi}{6} \leqq x + \dfrac{\pi}{6} <$　　$t \leqq 2$

(2)　　$t^2 = (\cos x +$　　$x)^2$

$= \cos^2 x$　　$3\cos x \sin$　　$\sin^2 x$

$= 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x \sin$

よ　　$= \log_2\{(\cos x + \sqrt{3}\sin x)$

$+(2\sin^2 x + 2$　　$x \sin x + 1) + 1$

$\boldsymbol{(t+2) + t^2 + 1}$

(3)　(2)　　果から

$g(t_2) - g(t_1) = \log_2($　　$+ 2) +$　　$- \{\log_2(t_1 + 2) + {t_1}^2 + 1\}$

$\dfrac{t_2 + 2}{}$　　$+ 2} + (t_2 -$　　$- t_1)$

$t_1 <$　　るから　　$+ t_1 > 0,\ t_2 > t_1$

　　$) - g(t_1) >$　　って　$g(t_2) > g(t_1)$

(4)　$g(t)$　　単調増　　うるから，$f(x)$ の最大値・最小値はそれぞれ

$g(2)$　　$(2+2) + 2^2 + 1 = 7,\quad g(0) = \log_2 2 + 1 = 2$

$t =$　　とき　$2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 2$　すなわち　$x = \dfrac{\pi}{3}$

$t =$　　のとき　$2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$　すなわち　$x = \dfrac{5}{6}\pi$

よって　　最大値 **7**　$\left(\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{3}}\right)$,　　最小値 **2**　$\left(\boldsymbol{x = \dfrac{5}{6}\pi}\right)$

印刷本

11.30 (1) $a=4$，$b=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ であるから，余弦定理により

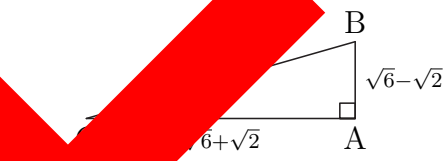
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-4^2}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=0$$

よって　　$\boldsymbol{A=90^\circ}$

(2) (1) の結果から，右図により

$$\sin B=\frac{\boldsymbol{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\boldsymbol{4}}$$

$$\cos B=\frac{\boldsymbol{\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{\boldsymbol{4}}$$



(3) 加法定理から

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ&=\sin(45\\&=\sin\ \ 30^\circ+\ \ ^\circ\\&=\frac{}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

B ろから，上式および (2) の結 $=7$

11.31 ∠AP BPH とおくと　　tan ，　$\tan\beta=\dfrac{b}{x}$

$\theta=$ より $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$\frac{\frac{a}{x}-\frac{b}{x}}{1+\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{x}}=\frac{\boldsymbol{(a-b)x}}{\boldsymbol{x^2+ab}}$$

0，$\dfrac{ab}{}$ ある 相乗平均の関係により

$$x+\frac{ab}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{ab}{x}}=2\sqrt{ab}$$

$a-b>0$ より $\tan\theta=\dfrac{(a-b)x}{x^2+ab}=\dfrac{a-b}{x+\dfrac{ab}{x}}\leqq\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$

上式において，等号が成立するのは，$x=\dfrac{ab}{x}$，すなわち $x=\sqrt{ab}$ のとき，

$\tan\theta$ は最大となり，θ もこのとき最大となる

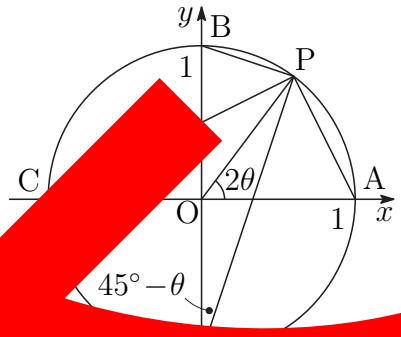
よって　　$\boldsymbol{x=\sqrt{ab}}$

見本

11.32 (1) $\angle \mathrm{POA} = 2\theta$ より，$\angle \mathrm{PCA} = \theta$，$\angle \mathrm{APC} = 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{PC} = \mathrm{CA}\cos\theta = \boldsymbol{2\cos\theta}$$

(2) (1) と同様に



$$\mathrm{PA} = \mathrm{CA}\sin\theta = 2\sin\theta$$

$\angle \mathrm{POB} = 90^\circ - 2\theta$ であるから

$$\angle \mathrm{PDB} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{POB} = 45$$

$\angle \mathrm{DPB} = 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{PD} = \mathrm{DB}\cos(45^\circ - \theta) = 2\cos$$

したがって

$$\mathrm{PA} + \mathrm{PC} \quad \text{m}\,\theta + 2\cos \quad \sqrt{2}\cos$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{PC} - \mathrm{PD} = 2\sqrt{2}\cos(45^\circ - \quad 2\cos$$

$$= 2(\sqrt{2}-1)\cos$$

$\leqq \theta <$ から $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \cos(45^\circ \quad < 1$

よ **2** $\quad$ **+ PC − PD ≦ 2(√2 − 1)**

3 積の $\quad$ っ $\quad S \quad \sin\theta$ ゆえ $\quad$ **in θ = 2S/bc**

理に $\quad = \dfrac{\boldsymbol{b^2 +} \quad \boldsymbol{^2}}{}$

(2) $\quad$ 理を適用 $\quad$ の結果により

$$\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AD}\cos(\theta + 60^\circ)$$

$$b^2 + c^2 - 2bc(\cos\theta\cos 60^\circ - \sin\theta\sin 60^\circ)$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{1}{2} - \frac{2S}{bc}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) + 2\sqrt{3}S \quad \cdots(*)$$

$(*)$ は，a，b，c に関する対称式であるから $\quad \mathrm{DC}^2 = \mathrm{EA}^2 = \mathrm{FB}^2$

見本

(3) $T = \dfrac{1}{3}(\triangle\mathrm{BCE} + \triangle\mathrm{CAF} + \triangle\mathrm{ABD})$ であるから

$$T = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ + \frac{1}{2}b^2\sin 60^\circ + \frac{1}{2}c^2\sin 60^\circ\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + c^2)$$

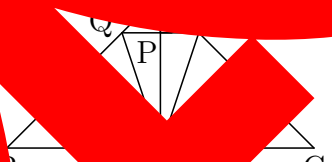
ゆえに　　$a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}T$

これを $(*)$ に代入すると

$$\mathrm{DC}^2 = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}T \qquad + \boldsymbol{T})$$

11.34　(1) 求める三角比は，三角形の大きさに関

ないので，右の図において AP =



$\mathrm{PM} = 3$，$\mathrm{PQ} = \mathrm{PR} = 1$　2,

$\mathrm{MQ} = \mathrm{MR} = \sqrt{3^2}$　$\sqrt{10}$

余弦定理により

$$\mathrm{QMR} = \frac{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 -}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}$$

$= 4$　$\sqrt{0}$，$\mathrm{BQ} = 3\sqrt{2}$ である　余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{Q} \qquad \frac{(\sqrt{10})^2 - (3\sqrt{2})}{4\cdot\sqrt{10}} = \frac{6 + 10 - 18}{2\cdot 4\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

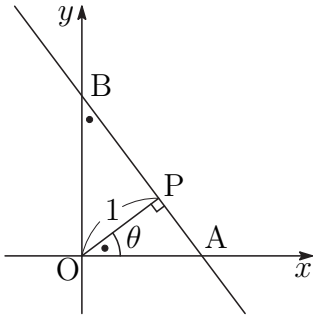
(1) の　ら　c　$\mathrm{MR} = 2\cos$　$\mathrm{R} - 1 = 2\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 - 1 = \dfrac{7}{25}$

と　$\dfrac{\sqrt{10} - 14}{25}$　$\dfrac{50 - \sqrt{196}}{50} > 0$

R，∠QMB　あるから　　$\boldsymbol{2\angle\mathrm{QMR} > \angle\mathrm{QMB}}$

別解　(九　　]20

11.35　(1) 右の図から



O　$\dfrac{\mathrm{OP}}{\cos\theta} = \dfrac{1}{\cos\theta}$

OB　$\dfrac{\mathrm{OP}}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta}$

$\mathrm{AB} = \dfrac{\mathrm{OB}}{\cos\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

印刷本

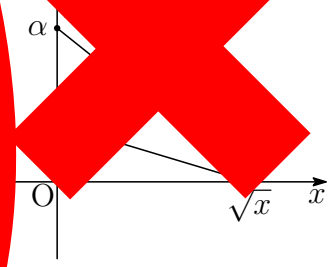
よって　　$\mathbf{OA+OB-AB=\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{OA+OB-AB}&=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2(\sin\theta+\cos\theta-1)}{2\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{2(\sin\theta+\cos\theta-1)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}\\&=\frac{2(\sin\theta+\cos\theta-1)}{(\sin\theta+\cos\theta+1)(\sin\theta+\cos\theta-1)}\\&=\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta+1}=\frac{2}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+1}\end{aligned}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最小

11.36　(1) 右の図から



$$\sin\angle\mathrm{OPB}=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{PB}}=\frac{\alpha}{\sqrt{x+\alpha^2}}$$

$$\mathrm{PB}=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PB}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\alpha^2}}$$

$$\sin\angle\mathrm{OPA}=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{PA}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$\cos\angle\mathrm{OPA}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

よって

$$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{OPB}-\angle\mathrm{O}$$

$$\sin\angle\mathrm{OPB}\cos\angle\mathrm{O}\quad\cos\angle\mathrm{OPB}\sin\angle\mathrm{OPA}$$

$$=\frac{\alpha}{\sqrt{x+\alpha^2}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\alpha^2}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\alpha^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{(\alpha-1)\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)(x+\alpha^2)}}$$

(2) (1) の結果から

$$f(x)=\frac{(\alpha-1)\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)(x+\alpha^2)}}=\frac{(\alpha-1)\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+(\alpha^2+1)x+\alpha^2}}$$

$$=\frac{\alpha-1}{\sqrt{x+(\alpha^2+1)+\dfrac{\alpha^2}{x}}}=\frac{\alpha-1}{\sqrt{\left(\sqrt{x}-\dfrac{\alpha}{\sqrt{x}}\right)^2+(\alpha+1)^2}}$$

印刷本

$\alpha > 1$ より　$\sqrt{x} - \dfrac{\alpha}{\sqrt{x}} = 0$　すなわち　$x = \alpha$ のとき，最大値

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\sqrt{(\alpha+1)^2}} = \boldsymbol{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}}$$

をとる．

(3) (2) の結果から　$\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1} = \dfrac{1}{2}$　$\alpha > 1$ に注意してこれ　と　$\boldsymbol{\alpha = 3}$

11.37　(1) 直角三角形 ABD において

AD = AB sin B　$\cdots$(

正弦定理を △ABC に適用すると

$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C} = 2R$ より　AB = 2

② を ① に代入すると

AD = $2R \sin B \sin C$　$\cdots$③

円周角と中心角の定理によ　$2A$

と，△　OE であるから　∠B　$\dfrac{1}{2}$∠BOC = A

OB　ある　OE において　C　cos A　$\cdots$④

(2)　C の重　は，　上にあ　ら，G と O が一致するとき，直
AE に　の垂　分線であ　CA = AB

同様　CA　F とすると，　CA

中線　　G と　致するとき，直線 BF は辺 CA
直二　である

C = CA よ　ABC は正三角形である．

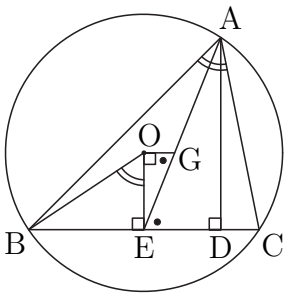
(3) OG　よ　EGO ∽ △AED

EG : GA = 1　あるから

OE : AD　3　ゆえに　AD = 3OE

③，④ を　代入すると

$$2R \sin B \sin C = 3R \cos A$$



見本

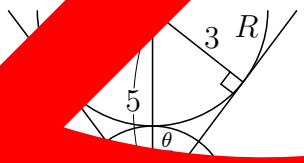
$A+B+C=\pi$ より $\cos A=-\cos(B+C)$ であるから

$$\begin{aligned}2\sin B\sin C&=-3\cos(B+C)\\&=-3(\cos B\cos C-\sin B\sin C)\end{aligned}$$

ゆえに　$3\cos B\cos C=\sin B\sin C$　よって　$\tan B\tan C=3$

別解　(九大 [文]2014) 3

11.38　(1) 右の図から　$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{5}$



$0<\theta<\pi$ より，$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ で

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

よって　$\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos$　$=\dfrac{3}{5}\times$

(2) $\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{5}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　$\sin\dfrac{\pi}{6}<\sin\dfrac{\theta}{2}<$

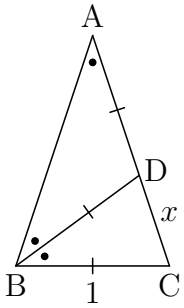
$<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$　よって　$\dfrac{\pi}{3}<$

$\alpha=\dfrac{\pi}{}$ る．　$A=\alpha$，$B=C$　であ

る　三角形　　ZB の二等分線と CA との

　と D と　　BC　　$=$ AD $=$　　CD $=x$ と

くと　　BC $=$　　CD である



$+x)$:　　えに　x^2　　$=0$

　　てこれを解　　$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

△　　理を適用すると，$x^2=1-x$ であることに注意して

$$\cos\alpha=\frac{1^2+1^2-x^2}{2\cdot1\cdot1}=\frac{x+1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

ここで　$\dfrac{\sqrt{5}}{}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{5\sqrt{5}-11}{20}=\dfrac{\sqrt{125}-\sqrt{121}}{20}>0$

したがって　$\cos\alpha>\cos\dfrac{\theta}{2}$　ゆえに　$\alpha<\dfrac{\theta}{2}$　すなわち　$\dfrac{2}{5}\pi<\theta$

上式および (2) の結果から　　$\dfrac{2}{5}\pi<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

印刷本

これから　　$4 < \dfrac{2\pi}{\theta} < 5$

よって，配置できる半径 3 の円の最大個数は　**4** (個)

11.39　(1) △CPA，△AQB，△BRC に正弦定理を適用すると

$$r_1 = \frac{b}{2\sin\angle \mathrm{CPA}} = \frac{b}{2\sin 60^\circ} = \boldsymbol{b}$$

$$r_2 = \frac{c}{2\sin\angle \mathrm{AQB}} = \frac{c}{2\sin\square} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

$$r_3 = \frac{\square}{2\sin\angle\square} = \boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{3}}}$$

(2) (中心角) = 2 × (円周角) であるから

$$\angle \mathrm{CO_1A} = \square \times 120^\circ$$

$$\angle \mathrm{AO}\square = \square \times \angle \mathrm{AQ}\square \times \square^\circ$$

$$\angle \mathrm{B}\square = \square \times \angle \mathrm{BRC} \times 60^\circ$$

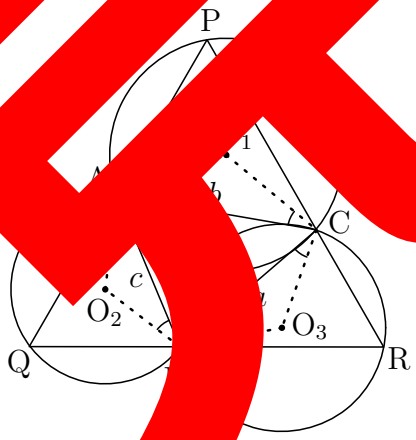
△C□，△$\mathrm{AO_2B}$，△$\mathrm{BO_3C}$ は，二等辺三□であ□の三角形□である．$\angle \mathrm{O_1AO_2}$ について

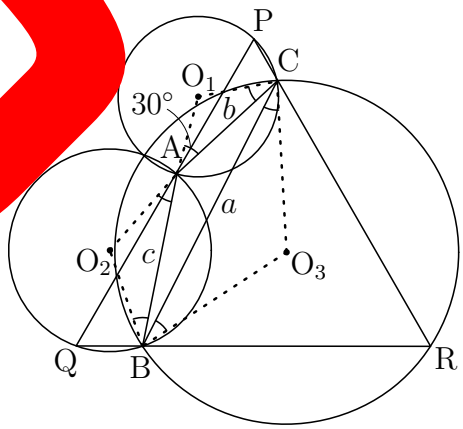
∠CA□のとき (図 1)　　$\angle \mathrm{O_1}$□ $= 60^\circ + \angle \mathrm{CAB}$

∠□□□き (図 2)　　$\angle \mathrm{O}$□ $= 360^\circ - (60^\circ + \angle \mathrm{CAB})$

こ□□場合に□もに　$\cos\angle \mathrm{O_1AO_2} = \cos(60^\circ + \angle \mathrm{CAB})$

図□





見本

△O_1AO_2 に余弦定理を適用すると，(1) の結果から

$$\begin{aligned}\overline{O_1O_2}^2 &= {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos\angle O_1AO_2\\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3}\cos(60^\circ + \angle CAB)\\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3}(\cos 60^\circ\cos\angle CAB - \sin 60^\circ\sin\angle CAB)\\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{1}{3}bc\cos\angle CAB + \frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{\ }\ \angle CAB\end{aligned}$$

△ABC の面積を S とする．また，余弦定理に

$$\begin{aligned}\overline{O_1O_2}^2 &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{\ }{3}\ \ + \frac{2\sqrt{3}}{3}S\\ &= \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2\ \ )\end{aligned}$$

このとき，式の対称性から

$$\overline{O_2O_3}^2 = \frac{1}{6}(a^2 + \ \ ^2)\ \ $$

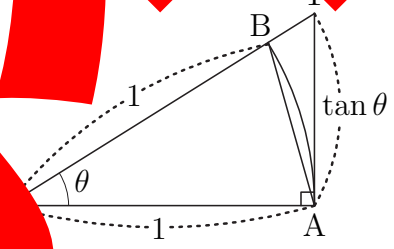
したがって　　$O_1O_2 = O_2\ \ _3 = O_3O_1$

よって　$O_1O_2O_3$ は，正三角形である．

11.40 右の図のように，半径が 1，中心角が θ の扇形 OAB において，点 A における円の接線と，半径 OB の延長との交点を T とすると，面積について

$$\triangle OAB < \text{扇形 }OAB < \triangle OAT$$

が成り立つ．



すなわち　$\sin\theta < \theta < \tan\theta$

$\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ と加法定理により

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}\cdot 1} = 2 - \sqrt{3}$$

見本

したがって　$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} < \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} < 2-\sqrt{3}$

$3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} < \pi < 24 - 12\sqrt{3}$

12.1 $t = 2^x$ とおくと $(t > 0)$，方程式 $2\cdot 8^x - 3\cdot 4^{x+1} + 5\cdot 2^{x+1} + 24 = 0$ は

$2t^3 - 12t^2 + 10t + 24 = 0$　ゆえに　$(t+1)(t-3)(t-4) = 0$

$t > 0$ より　$t = 3,\ 4$　ゆえに　$2^x = 3,\ 4$　すなわち　$x = \log_2 3,\ \mathbf{2}$

12.2 $t = 3^x$ とおくと $(t > 0)$，不等式 $3^{3x} - 3^{2x+1} - 3^{x+1} + 3 < 0$ は

$27t^3 - 21t^2 - 7t + 1 < 0$　ゆえに　$(t-1)(3t+1)^2 < 0$

$t > 0$ より　$\dfrac{1}{9} < t < 1$　ゆえに　$\dfrac{1}{9} < 3^x < 1$

12.3 与えられた方程式から　$(2^x)^2 - 2^{a+1}\cdot 2^x + 2^{2a} - 4 = 0$

$X = 2^x$ とおくと　$X^2 - 2^{a+1}X + 2^{2a} - 4 = 0$　$\cdots(*)$

$(*)$ の解を α, β とすると

$\alpha + \beta = 2^a > 0$,　$\alpha\beta = 2^{2a} - 4 > 0$

(判別式) $D = (-2^{a+1})^2 - 4\cdot 2^{2a} - 4 = 2^{2a+2} - 4 = 4(2^{2a} - 1)$

$D > 0$ となるとき，$(*)$ は異なる2つの実数解をもつ．

このとき，与えられた方程式は，実数解をもつ．

よって　$2^{2a} - 4 \geqq 0$　すなわち　$a \geqq \mathbf{2}$

12.4 $a = 4$ のとき　$f(x) = 0$ は

$(2^x)^2 - 3\cdot 2^x + 4 = 0$　ゆえに　$(2^x - 2)(2^x - 4) = 0$

したがって　$2^x = 2,\ 4$　これを解いて　$\boldsymbol{x = 1,\ 2}$

(2) このとき，$f(x) = 0$ は

$(2^x)^2 - a\cdot 2^x = 0$　ゆえに　$2^x(2^x - 2a) = 0$

$2^x > 0$ であるから，$a > 0$ に注意して

$2^x = 2a$　これを解いて　$\boldsymbol{x = 1 + \log_2 a}$

見本

(3) $t=2^x$ とおくと，$t>0$ で，方程式 $f(x)=0$ は

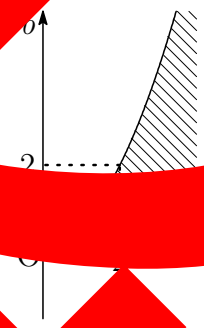
$$\frac{1}{2}t^2-at+b=0 \quad \text{すなわち} \quad t^2-2at+2b=0$$

この方程式が異なる 2 つの正の実数解を α，β とすると，係数について

$$\alpha+\beta=2a>0, \quad \alpha\beta=2b>0, \quad D/4=(-a)^2-2b>0$$

したがって　$a>0$，$b>0$，$b<\frac{1}{2}a^2$

よって，求める領域は，右の図の[illegible]分であ[illegible]
ただし，境界線を含まない．



別解 (大分大学 2014) 5

12.5 (1)(ア)　$2^x+2^{-x}=(2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}})^2+2$

[illegible]$=0$　すなわち　$\boldsymbol{x=0}$ のと[illegible]

[illegible]$=2$[illegible]と，$2^x+2^{-x}=k\cdots①$

[illegible]$=k$　すなわち　[illegible]$kt+1=0$

$k>2$[illegible]して[illegible]を解く[illegible]$=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$

[illegible]に　$2^x=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$　よって　$\boldsymbol{x=\log_2\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}}$

[illegible]式 $4^x-3a\cdot 2[illegible]+1)=0\cdots(*)$ を変形すると

$$(2^x+2^{-x})^2-3a(2^x+2^{-x})+2a^2=0$$

① から　$k^2-3ak+2a^2=0$　ゆえに　$(k-a)(k-2a)=0$　$\cdots②$

(1) の結果より $k\geqq 2$ であるから，② の実数解は，$a\leqq 2$ に注意して

$2a<2$	すなわち	$a<1$ のとき	実数解はない
$2a=2$	すなわち	$a=1$ のとき	$k=2$
$a<2<2a$	すなわち	$1<a<2$ のとき	$k=2a$
		$a=2$ のとき	$k=2,\ 4$

① が実数解をもつのは，$k\geqq 2$ のときで，$k=2$ のとき実数解は 1 個，

印刷

$k > 2$ のとき実数解は 2 個であるから，方程式 $(*)$ の実数解の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a < 1 \text{ のとき}} & \boldsymbol{0 \text{ 個}} \\ \boldsymbol{a = 1 \text{ のとき}} & \boldsymbol{1 \text{ 個}} \\ \boldsymbol{1 < a < 2 \text{ のとき}} & \boldsymbol{2 \text{ 個}} \\ \boldsymbol{a = 2 \text{ のとき}} & \boldsymbol{3 \text{ 個}} \end{cases}$$

12.6 $\log_2 \dfrac{1}{6} + \log_2 \dfrac{3}{4} = \log_2 \dfrac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = \boldsymbol{-3}$

12.7 $\log_3 5 = \dfrac{\log_9 5}{\log_9 3} = \log_3 9 \log_9 5 = 2 \log_9 25$

$\dfrac{1}{2} + \log_9 8 = \dfrac{1}{2} \log_9 9 + \log_9 8 = \log_9 3 + \log_9$

$\log_9 24 < \log_9 25 < \log_9 26$ より

$$\boldsymbol{\frac{1}{2} + \log_9 \log_3 5 \log_9 2}$$

12.8 $0 < a < b < 1$ より　$\log_a a > \log_a b$,　$\log_b a$ b

$\log_a a =$ であるから　$\log_a b < 1 <$

よって $\boldsymbol{\log_a \log_b a}$

12.9 $\log_a y$, き，2 式の両辺を a する対数をとると

$\log_a b$　$\log_a c = \log_a y^{\log_a x}$

$\log_a y$　$= \log_a x \log_a y$

に　$\log_a$　わち　$b = c$　て　$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

12.1 $= 10$

a, 0 数である　1 でない正数.

したが　$M = \dfrac{1}{\log_M 3}$　ゆえに　$\log_M 3 = \dfrac{1}{a}$

$b =$　$M = \dfrac{1}{\log_M 5}$　ゆえに　$\log_M 5 = \dfrac{1}{b}$

c　$M = \dfrac{1}{\log_M 7}$　ゆえに　$\log_M 7 = \dfrac{1}{c}$

$a = \log_{105} M = \dfrac{1}{\log_M 105}$　ゆえに　$\log_M 105 = \dfrac{1}{d}$

$\log_M 3 + \log_M 5 + \log_M 7 = \log_M 105$ であるから　$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{d}$

印刷本

12.11 $\log_8 b = \dfrac{\log_2 b}{\log_2 8} = \dfrac{1}{3}\log_2 b$, $\log_8 c = \dfrac{\log_2 c}{\log_2 8} = \dfrac{1}{3}\log_2 c$ を

$$\log_2 a - \log_8 b = \log_2 b - \log_8 c, \qquad \frac{\log_2 a}{\log_8 b} = \frac{\log_2 b}{\log_8 c}$$

に代入して整理すると

$$3\log_2 a - 4\log_2 b + \log_2 c = 0, \qquad \frac{\log_2 a}{\log_2 b} = \log$$

$k = \dfrac{\log_2 a}{\log_2 b} = \dfrac{\log_2 b}{\log_2 c}$ とおくと，$\dfrac{\log_2 a}{\log_2 c}$ ^{2} であるから 第 1 式から

$$3\cdot\frac{\log_2 a}{\log_2 c} - 4\cdot\frac{\log_2 b}{\log_2 c} + 1 = 0 \qquad 4k + 1 = 0$$

a，b，c は互いに異なる実数であるから

ゆえに $\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b} = \dfrac{\log_2 b}{\log_2 c} = \dfrac{1}{3}$ よ **$\log_2$ $c = $ 9**

12.12 $\log_2 2b = \log_2 b$ $\log_2 4b = \log$ 2

2 次方程式 $(2a+5)x + a + 3 = 0$ の解が $\log$ 1，$\log$ るから，解と係数 より

$b+$ $b+2) = 2a+5$, $(\log$ $)(\log_2 b + 2) = a$ 3

第 1 式 $+1 \cdots$ ①．これを に代入すると

$(a+2$ $+3$ これを解いて $a = -1, -3$

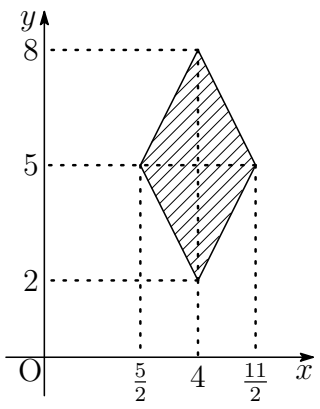
① $a =$ のとき $= 0$ すなわち $b = 1$

-3 の $\log_2 b = -2$ すなわち $b = \dfrac{1}{4}$

(a $(-1,$

12.13 (1) $\leqq 3$ の表す は，4 点 $(\frac{3}{2},$ $(0,$ ^{3,} $0)$，$(0,-3)$ を頂点とする四角形の びその内部である．

不等式 $2|x -$ $-5| \leqq 3$ の表す領域 A は，$2|x| +$ の表す領域を x 軸方向に 4，y 軸 5 だけ平行移動したものであるから，A の表す領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



印刷本

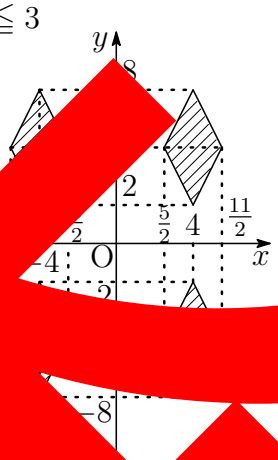
(2) $f(x,\ y)=2|x-4|+|y-5|$，$g(x,\ y)=2\Big||x|-4\Big|+\Big||y|-5\Big|$ とおく．
$f(x,\ y)\leqq 3$ の表す領域 A の点 $(x_1,\ y_1)$ は，(1) の結果から $x_1>0$，$y_1>0$ であり，$g(x,\ y)=f(|x|,\ |y|)$ が成り立つから

$$g(\pm x_1, \pm y_1)=f(x_1,\ y_1)\leqq 3$$

$g(x,\ y)\leqq 3$ の表す領域は B であるから

$(x_1,\ y_1)\in A \quad\Longrightarrow\quad (\pm x_1, \pm y_1)$ B

したがって，B の表す領域は，A
を x 軸，y 軸，原点に関して対称移
ものである．よって，B の表す領域
の図の斜線部分である．ただし，
含む．



(3) x，$|y|$ は正の整数であるた 域 B 内の いて $(x,\ |y|)$ の組は，次のとおりであ

=(3, 4), (3, 5), (3, 6),
2), (4, 3), (4, 4), (4, (4, 7), (4,
(5, 5), (5, 6)

lo $\frac{m}{n}$ ( ) とおくと

$|y|$ ゆえ $^m=|y|^n \quad \cdots$①

素因 の一 り，① を満た は

$(x,$ 4), (4, 8), (5, 5)

$x,\ y)$ の組 組である．

$=(4,\pm 2),\ (4,\pm 4),\ (4,\pm 8),\ (5,\pm 5)$

12.14 与えられた方程式 $2|\log_2 x|^2-7|\log_2 x|-4=0$

ここで，$t=|\log$ おくと $(t\geqq 0)$

$$2t^2-7t-4=0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-4)(2t+1)=0$$

$t\geqq 0$ より $t=4$ ゆえに $\log_2 x=\pm 4$ よって $x=2^{\pm 4}=\mathbf{16},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}$

印刷本

12.15 $\log_{10} x - 3\log_x 10 = 2$ より

$$\log_{10} x - \frac{3\log_{10} 10}{\log_{10} x} = 2 \quad \text{整理すると} \quad (\log_{10} x)^2 - 2\log_{10} x - 3 = 0$$

したがって　$(\log_{10} x + 1)(\log_{10} x - 3) = 0$

ゆえに　$\log_{10} x = -1,\ 3$　よって　$\boldsymbol{x = \frac{1}{10},\ 1000}$

12.16 $\log_5(1 - 4\cdot 5^x) = 2x + 1$ より

$$5^{2x+1} = 1 - 4\cdot 5^x \quad \text{ゆえに} \quad 5^{2x} + 4\cdot 5^x - 1 = 0$$

$X = 5^x$ とおくと　$5X^2 + 4X - 1 = 0$　ゆえに

$X > 0$ に注意して　$X = \frac{1}{5}$　すなわち　$\boldsymbol{x = -1}$

12.17 真数は正であるから

$$a - b > 0,\quad a > 0,\quad b > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a}{b} > 1$$

$2\log_{10}(a - b) = \log_{10} a + \log_{10} b$ より

$(a - b)^2 = \log_{10} ab$　すなわち　$(a - b)^2 = ab$

ゆえに　$a^2 - 3ab + b^2 = 0$　したがって　$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{b}\right) + 2 = 0$

$\frac{a}{b} > 1$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$

12.18 真数は正であるから

$4x - 7 > 0,\quad x > 0,\quad x - 1 > 0$　ゆえに　$x > \frac{7}{4}$　$\cdots$①

与えられた方程式は

$$\log_4(4x - 7) + \log_4 x^2 = \log_4 4 + \log_4 (x - 1)^3$$
$$\log_4 (4x - 7)x^2 = \log_4 4(x - 1)^3$$

ゆえに　$(4x - 7)x^2 = 4(x - 1)^3$　整理すると　$5x^2 - 12x + 4 = 0$

したがって　$(x - 2)(5x - 2) = 0$　これを① に注意して解くと　$\boldsymbol{x = 2}$

見本

12.19 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ より，$0 < \sin\theta < 1$，$0 < \cos\theta < 1$ であるから

$$\log_{\sin\theta}\cos\theta > 0$$

条件から　　$\log_{\sin\theta}\cos\theta = 1,\ 2$

i) $\log_{\sin\theta}\cos\theta = 1$ のとき

$$\cos\theta = \sin\theta \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\sin\theta =}$$

ii) $\log_{\sin\theta}\cos\theta = 2$ のとき

$$\cos\theta = \sin^2\theta \quad \text{ゆえに}$$

$\cos\theta > 0$ に注意して，これを解

よって　　$\sin\theta = \sqrt{\cos$ $\boldsymbol{\sqrt{5}-1}{2}$

12.20 (1) $\alpha\beta$ $\log_b c\cdot\log_c a = \log_a b \times \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$ $\dfrac{1}{a}$

$\log_b a +$ $= -\dfrac{11}{3}$ より

$\log_a b}$ $+$ $b\,c$ $= -\dfrac{11}{3}$　すなわち　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma} = -\dfrac{11}{3}$

(1) の

$\alpha\beta\gamma\left(\dfrac{1}{}+\right.$ $\dfrac{11}{}$　　$\boldsymbol{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = -\dfrac{11}{3}}$

(3) $x^3 - 5x^2 +$ $+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - 3\alpha\beta\gamma = 0$

上式に (1)，　結果を代入すると

$3x^3 - 5x$ $x - 3 = 0$　すなわち　$(x+1)(3x+1)(x-3) = 0$

この方程式 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ であるから $(\alpha < \beta < \gamma)$

$$\boldsymbol{\alpha = -1,\ \beta = -\frac{1}{3},\ \gamma = 3}$$

見本

12.21 真数は正であるから

$$x-1>0 \text{ かつ } x+1>0 \quad \text{すなわち} \quad x>1 \quad \cdots ①$$

不等式から $-\log_3(x-1)+\log_3(x+1)>3$ ゆえに $\log_3\dfrac{x+1}{x-1}>\log_3 27$

底 3 は 1 より大きいから $\dfrac{x+1}{x-1}>27$

① に注意して，これを解くと $\mathbf{1<}$ $\dfrac{\mathbf{14}}{\mathbf{3}}$

12.22 真数は正であるから

$$2x-1>0 \quad \text{かつ} \quad x-1>0$$

与えられた不等式から $\log$

底 a は $0<a<1$ であるから $1)(x$ $\geqq$

$x(2x$ >0

① に注意し $\boldsymbol{x}$ $\geqq$

12.23 x の不 $)\geqq\log_{a^2}(x+11)$ の真数は

$x+11>0$ すな $>1 \quad \cdots ①$

$\log_a(x$ $\log_{a^2}$ るから，与えられた不等式は

1 $-1)^2\geqq$ $+11)$

$a<$ ，$0<$ あるから

$)^2\leqq x$ $(x+2)(x-5)\leqq 0$

① に 解くと $<\boldsymbol{x}\leqq\mathbf{5}$

12.24 $\log_a(x$ $-\log_a(x-1)>\log_a(9x-7)$

真数は正であるか

$x+6>$ $-1>0$, $9x-7>0$ すなわち $x>1 \quad \cdots ①$

与えられ不等式から $\log_a(x+6)(x-1)>\log_a(9x-7) \quad \cdots (*)$

印刷本

i) $a > 1$ のとき，$(*)$ から

$$(x+6)(x-1) > 9x-7 \quad \text{ゆえに} \quad x^2-4x+1>0$$

① に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{x > 2+\sqrt{3}}$

ii) $0 < a < 1$ のとき，$(*)$ から

$$(x+6)(x-1) < 9x-7 \quad \text{ゆえに} \quad x^2-$$

① に注意して，これを解くと

12.25 $b = \dfrac{1}{a}$ より，$\log_b |x-5| = -\log_a |x-5|$

$$\log_a \left($$

$$\log_a \frac{|(x-1)$$

$a > 1$ のと

$$< \frac{|(x-1)(x-5)|}{3} \leqq 1$$

$$-1)(x-5) < 0, \quad 0 < (\quad (x- \quad) \leqq 3$$

$a <$

$$\frac{|}{} \geqq 1$$

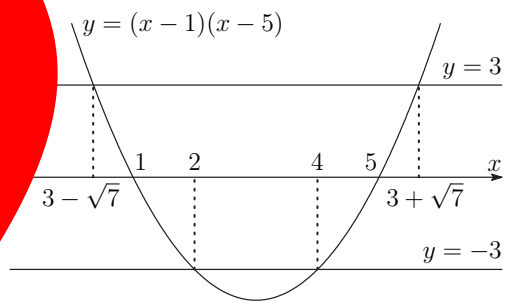
$$-1)(x \quad \leqq -3, \quad (x-1)(x-5)$$

で　$(x-5$　解いて　x　$\sqrt{7}$

$-1)(x$　解いて　4

$= (x-5)$ と

$y = -3$ の位置関係は，下の図のようになる。



見本

よって，求める不等式の解は

$a > 1$ のとき

$\boldsymbol{3-\sqrt{7} \leqq x < 1,\ 1 < x \leqq 2,\ 4 \leqq x < 5,\ 5 < x \leqq 3+\sqrt{7}}$

$0 < a < 1$ のとき

$\boldsymbol{x \leqq 3-\sqrt{7},\ 2 \leqq x \leqq 4,\ 3+\sqrt{7} \leqq x}$

12.26 $\log_a(a-x-y) > \log_a x + \log_a y \quad \cdots (*)$

$(*)$ において，真数は正であるから

$a-x-y > 0$ か[illegible] > 0

すなわち $x > 0,\quad y > 0,\quad x+y$[illegible]

$(*)$ から $\log_a(a-x-y) > \log_a x$[illegible]

i) $0 < a < 1$ のとき，② から

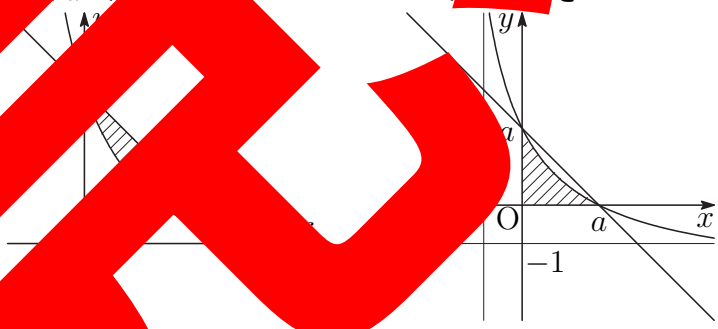
$a-x-y <$[illegible] なわち $($[illegible]$(y+$

ii) $1 < a$[illegible] き，② から

$x-y > xy$ すなわち $(x$[illegible]$a+$

i) [illegible] および [illegible] 求める領域は，次のよ[illegible]る．

$a <$[illegible] $1 <$[illegible] き



境界線を含まない 境界線を含まない

12.27 (1) $\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos$[illegible] 1 より $\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq \log_2 2$

したがって $\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 2$

ゆえに $\frac{5}{2}+\cos\theta < 3$ すなわち $\cos\theta < \frac{1}{2}$

$0° < \theta < 180°$ より $\boldsymbol{60° < \theta < 180°}$

見本

(2) $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ より

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2\sin\theta\geqq\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって $\sin\theta\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より $\quad \boldsymbol{45^\circ\leqq\theta\leqq 135^\circ}$

(3) $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 0$ であるから $\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq\log_2 1$

したがって $\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leq$

ゆえに $\dfrac{5}{2}+\cos\theta<2$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より $1<\quad<180^\circ$

次に $\left[\quad+\log_2\sin\theta\right]\geqq 0$ であるから

$\sin\theta\geqq 0$ ゆえに $\theta\geqq\log_2\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$<\theta<$ より $\theta\leqq 180$ $\cdots$②

①②共通範囲 $\boldsymbol{120^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ-\alpha}$

12.28 $x>$ であるから $x>0$

すなわち $0<x<6$

また $f(x)=\log_2 x(6-x)^2$

ここで，$g(x)=x(6-x)^2$ とおくと

$$g'(x)=3(\quad)(x-2)$$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	極大 32	↘	

$g(x)$ の増減表は うになる．

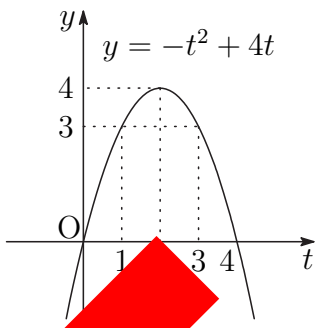
したがって，$g(x)$ は $x=2$ で極大かつ最大となり，$g(x)$ が最大値をとるとき，$f(x)$ も最大値をとる．

よって，$f(x)$ は，$\boldsymbol{x=2}$ **で最大値** $\log_2 32=\boldsymbol{5}$ をとる．

見本

12.29 (1) $y=-(\log_a x)^2+4\log_a x$ より

$$\boldsymbol{y=-t^2+4t}$$



(2) $0 \leqq y \leqq 3$ のとき　$0 \leqq -t^2+4t \leqq 3$

ゆえに　$\begin{cases} -t^2+4t \geqq 0 \\ -t^2+4t \leqq 3 \end{cases}$

これを解いて　$\boldsymbol{0 \leqq t \leqq 1,\ 3 \leqq t \leqq 4}$

(3) (2) の結果から　$0 \leqq \log_a x \leqq 1$ または　$3 \leqq$

$a>1$ であるから

$$\log_a 1 \leqq \log_a x \leqq \log_a a \quad \text{また}$$

すなわち　$1 \leqq x \leqq a$　または

$2 \leqq x \leqq 4$ を満たすすべての

i)　$4 \leqq a$ よ　ii)　$\begin{cases} \\ \end{cases}$

この

12.30 等

$$\frac{\cos}{\theta-\cos} = 2\sqrt{2}\ (0<\theta<\pi)$$ において

$\cos\theta \neq \frac{1}{2}$ であるから

$$\frac{\tan}{t} = +2\sqrt{2}$$　ゆえに　$\tan\theta=\sqrt{2}$

0 よ

$< \frac{\pi}{}$ から　sin

$$\left(\log_2 \frac{x}{\theta}\right)\left(\log_2 \frac{x}{\sin\theta}\right)$$

$$= \left(\log_2 \frac{x}{\sin\theta}\right)^2 - \frac{1}{2}\log_2 \frac{x}{\sin\theta} - 1$$

ここで，$\log_2 \frac{x}{\sin\theta}$ $=t$ とおくと　$g(t)=f(x)$

$$g(t)=(t$$

$$\left(\frac{1}{2}t-1\right)=\frac{1}{2}(t-1)(t-2)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$$

$t=\frac{3}{2}$ のとき　$\log_2 \frac{x}{\sin\theta}=\frac{3}{2}$　ゆえに　$x=2^{\frac{3}{2}}\sin\theta=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

よって，$f(x)$ は $\boldsymbol{x=\frac{4}{\sqrt{3}}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\frac{1}{8}}$ をとる．

印刷本

12.31 $t=\log_2(1+\sin x)$，$A=\log_2 a$ とおくと，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　$0\leqq t\leqq 1$

$$\begin{aligned}\log_2\frac{1+\sin x}{a}&=\log_2(1+\sin x)-\log_2 a\\&=t-A\\\log_4\frac{1+\sin 2}{2a}&=\frac{1}{2}\log_2\frac{1+\sin x}{2a}\\&=\frac{1}{2}\{\log_2(1+\sin 2x)-\log\\&=\frac{1}{2}(t\end{aligned}$$

したがって

$$\left(\log_2\frac{1+\sin x}{a}\right)\left(\log_4\frac{1+\sin 2}{2a}\right)$$

$$\frac{1}{2}\qquad\qquad+A(A+$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\qquad A+\frac{}{2}\right.$$

i) $A+$ $\frac{1}{}$ すなわち　$0<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のと

で最 $\frac{1}{2}A(A+1)=\frac{1}{2}(\log_2 a)$ $+1)$

$0\leqq$ $\leqq 1$ ち　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq a\leqq\sqrt{}$ き

$\log_2\sqrt{2}$ 小値 $\frac{1}{}$

$1<A$ すな $\sqrt{2}<a$ のとき

最小 $\frac{1}{2}$ $1)=\frac{1}{}$ $\log_2 a-1)$

よ 値は

$$\begin{cases}\boldsymbol{\log_2 a)(\log_2 a+1)} & \boldsymbol{\left(0<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}\\ \boldsymbol{-\dfrac{1}{8}} & \boldsymbol{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq a\leqq\sqrt{2}\right)}\\ \boldsymbol{\log_2 a)(\log_2 a-1)} & \boldsymbol{(\sqrt{2}<a)}\end{cases}$$

12.32 N^{10} は 16 桁であるから　$10^{15}\leqq N^{10}<10^{16}$

ゆえに　　$(10^{15})^{0.8}\leqq(N^{10})^{0.8}<(10^{16})^{0.8}$

すなわち　　$10^{12}\leqq N^8<10^{12.8}$　　よって　N^8 は **13 桁**の数

見本

12.33 $a=16$ とおくと

$$p=\frac{2^{148}+1}{17}=\frac{(2^4)^{37}+1}{16+1}=\frac{a^{37}+1}{a+1}=\sum_{k=0}^{36}(-1)^k a^{36-k}$$

このとき　$p=a^{36}-(a^{35}-a^{34})-(a^{33}-a^{32})-\cdots-(a-1)$

$p=a^{36}-a^{35}+(a^{34}-a^{33})+(a^{32}-a^{31})+\cdots+$ $-a)+1$

ゆえに　$(a-1)a^{35}<p<a^{36}$　すなわち　$10\cdot 2^{140}<$ $p<2^{144}$

したがって，$10\cdot 2^{140}<p<2^{144}$ の各 対数 ことにより

$$1+140\log_{10}2<\log_{10}$$

$$43.140=1+140\times 0.301<l$$

したがって　$43<\log_{10}p<44$　

よって，p は **44** 桁の整数で

解説（宮崎 2006）[2]

12.34　(1) $\log_{10}2^{10}>\log_{10}10^3$

に 3　よって　$\boldsymbol{\log_{10}2}$

) $\log$ $\log_{1}$ $_{10}2-9\log_{10}\frac{1}{2}$

$=$ $2-9$ $\log_{10}2-0.3)>0$

ゆえ $_{10}2^{21}$ 5^9　よって　$\boldsymbol{\cdot 5^9}$

$\frac{2^9\cdot 2^{21}}{2^9}$ $\left(\sqrt{10^3}\right)$ と $>5^9$

12.35　(1) $^{x+2}+3=(2$ $)\cdot 4\cdot 2^x+3=(2^x-1)(2^x-3)$

$f(x)$ 0 よ <1，$3<2^x$　よって　$\boldsymbol{x<0}$，$\boldsymbol{\log_2 3<x}$

(2) $0.301<\log_{10}$ 302，$0.477<\log_{10}3<0.478$ より

$$\log_2 3=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}<\frac{0.478}{0.301}=1.58\cdots<1.59$$

(1) の結果から　$\boldsymbol{f(1.59)>0}$

印刷本

12.36 (1) $\dfrac{31}{100} < \log_{10} 2 < \dfrac{31}{100}$ より　　$-\dfrac{31}{100} < -\log_{10} 2 < -\dfrac{30}{100}$

上式の辺々に 1 を加えると　　$\dfrac{69}{100} < \log_{10} 5 < \dfrac{70}{100}$

よって，$\dfrac{n}{100} < \log_{10} 5 < \dfrac{n+1}{100}$ を満たす自然数 n は　$\boldsymbol{n = 69}$

(2) $\log_{10} 5^{21} = 21 \log_{10} 5$ より　$21 \times \dfrac{69}{100} < \log_{10} 5^{21} < 21$

ゆえに　　$14 < 14.47 < \log_{10} 5^{21}$　$14.7 < 15$

したがって　$10^{14} < 5^{21} < 10^{15}$　　**桁**の整数

(3) $\log_{10} \left(\dfrac{2}{5}\right)^{20} = 20(2\log_{10} 2 - 1)$ より

$-8 = 20\left(2 \times \dfrac{30}{100} - 1\right)$　$\left(\dfrac{2}{5}\right)$　$\left(\dfrac{31}{100} - 1\right)$　-7.6

ゆえに　$-8 < \log_{10} \left(\dfrac{2}{5}\right)$　< -7　　したが　10^{-8}　　$< 10^{-7}$

^{20}　は**小数第 8 位**に初めて 0 以外の数が現れる

12.37 この操作で，食塩の質量は変わらず，全体の質量は $\dfrac{9}{10}$ になるから，

求める食塩水の濃度は　$a \times \dfrac{9}{10} = \boldsymbol{\dfrac{9}{10}a}$ [%]

(1) の操作を n 回繰り返すから，求める食塩水の濃度は

$\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$　$\left(\dfrac{9}{10}\right)^n \boldsymbol{a}$ [%]

(3) に適用すると

$\left(\dfrac{9}{10}\right)^n a \leqq \dfrac{a}{10}$　すなわち　$\left(\dfrac{9}{10}\right)^n \leqq \dfrac{1}{10}$

両辺の常用対数をとると

$\left(\dfrac{9}{10}\right)^n \leqq -1$　ゆえに　$n(2\log_{10} 3 - 1) \leqq -1$

したがって　　$n \geqq \dfrac{1}{1 - 2\log_{10} 3}$　$\cdots(*)$

印刷本

ここで，$0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$ より，$0.0456 < 1 - 2\log_{10} 3 < 0.0458$ であるから

$$21.8\cdots = \frac{1}{0.458} < \frac{1}{1-2\log_{10} 3} < \frac{1}{0.456} = 21.9\cdots$$

よって，$(*)$ をみたす最小の n は　**22**

12.38　(1)　$S = 12 \times \dfrac{1}{2}\cdot 1^2 \sin 30^\circ = \mathbf{3}$

S と S_1 の相似比は　$1 : \cos 15^\circ = 1 : \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

S と S_1 の面積比は　$1 : \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 : \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

したがって　$S_1 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4} S$

(2)　$S_n = \left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n S = \mathbf{3}\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n$

(3)　(1)の結果を $S_n \leqq \dfrac{1}{2}$ に代入すると

$\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n \leqq \dfrac{1}{2}\cdot 3$　ゆえに　$\left(\dfrac{4}{2+\sqrt{3}}\right)^n \geqq 2$

両辺の2を底とする対数をとると　$n \log_2 \dfrac{4}{2+\sqrt{3}} \geqq 1$

$1.89 < \sqrt{3} < 1.9$ より，$\log_2 \dfrac{4}{2+\sqrt{3}} = 2 - \log_2(2+\sqrt{3})$ より

$\log_2 \dfrac{4}{2+\sqrt{3}} < 0.11$

したがって　$n \geqq \dfrac{1}{\log_2 \frac{4}{2+\sqrt{3}}} > \dfrac{1}{0.11} \fallingdotseq 9.09\cdots$

よって，求める n の整数 n は　**10**

13.1

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+3h) - f(a-4h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(a+3h)-f(a)}{3h} \times 3 + \frac{f(a-4h)-f(a)}{-4h} \times 4 \right\}$$

$$= 3f'(a) + 4f'(a) = \mathbf{7f'(a)}$$

見本

13.2 $y = x^2 + 5$ より　$y' = 2x$

放物線 $y = x^2 + 5$ 上の点 $(a,\ a^2 + 5)$ における接線の方程式は

$$y - (a^2 + 5) = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2 + 5 \quad \cdots (*)$$

この直線が円 $x^2 + y^2 = 1$ に接するから，原点から直線 $2ax - y - a^2 + 5 = 0$ までの距離が 1 であるから

$$\frac{|-a^2 + 5|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a^2 - 2)(\quad = 0$$

直線は，円と第 1 象限で接するから，　　よび y 切片について

$$2a < 0 \quad \text{かつ} \quad -$$

であることに注意すると　　$a = -\sqrt{}$

よって，求める接線の方程式は　　-2

13.3 P から放物線に引いた 2 本の　接点を Q,　し，そ　における接線の傾きを m_1，m_2 とする $(m_1 \neq m_2)$.

$y' = 2x$　の座標は　　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{m_1}{2},\ \dfrac{{m_1}^2}{4}\right)$　$\left(\qquad \dfrac{\quad}{4}\right)$

Q　る接線　は

$$y - \quad = m\left(x - \frac{m_1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = m_1 x - \frac{{m_1}^2}{4} \quad \cdots ①$$

同　R に　接線の　式は　　$= m_2 x - \dfrac{{m_2}^2}{4} \quad \cdots ②$

　①，　点が　から，$m_1 \neq$　注意して ①，② を解くと

$$\frac{m_1}{\quad} \qquad y = \frac{m_1 m_2}{4}$$

①，②　　，$m_1 m_2 =$　より，P の座標は　$\left(\dfrac{{m_1}^2 - 1}{4m_1}, -\dfrac{1}{4}\right)$

m_1 は 0 でない任意　数であるから，P の軌跡は　**直線 $y = -\dfrac{1}{4}$**

13.4　(1)　　$\tan(\quad \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$，$\tan(90^\circ - \alpha) = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

$\alpha - \beta = 90$　α であるから

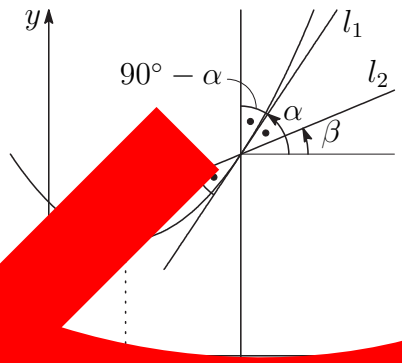
$$\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{1}{\tan\alpha} \quad \text{よって} \quad \tan\beta = \frac{\tan^2\alpha - 1}{2\tan\alpha}$$

見本

(2) $f(x) = x^2 - x + 1$ より　$f'(x) = 2x - 1$

よって　　$\tan\alpha = f'(a) = \boldsymbol{2a - 1}$

(3) 右の図のように，x 軸の正の向きと l_2 のなす角を β とすると $(-90^\circ < \beta < 90^\circ)$，



$$\alpha - \beta = 90^\circ - \alpha$$

が成り立つ．したがって，l_2 の傾きは，(1)，(2) の結果から

$$\tan\beta = \frac{(2a-1)^2 - 1}{2(2a-1)} = \frac{2a(a$$

したがって，l_2 の方程式は

$$y - (a^2 - $$

よって　　$\boldsymbol{y = \dfrac{2a(a-1)}{2a-1}x - \dfrac{a^2 -}{2a}}$

(4) a について整理すると

$$1)a^2 - (2x + 2y - $$

a に関

$$2x - \quad 2x + 2y \quad 0, \quad y - 1 = 0$$

を同

y は　x

$y = 1$

の値に

点 $\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{1}\right)$ を通る．

解説

13.5 (1) $f(x) = x^3 - $ 分すると　$f'(x) = 3x^2 - 1$

C 上の点 $(t,$ における接線の傾きは $3t^2 - 1$ であるから，その方程式は

$$y - (t^3 \quad (3t^2 - 1)(x - t) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = (3t^2 - 1)x - 2t^3}$$

(2) C 上の点 $(t,\ f(t))$，$(t',\ f(t'))$ における接線の方程式は，それぞれ

$$y = (3t^2 - 1)x - 2t^3, \quad y = (3t'^2 - 1)x - 2t'^3$$

見本

であり，これらの直線が一致するとき

$$3t^2-1=3t'^2-1,\quad -2t^3=-2t'^3\quad \text{ゆえに}\quad t=t'$$

となり，$t\neq t'$ に反する．したがって，$t\neq t'$ のとき，2つの接線は異なる．

(3) (1) で求めた接線が点 $\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ を通るとき

$$-\frac{2}{3}=(3t^2-1)\cdot\frac{2}{3}-2t^3 \quad \text{整理すると} \quad \cdots 1)=0$$

よって，求める接線の方程式は

$$t=0 \text{ のとき}\quad \boldsymbol{y=-x},$$

(4) (1) で求めた接線が点 $(u,\ v)$ を通

$$v=(3t^2-1)u-$$

ゆえに $\quad 2t^3-3ut^2+u \qquad \cdots(*)$

点 $(u,\ v)$ を通る C の接線が 3 本存在する
めの t の方程式 $(*)$ が異なる 3 つ
実 である．

$$-3ut^2+u+v$$

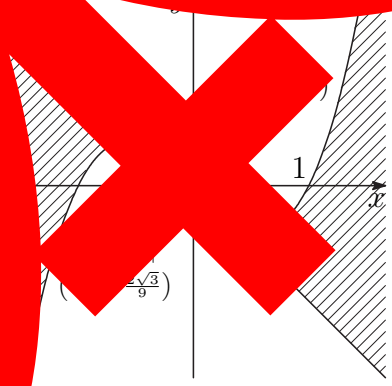
とお $g(t)$ $6ut=6t(t-u)$

t 式 $(*)$ の実数解をもつとき $\quad g(0)g(u)<0$

わち $+v)($ $u+v)$

よっ $\begin{cases} v> \\ \end{cases}$ または $\begin{cases} -u \\ ^3-u \end{cases}$

の存 は，斜 ，境界線および原点を含まない．



13.6 (1) すると

C_1 上 $(t$ における接線を ℓ とすると，ℓ の傾きは $-2t$ であるから，
接線の方程式

$$y-(-t \quad 2t(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=-2tx+t^2$$

ℓ と C_2 の共 x 座標は

$$(x-1)^2+a=-2tx+t^2$$

すなわち $\qquad 3x^2+2(t-3)x-t^2+a+3=0$

の解であり，ℓ と C_2 が接するとき，この方程式は重解をもつので

見本

$(t-3)^2-3\cdot(-t^2+a+3)=0$　すなわち　$4t^2-6t-3a=0$　$\cdots$①

このとき，ℓが2本存在するためには，①の判別式をDとすると，$D>0$であるから

$$D/4=(-3)^2-4\cdot(-3a)>0$$　これを解いて　$\boldsymbol{a>-\dfrac{3}{4}}$

別解　(熊大 [理]2007) 1

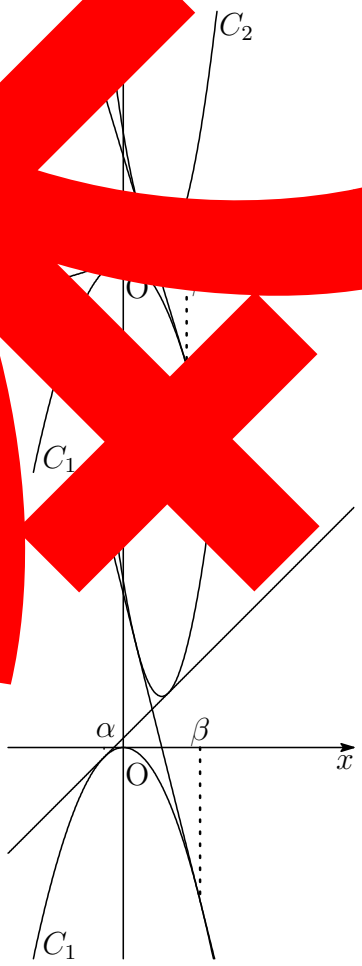
(2)　①の2解をα，βとすると，2点$(\alpha,-\alpha^2)$，$(\beta,-\beta^2)$における接線の傾きは，それぞれ2α，2βであり，これらが直交するから

$$2\alpha\cdot2\beta=-1$$　すなわち　$\alpha\beta=$

また，①の解と係数の関係から　α

したがって　$-\dfrac{3a}{4}=$

$a>-\dfrac{3}{4}$に注意して　$\boldsymbol{a=}$



(3)　ℓ上$(\alpha,-\alpha^2)$，$(\beta,-\beta^2)$における接

きから測った角を，それぞ

θ_2と

$\theta_1=$　$\tan\theta_2=-2\beta$

き，$|\theta_1-\theta_2|=\dfrac{3}{4}\pi$であるから

$\tan(\theta_1$　$=1$

$$\left|\frac{t\quad\ \tan\theta_2}{1+\quad\ \tan\theta_2}\right|=1$$

が

$$\left|\frac{}{1+}\right|$$

と　$4(\beta-\alpha)^2=(1+4\alpha\beta)^2$

したがって　$4\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=(1+4\alpha\beta)^2$

①の解と係数の関係から　$\alpha+\beta=\dfrac{3}{2}$，$\alpha\beta=-\dfrac{3a}{4}$であるから

$$4\left(\frac{9}{4}+3a\right)=(1-3a)^2$$

すなわち　$9a^2-18a-8=0$

$a>-\dfrac{3}{4}$に注意して　$\boldsymbol{a=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{3}}$

見本

13.7 (1) $y' = 2x$ より，点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における C の接線のベクトルは　$(1,\ 2p)$
ゆえに，P における C の法線の方程式は

$$1(x-p)+2p(y-p^2)=0$$

よって　　$\boldsymbol{x+2py-2p^3-p=0}$

(2) (1) で求めた法線が点 $(0,\ a)$ を通るとき

$$2pa-2p^3-p=0 \quad \text{ゆえに} \quad p\left(p^2-\frac{2a-1}{\square}\right. \qquad \cdots ①$$

① を p に関する 3 次方程式と考え，この方程式の実数解の個数が求める法線の本数と一致する．し[illegible] 3 つに場合分けをする．

i) $\dfrac{2a-1}{2}<0$ すなわち $a<\dfrac{1}{2}$ の[illegible]

すべての実数 p に対して

したがって，① の実[illegible] $p=0$

ii) $\dfrac{2a-1}{\square}=0$ すなわち [illegible] $\dfrac{1}{2}$ のとき

[illegible] $p^3=0$

[illegible] ① の実数解は　$p=0$ の

iii) $\dfrac{2a-}{\square}$ [illegible]わち $a>\dfrac{1}{2}$ のとき

[illegible]式は $\left(p-\sqrt{\dfrac{2a-1}{\square}}\right)\left(p-\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}\right)=0$

[illegible]て，[illegible]数解は　$p=$ [illegible] $\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}$ の 3 個

[illegible] iii) [illegible]は

$a\leqq\dfrac{1}{2}$ [illegible]，$a>\dfrac{1}{2}$ のとき 3 本

13.8 $f'(x)=x$ [illegible] $ax=$ [illegible] $a)$ より $(a>0)$，3 次関数 $f(x)$ は，極大値 $f(-a)$，極小値 $f(0)$ をとる．

$$f(-a)\ \square\ =\int_0^{-a} f'(x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^{-a}=\frac{1}{6}a^3$$

条件から，$f(-a)-f(0)=\dfrac{4}{81}$ であるから

$$\frac{1}{6}a^3=\frac{4}{81} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=\frac{2}{3}}$$

見本

$f'(x)=x^2+\dfrac{2}{3}x$ であるから，$f(0)=-1$ より　$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{3}x^2-1}$

13.9　(1)　$f(x)=x(x+k)(x+2k)=x^3+3kx^2+2k^2x$ を微分すると

$$f'(x)=3x^2+6kx+2k^2$$

2 次方程式 $f'(x)=0\cdots(*)$ の判別式を D とすると，$k>0$ より

$$D/4=(3k)^2-3\cdot 2k^2=3k^2>$$

$(*)$ の異なる 2 つの実数解を α, β ($\alpha<\beta$) とおくと，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	α		β	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって，$f(x)$ は異なる 2 [illegible]

(2)　$(*)$ の解と係数の関係に[illegible]

$$\alpha+\beta=-2k,\quad \alpha[illegible]=k^2$$

[illegible]を $f'(x)$ で割った商 $\dfrac{1}{3}x$ [illegible]余り $-\dfrac{1}{3}k^2x-\dfrac{1}{3}$ により

$$\left(\frac{1}{3}x+\frac{k}{3}\right)f'(x)[illegible]x-\frac{2}{3}k^3$$

[illegible]および係数の[illegible]より

$$f(\beta)=-\frac{2}{3}k[illegible]\beta)-\frac{4}{3}k^3$$
$$=[illegible]2k)-\frac{4}{3}k^3=0$$

[illegible] R の座標[illegible]

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{(-k,\ 0)}$$

(3)　$f(-k)=0$ で[illegible]ら，R は C 上の点である．

$$f'(-k)=3(-k)^2+6k(-k)+2k^2=-k^2$$

したがって，C 上の点 $\mathrm{R}(-k,\ 0)$ における接線の方程式は

$$y-0=-k^2(x+k)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=-k^2x-k^3}$$

見本

13.10 (1) $f(x)=x^3-6x^2+3kx$ を微分すると

$$f'(x)=3x^2-12x+3k=3(x^2-4x+k)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x^2-4x+k=0$　$\cdots$①

2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$D/4=(-2)^2-1\cdot k=4-k>0$$　よって　$k<4$

(2) $f'(x)=0$ の解を α，β とすると　$(\alpha<\beta)$

$$\alpha+\beta=4,\quad \alpha\beta=k,$$
$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha}$$

また　$f(x)=\dfrac{1}{3}(x-2)f'(x)$

$f(\alpha)$ が最大値，$f(\beta)$ が最小値であるから

$$f(\alpha)-f(\beta)=(2k-8)(\alpha-\beta)$$
$$=2(4-k)\cdot 2\sqrt{4-k}$$

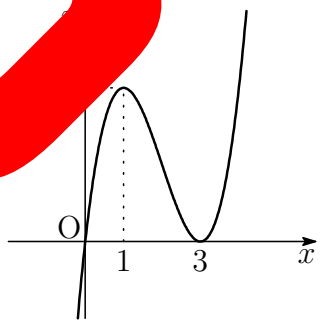
$f(\alpha)-f(\beta)=32$ であるから　$4(\sqrt{4-k})^3=32$　よって　$\boldsymbol{k=3}$

$k=3$ のとき　$f(x)=x^3-6x^2+9x=x(x-3)^2$

$f'(x)=3(x-1)(x-3)$

したがって，$f(x)$ の増減表および $y=f(x)$ のグラフは，次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$



13.11 (1) $f(x)=x^3+\cdots\cos\theta+x\sin^2\theta+2$ より

$$f'(x)=3x^2+6x\cos\theta+\sin\theta$$

見本

$f(x)$ が極大値・極小値をもつのは，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつときであるから，$D/4>0$ より

$$(3\cos\theta)^2-3\sin^2\theta>0$$
$$3(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta>0$$
$$4\sin^2\theta-3<0$$
$$(2\sin\theta+\sqrt{3})(2\sin\theta-\sqrt{3})<0$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$-90^\circ<\theta<90^\circ$ より　　$\boldsymbol{-60^\circ<}$

(2) $f(x)$ を $f'(x)$ で割ると

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\cos\theta\right)f'(\quad)\quad-\frac{1}{3}\sin^2\quad\cos\theta$$

$f(x)$ の極大値・極小値を…るグラフ…点を…程式は

$$y=\frac{2}{3}(4\sin^2\theta-3)x+2\quad\sin^2\theta$$

と，…の傾き m は

$$\boldsymbol{m=\frac{2}{3}(4\sin^2}$$

(3) (2) の…ら，…りうる…範囲は

$$\boldsymbol{-2\leqq m}$$

13.12 …$-at^2$…と，x…$3t^2-2at$

i) …>0 におい…$)>0$ であるから

…$(1)<f(2)<\cdots$　すなわち　$x_1<x_2<\cdots$

これは条件に…．

ii) $a>0$ のとき…) の増減は次のようなる．

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	極小	↗

印刷本

条件を満たすとき

$$14 < \frac{2}{3}a < 16, \quad f(14) > f(15), \quad f(15) < f(16)$$

第 1 式から　　$21 < a < 24$　$\cdots$①

第 2 式から

$$14^3 - a\cdot 14^2 > 15^3 - a\cdot 15^2$$
$$(15^2 - 14^2)a > 15^3 - 14^3$$
$$(15 + 14)a > 15^2 + 15\cdot 14 + 14^2$$
$$29a > 3\cdot 15^2 + 3\cdot 15 + 1$$
$$29a > 3\cdot 225 + 45 + 1$$
$$29a > 721$$
$$a > \frac{721}{29} = 24\frac{25}{29}$$

第 3 式から

$$15^3 - a\cdot 15^2 < 16^3 - a\cdot 16^2$$
$$(16^2 - 15^2)a < 16^3 - 15^3$$
$$(16 + 15)a < 16^2 + 16\cdot 15 + 15^2$$
$$31a < 256 + 240 + 225$$
$$a < 23$$

②, ③の範囲にある整数を求めて　$a = \mathbf{22},\ \mathbf{23}$

(熊大 2001)

(1) $f(x)$ を微分して，$f'(x) = 3ax^2 + 2(a+b)x + b + 1$　$\cdots(*)$

$a \neq 0$ のとき，すべての実数 x に対して $f'(x) \geqq 0$ となるための条件は

$f'(x) = 0$ の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4} = (a+b)^2 - 3a(b+1) \leqq 0$

$\dfrac{D}{4} = (a^2 - 2ab + b^2) - 3ab - 3a \leqq 0$,　$(a-1)^2 + b^2 \leqq 1$　$\cdots$① により

$a = 0$ のとき $(*)$ は $f'(x) = bx^2 + (b+1)x$ となる．

これがつねに $f'(x) \geqq 0$ となるためには　$b = 0$

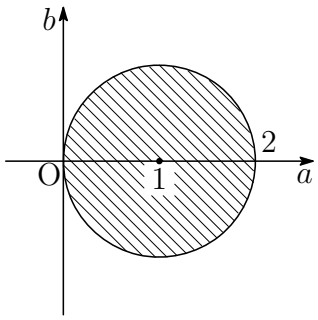
すなわち $f(x) = x$ となり，条件を満たす．

よって　$a \neq 0$ のとき　$(a-1)^2 + b^2 \leqq 1$

$a = 0$ のとき　$b = 0$

したがって　$(a-1)^2 + b^2 \leqq 1$

これを ab 平面上に図示すると，右の図のような円 $(a-1)^2 + b^2 = 1$ の内部で，境界線を含む．



見本

(2) $a=0$ のとき　$f(x)=bx^2+(b+1)x$

$b \geqq 0$ は，$x>-1$ で $f(x)$ がつねに増加するための必要条件である．

$f(x)$ を微分すると　　$f'(x)=2bx+b+1$

$b>0$ のとき，$f'(-1) \geqq 0$ であることが条件であるから

$$b>0,\quad 2b(-1)+b+1 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0<b \leqq 1$$

$b=0$ のとき　$f(x)=x$ となり，これは条件を満た

よって　　$\boldsymbol{0 \leqq b \leqq 1}$

(3) $a \geqq 0$ は，$x>-1$ で $f(x)$ がつね　　必要条件である．

$a=0$ の場合が (2) であり，$a>0$，　　(1) である．

したがって，$a>0$，$D>0$ の場合

(∗) より

$$f'(x)=2a\left(x+\frac{a+b}{2a}\right)^2 \quad \frac{b^2-}{2a}$$

ゆえに　$\dfrac{a+b}{2a} \leqq -1$，$f'(-1)=-b+1$

　　ら，① より　a^2+b^2-2a

　　を解　　0，$b \geqq a$，$b \leqq 1$，$(a$　　$-b^2>1$

求め　　は，　　ように (1)，(2) の　　および上式をまとめた領域

　　線を

4 回　　体積を　　ると　　<1)

　　$-t)^2t=\dfrac{\pi}{}$　　$t^2+t)$

　　微分

$$=\frac{\pi}{3}(3t^2-4t+1)=\frac{\pi}{3}(t-1)(3t-1)$$

V の増減表は，次　　になる．

t		$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dV}{dt}$		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

よって　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{3}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{81}\pi}$

見本

13.15 (1) $y=(x-2)^2$ より $y'=2(x-2)$ であるから　$x=t$ のとき　$y'=2(t-2)$

よって，点 $(t,\ (t-2)^2)$ における接線 l の方程式は

$$y-(t-2)^2=2(t-2)(x-t)\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{y=2(t-2)x-t^2+4}$$

(2) (1) の結果に $y=0$ を代入すると

$$2(t-2)x-t^2+4=0\quad \text{ゆえに}\quad 2(t-2)x=$$

$t\neq 2$ より　$x=\dfrac{t+2}{2}$　よって

(3) l の y 軸との交点の座標は $(0,\ 4-$

ら，$0\leqq t<2$ および (2) の結果から

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\frac{t+2}{2}\times(4$$
$$=-\frac{1}{4}(t^3+2$$

ゆえに　$S'(t)=-\dfrac{1}{4}(3t^2+4t-4)$

$$=-\frac{1}{4}(t+2)(3t-2)$$

たが　2 における $S(t)$ の増

			$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
			0	−	
	(t)		極大		

よ　　$\boldsymbol{t=}$　　大値 $\dfrac{\mathbf{64}}{\mathbf{27}}$

13.16 　の底　　な正方　　その一辺を $2x$ cm とすると，箱 A，B の　　$2-x$ cm，　　cm であるから

$$>0,\quad x>0,\quad 18-x>0\quad \text{すなわち}\quad 0<x<12$$

2 つの箱の容積の　　とすると

$$=(2x)^2(12-x)+(2x)^2(18-x)$$
$$=8x^2(15-x),$$
$$V'=24x(10-x)$$

したがって，V の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	10	$\cdots$	(12)
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	4000	↘	

よって，$x = 10$ のとき，最大値 **4000 (cm³)**

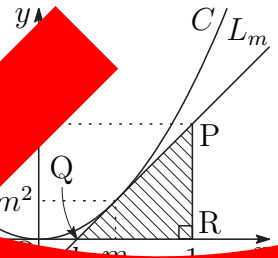
13.17 (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

$x = m$ のとき　$y' = 2m$

L_m は，点 $(m,\ m^2)$ を通り，傾き $2m$ の直線.

ゆえに　　$y - m^2 = 2m(x - m)$

よって　　$\boldsymbol{y = 2mx - m^2}$



(2) P$(1,\ a)$，Q$(b,\ 0)$ は L_m 上の点であ

$a = 2m\cdot 1 - m^2$,　0

よって　$\boldsymbol{a = 2m - m^2}$　　$\boldsymbol{\frac{m}{2}}$

(3) PR $= 2m - m^2$，QR $= 1 - b = 1 - \frac{m}{2}$ るか

$$\triangle \mathrm{PQR} = \frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{QR}$$
$$= \frac{1}{2}\left(2m - m^2\right)\left(1 - \frac{m}{2}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}(m^3 - 4m^2 + 4m)}$$

(3) から，$\frac{1}{4}(m^3 - 4m^2$　とおくと

$$= \frac{1}{4}(m-2)(3m-2)$$

の増減表は次のようになる.

	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
		$+$	0	$-$	
	0	↗	$\frac{8}{27}$	↘	$\frac{1}{4}$

よって，求める三角形 PQR の最大値は　$\boldsymbol{\frac{8}{27}}$

13.18 $f(x) = x^3 - (3p+2)x^2 + 8px$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 2(3p+2)x + 8p = (3x-4)(x-2p)$$

印刷本

i) $2p \geqq 1$　すなわち　$\dfrac{1}{2} \leqq p < 1$ のとき

$f(x)$ は，$0 \leqq x \leqq 1$ で単調増加であるから

最大値 $f(1) = 5p - 1$，最小値 $f(0) = 0$

ii) $0 < 2p < 1$　すなわち　$0 < p < \dfrac{1}{2}$ のとき，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$2p$	$\cdots$	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$4p^2(2$		

最大値 $f(2p) = 4p^2(2-p)$，最小値 f

i)，ii) より

$0 < p < \dfrac{1}{5}$ のとき　**最**　$\boldsymbol{4p^2(2-p)}$　**小値**

$\dfrac{1}{5}$　$\dfrac{1}{2}$ のとき　**最大値 $\boldsymbol{4p^2(2-p)}$**　**小値**

$\leqq p$　き　**最大値 $\boldsymbol{5p-1}$，**　**小値**

13　) $g(x)$　$-5x$　と　$g(x) = \left(x - \dfrac{\quad}{2}\right)^2 + m - \dfrac{25}{4}$

(i) は　$x >$　て，$g($　$) > 0$ であるから

　　> 0　すなわち　$> \dfrac{25}{4}$　$\cdots$①

$= x($　$+ m$　$5x$　より　$f'(x) = 3x^2 - 10x + m$

次方程式　が異なる 2 つの実数解をもつから

　　$= (-5)^2 - 3 \cdot m > 0$　ゆえに　$m < \dfrac{25}{3}$

このとき，f'　$= 0$ の解を α，β とすると，$\alpha > 0$，$\beta > 0$ であるから

$\alpha + \beta$　　$\alpha\beta = \dfrac{m}{3} > 0$　すなわち　$0 < m < \dfrac{25}{3}$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めると　$\dfrac{25}{4} < m < \dfrac{25}{3}$

よって，上式を満たす最小の整数 m は　$\boldsymbol{m = 7}$

見本

(2) (1) の結果から　$f(x)=x^3-5x^2+7x$

これを微分して　$f'(x)=3x^2-10x+7=(x-1)(3x-7)$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{7}{3}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$\frac{19}{8}$	↗	極大 3	↘	極小 $\frac{49}{27}$	↗	3

(3)　**$a>1$ のとき**　　**最大値 log**　**($x=1$ ま**　**とき)**

$0<a<1$ のとき　**最大値 log**　**とき**

13.20　(1)　$f'(x)=3x^2+6x+1$ より，C 上の点

あるとき，u は方程式

$$3x^2+6x+1=t \quad す \qquad 3x \qquad 0$$

の解である．この 2 次方　判別式を　るこ

$$D/4=3^2-3(1 \qquad 3t+$$

t　$D>0$ であるから，① は異　解を

て，　が t $(t \geqq 0)$ である接線

p，q　方程　解であるから，解　数の関係により

$$+q=-2, \quad pq=\frac{1-t}{3}$$

したが

$$) + f(\qquad 3p^2+p-1 \qquad +3q^2+q-1)$$

$$= p \qquad 3(p^2 \qquad +p+q-2$$

$$= (p+q \qquad +q)+3\{(p+q)^2-2pq\}$$

$$+(p+q)-2$$

$$(-2)^3-3\times\frac{1-t}{3}\times 2+3\left\{(-2)^2-2\times\frac{1-t}{3}\right\}$$

$$+(-2)-2$$

$$=0$$

ゆえに　$\dfrac{p+q}{2}=-1, \quad \dfrac{f(p)+f(q)}{2}=0$

よって，2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称である．

見本

(3) $\mathrm{PQ}^2=(p-q)^2+\{f(p)-f(q)\}^2$ であるから，まず

$$\begin{aligned}f(p)-f(q)&=(p^3+3p^2+p-1)-(q^3+3q^2+q-1)\\&=p^3-q^3+3(p^2-q^2)+p-q\\&=(p-q)\{(p^2+pq+q^2)+3(p+q)+1\}\\&=(p-q)\{(p+q)^2-pq+3(p+q)+1\}\\&=(p-q)\left\{(-2)^2-\frac{1-t}{3}+3\cdot\right.\\&=\frac{1}{3}(t-\end{aligned}$$

次に　$(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(p-q)^2+\{f(\\&=(p-q)^2\\&=(p-q)^2\left\{1+\frac{1}{9}(t-4)^2\right\}\\&\left.=\frac{4}{9}(t+2)\left\{1+\frac{1}{9}(t-4)^2\right\}=\right.\end{aligned}$$

$g(t)$　　$-$　　$50)$ $(t\geqq 0)$ の最　　と求めればよいから

$g'(t)=$　　$1)(t$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$		↗	8	↘	$\frac{200}{27}$	↗

増減表　　，g　　$t=0$　　小値 $\dfrac{200}{27}$ をとる．

　　小値は　　る．

p，q　　$<q$)　　式 ① の解であるから

$t=0$ のとき，　　$6x+1=0$ を解いて

$$\boldsymbol{p=\frac{-3-\sqrt{6}}{3},\quad q=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}}$$

$t=3$ のとき，　　$x^2+6x-2=0$ を解いて

$$\boldsymbol{p=\frac{-3-\sqrt{15}}{3},\quad q=\frac{-3+\sqrt{15}}{3}}$$

見本

補足 (九大 [文]2012) 2

13.21 (1) $\sin\theta+\cos\theta=\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$

(2) (1) の結果から　$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき**最大値 $\sqrt{2}$**，$\theta=\pi$ のとき**最小値 -1**

(3) (2) の結果から　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

$t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を平方すると　$t^2=1+2\sin$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{\frac{t^2-1}{2}}$　$(-$

よって　$t=\sqrt{2}$　すなわち　$\theta=$　き　**値 $\frac{1}{2}$**

$t=0$　すなわち　$\theta=\frac{3}{4}$

(4) (3) の結果から

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin$

$=$ $\frac{-2}{2}\cdot t=$ $+\frac{3}{2}t$

$f(t)$ $+\frac{3}{2}t$ $\left(-1\leqq t\leqq\sqrt{2}\right)$ とおい

$(t)=-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$ $(t-1)$

した 表は，次のよう

t		$\cdots$	$\sqrt{2}$
		$-$	
f		1 ↘	$\frac{\sqrt{}}{2}$

$t=$ $\theta=0$ とき　**最大値 1**

すなわ とき　**最小値 -1**

13.22 (1) $t=$ $\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$ より　$0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ のとき　$\boldsymbol{1\leqq t\leqq\sqrt{2}}$

(2) $t=\sin\theta+\cos$ 両辺を平方すると

t $+2\sin\theta\cos\theta$　ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$

したがっ $\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$

見本

ここで，$f(t)=-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{3}{2}t$ $(1 \leqq t \leqq \sqrt{2})$ とおくと

$$f'(t)=-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}(t+1)(t-1)$$

したがって，$f(t)$ の増減表は，右のようなる．

t	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	
$f($		$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq \sin^3\theta+\cos^3\theta \leqq 1}$

13.23　(1)　$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より　$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x-\dfrac{\pi}{4} \leqq$　　$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}}$

(2)　$t=\sin x-\cos x \cdots$① の両辺を平方

$t^2=1-2\sin x\cos x$　ゆ　　$\sin x\cos x=$　　2

$y=\sin^3 x-\cos^3 x$ の右辺を　　と

$\sin^3 x-\cos^3 x=$　　$\cos x)(\sin^2 x+\sin x$　　$)$

$=(\sin x-\cos x)(1+$　　$\cos x)$

上　　を代入すると

$-\cos^3 x=t\left(1+\dfrac{1-}{2}\right.$　　$\left.\right)=-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{3}{2}t$

よ　　$\boldsymbol{y=}$　　$\boldsymbol{\dfrac{3}{2}t}$

(3)　　結果

$y'=-\dfrac{3}{2}$

$=$　　$1)(t-1)$

　　$x=-1,$

　　ける y の増減表は，次のようになる．

t	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'	$+$	0	$-$	
y	$\nearrow$	極大 1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって，

$t=1$　すなわち　$x=\dfrac{\pi}{2}$，π のとき　**最大値 1** をとり，

$t=-1$　すなわち　$x=0$ のとき　**最小値 -1** をとる．

印刷本

13.24 (1) $y = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より　$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}}$

(2) $t = \sin x - \cos x$ の両辺を平方すると

$$t^2 = 1 - 2\sin x \cos x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$$

また　$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)$

$= (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)$

$= t\left(1 + \dfrac{1 - t^2}{2}\right) = \dfrac{3t - t^2}{2}$

よって　$y = 2(\sin^3 x - \cos^3 x) - 6\sin x \cos x + 3(\sin x - \cos x + 1)$

$= 2\cdot\dfrac{3t - t^3}{2} - 6\cdot\dfrac{1 - t^2}{2} + 3t + 3$

(3) $y = 2t^3 - 3t^2 + 3$ を微分すると　$y' = 6t^2 - 6t = 6t(t - 1)$

したがって，増減表は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	0		1	$\cdots$	
		$+$	0	$-$	0	$+$	
	-2	↗	3	↘	2	↗	

よって　**最小値 -2**

13.25 (1) $t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45^\circ)$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より　$45^\circ \leqq \theta + 45^\circ \leqq 225^\circ$ であるから

$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}}$

(2) $t = \sin\theta + \cos\theta$ の両辺を平方すると

$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}\{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1\} = \dfrac{1}{2}(t^2 - 1)$

$f(\theta) = 4\sin^3\theta + 4\cos^3\theta - 9\sin\theta\cos\theta + 1$

$= 4\{(\sin\theta + \cos\theta)^3 - 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)\} - 9\sin\theta\cos\theta + 1$

$= 4\left\{t^3 - \dfrac{3}{2}(t^2 - 1)\cdot t\right\} - 9\cdot\dfrac{1}{2}(t^2 - 1) + 1$

$= -\dfrac{9}{2}t^2 + 6t + \dfrac{11}{2}$

よって　$\boldsymbol{g(t) = -2t^3 - \dfrac{9}{2}t^2 + 6t + \dfrac{11}{2}}$

白本

(3) (2) の結果から

$$g'(t) = -6t^2 - 9t + 6 = -3(t+2)(2t-1)$$

したがって，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-3	↗	$\frac{57}{8}$	↘	$2\sqrt{2}-7$

よって　　**$t = \frac{1}{2}$のとき　最**

$t = -1$ のとき　最小

13.26　(1) 2 倍角の公式により

$$\cos 2x = \cos^2 x$$
$$= \cos^2 \quad - \cos^2 \quad \mathbf{2c} \quad \mathbf{1}$$

加法定理により

$$\cos(2x+x) = \cos 2x \cos$$
$$\cos(2x-x) = \cos 2x \cos \quad 2x \quad x$$

辺の 2 ると

$$\cos x = 2\cos 2x \cos x$$
$$= \quad ^2 x - 1)\cos x$$

よ　　$\cos$ **$^3 x - 3\cos$**

の結果

$$= \cos 3x + \quad - 2\cos x$$
$$(4\cos^3 x - 3\cos x) + (2\cos^2 x - 1) - 2\cos x$$
$$\cos^3 x + 2\cos^2 x - 5\cos x - 1$$

$t = \cos x$，g　(x) とおくと

$$g(t) = 4t^3 + 2t^2 - 5t - 1 \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

$g(t)$ を微分すると　$g'(t) = 12t^2 + 4t - 5 = (6t+5)(2t-1)$

したがって，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

印刷本

t	-1	$\cdots$	$-\frac{5}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	2	↗	$\frac{121}{54}$	↘	$-\frac{5}{3}$	↗	0

よって　最大値 $\dfrac{\mathbf{121}}{\mathbf{54}}$，最小値 $-\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

13.27　(1)　$30^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ のとき　$-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \leqq \boldsymbol{\cos\theta} \leqq \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

(2)　$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ である

$$y = \cos 3\theta - 3\cos\theta + 1 = \qquad\qquad \theta \qquad\qquad) - 3\cos\theta + 1$$
$$= \mathbf{4\cos^3\theta - 6\cos\theta + 1}$$

(3)　$x = \cos\theta$ とおくと，(1)，(2) より

微分すると　　$y' = 12x^2$ $\qquad$ $12\left(x + \qquad\right)\left(x - \right.$

したが　て，y の増減表は

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	
y'				$-$	0	$+$	
y				↘	$1-2\sqrt{2}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\qquad$ $\qquad$ $\qquad$ すな　　$\qquad$ $\mathbf{120^\circ}$**のとき　最大値** $\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$

$= \dfrac{1}{\qquad}$ $\qquad$ よわち　　$\mathbf{45^\circ}$**のとき　最小値** $\mathbf{1-2\sqrt{2}}$

13.　$\qquad$ $\sin^3\theta$ $\qquad$ $\dfrac{21}{\qquad}$ $\sin\theta$ に　　$\qquad$ を代入すると

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \qquad\qquad + \frac{21}{4} = \frac{25}{4} - a$$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$ $\qquad$ から

$\qquad\qquad \dfrac{5}{4} - a = \dfrac{13}{4}$　　これを解いて　$\boldsymbol{a = 3}$

(2)　$a = 3$，$\cos$ $\qquad$ $- 2\sin^2\theta$ より

$$f(\theta) = t^3 + 3(1-2t^2) + \frac{21}{4}t$$
$$= \mathbf{t^3 - 6t^2 + \frac{21}{4}t + 3}$$

見本

(3) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より　$-1 \leqq t \leqq 1$

$$g(t) = t^3 - 6t^2 + \frac{21}{4}t + 3 \qquad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

とおくと

$$g'(t) = 3t^2 - 12t + \frac{21}{4}$$
$$= \frac{3}{4}(4t^2 - 16t + 7) = \frac{3}{4}(2t - 1)(2t - 7)$$

したがって，$g(t)$ の増減表は，次

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	
$g'(t)$		$+$	0	
$g(t)$	$-\frac{37}{4}$	↗		↘

よって　$t = \dfrac{1}{2}$　すなわ　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のと　**最**

$= -1$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = -\dfrac{\pi}{2}}$ の　**最小**

13.29　(1)　$\sin\dfrac{\theta}{2}$　の両辺を平方すると

$$1 + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 1 + \sin\theta$$

に

$\dfrac{\theta}{2}\cos$　$(t^2 - 1)$,　$\sin$　$- 1$

$\sin^3\theta$　$\dfrac{\theta}{2} = \left(\sin\right.$　$\left.\right) - 3\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\dfrac{\theta}{2}\right)$

$= x^3 - 3\cdot\dfrac{1}{2}(x^2 - 1)x = -\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{3}{2}x$

したがって，　式より

$$f(\theta) = 4\left(\sin\right.$$　$\left. - \cos^3\frac{\theta}{2}\right) + 6\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)(\sin\theta - 2) - \sqrt{6}(\sin\theta + 1)$$
$$= 4\left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x\right) + 6x\{(x^2 - 1) - 2\} - \sqrt{6}\{(x^2 - 1) + 1\}$$
$$= \boldsymbol{4x^3 - \sqrt{6}x^2 - 12x}$$

見本

(2)　　$x = \sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$　$\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$　$\cdots$①

このとき　　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4} \leqq \pi$　ゆえに　$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$

(1) の結果より

$$g(x) = 4x^3 - \sqrt{6}x^2 - 12x \quad (0 \leqq x \leqq \sqrt{2})$$

とおくと

$$g'(x) = 12x^2 - 2x \cdots 2 = 2(2 \cdots)(3x + \sqrt{6})$$

したがって，$g(x)$ の増減表は，次

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	
$g(x)$		↘	極	

また，のにより $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ なわち　$\sin\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) =$ き

$\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$　ゆえに　θ 5

って，$\theta =$ のとき**最小値** $-\dfrac{9}{2}\sqrt{}$ る．

13 $+ a^{-}$ $- a^{-2x}) + 27(a^x + a^{-})$　$\cdots(*)$

$t =$ a^{-x} と $-$ $- a^{-x}$ $\geqq 2$

$^{2x} =$ $^{-x})^2 - 2 = t^2$

$+ a^{-}$ $- 3(a$ $) = t^3 - 3t$

上 $($ 入すると

y $- 3$ $t^2 - 2) + 27t$

$= t^3 - 9t^2$ $+ 18$

$y' = 3t^2 - 18$ $= 3(t-2)(t-4)$

t	2	$\cdots$	4	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		↘	34	↗

ゆえに，y の増 次のようになる．

$t = 4$ のとき　a $+ a^{-x} = 4$　ゆえに　$(a^x)^2 - 4a^x + 1 = 0$

$a^x > 0$ であるから　　$a^x = 2 - \sqrt{3}$

よって，$\boldsymbol{x = \log_a(2 - \sqrt{3})}$ のとき最小値 **34** をとる．

印刷本

13.31 (1) $t = 2^x + 2^{-x}$ より

$$8^x + 8^{-x} = (2^x + 2^{-x})^3 - 3(2^x + 2^{-x}) = t^3 - 3t$$
$$4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$$

したがって　$g(t) = (t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) + 27t - 26$
$= \boldsymbol{t^3 - 9t^2 + 24t - 8}$

(2) 相加平均・相乗平均の関係により

$2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2$　　2　よ　　$\geqq \mathbf{2}$

(3) $g(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 8$ を微分する

$g'(t) = 3t^2 - 18t + 24$
$= 3(t-2)(t-4)$

	↘		↘	8

$g(t)$ の増減は右の表のよ　　.

(4) (3) の結果から，$f(x)$ の最小値は　**8**
この　　$= 4$ より

　　$2^{-x} = 4$　ゆえに　$(2^x$　　$2^x + 1 = 0$

$x \geqq 0$　　2^x　　るから，最小値を　る x の値は

　　$= 2$　　よって　$x = \log_2(2 + \sqrt{3})$

1　) $a =$　　，連立　　$\begin{cases} y = 3x \\ y = 2x^3 \end{cases}$　解いて

$(\mathbf{0},\ \mathbf{0})$，　　，$(-\sqrt{\mathbf{3}}, -\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}})$

(2) l : y　x −　　$: y = 2x^3 - 3x$ の共有点の個数は，方程式

$$-2x^3 + 6x = a$$

の実数解の　　等しい．

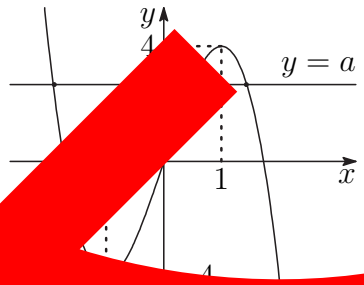
印刷本

関数 $y=-2x^3+6x$ について

$$\begin{aligned} y' &= -6x^2+6 \\ &= -6(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小 -4	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$

y の増減表は，右のようになる．
よって，$y=-2x^3+6x$ のグラフは，右の図のようなる．
求める a の値の範囲は，このグラ
と直線 $y=a$ が異なる 3 個の共
をもつ範囲であるから



$$\boldsymbol{-4<a<4}$$

13.33 $y=x^3-x$ を微分すると　$y'=3x^2-$

曲線 $y=x^3-x$ 上の点 $(t,\ t^3-t)$ る接

$$y-(\quad)=(3t^2-1\quad t)$$

これが点 通るから

$$\quad -t)\quad 1)(a-t)\quad \text{ゆえに}\quad 2t^3\quad ^2+\quad +b=0 \qquad (*)$$

$$=2t^3\quad +\quad \text{おくと}\quad f'(t)=6t\quad =6t(t-a)$$

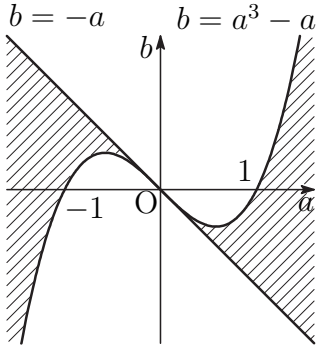
$(t)=$ ると あるから，極値は

$$f(0\quad -b,\quad f(a)\quad ^3+a+b$$

3次 $(*)$ が の実数解を
$f(t)$ 号逆 値を

$$\begin{cases} \quad >0 \\ \quad +b<0 \end{cases}$$

または $\begin{cases} a+ \\ -a^3\quad b>0 \end{cases}$



$(a,\ b)$ の表す領域 の図の斜線部分で，境界線を含まない．

解説 (琉球大学 2010) 3

見本

13.34 (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

C 上の点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$ における接線の方程式は

$$y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha) \quad \text{すなわち} \quad y = 2\alpha x - \alpha^2 \quad \cdots ①$$

同様に，C 上の点 $\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ における接線の方程式は

$$y = 2\beta x - \beta^2 \quad \cdots ②$$

P は ①，② の交点であるから，①，② を解いて　$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$

よって，点 P の x 座標は

(2) 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$ は直線 $y = ax + b$

$$\alpha\beta = a \times$$

2 点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を

$$y - \alpha^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha}($$ すなわち $$(\alpha +$$ ④

直線

③ により　$y = (\alpha+\beta)x - a$

に

$$+ b = (\alpha+\beta)\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

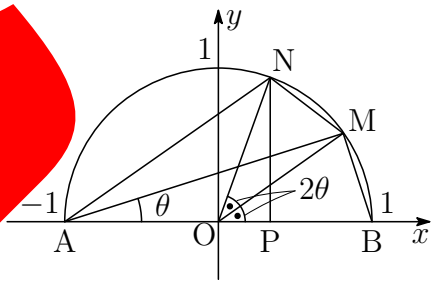
よっ　の直　点 $\left(\dfrac{a}{2}, -b\right)$ を通

(1)　$\mathrm{B} = 9$　る

AB si　**sin θ**

$= 2$　る

θ，sin 2θ



(2) ∠B　$= 4\theta$　から　$\mathrm{N}(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$

したがって　$\mathbf{= 1 - \cos 4\theta}$

(3) (1) の結果か　$\mathrm{B} = 2t$

(2) の結果か

$$\begin{aligned}\mathrm{PB} &= 1 - \cos 4\theta = 1 - (1 - 2\sin^2 2\theta) \\ &= 2\sin^2 2\theta = 2(2\sin\theta\cos\theta) \\ &= 8\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) = 8t^2(1 - t^2)\end{aligned}$$

見本

MB = PB より

$$2t = 8t^2(1-t^2) \quad \text{すなわち} \quad t(4t^3-4t+1)=0$$

ここで，$0° < \angle \mathrm{BOM} \leqq 180°$ であるから　$0° < \theta \leqq 45°$

したがって　　$0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，求める条件は　　$\boldsymbol{4t^3-4t+1=0}$

(4) $f(t)=4t^3-4t+1$ $\left(0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とおくと　$f'($ $\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f(t)$ の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	
$f'(t)$		$-$	0		
$f(t)$	1	↘	極小 $1-\frac{8}{}$		1

したがって，$0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において，$f(t)$ の解は　，その解を t_0 とおくと

$$\sin\theta = t_0 \qquad (\quad \leqq \quad)$$

を満た　存在する．すなわち　= PB となるような M が　存在す

(1)　次式　の x^3　1，$f'($　$= f'(\beta) = 0$ であるから

$$f'(x)$$ $$-\alpha)(x-\beta) =$$ $$3(\alpha+\beta)x+3\alpha\beta$$

$f(x)$　項　るか

$$f(x) = \qquad (\alpha+\beta)x^2+3\alpha\beta x$$

したがって

$$\alpha^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\alpha^2+3\alpha^2\beta = \frac{\boldsymbol{\alpha^2(3\beta-\alpha)}}{\boldsymbol{2}}$$

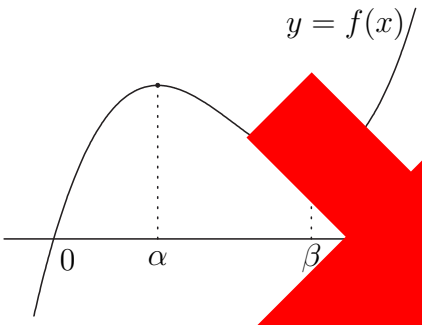
$$= \beta^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\beta^2+3\alpha\beta^2 = \frac{\boldsymbol{\beta^2(3\alpha-\beta)}}{\boldsymbol{2}}$$

(2) $f(x)$ の増減表は

見本

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$

$\alpha < \beta < 3\alpha$ より，$0 < \alpha < \beta$，$3\alpha - \beta > 0$ であるから，$f(\beta) > 0$
したがって，$y = f(x)$ のグラフの概形は，次のようになる．



よって，$y = f(x)$ および y [illegible] グラ [illegible]，[illegible] 程式 $f($ [illegible] 1 の
実数解の個数は **1 個**.

解説 (熊大 [理]2015) 1

13.37 (1) 関数 [illegible] $3x$ について

$$3$$

$$3(\quad 2x - 1)$$

[illegible] 減表 [illegible] よう

[illegible] って，[illegible] $x^3 -$ [illegible] ラフは，

の図 [illegible] になる

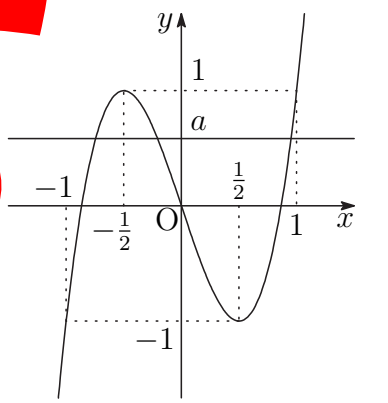
求 [illegible] a の値 [illegible] のグラフ

[illegible] $y =$ [illegible] なる 3 [illegible]

[illegible] ら

[illegible] $\boldsymbol{a < 1}$

		$\cdots$		$\cdots$
$-$	0	$-$	0	$+$
$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$



(2) 方程式 $4x^3 -$ [illegible] $= 0$ の解は，$y = 4x^3 - 3x$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の x 座標 [illegible] から，$-1 < a < 1$ のとき，(1) の図から，3 つの解はいずれも $-$ [illegible] の間にある．

見本

(3) $\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$
$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta$
$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$
$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$
$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

(4) $\cos\theta$ は，$4x^3 - 3x - a = 0$ の解であるから　$4\cos^3\theta$ [illegible] $\theta - a = 0$

(3) の結果から　$\cos 3\theta - a = 0$ [illegible]

上式から　$\cos(3\theta \pm 360°) - a$ [illegible] に [illegible] $\pm 120°) - a = 0$

したがって　$4\cos^3(\theta \pm 120°) - 3$ [illegible] $= 0$

よって，$\cos(\theta \pm 120°)$ は，3 次方程 [illegible]

最も大きい解 $\cos\theta$ は，(1) の図 [illegible] 2

$0° < \theta < 180$ より，$60° <$ [illegible] であ

$\cos(\theta - 120°) - \cos($ [illegible] $+ 120°)$

$\cos 120° + \sin\theta\sin 120° - (\cos$ [illegible] 120 [illegible] $)$

[illegible] $120° = \sqrt{3}\sin\theta > 0$

[illegible] って　$\boldsymbol{120°) > \cos(\theta + 12}$ [illegible]

13 [illegible] $- x -$ [illegible] $+ 1)$ [illegible] 0

$\leqq x$ [illegible] において [illegible] $x - 2 \leqq 0$,

$2 \leq$ [illegible] において [illegible] $- 2 \geqq 0$

[illegible] が

[illegible] $|$ [illegible] $2\,|dx =$ [illegible] $2)dx + \int_2^3 (x^2 - x - 2)dx$

$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3$

$= \boldsymbol{\frac{31}{6}}$

13.39 (1) $S = \int_0^2 (-$ [illegible] $- 2n)\,dx = \left[-\frac{3}{2}mx^2 + 2nx \right]_0^2 = \boldsymbol{-6m + 4n}$

$T = \int_0^2 (6x^2 - 2nx - m)\,dx = \left[2x^3 - nx^2 - mx \right]_0^2 = \boldsymbol{-2m - 4n + 16}$

印刷本

(2) (1) の結果から

$$m = 2 - \frac{1}{8}S - \frac{1}{8}T, \quad n = 3 + \frac{1}{16}S - \frac{3}{16}T$$

したがって　　$m + n = 5 - \frac{1}{16}S - \frac{5}{16}T$

$S \geqq 0$，$T \geqq 0$ のとき，$m+n$ が最大となるのは，上[illegible]より

$S = T = 0$　すなわち　$\boldsymbol{m = 2}$[illegible]

13.40　(1)　$f'(x) = x^2 - x = x(x-1)$

		0	$\cdots$	1	$\cdots$
				0	

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0,\ 1$

増減表は，右のようになる．

$$f(x) = \int_0^x (t^2 - t)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} = \frac{a^3}{3}$$

よって　大値　$f(0) = -\dfrac{\boldsymbol{a^3}}{\boldsymbol{3}} + \dfrac{\boldsymbol{a^2}}{\boldsymbol{2}}$,

[illegible]$(1) = -\dfrac{\boldsymbol{a^3}}{\boldsymbol{3}} + \dfrac{\boldsymbol{a^2}}{\boldsymbol{2}} - \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{6}}$

(1) [illegible]から，[illegible]0，$f(1) < 0$ より

$$-\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} > 0, \quad -\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{6} < 0$$

これ[illegible]整理す[illegible]

[illegible]$a^2(2[illegible]0$　[illegible]$(1)^2(2a+1) > 0$

[illegible]$a < \frac{3}{2}$　$(a \neq$[illegible]　第 2 式から　$a > -\frac{1}{2}$　$(a \neq 1)$

よって　[illegible]$a < \dfrac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}}$　$\boldsymbol{(a \neq 0,\ a \neq 1)}$

13.41　(1)　$f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{t^2}{7} - \frac{2}{3}t - 3\right) dt = \left[\frac{t^3}{21} - \frac{t^2}{3} - 3t\right]_x^{2x}$

$$= \frac{(2x)^3 - x^3}{21} - \frac{(2x)^2 - x^2}{3} - 3(2x - x)$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

$f(x)=0$ より　$\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x=0$

ゆえに　$x(x^2-3x-9)=0$

よって　$\boldsymbol{x=0,\ \dfrac{3\pm3\sqrt{5}}{2}}$

(2) (1) の結果から

$$f'(x)=x^2-2x-3$$
$$=(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 3$

$-3\leqq x\leqq 6$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-9	↗	極大 $\frac{5}{3}$	↘	極小 -9	↗	27

よって，$f(x)$ は $x=\pm3$ で**極小値 -9** をとる。

13.42　(1) 3次関数 $f(x)$ は，$x=-1,\ 2$ で極値をとるから，$f'(x)$ を因数分解して

$$f'(x)=a(x+1)(x-2)=a(x^2-x-2)$$

とおける。

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt=a\int_0^x(t^2-t-2)\,dt$$
$$=a\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^x=-\frac{10}{3}a$$

このとき　$a=-3$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{2}(x^2-x-2)}$$

(2) 極大値 $f(-1)$ と極小値 $f(2)$ の差は

$$f(-1)-f(2)=\int_2^{-1}f'(x)\,dx$$
$$=\frac{3}{2}\int_2^{-1}(x+1)(x-2)\,dx$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(-1-2)^3=\boldsymbol{\frac{27}{4}}$$

印刷本

13.43 (1) $f(0)=0$ より，$f(x)=px^2+qx$ とおくと，$f(-1)=f(1)=3a$ より

$$p-q=3a,\quad p+q=3a \quad \text{よって} \quad p=3a,\ q=0$$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=3ax^2}$

(2) (1) の結果により　　$g(x)=\displaystyle\int_0^x 3at^2\,dt+\frac{4}{a}$

$$=\left[\,at^3\,\right]^x+\frac{4}{a}=ax^3$$

$g(x)$ を微分すると　　$g'(x)=3$

$y=3x+2$ と $y=g(x)$ の接点の座

$g(p)=3p+2$ より

$$3ap^2=$$

第 1 式から，$a=\dfrac{1}{p^2}\cdots$

$^3+4p^2=3p+2$　整理する

これを

$-\dfrac{1}{2}$

$p=-\dfrac{1}{2}$ のとき $a=4$

よ

接点$(1,$

接点$\left(\right.$

13.44 (1)

$=2^{3x}-$

$(2^x)^3-a(2^$

よって　　$\boldsymbol{g}$

(2) $g(t)=0$ の解

$1+2^{\alpha}$

$=a,\quad 2^{\alpha}+2^{\beta}+2^{\alpha+\beta}=2a,\quad 2^{\alpha+\beta}=b \qquad \cdots(*)$

$(*)$ の第 1 式と第 2 式から　　$2^{\alpha+\beta}=a+1$

これと $(*)$ の第 3 式から　$\boldsymbol{b=a+1,\ \alpha+\beta=\log_2(a+1)}$

見本

(3) $\displaystyle\int_\alpha^\beta \left(\frac{2}{3}t+1\right)dt = \left[\ \frac{1}{3}t^2+t\ \right]_\alpha^\beta = \frac{1}{3}(\beta^2-\alpha^2)+(\beta-\alpha)$

条件より，$\displaystyle\int_\alpha^\beta \left(\frac{2}{3}t+1\right)dt = 2(\beta-\alpha)$ であるから $(\alpha \neq \beta)$

$$\frac{1}{3}(\beta^2-\alpha^2)+(\beta-\alpha) = 2(\beta-\alpha) \quad \text{ゆえに} \quad \alpha + \beta = 3$$

これを (2) の結果に代入すると

$$\log_2(a+1) = \quad \text{て} \quad \alpha \quad = 8$$

これらを $(*)$ に代入すると　　$2^\alpha +$

$\alpha < \beta$ より，$2^\alpha = 2,\ 2^\beta = 4$ であ

13.45 (1)　　$S(t) = \displaystyle\int_0^1 x|\,x$

(i) $t < 0$ のとき

$$S(t) = \int_0^1 x(x-t)\,dt = \left[\ \frac{1}{3}x \quad ^2\ \right]^1 \quad \mathbf{2}$$

$0 \leqq t$ き

$$\int_t^t x(-x+t)\,dx + \int_t x(x-t)\,dx$$

$$\frac{1}{3}x^3 + \quad + \left[\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{t}{2}x^2\ \right]_t^1$$

$$\mathbf{\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t +}$$

$1 <$ き

$$\int_0^1 x(-x+t)\,dt = \left[\ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{t}{2}x^2\ \right]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}}$$

(2) (1) の (i)，(ii) 区間における $S(t)$ は，それぞれ単調減少，単調増加であるから最小 もたない．したがって，(ii) についてその最小値を求めればよい．

$$S'(t) = t^2 - \frac{1}{2} = \left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$0 \leqq t \leqq 1$ における $S(t)$ の増減表は，次のようになる．

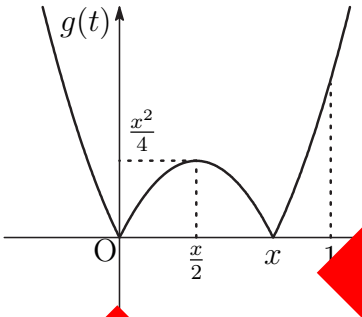
印刷本

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，最小値は　$S\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} - \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{6}}$

13.46　(1)　$g(t) = |t(t-x)| = \begin{cases} t^2 - xt & (t \leqq 0,\ x \leqq t) \\ -t^2 + xt & (0 < x < t) \end{cases}$

したがって，グラフの概形は，次のようになる．



(2)　t の関数 xt の原始関数の1つを $G(t)$ とすると

$$S(x) = \int_0^1 |t^2 - xt|dt = -\int_0^x (t^2 - xt)dt + \int_x^1 (t^2 - xt)dt$$

$$= -\left[G(t) \right]_0^x + \left[G(t) \right]_x^1$$

$$= G(1) - 2G(x) + G(0)$$

$$G(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x + 0 = -\frac{1}{6}x^3$$

$$S(x) = 0 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x\right) - 2\left(-\frac{1}{6}x^3\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x^3} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

(3)　(2)の結果から $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}$

したがって，$S(x)$ の増減表は，次のようになる．

x		$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

よって　$x = 0$ のとき**最大値** $\dfrac{1}{3}$，$x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき**最小値** $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} - \dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{6}}$

見本

13.47 (1) $f(x)=|(x-1)(x-a)|$ より　$f(0)=|a|$

i) $a<0$ のとき，$a<x<1$ において

$$f(x)=-(x-1)(x-a),\quad f'(x)=-2x+a+1$$

ii) $a>0$ のとき，$x<\min\{a,\ 1\}$ において

$$f(x)=(x-1)(x-a),\quad f'(x)=2x-a-1$$

よって　$a<0$ のとき　$\boldsymbol{f'(0)=a+1}$,

$a>0$ のとき　$\boldsymbol{f'(0)=-a-1}$

(2) (1) の結果から　$f(x)-bx-c$　$1)(x-$　$(0)x-f(0)$ より

i) $a<0$ のとき，$0\leqq x\leqq 1$ にお

$$f(x)-bx-c=|(x-1)$$

$$=-(x$$　$1)x+a-$

したがって　$S(a)=$　$x^2|\,dx=$　$^2\,dx$

ii) 0　<1 のとき，$0\leqq x\leqq 1$ において

$$-c=|(x-1)(x-a)|+($$

$$\begin{cases}(x-1)(x-a)+$　$)x-a & (0\leqq x\leqq a)\\ -(x-1)(x-a)$　$+1)x-a & (a\leqq x\leqq 1)\end{cases}$$

$$=$$　$(0\leqq x\leqq a)$

$$-a$$　$a^2+1>0\quad(a\leqq x\leqq 1)$$

って

$$)=\int_0$$　$(x-a-1)^2+a^2+1\}\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0+\left[-\frac{1}{3}(x-a-1)^3+(a^2+1)x\right]_a^1$$

$$=\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{3}-\frac{1}{3}+(a^2+1)(1-a)$$

$$=-\frac{a^3}{3}+a^2-a+\frac{2}{3}$$

見本

iii) $1 \leqq a$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$\begin{aligned} f(x) - bx - c &= |(x-1)(x-a)| + (a+1)x - a \\ &= (x-1)(x-a) + (a+1)x - a = x^2 \end{aligned}$$

したがって　$S(a) = \displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

よって　$\begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & \boldsymbol{S(a) = \dfrac{1}{3}} \\ 0 < a < 1 \text{ のとき} & \boldsymbol{S(a) = -a^2 - a + \dfrac{2}{3}} \\ 1 \leqq a \text{ のとき} & \boldsymbol{S(a) = \dfrac{1}{3}} \end{cases}$

(3) (2) の結果から，$0 < a < 1$ のとき

$$S'(a) = -2a - 1$$

$S(a)$ は $0 < a < 1$ で単調減少であるから，$0 < a < 1$ において最小値をもたない．

よって，$S(a)$ の最小値は　$\dfrac{1}{3}$ $(a < 0,\ 1 \leqq a)$

13.48　(1)　$f(x) = (x-1)^2$ とおくと

$$y = (a-1)\left(x - \frac{1}{a-1}\right)^2 + c - \frac{a}{a-1}$$

$a \geqq 2$ のとき，$a - 1 \geqq 1$ であるから，$\dfrac{1}{a-1} \leqq 1$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は　$\dfrac{a}{a-1}$

したがって，(*) を満たす条件は

$$c - \frac{a}{a-1} \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad c \geqq \frac{a}{a-1}$$

よって，最小値は　$\dfrac{a}{a-1}$

(2)　i) $1 < a \leqq 2$ のとき，$0 < a - 1 \leqq 1$，$1 \leqq \dfrac{1}{a-1}$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$g(1)$

ii) $a = 1$ のとき，$g(x) = -2x + c - 1$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$g(1)$

印刷本

iii) $a<1$ のとき，$a-1<0$，$\dfrac{1}{a-1}<0$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$g(1)$

i)〜iii) より，条件 $(*)$ が成り立つための条件は

$$g(1) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad c \geqq 4-a$$

よって，最小の c の値は　$4-a$

(3) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (ax^2+c)\,dx =$

i) $a \geqq 2$ のとき，$c \geqq \dfrac{a}{a-1}$ より

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \frac{a}{3} +$$

$$= \frac{1}{a-1}$$

$$\geqq 2\sqrt{\frac{a-1}{3} \times \frac{1}{a-}} =$$

ゆえに $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \frac{4+2\sqrt{3}}{3}$

等号が成り

$$= \frac{1}{-1}, \quad c = \frac{a}{a-1}$$

$$= 1+\sqrt{3}, \quad c =$$

$\geqq 2$ の　　より

$$f(x)\,dx \geqq \quad c = -\frac{2}{3}a+4 \geqq -\frac{2}{3}\cdot 2+4 = \frac{8}{3}$$

ゆえに　　$f(x)\,dx \geqq \dfrac{8}{3}$

等号が成り立つのは　$a=2$，$c=4-a=2$

i)，ii) より，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ は

$\boldsymbol{a=1+\sqrt{3}}$，$\boldsymbol{c=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}}$ をとる

印刷本

13.49 与えられた等式から

$$\int_0^2 |x^2-2x+a|\,dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x-a\right)dx + a^2 \quad \cdots(*)$$

したがって

$$\int_0^2 |x^2-2x+a|\,dx = \int_0^2 |(x-1)^2+a-1|\,dx$$

$$= \int_{-1}^1 |x^2+a-1|\,dx = 2\int_0^1 |x^2+a-1|\,dx,$$

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x-a\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^2-a\right.$$

上の 2 式を $(*)$ に代入すると

$$2\int_0^1 |x^2+a-1| - 2$$

i) $a<0$ のとき

$$\int_0^1 |x^2+a-1|\,dx = -\int_0^1 (x^2+$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3+\right)x\Big]_0 = \frac{2}{3}-a$$

これ $(*)$ に代

$$\left(\frac{2}{3}\right.$$ $1-2a$ ゆえに $a^2=\frac{1}{3}$

注意 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$<$ き，$t=\sqrt{\ }$ と $(0\leqq t\leqq 1)$

$$\int_0^{\ } -1|\,dx = \int_0^1 |x^2-t^2|\,dx$$

$$= -\int_0^t (x^2-t^2)\,dx + \int_t^1 (x^2-t^2)\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3}-t^2x\right]_0^t + \left[\frac{x^3}{3}-t^2x\right]_t^1$$

$$= \frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3},$$

$$1-2a+a^2=(1-a)^2=t^4$$

見本

これらを (**) に代入すると　　$2\left(\frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3}\right) = t^4$

整理すると　　$3t^4 - 8t^3 + 6t^2 - 2 = 0$

ここで，$f(t) = 3t^4 - 8t^3 + 6t^2 - 2$ とおくと，$0 < t < 1$ において

$$f'(t) = 12t^3 - 24t^2 + 12t = 12t(t-1)^2 > 0$$

$f(t)$ は，$0 < t < 1$ で単調増加，$f(1) = -1 < 0$ であ[illegible]，$f(t) = 0$ を
みたす t $(0 \leqq t \leqq 1)$ は存在しない

iii) $a > 1$ のとき

$$\int_0^1 |x^2 + a - 1|\,dx = \int_0^1 [illegible]$$

[illegible] $= a - \frac{1}{3}$

これを (**) に代入すると

[illegible] $\left(a - \frac{2}{3}\right) = 1 - 2a + a^2$　整理す[illegible] $3a^2$ [illegible] $= 0$

[illegible] に注[illegible] これを解くと　　$a = \frac{6}{}$

iii) [illegible] める　　$\boldsymbol{a = -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{15}}{3}}$

0　(1) [illegible] $= 9$ [illegible] $= 9$

[illegible] (x) [illegible] $+ b$ よ[illegible] 等式の x の[illegible] 比較して　$a = 3$

し[illegible] て，f [illegible] $bx + 9$．こ[illegible] $= -1$ を代入すると

[illegible] (-1) [illegible] ゆえに　$b = -4$

$\boldsymbol{= 3x^2 -}$ [illegible]

(2) (1) の結果か[illegible] $(x) = 6x - 4$．これと恒等式の定数項を比較して

$$-9k - 4 + \int_0^k (3t^2 - 4t + 9)dt = -4$$

$$-9k + \Big[\, t^3 - 2t^2 + 9t \,\Big]_0^k = 0$$

$$k^3 - 2k^2 = 0$$

$k > 0$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{k = 2}$

見本

13.51 (1) $f(x)=x^2-2x\displaystyle\int_{-2}^{1}f(t)\,dt$ より，$k=\displaystyle\int_{-2}^{1}f(t)\,dt$ とおくと

$$f(x)=x^2-2kx$$

したがって　$k=\displaystyle\int_{-2}^{1}(t^2-2kt)\,dt$

$$=\left[\frac{t^3}{3}-kt^2\right]_{-2}^{1}=3k+3$$

ゆえに　$k=3k+3$　これを解

よって　$\boldsymbol{f(x)=x^2+3x}$

(2)　$\displaystyle\int_{-2}^{1}|f(x)|\,dx=\int_{-2}^{0}(-x^2-$ dx

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\quad+\frac{3}{2}\right.$$

(3) 直線 $+k$ と曲線 $y=|f(x)|$ との共有

個 $=|f(x)|-x$ と直線 $y=k$

線の しい．

(x)

$=\begin{cases}$ $<-3,\ 0\leqq x$

$-4x$ $\leqq x\leqq$

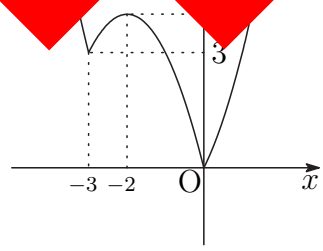
よ **$k<$ 有点 0 個**

有点 1 個

$k<$ 共有点 2 個

$-3,\ 4$ のと 共有点 3 個

<4 のとき 共有点 4 個



13.52 (1)　$=-3x^2+2x\displaystyle\int_{0}^{1}f(t)\,dt-\int_{-1}^{0}f(t)\,dt$

$A=\displaystyle\int_{0}^{1}f(t)$　$B=\displaystyle\int_{-1}^{0}f(t)\,dt$ とおくと

$$f(x)=-3x^2+2Ax-B$$

印刷本

ゆえに　　$A = \displaystyle\int_0^1 (-3t^2 + 2At - B)\,dt = \Big[-t^3 + At^2 - Bt \Big]_0^1$

$= -1 + A - B$

$B = \displaystyle\int_{-1}^0 (-3t^2 + 2At - B)\,dt = \Big[-t^3 + At^2 - Bt \Big]_{-1}^0$

$= -1 - A - B$

上の 2 式から　　$A = 1,\ B = -$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = -3x^2 + 2x}$

(2) (1) の結果から　　$f'(x) = -6x + 2$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ に

$y - (-3a^2 + 2$ $(-$

すなわち　　$y = (-6a$ $3a^2 + 1$

これが点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通るから

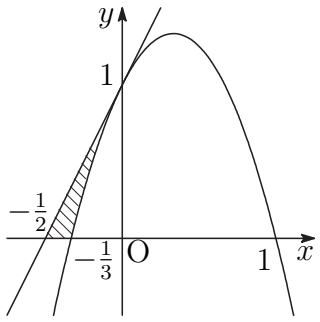
0 $2)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 3a^2 + 1$ こ $3a(a+1) = 0$

a であ 0　よって　$\boldsymbol{y = 2x + 1}$

(る面 とす

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{}$ $x^2 + 2x +$

$-x^3 + x$ $\dfrac{}{\mathbf{108}}$



13.53　(1) 等式 $f(x) =$ $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt + 2\int_1^x f'(t)\,dt$ から

$(x) = x^2 - x\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt + 2\{f(x) - f(1)\}$

したがって　　$f(x) = -x^2 + x\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt + 2f(1)$

見本

ここで，$a=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$，$b=f(1)$ とおくと (a，b は定数)

$$f(x)=-x^2+ax+2b$$

よって，$f(x)$ は 2 次関数である．

(2) (1) の結果から

$$a=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1(-t^2+at+$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+\right.\qquad\qquad\left.\frac{a}{2}+2b,\right.$$

$$b=f(1)=-1+a$$

整理すると　$a-4b=-\dfrac{2}{}$　　$b=$

これを解いて　$a=\dfrac{2}{3}$,　　よって　　$=-$　　$\dfrac{}{\mathbf{3}}$

13.54　(1)　　$\displaystyle\int_{}^{x} f(t)\,dt=(x-a)(x^2+x$

に $x=$　　すると　　$(2-a)(6-$　　0

したが　　または　$b=-6$　　①

(*)　　を x　　と

$$3x^2+$$　　$)x-a+b$

$f($　　であ

$-a)$　　に　$a+b=3$　$\cdots$②

①　　$a=2$　　または　$\begin{cases}a=9\\b=-6\end{cases}$

　　$=1$

(i) $a=2$，b　　とき　$f(x)=3x^2-2x-1$

$f(x)=0$　　は　　$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{3},\ 1}$

(ii) $a=9$　　-6 のとき　$f(x)=3x^2-16x-15$

$f(x)=0$ の解は　　$\boldsymbol{x=\dfrac{8\pm\sqrt{109}}{3}}$

印刷本

(2) $a<0$ であるから，① より　$b=-6$

したがって　$y=3x^2+2(1-a)x-a-6$

これを a について整理すると

$$(2x+1)a+y-3x^2-2x+6=0$$

任意の a に対して，上式をみたす点 $(x,\ y)$ は

$$2x+1=0,\quad x^2-2x+$$

これを解いて　$\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{25}{4}\right)$

13.55　(1) $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ を x で微分す

条件より，$F(x)$ は $x=\pm a$ で

$$F'(\pm$$　すなわち　$\pm a)=$$

2 次関数 $f(x)$ は，$x+a$，$x-a$ を因数に

$$f(x)=k(x+a)(x-a)$$

とおけ

$$=\int_0^x k(t^2-a^2)\,dt$$

$$\left[\frac{t^3}{3}-a^2t\right]_0^x=\left(\frac{x^3}{3}-a^2x\right)\quad\cdots(*)$$

とき　$F(-x)=k\left\{\left(-\dfrac{x^3}{3}+a^2x\right)\right\}=-k\left(\dfrac{x^3}{3}-a^2x\right)=-F(x)$

(2) $(*)$

$$-\frac{2}{3}ka^3\quad\cdots①$$

$F(x)+F(a)=0$ のとき　$k\left(\dfrac{x^3}{3}-a^2x\right)-\dfrac{2}{3}ka^3=0$

$k\neq0$ であるから，これを整理すると

$$a^2x-2a^3=0\quad\text{ゆえに}\quad(x+a)^2(x-2a)=0$$

よって，求める x は　$\boldsymbol{x=-a,\ 2a}$

印刷本

(3) $F'(0)=f(0)$ より　$F'(0)=-ka^2$

$g(x)=\dfrac{F(x)}{F'(0)}$ とおくと　$g(x)=-\dfrac{F(x)}{ka^2}$．これを微分すると

$$g'(x)=-\frac{F'(x)}{ka^2}=-\frac{f(x)}{ka^2}=-\frac{k(x+a)(x-a)}{ka^2}=-\frac{1}{a^2}(x+a)(x-a)$$

このとき，$g(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	
$g'(x)$	$-$		$+$	0	
$g(x)$	↘		↗		↘

よって，求める極大値は，① により

$$g(a)=-\frac{F(a)}{k}$$

13.56　(1) $a=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$，$b=\int_{-1}^{0}$ おくと　$3b$

したが　て

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1\left(\frac{3a}{16}t^2-\frac{3b}{7}t\right.$$

$$\left.-\frac{3b}{4}t^2+7t\right]_0^1=\frac{a}{16}\cdot 7 \qquad \cdots①$$

$$b=\int_{-1}^{0}(t)\,dt=\int_{-1}^{0}\left(\frac{3a}{16}t^2-\frac{3b}{7}t+7\right)dt$$

$$=\left[\frac{a}{16}t^2+7t\right]_{-1}^{0}=\frac{3b}{14}+7 \qquad \cdots②$$

② を　$a=$　って　$\boldsymbol{f(x)=x^2-4x+7}$

(2) $\int_0^x g(t)\,dt-\dfrac{2}{3}+2x^2-2x+1$ より

$$\int_0^x g(t)\,dt=(x-1)g(x)+\frac{2x^3}{3}-2x^2+2x-1$$

$g(x)$ は 2 次　あるから，$g(x)=px^2+qx+r$ とおくと

$$\int_0^x g(t)\,dt=(x-1)(px^2+qx+r)+\frac{2x^3}{3}-2x^2+2x-1$$

$$=\left(p+\frac{2}{3}\right)x^3+(-p+q-2)x^2+(-q+r+2)x-r-1 \qquad \cdots(*)$$

印刷本

$(*)$ に $x=0$ を代入すると　$0=-r-1$　ゆえに　$r=-1$

$(*)$ の両辺を x で微分すると

$$px^2+qx+r=(3p+2)x^2+2(-p+q-2)x+(-q+r+2)$$

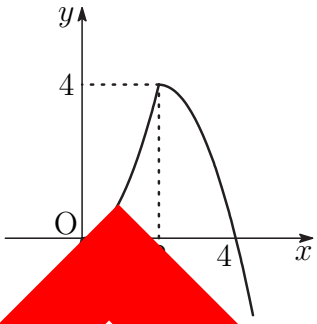
上式の両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$p=3p+2,\quad q=2(-p+q-2),\quad r=-q+r+2$$

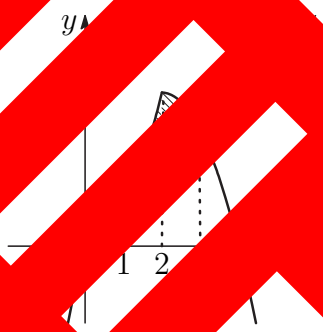
これを解いて　$p=-1$，$q=2$　って　$\boldsymbol{g(x)}$　$\boldsymbol{+2x-1}$

別解 (佐賀大学 2012) 7

13.57　(1) 曲線 C の概形は，次のようになる．



(求める面積は，次の図の斜線部分である．



求める面積 S は

$$S=\int_0^1(\quad x^2)dx+\int_1^2(x^2-x)dx+\int_2^3\{(-x^2+4x)-x\}dx$$

$$=\left[\quad\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_2^3=\boldsymbol{\frac{13}{6}}$$

13.58　$C:y=(x-p)^2$　の頂点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は，放物線 $y=-4x^2+12x$ $(y\geqq 0)$ 上を動くので，P は x 軸の上側にあり，

$$q=-4p^2+12p\quad\cdots①$$

見本

である．したがって，C と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた部分の面積を S とすると

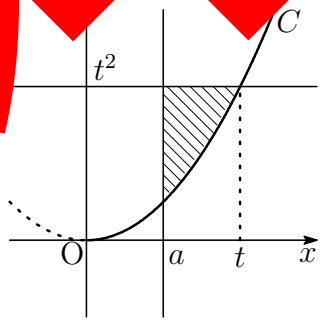
$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(x-p)^2+q\}\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{3}(x-p)^3+qx\ \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3}-4p+2p^2+2q \end{aligned}$$

上式に ① を代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{8}{3}-4p+2p^2+ \\ &= -6p^2+20p \\ &= -6\left(\qquad +\frac{58}{3} \right. \end{aligned}$$

よって，面積 S は $\boldsymbol{p=\frac{5}{3}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{58}{3}}$ をとる

13.59 (1) C と x 軸の斜線部分の面積である．



$$\int_a^t (x^2-a^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(2t^3 \qquad +a^3)$$

$$= \qquad \cdots ①$$

$$\left(\frac{t+a}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{t+a}{2}-a\right)^2\left(2\cdot\frac{t+a}{2}+a\right)$$

$$= \frac{1}{12}(t-a)^2(t+2a) \quad \cdots ②$$

①，② より

$$\frac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)} = \frac{1}{3}(t-a)^2(2t+a)\times\frac{12}{(t-a)^2(t+2a)} = \boldsymbol{\frac{4(2t+a)}{t+2a}}$$

印刷本

(2) (1) の結果から

$$8-\frac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}=8-\frac{4(2t+a)}{t+2a}=\frac{12a}{t+2a}$$

$0<a<t$ であるから　$\dfrac{12a}{t+2a}>0$

ゆえに　$8-\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}>0$　よって　$\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}<8$

13.60　(1) 求める面積は

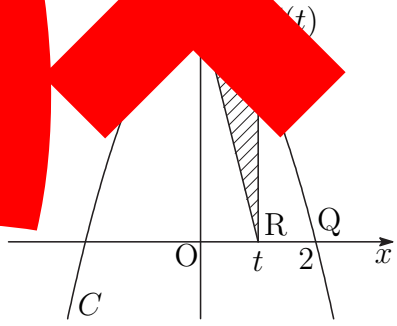
$$\int_0^2(-x^2+4)\,dx=\frac{16}{3}$$

(2) 右の図から

$$S(t)=\int_0^t(-x^2+4)\,dx-\frac{1}{2}\mathrm{OR}\cdot\mathrm{OP}$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^t-\frac{1}{2}\cdot t\cdot 4$$

$$=-\frac{1}{3}t^3+2t$$



(2) の結果から

$$S'(t)=-t^2+2=-(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$$

$S(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	0	↗	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$	↘	$\frac{4}{3}$

よって，$t=\sqrt{2}$ のとき最大値 $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ をとる．

見本

13.61 (1) $y = 4x^2 + 3$ を微分すると　$y' = 8x$

点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2+3)$ における接線 l の傾きは $8p$ であるから，その方程式は

$$y - (4p^2+3) = 8p(x-p)$$

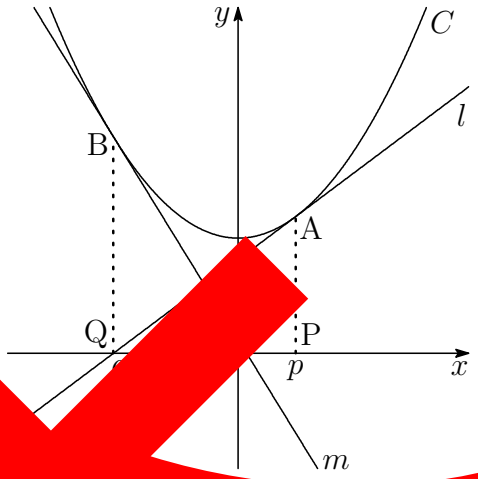
すなわち　$y = 8px - 4p^2 + 3$

l は $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ を通るから

$$0 = 8pq - 4p^2 + 3 \quad \cdots ①$$

$p \neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{q = \dfrac{4p^2 - 3}{8p}}$$



(2) 点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2+3)$ における接線 m

方程式は，(1) と同様にして

$$y = 8qx - 4q^2 + 3$$

を得る．これが点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ [illegible] るから

[illegible]$pq - 4q^2 + 3 \quad \cdots ②$

[illegible]$= \pm p$

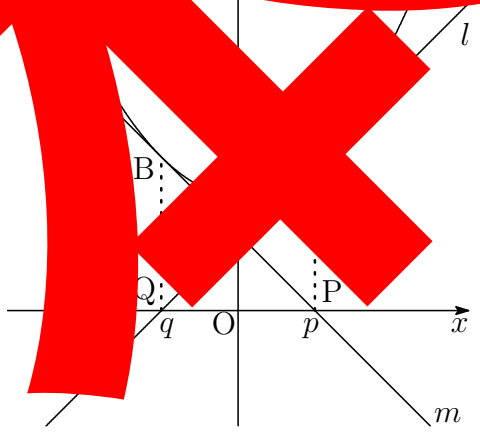
$= p$ の[illegible]

[illegible]$3 =$ [illegible] 不適

p の[illegible] ① [illegible]

0 [illegible]$p^2 +$ [illegible]

と[illegible] これ[illegible] $\boldsymbol{(p,\ q) =}$ [illegible] $\mp \dfrac{1}{2}\right)$ **(複号同順)**



[illegible]の結果[illegible] 2 本の[illegible] $y = 4x + 2,\ y = -4x + 2$

[illegible]放物線で囲[illegible]部分は，y 軸に関して対称であるから，

求[illegible]積

$$S = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \{(4x^2+3) - (4x+2)\}\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

13.62 (1) $y = -x^2 +$ [illegible]$_2$ を微分すると　$y' = -2x + 2$

点 $\mathrm{A}\left(t, -t^2 + 2t - \frac{1}{2}\right)$ における接線 l の方程式は

$$y - \left(-t^2 + 2t - \frac{1}{2}\right) = (-2t+2)(x-t)$$

見本

すなわち　$y=(-2t+2)x+t^2-\dfrac{1}{2}$

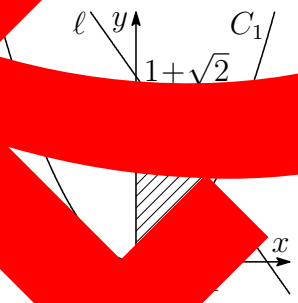
l と C_1 の交点の x 座標は

$$x^2=(-2t+2)x+t^2-\frac{1}{2}\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{x=-t+1\pm\frac{|2t-1|}{\sqrt{2}}}$$

(2) $t=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，ℓ の方程式は，(1) の結果から　　$\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}$

また，ℓ と C_1 の交点の x 座標は　　$=1,-1-\sqrt{}$

右の図から，求める面積を S と



$$S=\int_0^1\{(-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2})-x$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+(1\right.\qquad\left.\right]_0$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

13.63　(1) $f(x)$　　$+2x+3$，$g(x)=x^2-2(a-$　　3．　　すると

$$-\quad+3=x^2-2(a-1)x+3$$　　に　$x(x-a)=$

よって　　$\boldsymbol{0,\qquad -a^2+2a+3)}$

(2)　　$\int_0\{f($　　(x)　　$2\int_0^a x(x-a)\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}a^3}$

A$(0,$　　$(a,-a^2$　　$+3)$ とし，C　　から

$$\overrightarrow{\text{A}}\quad -a^2+\quad \overrightarrow{\text{AC}}=(1,\ 1)$$

$$T=\frac{1}{2}|a\quad +2a)\cdot 1|=\frac{1}{2}|a(a-1)|=\frac{1}{2}a(a-1)$$

$$k=\frac{S}{T}=\frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{2}a(a-1)}=\frac{2a^2}{3(a-1)}=\frac{2}{3}\left(a-1+\frac{1}{a-1}+2\right)$$

ここで，a　　0 より，相加平均・相乗平均の関係により

$$a-1+\frac{1}{a-1}\geqq 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}}=2\quad\text{ゆえに}\quad k\geqq\frac{8}{3}$$

見本

上式において等号が成立するのは

$$a-1=\frac{1}{a-1} \quad \text{すなわち} \quad a=2$$

よって，$\boldsymbol{a=2}$ のとき k は最小値 $\dfrac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{3}}$ をとる．

13.64 (1) C 上の点を $\mathrm{X}(t,\ at^2)$ とすると $(t \geqq 0)$

$$\mathrm{AX}^2 = t^2 + \left(at^2 - \left(a+\right.\right.$$

$$= a^2t^4 - \left(\qquad - \frac{1}{}\right)^2$$

$$= a^2(t^2$$

AX^2 は，$t^2=1$ すなわち $t=1$ のとき $\left(\qquad\right)^2$ $\left(\qquad 1+\qquad\right)$ とる．

よって $\mathbf{P(1,\ a)}$，$\mathbf{AP}$ $\sqrt{\boldsymbol{1+\dfrac{1}{4a^2}}}$

(2) $\left\{\left(a+\dfrac{1}{2a}\right)\right\} \times 1 - \displaystyle\int_0^1 ax^2$

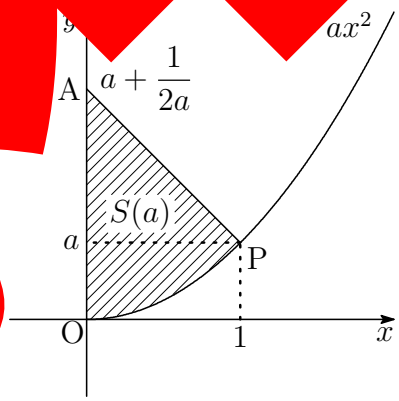
$$= \qquad 4a$$

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{3}} +$$

$a>0$ $\dfrac{2a}{3} >$ >0 であるか

相 の和および 関係によ

$$2 \qquad \geqq 2\sqrt{\frac{2a}{3}\cdot 4a}$$

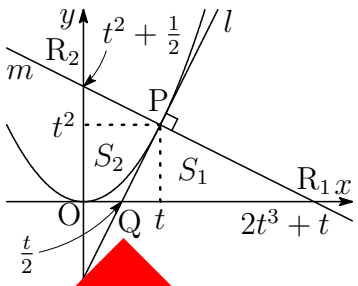


等号が成り立つのは $\dfrac{2a}{3}=\dfrac{1}{4a}$ すなわち $a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のときに限る．

よって，$S(a)$ は $\boldsymbol{a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{6}}}{\boldsymbol{3}}$ をとる．

見本

13.65 (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$



$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ における接線 l の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t)$$

ゆえに　　$y = 2tx - t^2$

Q の x 座標は，これに $y = 0$ を代入して

$$\boldsymbol{x = \frac{t}{2}}$$

$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，l に垂直な直線 m の方程式は

$$y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t) \qquad y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$$

R_1 の x 座標は，これに $y = 0$ を代入して

(2) S_2 は，$0 \leqq x \leqq t$ において，x 軸と放物線 $y = x^2$ で囲まれた部分の面積であるから

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) + t \cdot \left(t^2 - \int_0^t x^2\,dx\right)$$

$$= t^3 + \frac{t}{4} - \frac{t^3}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\left\{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) + t\right\} \times t^2 = t^5 + \frac{1}{4}t^3$$

ゆえに，(2) の結果から

$$S_1 - S_2 = \left(t^5 + \frac{1}{4}t^3\right) - \left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t\right)$$

$$= \frac{t}{12}(12t^4 - 3)$$

$$= \frac{t}{12}(3t^2 + 1)(4t^2 - 3)$$

$$= \frac{t}{12}(3t^2 + 1)(2t + \sqrt{3})(2t - \sqrt{3})$$

$t > 0$ であるから，$S_1 > S_2$ が成り立つとき

$$\frac{t}{12}(3t^2 + 1)(2t + \sqrt{3})(2t - \sqrt{3}) > 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t > \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

13.66 (1) $f(x) = g(x)$　すなわち　$x^2 = |2x^2 - 4|$

ゆえに　　$2x^2 - 4 = \pm x^2$

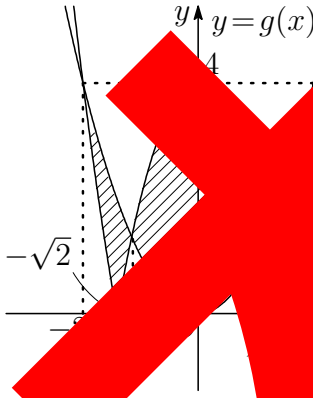
見本

したがって　　$2x^2-4=x^2$　　を解いて　$x=\pm 2$

$2x^2-4=-x^2$　を解いて　$x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

よって　　$\boldsymbol{x=\pm 2,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

(2) $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$ が成り立つので，右の図のように $y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフは，ともに y 軸に関して対称である



したが　て，求める面積を　とすると，（　　求めた

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\{(4-2x^2)-x^2\}\,dx+\int\qquad 2x^2)\}$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{2}\{x^2-(2x^2-4)$$

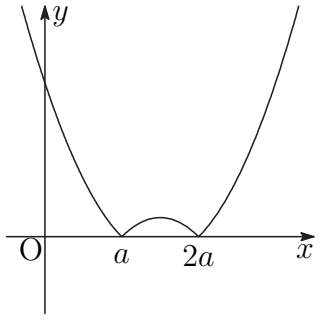
$$+\left[\ x^3-4\ \right]_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}+\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$=\frac{32\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{}+\frac{16}{3}$$

て　　$=\dfrac{\mathbf{64}}{\mathbf{9}}\qquad\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{3}}$

13.67　x^2-3a　　の　　数の 1 つを $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}ax^2+2a^2x$ とおく．

i) $1\leqq a$ のとき



$$I(a)=\qquad -a)(x-2a)\,dx$$

$$=F(2)-F(0)=2a^2-\frac{3}{2}a+\frac{1}{3}$$

$$I'(a)=4a-\frac{3}{2}>0$$

印刷本

ii) $a < 1 \leqq 2a$ すなわち $\dfrac{1}{2} \leqq a < 1$ のとき

$$I(a) = \int_0^a (x-a)(x-2a)\,dx - \int_a^1 (x-a)(x-2a)\,dx$$
$$= 2F(a) - F(0) - F(1) = \frac{5}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{3}{2}a - \frac{1}{3}$$
$$I'(a) = 5a^2 - 4a + \frac{3}{2} = 5\left(a - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{7}{10} >$$

iii) $0 < 2a \leqq 1$ すなわち $0 < a \leqq$ き

$$I(a) = \int_0^a (x-a)(x-2a)\,dx$$
$$+ \int_{2a}^1 (x-a)($$
$$= 2F(a) - F($$ $$(0) + F$$ $$\frac{1}{3}a$$ $$3$$
$$I'(a) = a^2 + 4a - \frac{3}{2}$$

$= 0$ となるのは $a =$

より I は右のように

a		$\cdots$	$\frac{-4+\sqrt{22}}{2}$	$\cdots$
$I'(a)$		$-$	0	$+$
$I(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

・した と，I 小となる a の値は

$$\frac{+\sqrt{}}{2}$$

13. を微分 $= 2x$

の点 における 式は

$a^2 = 2a(x$ すなわち $y = 2ax - a^2$

l と $y =$ の共有点の x 座標は

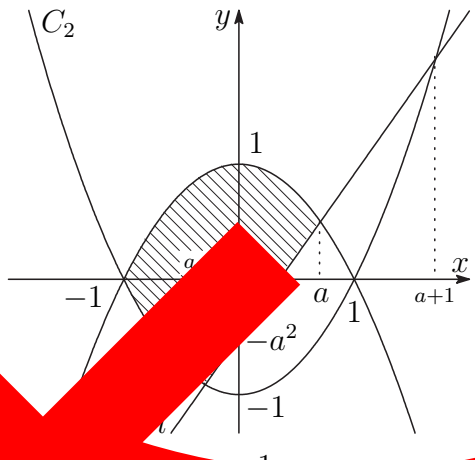
$a^2 = x^2 - 1$ これを解いて $x = a \pm 1$

求める面積

$$\int_{a-1}^{a+1} \{(2a$$ $$a^2) - (x^2-1)\}\,dx = -\int_{a-1}^{a+1} (x-a+1)(x-a-1)\,dx$$
$$= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{(a+1)-(a-1)\}^3 = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

見本

(2) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，l の方程式は



$$l : y=\sqrt{2}x+\frac{1}{2}$$

l と C_3 の共有点の x 座標は

$$\sqrt{2}x+\frac{1}{2}=-x^2+1$$

ゆえに　$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(=a),\ -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$f(x)=-x^2+1$ とし，$f(x)$ の原始関

求める面積を S とすると

$$S=2\int_{-1}^{a-1} f(x)\,d \qquad (f(x)\qquad x$$

$$=2\Big[\ F(x)\ \Big]_{-1}^{a-} \qquad \Big[\ F(x)\ \Big]_{a-1}^{a} \qquad x^2+$$

$$(a)+F(a-1)-2F(-1)-$$

$$a-\frac{1}{3}(a-1)^3+a- \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)-a^2+a$$

$$=-\frac{2}{} \qquad \frac{2}{}$$

のと $=\dfrac{1}{\sqrt{}}$ から　$\dfrac{\sqrt{2}+4}{6}$

13. P $a+$ の表す θ るとき

$$\text{n}\theta \geqq \cos \qquad \sin^2\theta+\sin\theta+a-1 \geqq 0$$

し て $\text{in}\theta+\dfrac{1}{2}\right)^2+a-\dfrac{5}{4}\geqq 0 \quad \cdots(*)$

$180^\circ \leqq \theta \leqq 3$ あるから

$$\sin\theta \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq \left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{1}{4}$$

上式から，$(*)$ を常にみたす a の値の範囲は

$$a-\frac{5}{4}\geqq 0 \quad \text{よって} \quad a\geqq\frac{5}{4}$$

印刷本

(2) $a=\dfrac{5}{4}$ のとき，C の方程式は

$$x^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=1 \quad \left(y\leqq\frac{5}{4}\right)$$

これと $y=x^2$ から x^2 を消去すると

$$\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=0$$

ゆえに，C と放物線 $y=x^2$ は，[illegible]点で[illegible]のように接する．

$$\mathrm{Q}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right)$$

$\angle \mathrm{QAR}=\dfrac{2}{3}\pi$ より，C と直線[illegible]で囲まれ[illegible]を S_1 とす[illegible]

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi-\triangle \mathrm{AQ}[illegible]=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

四[illegible]の面積が $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$ であるから，[illegible]S と[illegible]

$$\frac{3}{4}\sqrt{3}-S_1-2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}}$$

13.70 [illegible]は[illegible]で，$f'(-$[illegible]であるから

$$f'(x)=3a(x+1)(x-1)=3ax^2-3a$$

とおくと (a [illegible]

$$f(x)=ax^3-3ax+b \quad (b\text{ は定数})$$

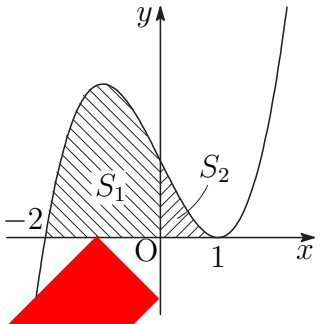
また，$f(1$[illegible]であるから　$-2a+b=0$

したがって　$f(x)=a(x^3-3x+2)=a(x-1)^2(x+2)$

よって　　$\boldsymbol{f(-2)=0}$

印刷本

(2) (1) の結果から



$$S_1 : S_2 = \int_{-2}^{0} (x^3-3x+2)\,dx : \int_{0}^{2} (x^3-3x+2)\,dx$$

したがって

$$\int_{-2}^{0} (x^3-3x+2)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^{0}$$
$$= 6$$

$$\int_{0}^{1} (x^3-3x+2)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \right.$$
$$= \frac{3}{4}$$

ゆえに　$S_1 : S_2 = 6 : \frac{3}{4} = 8$

13.71　(1)　$(x-1)^2+(y-1)^2=2$ -2 から 去す

$-1)^2+\{(x-2)-1\}^2=2$ ち

重解をもち，このとき y 2 $y=0$

って， -2 は円 C に点 **(2, 0** する．

) $(x$ $(y-$ $y=\frac{1}{4}x^2-1$ から y と消去し，整理すると

x^4 $+48$ すなわ $-2)^2\{(x+2)^2+8\}=0$

ゆ $x=2$ もち，この $=\frac{1}{4}x^2-1$ より $y=0$

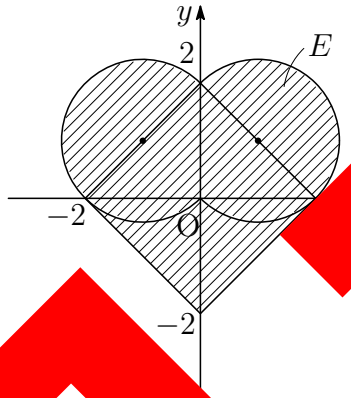
て，求 有点

見本

(3) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，A の表す領域は，x 軸，y 軸および直線 $x+y=2$ で囲まれた図形の内部および境界線である．このとき，$(x,\ y)$ に対して，x 軸，y 軸，原点に関して，それぞれ対称な点 $(x, -y)$，$(-x,\ y)$，$(-x, -y)$ も不等式 $|x|+|y| \leqq 2$ をみたす．したがって，A の表す領域は，4 点 $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(-2,\ 0)$，$(0, -2)$ を頂点とする四角形の内部およびその周上である．

$x \geqq 0$ のとき，B の表す領域は，y 軸の右側で，円 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ の内部とその境界線である．このとき，$(x,\ y)$ に対し［illegible］軸と対称な点 $(-x,\ y)$ も不等式 $(|x|-1)^2+(y-1)^2 \leqq 2$ をみた［illegible］

したがって，$A \cup B$ の表す領域［illegible］および $D \cap$［illegible］領域は，次のようになる．ただし，境界線を含む．



［illegible］$(2,\ 0$［illegible］$(-2,\ 0)$ を頂点とする［illegible］形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = 4$$

［illegible］物線［illegible］x^2-1［illegible］の下側の［illegible］面積は

$$\int_{-1}^{2} \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) dx = \frac{8}{3}$$

［illegible］$(0,\ 2)$ を直径と［illegible］の半径は $\sqrt{2}$ である．

よっ［illegible］求［illegible］積は

$$4 + \frac{8}{3} + \pi(\sqrt{2})^2 = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}} + \mathbf{2\pi}$$

見本

13.72 (1) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx$

$$= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

(2) L は点 $(1,\ 2)$ を通り，傾き a の

$$y-2=a(x-1) \quad \text{す}$$

L と放物線 $y=x^2$ の方程式から y

$$x^2=ax-a+2 \quad \text{す} \qquad x^2 \qquad 0 \quad \cdots$$

求める共有点の x 座標は，　を解いて　$\boldsymbol{a \pm}$　$\boldsymbol{8}$

(3) 2次　) の2つの解を α，β とすると　β

$$\beta- \qquad \frac{\sqrt{a^2-4a+8}}{2} - \frac{a-\sqrt{a}}{} \qquad = \sqrt{a^2-4a+8}$$

L と　$y=$　れた部分の面積　とすると

$$S = \qquad x-a \qquad x^2)\,dx$$

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\qquad dx$$

$$= \qquad \sqrt{a^2-4a+8}\,)^3$$

$$6$$

$$a+8=(a \qquad)+4$$

よって，S は　　**2** のとき最小値 $\boldsymbol{\frac{4}{3}}$ をとる．

13.73 (1) $C: y=f(x)$　$-2x+1$ と $l: y=x+k$ から y を消去すると

$$x^2 \qquad 1=x+k \quad \text{ゆえに} \quad x^2-3x+1-k=0 \quad \cdots①$$

C と l は異なる2点で交わるから，2次方程式 ① の判別式 D は

$$D=(-3)^2-4\cdot1(1-k)>0 \quad \text{すなわち} \quad k>-\frac{5}{4} \quad \cdots②$$

また，共有点の x 座標を α，β とすると $(\alpha<\beta)$，2 次方程式 ① の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=1-k \quad \cdots ③$$

$f(x)$ を微分すると　　$f'(x)=2(x-1)$

このとき，$f'(\alpha)f'(\beta)=-1$ であるから

$$2(\alpha-1)\cdot 2(\beta-1)=-1 \quad \text{ゆえに} \quad 4\{\alpha\beta-\square+1\}=-1$$

上式に ③ を代入すると　　$4(1-\square+1$

② に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{k}=$

(2) $k=-\dfrac{3}{4}$ のとき，① は　　x^2　　4

これを解いて　　$x=\dfrac{3}{2}$　　また　$y=\dfrac{\pm\sqrt{\square}}{2}$　　$\square$

よって，点 P，Q の座標は

$$\left(\frac{\boldsymbol{3-\sqrt{2}}}{\boldsymbol{2}},\ \frac{\boldsymbol{3-2\sqrt{2}}}{\boldsymbol{4}}\right),\quad \left(\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}},\ \frac{\boldsymbol{2\sqrt{2}}}{\boldsymbol{4}}\right)$$

(3) (　　) から　　$\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}-\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

める面積を S とす

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-(x^2-2x+1)\right\}dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}\left(x^2-3x+\frac{7}{4}\right)dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\sqrt{2})^3=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

13.74　(1) 2 つの放物線 $y=x^2$，$y=-x^2+2ax+\dfrac{1}{2a^2}$ の共有点の x 座標は

$$x^2=-x^2+2ax+\frac{1}{2a^2} \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2-2ax-\frac{1}{2a^2}=0 \quad \cdots(*)$$

印刷本

方程式 $(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4 = (-a)^2 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2a^2}\right) = a^2 + \frac{1}{a^2} > 0$$

よって，2 つの放物線は，異なる 2 点で交わる．

(2) 方程式 $(*)$ の解と係数の関係により　$\alpha+\beta = a$，$\alpha\beta = -\dfrac{1}{4a^2}$　$\cdots(**)$

したがって　$(\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$

$$= a^2 - \left(-\frac{1}{4a^2}\right) = a^2$$

$\alpha < \beta$ より，$\beta - \alpha > 0$ であるから　$\boldsymbol{\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}}}$

(3) $(*)$，$(**)$ より

$$2x^2 - 2ax - \frac{1}{2}$$

$$= 2\left\{x^2 - \quad \beta)x\right.$$

$$= 2(x - \alpha \quad \beta)$$

α [illegible] おいて，$y = -x^2 + 2ax + \dfrac{1}{2}$ [illegible] 上側 [illegible] ら

$$\int_\alpha \left(-x^2 + 2ax + \frac{1}{2a^2}\right) dx$$

$$\int_\alpha \left(-x^2 + 2ax + \frac{1}{2a^2}\right) dx$$

$$= -2\int_\alpha (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -2\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$

$$= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}\left(\boldsymbol{a^2 + \frac{1}{a^2}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

(4) [illegible] 平均の関係 [illegible]

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geqq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a^2}} = 2$$

上式において [illegible] が成立するのは　$a^2 = \dfrac{1}{a^2}$　すなわち　$a = \pm 1$

したがって　$S = \dfrac{1}{3}\left(a^2 + \dfrac{1}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \geqq \dfrac{1}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　$a = \pm 1$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$ をとる．

見本

13.75 (1) $f(x)=x^3-ax^2+bx+3$ より　$f'(x)=3x^2-2ax+b$

$f'(x)=0$ の解が $-\dfrac{2}{3}$，2 であるから，解と係数の関係により

$$-\frac{2}{3}+2=\frac{2a}{3},\quad -\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{b}{3}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{a=2,\ b=-4}$$

すなわち　$f(x)=x^3-2x^2-4x+3$

$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		
$f(x)$	↗	$\frac{121}{27}$	↘	−	

よって　$\begin{cases} \textbf{極大値}\ \frac{121}{27} & (x=- \\ \textbf{極小値}\ -5 & (x= \end{cases}$

(2)　$f'(x)+\dfrac{7}{3}=3x^2-$　$=3\left(x$　$\left($

求める面積を S とすると

$$-\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} 3\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)$$

13.76 $-x^2$　$-(x-3)^2+2$　よっ　$\boldsymbol{(3,\ 2)}$

l は　$(3,\ 2)$　$2)$ を通る直線で　ら

$-3)$　すなわち　$\boldsymbol{y=2x-4}$

$y=a$　$+c$ が　$(3,\ 2)$，B(1　を通るから

$+3b+c$,　$a+b+c$

て　$-4a+$

(4)　$-4a+2)x$　$4)$ と $l:y=2x-4$ で囲まれた図形の

面　と　$a>0$ より

$$S=\int_1^3 [2x-4-\{ax^2+(-4a+2)x+(3a-4)\}]dx$$

$$=\int_1^3 (x^2-4x+3)dx$$

$$=-a\int_1^3 (x-1)(x-3)dx$$

$$=-a\left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}a}$$

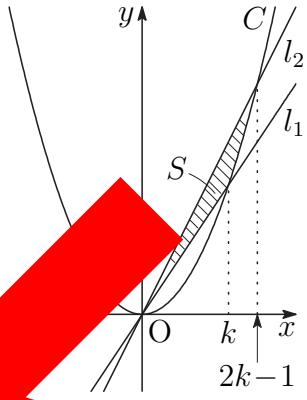
印刷本

13.77 (1) $C : y = x^2$, $l_1 : y = kx$, $l_2 : y = (2k-1)x$ とする．

C と l_1 の交点の x 座標は　$0,\ k$
C と l_2 の交点の x 座標は　$0,\ 2k-1$

$k > 1$ より　$(2k-1) - k = k - 1 > 0$

ゆえに　　$2k - 1 > k$



C と l_1 で囲まれた部分の面積を S_1，C と l_2 で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_1 = \frac{1}{6}k^3, \quad S_2 = \frac{1}{6}(2k$$

求める面積は，右の図の斜線部分で

$$S = S_2 - S$$

$$\frac{}{6}\boldsymbol{k^3} - \quad \boldsymbol{k}$$

(2) (1) の

$$= \frac{7}{2}k^2 - 4k + 1 = \frac{7}{2}(k - \quad)^2(\quad) + \frac{1}{2}$$

$k >$ 　であるから，S は 　して単調に増加する．

(3) 　$6k^3 -$ 　1 に 　果を代入すると

$$- 2k^2 + k - \frac{}{6} \quad k^3 - 7k^2 + 1$$

する

$$(k-1)(k \quad)(k - 2 - \sqrt{2}) < 0$$

$k >$ 　注意 　これを解くと　　$\boldsymbol{1 < k < 2 + \sqrt{2}}$

13.78 (1) $y = x^2$ を微分 　$y' = 2x$

C 上の点 P(　における接線 l_1 の傾きは　$2a$

l_1 に垂直な 　の傾きは $-\dfrac{1}{2a}$ であるから，l_2 の方程式は

$$y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a)$$

印刷本

l_2 と C の方程式から y を消去すると

$$x^2 - a^2 = -\frac{1}{2a}(x-a) \quad \text{ゆえに} \quad (x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right) = 0$$

P と異なる Q の x 座標は $\quad x = -a - \dfrac{1}{2a}$ $\quad$ また y 座標は $\quad y = \left(a+\dfrac{1}{2a}\right)^2$

よって，Q の座標は $\quad \left(\boldsymbol{-a-\dfrac{1}{2a}},\ \left(\boldsymbol{a+\dfrac{1}{2a}}\right)^{\boldsymbol{2}}\right)$

(2) $-a-\dfrac{1}{2a} \leqq x \leqq a$ において，直[illegible] $-a)+a^2$ は，放物線 $C : y = x^2$ の上側にある．したがっ[illegible] C は

$$S = \int_{-a-\frac{1}{2a}}^{a} \left\{ -\frac{1}{2a}([illegible] \right\} dx$$

$$= -\int_{-a}^{a} \left(x+[illegible]\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left\{a-\left(-a-\frac{1}{2a}\right)\right\}^3 \boldsymbol{2a+}$$

($[illegible]0$, [illegible]あるから，相加平均・[illegible]均の関係により

$$+\frac{1}{2a} \geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}} = 2$$

[illegible]式に[illegible]等号[illegible]立つのは

[illegible]$= \dfrac{1}{2a}$ すな[illegible] $a = \dfrac{1}{2}$

[illegible]きで[illegible]

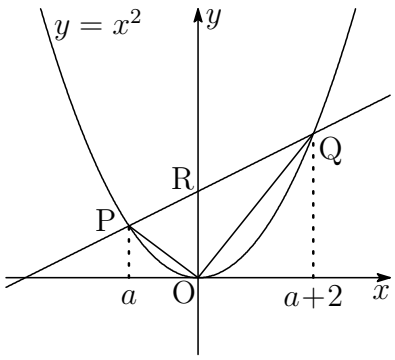
[illegible]小値は $\dfrac{1}{6}\cdot 2^3 = \boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$ そのときの a の値は $\quad \boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$

13.79 (1) 2 点 [illegible]$(a,\ a^2)$[illegible]$+2,\ (a+2)^2)$ を通る直線の方程[illegible]

$$y - a^2 = \frac{(a+2)^2 - a^2}{(a+2)-a}(x-a)$$

すなわち $\quad y = 2(a+1)x - a(a+2)$

この直線と y 軸の交点を R とすると，
$-2 < a < 0$ より



正本

$$\mathrm{OR} = -a(a+2)$$

ゆえに，△OPQ の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2}\mathrm{OR} \times \{(a+2) - a\} = \frac{1}{2}\{-a(a+2)\} \times 2 = \boldsymbol{-a(a+2)}$$

(2) 直線 PQ と放物線で囲まれた部分の面積は，上の図から

$$S_2 = \int_a^{a+2} \{2(a+1)x - a(a+2)$$

$$= -\int_a^{a+2}$$

$$= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{(a$$

(3) $S_2 = 2S_1$ に (1)，(2) の結果を代

$$\frac{4}{3} = -2a($$ ゆえに $$+$$ $$0$$

$-2 <$ <0 に注意して，これを解くと $\boldsymbol{-3 +}$

13.80 (1)

$x(x+$ すなわち

x 0 き

$) = x($ $= x^2 + 1$

$x(x$ 0 す

$x < 0$

$(x) =$ $1,$ $1 = -$ $+ 1$

線 C は右の になる．

直線 の傾 $\dfrac{1-2}{0-(-1)} = -1$

$f'(x) = -2x$ り点 $(a, f(a))$ における接線 ℓ の傾きは $-2a-2$

この点におけ 線が直線 PQ に平行であるから

$$-2a - 2 = -1$$

$-1 < a < 0$ に注意して $\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2}}$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{4}$ より，接線 ℓ の方程式は

印刷本

$$y-\frac{7}{4}=-\left\{x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-x+\frac{5}{4}}$$

(2) 求める面積を S_1 とすると

$$S_1=\int_{-1}^{0}\{(-x^2-2x+1)-(x^2+1)\}\,dx$$
$$=-2\int_{-1}^{0}(x+1)x\,dx=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\{0-(\quad)\quad=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(3) 曲線 C と接線 ℓ の接点以外の交　　座標は

$$x^2+1=-x+\frac{5}{4} \quad \text{すなわち}\quad \qquad =0 \quad \cdots①$$

の解である．この解を α，β $(\alpha<\beta$

$$S_2=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\left(-x+\right.\right.$$
$$=-\int_{\alpha}^{\beta}\left(\qquad-\frac{1}{4}\right)dx$$
$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx-$$

の解　　により　$\alpha+\beta=-1$　　$=-\frac{1}{4}$

$$(\beta-\qquad\qquad-4\alpha\beta=(-1)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=2$$

$<\beta$　　$-\alpha=$　　あるから

$$_2=\frac{1}{\qquad}\qquad\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-1}{3}}$$

13.81 $($　　$=2$　　$+1)t^2+$

$$=6t^2-6(a+1)t+6a=6(t-1)(t-a)$$

$a>1$ より，　　増減表は，次のようになる．

x		1	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'($	$+$	0	$-$	0	$+$
	$\nearrow$	$3a+b-1$	$\searrow$	$-a^3+3a^2+b$	$\searrow$

よって　$t=1$ のとき極大値 $\boldsymbol{3a+b-1}$，

$t=a$ のとき極小値 $\boldsymbol{-a^3+3a^2+b}$

見本

(2) 方程式 $f(t)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつのは，(1) の結果から

$$-a^3+3a^2+b<0<3a+b-1 \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} b>-3a+1 \\ b<a^3-3a^2 \end{cases}$$

である $(a>1)$．xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在する領域 D を表す不等式は

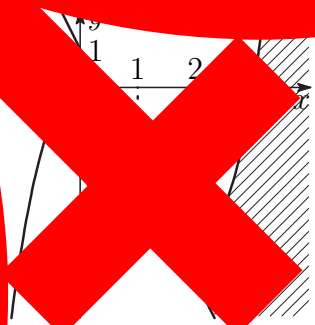
$$x>1, \quad y>-3x+1, \quad y<x^3-3$$

ここで，$y=-3x+1\cdots$①，$y=\quad -3x^2\cdots$②　と，② から

$$y'=3x^2-$$

これから，② の増減表，次のように

x	$\cdots$	0	$\cdots$		
$f'(x)$	+	0	−		+
$f(x)$	↗	0			↗



①，② から y を消去する

$$^3-3x^2=-3x+1$$

$$1)^3=0$$

$$=1 \ (3\text{ 重解})$$

ゆ　　②，②　　$(1,-2)$

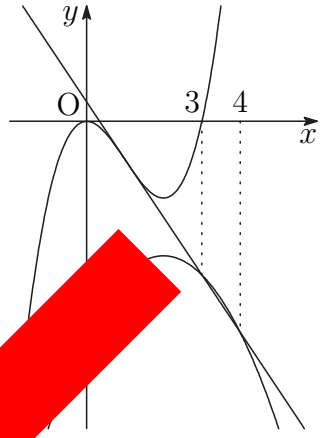
と，D　　領域　　図の斜線部分で，

界線を　　ない．

見本

(3)　$y = -x^2 + 4x - 11 \quad \cdots ③$

$= -(x-2)^2 - 7$



ゆえに，$x > 1$ において，② と ③ の共有点はない．① と ③ の共有点の x 座標は

$$-3x + 1 = -x^2 + 4x - 11$$

$$(x-3)(x-4) = 0$$

$$x = 3,\ 4$$

よって，求める面積を S とする

$$S = \int_3^4 \{(-x^2 + 4x -$$

$$= -\int_3^4 (x -$$

$$= -\left($$

解説（長崎 2010）[1]

13.82　(1) -1 の $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$，$= -$ $+ 2$

ℓ の は $(t$ $t \neq 2$ のとき　y $= -\frac{1}{f'(t)}(x-t)$

に $\left(-\frac{1}{2}t^2$ $\right) = -$ $(x-t)$

よ $t \neq 2$ $= \dfrac{1}{t-2}(x$ $- \dfrac{1}{2}t^2 + 2t + 3$

とき

(2) から，ℓ が $\left($ $, \frac{1}{2}\right)$ を通るとき

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{t-2}(-1-t) - \frac{1}{2}t^2 + 2t + 3$$

整理すると $6t^2 + 5t + 12 = 0$　ゆえに　$(t+1)(t-3)(t-4) = 0$

これを満 の中で $(t > -1)$，最小の t の値は　$\boldsymbol{t = 3}$

(3)　$t = 3$ を (1) の結果に代入すると　$\ell : y = x + \frac{3}{2}$

見本

$C : y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2|x+1| + 1$ は

$$x \leqq -1 \text{ のとき} \quad y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$$
$$x \geqq -1 \text{ のとき} \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$$

ℓ と C の共有点の x 座標は

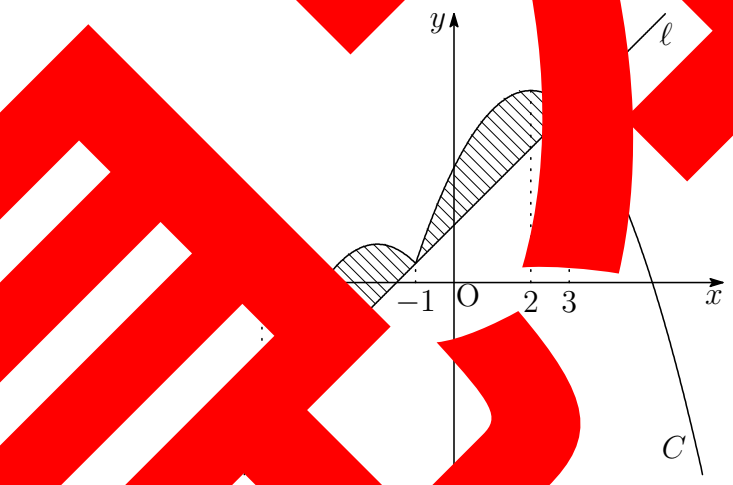
$x \leqq -1$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = x + \frac{3}{2} \quad \text{を解いて} \quad x = -5, -1$$

$x \geqq -1$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 = x + \frac{3}{2} \quad \text{を解いて} \quad x = -1,\ 3$$

ℓ と C で囲まれた部分は下に凸の斜線部分である



求める面積 S は

$$S = \int_{-5}^{-1} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 \right) - \left(x + \frac{3}{2} \right) \right\} dx + \int_{-1}^{3} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 \right) - \left(x + \frac{3}{2} \right) \right\} dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-5}^{-1} (x+5)(x+1)\,dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} (x+1)(x-3)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\{-1-(-5)\}^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\{3-(-1)\}^3 = \mathbf{\frac{32}{3}}$$

印刷本

13.83 (1) C_1 は原点 O を通るから　　$\boldsymbol{c = 0}$

2 点 P，Q の y 座標が等しいので，C_1 の軸は，線分 PQ の垂直二等分線であるから，C_1 は y 軸に関して対称な放物線である．したがって

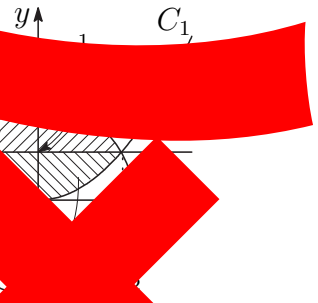
$$\boldsymbol{b = 0}$$

さらに，$C_1 : y = ax^2$ が点 P を通ることから

$$\frac{1}{2} = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = \frac{2}{3}}$

(2) 求める部分の面積を S_1 とすると



$$S_1 = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x^2\right) dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}x - \frac{2}{9}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(3) C_2 と [illegible] で囲まれた図形のうち，線[illegible]の [illegible] 積を S_2 とおく．$\angle \mathrm{POQ} = \frac{2\pi}{3}$ であるから

$$= \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \triangle \mathrm{PO}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2 \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

求める [illegible] と S と

$$S_1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}}$$

13.84 (1) y [illegible] と　　$y' = 2x$

接点 P の x 座[illegible]　$2x = \sqrt{3}$　すなわち　$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって，接点[illegible]座標は　　$\left(\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \boldsymbol{\frac{3}{4}}\right)$

l は点 P を[illegible]傾き $\sqrt{3}$ の直線であるから

$$y - \frac{3}{4} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)　すなわち　\boldsymbol{y = \sqrt{3}x - \frac{3}{4}}$$

印刷本

(2) P を通り，l に垂直な直線は

$$y-\frac{3}{4}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{5}{4}$$

求める円の中心 C は，この直線と y 軸との交点であるから　$\mathrm{C}\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$

また，円の半径は　$\mathrm{CP}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\right)^2}=1$

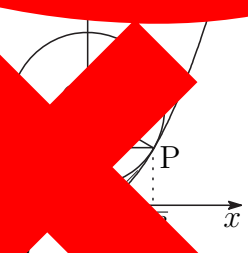
よって，求める円の方程式は　$x^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=1$

(3) (2) で求めた円と放物線 $y=x^2$ と

を Q とすると　$\angle\mathrm{PCQ}=\frac{2}{3}\pi$

この角を中心角とする扇形 CQ の

除いた面積を S_1 とする



$$\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot1^2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

線 $y=$ 分 PQ で囲まれた部分の を S_2 とすると

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

って，求める面積 すると

$$S=\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\sqrt{\mathbf{3}}-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$$

13.85 (1) $y'=2x$

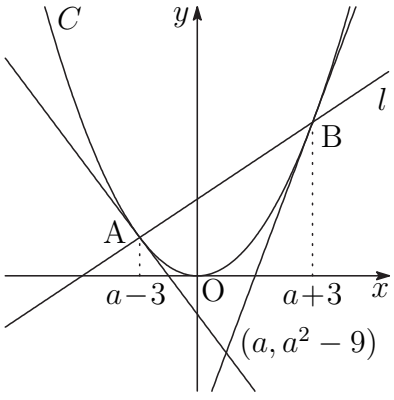
C 上の点 $(t,$ における接線の方程式は

$$y=2t(x-t)$$
$$=2tx-t^2$$

これが点 $(a,$ $-9)$ を通るとき

$$a^2-9=2ta-t^2$$

これを解いて　$t=a\pm3$



印刷本

A$(a-3,\ (a-3)^2)$，B$(a+3,\ (a+3)^2)$ とすると，l の方程式は

$$y-(a-3)^2=\frac{(a+3)^2-(a-3)^2}{(a+3)-(a-3)}\{x-(a-3)\}$$

よって　　$\boldsymbol{y=2ax-a^2+9}$

別解　(佐賀大学 2007) 6

(2)　l と C とで囲まれる図形の面積を S とすると

$$S=\int_{a-3}^{a+3}\{(2a\quad\quad 9)$$
$$=-\int_{a-3}^{a+3}(x-a\quad$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\quad\quad 36$$

よって，S は a の値にか　　一定で

13.86　(1)　放物線　$y=x(x-a)$ と直線 $y=-x+$　　有点　　$a>0$)

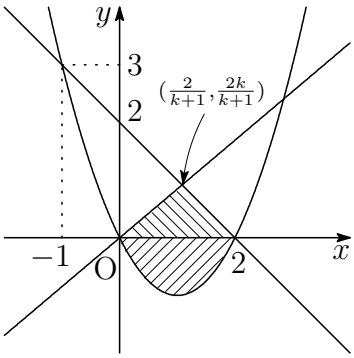
$-a)=-x+a$　ゆえに　　$)=0$

れを解　　$-1,\ a$

よ　　求める　　$a)$ とすると

$$(a)=\quad x+a\quad a)\}\,dx$$
$$\int_{-1}^{a}(x+1)(x\quad\quad c=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{6}}\boldsymbol{(a+1)^3}$$

(2)　　$\frac{1}{2}S(2)$



また　$-\int_0$　　$2)\,dx=\frac{1}{6}(2-0)^3=\frac{4}{3}$

$\frac{1}{2}S(2)>\frac{4}{3}$ で　　ら，直線 $y=-x+2\cdots$① と直線 $y=$　　② の交点は，2 点 $(-1,\ 3)$，$(2,\ 0)$ を結　　上にある．このとき，その交点の y 座標は，$k\neq-1$ に注意して，①，② を解くと

$$y=\frac{2k}{k+1}$$

したがって，求める k の値は

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2k}{k+1}+\frac{4}{3}=\frac{9}{4}\quad\text{これを解いて}\quad \boldsymbol{k=\frac{11}{13}}$$

(3) 点 $(0,\ 1)$ を通る直線を $l:y=mx+1$ とおく．C と l の共有点の x 座標は

$$x(x-a)=mx+1\quad\text{整理すると}\quad x^2-(m+a)x-1=0$$

この方程式の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$，解と係数の[illegible]により

$$\alpha+\beta=m+a,\quad \alpha\beta=-$$

C と l で囲まれた図形の面積を[illegible]と

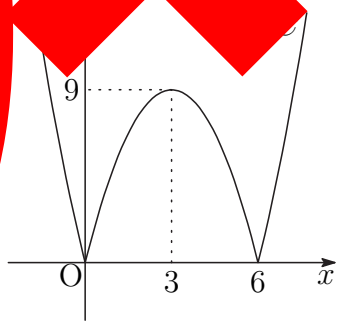
$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{mx+1-x(x-a)\}[illegible](x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\{(\alpha+[illegible]$$

S が最小となるとき　$m=$[illegible]と[illegible]および S

$$\boldsymbol{ax+1},\quad \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

解説 (長崎[illegible]2003) 2

13.87 (1)[illegible]$x-3)^2-9$　$(x\leqq 0,\ 6\leqq$[illegible]
[illegible]$-3)^2+9$　$(0\leqq x\leqq 6)$



したが[illegible]

y[illegible]$6x|$

[illegible]グラ[illegible]右の[illegible]になる．

[illegible]$+6$[illegible]$y=-$

$-x^2$[illegible]$x=0$[illegible]きは　$y'=6$

[illegible]，C と ℓ [illegible]つの共有点をもつ k の値の範囲は

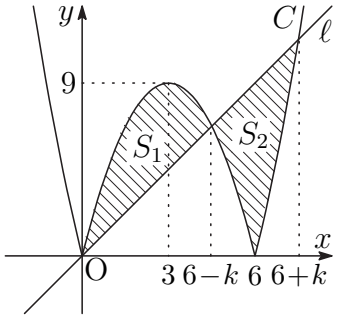
$$\boldsymbol{0<k<6}$$

(3) C と ℓ の共有[illegible]座標は
$x\leqq 0,\ 6\leqq x$[illegible]，

x^2-[illegible]x　よって　$x=0,\ 6+k$

$0\leqq x\leqq 6$ のとき，

$-x^2+6x=kx$　よって　$x=0,\ 6-k$



見本

$0 \leqq x \leqq 6-k$ の範囲で C と ℓ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{6-k} \{-x^2+6x-kx\}\,dx \\ &= -\int_0^{6-k} x(x-6+k)\,dx = \frac{1}{6}(6-k)^3 \end{aligned}$$

$f(x)=x(x-6)$ とし，この原始関数を $F(x)$ とする．

$6-k \leqq x \leqq 6+k$ の範囲で C と ℓ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{6-k}^{6+k} \{kx-|f(\\ &= \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{6-k}^{6+k} + \int^{6} \\ &= 12k^2 - F(6- \end{aligned}$$

C と ℓ で囲まれた 2 つの 積の和 と

$S(k)=S_1+S_2$ より

$$\frac{1}{6}(6-k)^3 + 12k^2 - F(6- \quad +2$$

れを k 分すると

$$S'(\quad -k)^2+24k+f(6-k)-f(6+k)$$

$$= -\quad k)^2+2 \quad -6k)-(k^2+6k)$$

$$\quad ^2-36k+36$$

$)=0$ と

$$\quad 3-2\sqrt{2}\,) = \frac{}{3+2\sqrt{2}} < 6 < 6(3+2\sqrt{2}\,)$$

したがって，$0 \leqq$ $\leqq 6$ における $S(k)$ の増減表は，次のようになる．

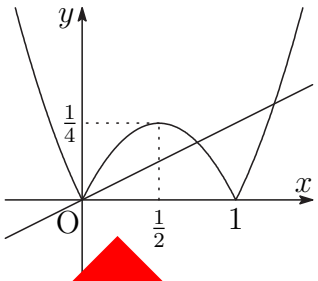
		0	$\cdots$	$6(3-2\sqrt{2}\,)$	$\cdots$	6
			$-$	0	$+$	
	$)$		↘	極小	↗	

よって，求める k の値は　　$\boldsymbol{k=6(3-2\sqrt{2}\,)}$

別解（宮崎大学 2015）12

印刷本

13.88 (1) $|x(x-1)| = \begin{cases} x^2 - x & (x \leqq 0,\ 1 \leqq x) \\ -x^2 + x & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$



したがって

$$y = |x(x-1)| \quad \cdots (*)$$

のグラフは，右の図のようになる．

$y = -x^2 + x$ を微分すると　$y' = -2x + 1$

$y = -x^2 + x$ の $x = 0$ における[illegible]傾きは[illegible]1

$(*)$ グラフと直線 $y = kx$ が異なる[illegible]もつ k の値の範囲は

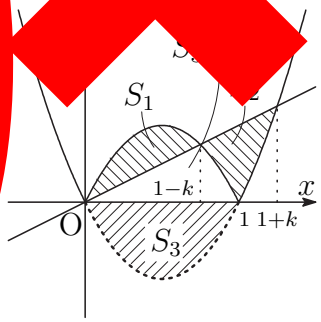
$$\boldsymbol{0 <}$$

(2) $(*)$ のグラフと直線 $y = kx$ の[illegible]

$x \leqq 0,\ 1 \leqq x$ のとき[illegible]$-1) =$[illegible]れ[illegible]$+ k$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき[illegible]$x(x-1) = k$[illegible]れを解[illegible]$= 1 - k$

右の[illegible]って，求める面積 S は



$= S$[illegible]$S_1 = \dfrac{1}{6}(1-k)^3, \quad S_3 =$

S[illegible]$- S_1$[illegible]$\dfrac{1}{6}(1+k)^3$ より

$= S_1$[illegible]$\dfrac{1}{6}($[illegible]$2S_1 - 2$

$+ k)^3$[illegible]$\dfrac{1}{6}(1-k)^3 - 2$

$= \dfrac{1}{6}($[illegible]$\boldsymbol{+ 1)}$

(3)[illegible]$\dfrac{dS}{dk} = -\dfrac{1}{2}($[illegible]$+1)$　$\dfrac{dS}{dk} = 0$ とすると　$k = 3 \pm 2\sqrt{2}$

ここで　0[illegible]$2\sqrt{2} = \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}} < 1 < 3 + 2\sqrt{2}$

したがって，[illegible]$\leqq 1$ における S の増減表は，次のようになる．

k		0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dS}{dk}$			$-$	0	$+$	
S			↘	極小	↗	

よって，求める k の値は　$\boldsymbol{k = 3 - 2\sqrt{2}}$

印刷本

13.89 (1) 放物線 $y=-px^2+2$ は，2 点 $(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$ を通るから

$$-p\cdot 18+2=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{p=\frac{1}{9}}$$

(2) $y=-\frac{1}{9}x^2+2$ と $y=|x|-2$ から y を消去すると

$$-\frac{1}{9}x^2+2=|x|-2 \quad \text{ゆえに} \quad |x|^2+9|x|-$$

したがって $(|x|+12)(|x|-$ すなわち $=\pm 3$

よって，求める交点の座標は $($

(3) (2) の結果より，点 A の座標は $(-2$

$f(x)=-\frac{1}{9}x^2+2$ を微分すると

$y=f(x)$ の A における接線 ℓ は f $=$ $)=\frac{2}{}$

よって，$y=f(x)$ の A ℓ 接線の方 $=h($

$$y-1=\frac{2}{3}(x+3) \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{2}{}$$

(x), $)$ の共有点の座標は

$=\frac{2}{}$ れを解いて $(x,\ y)=(-3,\ 1),\ (15,\ 13)$

$($ $y=$ 2

は A る点 から $\mathbf{B}($ $3)$

(2) った 2 と異なる点

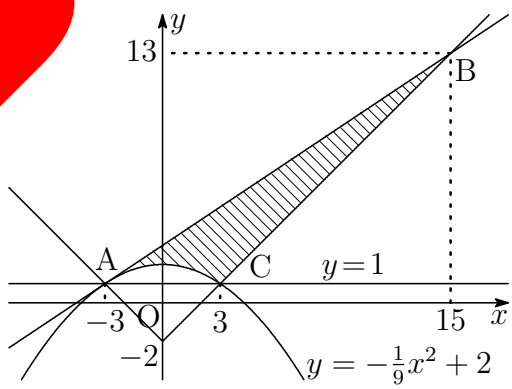
し，直 と y で囲

形の S_1 とす

$$S_1=\int_{-3}^{} \left\{\left(\quad^2+2\right)-1\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{9}\int \quad 3)(x-3)\,dx$$

$$=4$$



求める面積 S とすると

$$S=\triangle \mathrm{ABC}-S_1=\frac{1}{2}\{3-(-3)\}(13-1)-4=\mathbf{32}$$

見本

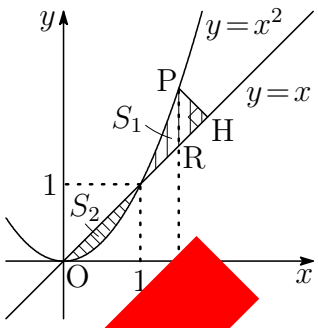
13.90 (1) 直線 PH は，点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，直線 $y=x\cdots$① に垂直な直線であるから

$$y-t^2=-(x-t)$$

すなわち　$y=-x+t^2+t$　$\cdots$②

H の座標は ①，② を解いて

$$\left(\frac{\boldsymbol{t^2+t}}{\boldsymbol{2}},\ \frac{\boldsymbol{t^2+t}}{\boldsymbol{2}}\right)$$



(2) $\mathrm{R}(t,\ t)$ であるから

$$\triangle\mathrm{PRH}=\frac{1}{2}\mathrm{PH}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{PR}}{\sqrt{2}}\right)^2=$$

(3) (2) の結果を用いて，求める

$$S_1=\int_1^t(x^2-x)\,dx-\mathrm{RH}$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^t$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}}$$

(4) $S_2=\int_0^1$　$=-\int_0^1 x(x-1)dx=\frac{1}{6}$

$=S$，上　び (3) の結

$$\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}\quad\cdots\quad t^2(3t^2-2t-3)=0$$

$$\boldsymbol{t=}$$

13.91 (1) $d(\mathrm{P},\ell_1)=|y$　$d(\mathrm{P},\ell_2)=|y-1|$ であるから，① より

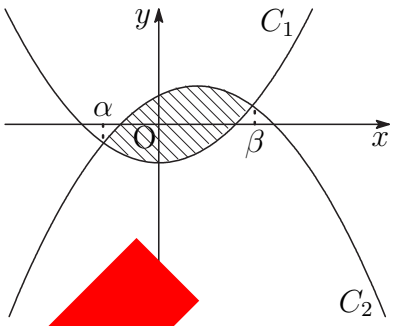
$$|y$$　$\sqrt{x^2+y^2}$　かつ　$|y-1|\geqq\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

これらを整　と

$$y\geqq\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\quad\text{かつ}\quad y\leqq-\frac{1}{2}(x-a)^2+\frac{1}{2}$$

見本

上の 2 式を同時にみたす領域が存在する条件は，2 つの放物線



$$C_1 : y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$
$$C_2 : y = -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2}$$

が共有点をもつことであるから，2 次方程式

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - \quad + \frac{1}{2}$$

すなわち　　$x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 - 1 =$

が実数解をもてばよい．したがって

$$(-a)^2 - 4\cdot1\left(\frac{1}{2}a^2 - 1\right) \quad \boldsymbol{-2 \leqq a \leqq}$$

(2) $(*)$ の方程式の解を α，　と $(\alpha <$

$$x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 - 1 = (x \quad x$$
$$\beta - \alpha = \sqrt{}$$

って　　は

$$\int_\alpha \left\{ (x-a)^2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)\right\} dx$$
$$= \left(x^2 - ax + \frac{1}{2} \right) dx$$
$$- \int_\alpha \quad)(x$$
$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \boldsymbol{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

13.92　(1) $y = x^2$ と $y =$　$- ax + b$ から y を消去すると

$$x^2 = \quad - ax + b \quad \text{すなわち} \quad 2x^2 - ax - b = 0 \quad \cdots(*)$$

C_1 と C_2 が　　2 点で交わるとき，$(*)$ より

$$(-a)^2 - 4\cdot2\cdot(-b) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a^2 + 8b > 0}$$

印刷本

(2) 方程式 $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$

$$\alpha + \beta = \frac{a}{2}, \quad \alpha\beta = -\frac{b}{2}$$

$$\beta - \alpha = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+8b} \quad \cdots ①$$

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は

$$\int_\alpha^\beta \{(-x^2+ax+b) - x^2\}\,dx = -\int_\alpha^\beta (2x^2 - ax - b)\,dx$$

$$= -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

したがって　$\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 = 9$　　②

①，② より　$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+8b} = 3$　　よって　$\boldsymbol{b = -\frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}}$

(3) (2) から，C_2 は

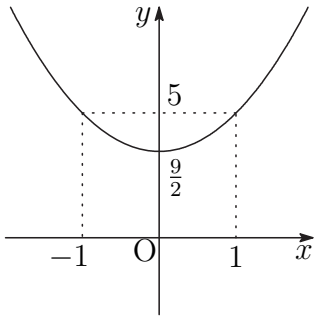
$y = -x^2 - \frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}$　すなわち　$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}$

C_2 の頂点を (x, y) とすると

$x = -\frac{a}{2}$，$y = \frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}$

よって，C_2 の頂点の軌跡の方程式は

$y = \frac{1}{2}x^2 + 5$



それをグラフに図示すると図のようになる．

13.93　(1) $l_1 : y = kx$ に垂直な直線 l_2 の傾きは　$-\frac{1}{k}$

l_2 は，原点を通る直線であるから　$l_2 : y = -\frac{1}{k}x$

C と l_2 の交点の座標は

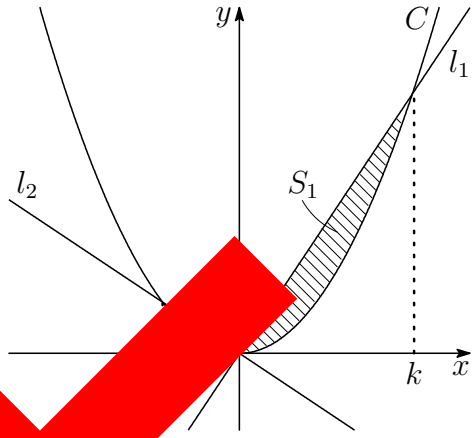
連立方程式 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -\frac{1}{k}x \end{cases}$ を解いて　$\boldsymbol{(0,\ 0)}$，$\boldsymbol{\left(-\frac{1}{k},\ \frac{1}{k^2}\right)}$

印刷本

(2) C と l_1 の共有点の x 座標は，$y=x^2$ と $y=kx$ から y を消去して

$$x^2=kx \quad \text{これ解いて} \quad x=0,\ k$$

したがって，右の図から



$$S_1=\int_0^k \left(kx-x^2\right)dx$$
$$=\left[\frac{kx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^k=\boldsymbol{\frac{k^3}{6}}$$
$$S_2=\int_{-\frac{1}{k}}^0 \left(-\frac{1}{k}x-x^2\right)dx$$
$$=\left[-\frac{x^2}{2k}-\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{k}}^0=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

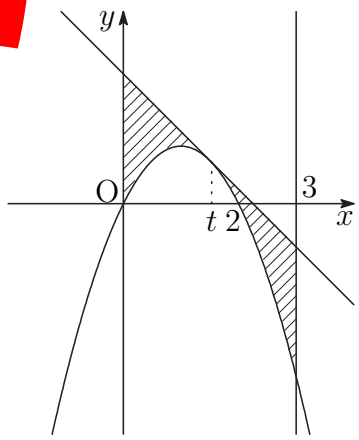
別解 (大分大学 2010) 6

13.94 (1) $y=x(2-x)$ を微分すると $y'=2-2x$

この曲線上の点 $(t,\ t(2-t))$ における接線の方程式

$y-t(2-t)=(2-2t)(x-t)$ よって $y=(\boldsymbol{1-t})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t^2}$

(1) の図から



$$S(t)=\int_t^3 \{(2-t)x-x(2-x)\}dx$$
$$=\int_0^{3-t}(x^2-tx)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_0^{3-t}=\frac{(3-t)^3}{3}=\frac{1}{3}t^3-3t^2+9t-9=3\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

よって $\boldsymbol{t=}$ ［illegible］ き**最大値 9**，$\boldsymbol{t=\frac{3}{2}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\frac{9}{4}}$

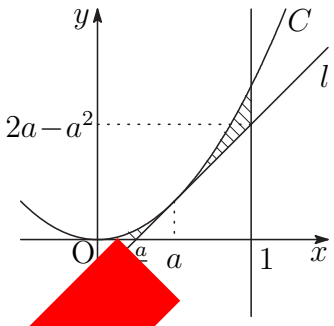
13.95 (1) $y=x^2$ を微［illegible］と $y'=2x$

l は点 $(a,\ a^2)$ を通り，傾き $2a$ の直線であるから

$$y-a^2=2a(x-a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=2ax-a^2}$$

見本

(2) l，x 軸，直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を T とすると



$$T=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{2}\right)(2a-a^2)$$
$$=\frac{a^3}{4}-a^2+a$$

よって　$S(a)=\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx-T$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1-\left(\frac{a^3}{4}-a^2+a\right)$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{4}a^3+a^2-a}$$

(3) (2) の結果から

$$S'(a)=-\frac{3}{4}a^2+2a-1=-\left(a-\frac{2}{3}\right)(a-1)$$

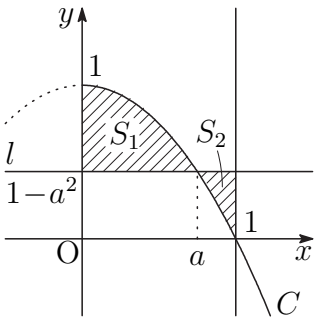
$S(a)$ の増減表は，次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$S'(a)$		$-$	0	$+$
		↘	$\frac{1}{27}$	↗

よって　$a=\frac{2}{3}$ で**極小値** $\boldsymbol{\frac{1}{27}}$

6 曲線 C と l の共有点の x 座標は $x=a$，1

$$S_1=\int_0^a\{(1-a^2)-(1-x^2)\}\,dx$$
$$=\int_0^a(a^2-x^2)\,dx$$
$$=\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\boldsymbol{\frac{2}{3}a^3}$$



$$S_2=\int_a^1\{(1-a^2)-(1-x^2)\}\,dx$$
$$=\int_a^1(x^2-a^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-a^2x\right]_a^1=\boldsymbol{\frac{2}{3}a^3-a^2+\frac{1}{3}}$$

見本

(2) (1) の結果から

$$S = S_1 + S_2 = \frac{2}{3}a^3 + \left(\frac{2}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}$$
$$S' = 4a^2 - 2a$$
$$= 2a(2a-1)$$

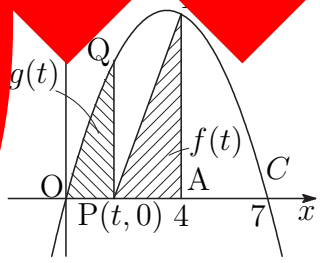
したがって，S の増減表は，次[illegible]になる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

よって，$a = \frac{1}{2}$ のとき**最小値** [illegible]．

13.97 (1) 右の図から　$f(t) = \frac{1}{2}(4$ [illegible] $= \mathbf{-6t + 2}$[illegible]

(2) 右の[illegible]



$$\int_t^{t} (-x^2 + 7x)\,dx$$
$$\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 \right]_0^t$$
$$= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2$$

(1) [illegible]の結果 $= f(t) + g(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 6t + 24$

[illegible]を微分 $h'(t) = -t^2 + 7t - 6 = -(t-1)(t-6)$

[illegible]から，そ[illegible]

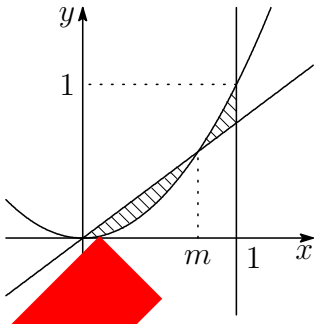
t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(4)
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		↘	極小	↗	

よって，最[illegible] $\boldsymbol{h(1) = \frac{127}{6}}$

見本

13.98 (1) $y=x^2$ と $y=mx$ の共有点の x 座標は

$$x^2=mx \quad \text{これを解いて} \quad x=0,\ m$$



x^2-mx の原始関数の 1 つを

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2$$

とおく．$0 \leqq m \leqq 1$ より，$S(m)$ は

$$S(m)=-\int_0^m (x^2-mx)\,dx+\int_m^1 (x^2-mx)\,dx$$

$$=-\Big[\,F(x)\,\Big]_0^m+\Big[\,F(x)\,\Big]_m^1$$

$$=F(0)+F(1)-2F(m)$$

$$=0+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-2\left(-\frac{m^3}{6}\right)=\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{2}m+\frac{1}{3}$$

(2) (1) の結果から　$S'(m)=m^2-\dfrac{1}{2}$

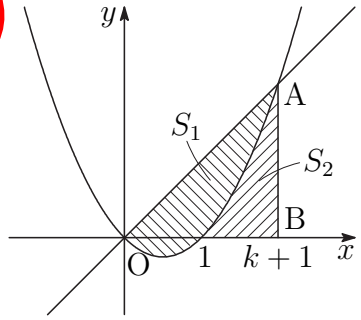
した[illegible]　$S(m)$ の増減表は次のように

m	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$S'(m)$		$-$	0	$+$
$S(m)$		↘	極小	↗

[illegible]　$m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の[illegible]小値 $S\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\mathbf{2-\sqrt{2}}}{\mathbf{6}}$

[illegible]　$x(x$[illegible]$y=l$[illegible]を消去すると

[illegible]$1)=$[illegible]えに[illegible]



した[illegible]

$$S_1=\int_0^{1}\{k[illegible]x-1)\}\,dx$$

$$=-\int_0^{k+1}[illegible]k-1)\,dx=\frac{1}{6}(k+1)^3$$

$$S_2=\int_1^{k+1}[illegible]x-1)\,dx=\int_1^{k+1}\{(x-1)^2+(x-1)\}\,dx$$

$$=\left[\,\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{1}{2}(x-1)^2\,\right]_1^{k+1}=\frac{1}{3}k^3+\frac{1}{2}k^2$$

見本

ここで，$f(k)=S_1-S_2$ とおくと

$$f(k)=\frac{1}{6}(k+1)^3-\left(\frac{1}{3}k^3+\frac{1}{2}k^2\right)=-\frac{1}{6}k^3+\frac{1}{2}k+\frac{1}{6}$$
$$f'(k)=-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(k+1)(k-1)$$

$k>0$ における $f(k)$ の増減表は，次のようになる．

k	(0)	$\cdots$	1	
$f'(k)$		$+$	0	
$f(k)$		↗	極大	

よって，S_1-S_2 を最大にする k の値は

13.100 (1) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (\beta-x)(x-\alpha)\,dx=\int_\alpha^\beta \{($

$=$ $-\alpha)(x-$ $(x-$

$=\left[\ \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha$ $(\ $ $\right]_\alpha$

$=\boldsymbol{\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$

(2) $f($ $=\frac{1}{3}a^3-$ $\nearrow$ と　$f'(a)=(a+1)(a-1)$

$\leqq a \leqq$ $\ni$ける $\ni$ 増減表 $\ni$ ようになる．

a		-1	$\cdots$		2
$f'(a)$		0	$-$		
f	$\frac{5}{3}$	↗		↗	$\frac{5}{3}$

$\ni$ すると

$$=-\int_{a-1}^{\frac{1}{3}a^3}(3x-a^3)(x-a+1)\,dx$$
$$=3\int_{a-1}^{\frac{1}{3}a^3}\left(\frac{1}{3}a^3-x\right)\{x-(a-1)\}dx$$
$$=\frac{1}{2}\{f(a)\}^3$$

よって，$a=-2,\ 1$ のとき $S(a)$ の最小値は $\boldsymbol{\frac{1}{54}}$

見本

13.101 (1) C_2 の方程式は　　$y=(x+p)^3-(x+p)-p$

すなわち　　$y=x^3+3px^2+(3p^2-1)x+p^3-2p$

C_1 と C_2 から，y を消去すると，$p\neq 0$ より

$$3px^2+3p^2x+p^3-2p=0 \quad \text{ゆえに} \quad 3x^2+3px+p^2-2=0 \quad \cdots(*)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D=(3p)^2-4\cdot 3\cdot(p^2-2)=3(-p^2+8)$$

方程式 $(*)$ が異なる 2 つの解を[illegible]，D[illegible]

$$-p^2+8>0 \quad \text{ゆえに} \quad p>0 \text{[illegible]} \quad \boldsymbol{0<p<2\sqrt{2}}$$

(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (\beta-x)(x-\alpha)dx=\int_\alpha^\beta\{(\beta-$[illegible]

$$=(\beta$$[illegible]$$(x-$$[illegible]$$\int_\alpha$$[illegible]$$)^2dx$$

$$=(\beta-\alpha)\left[\frac{1}{2}(x-\alpha)\right.$$[illegible]$$-\left[\frac{1}{2}(\right.$$[illegible]

$$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{3}(\beta-$$[illegible]$$\alpha)^3$$

[illegible]の解を[illegible]ると $(\alpha<\beta)$，解と係数の関係により

$$=-\frac{p^2-2}{3}, \quad (\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{8-p^2}{3}$$

[illegible]の関数[illegible]$g(x)$[illegible]と，解[illegible]の関係により

$$-g(\alpha+\beta-x)-\{x^3+$$[illegible]$$(3p^2-1)x+p^3-2p\}$$

$$-3p^2x$$[illegible]$$2p$$

$$=-3p($$[illegible]$$)=3p(\beta-x)(x-\alpha)$$

[illegible]の結果を用いると

$$S(p)=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}dx=3p\int_\alpha^\beta(\beta-x)(x-\alpha)dx$$

$$p\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{p}{2}\left(\frac{8-p^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$\{S(p)\}^2=\dfrac{1}{108}p^2(8-p^2)^3$ から，$t=p^2$ とおき

$$h(t)=t(8-t)^3 \quad (0<t<8)$$

見本

とすると　　$h'(t) = -4(t-2)(8-t)^2$

$h(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(8)
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	(0)	↗	極大	↘	(0)

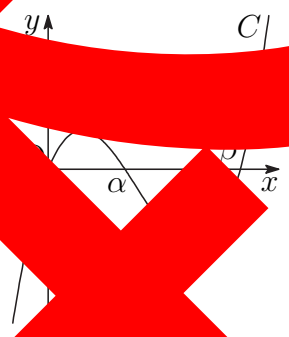
$p^2 = 2$，すなわち $p = \sqrt{2}$ のとき，$S(p)$ は最大となる

最大値は　$S(\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{8-2}{3}\right.$ **2**

13.102　(1) C は x 軸との共有点の x 座標が x

あるから，$C : y = f(x)$ の方程式は x

注意して $(0 < \alpha < \beta)$



$$f(x) = x(x-\alpha)(x$$
$$= x^3 - (\alpha \qquad \alpha\beta x$$

関数 $f($ の原始関数の 1 つを

$$\frac{1}{x^4} - \frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

おく

$$0) = \frac{1}{12}\alpha^4 + \frac{1}{6}\alpha^3\beta, \quad F(\beta) = -\frac{1}{12}\beta^4 + \frac{1}{6}\alpha\beta^3$$

がっ

$$S = \int^{\beta} f(x)\,dx = \left[\ F(x)\ \right]_0^{\alpha} - \left[\ F(x)\ \right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$(\alpha) - F$$

$$\frac{1}{12}\alpha^4 + \frac{1}{6}\alpha^{\square} - \left(-\frac{1}{12}\beta^4 + \frac{1}{6}\alpha\beta^3\right)$$

$$= \boldsymbol{+\frac{1}{3}\alpha^3\beta - \frac{1}{6}\alpha\beta^3 + \frac{1}{12}\beta^4}$$

(2)　(1) の結果か

$$\frac{dS}{d\alpha} = -\frac{2}{3}\alpha^3 + \alpha^2\beta - \frac{1}{6}\beta^3$$
$$= \frac{1}{6}(2\alpha-\beta)\{2\alpha(\beta-\alpha) + \beta^2\}$$

見本

$0 < \alpha < \beta$ であるから　　$2\alpha(\beta - \alpha) + \beta^2 > 0$

したがって

α	(0)	$\cdots$	$\frac{\beta}{2}$	$\cdots$	(β)
$\frac{dS}{d\alpha}$		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

よって，S を最小にする α は　　$\boldsymbol{\alpha = \frac{\beta}{2}}$

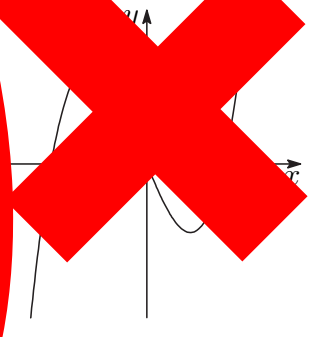
13.103　(1) $y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 6ax + \quad\quad a^2 + b$$

y' の最小値が -3 であるから

$$-3a^2 + b = -3$$

(2) $y = x(x^2 - 3ax + b)$ より，



の負の部分，正の部分で の x 座標

それぞれ α，β とすると ($0 < \beta$)，α,

は 2 次 式 $x^2 - 3ax + b = 0$ の解である

ら の関係により

$$\alpha \quad \alpha\beta = b \quad \cdots(*)$$

この $b <$ ら，(1) の結果か

$3a^2 -$ よっ $\boldsymbol{1 < a}$

$(*)$ か $= x^3$ $\beta)x^2 + \alpha\beta x.$ の面積を S とすると

$$S = \int_\alpha \{x^3 \quad \beta) \quad \beta x\}dx = \int_\alpha \{x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x\}dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \beta)x^3 + \frac{1}{2}\right]_\alpha - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2\right]_0^\beta$$

$$= \frac{1}{12}(\alpha^4 + \quad \frac{1}{6}\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)$$

ここで，(1) および $(*)$ に注意して

$$b = 3a^2 - 3$$

$$\alpha + \beta = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (3a)^2 - 2(3a^2 - 3) = 3a^2 + 6$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2$$

$$= (3a^2 + 6)^2 - 2(3a^2 - 3)^2 = -9a^4 + 72a^2 + 18$$

見本

したがって

$$S = \frac{1}{12}(-9a^4 + 72a^2 + 18) - \frac{1}{6}(3a^2 - 3)(3a^2 + 6)$$
$$= -\frac{9}{4}a^4 + \frac{9}{2}a^2 + \frac{9}{2}$$
$$\frac{dS}{da} = -9a^3 + 9a = -9a(a+1)(a-1)$$

S の増減表は次のようになる.

a	-1		0	
$\frac{dS}{da}$				
S		↘		

$\boldsymbol{a = 0}$ のとき，S は最小値 $\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}$ を

13.104 (1) 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $\left(\quad , \quad 2 \right)$ におけ 方程

1 ゆえに $y = \sqrt{3}x - 2$ **$\sqrt{3}$, -2**

$= x^2$ $= \sqrt{3}x - 2$ から y すると

$\sqrt{3}x + c + 2 = 0 \quad \cdots ①$

の方程 判別式 すると

$(-\sqrt{3})^2 - 2) = 1 - c$

l が のは，D るから

$1 - c = 0$ ゆえに $\boldsymbol{c = 1}$

これを ① に代 ると

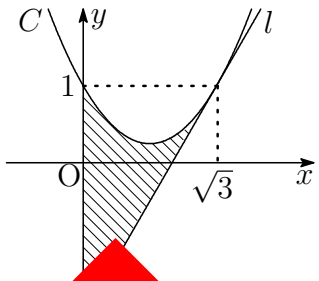
$2\sqrt{3}x + 3 = 0$ ゆえに $(x - \sqrt{3})^2 = 0$

したがっ $= \sqrt{3}$ これを l の方程式に代入して $y = 1$

よって **$(\sqrt{3},\ 1)$**

見本

(3) (2) の結果から，求める面積を S とすると，右の図の斜線部分であるから



$$S = \int_0^{\sqrt{3}} \{(x^2 - \sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3}x - 2)\} dx$$
$$= \int_0^{\sqrt{3}} (x - \sqrt{3})^2 \, dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x - \sqrt{3})^3 \right]_0^{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

13.105 (1) 点 A(0, 4) を頂点とする放物線を [illegible] く (k は定数).
これが点 B(2, 0) を通るから

$$k \cdot 2^2 + 4 = 0$$

よって，求める 2 次関数は [illegible]

(2) (1) の結果から $y = -($ [illegible] $- 2)$
放物線と x 軸との交点で [illegible] (2, 0) と異な [illegible] の座 [illegible] 2, 0)
$y =$ [illegible] を微分すると $y' = -2x$
[illegible] $(2a, -4a^2 + 4)$ における接 [illegible] は

$$4a^2 + 4) = -4a(x - 2$$

すな [illegible] y [illegible] $+ 4a^2 + 4$ $\cdots$ ①

[illegible] 放物線 [illegible] 0) における接線 l_2 の方程式は，① に $a = -1$ [illegible] 入し [illegible] $y = 4$ $\cdots$ ②

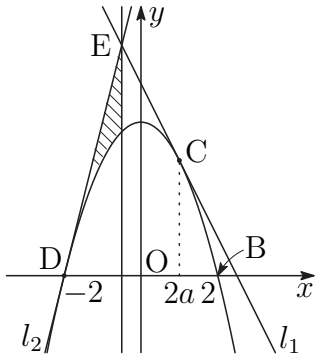
①, [illegible] y を [illegible] と

$$-4 \quad 4x + 8 \quad (a+1)x = a^2 - 1$$

[illegible] 0 よ [illegible] $-1 \neq 0$ て [illegible] $= a - 1$

[illegible] て $y = 4a$ [illegible] よって，E の座標は $\boldsymbol{(a-1,\ 4a+4)}$

(3) 求め [illegible] 面積を [illegible] すると，(2) の結果から



$$S = \int^{a} \{ [illegible] x + 8) - (-x^2 + 4) \} \, dx$$
$$= [illegible] (x + 2)^2 \, dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x + 2)^3 \right]_{-2}^{a-1} = \boldsymbol{\frac{1}{3}(a+1)^3}$$

印刷本

13.106 (1) Q は線分 PR を 1 : 2 に内分する点であるから　$c = 3b$　$\cdots$①

2 点 Q，R の中点の x 座標は 1 であるから　$\dfrac{b+c}{2} = 1$　$\cdots$②

①，② を解いて　$\boldsymbol{b = \dfrac{1}{2},\ c = \dfrac{3}{2}}$

$y = -x^2 + 2x$ と $y = a$ から y を消去すると　$x^2 - 2x + a = 0$　$\cdots$③

方程式 ③ の解が b，c であるから，解と係数の関係

$a = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2} = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

(2) $y = -x^2 + 2x$ より　$y' = -2x + 2$

l は点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$ を通り，傾き -1

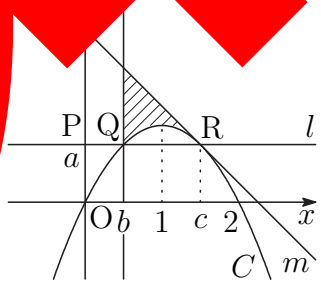
$y - \dfrac{3}{4} = -1\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$　すなわち　$\boldsymbol{y = -x + \dfrac{9}{4}}$

(3) 求める面積を S とすると

$S = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left\{\left(-x + \frac{9}{4}\right) - (-x^2 + 2x)\right\} dx$

$= \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) dx$

$= \left[\dfrac{1}{3}\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$



で囲まれた部分の面積は　$\dfrac{1}{3} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{6}$

$\triangle$PQR^2 $= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$

13.107 (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

C_1 上の点 A における接線の傾きは $2a$ であるから，その方程式は

$y - a^2 = 2a(x - a)$　すなわち　$y = 2ax - a^2$

この接線と $y = x^2 - 4$ の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

見本

の解であるから，2 式から y を消去して

$$x^2-4=2ax-a^2$$

ゆえに　　$(x-a)^2=4$

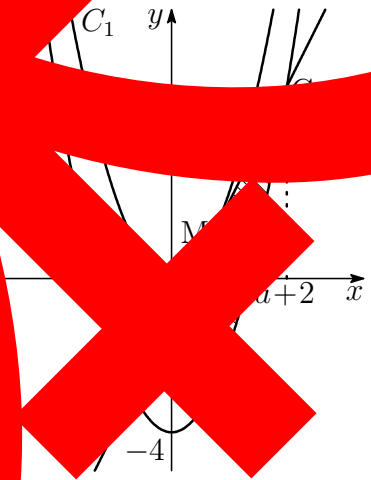
したがって　　$x=a\pm 2$

B，C の x 座標は，それぞれ $a-2$，$a+2$ であるから

$$\mathrm{B}(a-2,\ a^2-4a),\quad \mathbf{C(}\boldsymbol{a+2,\ a^2+4a}\mathbf{)}$$

よって，BC の中点 M の座標は　　$\boldsymbol{(a,\ a^2)}$

(2) 求める面積 S は，右の図から



$$S=\int_a^{a+2}\{(2ax-a^2)-(x^2-4)$$

$$=\int_a^{a+2}\{4-(x-a)^2\}d$$

$$=\left[4x-\frac{1}{3}(x-a)\right.$$

$$=16$$

13.108　$=(x$　　ると　$y'=2(x-1)$

ゆえ　　の方

$(a-$　　$2(a-$　　$a)$　すなわち　$\boldsymbol{y=2(a-1)x-a^2+1}$

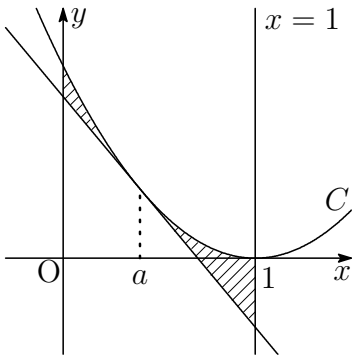
(1) の　　ら

$$=\int_0^1\{(x-2)^2-$$　　$1\}\big]dx$$

$$2ax+a^2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right.$$　　$+a^2x\Big]_0^1$$

$$=a^2-$$　　$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}$$

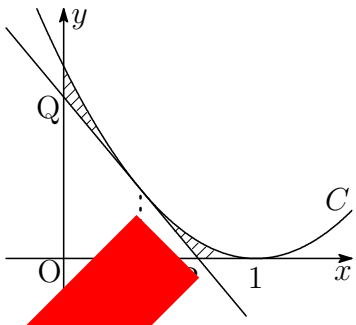


$0<a<1$ より，

$S(a)$ は $\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$ で**最小値** $\boldsymbol{\frac{1}{12}}$ をとる．

見本

(3) ℓ の x 軸および y 軸との交点を，それぞれ
$\mathrm{P}\left(\dfrac{a+1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}(0,\ -a^2+1)$ とすると



$$T(a)=\int_0^1 (x-1)^2dx-\triangle \mathrm{OPQ}$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1-\frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{2}\cdot(-a^2+1)$$
$$=\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a+\frac{1}{12}$$

これを微分すると

$$T'(a)=\frac{1}{4}(3a^2+2a-$$

したがって，$T(a)$ の増減表は

a	0	$\cdots$		$\cdots$	1
$T'(a)$		$-$		$+$	
(a)		↘	極小 $\frac{1}{27}$	↗	

て，a = ときに**最小値** $\dfrac{1}{27}$ をとる．

13.10 $y=$ $+q$ $y'=2x+p$

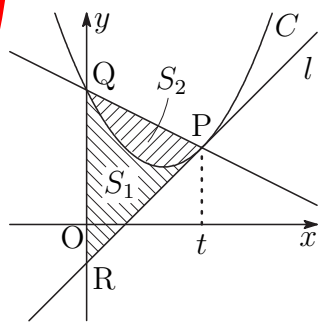
$=$ とき

点 $(t,$ $+q)$ ，傾き の
直線で ら

$-(t^2$ $+p)(x$

て **$(2t+p)$**

(2) 0 t は ，C は l の上側にあるから



$$S=\int_0^t [(x^2+px+q)-\{(2t+p)x-t^2+q\}]dx$$
$$=\int_0^t (x-t)^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_0^t=\boldsymbol{\frac{t^3}{3}}$$

見本

(3) l と y 軸の交点を R とすると，Q$(0,\ q)$，R$(0, -t^2+q)$ であるから

$$\mathrm{QR} = q - (-t^2+q) = t^2 \quad \text{ゆえに} \quad \triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}t^2 \cdot t = \frac{t^3}{2}$$

したがって　　$S_2 = \triangle\mathrm{PQR} - S_1 = \dfrac{t^3}{2} - \dfrac{t^3}{3} = \dfrac{t^3}{6}$

よって　　$S_1 : S_2 = \dfrac{t^3}{3} : \dfrac{t^3}{6} = \mathbf{2 : 1}$

13.110　(1) 2 点 P，Q の y 座標が等しいの[redacted]の頂点[redacted] $\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$

C の方程式を $y = a\left(x - \dfrac{t}{2}\right)^2$ とおく[redacted]から

$$(t-2)^2 = a\left(t - [redacted]\right)^2$$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{[redacted]}{t^2}(t-2)^2\left(x - [redacted]\right)}$

(2) 求[redacted](t) は

$$[redacted](t-2)^2 - \int_0^t \frac{4}{t^2}(t-2)^2\left(x - \frac{t}{2}\right)^2 dx$$

$$[redacted]^2 - \frac{4}{t^2}(t-2)^2\left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{t}{2}\right)^3\right]_0^t$$

$$[redacted]2)^2 - \frac{1}{3}t(t[redacted] = \boldsymbol{\frac{2}{3}t(t-2)^2}$$

$$[redacted] = \frac{2}{3}(t^3[redacted] + 4[redacted]\text{す}$$

$$[redacted](t) = \frac{2}{3}(3t^2[redacted] + 4) = \frac{2}{3}(3t-2)(t-2)$$

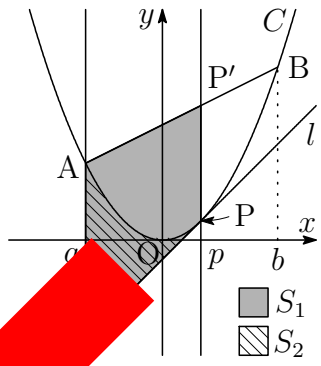
したがって，[redacted]の増減表は $(0 < t < 2)$

[redacted]	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
[redacted](t)		$+$	0	$-$	
[redacted](t)	(0)	↗	$\frac{64}{81}$	↘	(0)

よって　　$\boldsymbol{t = \dfrac{2}{3}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{64}{81}}$

印刷本

13.111 曲線 $y = x^2$ を C，C 上の点 P における接線を l とする．また，l と直線 $x = a$ の交点を A′，線分 AB と直線 $x = p$ の交点を P′ とする．



$y = x^2$ を微分すると　　$y' = 2x$

接線 l の方程式は

$$y - p^2 = 2p(x - p) \quad \text{すなわち} \quad y = 2px - p^2$$

線分 AB の方程式は

$$y - a^2 = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a) \quad \cdots + b)x - ab$$

ゆえに　　A′$(a,\ 2ap - p^2)$，P′$(p,\ (a+$

したがって　　AA′ $= a^2 - (2ap - $

PP′ $= (a+b)p - $ $= ($ b

$$S_1 = \frac{1}{2}(p-a)(\mathrm{AA'} + \quad)$$

$$= \quad a)\{(p-a)^2 + (p-a)(b - \quad \frac{1}{} \quad (b$$

$$S_2 = \quad (2px - p^2)\}dx = \int_a^p (x \quad dx$$

$$= 3\left[\frac{1}{3}(\quad = \frac{1}{3}(p-a)^3$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \quad \frac{-a)}{-a)^2} \quad = \frac{2(p-a)}{3(b-a)}$$

$\text{と} \quad < p < \quad$　　$0 < p \quad - a$

$\text{よ} \quad \frac{2}{} < \mathbf{\frac{2}{3}}$

13.112　(1) 放 $=$ は点 $(1,\ 1)$ を通るから

$= a\cdot 1^2 + b$　　よって　　$\boldsymbol{b = 1 - a}$

(2) $y = ax^2 + b$ すると　　$y' = 2ax$

ゆえに，$x = $ とき　　$y' = 2a$

求める接線 l は，点 $(1,\ 1)$ を通り，傾き $2a$ の直線であるから

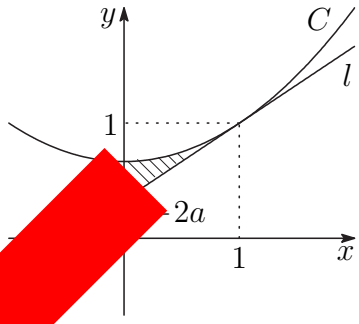
$$y - 1 = 2a(x - 1) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y = 2ax + 1 - 2a}$$

印刷本

(3) $a>0$, $b>0$ および (1) の結果から　$1-a>0$　ゆえに　$0<a<1$

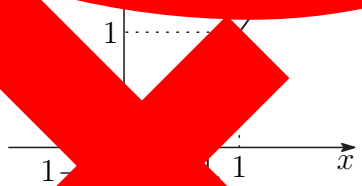
i) $1-2a>0$　すなわち　$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき

$$S=\int_0^1 \{ax^2+1-a-(2ax+1-2a)\}\,dx$$
$$=a\int_0^1 (x-1)^2\,dx$$
$$=a\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{a}{3}}$$



ii) $1-2a \leqq 0$　すなわち　$\dfrac{1}{2} \leqq a$

$$S=\int_0^1 (ax^2+1-a)$$
$$-\frac{1}{2}\left\{1-\quad\quad 2a\right)\right\}\cdot$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3+(1-a)x\right]_0^1-\frac{1}{4a}$$
$$-\left(\frac{\boldsymbol{2a}}{\boldsymbol{3}}+\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4a}}\right)$$



(3) の結[illegible] <1 において，S [illegible] 値をとる．

相[illegible] 乗・相[illegible] により

$$[illegible]+\frac{1}{4a}\geqq 2\sqrt{[illegible]}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

[illegible] 等号が [illegible] と [illegible] $=\dfrac{1}{4a}$　すなわち　$a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

[illegible] 意して，$\boldsymbol{a=\frac{\sqrt{6}}{4}}$ のとき，S は最大値 $\boldsymbol{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}$ をとる．

13.113　(1) $y=x^2+ax$ [illegible] すると　$y'=2x+a$

したがって，[illegible] の点 $(t,\ t^2+at)$ における接線の方程式は

$$y-(t^2+at)=(2t+a)(x-t)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=(2t+a)x-t^2}$$

(2) (1) で求めた直線と C_2 の方程式から y を消去して，整理すると

$$\frac{1}{4}x^2-(2t+a)x+t^2=0\quad \cdots①$$

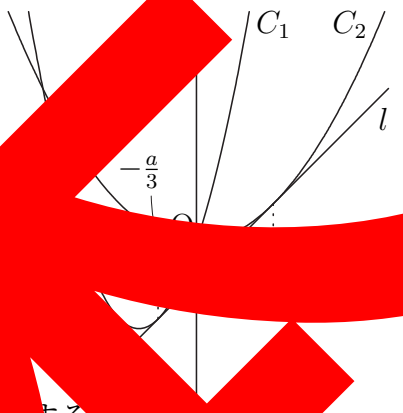
印刷本

この方程式は重解をもつので，係数について

$$(2t+a)^2 - 4\cdot\frac{1}{4}t^2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = -a, -\frac{a}{3}$$

これらを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{y = -ax - a^2}$, $\boldsymbol{y = \frac{a}{3}x - \frac{a^2}{9}}$

(3) $a > 0$ より　$l : y = \dfrac{a}{3}x - \dfrac{a^2}{9}$



ゆえに C_1 と l の接点の x 座標は

$$x = t = -\frac{a}{3}$$

C_2 と l の接点の x 座標は，① より

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{a}{3}x + \frac{a^2}{9} = 0 \quad \text{ゆえに}$$

C_1，C_2 および l で囲まれた[illegible]の面積を[illegible]する

$$S = \int \left\{(x^2+ax) - \left(\frac{a}{3}x - \frac{a^2}{9}\right)\right\} dx + \left\{\frac{1}{4}[illegible]\right\} dx$$

$$\int_{-}^{} dx + \int_{0}^{\frac{2}{3}a} \frac{1}{4}\left(x - \frac{2}{3}a\right)$$

$$\left(x + \right) \left[\frac{1}{12}\left(x - \frac{2}{3}a\right)\right]_0 = \frac{a^3}{27}$$

$= 1$ [illegible] から [illegible] よって **3**

13.1 (i) [illegible] より [illegible] $- 3x)(x^2$ [illegible] $q) + 7x + 5$ とおける (p，q は [illegible]．(ii) [illegible] に従[illegible]

[illegible] $+ p + q) +$ [illegible]　ゆえに　$p + q = 5$

[illegible] $2p + q) + 19 = -1$　ゆえに　$2p + q = 6$

これを解いて [illegible] $= 1$，$q = 4$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= [illegible] - 3x)(x^2 + x + 4) + 7x + 5 \\ &= \{[illegible]^2 - 3x + 2) - 2\}\{(x^2 - 3x + 2) + (4x + 2)\} + 7x + 5 \\ &= (x^2 - 3x + 2)^2 + 4x(x^2 - 3x + 2) - 2(4x + 2) + 7x + 5 \\ &= (x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 2) - x + 1 \end{aligned}$$

見本

よって　　$\boldsymbol{k(x) = -x + 1}$

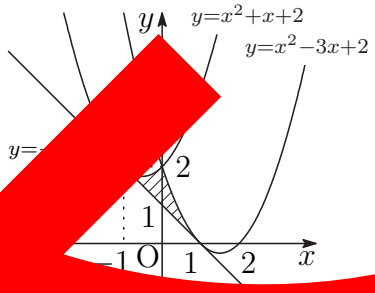
(2) (1) の結果から　　$\boldsymbol{g(x) = x^2 + x + 2}$

(3) $y = x^2 - 3x + 2 \cdots ①$，$y = x^2 + x + 2 \cdots ②$，$y = -x + 1 \cdots ③$ とおく．

①，② を解くと　交点 $(0,\ 2)$，

①，③ を解くと　接点 $(1,\ 0)$，

②，③ を解くと　接点 $(-1,\ 2)$



したがって，①，②，③ で囲まれる部分は，
下の図の斜線部分である．
斜線部分の面積を S とすると

$$S = \int_{-1}^{0} \{(x^2 + x$$

$$x^2 - 3x + \quad (-x$$

$$= \int_{-1}^{0} (x+1)^2\,dx + \int_{0}^{1} (x \quad x$$

$$\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}(\quad \right]_{0} \quad \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}$$

13.1) (2) $(p,\ q)$ は 円周上の点

から

ap^2 ・①

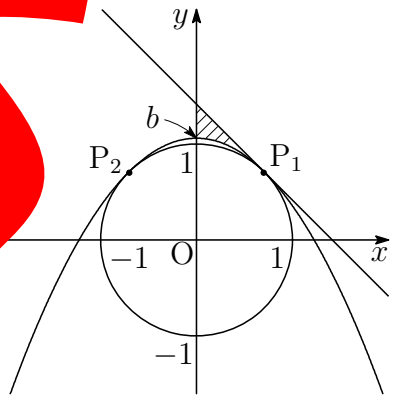
$p^2 +$ ②

ax^2 微分する

接線の傾き $2ap$

直線 $\mathrm{P_1}$ の

$\dfrac{q}{p}$



$\mathrm{P_1}$ における 線と直線 $\mathrm{OP_1}$ は，垂直であるから

$\times \dfrac{q}{p} = -1$　ゆえに　$\boldsymbol{q = -\dfrac{1}{2a}}$　$\cdots ③$

③ を ② に代入すると

$$p^2 + \frac{1}{4a^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p^2 = 1 - \frac{1}{4a^2}$$

見本

$a<-\dfrac{1}{2}$，$p>0$ に注意して　$\boldsymbol{p=\sqrt{1-\dfrac{1}{4a^2}}}$　$\cdots$④

③，④ を ① に代入すると

$$-\frac{1}{2a}=a\left(1-\frac{1}{4a^2}\right)+b \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b=-\left(a+\frac{1}{4a}\right)}$$

(3) $\angle \mathrm{P_1OP_2}=90^\circ$ のとき，直線 $\mathrm{OP_1}$ の傾きは 1 であるか

$$\frac{q}{p}=1 \text{ すなわち } q$$

③，④ をこれに代入すると　$-\frac{1}{2a}$

$a<-\dfrac{1}{2}$ に注意して解くと

ゆえに　$\mathrm{P_1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{}}\right)$

$\mathrm{P_1}$ における C の接線は，傾き -1 の直線 から 式は

$\dfrac{1}{}=-1\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$　すな $x+\sqrt{}$

この の (1) の結果から　$b=$

求め を S とすると

$$= \int \left\{ (-x+\sqrt{2}) - \left(x^2+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\right\} dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

13.116　(1) C と D の共有 の座標は，$x^2+y^2=4\cdots$①，$x^2-6y+3=0\cdots$② から x^2 を消 と

$+6y-7=0$　ゆえに　$(y+7)(y-1)=0$

①，② より，$\dfrac{1}{2}\leqq y\leqq 2$ であるから　$y=1$

したがって　$x^2=3$　また $x>0$ より　$x=\sqrt{3}$　よって　$\boldsymbol{\mathrm{Q}(\sqrt{3},\ 1)}$

印刷本

(2) 放物線 D の方程式は　$y=\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{2}$　これを微分すると　$y'=\dfrac{1}{3}x$

D 上の接点 R の座標を $\left(a,\ \dfrac{1}{6}a^2+\dfrac{1}{2}\right)$ とすると，接線 l の方程式は

$$y=\frac{1}{3}a(x-a)+\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{2}\quad \text{すなわち}\quad 2ax-6y-a^2+3=0$$

これが，原点を中心とする半径 2 の円に接するから

$$\frac{|-a^2+3|}{\sqrt{4a^2+36}}=2\quad \text{整理すると}\quad a^4-2\square=0$$

したがって　$(a^2+5)(a^2-27)=$　$\pm3\sqrt{3}$

このとき，接線の方程式は

$$\pm6\sqrt{3}\,x-6y-27+3=0$$

これが，$C:x^2+y^2=4\ (x>0$　$\theta)\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

における接線

$$x+(2\sin\quad 4$$

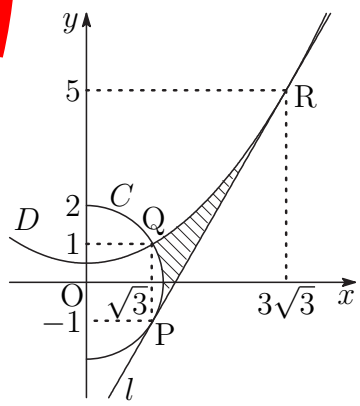
に一致するので，$a>0$．したがって

$3\sqrt{3},\quad 2\cos\theta=\sqrt{3},\quad 2\sin\theta=$　3

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\mathbf{R(3\sqrt{3},\ 5)}$

(2) の[illegible]ら　$\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{3}$

C　PQ[illegible]形の面積を S_1 とす



$$S_1=\frac{1}{\quad}\cdot\frac{1}{2}\cdot2^2\sin\frac{\pi}{3}$$

[illegible]

図の斜線[illegible]るから

$$S=\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}\left\{\left(\quad\frac{1}{2}\right)-\left(\sqrt{3}x-4\right)\right\}dx-S_1$$

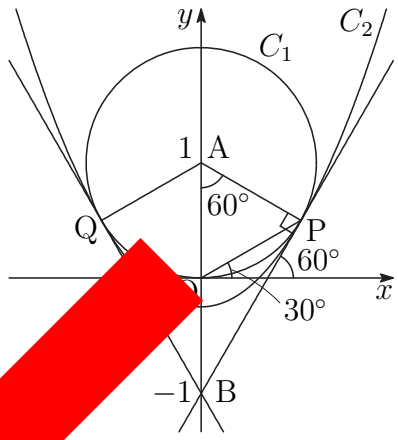
$$=\frac{1}{6}\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})^2dx-\left(\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{1}{18}\left[(x-\quad\sqrt{3})^3\right]_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$$

$$=\mathbf{\frac{7\sqrt{3}}{3}-\frac{2\pi}{3}}$$

印刷本

13.117 (1) △ABP は AB = 2，AP = 1 の直角三角形であるから　∠BAP = 60°
ゆえに，△AOP は 1 辺の長さが 1 の正三角形である．直線 OP と x 軸の正の向きとなす角は 30° であるから，P の座標は



$(\cos 30^\circ,\ \sin 30^\circ)$　すなわち　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

Q は，P と y 軸に関して対称であるから

$$\mathbf{Q}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

(2) $C_2 : y = f(x)$ とすると，C_2 は y 軸[illegible]から，
とおける．P は C_2 上の点であ[illegible]

$$a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + [\text{illegible}] \quad \text{ゆえに} \quad [\text{illegible}]4b =$$

直線[illegible]軸の正の向きとなす角は 60°
[illegible]，$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tan 60^\circ$ であ[illegible]

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \qquad \cdots ②$$

[illegible]に代[illegible]1

[illegible]って[illegible]る C_2[illegible]式　$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{4}}$

[illegible] C[illegible]任意の[illegible] $-\frac{1}{4}$) とお[illegible]

$$[\text{illegible}]^2 = t^2 + \left\{[\text{illegible}] - 1\right\}^2 = t^2 + \left(t^2 - \frac{5}{4}\right)^2$$

$$t^4 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{25}{16} = \left(t^2 - \frac{3}{4}\right)^2 + 1$$

よって，点 A[illegible]放物線 C_2 上の各点までの距離は 1 以上である．

見本

(4) 直線 BP の方程式は，$y=\sqrt{3}\,x-1$ であるから

$$\frac{S}{2}=\triangle\mathrm{ABP}-\text{扇形 OAP}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\left(x^2-\frac{1}{4}\right)-\left(\sqrt{3}\,x-1\right)\right\}dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}-\left[\frac{1}{3}\left(x-\sqrt{}\right.\right.^3\Big]^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=3\qquad 6$$

よって　　$\boldsymbol{S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{3}}$

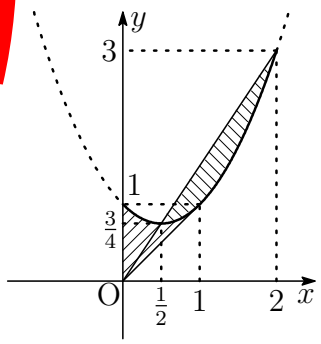
13.118　(1) R は，xy 平面上の放物線 $y=$　　上を動く．
放物線と原点を通る直線 y　　接す　　の　　は，2　　y を
消去して

$$x^2-x+1=kx\quad\text{すなわち}\qquad k+$$

程　　別式および重解について，　　0，$\dfrac{k+1}{2}$　　るから

$$(\quad\quad-0,\quad 0\leqq\frac{k+1}{2}\leqq$$

し　　て



って，　　通る　　$=x$ は，　　$1)$
で接　　原点と　　$)$ を通る直線
は　　線と　　をもつか　　
積を　　ると，

$$=\int\quad\quad-x+1)-x\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left\{\frac{3}{2}x-(x^2-x+1)\right\}dx$$

$$=\int\quad\quad 1)^2\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx=\boldsymbol{\frac{43}{48}}$$

別解　数学 II　　く [医]2011) 4

(2) K は xy 平面に関して対称であるから，求める体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{OP}\times 2=\frac{1}{3}\cdot\frac{43}{48}\cdot 1\times 2=\boldsymbol{\frac{43}{72}}$$

印刷

13.119 (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

ゆえに，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線の方程式は

$$y - p^2 = 2p(x - p) \quad \text{すなわち} \quad y = 2px - p^2 \quad \cdots ①$$

同様に，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における接線の方程式は　$y = 2qx - q^2$　$\cdots ②$

R の座標は，①，② を解いて　$\left(\boldsymbol{\dfrac{p+q}{2}},\ \boldsymbol{pq}\right)$

(2) $p = -1$，$q = 2$ より，$y = x^2$ の [illegible] における [illegible] 方程式は，それぞれ

$$y = -2x - [\text{illegible}]$$

また，R の x 座標は　$x = \dfrac{-1+2}{2}$ [illegible]

よって，求める面積を S とす [illegible]

$$S = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{x^2 - (\quad - 1)\}\,dx + [\text{illegible}]^2 - (4$$

$$\int_{1}^{\frac{1}{2}} (x+1)^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (x-2)$$

$$\left[\quad 1)^3\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[\ \frac{1}{3}(x -\right.$$

$$\frac{}{8}$$

直線 [illegible] 放物線 [illegible] れた部分の面 [illegible] S_1 とすると

$$= \quad S_{\text{[illegible]}} - (-1)\}^3 = \frac{9}{2}$$

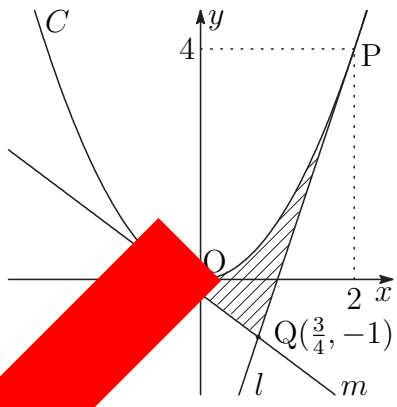
13.120 (1) [illegible] ると　$y' =$ [illegible]

C の [illegible] $\mathrm{P}(2,$ [illegible] ける接線の傾きは 4 であるから，l の方程式は

$$[\text{illegible}]4 = 4(x-2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 4x - 4}$$

印刷本

(2) l と直線 $y=-1$ の交点 Q は $\left(\dfrac{3}{4},\ -1\right)$



R の座標を $(a,\ a^2)$ とすると $(a \neq 2)$，傾きは $2a$ となるから，その方程式は

$$y - a^2 = 2a(x-a)$$

すなわち　$y = 2ax - a^2$　$\cdots$①

これが点 Q を通るから

$-1 = 2a\cdot\dfrac{3}{4} - a^2$　ゆえに　$2a^2 -$

したがって　$(a-2)(2a+1)=0$

これを ① に代入すると

(3) 求める面積 S は，上の図 部分であ

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \left\{x^2 - \left(-x - \frac{1}{4}\right)\right\} dx + \quad ^2 -$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 dx + \int_{\frac{3}{4}}^{2} (x -$$

$$= \left[\quad ^3 \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} + \left[\frac{1}{3}(x-2)^3 \right]_{\frac{3}{4}}^{2} = \mathbf{\frac{125}{96}}$$

1. 放 上の R における れの接線 l，m の交点 Q の x は，2 中点の x 座 る．

と直 で囲 部分の S_0 とすると，C と 2 接線 l，m で囲 部分の面 x^2 の係数および接点の x 座標から)

$$= \frac{1}{2}S_0, \qquad S_0 = \frac{1}{6}\left\{2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3 = \frac{125}{48}$$

13.121　(1) 放物線 $y = a \quad c + c$ が点 P$(1,-2)$，Q$(5,\ 10)$ を通るから

$$-2 = a + b + c, \quad 10 = 25a + 5b + c$$

これを解いて　$\boldsymbol{b = -6a + 3,\ c = 5a - 5}$

見本

(2) $f(x)=ax^2+(-6a+3)x+5a-5$ とおくと，$f'(x)=2ax-6a+3$ より

$$f'(1)=-4a+3,\quad f'(5)=4a+3$$

ゆえに，P における接線 l の方程式は

$$y-(-2)=(-4a+3)(x-1)$$

すなわち　$y=(-4a+3)x+4a-5$　　$\cdots$①

また，Q における接線 m の方程式は

$$y-10=(4a+3)(x-5)$$

すなわち　$y=(4a+3)x-$

l と m の交点は，①，② を解いて

この交点の y 座標が -4 であるから

$$-8a+4=$$

これを (1) の結果に代入し　**-3**，　**0**

(3) 求める面積を S とする

$$S=\int\{(x^2-3x)-(-x-1)\}dx$$

$$\int\{(x^2-3x)-(7x-25)\}dx$$

$$\int_1^5(x-$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]$$

$$\frac{1}{3}(x-5)$$

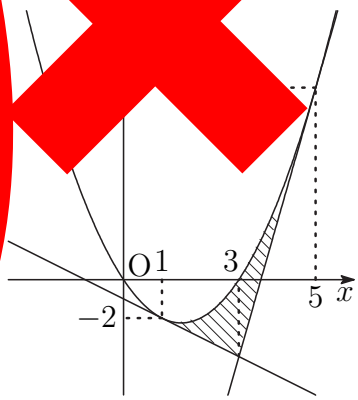
m の

$x=$

C と　Q で囲

を S_1 とすると

$$S=\frac{1}{2}S_1,\qquad S_1=\frac{1}{6}(5-1)^3=\frac{32}{3}$$



13.122　(1) x^2+y^2-4y　　0 より　$x^2+(y-2)^2=1$

この円の中心　　2) で半径 1 の円であるから，C 上の点を $(x,\ y)$ とすると，$y>$　　るから，条件により

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}-1=y-(-1)\quad\text{ゆえに}\quad\sqrt{x^2+(y-2)^2}=y+2$$

平方すると　$x^2+(y-2)^2=(y+2)^2$　整理すると　$\boldsymbol{y=\frac{1}{8}x^2}$

見本

(2) (1) で求めた C の方程式に $y=2$ を代入すると

$$2=\frac{1}{8}x^2 \quad \text{これを解いて} \quad x=\pm 4$$

$y=\dfrac{1}{8}x^2$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{4}x$

C の点 $(4,\ 2)$ における接線の傾きは 1 であるから，その方程式は

$$y-2=(x-4) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=x-}\ \ \cdots ①$$

C の点 $(-4,\ 2)$ における接線の　1 で　，その方程式は

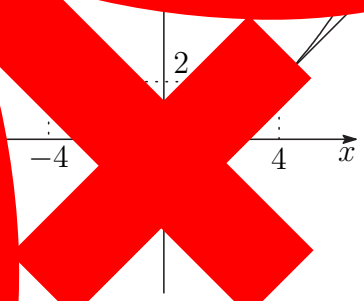
$$y-2=-(x+4) \quad \text{すな}\ \ \cdots ②$$

(3) C と ①，② で囲まれた図形は y 軸

対称であるから，求める面積

$$\frac{S}{2}=\int_0^4 \left\{\frac{1}{8}x^2 - \right\} dx$$

$$\left[\frac{x^3}{24}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^4=\frac{8}{3}$$



て

$$S=\int_0^4 \left\{\frac{1}{8}x^2 - \right\} dx=\int_0^4 \frac{1}{8}(x-4)^2\,dx=\left[\frac{1}{24}(x-4)^3\right]_0^4=\frac{8}{3}$$

(2, 1)　, −1)　− t に内分　P の座標は

$t)\cdot 2$　　$1+t\cdot(-$　なわち　$\boldsymbol{(2-t,\ 1-2t)}$

(　−1)　1) を $t:$　る点 Q の座標は

$(1-t)\cdot(-1)+t\cdot 1$　すなわち　$\boldsymbol{(1-t,\ -1+2t)}$

(3) P$(2-t,\ 1-$　$(1-t,-1+2t)$ を $t:1-t$ に内分する点 R$(x,\ y)$ は

$$x=(1-t)(2-t)+t(1-t)=2(1-t)$$

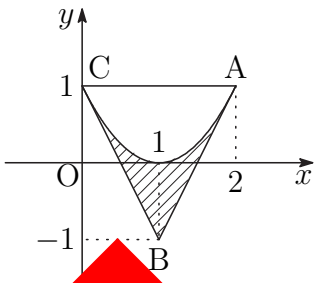
$$y=(1-t)(1-2t)+t(-1+2t)=(1-2t)^2$$

$0\leqq t\leqq 1$ より，$0\leqq x\leqq 2$．上の 2 式から t を消去すると　$y=(x-1)^2$

よって，R の軌跡の方程式は　　$\boldsymbol{y=(x-1)^2\ \ (0\leqq x\leqq 2)}$

見本

(4) 直線 BC の方程式は　$y = -2x + 1$



求める面積を S とすると

$$\frac{S}{2} = \int_0^1 \{(x-1)^2 - (-2x+1)\}\,dx$$
$$= \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right] = \frac{1}{3}$$

よって　　$S = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$

13.124　(1) $y = x^2 - 3x$ を微分すると　$y' =$

C 上の点 $(a,\ a^2 - 3a)$ における接線の

$$y - (a^2 - 3a) = (2a - 3)(x$$

これが A$(2, -6)$ を通るから

$$-6 = (2a - $$

よ　る接線は　$\boldsymbol{y = 5x - 16,}$

(2)　の点　$3t)$ に対して線分 AP の　$(x,\ y)$ とする

$$\frac{2+t}{2}, \quad y = \frac{-}{2}$$

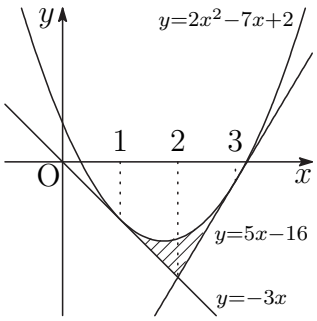
の第 1　t　と　これを第 2 式に代入すると

$$y = \frac{x-2)^2 - 3(}{2} = 2x^2 - 7x + 2$$

と，点　跡は　$\boldsymbol{y = 2x^2 - 7x + 2}$

(3)　2 $\cdots$①，　②，$y = 5x - 16 \cdots$③ とおく．

①　去すると



$2x^2 - 4x$　　ゆえに　$2(x-1)^2 = 0$

①，② は点　で接する．

また，①　ら y を消去すると

$2x^2 - 12x + 18 = 0$　ゆえに　$2(x-3)^2 = 0$

①，③ は点 $(3,\ 0)$ で接する．

印刷用

したがって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{(2x^2-7x+2)-(-3x)\}\,dx \\ &\qquad + \int_2^3 \{(2x^2-7x+2)-(5x-16)\}\,dx \\ &= \int_1^2 2(x-1)^2\,dx + \int_2^3 2(x-3)^2\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(x-1)^3\right]_1^2 + \left[\quad -3)^3\right]_{\quad}^{3} \end{aligned}$$

13.125 (1) $y=x^2$ と $y=kx+1$ から y を消去

$x^2=kx+1$ ゆえに

2 次方程式 $(*)$ の 2 つの解が ある の関係

$\boldsymbol{=k,\quad \alpha\beta=-1}$

(2) $y=$ 分すると $y'=2x$

る接線 l の方程式は

$-\alpha)+\alpha^2$ すなわち $=2\alpha x-\alpha^2$ $\cdots$①

同 Q(β 接線 m の方程式は $y=2\beta x-\beta^2$ $\cdots$②

，② て $x=$ ， $y=$

(果より) よって の x 座標は $\boldsymbol{\frac{k}{2}}$

(の結 $\alpha<\beta$ と

$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{k^2+4}$

直線 $y=kx-$ の点で x 座標が $\frac{k}{2}$ である点を $\mathrm{S}\left(\frac{k}{2},\ \frac{k^2}{2}+1\right)$ とすると

$$\mathrm{RS}=\left(\frac{k^2}{2}+1\right)-(-1)=\frac{1}{2}(k^2+4)$$

$$\triangle \mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\mathrm{RS}\cdot(\beta-\alpha)=\frac{1}{4}(k^2+4)^{\frac{3}{2}}$$

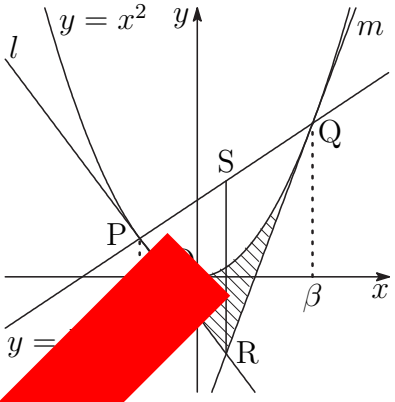
見本

(1) の結果から，直線 PQ は

$$y = (\alpha+\beta)x - \alpha\beta$$

であるから，直線 PQ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} [\{(\alpha+\beta)x - \alpha\beta\} - x^2]dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}(k^2+4)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$



よって，求める面積は　△PQR−

13.126　(1) 接点を A$(a,\ b)$ とすると，　$+y$　の　点であ

a　$= r^2$

A を　A に垂直な直線上の任意の点　，　

$\overrightarrow{\text{PA}}\cdot\overrightarrow{\text{AP}} = 0$ であるから

$(y-b) = 0$　すなわ　$x+by = a^2+b^2$

して，　は　$ax+by = r^2$

x^2+　分す　$= 2x$

C 上の　t^2+　ける接線の方　は

$y-$　$t)$　すな　$2tx - y - t^2 + 1 = 0$

$+y^2 = 1$　き，原点からこの直線までの距離が 1

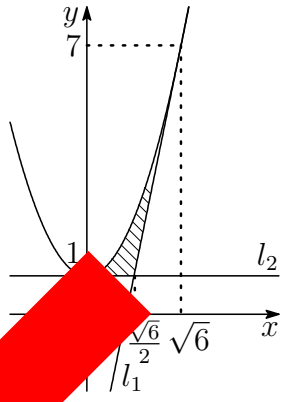
$\dfrac{|t^2+1|}{2+(-1)^2} = 1$　これを解いて　$t = 0,\ \pm\sqrt{6}$

よって，求　本の接線の方程式は

$$\boldsymbol{y = 1,\ \pm 2\sqrt{6}x - y - 5 = 0}$$

見本

(3) 求める面積 S は，右の図の斜線部の面積であるから



$$S = \int_0^{\sqrt{6}} \{(x^2+1)-1\}\,dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot 6$$
$$= 2\sqrt{6} - \frac{3\sqrt{6}}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

補足 $S = \frac{1}{2}\times\frac{1}{6}(\sqrt{6}-0)^3 = \frac{\sqrt{6}}{2}$

13.127 (1) $f(x) = ax^2+bx+c$ とおくと $(a \neq 0)$

これらを $f'(x)\{2f'(x)-x\} = 6$ すると

$(2ax+b)\{2(2ax$ $\} = 6$ bx $2x$

x について整理すると

$1)x^2 + (8a-1)bx + 2b^2 = 6$ $+$

の同 項の係数を比較すると

$2a(4a$ a, $(8a-1)b =$, $2b^2 = 6c+8$

より の第 , $a =$ これを第 2 式に代入して，$b = 2$.

さらに 2 を第 代入して よって $\boldsymbol{f(x) = x^2+2x}$

$f(x)$ $2t)$ に 線の方程式は

$t^2 = (2t+$ すなわち $y = 2(t+1)x - t^2$

が $k)$ を通るとき

$-k = -t^2$ これを解いて $t = \pm\sqrt{k}$

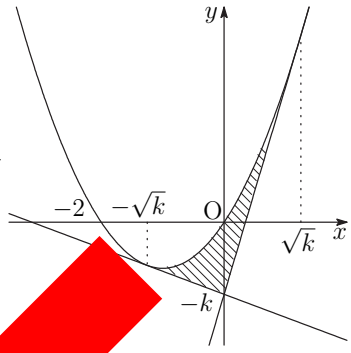
よって る接線の方程式は $\boldsymbol{y = 2(\pm\sqrt{k}+1)x - k}$

(ii) (1) の ら

$$f(x) - \{2(\sqrt{k}+1)x - k\} = (x-\sqrt{k})^2,$$
$$f(x) - \{2(-\sqrt{k}+1)x - k\} = (x+\sqrt{k})^2$$

見本

右の図の斜線部分の面積を S とすると



$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{0} (x+\sqrt{k})^2\,dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} (x-\sqrt{k})^2\,dx$$
$$= \left[\ \frac{1}{3}(x+\sqrt{k})^3\ \right]_{-\sqrt{3}}^{0} + \left[\ \frac{1}{3}(x-\sqrt{k})^3\ \right]_{0}^{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{2}{3}k\sqrt{k}$$

$S = 2\sqrt{3}$ より　$\dfrac{2}{3}k\sqrt{k} = 2$　って

補足　$S = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6}\{\sqrt{k} - (-\sqrt{k})\}^3 = \dfrac{}{3}$

13.128　(1)　$f(x) = (x-p)^2 + p^2$ とおくと　f'

C 上の x 座標が a である点に

$$y - f(a) = f'($$

ゆえに　$y - \{(a-p)^$　$= 2(a-p$　$a)$

よって　$\boldsymbol{y = 2(a-p)x - a^2 + 2p^2}$

同　x 座標が b である点にお　程式

$$\boldsymbol{= p)x - b^2 + 2p^2}$$

l が　通る　の結果から

$2(a -$　$a^2 + 2$　ゆえに　$a^2 = 2p^2$

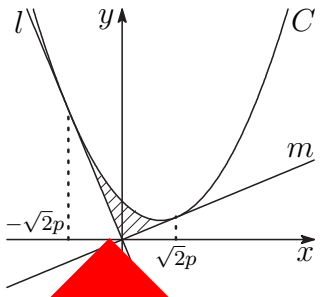
$a <$　0 で　$\boldsymbol{a = -}$

m　を　(1)　から　$b^2 = 2p^2$

あるから　$\boldsymbol{p}$

見本

(3) (1), (2) の結果から



$$l : y = -2(\sqrt{2}+1)px$$
$$m : y = 2(\sqrt{2}-1)px$$

よって，求める面積 S は

$$S = \int_{-\sqrt{2}p}^{0} [(x-p)^2 + p^2 \quad (\sqrt{2}+1$$
$$+ \int_{0}^{\sqrt{2}p} \{(x \quad$$
$$= \int_{-\sqrt{2}p}^{0} (x+\sqrt{2}p)^2 dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x+\sqrt{2} \right._{-\sqrt{2}p} + \left[\frac{1}{3}(x \quad p)^3 \right]_0$$

補足 S $\sqrt{2}p-(-\sqrt{2}p)\}^3 = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}p^3$

13.129 (方程式 $+\gamma = 0$ が重解をもつ は，係数から

$$\boldsymbol{\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0}$$

(定数 直線 と放 $= ax^2+bx+c$ が接するとき，

$bx+$ すなわち $a \quad -k)x+c=0 \quad \cdots(*)$

重解 から $(b \quad 4ac = 0$

すると $+b^2-4ac=0$

この 2 次 式の解が $\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}$ であるから，解と係数の関係により

$$\left(-\frac{1}{2}\right) = 2b, \quad \frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = b^2-4ac$$

上の第 1 式 $\boldsymbol{b=1}$ これを第 2 式に代入することにより

$4ac = \dfrac{9}{4}$ このとき, $a \neq 0$ であるから $\boldsymbol{c = \dfrac{9}{16a}}$

印刷本

(3) 接点の x 座標は，$(*)$ および $b=1$ から　$x=-\dfrac{b-k}{2a}=\dfrac{k-1}{2a}$

これにそれぞれ $k=\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}$ を代入することにより

P の x 座標は　$\boldsymbol{x=\dfrac{3}{4a}}$，　Q の x 座標は　$\boldsymbol{x=-\dfrac{3}{4a}}$

(4) (2) の結果により，放物線 C の方程式は

$$y=ax^2+x+\frac{9}{\quad}=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\quad}-\frac{\quad}{16a}$$

ゆえに，C の頂点を $(X,\ Y)$ とお

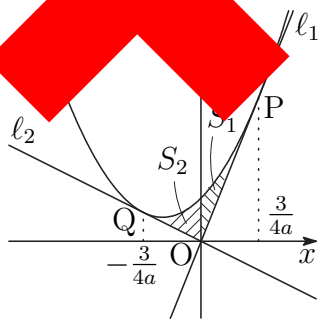
$$X=-\frac{1}{2}$$

上の 2 式から a を消去すると　$=-$

よって，求める m の方程　$\boldsymbol{y=-}$

(5) (2),　結果から，C と y 軸，ℓ_1 で囲ま

部　S_1 とすると



$$S_1=\left\{\left(\quad+x+\frac{9}{16a}\right)-\frac{5}{2}x\right\}$$

$$=a\int_{\quad}^{\frac{3}{4a}}\left(\quad\right)$$

$$=a\left[\frac{1}{3}\left(x\quad\right)^{\quad}\right]_0^{\frac{3}{4a}}=\frac{9}{64a^2}$$

C，ℓ　れた　積を S_2 とすると

$$=\int_{-\frac{3}{4a}}^{0}\left\{\left(\quad+\frac{9}{16a}\right)-\left(-\frac{1}{2}x\right)\right\}dx$$

$$=a\int_{-\frac{3}{4a}}^{0}\left(x+\frac{3}{4a}\right)^2dx$$

$$=a\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{4a}\right)^3\right]_{-\frac{3}{4a}}^{0}=\frac{9}{64a^2}$$

よって，求める面積を S とすると

$$S=S_1+S_2=\frac{9}{64a^2}+\frac{9}{64a^2}=\boldsymbol{\frac{9}{32a^2}}$$

見本

補足 x^2 の係数および接点の x 座標から

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{a}{6} \left\{ \frac{3}{4a} - \left(-\frac{3}{4a} \right) \right\}^3 = \frac{9}{32a^2}$$

13.130 (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$.

点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{ゆえに} \quad y = 2ax \qquad \cdots ①$$

同様に，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接[illegible]程式[illegible] $2bx - b^2$　$\cdots ②$

①，② を解いて　$\mathbf{R}\left(\dfrac{\boldsymbol{a+b}}{\mathbf{2}},\ \boldsymbol{ab} \right)$

直線 PQ の方程式は

$$y - a^2 = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x [illegible] \text{な} [illegible] b)x -$$

直線 PQ 上の x 座標が $\dfrac{a+}{2}$ である点を M [illegible] と [illegible] $\dfrac{a^2+b^2}{2}$ $\right)$

[illegible] $= \dfrac{a^2+b^2}{2} - ab = \dfrac{1}{2}(b -$

よって [illegible] $\mathrm{R} \times (b-a) = \dfrac{1}{2} \times$ [illegible] $)^2 \times (b-a) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{(b-a)^3}$

(2) [illegible] Q と [illegible] y [illegible] 囲まれた部分 [illegible] 面積は

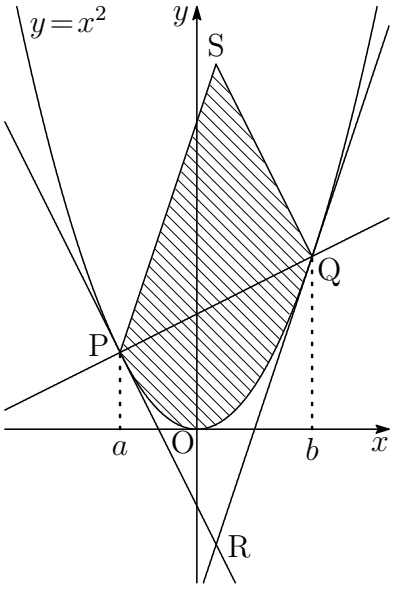
$$\int_a^b \{([illegible] - x^2\}\, dx$$

[illegible] $x - a)(x -$ [illegible]

$\frac{1}{6}(b$ [illegible]

△PSQ の面積 [illegible] RQ の面積に等しいので，上式および [illegible] の結果から，求める図形の面積は

$$\frac{1}{6}(b-a)^3 + \frac{1}{4}(b-a)^3 = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}\boldsymbol{(b-a)^3}$$



見本

(3) $\angle \mathrm{PRQ} = 90^\circ$ のとき，直線 ①，② は直交するので

$$2a \times 2b = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{4b}$$

これを ② の結果に代入すると $\dfrac{5}{12}\left(b + \dfrac{1}{4b}\right)^3$

ここで，$b > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の関[illegible]り

$$b[\quad] \geqq 2\sqrt{b \times}$$

よって，求める最小値は $\dfrac{5}{12} \cdot 1^3 =$

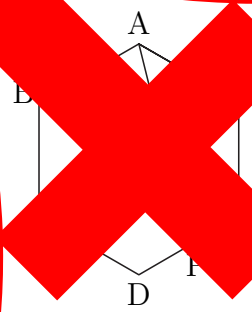
補足 (九大 [文]2009) 4

14.1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AF}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AF}}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}})$

$$= \frac{\mathbf{3}\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \mathbf{4}\overrightarrow{\mathbf{AF}}}{\mathbf{2}}$$



) (1) [illegible] から $\dfrac{7}{[\quad]} \times \dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{7}$

[illegible] えに $\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + [\quad]}{[\quad]} \cdots ①$ [illegible] って $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{7}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

[illegible] AQ [illegible] $\dfrac{7}{[\quad]} - 1 = \mathbf{2}$

(3) [illegible] $\dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin [\quad]$ [illegible] $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

① [illegible]，BQ [illegible] $= 4 : 3$ であるから

$$\triangle \mathrm{ABQ} = \frac{4}{4+3}\triangle \mathrm{ABF} = \frac{4}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

(2) の結果[illegible]

$$\triangle \mathrm{BPQ} = \frac{5}{2}\triangle \mathrm{ABQ} = \frac{5}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{7} = \mathbf{\frac{5}{14}\sqrt{3}}$$

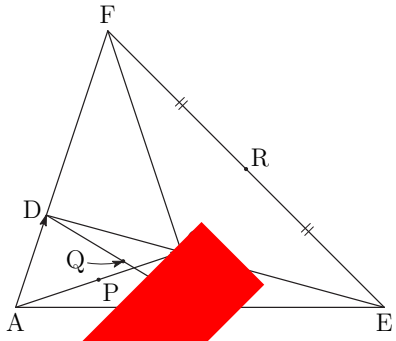
見本

14.2 (1) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

$$= \left(\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{d}\right) - \vec{d} = \frac{2}{5}(2\vec{b} - \vec{d})$$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$= \left(\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{d}\right) - \vec{b} = \frac{1}{5}(-\vec{b} + 3\vec{d})$$



したがって

$$\overrightarrow{AE} = \vec{d} + \alpha(2\vec{b} - \quad\quad - \alpha)\vec{d}$$

$$\overrightarrow{AF} = \vec{b} + \beta(-\vec{b} + 3$$

E，F はそれぞれ直線 AB，AC

$$1 - \alpha = 0, \quad 1 \quad \text{これ}$$

よって $\overrightarrow{AE} = 2\vec{b}$, $\quad = 3\vec{d}$

(2) Q D中点であるから $\overrightarrow{AQ} =$ $\quad\quad$ $\frac{}{2}$

は線 あるから $\overrightarrow{AR} =$ $\overrightarrow{AF} = \dfrac{2\vec{b} + 3\vec{d}}{2}$

$$\overrightarrow{AR} \quad \frac{2\vec{b} + 3\vec{d}}{2} \quad \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{d}}$$

P は 点で っ $\overrightarrow{AP} =$ $= \dfrac{2}{5}\vec{b} + \dfrac{3}{10}\vec{d}$

$$\overrightarrow{QR} \quad - \overrightarrow{AQ} \quad \frac{b + \vec{d}}{2} = -\frac{1}{10}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{d}$$

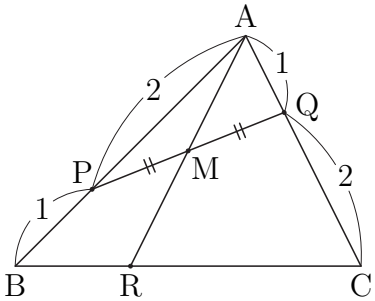
$\frac{1}{}\overrightarrow{QR}$ よって，3 点 P，Q，R は同一直線上にある．

14.3 (1) M は線分 PQ 点であるから

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

条件から $\overrightarrow{AP} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\quad \overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

したがって $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$



印刷本

点 A，M，R が一直線上にあるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{6}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

R は直線 BC 上の点であるから

$$\frac{1}{3}k + \frac{1}{6}k = 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = 2$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ よって **BR : RC = 1 : 2**

(2) G は △ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

H は △PQR の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \quad \mathrm{R}\right)$$

これ $= \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を代入す

$$\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AR}}\right) = \quad + \frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$

こ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ るから

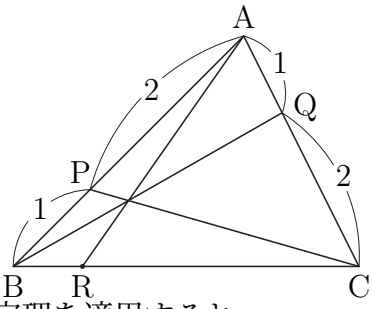
$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{2}{9} \quad \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$

ゆ $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ $\overrightarrow{\quad}$ よっ **: RC = 2 : 1**

(3) より $\frac{\quad}{\mathrm{PB}} \quad \frac{\quad}{\mathrm{QA}} = 1$

した って $\cdot\frac{2}{1}$ ゆえに $\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}} = \frac{1}{4}$

よって **B C = 1 : 4**



14.4 (1) △OAM と直線 BD について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DA}} \cdot \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EM}} \cdot \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{BO}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{h}{1-h} \cdot \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EM}} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

見本

AE : EM $= 2(1-h) : h$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{h\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2(1-h)\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{2(1-h)+h} = \frac{\boldsymbol{h\vec{a} + (1-h)\vec{b}}}{\boldsymbol{2-h}}$$

(2) OA $= 3$，OM $= 2$，$\angle \mathrm{AOM} = 60^\circ$ であるから，△OAM に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AM}^2 = 3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cos 60^\circ = 7 \quad \text{ゆえ} \quad = \sqrt{7}$$

AE $= \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ より，E は AM の中[illegible]から

$$2(1-h) : h = 1 :$$

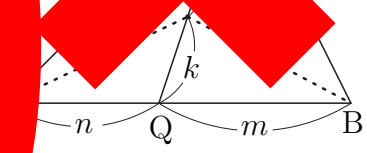
14.5 (1) 線分 AB を $n : m$ に内分する[illegible]す

$$m\overrightarrow{\mathrm{PA}} + n\overrightarrow{\mathrm{PB}} = [illegible]\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

これ[illegible]式

$$[illegible]\overrightarrow{\mathrm{A}} + n\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{0} \quad \cdots (*)$$

[illegible]代入



$$[illegible]\vec{\mathrm{O}} + [illegible]\vec{0} \quad \cdots (**)$$

[illegible]は線分[illegible]と $m+$[illegible]に内分する[illegible]るから，$S = \triangle \mathrm{OAB}$ とおくと

$$\triangle [illegible] = \frac{k}{[illegible] + n)} S$$

$$[illegible]\mathrm{OB} = \frac{[illegible]}{k + (}[illegible]\mathrm{OQ}$$

$$[illegible] = \frac{m+n}{k+(m+n)} \times \frac{m}{m+n} S = \frac{m}{k+(m+n)} S,$$

$$\triangle [illegible] = \frac{m+n}{k+(m+n)} \triangle \mathrm{OAQ}$$

$$[illegible] = \frac{m+n}{k+(m+n)} \times \frac{n}{m+n} S = \frac{n}{k+(m+n)} S$$

$(*)$ が成り立つとき　　$\triangle \mathrm{PAB} : \triangle \mathrm{POB} : \triangle \mathrm{POA} = k : m : n$

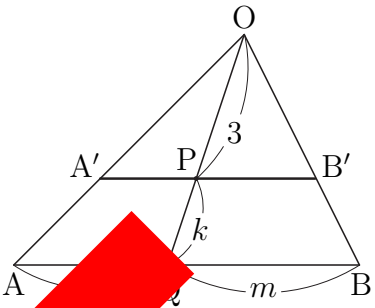
よって　　$\triangle \mathrm{POA} : \triangle \mathrm{POB} : \triangle \mathrm{PAB} = n : m : k = \mathbf{2 : 1 : 4}$

印刷本

(2) $m+n=3$ を $(**)$ に代入すると

$$-k\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\vec{0}$$

ゆえに $\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{k+3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$



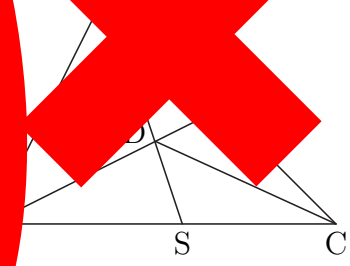
OA，OB を $3:k$ に内分する点を，それぞれ A′，B′ とする．$m \geqq 0$，$n \geqq 0$ であるから，点 P の軌跡は線分 A′B′ である．

(3) $k=1$ のとき，A′，B′ は，それ　　OB　　に内分する点であるから，$k \geqq 1$，$m \geqq 0$，$n \geqq 0$ のと　　域は △OA′B′ である．
したがって，D の面積は △OAB の面

$$\left(\frac{3}{\quad}\right)^2$$

14.6 (1) 右の図から

BS　SC = △SAB : △　CA
　　= △DAB : △DCA = $\boldsymbol{r:q}$,
　　△TBC : △TAB
　　C : △DAB = $\boldsymbol{p:r}$



(2) △　　および　　について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\quad}{\mathrm{AT}}\cdot\frac{\quad}{\quad}\cdot\frac{\quad}{\quad}=1 \quad \text{ゆえ} \quad \times\frac{p+r}{r}\times\frac{\mathrm{TD}}{\mathrm{DB}}=1$$

した　　　　$=q:p+r$

　　B を　　る点で　　ら

$$\overrightarrow{\mathrm{D}}=\frac{(p+\quad\quad\quad\quad\quad\quad}{q+(\quad\quad\quad\quad)} \qquad \cdots①$$

T は　A を p　　内分する点であるから

$$=\frac{r\overrightarrow{\mathrm{OC}}+p\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{p+r} \qquad \cdots②$$

② を ① に　　ると

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{(p+r)\cdot\dfrac{r\overrightarrow{\mathrm{OC}}+p\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{p+r}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{q+(p+r)}=\frac{p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}+r\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{p+q+r}$$

印刷本

14.7 (1) A, B, C, D, P, Q, R, S の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{s}$ とすると

$$\vec{p}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) \qquad \vec{q}=\frac{1}{3}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{a})$$
$$\vec{r}=\frac{1}{3}(\vec{d}+\vec{a}+\vec{b}) \qquad \vec{s}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})-\frac{1}{3}(\vec{d}+\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{3}(\vec{c}-\vec{a})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって　$\mathrm{AC}/\!/\mathrm{RP}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})-\frac{1}{3}(\vec{c}+\vec{a}+\vec{d})=\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　$\cdots$①

よって　$\mathrm{AB}/\!/\mathrm{QP}$

(3) (2) と同様にして

$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\frac{1}{3}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{a})-\frac{1}{3}(\vec{d}+\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{3}(\vec{c}-\vec{b})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\frac{1}{3}(\vec{d}+\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{3}(\vec{d}-\vec{c})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$　③

$\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{d})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DA}}$

②, $\angle\mathrm{PQR}=\angle\mathrm{ABC}$　$\cdots$⑤

③, $\angle\mathrm{PSR}=\angle\mathrm{CDA}$　$\cdots$⑥

四角形 ABCD は円に内接するので　$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{CDA}=180^\circ$　$\cdots$⑦

⑤, ⑥, ⑦より　$\angle\mathrm{PQR}+\angle\mathrm{PSR}=180^\circ$

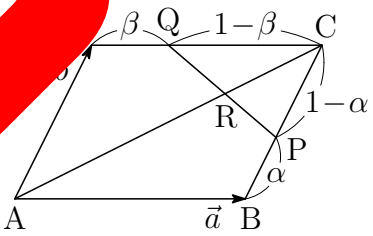
よって 4 点 P, Q, R, S は同一円周上にある.

14 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

$\boldsymbol{\alpha\vec{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$

$=\boldsymbol{\vec{b}}$



(2) (1) の結果か

$\alpha\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-\alpha\beta)\vec{a}$,　$-\beta\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-\alpha\beta)\vec{b}$

$0<\alpha<1$, $0<\beta<1$ より, $1-\alpha\beta\neq 0$ であるから

$$\vec{a}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\alpha\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta}, \qquad \vec{b}=\frac{-\beta\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta}$$

見本

したがって

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}=\frac{\overrightarrow{AP}-\alpha\overrightarrow{AQ}}{1-\alpha\beta}+\frac{-\beta\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}}{1-\alpha\beta}$$

$$=\frac{(1-\beta)\overrightarrow{AP}+(1-\alpha)\overrightarrow{AQ}}{1-\alpha\beta}$$

$$=\frac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta}\times\frac{(1-\beta)\overrightarrow{AP}+(1-\alpha)\overrightarrow{AQ}}{(1-\alpha)+(1-\beta)}$$

ゆえに　$\overrightarrow{AR}=\frac{(1-\beta)\overrightarrow{AP}+(1-\alpha)\overrightarrow{AQ}}{(1-\alpha)+(1-\beta)}$,　$\frac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{AR}$

よって　$\mathbf{\frac{QR}{RP}=\frac{1-\beta}{1-\alpha}}$,

(3)　$\triangle AQR=\frac{AR}{AC}\times\triangle AQC$

$=\frac{AR}{AC}\times\frac{QC}{DC}\triangle DC$

$=\frac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}\times(1-\beta)\times\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin120°$

$=\mathbf{\frac{\sqrt{3}(1-\alpha\beta)(1-\beta)}{4(2-\alpha-\beta)}}$

14　C は AB 上にあるから，実数 α を用いて

$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB}$

$=\alpha(2,\ 6)+(1-\alpha)(3,\ 4)$

$=(3-\alpha,\ 4+2\alpha)$

$\overrightarrow{AB}=(1,\ -2)$, $\overrightarrow{OC}=(3-\alpha,\ 4+2\alpha)$ であるから

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=(3-\alpha)\cdot1+(4+2\alpha)\cdot(-2)=0$　ゆえに　$\alpha=-1$

したがって　$\mathbf{C(4,\ 2)}$

与式および上の結果から

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

$=s(2,\ 6)+t(3,\ 4)-(4,\ 2)$

$=(2s+3t-4,\ 6s+4t-2)$

よって　$|\overrightarrow{CP}|^2=(2s+3t-4)^2+(6s+4t-2)^2$

$=\mathbf{40s^2+25t^2+60st-40s-40t+20}$

印刷本

(2) (1) の結果を t について整理すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 = 25t^2 - (40-60s)t + 40s^2 - 40s + 20$$
$$= 2\left(t - \frac{4-6s}{5}\right)^2 + 4s^2 + 8s + 4 \quad (t \geqq 0)$$

i) $0 \leqq \dfrac{4-6s}{5}$ すなわち $s \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき

$t = \dfrac{4-6s}{5}$ で最小値 $4s^2 + 8s$ をとる.

ii) $\dfrac{4-6s}{5} < 0$ すなわち $s > \dfrac{2}{3}$ のとき

$t = 0$ で最小値 [illegible] をとる.

i), ii) より, $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値は

$s \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき $4s^2 + 8s + 4$, $s > \dfrac{2}{3}$ のとき $40s - 40s + 20$

14.10 (1) △ABC と PE について, メネラウスの [illegible] ると

$\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}} \cdot \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ ゆえに $\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}} \cdot \dfrac{m}{n} = 1$

$\mathrm{AP} = n($ [illegible] $\cdots$① であるから

$$= \frac{n(\quad)}{n^2 + n^2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{(m+n)}{mn+n^2} \cdot \frac{n\overrightarrow{\mathrm{AB}} + m\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{m+n}$$
$$= \frac{1}{n^2}(n\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \quad)$$

[illegible] R の位置 [illegible] それぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ とすると

$$\vec{p} - \vec{a} = \frac{n}{m^2 + mn + n^2}\{n(\vec{b} - \vec{a}) + m(\vec{c} - \vec{a})\}$$
$$\vec{p} = \frac{m\vec{a} + n^2\vec{b} + mn\vec{c}}{m^2 + mn + n^2}$$

A, B, C [illegible] Q, R の対称性により

$$\vec{q} = \frac{m^2\vec{b} + n^2\vec{c} + mn\vec{a}}{m^2 + mn + n^2}, \qquad \vec{r} = \frac{m^2\vec{c} + n^2\vec{a} + mn\vec{b}}{m^2 + mn + n^2}$$

印刷本

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{RP}} = \dfrac{m^2\overrightarrow{\mathrm{CA}} + n^2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + mn\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{m^2+mn+n^2}$

$= \dfrac{-m^2\overrightarrow{\mathrm{AC}} + n^2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + mn(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}})}{m^2+mn+n^2}$

$= \dfrac{n-m}{m^2+mn+n^2}(n\overrightarrow{\mathrm{AB}} + m\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \dfrac{n^2-m^2}{m^2+mn+n^2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　$\cdots$②

同様にして　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \dfrac{n-m}{m^2+mn+n^2}(n\overrightarrow{\mathrm{BC}} + m\overrightarrow{\mathrm{BA}}) = \dfrac{n^2-m^2}{m^2+mn+n^2}\overrightarrow{\mathrm{BE}}$

$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \dfrac{n-m}{m^2+mn+n^2}(n\overrightarrow{\mathrm{CB}} + m\overrightarrow{\mathrm{CA}}) = \dfrac{n^2-m^2}{m^2+mn+n^2}\overrightarrow{\mathrm{CF}}$

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BE}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CF}}|$ で

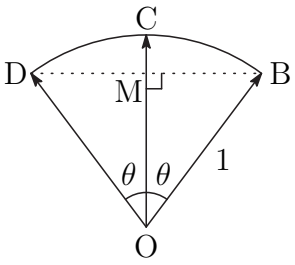
$|\overrightarrow{\mathrm{RP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{QR}}|$ より，△PQR は正三角形

(2)　① より　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{n(m+n)}{m^2+mn+n^2}$

②　$\dfrac{\mathrm{RP}}{\mathrm{QP}} = \dfrac{n^2-m^2}{m^2+mn+n^2}$

$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AP}} = \dfrac{\mathrm{RP}}{\mathrm{QP}} = \dfrac{m(m+n)}{m^2+mn+n^2}$ より　AR : AP $= m : n$

14　(1)　B[illegible]中点を[illegible]　M は OC 上にあり，



[illegible]OM

したが[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$

に[illegible]$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2}$[illegible]$\vec{c}$

[illegible]$= 2(\cos\theta)\vec{b}$

(2)　(1) と同様に[illegible]C の中点を N とすると

$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2} = \overrightarrow{\mathrm{ON}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = (\cos\theta)\vec{b}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2(\cos\theta)\vec{b} - \vec{c}$

AC と BD の交点 P は，実数 s，t を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

見本

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\{2(\cos\theta)\vec{b} - \vec{c}\} + (1-s)\vec{c} = (1-t)\vec{b} + t\{2(\cos\theta)\vec{c} - \vec{b}\}$

整理すると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2s(\cos\theta)\vec{b} + (1-2s)\vec{c} = (1-2t)\vec{b} + 2t(\cos\theta)\vec{c}$

$\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$2s\cos\theta = 1-2t, \quad 1-2s = 2t\cos\theta$$

上の 2 式から　$2s = 2t = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$

よって　$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \left(\dfrac{\cos\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{1+\cos\theta}}\right)$ (cos

14.12　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$= |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$= 5^2 - 2\cdot3 + 1^2 = 20$

よって　$|\overrightarrow{\mathbf{BC}}| = \mathbf{2\sqrt{5}}$

14.13　$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ 0° $= 3\cdot2\cdot\dfrac{1}{2} = 3$

$= |\vec{a}|^2 - 6\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3^2$ $+$ $= 27$

$\boldsymbol{3b}|$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} =$ 3), $\overrightarrow{\mathrm{O}}$ $\theta)$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O}}$ $\theta + \sqrt{3}\sin$ $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$

より 13 π で

$\dfrac{\pi}{2}$　すなわち $\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$ のとき　最大値 **2**

14.15　△ABC に余弦定理 用すると

$$\cos A = \frac{3^2 + 4^2 - (\sqrt{13})}{2\cdot3\cdot4} = \frac{1}{2}$$

よって　$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos A = 4\cdot3\cdot\dfrac{1}{2} = \mathbf{6}$

BC の中点を M とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$

印刷本

また　$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})$

よって　$|\overrightarrow{AG}|=\frac{1}{3}|\vec{b}+\vec{c}|=\frac{1}{3}\sqrt{|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2}$

$=\frac{1}{3}\sqrt{4^2+2\cdot6+3^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{37}}{3}}$

14.16　(1)　$|\vec{a}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}|\cos\theta$ であるから

$|3\vec{a}+t\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2$ [illegible] $+t^2|\vec{b}|^2$

$=|\vec{b}|^2t^2+$ [illegible]

$=|\vec{b}|^2\left(t+\frac{3}{}\right.$ [illegible]

$|3\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最小のとき，$|3\vec{a}$ [illegible] 最小 [illegible]

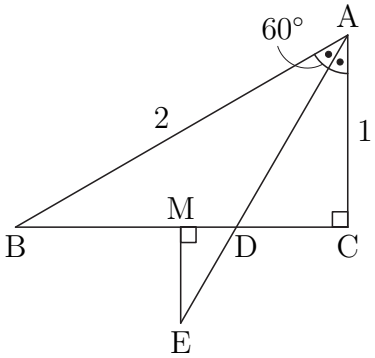
よって，$\boldsymbol{t=-\frac{3\cos\theta}{|\vec{b}|}}$ [illegible] $|3\vec{a}+t\vec{b}|$ [illegible] いとな

(2)　$|3\vec{a}$ [illegible] $=-\frac{1}{2}$ のとき，最小値 $2\sqrt{2}$ を [illegible] か [illegible] り

[illegible] $\frac{3\cos\theta}{|\vec{b}|}=-\frac{1}{2}$，　$-9\cos^2$ [illegible] $=(2\sqrt{2})^2$

[illegible] $|\vec{b}|=$ [illegible] $\cos^2\theta=1$　よって　$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{1}{3}}$，$\boldsymbol{|\vec{b}|=2}$

$\cdot\vec{c}=$ [illegible] $\cos60°$ [illegible] $=\boldsymbol{1}$



[illegible] ∠A の [illegible] から

BD [illegible] $=$ AD : A [illegible]

よ [illegible] $\boldsymbol{\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}}$

(3)　M は BC の中 [illegible] D : DC $=2:1$ より

MD : [illegible] $1:2$

また，△MD [illegible] △CAD より

E [illegible] $=1:2$

よって　$\boldsymbol{AD:AE=2:3}$

14.18　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60°=2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{2}$

見本

(2) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

$= \dfrac{3}{4}\vec{b} - \dfrac{1}{4}\vec{a} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{4}\vec{a} + \dfrac{3}{4}\vec{b}}$

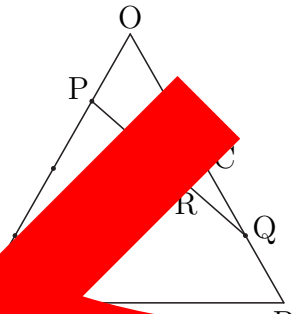
(3) $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{4}(-\vec{a} + 3\vec{b})$ より

$|\overrightarrow{PQ}| = \dfrac{1}{4}|-\vec{a} + 3\vec{b}|$

$= \dfrac{1}{4}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 6\vec{a}\cdot\vec{b} + 9|\vec{b}|^2}$

$= \dfrac{1}{4}\sqrt{2^2 - 6\cdot 2 + 9\cdot 2^2}$

$= \dfrac{1}{4}\cdot 2\sqrt{2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{2}}$



(4) R は AC 上の点であるから，実数

$\overrightarrow{OR} = (1-t)\overrightarrow{O}$ $\overrightarrow{C} = ($ $+$ ①

$\vec{a} = 4\overrightarrow{O}$ $\vec{b} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{OQ}$ であるから

$\overrightarrow{OR} = 4(1-t)\overrightarrow{OP}$ $\overrightarrow{Q}$

また，$\overrightarrow{Q}$ であるから

$\dfrac{2t}{3} = 1$ ゆえに $t = \dfrac{9}{10}$

これを代入して $\boldsymbol{\overrightarrow{OR} = \dfrac{1}{10}\vec{a}}$ $\boldsymbol{\vec{b}}$

14.19 $\vec{0} = \overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{PB} + k\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AP} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) = \vec{0}$

$\overrightarrow{AD} = \dfrac{k+2}{k+6}\cdot\dfrac{2\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{k+2}$ ゆえに $\overrightarrow{AD} = \dfrac{2\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{k+2}$

よって **B C = k : 2**

(2) $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$ より $(2\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$ であるから

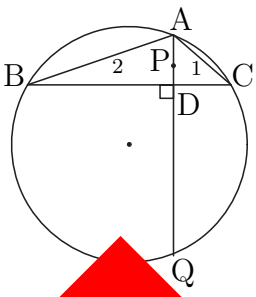
$-2|\overrightarrow{AB}|^2 + (2-k)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + k|\overrightarrow{AC}|^2 = 0$

$-2\cdot 2^2 + (2-k)\cdot 2\cdot 1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) + k\cdot 1^2 = 0$

これを解いて **k = 5**

印刷本

(3) △ABC に余弦定理を適用すると



$$BC^2 = 2^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cos 120^\circ = 7$$

ゆえに　　$BC = \sqrt{7}$

また　$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{2}AD\cdot BC = \triangle ABC$ であるから

$$\frac{1}{2}AD\cdot\sqrt{7} = \frac{\sqrt{}}{2} \qquad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

(1)，(2) の結果から　$BD = \dfrac{5}{7}BC$

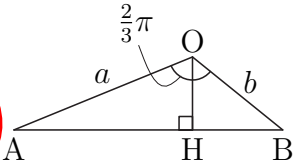
方べきの定理により，AD·D　　DC

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}DQ = \frac{2}{\sqrt{7}} \quad \text{ゆえ} \quad Q =$$

$$AD : DQ = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} : \frac{10}{\sqrt{21}} =$$

よっ　　$= \dfrac{AD + DQ}{AD} = \boldsymbol{\dfrac{13}{3}}$

条件



$$|a||\vec{b}| \quad = -\frac{1}{2}ab$$

　　上の点　　$= \overrightarrow{OA}$

b　　お

$$\overrightarrow{OH} = (1 \qquad + t\vec{b} \quad (t \text{ は実数})$$

このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{H} &= (\vec{b}-\vec{a})\cdot\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\\ &= (t-1)|\vec{a}|^2 + (1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2\\ &= a^2(t-1) - \frac{1}{2}ab(1-2t) + b^2t\\ &= (a^2+ab+b^2)t - a^2 - \frac{1}{2}ab\end{aligned}$$

見本

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OH}} = 0$ であるから

$$t = \frac{a^2 + \frac{1}{2}ab}{a^2 + ab + b^2}, \quad 1 - t = \frac{\frac{1}{2}ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{\frac{1}{2}ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}\vec{a} + \frac{a^2 + \frac{1}{2}ab}{a^2 + ab + b^2}\vec{b} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a^2 + ab + b^2}} \left\{ \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{ab} \right) \overrightarrow{\mathbf{OA}} + \left(\qquad \boldsymbol{ab} \right) \overrightarrow{\mathbf{OB}} \right\}\end{aligned}$$

14.21 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{O}}$ $= 5$

これを解いて　$\overrightarrow{\mathbf{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OB}}$

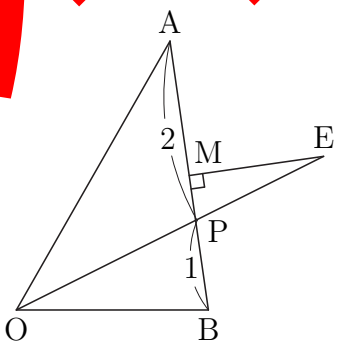
別解 余弦定理により　$\cos \angle \mathrm{A}$ $= \dfrac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{O}}{2\mathrm{OA}}$ $\dfrac{\mathrm{AB}^2}{}$ $= \dfrac{1}{2}$

よ $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \cos \angle \mathrm{AOB}$ $= 1$

$= s\overrightarrow{\mathrm{O}}$ について，E は直線 OP

の点で $2s$ $\cdots$①

ゆ 点 A M とすると



$\overrightarrow{\mathrm{ME}}$ $- \overrightarrow{\mathrm{OM}}$

$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{O}}$

$\frac{1}{2}\Big) \mathrm{O}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ME}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \left\{ \left(s - \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(2s - \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{\mathrm{OB}} \right\} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\ &= \left(s - \frac{1}{2} \right) |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + s\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \left(2s - \frac{1}{2} \right) |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= 64 \left(s - \frac{1}{2} \right) + 20s - 25 \left(2s - \frac{1}{2} \right) \\ &= 34s - \frac{39}{2}\end{aligned}$$

見本

$\overrightarrow{\mathrm{ME}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{ME}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}} = 0$ であるから

$$34s - \frac{39}{2} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{s = \frac{39}{68}}$$

これを ① に代入すると　$\boldsymbol{t = \frac{39}{34}}$

14.22　(1) M は辺 AB の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{\boldsymbol{2}},$$

OD は ∠AOB の二等分線であるか

AD : DB = OA : OB = 3 : 2 より

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{\boldsymbol{2\vec{a} + 3\vec{b}}}{\boldsymbol{5}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と同じ向きの単位ベク　とす

$$\vec{e} \quad \frac{5\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|} = \frac{2\vec{a} +}{|2\vec{a} + 3\vec{b}|}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OE}} = (\vec{a}\cdot\vec{e}$$

に

$$\frac{2\cdot 3^2 + 3\vec{a}\cdot\vec{b}}{3^2 + 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 9\cdot 2^2} \quad \frac{3(6 + \vec{a}\cdot\vec{b})}{12(6 + \vec{a}\cdot\vec{b})} = \frac{1}{4}$$

たが

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} \quad + 3\vec{b}) =$$

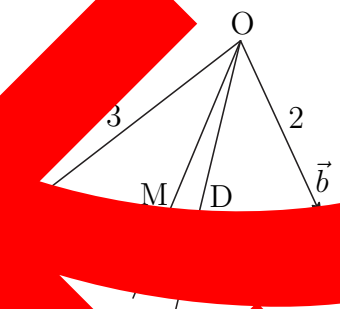
△ 直線 て，メネラ 定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MD}} \cdot \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{OE}} \quad \text{に} \quad \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}} = 1$$

し : FA = 1 : 4

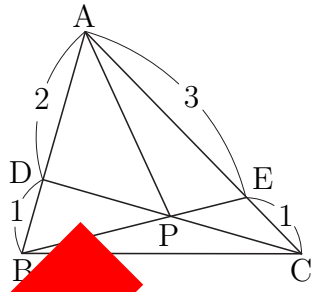
よって　$\overrightarrow{\mathrm{O}} \quad \overrightarrow{\mathrm{A}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{\vec{a} + (2\vec{a} + 3\vec{b})}{5} = \frac{\boldsymbol{3\vec{a} + 3\vec{b}}}{\boldsymbol{5}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{3\vec{a} + 3\vec{b}}{5} - \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{5} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{\vec{a}}$$



印刷本

14.23 (1) $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ とおく．



$\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ であるから　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{2}x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AC}$

点 P は直線 CD 上にあるから

$$\frac{3}{2}x+y=1 \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{AC}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AE}$ であるから　$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{3}y\overrightarrow{AE}$

点 P は直線 BE 上にあるから

$$x+\frac{4}{3}y=1 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{1}{2}$

別解 △ACD と直線 BE について，[illegible] すると

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{D}{BA}=$$ ゆえに $\dfrac{CP}{PD}=$ [illegible]

CP [illegible] なり，P は線分 CD の中点で [illegible] ら

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+$$ [illegible]

これ [illegible] すると

$$\overrightarrow{AP}$$ [illegible] $\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}A$ [illegible] $\boldsymbol{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

([illegible] 果か [illegible]

$$|\overrightarrow{AP}|^2=$$ [illegible] $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2$

これ [illegible] $|\overrightarrow{AP}|$ [illegible] $|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=4$ を代入すると

$$(\sqrt{7}$$ [illegible] $)\cdot 3^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\cdot 4^2 \quad$ ゆえに $\quad\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$

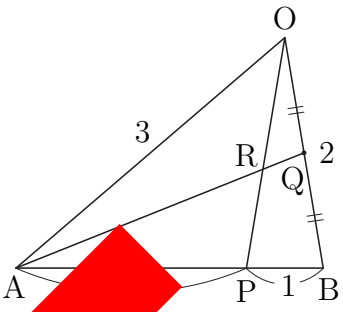
したがっ [illegible] $\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{6}{3\cdot 4}=\dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{\angle BAC=60^\circ}$

印刷本

14.24 (1) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{4}$$

$$= \mathbf{-\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})}$$



(2) (1) の結果から

$$PQ = |\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = \frac{1}{4}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{3^2 + 2\cdot 3\cdot 2\,\cos}$$

(3) △OPB と直線 AQ について，

$$\frac{OR}{RP}\cdot\frac{PA}{AB}\cdot\frac{}{}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{R}{5}\cdot\frac{}{4}\cdot\frac{}{1}$$

よって　**OR : RP = 4 : 3**

(4) AB,　$\triangle OPQ = \frac{1}{2}\triangle OPB$,　△OPQ

よって　$\frac{3}{}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\triangle OAB = \frac{3}{56}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{\frac{9\sqrt{3}}{112}}$

(1) $\overrightarrow{OA}+$　$= \vec{a}) = \mathbf{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}}$

$= 3$　2,　cos　$B = \frac{5}{6}$ より　$= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB = 3\cdot 2\cdot\frac{5}{6} = 5$

$s)\vec{a} +$　$\vec{a})$

$= (\quad - 2s)\vec{a}\cdot\vec{b} + s|\vec{b}|^2$

$= (s-$　$(1-2s)\cdot 5 + s\cdot 2^2 = 3s - 4$

OH⊥AB より　$\overrightarrow{AB} = 0$ であるから　$3s - 4 = 0$　ゆえに　$\boldsymbol{s = \frac{4}{3}}$

(3) (1)，(2) の結　ら　$\overrightarrow{OH} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

Q は直線 O　上にあるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OH} = -\frac{k}{3}\vec{a} + \frac{4k}{3}\vec{b} \qquad \cdots ①$$

印刷本

Q は直線 PB 上にあるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1-t}{2}\vec{a} + t\vec{b} \qquad \cdots ②$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は，1 次独立であるから，①，② より

$$-\frac{k}{3} = \frac{1-t}{2}, \quad \frac{4k}{3} = t \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{2}{\square} = 2$$

よって $\qquad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{\square}}$

14.26 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{p})$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{p}| = k$, $\square^\circ - \frac{k}{\square}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}| = \frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{p}| \qquad \square|^2$$

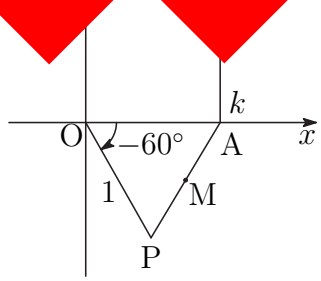
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\qquad + k^2 \qquad \boldsymbol{k^2} \qquad}$$

(2) 右の図のように，図形を座標平面上にとる

$s\vec{a} + t\vec{p}$

おく

$(0, \quad (k, \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{\square}\right)$



$\square$ って $\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}t = \qquad$ えに $\quad s = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad t = -\frac{2k}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}\vec{\boldsymbol{a}} - \qquad \boldsymbol{\sqrt{}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \qquad (0,\ k) - (k,\ 0) = k(-1,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \qquad = \frac{1}{2}(k,\ 0) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4}(2k+1, -\sqrt{3})$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} // \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ より $(-1,\ 1) // (2k+1, -\sqrt{3})$ であるから

$$-1\cdot(-\sqrt{3}) - 1\cdot(2k+1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

見本

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (k,\ 0) = \frac{1}{2}(1-2k, -\sqrt{3})$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より，$(-1,\ 1) \perp (1-2k, -\sqrt{3})$ であるから

$$-1\cdot(1-2k) + 1\cdot(-\sqrt{3}) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k = \frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

14.27 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおくと　$\vec{a}+\vec{b}$　$= \vec{0}$　$\cdots(*)$

与えれた条件から　　$\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{d}\cdot\vec{a}$，　$\vec{a}\cdot\vec{b}$　$\cdots$

$(*)$ から，$\vec{d} = -(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ を $(**)$ に代入

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = -(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}$$
$$|\vec{a}|^2 = -\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{c}\cdot\vec{a} \qquad = \qquad \cdot\vec{a}$$

上の 2 式から　　$|\vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2$　　DA =

同様に，$(*)$ ら，$\vec{a} = -(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$ を $(**)$ に　ると

$$\vec{d}\cdot(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) \qquad = c\cdot a$$
$$|\vec{d}|^2 \qquad \vec{c}\cdot\vec{d} - \vec{d}\cdot\vec{b} \qquad -\cdot\vec{d} - \vec{d}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2$$

2 式　　$|\vec{d}|$　ゆえに　CD =

よっ　の対　れ　いので，四角形 ABCD は平行四辺形である．

△ABC　円の　R とすると　定理により

$$\frac{1}{60^\circ} \qquad R = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

であるか　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

(2)(ア)　　$= (\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})$
$= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$

このと　$\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos 120^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \frac{1}{6} - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

印刷本

同様に　$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} = \dfrac{1}{6} - (\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA} = \dfrac{1}{6} - (\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OP}$

上の 3 式の辺々を加えると

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA} = \frac{1}{2} - 2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}$$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ であるから

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA} = \frac{1}{2}$$

(イ)　i) P が A，B に一致するとき

ii) P が弦 AB に関して C と

$x = PA$，$y = PB$ と

$$1^2 = x^2 + y^2 \quad \cos 60^\circ \quad \text{ゆえに} \quad xy \leqq 1$$

がって　$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = xy\cos 60^\circ$

AB に関して C と反対側に

APB に余弦定理を適用

$$= x \quad xy\cos 120^\circ \quad \text{ゆえに} \quad xy = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(x-y)^2 \leqq \frac{1}{3}$$

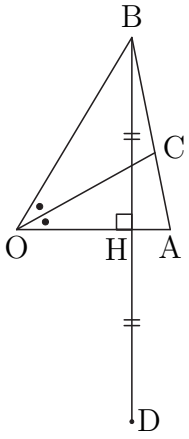
って　$= xy$　$= -\dfrac{1}{2}xy \geqq -\dfrac{1}{6}$

により　値 $\dfrac{1}{2}$，最小値

14.29　OC は OB の　ら

OA : OB =

よっ　$\mathbf{C}$　$\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}$



(2) B から直線 O　線 BH を引く．

$\overrightarrow{OH} = k\vec{a}$ (k　) とおくと

$\overrightarrow{H}$　$= \vec{b} - k\vec{a}$

このとき，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{HB}$ より，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{HB} = 0$ であるから

$\vec{a}\cdot(\vec{b}-k\vec{a}) = 0$　ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b} - k|\vec{a}|^2 = 0$

印刷本

$\vec{a}\cdot\vec{b}=t$，$|\vec{a}|=2$ より　$t-k\cdot 2^2=0$　ゆえに　$k=\dfrac{t}{4}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HD}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+(-\overrightarrow{\mathrm{HB}})=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\cdot\dfrac{t}{4}\vec{a}-\vec{b}=\boldsymbol{\dfrac{t}{2}\vec{a}-\vec{b}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$ であるから

$$\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}\cdot\left(\frac{t}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)=0$$　ゆえに　$(3\vec{a}+$　$2\vec{b})=0$

したがって　$3t|\vec{a}|^2+(2t-6)a$　^{2}

$3t\cdot 2^2+(2t-6)t-4\cdot$

整理すると　$(t-3)(t+6)=0$

(i) $t=3$ のとき　$\cos\angle\mathrm{AOB}$　$=$　に　$\angle$　$=\dfrac{\pi}{3}$

$|\vec{b}|$

(ii) $t=-6$ のとき　$\cos\angle$　$\mathrm{B}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=$　$=-1$　$\mathrm{AOB}=\pi$

り，O，A，B は一直線上に　て

$=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$

また　$|\mathrm{C}$　$3\vec{a}+2\vec{b}|=\dfrac{1}{5}\sqrt{9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}$

$=$　2^2　$4\cdot 3^2}=\boldsymbol{\dfrac{6\sqrt{3}}{5}}$

$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}}$　$\dfrac{b}{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\dfrac{1}{}$　を掛けると　$)^2}{}=\dfrac{1}{28}$

$|\vec{b}|^2$

0　して　$=\sqrt{\dfrac{1}{28}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{14}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　$\vec{a}+$　y は実数) とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x-1)\vec{a}+y\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=x\vec{a}+(y-1)\vec{b}$

$\mathrm{OA}\perp\mathrm{AP}$，　BP より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{a}\{(x-1)\vec{a}+y\vec{b}\}$　　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{b}\{x\vec{a}+(y-1)\vec{b}\}$

$=(x-1)|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　　$=x\vec{a}\cdot\vec{b}+(y-1)|\vec{b}|^2=0$

見本

条件から，$|\vec{a}|^2 = 4\vec{a}\cdot\vec{b}$，$|\vec{b}|^2 = 7\vec{a}\cdot\vec{b}$ であるから

$$4(x-1)+y=0, \quad x+7(y-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{7}{9}, \quad y=\frac{8}{9}$$

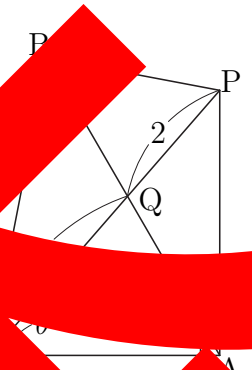
よって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{OP} = \frac{7}{9}\vec{a} + \frac{8}{9}\vec{b}}$

(3) 四角形 OAPB の対角線 OP と AB の交点を Q とすると，(2) の結果から

$$\overrightarrow{OP} = \frac{5}{3}\cdot\frac{7\vec{a}+8\vec{b}}{15} = \frac{5}{3}$$

したがって，Q は線分 OP を 3 : 2 に内

よって　$\boldsymbol{\triangle OAB : \triangle PBA = 3}$



別解 ベクトル積 (外積) (大分大学

(4) $\angle OAP = \angle OBP = 90°$ で ろ，四角 APB とする円に内接する．(1) の結果 ら

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{}$$

弦定理 B $= OP$　よって $= 2\sqrt{7} \times \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \boldsymbol{3\sqrt{3}}$

(1) $= \angle P$ と

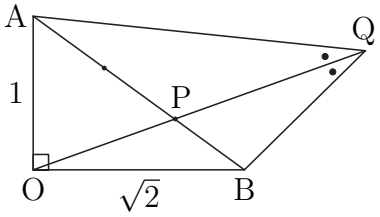
QB $= PQ\sin\theta$, $A = \frac{1}{2}OP\cdot AP\sin\theta$

$= 2\triangle$ $PB\cdot PQ$ AP

，AP より

$$5\overrightarrow{OP} = 5\times\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3} = \boldsymbol{\frac{5}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{10}{3}\overrightarrow{OB}}$$

(2) $\angle OQA = \angle O$ り



AQ $= AP : BP = 2 : 1$

したがっ $Q|^2 = 4|\overrightarrow{BQ}|^2$　$\cdots(*)$

ここで，$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおくと

$$|\vec{a}|^2 = 1, \quad |\vec{b}|^2 = 2, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \cdots(**)$$

条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと $(k > 1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) = \frac{k}{3}\vec{a} + \frac{2k}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$= \frac{k}{3}\vec{a} + \frac{2k}{3}\vec{b} - \vec{a} = \left(\frac{k}{3} - 1\right)\vec{a} + \frac{2k}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$= \frac{k}{3}\vec{a} + \frac{2k}{3}\vec{b} - \vec{b} = \frac{k}{3}\vec{a} + \left(\frac{2k}{3} - 1\right)\vec{b}$$

$(**)$ により　$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2 = \left(\frac{k}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2k}{3}\right)^2 - \left(\frac{k}{3} - 1\right)\left(\frac{2k}{3}\right)$

$|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|^2 = \left(\frac{k}{3}\right)^2 + \left(\frac{2k}{3} - 1\right)^2 - \left(\frac{k}{3}\right)\left(\frac{2k}{3} - 1\right)$

上の 2 式を $(*)$ に代入する　$k^2 - \frac{2}{3}k + \left(\frac{2k}{3}\right)^2 - \left(\frac{k}{3} - 1\right)\left(\frac{2k}{3}\right) = \left(\frac{k}{3}\right)^2 + \left(\frac{2k}{3} - 1\right)^2 - \left(\frac{k}{3}\right)\left(\frac{2k}{3} - 1\right) + 2$

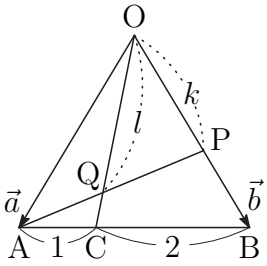
整理して　$3k^2 - 10k + 7 = 0$　すなわち　$(k - 1)(3k - 7) = 0$

$k > 1$ に注意してこれを解くと　$k = \frac{7}{3}$

したがって　$\mathrm{OQ} : \mathrm{OP} = 1 : \frac{7}{3}$　よって　**OP : PQ = 3 : 4**

2　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = l\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

$= \frac{2l}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{l}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



点 Q は線分 AP 上にあるから，ある実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とおける

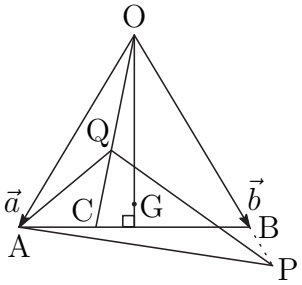
ゆえに　$l = k(1 - l)$　**$l(k + 1) = 3k$**

(2)　△APQ の重心を G とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}})$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\vec{a} + k\vec{b} + l\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)\right\}$$

$$= \frac{2l + 3}{9}\vec{a} + \frac{3k + l}{9}\vec{b}$$



印刷

G は，∠AOB の二等分線上にあるから

$$\frac{2l+3}{9}=\frac{3k+l}{9} \quad \text{ゆえに} \quad l=3(k-1)$$

A，P，Q は同一直線上にないから，上式および (1) の結果から，正数 k は

$$3(k-1)(2k+1)\neq 3k \quad \text{すなわち} \quad k\neq \frac{1\pm\sqrt{3}}{}$$

また，$l>0$ より　$\boldsymbol{l=3(k-1}$ $\boldsymbol{k>1,}$ $\left.\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=k\vec{b}-\vec{a}$

(2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=l\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\quad 3(\quad \frac{1}{}\vec{b}\right)$$

$$=2(\quad +(k-1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=2(k-1)\vec{a}+(k-1)\vec{b}$$

$$=(2k-3)\vec{a}+(k-1)\vec{b}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ $\cos 6$ $=\frac{1}{2}$ であるか

$$|\overrightarrow{\quad}|^2=|k\vec{b}-\quad t^2|\vec{b}|^2-\vec{\quad}+|\vec{a}|^2$$

$$=k^2\quad 1$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2=\quad +(k-1)$$

$$(2k-\quad 3)(k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+(k-1)^2|\vec{b}|^2$$

$$(2k-3)^2\quad)(k-1)+(k-1)^2$$

$$^2-19k+13$$

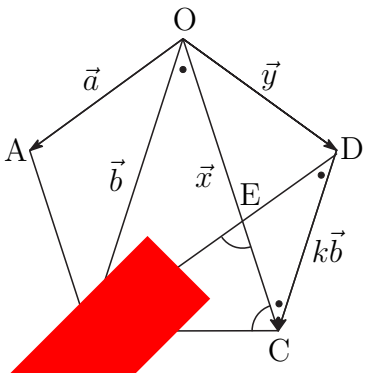
AP = AQ の

$$k^2-\quad =7k^2-19k+13 \quad \text{ゆえに} \quad (k-1)(k-2)=0$$

(2) の結果に注意して　　$\boldsymbol{k=2}$

見本

14.33 (1) $t = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{BD}$ とし，OC と BD の交点を E とすると，$\mathrm{BC} = \mathrm{BE} = 1$ より



$$\mathrm{CE} = \mathrm{DE} = t - 1$$

$\triangle \mathrm{OBC} \backsim \triangle \mathrm{BCE}$ より $\mathrm{OB} : \mathrm{BC} = \mathrm{BC} : \mathrm{CE}$ であるから

$$t : 1 = 1 : t - 1$$

したがって　　$t^2 - t - 1 = 0$

$t > 0$ に注意して，これを解くと　t

よって　　$k = \dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{1}{t} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\vec{x} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} = t(\vec{b} - \vec{a})$　　$= \dfrac{1}{2}(\vec{b}$

$\vec{y} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{x}$　$= t(\vec{b} - \vec{a})$　　$= -t\vec{a}$

$= \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a} + \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}-$　　$\dfrac{}{2}$

△OAB　　適用すると

$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\cdot \mathrm{OA}\cdot \mathrm{OB}} = \dfrac{1^2 + t^2 - 1^2}{2\cdot 1\cdot t} = \dfrac{t}{2} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

$|\vec{x}| = t$　　$= \dfrac{t}{2}$　　① に注意

$\vec{a}\cdot\vec{x} = |\vec{a}||\vec{x}|\cos\theta =$　　$\dfrac{1}{2}t^2 = \dfrac{1}{2}(t+1)$

$\vec{a}\cdot\vec{y} = \vec{a}\cdot t(\vec{b} - \vec{a})$　　$= t(\vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{a}|^2)$

$= t\left\{\dfrac{1}{2}(t+1) - 1^2\right\} = \dfrac{1}{2}(t^2 - t) = \dfrac{1}{2}$

別解 $\cos 2\theta = 2\cos$　　$- 1 = 2\left(\dfrac{t}{2}\right)^2 - 1 = \dfrac{1}{2}t^2 - 1 = \dfrac{1}{2}(t+1) - 1 = \dfrac{1}{2}(t-1)$

よって　　$|\vec{a}||\vec{x}|\cos 2\theta = 1\cdot t\cdot\dfrac{1}{2}(t-1) = \dfrac{1}{2}(t^2 - t) = \dfrac{1}{2}$

14.34 (1) $\vec{b}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\overrightarrow{m}$ とすると

$$\overrightarrow{m} = |\vec{b}|^2\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b} = \vec{a} - t\vec{b} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} = t\vec{b} + \overrightarrow{m}$$

印刷本

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t\vec{b} - \vec{m}$

$= t\vec{b} - (\vec{a} - t\vec{b}) = \boldsymbol{-\vec{a} + 2t\vec{b}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{n}$ とすると

$$\vec{n} = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots ①$$

ここで　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = |-\vec{a} + 2t\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4t\vec{a}\cdot\vec{b} +$

$= 1^2 - 4t\cdot t + 4$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{a}\cdot(-\vec{a} +$

$= -|\vec{a}|^2 + 2ta$

ゆえに　$\vec{n} = \vec{a} - (2t^2 - 1)(-\vec{a} +$

$= 2t^2\vec{a} - 2t(2t^2 - 1)$

① より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2t^2 - 1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (2t^2 -$ $- \vec{n}$

$= (2t^2 - 1)(-\vec{a} + 2t\vec{b}) - \{$ $2t($

$= (1 - 4t^2)\vec{a} + 4t(2t^2 - 1)$

のとき あるから

0　これを解いて　$\boldsymbol{t = \pm\dfrac{1}{2}}$

$\vec{OQ} =$ n に Q は線分 1 $)$

点 から

$b = 1$

るから，$= 0$ より

$+ b\vec{n})\cdot(\vec{p} - \vec{n}) = 0$

$a|\vec{p}|^2$ $a)\vec{p}\cdot\vec{n} - b|\vec{n}|^2 = 0$

$|\vec{p}|^2 = x^2$, $)$, $|\vec{n}| = 1$ であるから

$ax^2 + (b - a)\cdot 0 - b\cdot 1^2 = 0$　ゆえに　$ax^2 - b = 0$　$\cdots ②$

①，② を解いて　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{1 + x^2}}$，$\boldsymbol{b = \dfrac{x^2}{1 + x^2}}$

印刷本

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \frac{1}{1+x^2}\vec{p} + \frac{x^2}{1+x^2}\vec{n} = \frac{1}{1+x^2}(x,\ 0) + \frac{x^2}{1+x^2}(0,\ 1)\\ &= \left(\frac{x}{1+x^2},\ \frac{x^2}{1+x^2}\right)\\ \overrightarrow{\mathrm{CQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= \left(\frac{x}{1+x^2},\ \frac{x^2}{1+x^2}\right) - \left(0,\ \frac{1}{2}\right)\\ &= \left(\frac{x}{1+x^2},\ \frac{x^2}{2(1+x^2)}\right.\end{aligned}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{CQ}_1} = \left(\frac{x_1}{1+{x_1}^2},\ \frac{{x_1}^2-1}{2(1+\ }\right.$

$x_1x_2 = -1$ のとき，$x_2 = -\frac{1}{\ }$ から

$\overrightarrow{\mathrm{CQ}_2}\left(\frac{-\frac{1}{x_1}}{\ +\frac{1}{{x_1}^2}},\ \frac{\frac{1}{{x_1}^2}-1}{2\left(1+\frac{1}{{x_1}^2}\right)}\right) = -\left(\frac{\ }{\ }, \frac{x}{\ }\right) = -\overrightarrow{\mathrm{CQ}_1}$

て　$\overrightarrow{\mathrm{CQ}_2} = \vec{0}$

(鹿児　20

(1) $\overrightarrow{\mathrm{C}}$　(1, 1　$_n$　であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　$= n$　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|^2 = n^2$

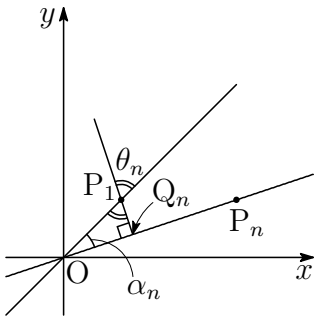
って

$\overrightarrow{\mathrm{P}_1} - \frac{(\mathrm{O}$　P_n

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|$

$) - \frac{n+1}{n^2+1}(n,\ 1)$

$\left(\frac{\boldsymbol{n^2-n}}{\boldsymbol{n^2+1}},\ \frac{\boldsymbol{n^2-n}}{\boldsymbol{n^2+1}}\right)$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　す角を α_n とすると

$$\cos\alpha_n = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}||\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|} = \frac{n+1}{\sqrt{2}\sqrt{n^2+1}}$$

印刷

また　　$\sin^2\alpha_n = 1-\cos^2\alpha_n = 1-\dfrac{(n+1)^2}{2(n^2+1)} = \dfrac{(n-1)^2}{2(n^2+1)}$

$\sin\alpha_n > 0$ であるから　　$\sin\alpha_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{2(n^2+1)}}$

$\theta_n = 90^\circ - \alpha_n$ であるから

$$\cos\theta_n = \cos(90^\circ-\alpha_n) = \sin\alpha_n = \frac{\boldsymbol{n-1}}{\sqrt{\boldsymbol{2(n}}}$$

(3)　　$\tan^2\alpha_n = \dfrac{1}{\cos^2\alpha_n} - 1 = \dfrac{2(}{}$

$0 < \alpha_n < 90^\circ$ であるから $\tan\alpha_n >$

$\theta_n = 90^\circ - \alpha_n$ であるから

$$\tan\theta_n = \tan($$

$\tan\theta_n < 1.01$ をみたす最

$$\frac{n+1}{n-1} < 1.01 \quad \text{ゆえ}$$

をみたす最小の n は　2

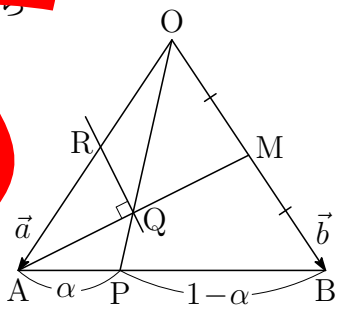
解　大 [文

14　) P は　$\alpha : 1$　分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\alpha)\vec{a}} \quad \cdots ①$$

Q は　上の点

$$= s\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \quad -\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \alpha\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\} = s(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2s\alpha\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Q は，AM 上　あるから

$$\alpha) + 2s\alpha = 1 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{1}{1+\alpha} \quad \cdots ③$$

①，②，③ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{1+\alpha}\{(1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}\} = \boldsymbol{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\vec{a} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}}$$

見本

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = t\vec{a}$ とおくと　　$\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right)\vec{a} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}$

また　　$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{RQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$ であるから

$$\left(t - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)|\vec{a}|^2 + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right) - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{\alpha}{1+\alpha}|\vec{b}|^2 = 0$$

ここで，$|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2} = 3$ であるから

$$4\left(t - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right) - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\} \cdot 3 + \frac{9\alpha}{1+\alpha} = 0$$

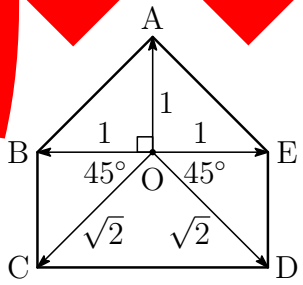
したがって　$t = \dfrac{1-2\alpha}{1+\alpha}$　よって $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1-2\alpha}{1+\alpha}\vec{a}$

(3) R が OA の中点であるから

$$\frac{1-2\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{2}$$　　よって　$\boldsymbol{\alpha = \dfrac{1}{4}}$

14.38 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 45^\circ$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{1}$$



$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP_2}} = 1$ となる $(\mathrm{P_1}, \mathrm{P_2})$ の組は，次の 10 通りである．

(A, A), (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (C, B), (D, E), (E, D)

よって，求める確率は　$\dfrac{10}{5^2} = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$　ゆえに　$q_i = -2\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$

$q_i \neq 0$ となるのは，A，C，D の 3 組である．

したがって，$q_1 q_2 \cdots q_n \neq 0$ となる確率は　$\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

よって，$q_1 q_2 \cdots q_n = 0$ となる確率は　$\boldsymbol{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$

見本

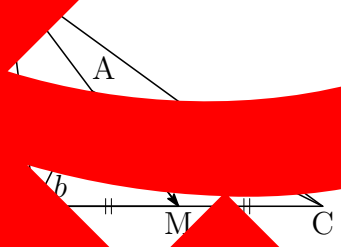
14.39 (1) $4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{0}\cdots①$ より　　$\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$

M は BC の中点であるから　　$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$

上の 2 式より　　$\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OM}$

よって，点 A は OM の中点である．

(2) $\angle A=90^\circ$ であるから，(1) の結果から，A は　C
BC を直径とする円周上の点で
$\vec{a}=\overrightarrow{AM}$，$\vec{b}=\overrightarrow{MB}$ とおくと



$$\overrightarrow{OB}=2\vec{a}+\vec{b},\quad \overrightarrow{OC}=2\vec{a}-\vec{b}$$

したがって

$$|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=|2\vec{a}+\vec{b}|^2+|2\vec{a}-\vec{b}|^2=$$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$ であるから　　$|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=10$

(3) $4|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PC}|^2=-4$ より

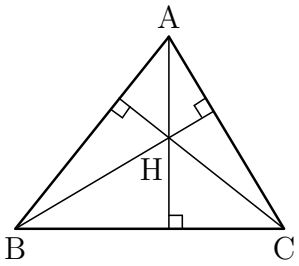
$$4|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}|^2=-4$$

$$2|\overrightarrow{OP}|^2-2(4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}+4|\overrightarrow{OA}|^2-(|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2)=-4$$

に ①，$|\overrightarrow{OA}|=1$，(2) の結果を代入し整理すると

$|\overrightarrow{OP}|=1$　ゆえに　$\mathbf{OP=1}$

14.40 ある点 O に対して $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$ であることを示せばよい．



$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$ より

$$\overrightarrow{HB}\cdot(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HC})=0$$

$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

ゆえに　　$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}\quad\cdots①$

また $\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{CA}$ であるから　$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ より

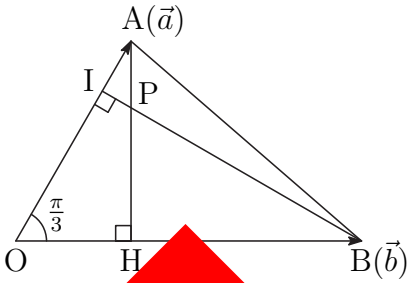
$$\overrightarrow{HB}\cdot(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HC})=0$$

ゆえに　　$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}\quad\cdots②$

①，② より　$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$

見本

14.41 (1) $\mathrm{OH} = \mathrm{OA}\cos\dfrac{\pi}{3} = 2\cdot\dfrac{1}{2} = 1$



ゆえに $\quad \dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{1}{3}$

よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{3}\vec{b}}$

(2) (1) と同様にして $\quad \mathrm{OI} = \mathrm{OB}\cos\dfrac{\pi}{3} = 3\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

ゆえに $\quad \dfrac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OA}} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$ $\quad \vec{a} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OI}}$

上式および (1) の結果から $\quad \vec{a} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\vec{a}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおく

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OH}} + y\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{3}{4}\vec{a}$$

P は 2 点 AH，IB 上の点であるから

$$x + \frac{3}{4}y = 1, \quad \frac{4}{3}x + y = 1 \quad \text{これを} \quad x = \frac{3}{7}, \quad y = \frac{3}{7}$$

よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{7}\vec{a} + \dfrac{3}{7}\vec{b}}$

(3) $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3} = 2\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2} = 3$ より，(2) の結果から

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \left|\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right|^2$$

$$= \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{4}{27}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{81}|\vec{b}|^2$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{21}{9}$$

よって $\quad \mathrm{OP} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{21}}{3}}$

14.42 (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \sqrt{3}\sqrt{2}\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad t = \sqrt{6}\cos\theta$$

$-1 < \cos\theta < 1$ であるから $\quad \boldsymbol{-\sqrt{6} < t < \sqrt{6}}$

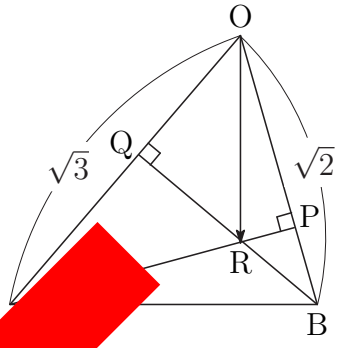
見本

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{b}$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{b}$ であるから

$$(k\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$$
$$k|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

ゆえに　$k=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}=\dfrac{t}{2}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{t}{2}\vec{b}}$



同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k'\vec{a}$ とおくと　k' [illegible] て　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{t}{3}\vec{a}}$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{t}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=$ [illegible]

(3) $t=1$ のとき，(2) の結果か [illegible] $=\dfrac{1}{2}\vec{b}$ [illegible]

R は直線 AP 上の点であ [illegible] っ，実数 s を [illegible] て

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1$ [illegible] $+$ [illegible]

$3\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ [illegible] であるから，上式より

$\overrightarrow{\mathrm{R}}=3(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\dfrac{}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

[illegible]，R [illegible] QB 上 [illegible] もあ [illegible]

$s)+\dfrac{s}{2}=1$ [illegible] て　$s=\dfrac{4}{5}$

[illegible] を [illegible] くして　$\boldsymbol{\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}}$

ま [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ [illegible] $+2\vec{b}|=\dfrac{1}{5}\sqrt{|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}$

$=$ [illegible] $+4\cdot1+4\cdot2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{15}}{5}}$

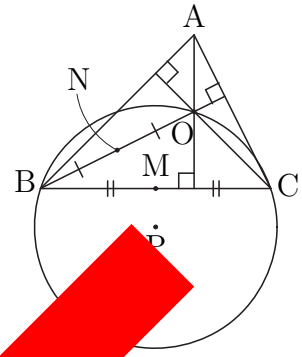
見本

14.43 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ より

$$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$



したがって，O は △ABC の垂心であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0 \quad \text{ゆえ}$$

以上のことから　　OA⊥BC　$\cdots$①

また，P は △OBC の外心であるか

ある．したがって　MP⊥BC

①，② から　　MP//OA

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\dfrac{\vec{b}+}{2}=\boldsymbol{t\vec{a}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

$\overrightarrow{\mathrm{NP}}$　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(t\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)-\dfrac{1}{2}\vec{b}$　$\dfrac{1}{}$

(　外接　の中点であるから　O

した　，O　0 より

$\left(t\vec{a}\right.$　$=0$　ゆえに　$t\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}$

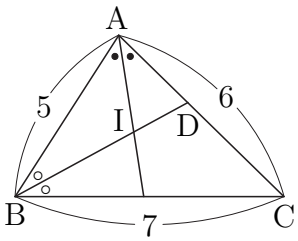
$\vec{a}\cdot\vec{b}=$　0 で　　$t=-\dfrac{1}{2}$

(2) の　　と

$\vec{5}=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a}$　　$\boldsymbol{c}$,　$\overrightarrow{\mathbf{NP}}=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{a}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{c}}$

14.44 (1) BD　B の　線であるから

$$\mathrm{AD}\quad=\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=\mathbf{5:7}$$



ゆえに　AI　$+7}\mathrm{AC}=\dfrac{5}{12}\times 6=\dfrac{5}{2}$

AI は ∠A の　等分線であるから

$$\mathrm{BI}:\mathrm{ID}=\mathrm{AB}:\mathrm{AD}=5:\frac{5}{2}=\mathbf{2:1}$$

見本

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{AD}=\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$,　$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD})$

よって　　$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\times\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{18}\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{5}{18}\vec{c}}$

(3) △ABC に余弦定理を適用すると　$\cos\theta=\cos A=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot6\cdot5}=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$

よって　　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta=5\cdot6\times\frac{1}{5}=\boldsymbol{6}$

(4) AB の中点を M とすると　　$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=y\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$=$

P が AB の垂直二等分線上にあ　　るから

$\left(x-\frac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2+y\vec{b}\cdot$　　えに　　$y\cdot6$

よって　　$\boldsymbol{25x+6y=}$　　$\boldsymbol{2}$

(5)　　とすると　　$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AP}-$　　$-\frac{1}{2}\vec{c}$

$=x\vec{b}+$　　$\vec{c}$

P　　の垂　　であるとき，$\overrightarrow{NP}\perp\vec{c}$ であるから

$\left(y-$　　$=0$　ゆ　　$x\cdot6+\left(y-\frac{1}{2}\right)\cdot6^2=0$

よ　　x

これ　　の結果を　　から　　$\boldsymbol{\overrightarrow{AO}=\frac{19}{48}\vec{b}+\frac{125}{288}\vec{c}}$

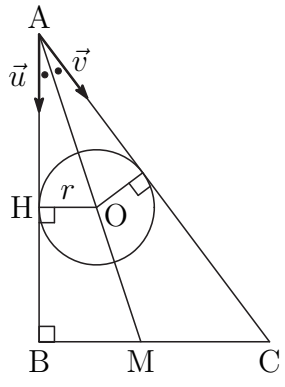
14.45　(1)　　分線である．

BM : M　　B : AC = 4 : 5

したがって　　$\overrightarrow{AI}=\frac{5\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{9}$

$\overrightarrow{AB}=4\vec{u}$　　$=5\vec{v}$ であるから

$\overrightarrow{AM}=\frac{5\cdot4\vec{u}+4\cdot5\vec{v}}{9}=\boldsymbol{\frac{20}{9}(\vec{u}+\vec{v})}$



見本

(2) $\cos A = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{4}{5}$ であるから　　$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos A = 1\cdot 1\cdot\dfrac{4}{5} = \boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$

△AHO ∽ △ABM であるから

$$\mathrm{AO} : \mathrm{AM} = \mathrm{AH} : \mathrm{AB} = t : 4$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \dfrac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{t}{4}\cdot\dfrac{20}{9}(\vec{u}+\vec{v}) = \boldsymbol{\dfrac{5t}{9}(\vec{u}+\vec{v})}$

$\overrightarrow{\mathrm{HO}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \dfrac{5t}{9}(\vec{u}+\vec{v}) - t\vec{u} = \boldsymbol{\dfrac{1}{9}(-4\vec{u}+5\vec{v})}$

また，$\mathrm{BM} = \dfrac{4}{9}\mathrm{BC} = \dfrac{4}{9}\times 3 = \dfrac{4}{3}$

$\mathrm{AH} : \mathrm{HO} = \mathrm{AB} : \mathrm{BM} = 4 : \dfrac{4}{3}$　ゆえに

(3) 内接円 I の半径を r_1 とし，I から辺 AB に垂線 IJ を下ろすと　JB

△AJI ∽ △AHO である(1) の結果より

AJ : JI = 3 : 1　ゆえに　$t = \mathrm{AJ} = 3r_1$

AO = 4 であるから

$3r_1 + r_1 = 4$　　って　$r_1 = \mathbf{1},\ t = 3$

(4)　$\mathrm{AJ} = \sqrt{\mathrm{AJ}^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

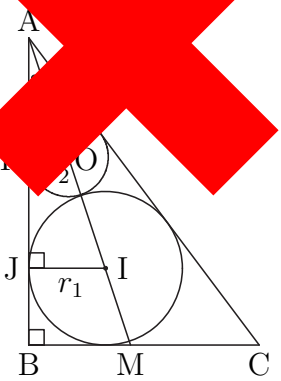
(2) のように，円 O と円 I が外接する

とき，O の半径を r_2 とおくと　$\mathrm{AO} = \sqrt{10} - r_2$

$\mathrm{OI} = 1 + r_2$ であり　$\mathrm{AO} + \mathrm{OI} =$

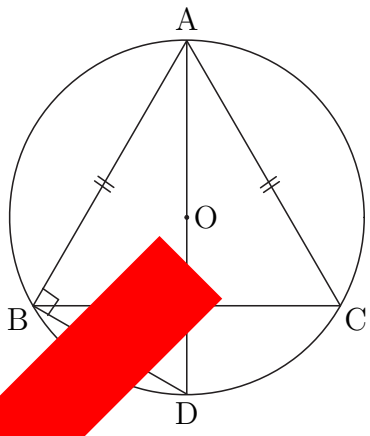
$(\sqrt{10} - r_2)^2 + (r_2$　　えに　$r_2 = \dfrac{11 - 2\sqrt{10}}{9}$

このとき，$0 < t < 3r_2$ であるから，$0 < t < 3r_2$ より　$\boldsymbol{0 < t < \dfrac{11-2\sqrt{10}}{3}}$



見本

14.46 (1) AB = AC より，AO は ∠BAC の二等分線であるから



$$\overrightarrow{AO} = k(\vec{b}+\vec{c}) \quad (k \text{ は定数})$$

AD を △ABC の外接円の直径とすると

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = 2k(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = (2k-1)\vec{b} + 2k\vec{c}$$

AB⊥BD であるから，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} =$

$$\vec{b}\cdot\{(2k-1)\vec{b}+2k\vec{c}\} = 0 \quad \text{ゆえ}$$

ここで　　$|\vec{b}| = 1$，$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|$

したがって　$(2k-1)\cdot 1^2$　　$= 0$　こ　　$\frac{3}{}$

よって　$\overrightarrow{AO} = \dfrac{3}{8}(\vec{b}+\vec{c})$

(2)　　$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = \dfrac{3}{4}(\vec{b}+\vec{c})$

が円　　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DP} = 0$ であ

$$\overrightarrow{AP}\cdot\quad = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{AP}|^2 - \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP} = 0$$

こが

$$sb+t\quad\vec{c})\cdot(s\vec{b}+t\vec{c})$$

$$s^2\quad 2st\vec{b}\cdot\vec{c}+\quad{}^2 + \vec{b}\cdot\vec{c}) - \frac{3}{4}t(\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2) = 0$$

よ　　$\boldsymbol{st + t^2 - s - t = 0}$

(3) $s+t=u$，st　　り，s，t を解とする 2 次方程式 $x^2 - ux + v =$ は実数解をもつから

$$u^2 - 4v \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad v \leqq \frac{u^2}{4} \quad \cdots ①$$

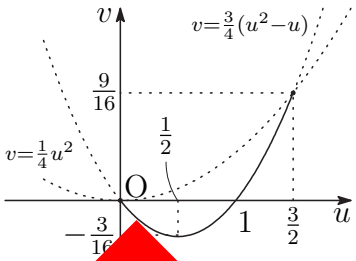
(2) の結果から

$$(s+t)^2 - \frac{4}{3}st - (s+t) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad u^2 - \frac{4}{3}v - u = 0$$

見本

したがって　$v=\dfrac{3}{4}(u^2-u)$

すなわち　$v=\dfrac{3}{4}\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{16}$　…②



① を満たしながら動くとき，② の表す図形は右の図の実線部分である．

よって　$\boldsymbol{-\dfrac{3}{16}\leqq v\leqq\dfrac{9}{16}}$

(4) v が最小となるとき，(3) で示[illegible]フから　$u=\dfrac{1}{2}$，$v=-\dfrac{3}{16}$

このとき，s，t は 2 次方程式 x^2-[illegible]$=0$ の解であるから

$$(s,\ t)=\left(\frac{3}{}\right.$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\vec{b}-\dfrac{1}{}}$[illegible]は　$\overrightarrow{A}=-\dfrac{}{4}\vec{}$

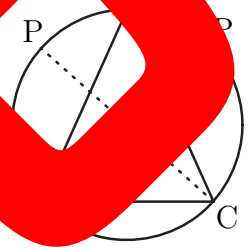
(1) の結果から　$\overrightarrow{BO}=-\dfrac{}{8}\vec{b}+\dfrac{3}{8}\vec{c}$，$\overrightarrow{CO}=-\dfrac{5}{8}\vec{c}$

$$-\frac{1}{4}\vec{c}=\frac{3}{8}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\left(\frac{3}{8}\vec{b}-\right.=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO}$$

$$-\frac{3}{8}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\left(-\frac{5}{8}\right.=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}$$

4

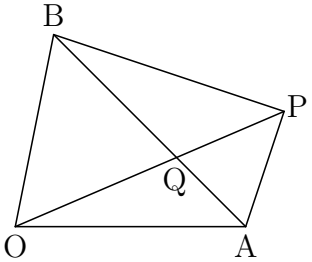
P[illegible]に関し[illegible]弥な点であるから，次のようになる．



解説　(長崎大学 20[illegible]

14.47　(1)　AQ : QB = △[illegible] : △OBP = $a:b$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{b\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OB}}{a+b}}$

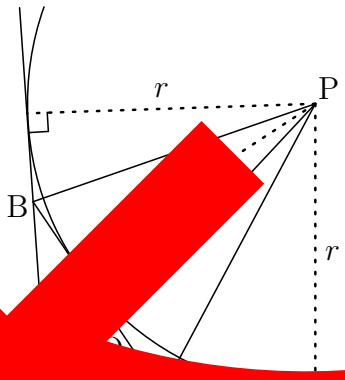


(2)　OQ : OP
$=$△OAB : △OAP + △OBP
$=a+b-c:a+b$

印刷本

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{a+b}{a+b-c}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\boldsymbol{b}\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\boldsymbol{a}\overrightarrow{\mathbf{OB}}}{\boldsymbol{a+b-c}}$

(3) 3直線OA，OB，ABに接する円の半径をrとすると



$$\begin{aligned}&\triangle\mathrm{OAP}:\triangle\mathrm{OBP}:\triangle\mathrm{ABP}\\=&\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot r:\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot r:\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot r\\=&\mathrm{OA}:\mathrm{OB}:\mathrm{AB}\end{aligned}$$

したがって　$a:b:c=3:5:6$

よって，(2)の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+5-6}=\frac{\mathbf{5\overrightarrow{OA}}+}{}$$

別解　OPは△OABのOの内角の二等分線であろう，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right)\qquad\overrightarrow{\mathrm{A}}+s$$

△Oの外角の二等分線であ，実数tを用い

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\qquad\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)=\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{6}\right)$$

$$+\frac{t}{6}\right)\qquad\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

上より　　$\frac{s}{5}=\frac{t}{6}$　　$s=\frac{15}{2}$，$t=9$

$$=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+}{2}$$

14.48　(1) $\vec{u}=$　$-$　　$\vec{v}=|\vec{b}|^2\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}$とすると　$\vec{u}\perp\vec{a}$，$\vec{v}\perp\vec{b}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，　$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{6}=1\cdot1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$であるから

$$=\vec{b}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a},\qquad\qquad\vec{v}=\vec{a}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}$$

線分OAの垂直二等分線上の点の位置ベクトルは，実数sを用いて

$$\frac{1}{2}\vec{a}+s\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{a}+s\left(\vec{b}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)\vec{a}+s\vec{b}\quad\cdots①$$

見本

線分 OB の垂直二等分線上の点の位置ベクトルは，実数 t を用いて

$$\frac{1}{2}\vec{b}+t\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{b}+t\left(\vec{a}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}\right)=t\vec{a}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\vec{b}\quad\cdots②$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は ①，② を同時にみたす位置ベクトルであるから

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}s=t,\quad s=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\quad\text{これを解いて}\quad s=2-\sqrt{3}$$

よって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2-\sqrt{3})(\vec{a}+\vec{b})}$

(2) A を通り OB に垂直な直線上の点の位置ベクトルは，実数 m を用いて

$$\vec{a}+m\vec{v}=\vec{a}+m\left(\vec{a}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}\right)=(1+m)\vec{a}-\frac{\sqrt{3}}{2}m\vec{b}\quad\cdots③$$

B を通り OA に垂直な直線上の点の位置ベクトルは，実数 n を用いて

$$\vec{b}+n\vec{u}=\vec{b}+n\left(\vec{b}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}n\vec{a}+\left(1-\frac{1}{2}n\right)\vec{b}\quad\cdots④$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は ③，④ を同時にみたす位置ベクトルであるから

$$1+m=-\frac{\sqrt{3}}{2}n,\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}m=1-\frac{1}{2}n\quad\text{これを解いて}\quad m=2-\sqrt{3}$$

よって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(\sqrt{3}-3)(\vec{a}+\vec{b})}$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2}$

$$=\sqrt{3-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1}=\sqrt{4-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{8-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$$

(4) $\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線上の点の位置ベクトルは，実数 x を用いて

$$x\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right)=x\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=x\vec{a}+x\vec{b}\quad\cdots⑤$$

(3) の結果から　$\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

したがって，$\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線上の点の位置ベクトルは，実数 y を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)=\vec{a}+y\left\{-\vec{a}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}(\vec{b}-\vec{a})\right\}$$

$$=\left\{1-\left(1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)y\right\}\vec{a}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}y\vec{b}\quad\cdots⑥$$

印刷本

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，⑤，⑥ を同時にみたす位置ベクトルであるから

$$x = 1 - \left(1 + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right) y, \quad x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} y$$

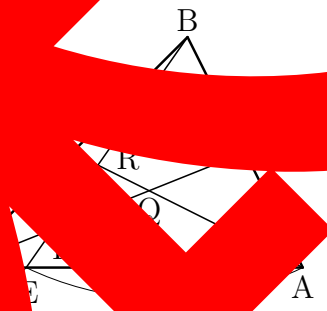
第2式から　$y = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} x$　第1式に代入して　$x = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + 1\right) x$

これを解いて　$x = \dfrac{2}{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}$　よって　$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}}(\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}})$

14.49　(1) 点 P は線分 OC 上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (0 \leqq k \leqq 1)$$

とおける．



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{k}{2}\vec{b}$$
$$= \frac{5k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}} + k$$

点 P は[illegible]分 BE 上にあるから

$$\frac{5k}{2} + \frac{k}{2} = 1$$

[illegible]れを解[illegible] $k = \frac{1}{3}$

[illegible]して [illegible] $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$　$\cdots$①

[illegible]は△[illegible]の重心[illegible]から

[illegible] $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$　$\cdots$

[illegible]より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \mathrm{C}$$
$$= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) - \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\right) = \mathbf{\frac{1}{6}}\vec{\boldsymbol{a}} + \mathbf{\frac{1}{6}}\vec{\boldsymbol{b}}$$

(2) 点 R は線分 A[illegible]にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = [\text{illegible}]s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OD}} \quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

とおける．

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-s)\vec{a} + \frac{s}{2}\vec{b}$$
$$= 5(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OE}} + \frac{s}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

見本

点 R は線分 BE 上にあるから

$$5(1-s)+\frac{s}{2}=1$$

これを解くと　　$s=\dfrac{8}{9}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}\quad\cdots③$

①，③ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=\left(\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}\right)-\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}\right)=\frac{1}{18}\vec{a}+\frac{5}{18}\vec{b}$$

(3) △PQR の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}$$

であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\left|\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2$$
$$=\frac{1}{36}(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)=\frac{1}{36}(2+2+1)=\frac{2}{9}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left|\frac{1}{18}(\vec{a}+5\vec{b})\right|^2$$
$$=\frac{1}{324}(|\vec{a}|^2+10\vec{a}\cdot\vec{b}+25|\vec{b}|^2)=\frac{1}{324}(5-10+25)=\frac{5}{81}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\left\{-\frac{1}{18}(\vec{a}+5\vec{b})\right\}$$
$$=-\frac{1}{108}(|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+5|\vec{b}|^2)=-\frac{1}{108}(5-4-5)=\frac{1}{27}$$

したがって　　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{5}{81}-\left(\dfrac{1}{27}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{18}}$

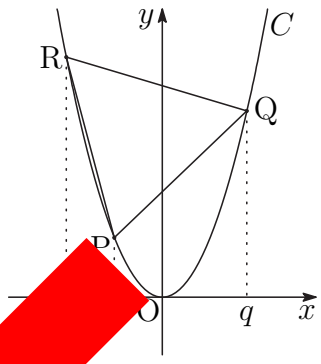
14.50　(1) P$(p,\ q)$，Q(であるから，直線 PQ の傾き a は

$$a=\frac{q^2-p^2}{q-p}=\boldsymbol{p+q}$$

(2) $a=1$ より　$\tan\theta_1=1$　これをみたす θ_1 $(0<\theta_1<\pi)$ は　$\boldsymbol{\theta_1=\dfrac{\pi}{4}}$

見本

(3) (2) 結果から，直線 PR と x 軸の正の向きとなす角 θ_2 $(0 < \theta_2 < \pi)$ は，$r < p$ に注意して



$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{7}{12}\pi}$$

また，直線 PR，QR の傾きは，(1) と同様にして

$$p + r = \tan\theta_2 = \tan\frac{7}{12}\pi = \boldsymbol{-2 - \sqrt{3}}$$

$$q + r = \tan\left(\theta_1 + \frac{2}{3}\pi\right) = \tan \quad \boldsymbol{-2 +}$$

$a = 1$ であるから，(1) の結果および

$$p + q = 1, \quad p + r = \quad = -2$$

これを解くと　　$p = \frac{1}{2} - \quad = \frac{1}{2} +$

$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ より　　$\mathrm{PQ} = \sqrt{2}(\quad - p) = \sqrt{2} \times \quad = 2\sqrt{6}$

よ　　$\triangle \mathrm{PQR} = \frac{1}{2}(2\sqrt{6})^2 \sin 60°$

$= 2$ よ　　果から　　$p + q = 2$　　①

S(1　　り　　$1,\ p^2 - 1) = (p - 1)(1,\ p + 1)$

　　$q =$　　$q^2 - 1) = (q - 1)(1,\ q + 1)$

$\angle \mathrm{S} = \frac{\pi}{}$　　$\overrightarrow{\mathrm{SP}}$　　0 であるから

$$1 \cdot 1 \quad = 0 \quad pq + p + q + 2 = 0$$

　　すると

よ　　$\triangle$　　$= \frac{1}{2}|(p-1)(q-1)||1(q+1) - 1(p+1)|$

$= \frac{1}{2}|pq - (p+q) + 1|(q-p) = \frac{1}{2}|-4-2+1|(q-p)$

$= \frac{5}{2}(q-p) = \frac{5}{2}\sqrt{(p+q)^2 - 4pq} = \frac{5}{2}\sqrt{2^2 - 4\cdot(-4)} = \boldsymbol{5\sqrt{5}}$

14.51　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a,\ a(4-a))$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (b,\ b(4-b))$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (3,\ 3)$ より

印刷本

四角形 OABC の面積を S とすると，$0 < a < b < 3$ に注意して

$$\begin{aligned}
S &= \triangle\mathrm{OAB} + \triangle\mathrm{OBC} \\
&= \frac{1}{2}|a\cdot b(4-b) - a(4-a)\cdot b| + \frac{1}{2}|b\cdot 3 - b(4-b)\cdot 3| \\
&= \frac{1}{2}|ab(a-b)| + \frac{3}{2}|b(b-3)| \\
&= \frac{1}{2}ab(b-a) + \frac{3}{2}b(3-b) = \frac{1}{2}(-ba^2 + b^2 \quad 9b) \\
&= -\frac{b}{2}\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{\quad} \quad 12b^2 + 3
\end{aligned}$$

したがって，$a = \dfrac{b}{2}$ のとき，S は最 $\quad 36b)$ をとる

ここで，$g(b) = b^3 - 12b^2 + 36b$ と

$$g'(b) = 3b^2 - \quad 6)$$

$g(b)$ の増減表は次のよう

b	(0)	$\cdots$	$\quad$	$\cdots$	$(3$
$g'(b)$		$+$	0	$-$	
$g(b)$		↗	極大	↘	

って，$b = \mathbf{2}$ のとき，S は なる．

) O(0 A(a, C(3, 3) より

$(a, \quad))$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $(3-a,\ a^2-4a+3)$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, x 軸の きとなす角 ぞえ α, β とすると

$$\tan \quad \frac{}{a} \quad - a \quad = \frac{a^2-4a+3}{3-a} = 1-a$$

ると，$\theta =$ $\beta)$ であるから

$$= \tan\{\pi - (\alpha-\beta)\} = -\tan(\alpha-\beta)$$

$$-\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = -\frac{4-a-(1-a)}{1+(4-a)(1-a)}$$

$$= -\frac{3}{a^2-5a+5} = \frac{3}{-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}}$$

θ が最小となるのは，$\tan\theta > 0$ で，$\tan\theta$ が最小になるのときであるから

$$\boldsymbol{a = \frac{5}{2}}$$

印刷本

14.52 (1) $\mathrm{P}(m,\ n)$ から直線 $l : ax + by + c = 0$ に引いた垂線 PH を引くと，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PH}} = (m,\ n) + t(a,\ b) = (m + at,\ n + bt)$$

H は l 上の点であるから

$$a(m + at) + b(n + bt) + c = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = -\frac{am + bn + c}{a^2 + b^2}$$

このとき $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2t(a$

$$= (m,\ n) - \frac{2(a$$

$$= \left(m - \frac{2a(am +$$

よって $\mathrm{Q}\left(m - \frac{2a(am$

(2) l_1 に関して A と対称な点を A′，l_2 に関して A と対称な点を O′ とすると，(1) より

$$\mathrm{A}'(4,\ 6), \quad \mathrm{O}'\left(\frac{4$$

2 点 A′，O′ を通る直線の方程式は $19x$ $28 = 0$

この直線と l_1 l_2 との交点が，それぞれ B，C であるから，これらの直線の方程式を連立して解くことにより

$$\mathrm{B}\left(\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{11}},\ \frac{\mathbf{47}}{\mathbf{11}}\right), \quad \mathrm{C}\left(\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$$

15.1 $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OF}}$ $= (4, -$ $2) = (3, -6,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}} =$

O $1,\ 4, -2) + t(3, -6,\ 3)$

$1 + 3t,\ 4 - 6t, -2 + 3t),$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$= (1 + 3t,\ 4 - 6t, -2 + 3t) - (-1,\ 5,\ 5)$

$= (2 + 3t, -1 - 6t, -7 + 3t)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (3,\ 1, -3) - (-1,\ 5,\ 5) = (4, -4, -8)$

見本

A，C，E が同一直線上にあるとき，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表されるから

$$(2+3t, -1-6t, -7+3t) = s(4, -4, -8)$$

したがって　　$s = \dfrac{3}{4}$, $\boldsymbol{t = \dfrac{1}{3}}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　**AE : EC =**

15.2　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (6, -2,\ 10) - (1,\ 3,\ 5) = 5(1$

直線 AB 上の点 P の位置ベクトル

$$\vec{p} = (1,\ 3,\ 5) + \quad 1) = \quad , \quad + 5)$$

とおくと (t は媒介変数)，　とき

$$|\vec{p}|^2 = (t+1)^2 + (-t+ \quad t$$
$$= 3t^2 + 6t + 35$$
$$= 3(t+1)^2 + 32$$

$|\vec{p}|$　　となる　　-1　　ゆえに　$p = (0,\ 4,\ 4)$

て　　**4,**

(1) の　から　　35,　$|\vec{b}|^2 =$　　$\cdot\vec{p} = 32$

て　$\triangle$　　$\dfrac{1}{2}$　　$\dfrac{1}{2}\sqrt{35 \cdot 32 - 32^2} = \boldsymbol{2\sqrt{6}}$

解説　　5

15.3　(1)　中心　0,　径 $2\sqrt{5}$ の球面の方程式は

$$(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = (2\sqrt{5})^2$$

この球面と　　面と交わってできる円の方程式は，$x = 0$ を代入して

$$(0-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 20 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 + (z-1)^2 = 16$$

よって　**中心 (0, 0, 1)，半径 4 の円**

見本

見本

(2) (1) の結果から，C 上の点 P の座標を $(0,\ 4\cos\theta,\ 4\sin\theta+1)$ とおく．
また，xy 平面上の直線 $x=y$ 上の点 Q の座標を $(t,\ t,\ 0)$ とおく．

$$\mathrm{PQ}^2 = t^2 + (t-4\cos\theta)^2 + (4\sin\theta+1)^2$$
$$= 2t^2 - 8t\cos\theta + 8\sin\theta + 17$$
$$= 2(t-2\cos\theta)^2 - 8\cos^2\theta + 8\sin\theta + 17$$
$$= 2(t-2\cos\theta)^2 + 8\sin^2\theta + 8\sin\theta$$ [illegible]
$$= 2(t-2\cos\theta)^2 + 8\left(\sin\theta + \right.$$ [illegible]

PQ が最小となるとき　$t = 2\cos$ [illegible]

ゆえに　$\cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$t = \pm\sqrt{3}$

よって　$\mathbf{P(0,\ \pm 2\sqrt{3}, -1)}$，[illegible] **(複号同順)** のとき，
PQ の最小値 $\boldsymbol{\sqrt{7}}$

15.4 A(3, 0, 0)，B(0, 3, 0)，C(1, [illegible]) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) = ($$ [illegible] $+1$ [illegible]

[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(-\dfrac{5}{3},\ \dfrac{s}{3} + \right.$ [illegible]

[illegible] AB [illegible] $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-3,\ 3,\ 0$ [illegible]

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp$ [illegible] り，O [illegible] るから

[illegible] $-\dfrac{20}{}$ [illegible] $+1)^2 + \Big($ [illegible] 0 $\cdots$①

[illegible] り，O [illegible] るから

[illegible] $-4+3\Big($ [illegible] よって　$\boldsymbol{s=1}$

$s=1$ を [illegible] と

$$-\frac{20}{9} + \text{[illegible]} 1\Big)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2 = 0$$ これを解いて　$\boldsymbol{t = \pm 2}$

15.5 (1) A(1, 2, 6)，[illegible] 0, 9)，C$(s,\ t,\ 0)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (6, -2,\ 3),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (s-1,\ t-2, -6)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6(s-1) - 2(t-2) + 3\cdot(-6)$
$= \boldsymbol{6s - 2t - 20}$

(2) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ より，$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2$ であるから

$$6^2 + (-2)^2 + 3^2 = (s-1)^2 + (t-2)^2 + (-6)^2$$

したがって　　$\boldsymbol{(s-1)^2 + (t-2)^2 = 13}$

(3) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ であるから，$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ を (1) の結果に代入すると

$$6s - 2t - 20 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 3s - 1 \cdots ①$$

さらに，① を (2) の結果に代入

$$(s-1)^2 + (3s-10-2)^2 = 13 \qquad 37s + 66 = 0$$

ゆえに　$(s-3)(5s-22) = 0$　　$3,\ \ 5$

よって，① から　　$\boldsymbol{(s,\ t)}$ $\boldsymbol{-1)}$, $\boldsymbol{3}$

15.6 (1) 点 D は線分 AB を 3 : 2 に 分する点であ

$$= \frac{-2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{3-2} = -2\overrightarrow{OA}$$

$2(3,-2,-2) + 3(-1,$ $) = (-9,\ 1,\ 13)$

し て　　$-1,\ 3) - (3,-2,-2)$

$= \quad 5)$

$\overrightarrow{CD}$ $9,\ 1,\ 13) -$ $3a+2)$

$10,\ 1-a,\ 1$ $)$

AB CD が 垂 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ より

$4 \cdot (-10) + 1($ $a) + 5 \cdot (11 - 3a) = 0$

これを解いて $\boldsymbol{= 6}$

(2) (1) の結果よ $1,\ 6,\ 20)$ であるから，△BCD の重心 G の座標は

$$\left(\frac{-1+1}{3},\ \frac{-1+6+1}{3},\ \frac{3+20+13}{3} \right) \quad \text{すなわち} \quad (-3,\ 2,\ 12)$$

$\overrightarrow{AG} = (-3,\ 2,\ 12) - (3,-2,-2) = (-6,\ 4,\ 14)$

印刷本

したがって，求める点をPとすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AG}} \quad (0 \leqq t \leqq 1)\\ &= (3,-2,-2) + t(-6,\ 4,\ 14)\\ &= (3-6t,\ -2+4t,\ -2+14t)\\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 &= (3-6t)^2 + (-2+4t)^2 + (-2+14t)^2\\ &= 248t^2 - 108t + 17\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 5$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 25$ であるから

$$248t^2 - 17$$

$$62t^2 -$$

$$(2t-1)(3$$

$0 \leqq t \leqq 1$ であるから　$t = \dfrac{1}{2}$　　**(0, 0, 5)**

15.7　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2a - 9c + 3$　　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -$　　$18,$　　$+ 2c$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0,$　$\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0,$　O　　$= 0$ で

$a - 9c + 3c = 0,$　　$-3a - 18$

解　　$\boldsymbol{a = -6,\ b = 13,\ c =}$

(ア) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$　　$\overrightarrow{\mathrm{B}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると

$$\left(-\frac{8}{5}\right.$$　　$(-6,-9,\ 13) + \beta(2,\ 3,\ 3) + \gamma(-3,\ 2,\ 0)$

$$6\alpha + 2$$　　$-9\alpha + 3\beta + 2\gamma,\ 13\alpha + 3\beta)$$

$$\alpha + 2\beta - 3$$　　$\frac{8}{15}$

したが　　3β　　$\frac{2}{5}$

$$13\alpha$$　　$\frac{2}{5}$

えに　　$\beta = \dfrac{2}{5},\ \gamma = \dfrac{2}{5}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$

(イ) $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \mathrm{O}$　　$\mathrm{D} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} &= -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\ &= -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\ &= \left(-1 + \frac{1}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(1 - \frac{3}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{2}{5}t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

見本

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$\left(-1+\frac{1}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(1-\frac{3}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{2}{5}t\overrightarrow{\mathrm{OC}} = k(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

したがって

$$\left(-1+\frac{1}{5}t+k\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(1-\frac{3}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \left(\frac{2}{5}t-k\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は互いに直交するので，これ[illegible]独立であるから

$$-1+\frac{1}{5}t+k=0, \quad 1-\frac{3}{5}t=0, \quad \frac{2}{5}t-k=0$$

これを解いて　$t=\frac{5}{3}$，$k=\frac{2}{3}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ [illegible] **2 : 1**

15.8　(1) H は平面 OBC 上にある[illegible]

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OB}} +$$

と[illegible]は実数).

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = s\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$= s(3,\ 0,\ 1) + t(1,\ 2,\ [illegible]) - (2,\ 1,\ 4)$$

$$= (3s+t-2,\ 2t-1,\ s+t-4)$$

[illegible]とき $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ [illegible]から，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$ より

$$3(3s+t-2) + [illegible](s+t-4) = 0$$

$$5s+2t=5 \quad \cdots ①$$

[illegible]であるか[illegible]$\cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ より

$$1[illegible](3s+t-2) + 2(2t-1) + 1(s+t-4) = 0$$

$$2s+3t=4 \quad \cdots ②$$

①，② を解[illegible]　$s=\frac{7}{11}$，$t=\frac{10}{11}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{7}{11}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{10}{11}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$= \frac{7}{11}(3,\ 0,\ 1) + \frac{10}{11}(1,\ 2,\ 1) = \left(\frac{31}{11},\ \frac{20}{11},\ \frac{17}{11}\right)$$

印刷本

よって　　$\mathbf{H}\left(\dfrac{\mathbf{31}}{\mathbf{11}},\ \dfrac{\mathbf{20}}{\mathbf{11}},\ \dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{11}}\right)$

(2) $\triangle \mathrm{OBC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{10\cdot 6 - 4^2} = \boldsymbol{\sqrt{11}}$

(1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(\frac{31}{11},\ \frac{20}{11},\ \frac{17}{11}\right) - (\quad)$$

$$= \frac{9}{11}(1,\ 1,\ -$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}| = \frac{9}{11}\sqrt{1+1+9}$$

したがって，四面体 AOBC の体積

$$\frac{1}{3}\triangle \mathrm{OBC} \times \quad \frac{1}{3} \times \quad \boldsymbol{3}$$

解説 (琉球大学 2007) 2

(3) 求め の方程式は，原点を通ることに して

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + b \quad =$$

おく (2,\ 1,\ 4)，B(3,\ 0,\ (1,\ 2,\ 1) を通るから

$$2a + b + 4c = -21$$

$$3a \quad -10$$

$$a + 2b + \quad 6$$

解い $= \dfrac{1}{9}$,

球面の方

$$\boldsymbol{+ y^2 + z^2 - \frac{17}{9}x + \frac{1}{9}y - \frac{13}{3}z = 0}$$

15.9 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 0,\ \quad \overrightarrow{\mathrm{B}} = (b_1,\ b_2,\ 0)$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ より

$$b_1{}^2 + b_2{}^2 = 1 \quad \cdots ①$$

また，$\angle \mathrm{AOB} = 60^\circ$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos 60^\circ$ より

$$b_1 = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \qquad \text{ゆえに} \qquad \boldsymbol{b_1 = \frac{1}{2}}$$

見本

これを ① に代入すると　　${b_2}^2 = \dfrac{3}{4}$　　$b_2 > 0$ より　　$\boldsymbol{b_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ より

$${c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2 = 1 \quad \cdots ②$$

$\angle \mathrm{AOC} = 60^\circ$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 60^\circ$ より

$$c_1 = 1 \times 1 \times \frac{1}{2}　　\text{ゆえに}　　\boldsymbol{c_1 = \frac{1}{2}}$$

$\angle \mathrm{BOC} = 60^\circ$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 60^\circ$ より

$$\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 1 \times 1 \times \frac{1}{2}　　\text{ゆえに}　　c_1 + \sqrt{3}c_2 = 1$$

③ を上式に代入して　　$\boldsymbol{c_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}}$

③，④ を ② に代入すると　　$c_3^2 = \dfrac{2}{3}$　　$c_3 > 0$ より　　$\boldsymbol{c_3 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 0,\ 0)$，

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right) - \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right) = \left(0,\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 1\cdot 0 + 0\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 0\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = 0　　\text{ゆえに}　　\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

(3) 線分 BC 上の点 P は，実数 t を用いて　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\mathrm{OP} \perp \mathrm{BC}$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} + t|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = 0　　\text{ゆえに}　　\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} + t|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = 0 \quad \cdots ⑤$$

で，△OAB は一辺の長さが 1 の正三角形であるから

$$-\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = |\overrightarrow{\mathrm{BO}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos 60^\circ = -\frac{1}{2},\quad |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = 1$$

これらを ⑤ に代入して　　$t = \dfrac{1}{2}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$$= \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right) + \frac{1}{2}\left(0,\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

印刷

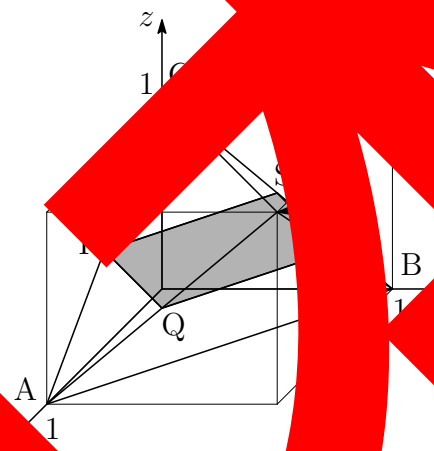
よって　　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{6}}\right)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)-(1,\ 0,\ 0)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$　より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{}\cdot 0$$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

15.10　(1) 4点P，Q，R，Sは，それぞれ[illegible]，BCを$a:1-a$に内分する点であるから



$=(1-$[illegible]$+a$[illegible]$-a)(1,\ 0,\ 0)+a(0,\ 0,\ 1)=(1-a,\ 0,\ a)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=$[illegible]$)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+$[illegible]$=(1-a)($[illegible]$)+a(1,\ 1,\ 1)=(1,\ a,\ a)$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=$[illegible]$-a)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+$[illegible]$=(1-a)(0,$[illegible]$)+a(1,\ 1,\ 1)=(a,\ 1,\ a)$

$=(1,$[illegible]$+a$[illegible]$=$[illegible]$0)+a(0,\ 0,\ 1)=(0,\ 1-a,\ a)$

[illegible]$\boldsymbol{a,\ 0,\ a)}$,[illegible]$\boldsymbol{a)}$,　$\mathbf{R}(\boldsymbol{a,\ 1,\ a})$,　$\mathbf{S}(\mathbf{0,\ 1-}\boldsymbol{a}\mathbf{,\ }\boldsymbol{a})$

(2) (1)の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=$$[illegible]$0),\quad \overrightarrow{\mathrm{SR}}=(a,\ a,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{PS}}=(a-1,\ 1-a,\ 0)$$

ゆえに　　P[illegible]R，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PS}}=0$

したがって[illegible]口の面積$S(a)$は$(0<a<1)$

$$S(a)=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PS}}|=\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}(1-a)$$
$$=-2a^2+2a=-2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

見本

よって　　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

15.11　(1) G(0, 4, 4)，M(2, 0, 4)，N(4, 4, 2) であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}} = (2,\ 0,\ 4) - (0,\ 4,\ 4) = \boldsymbol{(2, -4,\ 0)}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{GN}} = (4,\ 4,\ 2) - (0,\ 4,\ 4) = \boldsymbol{(4,\ 0, -2)}$$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GN}} = 2 \times 4 + (-4) \times 0 + 0 \times (-2) = 8$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{GM}}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{GN}}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

よって　　$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GN}}}{|\overrightarrow{\mathrm{GM}}||\overrightarrow{\mathrm{GN}}|} = \dfrac{8}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5}$

(3) (2) の結果から　　$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

$$\triangle \mathrm{GMN} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{GM}}||\overrightarrow{\mathrm{GN}}|\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{21}}{5} = \boldsymbol{\sqrt{21}}$$

(4) △GMN の高さを h とすると，三角錐 FGMN の体積により

$$\frac{1}{3}\times \triangle \mathrm{GMN} \times h = \frac{1}{3}\times \triangle \mathrm{FGN} \times \mathrm{FN}$$

よって　　$\dfrac{1}{3}\times \sqrt{21} \times h = \dfrac{1}{3}\times 4 \times 2$

$$h = \frac{8}{\sqrt{21}} = \boldsymbol{\frac{8\sqrt{21}}{21}}$$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OG}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ とおくと (α，β，γ は実数)

$$(0,\ 4,\ 4) = \alpha(0,\ 4,\ 4) + \beta(2,\ 0,\ 4) + \gamma(4,\ 4,\ 2)$$
$$= (2\beta + 4\gamma,\ 4\alpha + 4\gamma,\ 4\alpha + 4\beta + 2\gamma)$$

成分を比較して　$\beta + 2\gamma = 2$,　$\alpha + \gamma = 1$,　$2\alpha + 2\beta + \gamma = 2$

ゆえに　$\alpha = \dfrac{1}{5}$，$\beta = \dfrac{2}{5}$，$\gamma = \dfrac{4}{5}$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$

印刷本

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ とおくと (k は実数)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= k\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)\\ &= \frac{k}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}} + \frac{2k}{5}\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \frac{4k}{5}\overrightarrow{\mathrm{ON}}\end{aligned}$$

このとき，P は平面 GMN 上の点であるから

$$\frac{k}{5} + \frac{2k}{5} + \frac{4k}{5} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{5}{7} \quad \text{よって} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mathbf{\frac{5}{7}\overrightarrow{OF}}$$

15.12 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ …①

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MG}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MG}} = 0$

①，② より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}} =$ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ +

$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

補足 M は の中点であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MG}} = \frac{1}{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{MG}}$,

$\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{MG}} =$ $+ \overrightarrow{\mathrm{MG}}$

$=$ AG , $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ $\mathrm{G}|^2$ で ら

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} +$ $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{MG}}$ 理すると $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MG}} = 0$

(2) (同様にして $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $+ \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，(1) および上の 2 式から

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$$

よって $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1,\ \sqrt{3},\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

印刷本

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 1\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) + \sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 0\cdot\sqrt{2} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}} = 1\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right) + \sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) + 0\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) + \sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$

よって，OP，OQ，OR は互いに直交している

(2) の結果により，O，P，Q，R を通る球の中心を G とすると

$2\overrightarrow{\mathrm{OG}} = (\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$= \left(1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{4}, \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}, \sqrt{2}\right)$

したがって　$4|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ $= 9$

よって，求める球面の半径は　$\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

別解　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{O}}$ $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = 1$ であるから

$4|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2 = (\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}})$

$= |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2$

$= 4 + 1 = 5$

$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

15.13　(1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (\quad)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (\quad)$ であるから

$\cos\angle \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|} = \dfrac{1\cdot(-2) + 0\cdot 1 + (-2)\cdot 1}{\sqrt{5}\sqrt{6}} = \dfrac{-4}{\sqrt{30}} < 0$

よって　$\angle$ $\dfrac{\pi}{2}$

(2) 点 H は BC 上の点であるから，実数 t を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (0,\ 0,\ 2) + t(-2,\ 1,\ 1) = (-2t,\ t,\ t+2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-2t,\ t,\ t+2) - (1,\ 0,\ 0) = (-2t-1,\ t,\ t+2)$

印刷本

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ であるから

$$(-2t-1)\cdot(-2) + t\cdot 1 + (t+2)\cdot 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = -\frac{2}{3}$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$　　よって　　$\mathbf{H}\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 0,\ 0)$ および (2) の結果から

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 1, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{2}{3}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}$$

$\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{4}{3}$

よって，△OAH の面積は

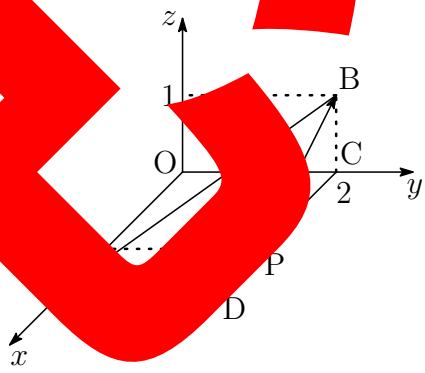
$$\triangle \mathrm{OAH} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}$$

$$= \frac{1}{}$$

15.14　(1) P は 上の点であるから　　$0 \leqq x$

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (0) - (x,\ 2,\ 0) = (3-x,\ )$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (x,\ 2,\ 0) = (-x,\ )$$



したがって

$$= (3-x)\cdot(-x) + (-2)\cdot 0 + 0\cdot 1 = x^2 - 3x$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{A}}| = \sqrt{(3-x)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = \sqrt{(-x)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 1}$$

よって　　$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|} = \dfrac{\boldsymbol{x^2 - 3x}}{\boldsymbol{\sqrt{x^2 - 6x + 13}\sqrt{x^2 + 1}}}$　　$\boldsymbol{(0 \leqq x \leqq 3)}$

見本

(2) △PAB の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x^2-6x+13)(x^2-3x) - (x^2-3x)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5x^2-6x+13} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{56}{5}} \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 3$ において，S は最小値 $\frac{1}{2}\sqrt{}$ をとる．

15.15 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\ 2,\ 1) - (3,\ 0,\ 0) = (-2$

点 H が線分 AB 上にあるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = k\overrightarrow{\mathrm{A}} \quad 2,\ 2,\ \quad) \leqq$$

とおける．したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} \\ &= (3,\ 0,\ 0) + k(-2 \\ &= (-2k+3,\ 2k,\ k \quad ① \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$k+3,\ 2k,\ k) - (0,\ 0,\ m)$$

$$2k+3,\ \quad - m) \quad \cdots ②$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ $\quad$ であ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = 0$ よ

$$-2(\quad)\cdot \quad 1\cdot(k-m) = 0$$

$$= 9k - 6$$

$0 \leqq$ $\leqq 1$ て $\quad$ ら $\quad$ $\boldsymbol{-6 \leqq m \leqq 3}$

(2) ③ を ② に代 $\quad$ と $\quad \overrightarrow{\mathrm{CH}} = (-2k+3,\ 2k, -8k+6)$

したがって $\quad = (-2k+3)^2 + (2k)^2 + (-8k+6)^2$

$$\begin{aligned} &= 72k^2 - 108k + 45 \\ &= 72\left(k-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

上式および ① により，$0 \leqq k \leqq 1$ において，$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|$ は

印刷本

$k=0$　すなわち　$\mathbf{H(3,\ 0,\ 0)}$ のとき　　**最大値** $\mathbf{3\sqrt{5}}$,

$k=\dfrac{3}{4}$　すなわち　$\mathbf{H}\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)$ のとき　**最小値** $\dfrac{\mathbf{3\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$

(3) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 2,\ 1)$ とおくと

$$|\vec{a}|^2=9,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=3,\quad |\vec{b}|^2=6$$

P は平面 OAB 上にあるから，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\quad\cdots$$

とおける．OA，OB の中点をそれぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\quad}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{NP}}=\overrightarrow{\quad}=$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\left(s\vec{a}+t\vec{b}-\right.$

$$=s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-$$

$$=9s+3t-\frac{9}{2}=\quad 2t-3)$$

$$\vec{b}\cdot\left(s\vec{a}+t\vec{b}-\frac{}{2}b\right)$$

$$a\cdot\vec{b}+t|\quad|\vec{b}|^2$$

$$=3s+6t-3\quad+2t-1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}$，$\overrightarrow{\quad}P\quad$ら，$\overrightarrow{\quad}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NP}}=0$ より

$$6s+2\quad,\quad s+2t-1=0$$

これ解い$\quad=\dfrac{2}{5},\ t=\dfrac{3}{10}$

ゆえに　　$\overrightarrow{\quad}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{10}\vec{b}=\dfrac{2}{5}(3,\ 0,\ 0)+\dfrac{3}{10}(1,\ 2,\ 1)=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{3}{10}\right)$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{27}{10}$$

よって　　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}\right)$,　　$r=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{\dfrac{27}{10}}=\dfrac{\mathbf{3\sqrt{30}}}{\mathbf{10}}$

見本

15.16 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+x\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{b}+x\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{c}+t\vec{b}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}}&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})\\&=\frac{1}{3}\{(\vec{a}+x\vec{c})+(\vec{b}+x\vec{a})+(\vec{c}+t\vec{b})\}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{3}\{(x+1)\vec{a}+(t+1)\vec{b}+(x+1)\vec{c}\}}\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=b+x\vec{a}-(\vec{a}+x\vec{c})=(\quad)\vec{a}+\vec{b}-x\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=c+t\vec{b}-(\quad)\vec{c}=-x\vec{a}+t\vec{b}-(x-1)\vec{c}$

直線 OS が △PQR に垂直なとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ $\perp$ $(\quad)$

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=0$ であるから

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

であることに注意して

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{3}\{(x+1)(x-1)+(t+1)(\quad)+x(\quad)\}$

$=\frac{1}{3}\{-(x+1)+t(t+1)+(t+1)(\quad)-1(\quad-1)\}=0$

整理すると $(t-x)(x+t+1)=0$

$0<t<1$, $0<x<1$ より $x+t+1\neq 0$ であるから　$\boldsymbol{t=x}$

$(\quad)$ の結果より

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=(\quad-1)^2+1+(\quad)^2=2(x^2-x+1)$

$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=(\quad)^2+(\quad-1)^2=2(x^2-x+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=-(x-1)(\quad)+x(x-1)=x^2-x+1$

したがって $S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\sqrt{4(x^2-x+1)^2-(x^2-x+1)^2}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2-x+1)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は，$\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{8}}$ をとる．

見本

(4) (3) の結果から，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)=\frac{3}{4}\quad\text{ゆえに}\quad|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，求める体積は　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{16}}$

15.17　(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y,\ z-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y,\ z+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ であるから

$$x^2+y^2+(z-1)(z+1)=0\qquad\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=1}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 1)+t(u,\ v,$

$=(tu,\ tv,\ 1-t)$



したがって

$x=tu$，$=tv$，$z=1-t\quad\cdots(*)$

あるから

$$\boldsymbol{u=\quad\quad\quad\quad\quad\quad\frac{y}{1-z}}$$

(3) $(*)$ の結果を と

$(tu)^2+$ $+(1-$ 1　整理して　$t\{(u^2+v^2+1)t-2\}=0$

$t\neq$ るから $\dfrac{2}{2+v^2+1}$

と $(*)$ する

$$=\left(\frac{\quad\quad}{\boldsymbol{u^2+v^2+1}},\ \frac{\boldsymbol{2v}}{\boldsymbol{u^2+v^2+1}},\ \frac{\boldsymbol{u^2+v^2-1}}{\boldsymbol{u^2+v^2+1}}\right)$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\vec{a}$ より，$=0$ であるから

$$x+y+z=0$$

これに (3) を代入して整理すると

$$u^2+v^2+2u+2v-1=0\quad\text{すなわち}\quad(u+1)^2+(v+1)^2=3$$

よって，**点 $(-1,-1)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円**をえがく．

見本

15.18 $\vec{a}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$, $\vec{b}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ に垂直なベクトルを

$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ とすると，$\vec{a}\perp\vec{n}$，$\vec{b}\perp\vec{n}$ より，$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y=0 \qquad \text{ゆえに} \quad x-y=0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0 \qquad \text{ゆえに} \quad \sqrt{2}x+\sqrt{2}$$ $$\sqrt{3}z=0$$

上の 2 式から　$x:y:z=\sqrt{3}:\sqrt{3}:$

$\vec{n}$ は，実数 t を用いて　$\vec{n}=t(\sqrt{3},\ \sqrt{3},$

$|\vec{n}|=1$ であるから　$|t|\sqrt{3+3+2}=1$

よって　$\vec{n}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{2})$ $\left(\pm\dfrac{\sqrt{\mathbf{4}}}{\mathbf{4}}\right.$

15.19 (1) A(1, 1, 1)，B(3, 0, 1)，$\left(\right.$, 0)，P($\left.\right)$ 2) と

$\overrightarrow{\text{AB}}=(2,-1,\ 0)$，$\overrightarrow{\text{AC}}=(0,\ 1,-$ $\overrightarrow{\text{AP}}$

$\overrightarrow{\text{AC}}$ とおくと (α，β は実数

$1,\ 1)=\alpha(2,-1,\ 0$ $),\ 1,-1)$

した $\quad 4,\ -\alpha+\beta=1,$ $=1$

と解い $\quad -2,\ \beta=$ 1

ゆえに $=-2$ $\overrightarrow{\text{AC}}$　よって P は平面 H 上の点である．

平 を媒介 用いて表

$y,\ z)=$ $\overrightarrow{\text{AC}}$

$=(1,$ $+s(2,-1,\ 0)+t(0,\ 1,-1)$

$=(1+2s,\ 1-s+t,\ 1-t)$　$\cdots$①

$\overrightarrow{\text{AB}}=(2,-1,$ $\overrightarrow{\text{AC}}=(0,\ 1,-1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=(1,\ 2,\ 2)$$

とおく．$\vec{n}$ に平行な直線を媒介変数 k を用いて表すと

$$(x,\ y,\ z)=(1,-3,-4)+k(1,\ 2,\ 2)$$
$$=(1+k,-3+2k,-4+2k) \quad \cdots②$$

見本

求める交点 $(x,\ y,\ z)$ は，①，② から

$$x = 1 + 2s = 1 + k$$
$$y = 1 - s + t = -3 + 2k$$
$$z = 1 - t = -4 + 2k$$

これを解いて　　$s = 1,\ t = 1,\ k = 2,\ x = 3,\ y = 1,\ z = 0$

よって，求める交点は　　$\mathbf{(3,\ 1,\ 0)}$

15.20　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 2,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (2, -1,$ あるから

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = -$$ $$= \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}\sqrt{\mathbf{6}}$$

(2) (1) の結果から　$\sin\theta = \sqrt{1 - c$

よって　　$S = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $\sqrt{14}\sqrt{2}$ $= 5$

(3) $\vec{n} = (x$ $z) \neq \vec{0}$ が，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \vec{n}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \vec{n}$ で き

$0,\quad 2x - y + 4z = 0$　ゆ $\frac{2}{5}z,$ $\frac{2}{5}z$

たが を $\vec{n} = (11,\ 2, -5)$ と

$$P = \pm \frac{S}{|\vec{n}|}\vec{n} = \pm\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{11^2 + 2^2 + (-5)^2}}(11,\ 2, -5)$$

$= \mathbf{(11,}$

15. $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ $1,\ 1,$ $2,\ 2, -4)$ から

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ $^2 = \sqrt{6},$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{}$ $+ 2^2 + (-4)^2 = 2\sqrt{6},$

$\overrightarrow{\mathrm{B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\cdot(-2) + 1\cdot 2 + 1\cdot(-4) = -6$

よって　　$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \dfrac{-6}{\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

$\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{3\sqrt{3}}$$

見本

別解 $\triangle ABC = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{6\cdot 24 - 36} = 3\sqrt{3}$

(2) 求めるベクトルを $\vec{n} = (x,\ y,\ z)$ とすると　$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = 0$,　$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n} = 0$

したがって　　$2x + y + z = 0$,　　$-x + y - 2z = 0$

ゆえに　　$x : y : z = -1 : 1 : 1$　よって　$\boldsymbol{(-1,\ 1,\ 1)}$

(3) $\overrightarrow{AD} = (1,\ 2, -4)$ と $\vec{n} = (-1,\ 1,\ 1)$ のなす角を α とす

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AD}||\vec{n}|} = \frac{-1 + 2 - 4}{\sqrt{1 + \quad}} \qquad \frac{\sqrt{3}}{|\overrightarrow{AD}|}$$

よって　　$DE = |\overrightarrow{AD}||\cos\alpha| = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

(4) (1), (3) の結果から　$\dfrac{1}{3}\triangle ABC\cdot DE$

解説 外積 (ベクトル積) を用いると　求め　外積　高校数学の範囲外であるから，　使用し　に　する．

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\quad,\ 1,\ 1) \times (-\quad -4) = (\quad)$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| =$$

$$(\quad\overrightarrow{C})\cdot\overrightarrow{AD} = (-6,\ 6,\ 6)\cdot(1,\quad) = \quad 18$$

四面体　D　は　$V = \dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\quad\overrightarrow{AD}| = \dfrac{1}{6}\times 18 = 3$

(1)　$2,\ 2)$　　中点 B の座標は

$$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{2+0}{2}\right)$$　すわち　$(3,\ 2,\ 1)$

$$\overrightarrow{A}\quad(\quad - (1,\quad (1,\ 2,\ 0),$$

$$B = (3,\ 2\quad 1) = (2,\ 1,\ 0)$$

A_2，B は $\quad = 1$ 上にあるから，2 つのベクトル $\overrightarrow{A_1A}\quad\overrightarrow{A_1B}$　分および y 成分から

$$\triangle A_1A_2B = \frac{1}{2}|1\cdot 1 - 2\cdot 2| = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

(2) 3 点 A_1，A_2　平面 $z = 1$ 上にあるから，2 点 $A_3(2,\ 2,\ 2)$，$A_4(4,\ 2,\ 0)$ からこの　下ろした垂線の長さは，ともに 1 である．

よって，四面体 $A_1A_2A_3B$ および四面体 $A_1A_2A_4B$ の体積は，ともに

$$\frac{1}{3}\triangle A_1A_2B \times 1 = \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times 1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

見本

(3) $4\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}$
$= (1,\ 1,\ 1) + (2,\ 3,\ 1) + (2,\ 2,\ 2) + (4,\ 2,\ 0)$
$= (9,\ 8,\ 4)$

ゆえに $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{9}{4},\ 2,\ 1\right)$, $\overrightarrow{A_1P} = \left(\frac{9}{4},\ 2,\ 1\right) - (1,\ 1,\ 1) = \left(\frac{5}{4},\ 1,\ 0\right)$

上式および (1) の結果から，$\overrightarrow{A_1P} = \alpha\overrightarrow{A_1A_2} + \beta\overrightarrow{A_1B}$ とおくと

$$\left(\frac{5}{4},\ 1,\ 0\right) = \alpha(1,\ 2,\ 0) + \beta(2,$$

これを解いて $\alpha = \frac{1}{4},\ \beta = \frac{1}{2}$ $= \frac{1}{4}\overrightarrow{A_1A_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B}$

よって，4 点 A_1，A_2，B，P は同一

(4) $A_1(1,\ 1,\ 1)$ と $A_2(2,\ 3,\ 1)$ の中

$$\left(\frac{1+2}{2},\ \frac{1+3}{2},\ \right)$$ す

これと の結果から，4 点 A_1，A_2，B， 座標 ら，
こ は，平面 $y = 2$ 上にある．

15.23 (1 0, 1 0), C(0, 1, 5) より

$\overrightarrow{BC} = (-4, -$ $\overrightarrow{CA} = (5, -1, -4)$

って $= |A$ $\sqrt{(-1)^2 + + (-1)^2} = \sqrt{\mathbf{6}}$

BC $= \sqrt{(-4)^2 + ^2 + 5^2} = \sqrt{\mathbf{42}}$

C $= \sqrt{5^2 + (- -4)^2} = \sqrt{\mathbf{42}}$

結果 三角 は P A の二等辺三角形であるから，C
辺 した垂線

$$\sqrt{(\sqrt{42})^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{9}{2}\sqrt{2}$$

よって S $\sqrt{6} \times \frac{9}{2}\sqrt{2} = \mathbf{\frac{9}{2}\sqrt{3}}$

印刷本

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-5,1,\ 4)$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}\\&=(5,\ 0,\ 1)+\ell(-1,\ 2,-1)+m(-5,\ 1,\ 4)\\&=(5-\ell-5m,\ 2\ell+m,\ 1-\ell+4m)\quad\cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=-1(5-\ell-5m)+2(2\ell+m)-1(1\ \ \ell+4m)\\&=6\ell+3m-6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=-5(5-\ell-5\ \ (2\ell+m)\ \ \ell+4m)\\&=3\ell+42m-2\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$$\begin{cases}6\ell+3m-6=0\\3\ell+42m-21=0\end{cases}$$

$\boldsymbol{\ell=\ \ ,\ m=\ \ }$

(4) (3) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{A}}\ \ +\dfrac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{9}\ \ \ \ +4\mathrm{A}$

$\dfrac{11}{9}$，$\mathrm{AM}:\mathrm{MH}=9:2$ よ

$\sqrt{3}$

(5) の結果を代入すると $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,$ ゆえに $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=2\sqrt{3}$

(4) の ら，ABHC の面積は $=\dfrac{11}{9}\cdot\dfrac{9}{2}\sqrt{3}=\dfrac{11}{2}\sqrt{3}$

$\times\ \ 2\sqrt{3}=\mathbf{11}$

$(a,\ 0$ $(0,\ b$ $(0,\ 0,\ c)$ よ

$\overrightarrow{\mathrm{A}}$

$=(-a,\ 0$

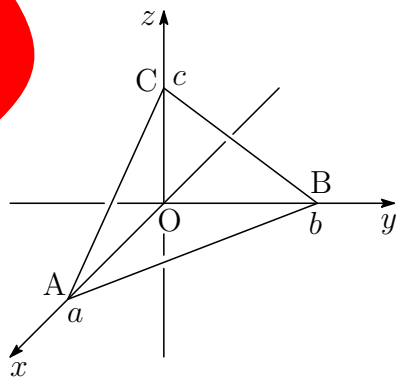
A ベクトルの 1 つを

$\vec{r}$ $ca,\ ab)$

とおくと，$\vec{n}$ 分の符号に注意して

$$\frac{1}{|\vec{r}\,|}\vec{r}=\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}}\boldsymbol{(bc,\ ca,\ ab)}$$

(2) $\qquad\vec{r}=(bc,\ ca,\ ab)=\dfrac{bc}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{ca}{b}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{ab}{c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots①$



白本

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\vec{r}$ に平行であるから (k は定数)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\vec{r}$　$\cdots$②

① を ② に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\left(\frac{bc}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{ca}{b}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{ab}{c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$
$$= \frac{bc}{a}k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{ca}{b}k\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{ab}{c}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

H は平面 α 上の点であるから　$\frac{bc}{a}k + \frac{ca}{b}k + \frac{ab}{c}$

したがって　$k = \frac{abc}{(bc)^2 + (ca)^2 +$　$\cdots$③

②，③ および $k > 0$ に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{abc}{(bc)^2 + (ca)^2 +$$
$$= \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{(bc)^2 +}\quad + \boldsymbol{(ab)^2}}(\boldsymbol{b}\quad, \boldsymbol{a}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = k|\vec{r}| = \frac{abc}{|\vec{r}|^2}|\vec{r}| = \frac{abc}{|\vec{r}|} = \frac{}{\sqrt{\quad + \quad}}\quad \boldsymbol{ab}$$

(2 の結果 $n_1 = \frac{bc}{|\vec{r}|}$

四面 ABC $\frac{1}{3}S_1 a = \frac{1}{3}S|\mathrm{OH}|$ であるから

$a = S$　ゆえ $S_1 = \frac{bc}{|\vec{r}|}S = n_1 S$

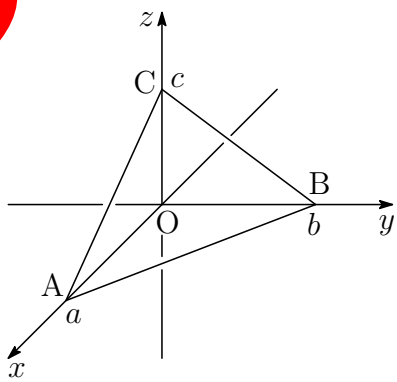
15. ∠BC すべて

から 間に),

$0,\ c)$ を定 ABC

の

$$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)$$



3 点 A,B,C 平面の方程式は

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

この平面の法線ベクトル $\vec{n}$ は　$\vec{n} = \left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)$

見本

このとき，$\overrightarrow{OG}//\vec{n}$ であるから，定数 k を用いて

$$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right) = k\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right) \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = b^2 = c^2 = 3k$$

よって，$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ より　　$\boldsymbol{a = b = c}$

(2) D は線分 BC を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} +$$

P は直線 AD 上の A 以外の点で　ら $(t \neq$

△APQ の重心が G であるから

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = 3\overrightarrow{OG}$$　　B + OC

したがって　$\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OA}$　　$\overrightarrow{OC}$ −

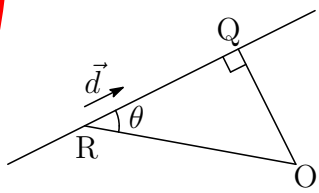
$$= (-a,\ \ ) + \frac{t}{3}(3a, -$$

ここ　$= (-a,\ b,\ c)$，$\vec{d} = (3a, -2b,$　お

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} +$$　　…

$\overrightarrow{OR}$ と　ク　す角を θ とすると

$(0$　$\pi)$，　なるとき



$$|\overrightarrow{OQ}|\ \mathrm{R}|\sin\ \ \sin\theta = \frac{|\overrightarrow{OR} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$$

$$|\overrightarrow{OQ}| = \frac{|\overrightarrow{OR} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$$

式か　　②

$\vec{d} = 0$ であ　　① をこれに代入して

$$+ \frac{t}{3}|\vec{d}|^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t = -\frac{3(\overrightarrow{OR}\cdot\vec{d})}{|\vec{d}|^2}$$

したがって　$\dfrac{3(3a^2 + 2b^2 + c^2)}{9a^2 + 4b^2 + c^2} \neq 0$

$\overrightarrow{OR} \times \vec{d} =$ $(\ \ca, -ab)$ であるから，② より

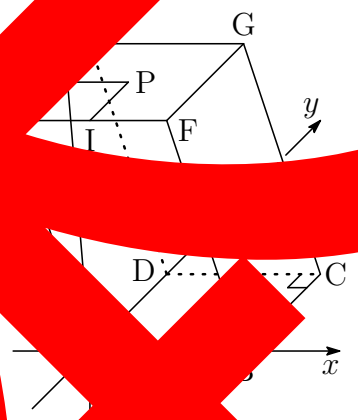
$$|\overrightarrow{OQ}| = \frac{\sqrt{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}}{\sqrt{9a^2 + 4b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}}{\boldsymbol{9a^2 + 4b^2 + c^2}}}$$

見本

15.26 (1) $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とすると，$0 < \theta < \pi$ より，$\sin\theta > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\end{aligned}$$

(2) $\angle \mathrm{BCD} = \frac{\pi}{2}$ より，四角形 ABCD は正方形であり，$\angle \mathrm{FBC} = \frac{\pi}{2}$ より，四角形 [illegible]D は長方形である．したがって，面 A[illegible] 空間内で点 A，B，D，E の座標を A[illegible] B(1, 0, 0)，D(0, 1, 0)，E($2\cos\theta$, 0[illegible] とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ 1,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x + 2\cos[illegible]\sin\theta)$$

したが[illegible]

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = 2$, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = (x + 2\c[illegible]4\sin^2\theta$

[illegible] $x + 2\cos\theta + y$ であ[illegible]

$$\triangle \mathrm{A[illegible]} = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{A[illegible]}})^2}$$

$$= \sqrt{\boldsymbol{-x-2}[illegible]\boldsymbol{\theta})^2 + 8\sin^2\boldsymbol{\theta}}$$

[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ [illegible] 1, 0) [illegible] $(x + 2\cos\theta$, [illegible] $\theta)$ より

[illegible] $\times$ A[illegible] θ, $y - x - 2\cos\theta)$

[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{C}} \times \overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$ [illegible] $- 2\cos\theta)^2 + 8\sin^2\theta$

よ[illegible]

$$\triangle \mathrm{ACP} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\sqrt{(y-x-2\cos\theta)^2 + 8\sin^2\theta}}$$

(3) $0 \leqq x \leqq 1$, [illegible] $\leqq 1$ より，$-1 \leqq y - x \leqq 1$ であるから，(2) の結果から

i) $1 < 2\cos$ [illegible] すなわち　$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ のとき

$y - x = 1$ で $\triangle$ACP は，最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{9 - 4\cos\theta - 4\cos^2\theta}}$ をとる．

印刷本

ii) $-1 \leqq 2\cos\theta \leqq 1$　すなわち　$\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{2\pi}{3}$ のとき

$y - x = 2\cos\theta$ で △ACP は，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\theta}$ をとる．

iii) $2\cos\theta < -1$　すなわち　$\frac{2\pi}{3} < \theta < \pi$ のとき

$y - x = -1$ で △ACP は，最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{9 + 4\cos\theta - 4\cos^2\theta}}$ をとる．

15.27 K は OG 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OK} = k\overrightarrow{OG} = \frac{k}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

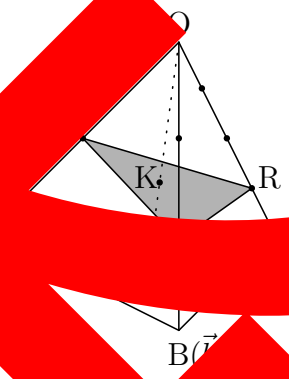
$$= \frac{k}{3}\left(2\overrightarrow{OP} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OQ} + \frac{4}{3}\overrightarrow{OR}\right)$$

$$= \frac{2k}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{k}{2}\overrightarrow{OQ} + \frac{4k}{9}\overrightarrow{OR}$$

また，K は平面 PQR 上の点であ

$$\frac{2k}{3} + \frac{k}{2} + \frac{4k}{9} = 1 \quad \text{ゆえ} \quad k = \frac{18}{29}$$

よって　　**KG = 18 : 11**



15.28 (1)

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)$$

$$= \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

(1) から

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{4a}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{9}\overrightarrow{OC} = \frac{2\overrightarrow{OC} + 7\overrightarrow{OF}}{9}$$

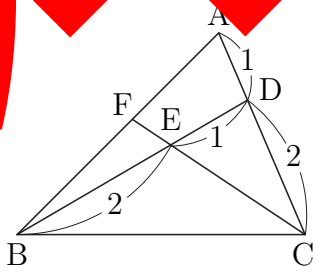
E : EF = 7 : 2

(3) (2) から　$\overrightarrow{OE} = \dfrac{3\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{7}$　ゆえに　BF : FA = 4 : 3

したがって　△BCF $= \frac{4}{7}$△ABC

(2) の結果から　△BEF $= \frac{2}{9}$△BCF

上の 2 式から　△BEF $= \frac{2}{9}\cdot\frac{4}{7}$△ABC $= \frac{8}{63}$△ABC

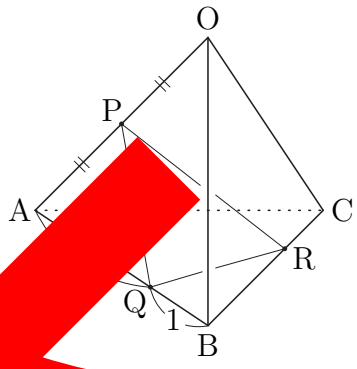


見本

よって，四面体 OBEF の体積は　$\boldsymbol{\frac{8}{63}V}$

15.29　(1) 条件から，P は線分 OA の中点，Q は線分 AB を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$$



よって，△PQR の重心 H の位置ベクトルは

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{O}\quad}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{5}{18}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{O}\quad}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{5}{18}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{O}\quad}$

O，G，R は同一直線上にあるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{5}{18}k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{9}k\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{O}\quad} \quad \cdots\cdots ①$$

G は平面 ABC 上にあるから

$$\frac{5}{18}k + \frac{2}{9}k + \frac{1}{3}k = 1 \quad \text{すなわち} \quad k = \frac{6}{5}$$

これを ① に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

△ABC の重心 G は

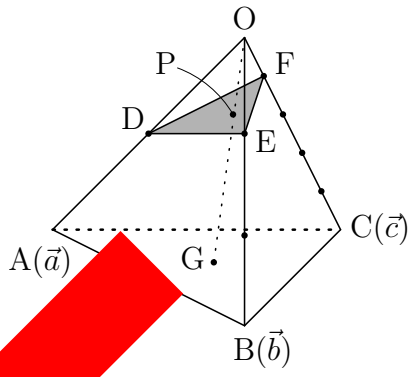
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

上の 2 式から　$\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{15}\vec{b} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{c}}$

見本

15.30 (1) P は OG 上の点であるから，実数 k を用いて



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \\ &= \frac{k}{3}(2\overrightarrow{\mathrm{OD}}+3\overrightarrow{\mathrm{OE}}+5\overrightarrow{\mathrm{OF}}) \quad \cdots ① \\ &= \frac{2k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+k\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{5k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OF}}\end{aligned}$$

また，P は平面 DEF 上の点であるから

$$\frac{2k}{3}+k+\frac{5k}{3}=1 \quad \text{ゆえに} \quad k=\frac{3}{10}$$

よって　　$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \mathbf{\frac{1}{10}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$

(2) ① より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{10}(2\overrightarrow{\mathrm{OD}}+3\overrightarrow{\mathrm{OE}}+5\overrightarrow{\mathrm{OF}})$

$\overrightarrow{\mathrm{DP}} = s\overrightarrow{\mathrm{DE}}+t\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}} = s(\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})+t(\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{OE}}+t\overrightarrow{\mathrm{OF}} \quad \cdots ②$$

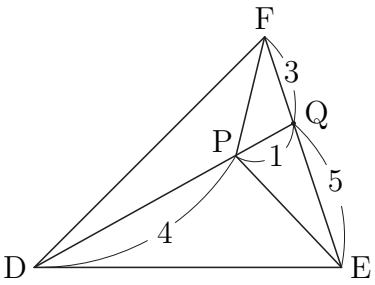
$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ は一次独立であるから，①，② の係数を比較して

$$1-s-t=\frac{2}{10},\quad s=\frac{3}{10},\quad t=\frac{5}{10}$$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \mathbf{\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{DE}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DF}}}$

(3) 結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{DE}}+5\overrightarrow{\mathrm{DF}}}{8}$$



と EF との交点を Q とすると

$$\mathrm{P}:\mathrm{PQ}=4:1$$

△DEF の面積を S とすると

$$S_1 = \triangle\mathrm{PDE} = \frac{4}{5}\triangle\mathrm{DEQ} = \frac{4}{5}\times\frac{5}{8}S = \frac{1}{2}S$$

$$S_2 = \triangle\mathrm{PEF} = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{DQ}}S = \frac{1}{5}S$$

$$S_3 = \triangle\mathrm{PFD} = \frac{4}{5}\triangle\mathrm{DQF} = \frac{4}{5}\times\frac{3}{8}S = \frac{3}{10}S$$

よって　　$S_1 : S_2 : S_3 = \frac{1}{2}S : \frac{1}{5}S : \frac{3}{10}S = \mathbf{5:2:3}$

印刷不可

15.31 (1) $10\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}+3\overrightarrow{PD}$ より

$$-10\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})$$

よって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}}$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD})$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}}{6} \quad \cdots ①$$

Q は平面 BCD 上の点であるから，

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}}{6} \quad \cdots ②$$

①，② より　$\overrightarrow{AQ}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$　よって　$\boldsymbol{k=}$

また

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{-\overrightarrow{BA}+2(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})+3(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA})}{6}$$

よって　$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$　よって　$\boldsymbol{s=\frac{1}{3},\ t=\frac{1}{2}}$

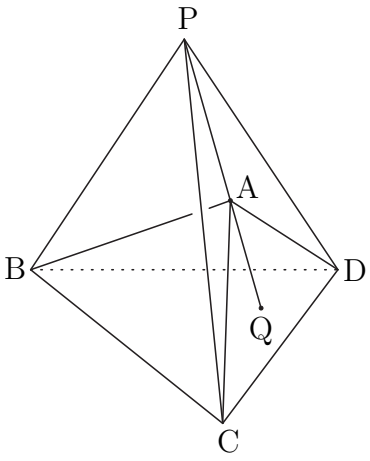
$\overrightarrow{AQ}=$　より

$$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{QA}$$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{2}\overrightarrow{QA}$$

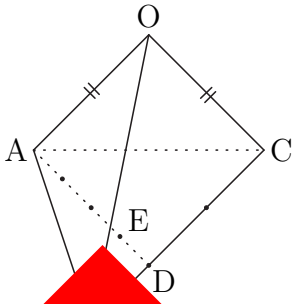
四面体 ABC　面体 PBCD の体積比は

$$\mathrm{PQ}=\boldsymbol{2:5}$$



見本

15.32 (1) $$\begin{aligned}\vec{e} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OD}}) \\ &= \frac{1}{4}\left\{\vec{a} + 3 \times \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}\right\} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}(\vec{\boldsymbol{a}} + \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}})\end{aligned}$$



(2) OE⊥AC より，$\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ である

$$4\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (\vec{a} +$$

$$= |\vec{c}|^2 - |a|$$

OA = OC より，$|\vec{a}| = |\vec{c}|$ を上式に

$$2(\vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b})$$

(3) OE⊥BC より，$\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ から

$$4\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (\vec{a} + 2$$ $$c)\cdot(\vec{c} - \vec{b})$$

$$= (\vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b}) + \vec{a}\cdot\vec{c} - 2|\vec{b}$$ $$^2 -$$

O OB = 2 : 1 より，$|\vec{a}| : |\vec{b}$ $= 2$ $: 2$ である

$$|\vec{b}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}||\vec{c}|, \quad |\vec{c}$$ $$|\vec{c}|$$

上 び (1) に代入すると

$$c - \frac{1}{$$ $$|\vec{a}||\vec{c}| =$$ に $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|} = -\dfrac{1}{2}$

$\vec{a}$ なす角

cos $\quad$ わち $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$

よ $= \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}$

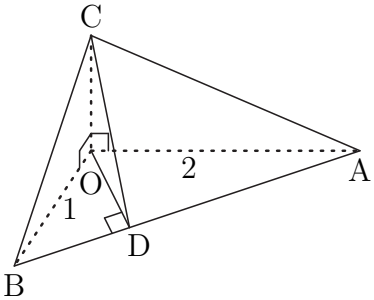
15.33 (1) D は直線 AB るから

$$1 - s)\vec{a} + s\vec{b}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} -$ O⊥AB より

$$\{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\}\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$(s-1)|\vec{a}|^2 + (1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b} + s|\vec{b}|^2 = 0$$



見本

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=t$ であるから

$$4(s-1)+(1-2s)t+s=0 \quad \text{ゆえに} \quad s=\frac{t-4}{2t-5}$$

よって $\qquad \vec{d}=\dfrac{t-1}{2t-5}\vec{a}+\dfrac{t-4}{2t-5}\vec{b}$

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 120° であるから

$$t=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ=2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

これを (1) の結果に代入すると

したがって $\qquad |\vec{d}|=\dfrac{1}{7}\sqrt{4|\vec{a}|^2+20}$

$$=\frac{1}{7}\sqrt{16}\quad 25=$$

$\vec{d}-\vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角が 60° るから $\quad \angle$ $=60^\circ$

直角 ODC から $\qquad |\vec{c}|=\sqrt{3}|\vec{d}|$

$\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}=\dfrac{3}{\sqrt{7}}$ よって $=$ 7

15.34 △OA 線 いてメネラウス を適用

$\dfrac{\quad}{\mathrm{BP}}\cdot\dfrac{\mathrm{PB}}{}$

$\dfrac{1}{}$ O

R : RO =

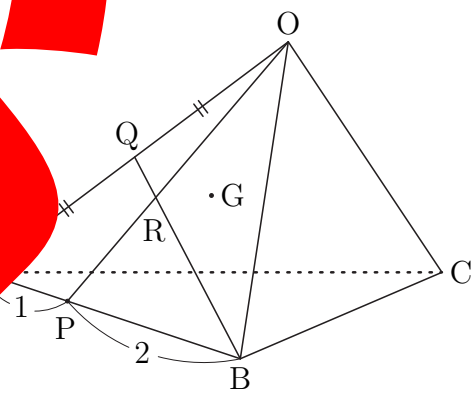
R O 2 に内分するから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{5}\times\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{\boldsymbol{2\vec{a}+\vec{b}}}{\boldsymbol{5}}$$

(2) (1) の結果か

$$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{3}-\vec{b}=\frac{1}{3}(\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{5}-\vec{c}=\frac{1}{5}(2\vec{a}+\vec{b}-5\vec{c})$$



見本

$\overrightarrow{\mathrm{BG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CR}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{BG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CR}} = 0$ であるから

$$(\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b} - 5\vec{c}) = 0$$

$$2|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 - 5|\vec{c}|^2 - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 16\vec{b}\cdot\vec{c} - 3\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$$

$|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{a}| \cdot 1 \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}|\vec{a}|$，$\vec{b}\cdot\vec{c} = 1 \cdot 1 \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ より

$$2|\vec{a}|^2 - 3 - 5 - \frac{5}{2}|\vec{a}| + 16\cdot\frac{1}{2} - \frac{3}{2}|\vec{a}| = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 2|\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}| = 0$$

$|\vec{a}| \neq 0$ であるから　$\mathrm{OA} = |\vec{a}| =$

このとき，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 2 \cdot 1 \cos\dfrac{\pi}{3} = 1$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CR}}|^2 = \frac{1}{25}|2\vec{a} + \vec{b} - 5\vec{c}$$

$$= \frac{1}{25}(4|\vec{a}|^2 \quad 25|\vec{c}|^2 \quad \vec{b} \quad 20\vec{}$$

$$= \frac{1}{25}\left(4\cdot 2 \quad 1 + 25 + 4\cdot 1 \quad \frac{1}{2} - 20\right.$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CR}}| = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

15.2 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} \quad \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{} \quad \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{O}}$ ，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ $= \vec{a} + (2$ より

$\overrightarrow{\mathrm{F}}$ $\mathrm{G} - \overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$+ (2-t)\vec{d}$ $= \vec{a} + 2(1-t)\vec{d}$

$1-t)(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) = \boldsymbol{t\vec{a} + (1-t)\vec{b} + (1-t)\vec{c}}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1 \cdot 1 \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ であるから

$\cdot\overrightarrow{\mathrm{FG}} = (\vec{c} - \vec{b}) \cdot \{t\vec{a} + (1-t)(\vec{b} + \vec{c})\}$

$$= t(\vec{c}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b}) + (1-t)(|\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2)$$

$$= t\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + (1-t)(1^2 - 1^2) = \boldsymbol{0}$$

見本

(3) $$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{2}=\frac{t\vec{d}+\{\vec{a}+(2-t)\vec{d}\}}{2}=\frac{\vec{a}+2\vec{d}}{2}$$
$$=\frac{\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})}{2}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

よって，E は線分 FG の中点である．

(4) (2)，(3) の結果から，四角形 BFCG はひし形で，その面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{FG}}|$$

△OBC は，正三角形であるから $=1$ $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{FG}}|$

$$|\overrightarrow{\mathrm{FG}}|^2=|t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+(1-$$
$$=t^2|\vec{a}|^2+(1-t)^2|\vec{b}|^2$$
$$+2t(1$$ $$-2t(1-t)$$
$$=2t^2-4t+2$$ $$1)^2$$

$S=\frac{1}{2}\sqrt{2(t-1)^2+1}$ とな から S は t のとき とる．

15.36 (1) $\vec{a}$ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

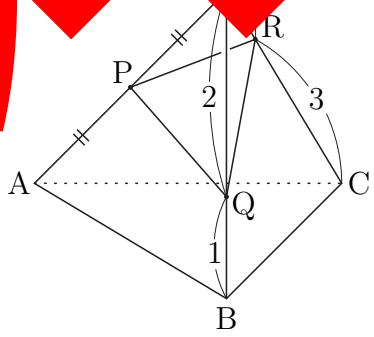
$$|\vec{a}$$ $$|=1$$

$$=\vec{b}\cdot\vec{c}$$ $$1\cdot1\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ O $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{}\vec{}$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$ $$=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=$ $-\frac{1}{2}\vec{a}$



$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\left|\frac{}{3}\right|=\frac{4}{9}|\vec{b}|^2-\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{36}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{R}}|^2=\left|\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{1}{16}|\vec{c}|^2-\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

よって $\qquad \mathbf{PQ}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{13}}}{\mathbf{6}},\ \mathbf{PR}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}}$

印刷本

別解 △OPQ および △OPR に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos\frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{36}$$

$$\mathrm{PR}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OR}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}\cos\frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)$

$= \frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{1}{8}\vec{c}\cdot\vec{a} +$

$= \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{5}{48}}$

(3) $\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 -$ $\left(\frac{5}{48}\right)^2$ $\mathbf{\frac{\sqrt{131}}{8}}$

15.37 (1) 点 Q は平面 OAC 上の点 るから

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ $(s$ 数

へと

$= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ $\cdots$①

Q⊥平 C よ ⊥$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, PQ

P = 0 で $s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{O}}$ P)$\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$

$\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$

るから $(s$ $t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$

$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$

上の 2 式に O $\sqrt{3},\ 3,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (0,\ 2,\ 2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (0,\ 1,\ 0)$ を代入すると

$6t - 3 = 0, \quad 6s + 8t - 2 = 0$

これを解いて $s = \frac{1}{5},\ t = \frac{1}{10}$

印刷本

したがって，① より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \frac{1}{5}(\sqrt{3},\ 3,\ 0) + \frac{1}{10}(0,\ 2,\ 2) - (0,\ 1,\ 0) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{5}, -\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right)\end{aligned}$$

(2) 点 S は平面 ABC 上の点であり，$\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ ⊥平面 ABC　　⊥$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから
$\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ は yz 平面上のベクトルで

ゆえに，点 M$(0,\ 3,\ 0)$ をとると，　　の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = k\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1 -$$

とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PS}} &= \overrightarrow{\mathrm{OS}} \\ &= k\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \\ &= k(0,\ 2,\ 2) + (1-k)\qquad 0) \\ &= (0,\ 2-k,\ 2k)\end{aligned}$$

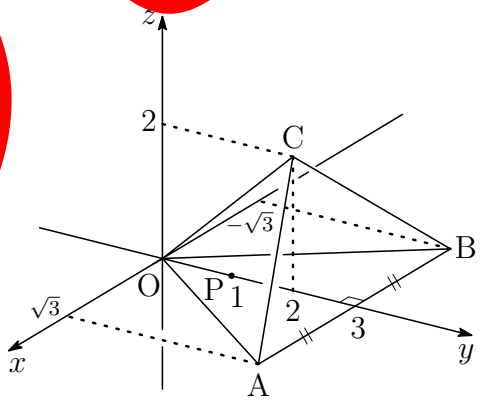
た，$\overrightarrow{\mathrm{P}}$　　るから

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}}\qquad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (0,\ 3,\ 0) - (0,\ 2,\ 2) = (0,\ 1, -2)$$

らを　　1 = 0　　すると

$$0\cdot 0 + \qquad 1 + 2k\cdot(-2)$$　　これを解いて　$k = \frac{2}{5}$

がっ　　$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \left($　　**4**



見本

(3) (1) より　$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$

$$=(0,\ 1,\ 0)+\left(\frac{\sqrt{3}}{5},-\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

(2) より　$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PS}$

$$=(0,\ 1,\ 0)+\left(0,\ \frac{8}{\ },\ \frac{4}{5}\right)$$

$$=\left(0,\ \frac{13}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

四面体 OABC は yz 平面に関して対称
して対称であるから

$$\left(\ ,\ \frac{4}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

△QRS は，QS = RS の二 三角形であ R の中 すると

$$\mathrm{T}\left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

るか

$$\mathrm{ST}=\sqrt{(\ )^2+\left(\frac{4}{5}-\frac{13}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$=\frac{2\sqrt{}}{}$$

し て，求 S の面積は

$$\frac{1}{2}\times \mathrm{QR}\times \frac{\sqrt{3}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{5}=\frac{\mathbf{3\sqrt{30}}}{\mathbf{25}}$$

15.38　(1) $|\vec{a}|=$ $=4$ 3，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$ であるから

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$ °　　$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos 60^\circ$　　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ$

$=4\cdot 3$　　$=4\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=8$　　$=3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=6$

したがっ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$

$$=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2$$

$$=6-6-8+4^2=\mathbf{8}$$

見本

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2=6-4^2=-10$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{c}-|\vec{a}|^2=8-4^2=-8$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|a|^2=3^2-2\cdot6+4^2=13$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|a|^2=4^2-2\cdot8+4^2=16$

上の諸式および (1) の結果を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+q\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$-10+13p+q=0 \quad \cdots①$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

$$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+p\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+q|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=0$$

$$-8+8p+16q=0 \quad \cdots②$$

①，② より　$\boldsymbol{p=\frac{2}{3},\ q=\frac{1}{6}}$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{13\cdot16-8^2}=6$$

結果より　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=\frac{4}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\frac{1}{36}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$=\frac{4}{9}\cdot13+\frac{1}{36}\cdot16+\frac{2}{3}\cdot(-10)+\frac{1}{3}\cdot(-8)+\frac{2}{9}\cdot8=8$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=2\sqrt{2}$

よって，四面体 OABC の体積は　$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\frac{1}{3}\cdot6\cdot2\sqrt{2}=\boldsymbol{4\sqrt{2}}$

15.39　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より　$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$

ここで，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ_1，$\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ_2 とすると

印刷本

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta_1 = |\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta_2$$

ゆえに　　$|\vec{b}|\cos\theta_1 = |\vec{c}|\cos\theta_2$　　$\cdots$①

△OAB と △OAC の面積が等しいから

$$\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta_1 = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{c}|\sin\theta_2$$

ゆえに　　$|\vec{b}|\sin\theta_1 = |\vec{c}|\sin\theta_2$　　$\cdots$②

①，② から

$$(|\vec{b}|\cos\theta_1)^2 + (|\vec{b}|\sin$$
$$|\vec{b}|^2(\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1)$$
$$|\vec{b}|^2$$

したがって　$|\vec{b}| = |\vec{c}|$　　すな

別解　$\triangle OAB = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|$　$\cdot\vec{b})^2}$，　$\triangle O$　$\frac{1}{2}\sqrt{|$　$\cdot\vec{c})^2}$

　　したがって $\triangle OAB = \triangle OAC$　　$= \vec{c}$

　　$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{c}|^2$　　よ

$=\frac{1}{3}($　　であるから

$$\frac{1}{3}\{\vec{a} + (\vec{b}+\vec{c})\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})$$
$$\frac{1}{3}\vec{a}\cdot(\vec{c}-$$　$(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$
$$\frac{1}{3}(\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}$$　$(|\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2)$

に (1)　した $\vec{a}\cdot\vec{b}$　　$|\vec{c}|$ を代入すると

　　$\overrightarrow{BC} = 0$　　す　　$\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{BC}$

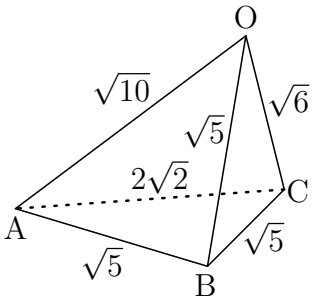
15.40　(1)　$|\overrightarrow{AB}|$　$|\overrightarrow{OB}|$　　であるから

$$|\overrightarrow{AB}|^2 =$$　$- 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2$

これに $|\overrightarrow{AB}|$　　，$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{10}$，$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{5}$
を代入して

$$5 = 5 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + 10$$

ゆえに　　$\boldsymbol{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 5}$



印刷本

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}|$ であるから

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OA}|^2$$

これに $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{6}$, $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{10}$ を代入して

$$8 = 6 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + 10$$

ゆえに $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 4}$

$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}|$ であるから

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 - 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} +$$

これに $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{6}$, $|\overrightarrow{OB}|$

$$5 = 6 - 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + 5$$

ゆえに $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 3}$

(2) $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$ $\quad B - \overrightarrow{OC}$ で から

$$= \overrightarrow{OA}\cdot\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)$$

$$\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{2}{5}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{C}$$

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\Big)$$

$$\overrightarrow{OB}|^2 - \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$

したが (1) の 代入して

$\overrightarrow{CH}$ $\times 5 - 4 =$ えに $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{CH}}$

$\overrightarrow{OB}$ $\times 5 +$ $\quad$ ゆえに $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CH}}$

(3) O A $\overrightarrow{B}$ であるから，(2) の結果より H は C から △OAB に下ろした垂線の る．

△ABO は ∠A 90° の直角二等辺三角形であるから

$$O = \frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5} = \frac{5}{2}$$

印刷本

また

$$|\overrightarrow{CH}|^2 = \left|\frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right|^2$$
$$= \frac{1}{25}|\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{4}{25}|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2$$
$$+ \frac{4}{25}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} - \frac{4}{5}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$
$$= \frac{1}{25}\cdot 10 + \frac{4}{25}\cdot 5 + 6 + \frac{4}{25}\cdot 5 - \frac{2}{5}\cdot\cdots = 4$$

ゆえに　$|\overrightarrow{CH}| = 2$

したがって，求める四面体 OABC の

$$\frac{1}{3} \times \triangle ABO \times |\overrightarrow{CH}| = \frac{1}{3} \times$$

15.41　(1)　$\theta = \angle AOB$ とおくと

$$\cos\theta = \frac{OA^2 + O\cdots}{2\cdot OA\cdot O\cdots}$$
$$\frac{2^2 + 2^2 - 1^2}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{7}{8}$$

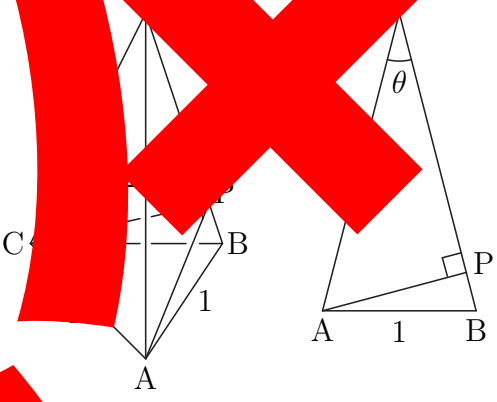
に　$\cdots A\cos\theta$
$\cdots = \frac{7}{4}$

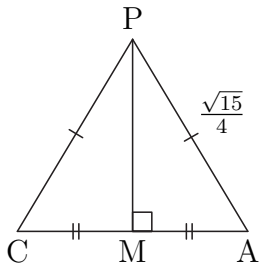
と同じ…の単位…ルは　$\vec{b}$

よ…　$\overrightarrow{OP}$　$\cdots\frac{7}{4}\cdot\frac{\vec{b}}{2} = \frac{7}{8}\vec{b}$

…の結果…

$\cdots OA\sin\theta = 2\cdots\sqrt{\cos^2\theta}$
$\cdots\sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$





△ABP ≡ …であるから　$CP = AP = \frac{\sqrt{15}}{4}$

CA の中点を M とすると　$PM = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{4}$

見本

よって　　$\triangle \mathrm{APC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{PM} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{11}}{8}}$

(3) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \theta$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 2\cdot 2\cos\theta = 2\cdot 2\cdot\frac{7}{8} = \frac{7}{2}$$

Q は線分 OM 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と同じ向きの単位[illegible]を $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{|\vec{c}+\vec{a}|} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{\sqrt{|\vec{c}|^2 + 2\vec{c}[illegible]}} = [illegible] = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{\sqrt{15}}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{e})\vec{e} = \dfrac{1}{15}\left\{\dfrac{7}{8}\vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{a})\right\}(\vec{c}+\vec{a})$

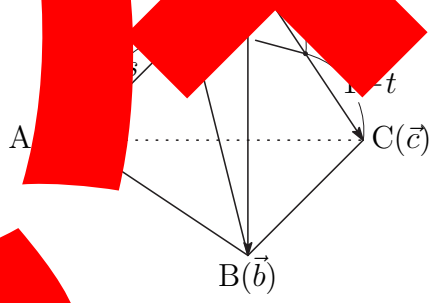
$$= \frac{7}{120}\left(\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\right)(\vec{c}+\vec{a}) = \frac{1}{12}$$

15.42　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\vec{c}$ である[illegible]

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$= t\vec{c} - s\vec{a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$



$\angle\mathrm{BPQ} = 90°$ の[illegible] $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$ であ[illegible]ら，(1) の結果から

$$(\vec{b} - s\vec{a})\cdot(t\vec{c} - s\vec{a}) = 0 \text{ を整理す[illegible]} \quad t\vec{b}\cdot\vec{c} - s\vec{a}\cdot\vec{b} - st\vec{c}\cdot\vec{a} + s^2|\vec{a}|^2 = 0$$

[illegible] $1\cdot 1\cos 60° = \dfrac{1}{2}$，$|\vec{a}| = 1$ であるから

$$\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}st + s^2\cdot 1^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (1-s)t = s(1-2s)$$

このとき，$0 < s < \dfrac{1}{2}$ に注意して　　$\boldsymbol{t = \dfrac{s(1-2s)}{1-s}}$

(3) (2) の結果から

$$t = \frac{s(1-2s)}{1-s} = 2s + 1 - \frac{1}{1-s} = 3 - \left\{2(1-s) + \frac{1}{1-s}\right\} \quad \cdots ①$$

印刷本

$0 < s < \dfrac{1}{2}$ より $1-s > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$2(1-s) + \frac{1}{1-s} \geqq 2\sqrt{2(1-s)\cdot\frac{1}{1-s}} = 2\sqrt{2} \quad \cdots ②$$

上式で等号が成立するとき，$0 < s < \dfrac{1}{2}$ に注意して

$$2(1-s) = \frac{1}{1-s} \quad \text{すなわち} \quad s = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\boldsymbol{2-\sqrt{2}}}{\boldsymbol{2}}$$

このとき，①，② より t の最小値は $\boldsymbol{3-}$

(4) (1)，(3) の結果から

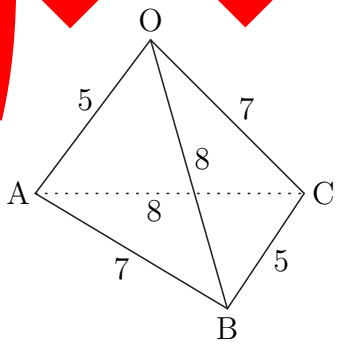
$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= |t\vec{c} - s\vec{a}|^2 \\ &= s^2 - st + t^2 \\ &= \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\quad\sqrt{2}\right) \\ &= \frac{\boldsymbol{27-19\sqrt{2}}}{\boldsymbol{2}} \end{aligned}$$

15.43 (1) 余弦定理

$$\cos\angle\mathrm{AO} = \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}$$

$$\cos\quad = \frac{\mathrm{OC}^2 - \mathrm{BC}^2}{\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}}$$

$$\angle\mathrm{CO} \quad \frac{+\mathrm{OA}^2 - \mathrm{C}}{2\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OA}}$$



がって

$$\quad \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\quad = \frac{1}{2}(\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2)$$
$$= \frac{1}{2}(5^2 + 8^2 - 7^2) = \boldsymbol{20}$$

$$\vec{b}\quad \mathrm{B}\cdot\mathrm{OC}\cos\angle\mathrm{BOC} = \frac{1}{2}(\mathrm{OB}^2 + \mathrm{OC}^2 - \mathrm{BC}^2)$$
$$= \frac{1}{2}(8^2 + 7^2 - 5^2) = \boldsymbol{44}$$

$$c\cdot a = \mathrm{OC}\cdot\mathrm{OA}\cos\angle\mathrm{COA} = \frac{1}{2}(\mathrm{OC}^2 + \mathrm{OA}^2 - \mathrm{CA}^2)$$
$$= \frac{1}{2}(7^2 + 5^2 - 8^2) = \boldsymbol{5}$$

見本

(2) x，y を実数とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}$$

このとき，$\vec{a} \perp \overrightarrow{\mathrm{CH}}$，$\vec{b} \perp \overrightarrow{\mathrm{CH}}$ であるから，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = 0$，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = 0$ より

$$\vec{a}\cdot(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) = 0 \qquad \vec{b}\cdot(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) = 0$$
$$x|\vec{a}|^2 + y\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{c}\cdot\vec{a} = 0 \qquad x\vec{a}\cdot\vec{b} + y|\vec{b}|^2 - \vec{c}\cdot\vec{b} = 0$$

上の 2 式に $|\vec{a}| = 5$，$|\vec{b}| = 8$，および (1) の結果を代入すると

$$25x + 20y - 5 = 0 \qquad 20x + 64y - 44 = 0$$
$$5x + 4y = 1 \qquad 5x + 16y = 11$$

これを解いて　$x = -\dfrac{7}{15}$，$y = \dfrac{5}{6}$

(3) (1),(2) の結果から，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = 0$

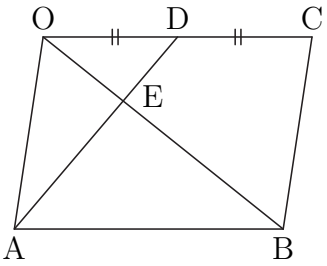
$$\mathrm{CH}^2 = |\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 = \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \left(-\frac{7}{15}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b} - \vec{c}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}$$
$$= -\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = -\vec{c}\cdot\left(-\frac{7}{15}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b} - \vec{c}\right)$$
$$\frac{7}{15}\vec{c}\cdot\vec{a} - \frac{5}{6}\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 = \frac{7}{15}\cdot 4 - \frac{5}{6}\cdot 7^2 = \frac{44}{3}$$

よって　$\mathrm{CH} = \dfrac{2\sqrt{33}}{3}$

(4) 三角形 OAB の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 - (20)^2} = 10\sqrt{3}$$

よって　$V_1 = \dfrac{1}{3}S \times \mathrm{CH} = \dfrac{1}{3}\cdot 10\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{33}}{3} = \dfrac{\mathbf{20\sqrt{11}}}{\mathbf{3}}$



△OAB において，OA = BC = 5，AB = OC であるから，四角形 OABC は平行四辺形である．D は OC の中点，△EDO ∽ △EBA より

$$\mathrm{AE} = \frac{1}{3}\mathrm{OB}$$

ゆえに　$\triangle\mathrm{OAE} = \dfrac{1}{3}S$

また，D から α までの距離は　$\dfrac{1}{2}\mathrm{CH}$　よって　$V_2 = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}V_1 = \dfrac{\mathbf{10\sqrt{11}}}{\mathbf{9}}$

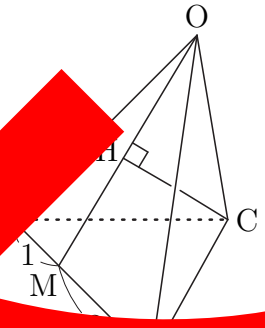
印刷本

補足 (1) の余弦定理により　　$\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$

したがって　$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

15.44　(1) M は，線分 AB を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$$



$\mathrm{OM} : \mathrm{OH} = 1 : s$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{2s}{3}\vec{a} + \frac{}{3}$$

また　　$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{2s}{3}\vec{a} +$

(2)　　$|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 2,\ |\vec{c}| =$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60° \quad = 2,$

$\vec{c}\cdot\vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}|\cos 60° \quad \cdot 1\cdot\dfrac{1}{2} = 1,$

$|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta = 2\cdot 1\cos\theta = 2\cos$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}} = 0$ であるから

$= \{s(2\vec{a}+\vec{b}) - 3\vec{c}$ $\vec{b})$

$|2\vec{a}+\vec{b}|^2 - 3\vec{c}\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$

$|\vec{a}|^2 + 4\vec{c}$ $|\vec{b}|^2) - 6\vec{a}\cdot\vec{c} - 3\vec{b}\cdot\vec{c}$

$s(4\cdot 2^2 + 4\cdot$ $- 6\cdot 1 - 3\cdot 2\cos\theta$

$28s - 6 - 6$

に　　$- 6\cos$　　$\boldsymbol{s = \dfrac{3\cos\theta + 3}{14}}$

(3)　$|\mathrm{BC}| = \sqrt{\dfrac{}{5}}$　　$|\vec{c}-\vec{b}|^2 = \dfrac{17}{5}$ であるから

$|\vec{c}|^2 - \quad - |\vec{b}|^2 = \dfrac{17}{5}$　　ゆえに　$1^2 - 2\cdot 2\cos\theta + 2^2 = \dfrac{17}{5}$

したがって　$\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{2}{5}}$　(2) の結果により　$\boldsymbol{s = \dfrac{3}{10}}$

別解　△OBC に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OB}^2 + \mathrm{OC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}} = \frac{2^2 + 1^2 - \frac{17}{5}}{2\cdot 2\cdot 1} = \frac{2}{5}$$

印刷本

(4) C から平面 OAB に垂線 CD をおろすと，実数 x，y を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = x\vec{a} + y\vec{b} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}$$

とおける．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ より

$$\vec{a} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) = 0 \qquad \text{ゆえに} \qquad x|\vec{a}|^2 + y\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{b} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) = 0 \qquad \text{ゆえに} \qquad x\vec{a} \cdot \vec{b} + y|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{c}$$

(2)，(3) の結果から　　$\vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \cdot$ $= 2 \times \dfrac{2}{5} =$

ゆえに　$4x + 2y = 1$，$2x + 4y =$ 5 て　$x = \dfrac{1}{5}$，$y = \dfrac{1}{10}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \dfrac{1}{5}\vec{a} + \dfrac{1}{10}\vec{b} - \vec{c}$

ここで，(1)，(3) の結果から

上の 2 式から D と H は一

$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \dfrac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot$ に注意し

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 = \overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CH}}$

$= \overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \left(\dfrac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \vec{c} \right) =$ $\cdot \mathrm{OM} - \vec{c} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CH}}$

$\left(\dfrac{1}{5}\vec{a} + \dfrac{1}{10}\vec{b} - \vec{c} \right)$

$= -$ $\dfrac{1}{10}\vec{b} \cdot \vec{c} +$

$\times 1 - \dfrac{1}{10} \times$ $= \dfrac{18}{25}$

に　　$= \sqrt{\dfrac{}{25}}$ $\sqrt{2}$

$\mathrm{B} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} \sin 60^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

よって，求め 積 V は

$$\frac{1}{3}\triangle \mathrm{OAB} \cdot |\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{5} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{5}}$$

15.45　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\vec{b}$ であるから，△CPQ の重心 G の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) = \boldsymbol{\frac{s}{3}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{3}\vec{c}}$$

印刷不可

(2) (a) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\sqrt{15}$, $|\vec{c}|=2$,
$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{3}$, $\angle\mathrm{BOC}=\theta$ $(0<\theta<\pi)$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0$$
$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\frac{\pi}{3}=1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=1$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta=\sqrt{15}\cdot2\cos\theta=$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ が平面 ABC に垂直で

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ で

$$s(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}$$
$$s(|\vec{b}|$$
$$14s$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\mathrm{A}$ $=0$ であるか

$$s(\vec{a}+\vec{b})(\vec{c}-$$
$$s(\vec{a}\cdot\vec{c}-|\vec{a}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$(2\sqrt{15}\cos\theta)$$

② よ $s+3=0$ ゆえに $(2s-1)(7s+3)=0$

$0<$ に注意 $\boldsymbol{s=\frac{1}{2}}$ に $\boldsymbol{\cos\theta=-\frac{\sqrt{15}}{5}}$

(の結果 $=\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b}$ $\vec{b}\cdot\vec{c}=-6$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\frac{1}{6}\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{a}\cdot\vec{c}}$$
$$=\frac{1}{6}\sqrt{1^2+(\sqrt{15})^2+4\cdot2^2+2\cdot0+4\cdot(-6)+4\cdot1}$$
$$=\frac{1}{6}\sqrt{12}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

見本

$$\mathrm{BC} = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = |\vec{c} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{b}|^2}$$
$$= \sqrt{2^2 - 2\cdot(-6) + (\sqrt{15})^2} = \boldsymbol{\sqrt{31}}$$
$$\mathrm{CA} = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = |\vec{a} - \vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2}$$
$$= \sqrt{1^2 - 2\cdot 1 + 2^2} = \sqrt{2}$$
$$\mathrm{AB} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{|\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} +$$
$$\sqrt{(\sqrt{15})^2} \quad = 4$$

△ABC に余弦定理を適用する

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{B}}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} \quad \sqrt{3}\cdot 4$$

よって　$\angle\mathbf{BAC} = \mathbf{5}$

(c) O から平面 ABC に垂 H を引くと $= k\mathrm{O}$ (*) から

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{k}{6}(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}) = \quad \frac{k}{}$$

H は 上の点であるから

$$\frac{k}{} + \frac{k}{6} + \frac{k}{3} = 1 \quad \text{より} \quad k = \frac{3}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} =$ より $= \frac{3}{2}\mathrm{OC}$ $\frac{3}{}\times\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

の面

$\mathrm{C} =$ $\mathrm{B}\sin$ $= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 4\sin\frac{5}{6}\pi = \sqrt{3}$

ある四面体 の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH} = \frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

15.46　(1)　$\mathrm{AB} = \sqrt{\quad)^2 + (t-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 2}$

$\mathrm{BC} = \sqrt{\quad 1)^2 + (1-t)^2 + (t-0)^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 2}$

$\mathrm{CA} = \sqrt{\quad - 0)^2 + (0-1)^2 + (1-t)^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 2}$

ゆえに　$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$．よって，△ABC は正三角形

したがって　$S(t) = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin 60^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2 - t + 1)}$

見本

(2) △ABC の重心 G の座標は

$$\left(\frac{t+1+0}{3},\ \frac{0+t+1}{3},\ \frac{1+0+t}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3}\right)$$

ゆえに　$\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OP}$

$$= \left(\frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3}\right) - \left(\frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t\right)$$

$$= \frac{3-t}{9}(1,\ 1,\ 1)$$

$\overrightarrow{AB} = (1-t,\ t,\ -1)$，$\overrightarrow{AC} = (-$ から

$\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{3-t}{9}(1,\ 1,\ 1)\cdot(1-t,\ t$

$\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{3-t}{9}(1,\ 1,\ 1)\cdot(-$ $t+1+t-$ $= 0$

$t \neq 3$ であるから，$\overrightarrow{PG} \neq$ $\overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{A}$ $\overrightarrow{G}\perp\overrightarrow{A}$

(3) $0 \leqq t$ より，$|\overrightarrow{PG}| = \frac{\sqrt{3}}{9}(3-t)$ である (2)

$$V(t) = \frac{1}{3}S(t)|\overrightarrow{PG}|$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}(t^2 - t + \quad) \frac{\sqrt{3}}{9}(3-t)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{54}(-t^3 + 4t^2 \quad 4t + 3)$$

$V(t)$ する

$(t) =$ $t^2 +$

$t-2)(3t-$

	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
(t)		$-$	0	$+$	
$V(t)$		↘	極小 $\frac{49}{486}$	↗	

増減表から，$V(t)$ は，$\boldsymbol{t = \frac{2}{3}}$ で**最小値** $\boldsymbol{\frac{49}{486}}$ をとる．

見本

15.47 (1) $\mathrm{OA}=\sqrt{2}$, $\mathrm{OC}=1$, $\angle\mathrm{AOC}=45^\circ$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\sqrt{2}\cdot1\cos45^\circ=\mathbf{1}$$

$\mathrm{OB}=\sqrt{2}$, $\mathrm{OC}=1$, $\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$ より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\sqrt{2}\cdot1\cos45^\circ=\mathbf{1}$$

$\mathrm{OA}=\sqrt{2}$, $\mathrm{OB}=\sqrt{2}$, $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\theta=\mathbf{2}$$

(2) $\vec{a}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$, $\vec{b}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ であるから, $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=$ より

$$\vec{a}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})=0$$

$$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=\qquad\qquad-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$ および結果を式に

$$2t\cos\theta-1=0\quad\cdots①,\qquad 2s+2t$$

$$(1-\cos\theta)(s-t)=0$$

$0<\theta<$ $1-\cos\theta\neq0$ より t

これを①に代入

$$=t=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2(1+\cos\theta)}}$$

$=s\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ で

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=s^2|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\cdots\vec{a}\cdot\vec{b}-2s\vec{b}\cdot\vec{c}-2s\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$2s\cdots1+\cdots\theta-2s-2s$$

$$=4s^2(1+\cdots+1$$

$$\frac{1}{1+\cos\theta}-\frac{2}{1+\cos\theta}+1=\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

よって $|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

注意 $\mathrm{AC}=1$, $\mathrm{BC}=$ より, $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}+\mathrm{BC}<2$ であるから

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}>0$$

見本

(3) 四面体 OABC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}S|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\frac{1}{3}T|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| \qquad \text{ゆえに} \qquad \frac{T}{S}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}=\sqrt{\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$S=\sqrt{3}T$ より，$\dfrac{T}{S}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから $\sqrt{\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

これを解いて $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ よって $\boldsymbol{\theta=\pi}$

したがって，△OAB は一辺が [illegible] 角 [illegible].

AB $=\sqrt{2}$，BC $=1$，CA $=1$ である [illegible] $\mathbf{90°}$

15.48 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{b}$ より

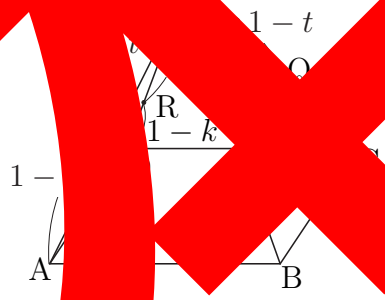
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\vec{a}+(\vec{c}-\vec{b})\\&=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}\end{aligned}$$

△AO[illegible]△ABC であるから

∠ABC $=90°$

て

) $|\vec{a}|$ [illegible] $|\vec{c}|=$ [illegible] $\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cos60°=\dfrac{1}{2}$



$$\overrightarrow{\mathrm{R}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{t}}\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{}}$$
$$=k(\vec{}-\vec{c})-\vec{b}$$
$$=\vec{}+k\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=(1-t)\vec{c}-t\vec{a}$$

ぶ

$$\vec{}\cdot\mathrm{P}=\{\vec{a}-(k+1)\vec{b}+k\vec{c}\}\cdot\{(1-t)\vec{c}-t\vec{a}\}$$
$$=-t)\vec{a}\cdot\vec{c}-kt|\vec{a}|^2-(k+1)(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$+(k+1)t\vec{a}\cdot\vec{b}+k(1-t)|\vec{c}|^2-kt\vec{a}\cdot\vec{c}$$
$$-kt-\frac{1}{2}(k+1)(1-t)+\frac{1}{2}(k+1)t+k(1-t)-0$$
$$=-kt+\frac{1}{2}k+t-\frac{1}{2}=\boldsymbol{(1-k)\left(t-\frac{1}{2}\right)}$$

印刷本

(3) (i) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k\vec{a} - k\vec{b} + k\vec{c}$

$= k\cdot\dfrac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OP}} - k\overrightarrow{\mathrm{OB}} + k\cdot\dfrac{1}{1-t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$= \dfrac{k}{t}\overrightarrow{\mathrm{OP}} - k\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \dfrac{k}{1-t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

点 R が 3 点 P，B，Q の定める平面上にあるとき

$\dfrac{k}{t} - k + \dfrac{k}{1-t} = 1$　ゆえに　$\boldsymbol{k =}$ $\boldsymbol{+ 1}$

(ii) (i) の結果から　$k = \dfrac{1}{t^2 - t +}$ $+ \frac{3}{4}} - 1$

ゆえに，k は $t = \dfrac{1}{2}$ のとき最大値

このとき，(2) の結果から

したがって　$S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BR}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BR}} = \dfrac{}{3}(\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c})$,　$\dfrac{1}{2}(-a$

$\dfrac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2 + 16|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2}$ $c + 2\vec{a}\cdot\vec{c}$

$\sqrt{^2 + 16\cdot 1^2 + 1^2 -}$ $8\cdot\dfrac{1}{2} + 2\cdot 0 = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{}$ $2\vec{a}\cdot\vec{c} +$ $= \dfrac{1}{2}\sqrt{1^2 - 2\cdot 0 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

て　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \dfrac{1}{2}\cdot$ $\dfrac{2}{2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{6}}$

15.49　∠AC，△OA 適用すると

$= \dfrac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{O}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}} = \dfrac{2^2 + 2^2 - 1^2}{2\cdot 2\cdot 2} = \dfrac{7}{8}$

よって　$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2\cdot 2\cdot\dfrac{7}{8} = \boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$

△OAB ≡ ≡ OCA であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \dfrac{7}{2}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\vec{a} = (\vec{c} - \vec{b})\cdot\vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} = \boldsymbol{0}$

見本

(2) (1) の結果から

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$
$$= 2^2 + 2\cdot\frac{7}{2} + 2^2 = 15 \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に平行な単位ベクトルの 1 つを $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}$ とおく

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e} = \left(\frac{\vec{c}\cdot(\vec{a}\quad)}{|\vec{a}+\quad}\right.\quad\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}$$
$$= \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}+\vec{b}|^2}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{2}{}$$

2 点 C，D の中点が H であ$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ $\overrightarrow{\quad}$ $\overrightarrow{\quad}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$= 2\cdot\frac{7}{15}(\vec{a}+\vec{b}) - \vec{c} = \frac{1}{}\quad\mathbf{14}$$

(点直線 AB 上 であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{7}{}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{8}{15}\left(\frac{7}{8}\vec{a}\right) + \frac{7}{15}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{7}{8}\vec{a}$$

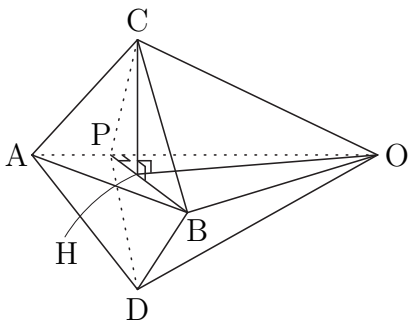
よって $\overrightarrow{\mathrm{P}} = \overrightarrow{\mathrm{O}}$ $\mathrm{B} = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}\vec{\boldsymbol{a}} -$

$\overrightarrow{\mathrm{P}}$ $\left(\quad\right)\cdot\vec{a} = 7$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{7}{8}\cdot 2^2 - \dfrac{7}{2} = \mathbf{0}$

$= |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 8$ $= \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}$

BP よ $\mathrm{OPB} = 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{BP} = \sqrt{\quad - \mathrm{OP}^2}$$
$$= \sqrt{\quad - \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{4}}$$



印刷本

(4) ① より　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{15}$　ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{7}{15}|\vec{a}+\vec{b}|=\dfrac{7}{\sqrt{15}}$

したがって　$\mathrm{CH}=\sqrt{\mathrm{OC}^2-\mathrm{OH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{7}{\sqrt{15}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{11}{15}}$

$$\frac{S}{2}=\triangle\mathrm{BCP}=\frac{1}{2}\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CH}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{4}\times\sqrt{\frac{11}{15}}=\frac{\sqrt{11}}{8}$$

よって　　$S=\dfrac{\sqrt{11}}{4}$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{7}{15}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}$ と

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=\frac{7}{15}(|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\perp\vec{a}$,　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\vec{a}$ であるか

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{OP}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{11}}{4}\times\frac{\sqrt{11}}{48}$$

15.50　(1) 条

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\vec{b}$,

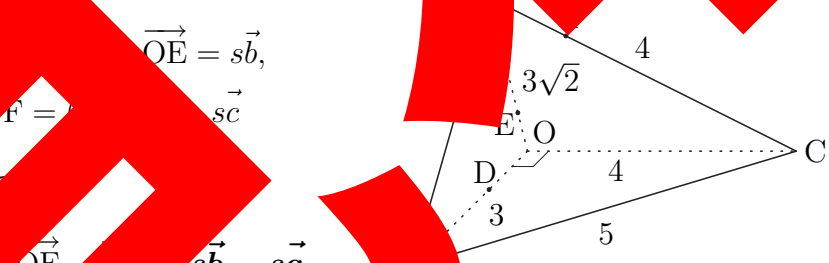
$\mathrm{F}=$　$s\vec{c}$

がって

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=$　$s\vec{b}-s\vec{a}$,

$\mathrm{F}=\overrightarrow{\mathrm{O}}$

$-s)\vec{b}+$



△OBC に余弦定理を適用すると

$$\cos\beta=\frac{\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}}=\frac{(3\sqrt{2})^2+4^2-4^2}{2\cdot3\sqrt{2}\cdot4}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

よって　$|\vec{b}||\vec{c}|\cos\beta=3\sqrt{2}\times4\times\dfrac{3\sqrt{2}}{8}=\mathbf{9}$

(2) $\alpha=\angle\mathrm{AOB}$ とし，△AOB に余弦定理を適用すると

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}=\frac{3^2+(3\sqrt{2})^2-3^2}{2\cdot3\cdot3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

見本

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = 3\times 3\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 9$

$\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2=\mathrm{AC}^2$ であるから　$\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$　ゆえに　$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

$t=\dfrac{9}{16}$ とおくと，$\vec{h}=\vec{a}-t\vec{b}+t\vec{c}$ であるから

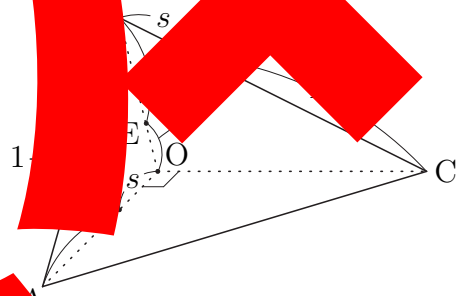
$$\begin{aligned}|\vec{h}|^2 &= |\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+t^2|\vec{c}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}-2t^2\vec{b}\cdot\vec{c}+2t\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= 3^2+t^2\cdot(3\sqrt{2})^2+t^2\cdot 4^2-2t\cdot 9-2\cdot\\ &= 16t^2-18t+9=(16t-9)\\ &= -9\times\frac{9}{16}+9=\end{aligned}$$

よって　　$\mathrm{OH}=|\vec{h}|=$ **3**

(3) $\vec{h}=\vec{a}+t(\vec{c}-\vec{b})$ より　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

条件より　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{BF}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{O}}=\dfrac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$,

$=\dfrac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$



がっ

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{O}} &= \frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\\ &= \frac{1}{s}(\overrightarrow{}\overrightarrow{})\\ &= \frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\left(\frac{1}{s}\overrightarrow{}-\frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)\\ &= \frac{1}{s^2}\overrightarrow{}+t\overrightarrow{\mathrm{OF}}\end{aligned}$$

上にあるか

$\dfrac{1}{s}+\dfrac{t}{s}=1$　整理すると　$s^2-st-s+t=0$

ゆえに　$(s-$　$-t)=0$　$s\neq 1$ であるから　$s=t=\boldsymbol{\dfrac{9}{16}}$

印刷本

(4) (1)，(2) で得られた結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{h} &= (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{a}-t\vec{b}+t\vec{c})\\ &= -|\vec{a}|^2 - t|\vec{b}|^2 + (t+1)\vec{a}\cdot\vec{b} + t\vec{b}\cdot\vec{c} - t\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= -3^2 - t\cdot(3\sqrt{2})^2 + (t+1)\cdot 9 + t\cdot 9 - t\cdot 0 = 0\\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{h} &= (\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{a}-t\vec{b}+t\vec{c})\\ &= -|\vec{a}|^2 + t|\vec{c}|^2 + t\vec{a}\cdot\vec{b} - t\vec{b}\cdot\vec{c} + (1-\\ &= -3^2 + t\cdot 4^2 + \quad - t\cdot 9 + (1-\\ &= 16t - 9 = 0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\vec{h}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\vec{h}$ であるから，OH は

したがって，四面体 OABC の体積

$$V_0 = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\times \quad 3\times \quad \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

よって　　$V = (1-s)V_0 = \left(1-\dfrac{9}{16}\right)\times \quad = \dfrac{21}{}$

別解 O

面 OAC に垂直な直線を l と

のなす角を γ とすると

$$\cos^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$$

(1)，(

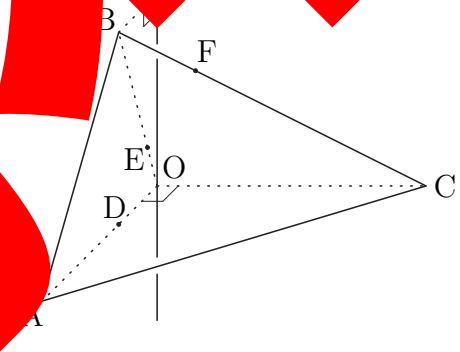
入すると

$$\left(\frac{1}{}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{}}{}\right)^2 \cos^2\gamma = 1$$

に

$$\gamma| = \frac{}{4\sqrt{2}}$$

線 BT を引くと



$$\mathrm{T} = \mathrm{OB}|\cos\gamma| = 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

四面体 OAB

積を V_0 とすると

$$= \frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAC}\times\mathrm{OT} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\times\frac{3\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

よって　　$V = (1-s)V_0 = \left(1-\dfrac{9}{16}\right)\times\dfrac{3\sqrt{7}}{2} = \dfrac{\mathbf{21\sqrt{7}}}{\mathbf{32}}$

見本

15.51 (1) AB の中点 D は

$$\left(\frac{a+(-a)}{2},\ \frac{-a+a}{2},\ \frac{b+b}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (0,\ 0,\ b)$$

ゆえに $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = (a,\ a, -b) - (0,\ 0,\ b) = (a,\ a, -2b)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-a,\ a,\ b) - (a, -a,\ b) = (-2a,\ 2a,\ 0)$

$\overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{OD} = -(0,\ 0,\ b) = (0,\ 0, -b)$

したがって $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} = a\cdot(-2a) + a\cdot 2a + (-2b)\cdot 0$

$\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{AB} = 0\cdot(-2a) + 0\cdot 2a + (-b)\cdot 0 = 0$

よって $\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DO}\perp\overrightarrow{AB}$

DC⊥AB より，$a > 0$ に注意して

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}AB\cdot DC$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-2a)^2 + (2a)^2}\sqrt{a^2 + a^2 + (-2b)^2}$$
$$= \boldsymbol{2a\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

(2) の結果と $a > 0$ に注意して

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DO}}{|\overrightarrow{DC}||\overrightarrow{DO}|} = \frac{2b^2}{\sqrt{2a^2 + 4b^2}\times b} = \frac{\sqrt{2}\,b}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

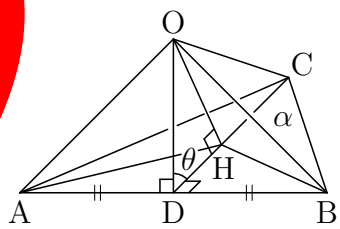
$0 \leqq \theta \leqq \pi$ であるから $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \boldsymbol{\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}}$

DO⊥AB であるから OH = OB

また，△OAD ≡ △OBD より AH = BH，△HAD ≡ △HBD

AH = BH から，H は線分 AB の中点 D にある．

よって $OH = OD\sin\theta = b\times\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} = \boldsymbol{\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}}$



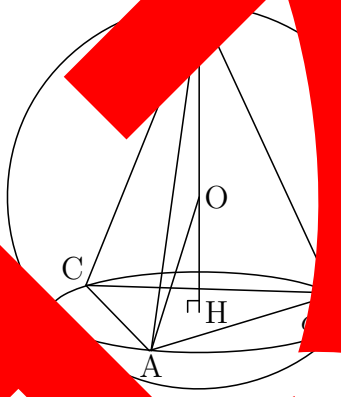
見本

(3) 直線 OH と球面 S の交点のうち，平面 α に関して，O と同じ側にある点を P とするとき，四面体 ABCP の体積は最大となる．このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{PH} &= \mathrm{PO} + \mathrm{OH} \\ &= \mathrm{OA} + \mathrm{OH} \\ &= \sqrt{2a^2+b^2} + \frac{ab}{\sqrt{a^2+}}\end{aligned}$$

よって，求める最大値は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{PH} &= \frac{1}{3}\times 2a\sqrt{\quad}\left(\qquad\qquad + \frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}\right) \\ &= \frac{\boldsymbol{2a}}{\boldsymbol{3}}\left(\sqrt{(\boldsymbol{a^2}+\boldsymbol{b^2}}\right.\end{aligned}$$



印刷本

2 $\vec{c}$ …，$\vec{c}=$ …$e\perp\vec{a}$，…$|e|=1$ と…，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{e}$ を用いて

… $+y\vec{c}+z\vec{e}$ …y，z は実数)

と… 条…り　$x=$ …　なわち　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}$

したが…，…条件により

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{P}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}z\vec{e}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{O}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}\right)=\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}z\vec{e}$$

α，β，γ を実数とし，$\alpha\vec{a}+\beta\vec{c}+\gamma\vec{e}$ が，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ に垂直であるとき

$$\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\beta+\frac{2}{3}z\gamma=0,\quad \frac{1}{8}\alpha+\frac{3}{4}\beta+\frac{1}{2}z\gamma=0$$

したがって　　$\alpha : \beta : \gamma = 2z : z : -2$

ゆえに，直線 PQ の方向ベクトルを $\vec{v} = 2z\vec{a} + z\vec{c} - 2\vec{e}$ とすると，直線 PQ は，媒介変数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\vec{v} &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + z\vec{e} + t(2z\vec{a} + z\vec{c} - 2\vec{e}) \\ &= \left(\frac{1}{4} + 2zt\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2} + zt\right)\vec{c} + (\quad t)\vec{e}\end{aligned}$$

Q は BC 上の点であるから，上式より

$$\frac{1}{2} + zt = 1, \quad z - 2t = 0 \quad \text{すなわ} \quad \pm\frac{1}{2} \quad \text{(複号同順)}$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{5}{4}\vec{a} + \vec{c}$,　　$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{a} + \vec{c}$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$

よって　　$\mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = \frac{1}{4} : \frac{5}{4}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ $\left(\frac{1}{2}\vec{c} + z\vec{e}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + z\vec{e}\right)$,

$$\mathrm{OP} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} \quad \boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{4}}$$

3　(1) 与えられた　により　$\overrightarrow{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}$　$\overrightarrow{\mathrm{M}} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$,　$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3}$

3 点 I　N を通　上の位置ベ　は，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} + \quad tL \quad + s\left(\quad - \frac{1}{2}\vec{c}\right) + t\left(\frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3} - \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}t\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2} - \frac{t}{6}\right)\vec{c}$$

この平面と直　の交点 D の位置ベクトルは

$$\frac{s}{2} + \quad 0, \quad \frac{1}{2} - \frac{s}{2} - \frac{t}{6} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{4}{3}, \quad t = -1$$

したがって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{2}{3}\vec{a}}$

(2) 与えられた条件により　　$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{2}$,　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1$

見本

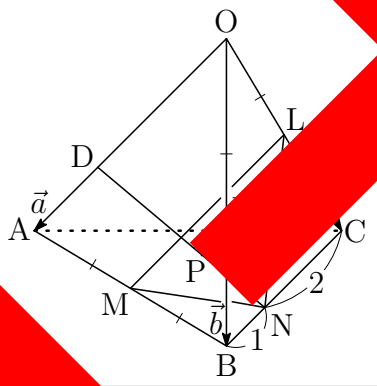
$\overrightarrow{\mathrm{DK}} = \dfrac{1}{2}\vec{b} - \dfrac{2}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{DN}} = \dfrac{2}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c} - \dfrac{2}{3}\vec{a}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}} = \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{3}|\vec{b}|^2 - \frac{7}{9}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c} - \frac{2}{9}\vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{13}{18}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|^2 = \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{c}|^2 - \frac{8}{9}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{b}\cdot\vec{c} - \frac{4}{9}\vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{10}{9}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \frac{(\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}})}{|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{DN}} = \frac{13}{20}\left(\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}\right)$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{DP}} =$ **$\dfrac{13}{30}\vec{b}$**



2つ… $\overrightarrow{\mathrm{DN}}$ のなす角を θ …と　$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DK}}||\overrightarrow{\mathrm{DN}}|}$

…がっ… $\cos\theta\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DN}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}})}{|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{DN}}$

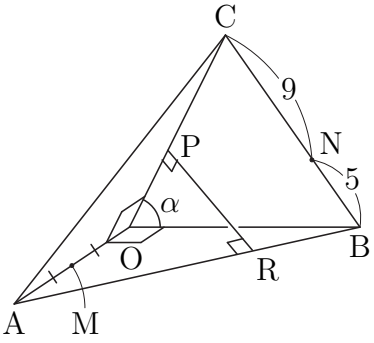
15. …$|\vec{b}| =$ …

…$= \vec{c}\cdot\vec{a}$ …$= |\vec{b}|$ …

…て

…$\overrightarrow{\mathrm{OP}} =$ …$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$

とおく．PR …が最小であるとき，
OC⊥PR，A …であるから
$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} =$ …



$\vec{c}\cdot\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b} - s\vec{c}\} = 0$　ゆえに　$tx - s = 0$　$\cdots$①

見本

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=0$ より

$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-s\vec{c}\}=0$　ゆえに　$-3sx+4t-1=0$　$\cdots$②

①，② を解いて　$s=\dfrac{x}{4-3x^2}$，$t=\dfrac{1}{4-3x^2}$

$0<x<1$ であるから，$0<s<1$，$0<t<1$ となり，このとき，P，R はそれぞれ線分 OC，AB 上にある．

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(1-t)\vec{a}+\quad s\vec{c}=\vec{a}+t\quad C$$

であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=($$
$$=\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\quad sc$$
$$=1\quad\quad\frac{}{4-}\quad=$$

よって　$\mathbf{PR}=\sqrt{\dfrac{\mathbf{3}-}{\mathbf{4-3}x^{\mathbf{2}}}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{C}}\quad(1-t)\vec{a}+t\vec{b},\qquad s=\dfrac{}{4-}\quad t=\dfrac{}{-3x^2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{}\quad+\dfrac{5}{14}\vec{c}$,

線　上の　トルは，実数 α を用いて $(0\leqq\alpha\leqq1)$

$)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\quad=(1-\alpha)\quad(1-t)\vec{a}+\alpha t\vec{b}\quad\cdots$③

線分　上の点　クトルは，実　を用いて $(0\leqq\beta\leqq1)$

$$(\quad\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\quad\frac{1}{}\quad+\frac{9}{14}\beta\vec{b}+\frac{5}{14}\beta\vec{c}\quad\cdots④$$

a　立であるから，線分 PR と線分 MN の交点において，③，④ より，　が成り立つ．

$$\alpha(1-t)=\quad\beta)\cdots⑤,\quad\alpha t=\frac{9}{14}\beta\cdots⑥,\quad(1-\alpha)s=\frac{5}{14}\beta\cdots⑦$$

①，⑥，⑦　　$\alpha=\dfrac{9x}{9x+5}$，$\beta=\dfrac{14x}{(9x+5)(4-3x^2)}$

これらを ⑤ に代入すると

$$\frac{9x}{9x+5}\left(1-\frac{1}{4-3x^2}\right)=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{14x}{(9x+5)(4-3x^2)}\right\}$$

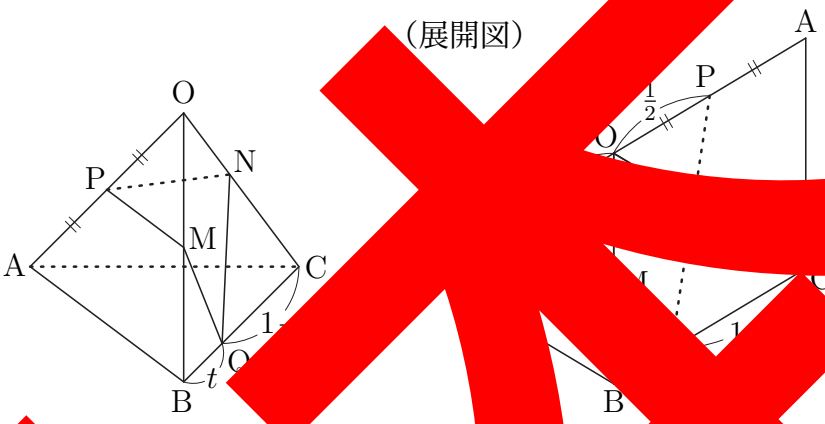
印刷本

整理すると　　$27x^3 - 15x^2 - 32x + 20 = 0$

ゆえに　　$(x-1)(3x-2)(9x+10) = 0$

$x = \cos\alpha$ $(0° < \alpha < 90°)$ より，$0 < x < 1$ であるから　　$\boldsymbol{x = \dfrac{2}{3}}$

15.55　(1) 正四面体 OABC(左図) において PM + MQ が最小となる OB 上の点 M は，その展開図 (右図) において，線分 PQ と OB の交点である．また，点 N は展開図において，線分 PQ と OC の交点である．



展開図において，△OPM ∽ △BQM，△CQN ∽ △[illegible] から，

[illegible]比から

$$\mathrm{OM} : \mathrm{MB} = \frac{1}{2} : t, \quad \mathrm{ON} : [\text{illegible}] = \frac{1}{2} : (1-t)$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = [\text{illegible}] = \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1+2t}}\vec{\boldsymbol{b}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3-2t}}\vec{\boldsymbol{c}}$

(2) [illegible]示し[illegible]比か

$$\frac{[\text{illegible}]\mathrm{N}}{\triangle\mathrm{OBC}} = [\text{illegible}] \times \frac{1}{3-2t} = \frac{1}{[\text{illegible}](3-2t)}$$

$$\frac{\triangle\mathrm{BC}[\text{illegible}]}{\triangle[\text{illegible}]} = \frac{[\text{illegible}]\mathrm{O}}{\mathrm{OB}} = [\text{illegible}] = \frac{2t^2}{1+2t}$$

$$[\text{illegible}] = \frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{OC}} \times \frac{[\text{illegible}]}{\mathrm{BC}} = \frac{1-t}{\frac{1}{2}+(1-t)} \times (1-t) = \frac{2(1-t)^2}{3-2t}$$

$\triangle\mathrm{OMN} + \triangle[\text{illegible}] - \triangle\mathrm{CQN} = \triangle\mathrm{OBC} - \triangle\mathrm{QMN}$ であるから，上の 3 式の辺々を加える

$$1 - \frac{[\text{illegible}]\mathrm{MN}}{[\text{illegible}]\mathrm{OBC}} = \frac{1}{(1+2t)(3-2t)} + \frac{2t^2}{1+2t} + \frac{2(1-t)^2}{3-2t}$$

$$= \frac{1+2t^2(3-2t)+2(1-t)^2(1+2t)}{(1+2t)(3-2t)}$$

$$= \frac{3}{(1+2t)(3-2t)}$$

見本

$\triangle \mathrm{OBC} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ であるから

$$\triangle \mathrm{QMN} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1 - \frac{3}{(1+2t)(3-2t)}\right\} \quad \cdots ①$$
$$= \frac{\boldsymbol{\sqrt{3}t(1-t)}}{\boldsymbol{(1+2t)(3-2t)}}$$

(3) ① から

$$\triangle \mathrm{QMN} = \frac{\sqrt{}}{4}\left\{\right.$$

$0 < t < 1$ であるから，$\boldsymbol{t = \dfrac{1}{2}}$ の

15.56 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = ($ であ ら

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 9, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} =$$

した

$$\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\{k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1 \quad \overrightarrow{\mathrm{B}}\}$$
$$= k|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + (1 - \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$k\cdot 3 + (1-k)\cdot(-3) = 6k - 3$$
$$\overrightarrow{\mathrm{B}}\cdot\mathrm{O} \quad \cdot\{k\overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}$$
$$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \quad)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$
$$k\cdot(-3) + (\quad 9 = -12k + 9$$

D 内 り，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \geqq 0$ であるから

$$\begin{cases} 6k - 3 \geqq 0 \\ -12k + 9 \geqq 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq k \leqq \frac{3}{4}}$$

(2) D 内の点 P に て，s，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots ①$$

印刷本

とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ &= s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= s\cdot 3+t\cdot(-3)=3(s-t)\\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\ &= s\cdot(\quad)+t\cdot 9=3(\quad)\end{aligned}$$

与えられた条件により，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq$ $\quad$ であるから

$$s-t=$$

とおくと，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$．ま

$$s=\quad\beta,\quad t=\quad\frac{1}{2}\beta$$

② を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\quad\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

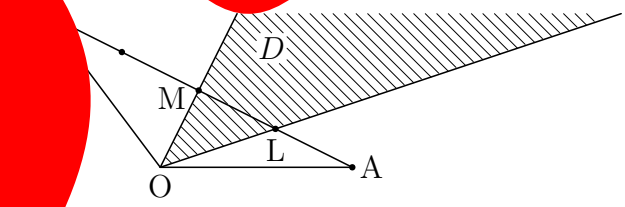
$$\frac{1}{}\alpha(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\quad+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$$=\quad\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}+\beta\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

線分 : 3 に る点を L，中 M とすると

$$2\alpha\overrightarrow{\mathrm{OL}}\qquad(\alpha\geqq 0,\ \beta\geqq 0)$$

す領域 D 斜線部分で，境界線を含む．



$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}=\frac{1}{4}(-1,\ 4,\ 1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=\frac{1}{2}(1,\ 2,-1)$$

印刷本

$\overrightarrow{\ell}=(-1,\ 4,\ 1)$，$\overrightarrow{m}=(1,\ 2,-1)$ とおくと

$$|\overrightarrow{\ell}|=\sqrt{18},\quad |\overrightarrow{m}|=\sqrt{6}\quad \text{ゆえに}\quad |\overrightarrow{\ell}|:|\overrightarrow{m}|=\sqrt{3}:1$$

ここで，D 上の点 H を

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\ell}+\sqrt{3}\overrightarrow{m}=(-1+\sqrt{3},\ 4+2\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$$

とすると，H は ∠LOM の二等分線上にある．また

$$|\overrightarrow{m}|^2\overrightarrow{\ell}-(\overrightarrow{\ell}\cdot\overrightarrow{m})\overrightarrow{m}=6(-\quad)-6(1\quad)=12(-1,\ 1,\ 1)$$

は平面 OLM に平行で，$\overrightarrow{m}$ に垂直．単位ベクトルの 1 つを

とおく．

H から直線 OM に下ろした垂線の長さは

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\quad 2\sqrt{3}$$

る点 C の位置ベクトルは　の向きであ

とに

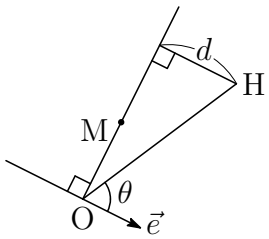
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad =\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\sqrt{3},\ 4+2\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$$

$$=\left(-\quad \frac{\sqrt{6}}{2},\ 2\sqrt{\quad}=\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)$$

求め

$$\left(\frac{-\sqrt{\quad}}{2}\quad \sqrt{2}+\sqrt{6},\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)$$

補足 平面 HOM 上のベ　で，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{e}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角を θ とすると，H から直線 OM に　した垂線の長さ d は



$$=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}||\cos\theta|$$

また　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{e}=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}||\vec{e}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\cos\theta$

上の 2 式より　$d=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{e}|$

見本

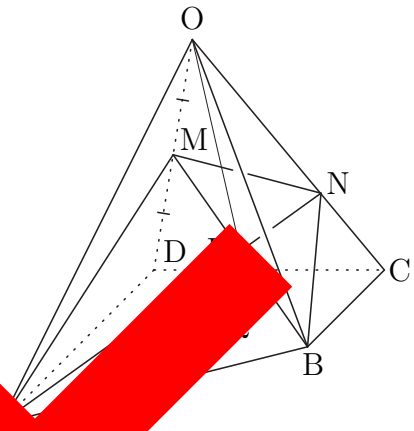
15.57 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \vec{a} + 2(\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}$$



(2) 3 点 A，B，M を通る平面上の位置ベ

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \qquad \gamma - 1$$

$$= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\left(\frac{1}{2}\vec{a} -$$

$$= \left(\alpha + \frac{1}{2}\gamma\right)\vec{a} + (\beta \quad \gamma)\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

こ 線 OC の交点が N であるか

$$0 \quad \cdots ②, \quad \beta - \gamma = \quad ③, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \gamma\vec{c}$$

①, ③ を解 $= -\dfrac{1}{3}$, $\beta = \gamma$ 3 よって $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{2}{3}\vec{c}}$

(3) 直線 B である

$$= (1 \quad + t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right. \quad \frac{1}{2}t\vec{a} + (1-2t)\vec{b} + t\vec{c}$$

独立であり OAC 上の点であるから

$1 - 2t$ これを解いて $t = \dfrac{1}{2}$ よって $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{k}{4}\vec{a} + \dfrac{k}{2}\vec{c}$

Q は，平面 上の点であるから

$$\frac{k}{4} + \frac{k}{2} = 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{4}{3}$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ よって $\boldsymbol{\mathrm{OP} : \mathrm{PQ} = 3 : 1}$

印刷不可

15.58 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OE}} + t\overrightarrow{\mathrm{OM}} = (1-t)(\vec{a}+\vec{d}) + t\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}\right)$

$$= \left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{t}\right)\vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{c}} + (\mathbf{1}-\boldsymbol{t})\vec{\boldsymbol{d}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OL}} + s\overrightarrow{\mathrm{ON}} = (1-s)\left(\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}\right) + s\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)$

$$= (\mathbf{1}-\boldsymbol{s})\vec{\boldsymbol{a}} + \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{s}\right)\vec{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{s}\vec{\boldsymbol{d}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ とすると，(1)，(2) よ

$$1-\frac{1}{2}t = 1-s, \quad t =$$

第 1 式，第 2 式より　$s = \frac{1}{3}$, t

これは第 3 式もみたす．し　　，線　　と　　は

よって　　$\mathrm{EH} : \mathrm{HM} = t$　　$= \frac{2}{3} : 1 -$　　$= \mathbf{2 : 1}$

15.59 (1) 正方　　C において $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ である

$$\overrightarrow{\quad} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

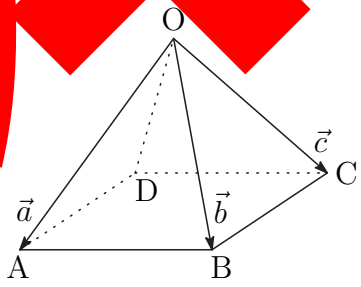
$$= \quad \vec{b})$$

$$=$$

(　　AB,　　は，　　さが 1　　角

形で

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \quad ^\circ = \mathbf{1}$$



　　の正方形の　　さが $\sqrt{2}$ であるから，

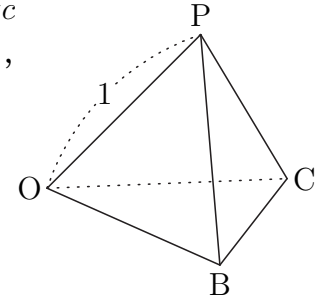
△　　　　$\angle\mathrm{OAC} = 90^\circ$．よって　$\vec{a}\cdot\vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}|\cos 90^\circ = \mathbf{0}$

(3) 点 P の位置ベ　　ンを $\vec{p}$ とし，$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ とおく．△O　　辺が 1 の正三角形であるから，

$\vec{b}\cdot\vec{p} = 1\cdot 1\cos$　　$\frac{1}{2}$ より，(2) の結果を用いて

$$\vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}) = \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}$$

ゆえに　　$x + 2y + z = 1 \quad \cdots ①$



白本

△OCP についても同様に，$\vec{c}\cdot\vec{p}=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\vec{c}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=\frac{1}{2}y+z=\frac{1}{2}\quad\text{ゆえに}\quad y+2z=1\quad\cdots②$$

$|\vec{p}|=1$ であるから，$|\vec{p}|^2=1$ より

$$|x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}|^2=x^2+y^2+z^2+xy+y\cdots$$

①，② から，$x=3z-1$，$y=1-2z$ となる．これを式に代入して

$$(3z-1)^2+(1-2z)^2+z\cdots+(1-2z)z=1$$

これを整理すると　$z(3z-2)=0$

したがって　$(x,\ y,\ z)=(-1,\cdots$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{a}+\cdots\quad\mathrm{P}=\vec{a}-\cdots\dfrac{2}{3}\vec{c}$

15.60　(1) 条件より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{b}$,　$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$,　$\overrightarrow{\mathrm{AZ}}=\cdots$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{PX}}=\vec{a}+\left(\dfrac{3}{4}-t\right)\vec{b}$,　$\overrightarrow{\mathrm{PZ}}=\cdots\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\vec{b}$

Y は …PXZ …ら，α，β を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\cdots+\beta\overrightarrow{\mathrm{PZ}}\cdots①$$

$$=\cdots\vec{a}+\left(\frac{3}{4}-t\right)\cdots\beta\left\{\vec{c}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}\right\}$$

…，Y は …H 上に…　a と $\vec{c}$ の係数に注意すると，$\alpha=1$，

…したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AY}}=\vec{a}+\vec{c}+\left(\frac{5}{4}-t\right)\vec{b}\quad\cdots②$$

よって　$\cdots=\overrightarrow{\mathrm{AY}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$$=\vec{a}+\vec{c}+\left(\frac{5}{4}-t\right)\vec{b}-t\vec{b}$$

$$=\vec{a}+\left(\frac{5}{4}-2t\right)\vec{b}+\vec{c}$$

印刷本

(2) Y が辺 GH 上にあるとき，② から

$$0 \leqq \frac{5}{4} - t \leqq 1 \quad \text{これを } 0 < t < 1 \text{ に注意して解くと} \quad \boldsymbol{\frac{1}{4} \leqq t < 1}$$

(3) ① に $\alpha = 1$，$\beta = 1$ を代入すると　　$\overrightarrow{\mathrm{PY}} = \overrightarrow{\mathrm{PX}} + \overrightarrow{\mathrm{PZ}}$

したがって，四角形 PXYZ は平行四辺形である．
これがひし形であるためには，$|\overrightarrow{\mathrm{PX}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PZ}}|^2$ であ
ここで，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ $= \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ から

$$1 + \left(\frac{3}{4} - t\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{2} -\right)^2 \text{ 解いて} \quad \boldsymbol{t = \frac{5}{8}}$$

別解 四角形 PXYZ は平行四辺形であ
$\overrightarrow{\mathrm{PY}} \perp \overrightarrow{\mathrm{XZ}}$ である．したがって

$$\left\{\vec{a} + \left(\frac{5}{4}\right. + \vec{c}\right\} \cdot \left(-\frac{1}{4}\vec{b} + \right)$$

ゆ $\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4} - 2t\right) + 1 = 0$　これ $\frac{5}{8}$

15.61 $\overrightarrow{\mathrm{C}} = \vec{c}$ $\vec{c} + \vec{a}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \vec{b} +}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{AL}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{CN}}}{3} = \frac{(\vec{a}+\vec{b}) + (\vec{c}+\vec{a}) + (\vec{b}+\vec{c})}{3}$

$= \boldsymbol{\frac{2}{3}}$ $+ \vec{c})$

(1) 結果

$= \mathrm{AC}$

$= \frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}) - (\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{3}(-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CG}}$ より $\cdot\overrightarrow{\mathrm{CG}} = 0$ であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ に注意して

$\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+$ $-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}) = 0$　ゆえに　$-|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + 2|\vec{c}|^2 = 0$

これに $|\vec{a}$ $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ を代入すると

$-2^2 - (\sqrt{2})^2 + 2|\vec{c}|^2 = 0$　ゆえに　$|\vec{c}|^2 = 3$　よって　$\mathrm{AK} = |\vec{c}| = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

見本

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CL}} = -\vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{CN}} = -\vec{a} + \vec{c}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{CL}}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 2 + 3 = 5$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{CN}}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 = 4 + 3 = 7$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}} = |\vec{c}|^2 = 3$$

よって $\quad \triangle\mathrm{CLN} = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CL}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{CN}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{CL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}})^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 7 - 3^2} = \mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{26}}$$

15.62 (1) D は線分 AP を 1 : 3 に内分するから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}}{1+3} = \mathbf{\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OP}}$$

E は線分 CP の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}}{2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \mathbf{\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \{\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$$= \mathbf{(1-t)\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}}$$

(3) OP $=1$ であり，$\angle\mathrm{POA} = \dfrac{1}{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \dfrac{1}{2}\cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\angle\mathrm{POA} = 1\cdot\dfrac{1}{2} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

同様に $\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 1$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ $\quad$ D$\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であるから

$$4\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 3(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\}$$
$$= 3\{(1-t)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} - (t+2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 0 \quad \cdots ①$$

$$2\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\}$$
$$= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 0 \quad \cdots ②$$

見本

①，② より　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{3}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\dfrac{4}{3}$　すなわち　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

15.63　(1) $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\vec{c}-t\,\vec{d}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FM}}=\vec{a}+\vec{d}+\left(-\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\left(\vec{c}-t\,\vec{d}\right)+\left(\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)=\boldsymbol{\vec{a}+}\cdots\boldsymbol{(1-t)\vec{d}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}})}{|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ により，$\vec{a}\cdots\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}\cdots$ 考慮して

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=-\overrightarrow{\mathrm{PC}}=-\left(\vec{c}-\right.$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\left(-\vec{c}+t\vec{d}\right)$

$=\dfrac{1}{2}|\vec{c}|^2\cdots=\dfrac{1}{2}\cdot2^2\cdots=$

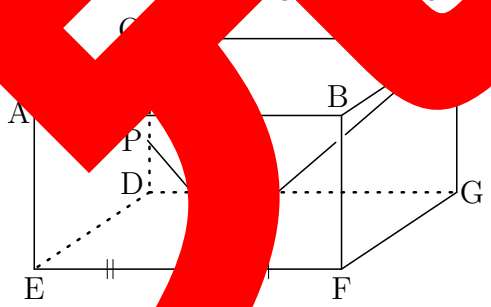
$|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\left(\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{c}\cdots\right)\left(\vec{a}-\right.$

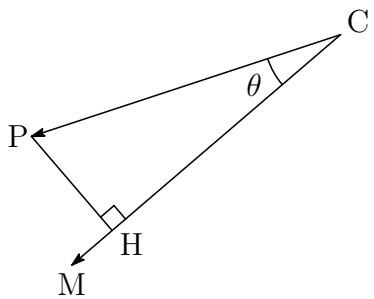
$=|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{4}|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2=\cdots=3$

したが $\dfrac{t+2}{3}\left(\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)$

$=\dfrac{2+}{\cdots}\left(\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)\cdots\left(-\vec{c}+t\vec{d}\right)$

$\boldsymbol{\dfrac{4-t}{6}\vec{c}\cdots t\vec{d}}$





印刷本

補足

2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ のなす角を θ とすると　$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}||\overrightarrow{\mathrm{CM}}|}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = |\overrightarrow{\mathrm{CP}}|\cos\theta\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}})}{|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CM}}$

(3) (2) の結果を利用すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PH}}|^2$$

$$=t^2|\vec{d}|^2 + \left(\frac{2+t}{2}\right)^2|\vec{a}|^2 + \left(\frac{2-2t}{3}\right)^2|\vec{d}|^2$$

$$=t^2\cdot1^2 + \left(\frac{2+t}{3}\right)^2\cdot1^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$=\frac{5}{3}t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{8}{3}$$

$$=\frac{5}{3}\left(t-\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{12}{5}\quad(0 \leqq t \leqq 1)$$

よって求める最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{12}{5}}$

15.64　(1) $\mathrm{PQ} = \dfrac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sqrt{1-\cos^2\theta} = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ES}} = \vec{a} + \dfrac{2-x}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{ET}} = \dfrac{x}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2 = |\vec{a}|^2 + \left(\frac{2-x}{2}\right)^2|\vec{c}|^2 = 2^2 + \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 2^2 = \boldsymbol{x^2 - 2x + 8}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 2^2 + 2^2 + 2^2 = \boldsymbol{x^2 + 8}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}} = \frac{x}{2}\cdot\frac{2-x}{2}|\vec{a}|^2 + \frac{x}{2}|\vec{b}|^2 + \frac{2-x}{2}|\vec{c}|^2 = \frac{x}{2}\cdot\frac{2-x}{2}\cdot2^2 + \frac{x}{2}\cdot2^2 + \frac{2-x}{2}\cdot2^2 = \boldsymbol{-x^2 + 4x + 4}$$

(3) (2) の結果を (1) に代入すると

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2+8)\{(2-x)^2+8\} - (-x^2+4x+4)^2}$$

印刷本

ここで，$y=2-x$ とおくと，$x+y=2$ であるから

$$\begin{aligned}(x^2+8)\{(2-x)^2+8\}-8^2&=(x^2+8)(y^2+8)-8^2\\&=x^2y^2+8(x^2+y^2)\\&=x^2y^2+8\{(x+y)^2-2xy\}\\&=x^2y^2+8(4-2xy)=x^2y^2-16xy+32\\&=(8-xy)^2-32=\{8-(x^2-2x)\}^2-32\\&=\{(x-1)^2+7\}^2\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\{(x-1)^2+7\}^2}}$

(4) $0\leqq x\leqq 2$ であるから，(3) の結果から

$\boldsymbol{x=0,\ 2}$ のとき最大値 $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ を

15.65　(1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}$

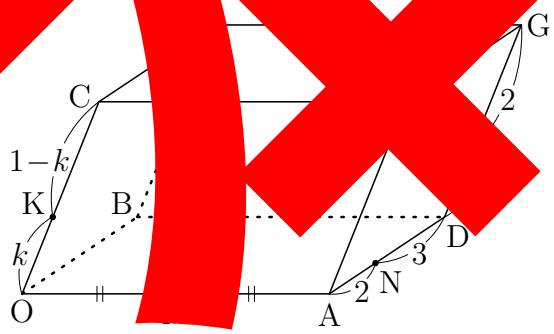
$$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

$\overrightarrow{\mathrm{ML}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DL}}$

$$=\frac{1}{2}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{MK}}=$

$$=\frac{1}{2}\vec{a}+$$



点 M，　を通る　と α とす　上の点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は，

(1) の　ら，　t を用いて

$$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+s\overrightarrow{\mathrm{MN}}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{a}+\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)+t\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+k\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(1+s-t)\vec{a}+\frac{2}{5}s\vec{b}+tk\vec{c}\quad\cdots(*)$$

点 L の位置ベ　は，$\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$ であるから，L が α 上の点であるとき，

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は　　であるから

$$\frac{1}{2}(1+s-t)=1,\quad \frac{2}{5}s=1,\quad tk=\frac{1}{3}$$

これを解いて　　$s=\dfrac{5}{2},\ t=\dfrac{3}{2},\ \boldsymbol{k=\dfrac{2}{9}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{FG}}=\vec{a}$ より，辺 GF 上の点の位置ベクトルは実数 x を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}+x\overrightarrow{\mathrm{FG}}=x\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\qquad(0\leqq x\leqq 1)$$

α と辺 GF が交点をもつとき，上式および $(*)$ から

$$\frac{1}{2}(1+s-t)=x,\quad \frac{2}{5}s=1,\quad tk=1$$

第 1 式および第 2 式から　$t=\dfrac{7}{\quad}-2x$

$0\leqq x\leqq 1$ であるから　$\dfrac{3}{2}\leqq$

$0<k<1$ に注意しながら，これを第　　$\dfrac{2}{\quad}<k<\dfrac{2}{\quad}$

15.66　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{a}$

△ACD と線分 OF の交点 H　　k を　　と

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OF}}=k(\vec{a}\quad\vec{d})$$
$$=k\vec{a}+k\vec{c}+k$$

　　平面 ACD 上にあるから

$$k+k+k=1\quad\text{ゆえ}\quad=\frac{1}{3}$$

　　って　　$+\vec{d})$　よって，H は △ACD の重心である．

　た，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OF}}$　　**OH : HF**

$\overrightarrow{\mathrm{O}}$　　$+\vec{d}$　　$\overrightarrow{\mathrm{E}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}$　　$\vec{d})-\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})$

　　$\vec{a})$

(1)　　$\overrightarrow{\mathrm{HF}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{2}{3}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})$

ここで　$|\vec{a}|=$　　$|\vec{d}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{HE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HF}}=\left\{\dfrac{1}{3}(2\vec{a}-\vec{c}+2\vec{d})\right\}\cdot\left\{\dfrac{2}{3}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})\right\}$

$$=\frac{2}{9}(2|\vec{a}|^2-|\vec{c}|^2+2|\vec{d}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{d}+4\vec{d}\cdot\vec{a})$$
$$=\frac{2}{9}\left(2\cdot1^2-1^2+2\cdot1^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

見本

(3) (2) の結果により

$$|\overrightarrow{\mathrm{HE}}|^2 = \frac{1}{9}(4|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + 4|\vec{d}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{c} - 4\vec{c}\cdot\vec{d} + 8\vec{d}\cdot\vec{a})$$

$$= \frac{1}{9}\left(4\cdot 1^2 + 1^2 + 4\cdot 1^2 - 4\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} + 8\cdot\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{HF}}|^2 = \frac{4}{9}(|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{d} + 2\vec{d}\cdot\vec{a})$$

$$= \frac{4}{9}\left(1^2 + 1^2 + 1^2 + 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\quad\right) \quad 3$$

△ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{HE}}|^2 \quad \overrightarrow{\mathrm{HE}})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1\cdot\frac{8}{}}$$

15.67 (1) 図 1 の直角三角形 OBE に OB = E

B a^2+b^2}, DE

図 3 の 辺三角形 BCE の BC の中点を する

$$\mathrm{BM} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

の直 EM について

$$\sqrt{\mathrm{BE}^2 - \mathrm{BM}^2} = \sqrt{\quad^2}{2} + b^2$$

の直 辺三角 C から M $= \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

△O 3 辺の ら，∠EOM = ある．

図 3 か ある 4 から

O $\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{OM}} = \dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{EM}}$

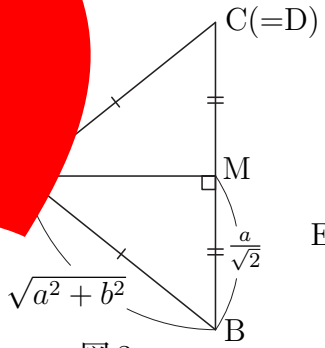


図 3

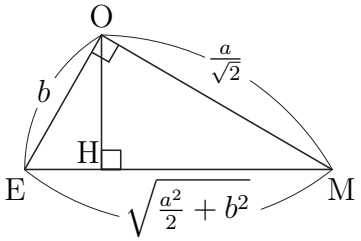


図 4

見本

したがって

$$\mathrm{EH} : \mathrm{HM} = \frac{\mathrm{OE}^2}{\mathrm{EM}} : \frac{\mathrm{OM}^2}{\mathrm{EM}} = \mathrm{OE}^2 : \mathrm{OM}^2 = b^2 : \frac{a^2}{2} = 2b^2 : a^2$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{a^2\overrightarrow{\mathrm{OE}} + 2b^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{2b^2 + a^2} = \dfrac{a^2\overrightarrow{\mathrm{OE}} + 2b^2 \cdot \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}}{a^2 + 2b^2}$

$$= \frac{\boldsymbol{a^2\overrightarrow{\mathrm{OE}} + b^2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + b^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}}{\boldsymbol{a^2 + 2}}$$

(2) 図3の二等辺三角形 BCE につ　∠BE　と，余弦定理により

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{BE}^2 + \mathrm{CE}^2 - \mathrm{BC}}{2\mathrm{BE}\cdot\mathrm{CE}} = \frac{(\sqrt{a^2+b^2})^2 + (\sqrt{\ }$$

ゆえに　$\sin\theta = \sqrt{1 -$

二等辺三角形 BCE の外接円の半径 EP は　定理

$$\mathrm{EP} = \frac{\mathrm{BC}}{2\sin\theta} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a \times \frac{a^2}{a\sqrt{a^2}} = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}}$$

(1) で　と結

$$\mathrm{EH} = \frac{b^2}{\sqrt{\frac{a^2}{2}}} = \frac{2b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}}$$

二等辺三角形 E　P は EM 上　から，$a > b$ に注意して

$$\mathrm{HP} = \mathrm{EP} - \mathrm{EH} = \frac{b^2}{\sqrt{\ }} - \frac{2b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}}$$

HP　の　$\dfrac{a^2 - b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}} = \dfrac{a}{4}$　ゆえに　$7a^4 - 18a^2b^2 + 8b^4 = 0$

したがって　$2b^2)(7a^2 - 4b^2) = 0$　$a > b > 0$ により　$b = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

このとき，△OEM について，$\mathrm{OE} = \mathrm{OM} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$，$\mathrm{EM} = a$ から

$$\mathrm{OH} = \frac{a}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{a}{2}}$$

印刷不可

15.68 (1) $\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$, $\vec{h} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$

(2) s を媒介変数とすると，l_1 上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + s\overrightarrow{\mathrm{DG}} = \vec{d} + s(\vec{g} - \vec{d}) \\ &= \vec{d} + s\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} - \vec{d}\right) \\ &= \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \frac{s}{3}\vec{c} + (1 - \end{aligned}$$

t を媒介変数とすると，l_2 上の点 Q

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AE}} \\ &= \vec{a} + \\ &= \quad t)\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b} + \quad + \frac{t}{3}\vec{a}\end{aligned}$$

(3) (2) について，$s = t = \dfrac{3}{4}$ とすると

$$\vec{p} = \vec{q} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \quad \frac{1}{4}\vec{d}$$

し て，s 交点をもち，その位置ベクトルは

$$\frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{d})$$

15. 原点 半径 2 周上にあるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{O}} \quad |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 2\sqrt{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OG}}| &= \frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{O}} \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}| \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{8+8+8+2\cdot4+2\cdot5+2\cdot6} \\ &= \frac{1}{3}\cdot3\sqrt{6} = \sqrt{6}\end{aligned}$$

見本

(2) P は直線 OG と球面 S の交点のうち G から遠い方であるから，実数 $k<0$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=-k|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$$

と表される．これに $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\sqrt{6}$ を代入すると

$$2\sqrt{2}=-k\cdot\sqrt{6} \quad \text{これを解いて} \quad k=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{\mathrm{OG}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+$ C)

$$=-\frac{\mathbf{2\sqrt{3}}}{\mathbf{9}}(\overrightarrow{\mathbf{OA}}+$$

(3) (2) の結果により

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$$ ·OA)

$$=$$ $+4+6$ $4\sqrt{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{-}{2\sqrt{}}=\frac{}{2}$$

よっ A と す角は **150°**

(1) 0, 0) こ して，球面の方程式を

$$+y^2+z^2-$$ $my+nz=0$

と

(0, 2 通るか $13=0$

通るから $+10=0$

るから $+2m+5=0$

これを解いて $=-1,\ m=-2,\ n=-3$

したがって，の方程式は

$$y^2+z^2-x-2y-3z=0$$

すなわち $-\frac{1}{2}\Big)^2+(y-1)^2+\Big(z-\frac{3}{2}\Big)^2=\frac{7}{2}$

よって，求める球面の中心 D の座標は $\left(\mathbf{\frac{1}{2}},\ \mathbf{1},\ \mathbf{\frac{3}{2}}\right)$

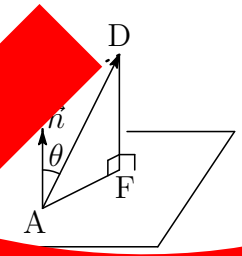
印刷本

(2) 3点A，B，Cを通る平面をαとする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,-2,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,-3),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の両方に垂直なベクトル，すなわち，
αの法線ベクトルの1つを

$$\vec{n}=(6,\ 3,$$



とおき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$と$\vec{n}$のなす角を$\theta$とす

$$\mathrm{DF}=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\cos\theta|,\quad \cos\theta=$$

上の2式から　　$\mathrm{DF}=$　　$=\dfrac{\left|\frac{1}{2}\cdot 6+\right.}{\sqrt{}}$

(3) △A　　$=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=$

って，　　は　　$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DF}=$　　$\times\dfrac{}{7}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

15 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$　　$,\ b,\ 0$　　$1,\ 1,\ 1)$ に垂直な

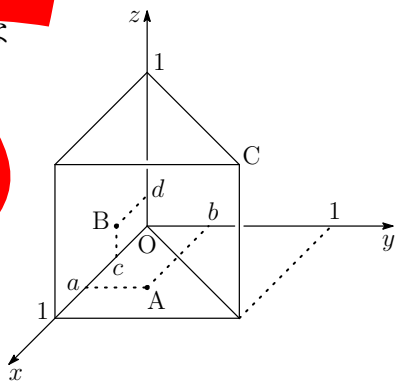
ルの

$=(b,-$　　$b)$

と

$|\vec{x}$　　$=\sqrt{2(a^2-$

ルを$\vec{e}$とす



$$\vec{e}=\pm$$　　$\pm\dfrac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2(a^2-ab+b^2)}}}\boldsymbol{(b,-a,\ a-b)}$$

ゆえに　　$=\pm\dfrac{bc+(a-b)d}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}$

$bc\geqq 0$，$a-b\geqq 0$，$d\geqq 0$であるから　　$|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\dfrac{\boldsymbol{bc+(a-b)d}}{\sqrt{\boldsymbol{2(a^2-ab+b^2)}}}$

見本

(2) △OAC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}$$

四面体 OABC において △OAC を底面とすると，高さは $|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であるから

求める四面体の体積 V は　　$V = \dfrac{1}{3}S \times |\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \dfrac{\boldsymbol{bc+(a-b)d}}{}$

(3) $0 \leqq b \leqq a \leqq 1$，$0 \leqq c \leqq 1$，$0 \leqq d \leqq 1$ であるから　　結果より

i) $b>0$，$a-b>0$ のとき　　$b\cdot 1+(a$　　$= \dfrac{a}{6} \leqq \dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V \leqq \dfrac{1}{6}$　(等号は $a=$　　$=1$，$d=1$ のとき)

ii) $b=0$ のとき　　$V = \dfrac{ad}{6} \leqq \dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V \leqq \dfrac{1}{6}$　(等号は　　のとき)

iii) $a-b=0$ のとき　　$\leqq \dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V \leqq \dfrac{1}{6}$　(等号は $b=c=1$，　　$\leqq 1$ の

大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$ で，そのときの　　組で

0)，B(1，0，1)　(　　< 1)

A(　　B(c，0，1)　(　　≦ 1)

A(　　(1，0，d)　(0 ≦ d ≦ 1)

説（ベ　　ル積)

のベク　　$= (a$　　$_3)$，$\vec{b} = (b_1,$　　が平行でないとき，ベクトル

$$\left(\begin{vmatrix} & a_3 \\ & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} & a_1 \\ & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

は，a と　　る．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ で表し，　　の成分

$$\boldsymbol{\vec{a}\times}\quad \boldsymbol{(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

であるから，$\vec{b}\times$　　$\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2 &= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\ &= ({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

印刷

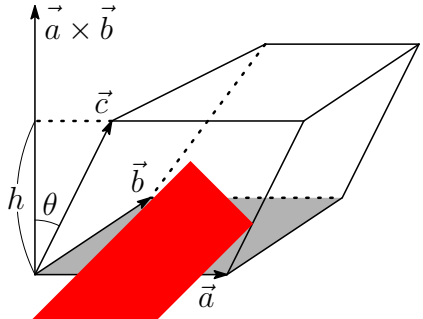
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$ [illegible] 面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六[illegible]は

$$\boldsymbol{V_1=|(\vec{c}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする[illegible]

四面体 OABC の体積 V は $\boldsymbol{\frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot}$[illegible]

また，対[illegible]り，$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=$[illegible]

補足 (2) で[illegible]$a,\ b,\ 0)$，$\vec{b}=(c,\ 0,\ d)$，[illegible]$1,1,1)$ とすると

[illegible]$=a-b)$，$(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$ [illegible]$(a-b)d$

[illegible]，四面[illegible]$V=\dfrac{1}{6}|bc+(a-b)d|$

[illegible]$a+\vec{b}$ [illegible]垂直[illegible]から，$\vec{a}\cdot(ha$ [illegible]0 より

$$|x\vec{a}$$ [illegible]$\vec{a}+(h\vec{c}$

$$=(x$$ [illegible]$-h)\vec{a}\cdot(h\vec{a}+\vec{b})+|h\vec{a}+\vec{b}|^2$$

$$=(x-h)$$ [illegible]$|h\vec{a}+\vec{b}|^2$$

[illegible]$|h\vec{a}+\vec{b}|^2$

よって　$|x$ [illegible]$\geqq|h\vec{a}+\vec{b}|$

(2) $h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$ [illegible]$\vec{b}$ のいずれとも垂直であるから，$\vec{d}=h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$ とする

印刷本

と，$\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=0$ より，(1) と同様にして

$$\begin{aligned}|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|^2&=|(x-h)\vec{a}+(y-k)\vec{b}+\vec{d}|^2\\&=(x-h)^2|\vec{a}|^2+(y-k)^2|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2+2(x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=|x-h|^2|\vec{a}|^2-2|x-h||y-k||\vec{a}||\vec{b}|+|y-k|^2|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2\\&\qquad+2\{|x-h||y-k||\vec{a}||\vec{b}|-(x-h)(\quad k)\vec{a}\cdot\vec{b}\}\\&=(|x-h||\vec{a}|-|y-k||\vec{b}|)^2+|\vec{d}|^2\\&\qquad+2\{|x-h\quad||\vec{a}||\vec{b}|-\quad(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}\}\\&\geqq|\vec{d}|^2\end{aligned}$$

よって　$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|\geqq|h\vec{a}+k\vec{b}$

(3)　$\vec{d}=h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$

$=h(1,\ 1,\ 1)+k(1,\quad\quad(-3,\quad)$

$=(h+k-3,\ h+\quad,\ h-2k$

$\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=0$ であるから

$\quad k-1=0$

$\quad-13=0$　　これを解き　$h=$　$1,\ k=2$

(2) C　から，$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$ は，$x=h$，　すなわち $\boldsymbol{x=-1,\ y=2}$

C　最小と　　$|-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}|=|(-2,\ 1,\ 1)|=\sqrt{\boldsymbol{6}}$

(1) の　は点 P　通り，方向　ルが $\vec{a}$ の直線である．$|x\vec{a}+\vec{b}|$ は原　この　の距離である

$xa+$　　を通　スクトルが $\vec{a}$，$\vec{b}$ の平面である．

$+y\vec{b}$　原点から　の距離である．

15.73　(1) P　t) に内分する点であるから $(0<t<1)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)(1,\ 2,\ 0)+t(2,\ 1,\ 2)$

$=(1+t,\ 2-t,\ 2t)$

OA 上に H$(1+t,\ 0,\ 0)$ をとると　$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=(0,\ 2-t,\ 2t)$

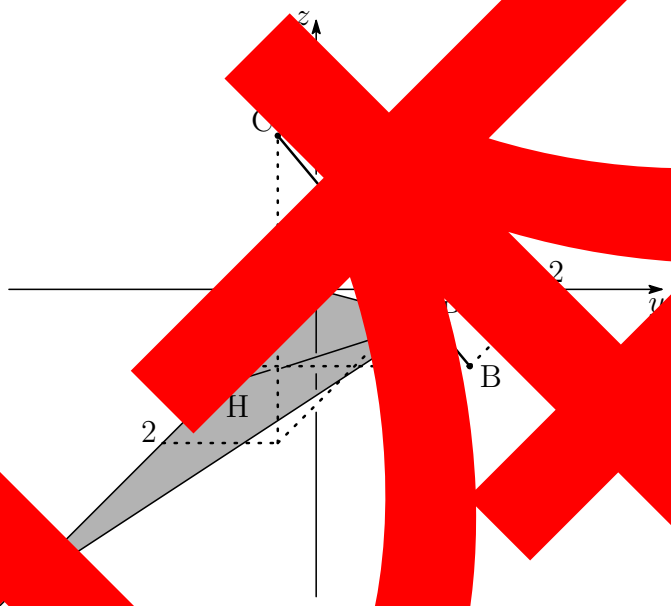
このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{HP}}$　ゆえに　$\triangle\mathrm{OAP}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{HP}$

見本

したがって，HP が最小のとき，△OAP は最小となる．

$$\begin{aligned}\mathrm{HP}^2 &= (2-t)^2+(2t)^2 = 5t^2-4t+4\\ &= 5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{16}{5}\end{aligned}$$

よって，求める t の値は，$0<t<1$ に注意して　$\boldsymbol{t=}$**2**



定

一般[illegible]直線 ℓ[illegible]ねじれの位[illegible]るとき，ℓ_1 上の点 P と ℓ_2 上の[illegible]を結ぶ[illegible]が最小となる[illegible] PQ$\perp\ell_1$，PQ$\perp\ell_2$ である．
[illegible]では[illegible]がねじ[illegible]置にあり，このとき $\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$
[illegible]ある[illegible]$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=$[illegible]値を求めることができる．

(2) D[illegible]点[illegible]であるから，その座標を $(a,\ b,\ 0)$ とすると

[illegible]$=(a,\ b,\ 0)-(2,\ 1,\ 2)=(a-2,\ b-1,-2)$

このとき，C[illegible]D，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=$[illegible]　$4(a-2)+0(b-1)+0\cdot(-2)=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ より　$(1+t)(a-2)+(2-t)(b-1)+2t\cdot(-2)=0$

$2-t\neq 0$ であるから上の 2 式より　　$a=2,\ b=\dfrac{2+3t}{2-t}$

したがって　　$\mathrm{D}\left(2,\ \dfrac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$

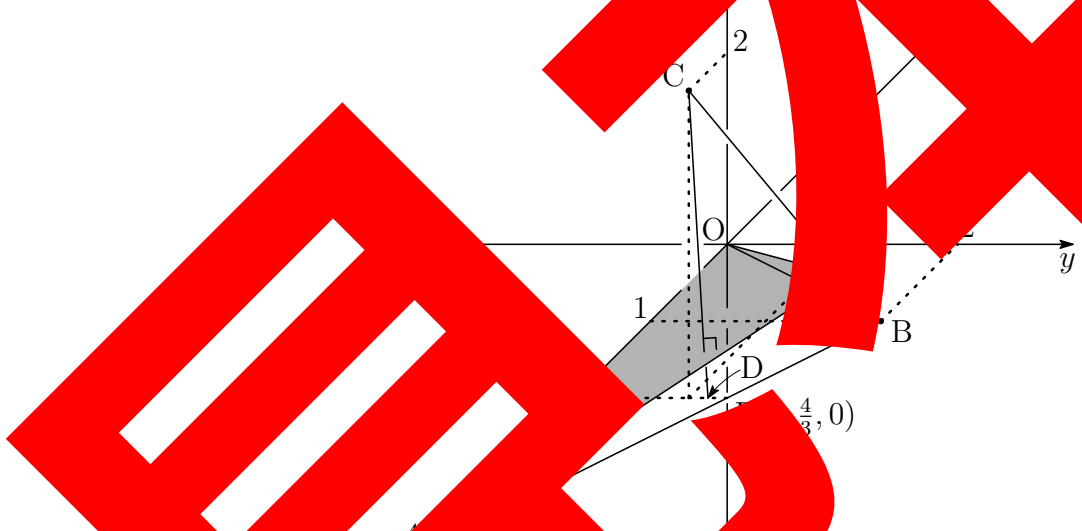
点 E を $(2,\ 0,\ 0)$，AB 上の x 座標が 2 である点を F とすると，3 点 A，F，B の x 座標から F は線分 AB を $2:1$ に内分する点であるから，その座標は

$$\left(\frac{1\cdot 4+2\cdot 1}{2+1},\ \frac{1\cdot 0+2\cdot 2}{2+1},\ \frac{1\cdot 0+2\cdot 0}{2+1}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(2,\ \frac{4}{3},\ 0\right)$$

D が △OAB の内部にあるためには，D は EF 間にないので

$$2+3$$

$0<t<1$ に注意してこれを解くと



16.1 求め　　すると　a_1　　$a_{n+1}-a_n=2n+2$

$n>1$ のとき　　$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)$

ゆえに　$a_n-a_1=n(n-1)+2(n-1)=n^2+n-2$

したがって　　$a_n=n^2+n-1$

上式は $n=1$ のときも成り立つ．よって　$\boldsymbol{a_n=n^2+n-1}$

印刷

16.2 (1) 初項 a_1 は　$a_1 = S_1 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = a + b$　$\cdots$①

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= an^2 + bn - \{a(n-1)^2 + b(n-1)\}$

$= 2an - a + b$

① より，この式は，$n = 1$ のときにも成り立つ．

よって，一般項は　$\boldsymbol{a_n = (2n-1)a + b}$

(2) $a_{n+1} - a_n = (2n+1)a + b - \{(2n-1)a + b\} = 2a$

よって，公差 $\boldsymbol{2a}$ の等差数列

16.3 (1) 題意より

$a^2 = 4b$　$\cdots$①，　$c^2 = 36b$

① − ② より　　$a^2 - c^2 = -32$

ゆえに　　$(a+c)(a -$ $32b$

これに ③ を代入すると　　$c) = -3$

$a > 0$ であるから，① より，$b \neq 0$ である　注意

$a - c = -16$　ゆえに　$c =$　④

と ③

a　$= 2b$　ゆえに　$b = a + 8$　$\cdots$⑤

② に　ると

a^2　$+ 8)$　ゆえに　$4)(a-8) = 0$

であ

代入して　$\boldsymbol{c = 24}$

(2) $\{a_n\}$ 公比　$= \dfrac{a}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$

ゆえに　$a_n =$　$^{n-1} = 4\cdot 2^{n-1}$

$n \geqq 2$ のと　$b_n = b_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 4\cdot 2^{k-1}$

$= 4 + \dfrac{4(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1}$

$n = 1$ のときも上式は成り立つので　　$\boldsymbol{b_n = 2^{n+1}}$

見本

(3) $p_{n+1}-p_n=p_n$　ゆえに　$p_{n+1}=2p_n$

したがって，$\{p_n\}$ は初項が p，公比が 2 の等比数列．

よって　　$\boldsymbol{p_n=p\cdot 2^{n-1}}$

16.4　(1) $\{a_n\}$ の公差を d とすると

$$a_{11}=\frac{1}{6}+10d,\quad a_{40}=\frac{1}{6}+39d$$

$\displaystyle\sum_{k=11}^{40}a_k=250$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 30\left\{\left(\frac{1}{6}+10d\right)+\left(\frac{1}{6}+39d\right)\right.$$

よって，$\{a_n\}$ の一般項は　　$\frac{1}{6}+$　　$-\frac{1}{6}$

(2) (1) の結果から，$a_n\leqq 10$ とき

$$\frac{1}{3}n-\frac{1}{6}\leqq 10\quad\text{ゆえに}\quad n\leqq 30$$

を満たす最大値 N は　　**30**

(1)，　　結果

$$\sum_{k=1}^{}\left(\frac{1}{3}k\right.$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 30(30\quad\frac{1}{6}\cdot 30=\mathbf{150}$$

16.5　(1) $\{a_n\}$ は初項 3，公　　数列であるから　$\boldsymbol{a_n=3\cdot 2^{n-1}}$

(2) (1) より　$a_{2n-1}=3\cdot 2^{(2n-1)-1}=3\cdot 2^{2n-2}$

よって　　$T_n=\dfrac{3\cdot 2^{2n-2}-3\cdot 2^{n-1}}{2-1}=\boldsymbol{3(2^{2n-1}-2^{n-1})}$

解説　初項 a，　　，末項 l の等比数列の和 S は　$\boldsymbol{S=\dfrac{rl-a}{r-1}}$

(証明)　l が第 n 項とすると，$l=ar^{n-1}$ であるから

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{r\cdot ar^{n-1}-a}{r-1}=\frac{rl-a}{r-1}$$

見本

(3) (2) の結果から　$T_n = 6\cdot 4^{n-1} - 3\cdot 2^{n-1}$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k = 6\sum_{k=1}^{n} 4^{k-1} - 3\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$

$\displaystyle = 6\times\frac{4^n-1}{4-1} - 3\times\frac{2^n-1}{2-1}$

$= 2(4^n-1) - 3(2^n-1) = \mathbf{2\cdot 4^n - 3}$ [illegible] $\mathbf{+ 1}$

16.6 (1) 初項 2，公差 3 の等差数列の初項から第 20 項まで [illegible] から

$\dfrac{1}{2}\cdot 20\{2\cdot 2$ [illegible] $\cdot 3)$

(2) 初項 2，公比 -2 の等比数列の初項か [illegible] を超えるような

$\dfrac{2\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)} > 3$ [illegible] < -449

これをみたす n は奇数で [illegible] $2)^7 =$ [illegible] $($

したがって，求める最小の [illegible] は　**9**

(3) $\{a$ [illegible] の項は正，$\{b_n\}$ の奇数の項 [illegible] 数 [illegible] であ

[illegible] $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の両方に含 [illegible] 項 [illegible] $\{b_n\}$ の [illegible] の項か

[illegible] べれ [illegible] $\}$ の奇数の項からな [illegible] は $\{2\cdot 4^{n-1}\}$.

[illegible] $^{n-1} \equiv 2\cdot 1^{n-1} \equiv 2$ [illegible] d 3)

[illegible] て，任 [illegible] に対 [illegible] $4^{n-1} =$ [illegible] $+2$ を満たす自然数 k が存在する．

[illegible] のと [illegible] $+2$ [illegible] の第 $k+1$ [illegible] る．したがって

[illegible] $\cdot 4^{n-1} =$ [illegible] $= \mathbf{2^{2n-1}}$

16.7 ([illegible] 1 [illegible] $b_1 = 2^2 -$

n [illegible] $= 2^{n+1} - 2$ [illegible] $(2^n - 2) = 2^n$

$n = 1$ のとき [illegible] は成り立つので　$\boldsymbol{b_n = 2^n}$

(2) $a_n = 2 + 21($ [illegible] $= 21n - 19$

$c_n = b_n - a$ [illegible] $- 21n + 19$　$\cdots$①

$c_{n+1} - c_n$ [illegible] $- 21(n+1) + 19 - \{2^n - 21n + 19\}$

$= 2^n - 21$　$\cdots$②

よって，$n \geqq 5$ のとき　$c_{n+1} - c_n = 2^n - 21 \geqq 2^5 - 21 > 0$

印刷本

(3) ①，② から

$$c_1 = 2 - 21 + 19 = 0, \quad c_7 = 2^7 - 147 + 19 = 0$$
$$c_1 > c_2 > c_3 > c_4 > c_5 < c_6 < c_7 < \cdots$$

したがって，$c_n = 0$ となる n は高々2 個.

よって　　$\boldsymbol{n = 1,\ 7}$

16.8　(1) 等比数列 $\{S_n\}$ の初項は $S_1 = a_1 = 2$，公比を r と

$$S_2 = a_1 - a_2 = 2 \quad a_1 - \quad = 2r^2$$

上の第 2 式から第 1 式を引くと

これに $a_3 = -\dfrac{1}{2}$ を代入すると

整理すると　$(2r-1)^2 = 0$　　r

よって　　$S_n = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\quad} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\boldsymbol{n-2}}$

(2) $n \geqq$　　$S_n - S_{n-1} = (-1)^{n-1}a_n$

を代入すると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = (-1)^{n-1}a_n$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = (-1)^{n-1}a_n$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

て　　$= \left(-\dfrac{1}{2}\right)$　　**のとき)**

16.9　(1) $\triangle OA_nB_n$ と　　について

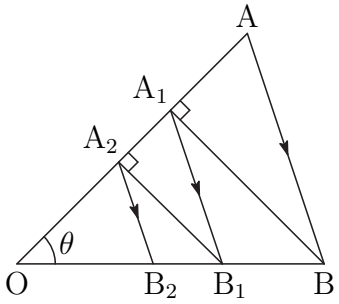
∠O は

$A_nB_n // AB$　　から

∠O　　= ∠OAB

ゆえに，2 角が等しいので

$\triangle OA_nB_n \backsim \triangle OAB$



見本

(2) $\triangle \mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1} \backsim \triangle \mathrm{OAB}$ であるから

$$\frac{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}} = \frac{\mathrm{OA}_n}{\mathrm{OA}_{n-1}} = \frac{\mathrm{OB}_{n-1}\cos\theta}{\mathrm{OA}_{n-1}} = \frac{\mathrm{OB}\cos\theta}{\mathrm{OA}} = \frac{\boldsymbol{b\cos\theta}}{\boldsymbol{a}}$$

(3) (2) の結果に $a=2$, $b=1$, $\theta=30^\circ$ を代入すると

$$\frac{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}} = \frac{1\cdot\cos 30^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{S_n}{S_{n-1}} = \left(\frac{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}}\right)^2 = \frac{3}{16}$$

また　$S_1 = \dfrac{3}{16}\triangle \mathrm{OAB} = \dfrac{3}{16} \times \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\sin 30^\circ = \dfrac{3}{32}$

$S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ は，初項が $\dfrac{3}{32}$，公比が $\dfrac{3}{16}$ の等比数列の和であるから

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{\dfrac{3}{32}\left\{1 - \left(\dfrac{3}{16}\right)^n\right\}}{1 - \dfrac{3}{16}} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{13}}\left\{\boldsymbol{1} - \left(\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{16}}\right)^{\boldsymbol{n}}\right\}$$

16.10　(1) $\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OP}_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{\mathrm{OP}_2}{\sin\theta} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{OP}_2 = \frac{\cos\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{2}\cos\theta}}{\boldsymbol{\sin\theta+\cos\theta}}$$

(2) $\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ に正弦定理を適用すると $(n = 1, 2, \cdots)$

$$\frac{\mathrm{OP}_{n+1}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{\mathrm{OP}_n}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{OP}_{n+1} = \frac{\mathrm{OP}_n\sin\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{2}\mathrm{OP}_n\sin\theta}}{\boldsymbol{\sin\theta+\cos\theta}}$$

よって，$\{\mathrm{OP}_n\}$ は初項 1，公比 $\dfrac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$ の等比数列であるから

$$\mathrm{OP}_8 = \boldsymbol{16\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^8}$$

(3) $\mathrm{OP}_8 = \dfrac{81}{16}$ のとき，(2) の結果から

$$16\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^8 = \frac{81}{16} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^8 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} > 0$ であるから

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (2-\sqrt{3})\sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta$$

よって　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \boldsymbol{2\sqrt{3}+3}$

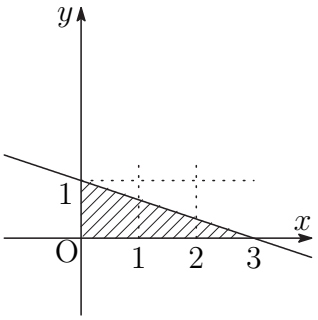
印刷不可

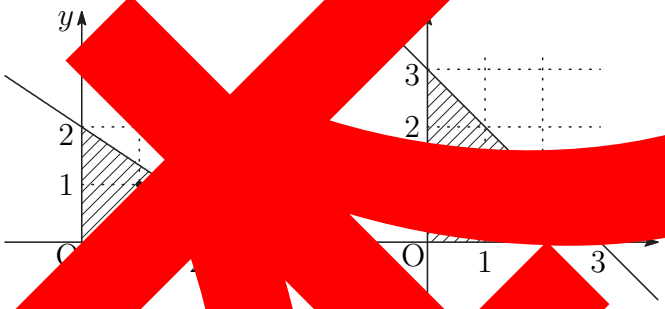
16.11　(1) 2 点 A(3, 0)，$B_n(0,\ n)$ を通る直線は

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{n}=1 \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{n}{3}x+n$$

ゆえに，領域内の格子点 $(x,\ y)$ は，次式をみたす整数 x，y である．

$$(*)\begin{cases} x=1 \text{ のとき} & 0<y<\dfrac{2n}{3} \\ x=2 \text{ のとき} & 0<y<\dfrac{n}{3} \end{cases}$$





したがって　$n=1$ のとき，(*) をみたす格子点はない

$n=2$ のとき，(*) をみたす格子点は (1

$n=3$ のとき，(*) をみたす格子点は

$a_2=1$，$a_3=1$

$n=3k$ (k は自然数) とおくと，$x=1$ のとき　$0<y<2k$

よって，これを満たす格子点の個数は　**$2k-1$** (個)

($n=3k$ と同様に) $n=3k-1$ に代入すると，$x=2$ のとき　$0<y<k$

ゆえに，これに含まれる格子点の個数は　$k-1$ (個)

これと (2) の結果より，$a_{3k}=(2k-1)+(k-1)=\mathbf{3k-2}$

また，3 の倍数でない自然数は

$$a_n=\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{2n}{3}\right]$$

($[x]$ は x を超えない最大の整数を表す)

$$\begin{aligned} a_{3k-2}&=\left[\frac{3k-2}{3}\right]+\left[\frac{2(3k-2)}{3}\right] \\ &=\left[(k-1)+\frac{1}{3}\right]+\left[(2k-2)+\frac{2}{3}\right] \\ &=(k-1)+(2k-2) \\ &=3k-3 \end{aligned}$$

印刷本

$$
\begin{aligned}
a_{3k-1} &= \left[\frac{3k-1}{3} \right] + \left[\frac{2(3k-1)}{3} \right] \\
&= \left[(k-1) + \frac{2}{3} \right] + \left[(2k-1) + \frac{1}{3} \right] \\
&= (k-1) + (2k-1) \\
&= 3k-2
\end{aligned}
$$

よって，上の 2 式および (3) の結果から

$$
\begin{aligned}
S_{3m} &= \sum_{k=1}^{m} (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) \quad \cdots \quad (3k-2) + (3k-2)\} \\
&= \sum_{k=1}^{m} (9k-7) \\
&= 9 \cdot \frac{1}{2} m(m+1) - 7(m \quad \cdots \quad \boldsymbol{\frac{n}{2}}
\end{aligned}
$$

補足 (宮崎大学 2010) 3

16.12 (1) $\boldsymbol{a_1 = \quad = 1,\ a_3 = 1,\ a_4 = 2}$

(2) $\quad$ は $\quad k \leqq \sqrt{n} < k+1 \quad$ ゆ $\quad \leqq (k+ \quad -1$

$\quad$ を，$\quad$

$\quad)^2 - 1\} - k^2 + 1 \quad + 1$ (個)

$\quad$ がって

$$
S \quad + a_{k^2+1} + \cdots \quad +1)^2-1\} + a_{m^2}
$$

$$
= \sum_{k=1}^{m-1} \{k(2 \quad = \sum_{k=1}^{m-1} (2k^2+k) + m
$$

$$
\quad \times \frac{1}{6} m(m-1)(2m-1) + \frac{1}{2} m(m-1) + m
$$

$$
\boldsymbol{\quad m(4m^2 - 3m + 5)}
$$

16.13 (1) 第 5 群の最 $\quad$ は

$$
\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1} = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 31 \text{ (番目)} \quad \text{よって} \quad 3 \cdot 31 = \boldsymbol{93}
$$

見本

(2) 第 n 群の最初の項は

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}+1=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+1=2^{n-1}\text{ (番目)}\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{3\cdot 2^{n-1}}$$

(3) 第 n 群の項の総和は，初項 $3\cdot 2^{n-1}$，公差 3，項数 2^{n-1} の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\{2\cdot 3\cdot 2^{n-1}+(2^{n-1}-1)\cdot 3\}=\boldsymbol{9\cdot 2^{2n-2}}$$

16.14 (1) 正の偶数 $2j$ が $2j$ 個並んでいる数[illegible]と，第 j 群の最後の項の項数は

$$\sum_{i=1}^{j} 2i=2\cdot\frac{1}{2}[illegible]$$

ゆえに，$t-1$ 群の最後の項[illegible]$(t\geqq$[illegible]$-1)+$[illegible]^2-t

よって，$2t$ が初めて現[illegible]第 t^2-[illegible]項

これは $t=1$ のときも成[illegible]立つから　**第[illegible]$t+1$**

(2) 第 9[illegible]の項の項数は　$9(9+1)=$[illegible]

[illegible]項の項数は　$10(10+1)=$[illegible]

[illegible]って，[illegible]群にあるので　a_{100}[illegible]$=\boldsymbol{20}$

第 j 群[illegible]る項[illegible]$2j\times 2j=4j^2$

第[illegible]の最初[illegible]$10^2-10+1=91$

[illegible]って，[illegible]和は[illegible]$j^2+10\times$[illegible]$4\times\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 10\cdot 19+200=\boldsymbol{1340}$

16.1[illegible]の初項[illegible]ネ[illegible]$a_n\}$ の[illegible]第 $\frac{1}{2}k(k-1)+1$ 項，第 $\frac{1}{2}k(k+1)$[illegible]あ[illegible]

$$a_{\frac{1}{2}k(}=-2\left\{\frac{1}{2}k(k-1)+1\right\}+a=-k^2+k-2+a$$

$$a_{\frac{1}{2}k(}=-2\times\frac{1}{2}k(k+1)+a=-k^2-k+a$$

よって　$\frac{1}{2}k\{(-k^2+k-2+a)+(-k^2-k+a)\}$

$$=\boldsymbol{-k^3+(a-1)k}$$

印刷本

(2) (1) の結果から，$a=212$ のとき，$S_k=-k^3+211k$ であるから

$$\begin{aligned} S_{k+1}-S_k &= \{-(k+1)^3+211(k+1)\}-(-k^3+211k) \\ &= 3\{70-k(k+1)\} \end{aligned}$$

ゆえに　　$S_1<S_2<\cdots<S_8>S_9>S_{10}>\cdots$

S_k の群に含まれる項の平均は，(1) の結果から

$$\frac{S_k}{k}=\frac{-k^3+211k}{\quad}=-k^2+$$

よって，求める値は　-8^2+211

(3) (1) の結果から，$a=92$ のとき，$S_k=$

$$\begin{aligned} S_{k+1}-S_k &= \{-(k+1 \qquad\qquad\qquad\qquad -k^3+91k) \\ &= -3(k \qquad\qquad +6) \\ S_{k+1}+S_k &= \{ \qquad)^3+91(\qquad)+(\\ &= -2 \qquad -3k^2+179 \\ &= -(k-9)(k+10)(\qquad) \end{aligned}$$

$|S_{k+1}|$ を満たす自然数 k は　　$=$ **9**

$k=k($　　$k\leqq 9$ のとき $S_k>$　　$\geqq 10$ のとき $S_{k+1}<0$ であ

ること　意す

$=90, \quad S_{10}=-90$

こがっ　$_{k+1}+$　　-9 を　あつことが分かる．

(1) 第 k 群にある分　と分子の和は　であるから，$\dfrac{n}{m}$ は $m+n-1$

群にある．　，$\dfrac{n}{m}$ は　$+n$　**の第 n 項**．

(2)　での項数に　ものであるから

$(m+n-2)(m+n-1)+n$ (番目)

(3) 1000 番目の項　k 群にあるとすると

$$\frac{1}{2}(k-1)k<1000\leqq\frac{1}{2}k(k+1)$$

ここで　　$\dfrac{1}{2}\cdot 44\cdot 45=990, \quad \dfrac{1}{2}\cdot 45\cdot 46=1035, \quad 1000=990+10$

したがって，1000 番目の項 a は第 45 群の第 10 項である．

見本

$a=\dfrac{n}{m}$ とすると，(1) の結果から

$$m+n-1=45,\quad n=10 \quad \text{これを解いて} \quad a=\frac{n}{m}=\boldsymbol{\frac{10}{36}}$$

(4) $\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$ であるから，$n'=5$，$m'=18$ とすると，(2) の結果から

$$\frac{1}{2}(n'+m'-2)(n'+m'-1)+n'=\frac{1}{2}(5+18-\quad 18-1)+5$$

$$\boldsymbol{236}\ (\quad$$

16.17 (1) $2^n-1=2\cdot 2^{n-1}-1$ より，第 n 群 $\dfrac{1}{2^n}$ $\quad -1$ 数は

第 n 群の項の和は $\dfrac{1}{2^n}\{1+3+\quad \dfrac{1}{2^n}(2^{n-1})^2=\boldsymbol{2^{n-2}}$

解説 $1+3+\cdots+(2N-1)=$

(2) $2^5-1<51\leqq 2^6-1$ より，[illegible]子にはじめ[illegible]が現れ[illegible]第 6 群

また[illegible] $2\cdot 26-1$ より　第 6 群の 26 番[illegible]

[illegible]まで[illegible]は　$\displaystyle\sum_{n=1}^{5}2^{n-1}=\frac{2^5-1}{2-1}$

よって[illegible]める　$31+26=\boldsymbol{57}$

(3) [illegible](2) の[illegible]ら，[illegible]和は

$$\sum_{n=1}^{5}\quad +\frac{1}{2^6}\times 26^2=\quad \sum_{n=1}^{5}2^{n-1}+\frac{26^2}{2^6}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{2^5-1}{2-1}+\frac{13^2}{2^4}$$

$$=\frac{31}{2}+\frac{169}{16}=\boldsymbol{\frac{417}{16}}$$

(4) 第 n 群までの[illegible]は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=2^n-1$

$2^{10}-1<$[illegible]$<2^{11}-1$ より，2003 は第 11 群にある．

また，$2003-(2^{10}-1)=980$ より，2003 は第 11 群の 980 番目

よって，第 2003 項は　$\dfrac{2\cdot 980-1}{2^{11}}=\boldsymbol{\dfrac{1959}{2048}}$

見本

16.18 (1) $b_n = \left[\dfrac{2n+2}{3} \right]$ より

$$b_{3m-2} = \left[\frac{2(3m-2)+2}{3} \right] = \left[2m - 1 + \frac{1}{3} \right] = \boldsymbol{2m-1}$$

$$b_{3m-1} = \left[\frac{2(3m-1)+2}{3} \right] = [\, 2m \,] = \boldsymbol{2m}$$

$$b_{3m} = \left[\frac{2\cdot 3m+2}{3} \right] = \left[2m + \frac{2}{3} \right] = \boldsymbol{2m}$$

$$S_{3m} = \sum_{k=1}^{m}(b_{3k-2} + b_{3k-} = \sum^{m} 1) + 2k + 2k\}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}(6k-1) = 6\cdot\frac{1}{2}m($$

(2) $\{a_n\}$ は初項 1，公差 3 の等差数 る は

$$a (n-1)\cdot 3 - 2$$

$m \geqq 2$ のとき $S_{3(m-1)} = (n-1)\{3(m- \} = (- 1)$

c_3 の第 $S_{3(m-1)}+1$ 項であるか

$$m-2} = 3\{(m-1)(3m- 1\} - 2$$

$$= 9m^2 - 12m + 4 \quad \boldsymbol{(n-2)^2}$$

c $\{a_n\}$ $b_{3m-2}+1$ 項であるから

$$-1 = 1)(3m (2m-1)+1\} - 2$$

$$- 6m + 1 = \boldsymbol{-1)^2}$$

$\{a_n\}$ $(m$ $-2+$ 1 項であるから

$$= 3\{(m- (2m-1)+2m+1\} - 2$$

$$\boldsymbol{m^2+1}$$

上の c_{3m-2}, c_{3m} は $m=1$ のときも成り立つことに注意して

$$T_{3m} = \sum_{k=1}^{m}(c c_{3k-1} + c_{3k}) = \sum_{k=1}^{m}\{(3k-2)^2 + (3k-1)^2 + (9k^2+1)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}(- 18k + 6) = 27 \times \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) - 18 \times \frac{1}{2}m(m+1) + 6m$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{2}m(6m^2+3m+1)}$$

印刷用

(3) (2) の結果から，$31^2 < 1000 < 32^2$ であるから

$$c_{31} = 31^2 = 961, \quad 1000 = 961 + 3 \times 13$$

よって，1000 は　**第 31 群の 14 番目**

(4) (2) の結果から，$\sqrt{c_{3k-2}} - (3k-2) = 0$，$\sqrt{c_{3k-1}} - (3k-1) = 0$ であるから

$$\sum_{k=1}^{3m}(\sqrt{c_k} - k) = \sum_{k=1}^{m}(\sqrt{c_{3k}} - 3k)$$
$$= \sum_{k=1}^{m}(\sqrt{\quad} \quad \sum_{k=1}^{} \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$$

16.19　$1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \cdots + (n-1)\cdot n\cdot($

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1)$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{}^{n-1}\{(k+2) - (k-2)\quad -1)k(k+1$$
$$= \quad\quad)k(k+1)(k+2) - (k-2)\quad\quad)\}$$
$$\quad =1$$
$$\quad \frac{1}{4}(n\quad\quad +2)$$
$$= \quad\quad +n)\quad\quad +n)$$
$$\quad (1+2\quad\quad \cdots +\quad\quad 3+\cdots$$

16　$1\quad\quad + 3^{\quad\quad -1} = \frac{3^n-1}{3-\quad\quad -1}{2}$ より

$$\quad\quad 0\left(\frac{1}{2} + \quad\quad \right) \quad\quad g_{10}\frac{3^n}{2} = \boldsymbol{n\log_{10}3 - \log_{10}2}$$

(2) (1) の結果か

$$a_1\quad\quad \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(k\log_{10}3 - \log_{10}2)$$
$$= \frac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\log_{10}3 - n\log_{10}2}$$

16.21　(1) ④ は　$\boldsymbol{16+17+18+19+20 = 21+22+23+24}$

よって　$\boldsymbol{S(4) = 90}$

印刷本

(2) ⓝ は

$$\boldsymbol{n^2+(n^2+1)+\cdots+(n^2+n)=(n^2+n+1)+\cdots+(n^2+2n)}$$

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{k=1}^{n+1}(n^2-1+k) \\
&= (n^2-1)(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)(n+2) \\
&= \frac{1}{2}(n+1)\{2(n^2 \quad n+2)\} \quad +1)(2n+1) \\
(\text{右辺}) &= \sum_{k=1}^{n}(n^2+n+k) \\
&= n^2(n+1)+\frac{1}{2}n(\quad 2n+1)
\end{aligned}$$

よって，ⓝ は成り立つ．

16.22 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k \quad 1)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(\quad (k+$

$\quad =\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

$\quad =\sum_{k=1}^{n}k(\quad +2)\cdots(k+m)$

$\quad =\frac{1}{ \quad }\sum_{k=1}^{n}k(k \quad +2)\cdots(\quad m)(k+m+1)$

$\quad =\sum_{k=1}^{n}(k-1) \quad 1)(k+2)\cdots(k+m)$

$\quad =\boldsymbol{ \quad n(n+1) \quad (n+m)(n+m+1)}$

16.23 (1) $\quad j \quad (k-1)$

$\quad =(2k \quad 2k+3)(2k+5)(2k+7)(2k+9)$

$\quad \quad -(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)$

$\quad =(2 \quad (2k+3)(2k+5)(2k+7)\{(2k+9)-(2k-1)\}$

$\quad = \quad -1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)$

よって $\quad \boldsymbol{a=10}$

印刷本

(2) (1) の結果から

$$\sum_{k=1}^{m}(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7) = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{m}\{f(k)-f(k-1)\}$$

$$= \frac{1}{10}\{f(m)-f(0)\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{10}\{f(m)} \text{ [illegible] } \boldsymbol{945\}}$$

16.24 (1)

$$S_n = n + (n-1 \text{ [illegible] } + \cdots + 2x^{n} \text{ [illegible] } 1$$

$$-)\quad xS_n = \text{ [illegible] } \cdots + \text{ [illegible] } 2x^{n-1} + x^n$$

$$(1-x)S_n = n \text{ [illegible] } -x^{n-1} - x^n$$

$x \neq 1$ であるから

$$(1-x)S_n = n - x(1 + x \text{ [illegible] } - \text{ [illegible] } \boldsymbol{\frac{\text{[illegible]}}{1-x}}$$

(2) (1) の結果に $x = \frac{1}{2}$ を代[illegible]

$$\text{[illegible]} S_n = n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \quad \text{ゆえに} \quad \text{[illegible]} 2n - \text{[illegible]} 1$$

$$\text{[illegible]} + \cdots + S_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{2k \text{ [illegible] } \left(\frac{1}{2}\right) \text{[illegible]}\right\}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - 2n + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \boldsymbol{n^2} \text{ [illegible] } \boldsymbol{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

16.25 [illegible] $n^4 +$ [illegible] $11n^2$ [illegible] n [illegible] $n(n+1)(n+2)(n+3)$

[illegible] $= S_1 =$ [illegible] 24

$n \geqq$ [illegible] と[illegible]

$$a_n = \text{[illegible]} S_{n-1}$$

$$\text{[illegible]} + 1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)$$

$$\text{[illegible]} + 1)(n+2)\{(n+3) - (n-1)\}$$

$$\text{[illegible]} n(n+1)(n+2)$$

上式は，$n=1$ のときも成り立つ．

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n = 4n(n+1)(n+2)$

見本

(2) (1) の結果から　$b_k = \dfrac{1}{a_k} = \dfrac{1}{4k(k+1)(k+2)}$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$
$$= \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{n(n}{16(n+1)(}}$$

16.26　(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{a} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{a}(\sqrt{k+1}$

(2) $S(a)$ が整数 $n \geqq 1$ に等しい (1) の ら

$\sqrt{a+1}$ n　ゆえに $n(n+$

よっ る数列の一般項は　$\boldsymbol{a_n} =$ $+$

(3) n き (m は整数)

$1)\{(2m-1)+2\}$ $-1)(2m+1)$

$4(m^2-1)+3$

$2m$ の (m は整

$= 2m(2m+2)$ $(m+1)$

, a_n 割 は 0 る.

(4) 結

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right)$$
$$= \frac{\boldsymbol{N(3N+5)}}{\boldsymbol{4(N+1)(N+2)}}$$

印刷本

16.27 (1) 加法定理により

$$\begin{aligned}&\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\\=&\cos k\theta\cos\frac{\theta}{2}+\sin k\theta\sin\frac{\theta}{2}-\left(\cos k\theta\cos\frac{\theta}{2}-\sin k\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)\\=&2\sin k\theta\sin\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

(2) $\sin\dfrac{\theta}{2}\neq 0$　すなわち　$\theta\neq 2m\pi$ (m は整数) のとき，(1) の結果から

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}$$

$$=\frac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\left\{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}$$

$\theta=2m\pi$ のとき (m は整数)　$\sin k\theta=\sin 2m\pi=0$

ゆえに　$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\mathbf{0}$

16.28

(1) $x=1, 2, \cdots, n$ 格子点 (x, y) は，(1) の結果から，$2n-1$ (個) であるから

$$n(A)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)-n$$

$$=\frac{1}{2}n(n-1)(2n+5)$$

(2) $B=\{(x, y)\mid 1\leqq x\leqq n,\ 1\leqq y\leqq n^2\}$ であるから，$n(B)=n\cdot n^2$ より

$$n(C)=n^3-\frac{1}{6}(n-1)(2n+5)=\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)$$

(3)　$B=\{(x, y)\mid 1\leqq x\leqq n,\ 1\leqq y\leqq n^2,\ x^2\leqq y\}$,

$C=\{(x, y)\mid 1\leqq x\leqq n^2,\ 1\leqq y\leqq n,\ y\leqq\sqrt{x}\}$

$=\{(x, y)\mid 1\leqq y\leqq n,\ 1\leqq x\leqq n^2,\ y^2\leqq x\}$

よって　$n(C)=n(B)=\dfrac{1}{6}n(4n^2-3n+5)$

印刷本

16.29 (1) $2k = k(k+1) - (k-1)k$ より

$$2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1) - (k-1)k\}$$
$$= n(n+1)$$

よって $\quad \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)}$

(2) $3k^2 + 3k = k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}$$
$$= n(n+1)(n+2)$$

これに (1) の結果を代入する

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3}{2}n(n+1) = n(n+1)(n+2)$$

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

$k^3 = k(k+1)^2 - (k-1)^2k^2$ より

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}\{k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2\}$$
$$= n^2(n+1)^2$$

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$$

16.30 (1) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10$, $a_5 = 15$, $a_6 = 21$,
$a_7 = 28$, $a_8 = 36$, $a_9 = 45$, $a_{10} = 55$, $a_{11} = 66$, $a_{12} = 78$

よって $\quad \boldsymbol{b_1 = 1,\ b_2 = 36,\ b_3 = 66,\ b_4 = 78}$

(2) $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ であるから

$$a_{n+12} - a_n = \frac{1}{2}(n+12)(n+13) - \frac{1}{2}n(n+1) = 6(2n+13)$$

$2n+13$ は整数であるから，$a_{n+12} - a_n$ は 6 の倍数.

印刷本

(3) (1), (2) の結果から

$$b_{4k-3} = a_{3+12(k-1)} = a_{12k-9} = \frac{1}{2}(12k-9)(12k-8)$$
$$= \boldsymbol{6(4k-3)(3k-2)}$$
$$b_{4k-2} = a_{8+12(k-1)} = a_{12k-4} = \frac{1}{2}(12k-4)(12k-3)$$
$$= \boldsymbol{6(3k-1)(4k-1)}$$
$$b_{4k-1} = a_{11+12(k-1)} = \quad -1 = \frac{1}{2}(12k$$
$$= \boldsymbol{6k(12k-1}$$
$$b_{4k} = a_{12+12(k-1)} = a_{12k}$$
$$= \boldsymbol{6k(12k+1)}$$

(4) (3) の結果から　$b_{4k-3} + b_{4} \quad -1 + \quad 6 \quad 24k +$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{4n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(b_{4k-3} + b_{4k-2} + b_{4k-1} + b_{4k})$

$$= 6\sum_{k=1}^{n}(48k^2 - 24k + 7)$$
$$= 6\left\{48\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n \quad 24\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 7n\right\}$$
$$= \boldsymbol{6n(8n^2 + 12n + 3)}$$

$$\sum_{k=1}^{\quad} k(\quad = \sum_{k=1}^{n-1}(k^2 + a$$
$$= \quad -1, \quad) + \frac{1}{\quad} \quad -1)$$
$$\quad -1)(2n - \quad) \quad \cdots (*)$$

(*) より　$\quad \times \dfrac{(n-1)(2n-1+3a)}{6} \quad \cdots ①$

S は整数であ　ら，6 と n が互いに素であるとき

$$(n-1)(2n-1+3a)$$

は 6 で割り切れる．よって，① により，S は n で割り切れる．

印刷本

(2) (∗) より

$$S = \frac{1}{6}n(n-1)\{2(n-2)+3(a+1)\}$$
$$= n(n-1)\left(\frac{n-2}{3}+\frac{a+1}{2}\right) \quad \cdots ②$$

条件から，$n-2$ は 6 で割り切れ，$a+1$ は偶数であるから

$$\frac{n-2}{3}+\frac{a+1}{2}$$

は整数である．よって，② によ[illegible] S は n で割[illegible]．

(3) (∗) より

$$S = \frac{1}{6}n\{(n-3)+2\}\{2(n-[illegible]$$
$$= \frac{1}{6}n\{2(n-3)^2+3(a[illegible]$$
$$= n\left\{\frac{(n-3)^2}{3}+[illegible]\right.$$

条件から，$n-3$ は 6 で割[illegible]れ，a は自[illegible]あるか

$$\frac{(n-3)^2}{3}+\frac{(a+3)(n-[illegible]\quad a$$

[illegible]数で[illegible]のことと S が整数であ[illegible]から，$\frac{2}{3}n$ は整数である．

さら[illegible]$\leqq\frac{2}{3}$[illegible]すなわち，$0 \leqq \frac{2}{3}$[illegible]-1 である．

[illegible]，③[illegible]，[illegible]割った余りは $\boldsymbol{\frac{2}{3}n}$

[illegible]は，[illegible]，公比[illegible]，項数 n の[illegible]列の和であるから

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{}}$$

$\frac{n}{}$

(2)[illegible]り

$$= 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}$$
$$= r + 2r^2 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n$$

上の 2 式の辺[illegible]引くと

$$(1-r)T = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n$$
$$= S - nr^n$$

よって $\quad \boldsymbol{T = \frac{S - nr^n}{1-r}}$

見本

(3) $U=\sum_{k=1}^{n}k^2r^{k-1}$ より

$$\begin{aligned} U&=1+2^2r+3^2r^2+\cdots\qquad\quad+n^2r^{n-1}\\ rU&=\qquad r+2^2r^2+\cdots+(n-1)^2r^{n-1}+nr^n \end{aligned}$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$\begin{aligned} (1-r)U&=1+3r+5r^2+\cdots+(2n-\quad)\quad-n^2r^n\\ &=\sum_{k=1}^{n}(2k-\quad)\quad n^2\\ &=2\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}-\quad\\ &=2T-S \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{U=\dfrac{2T-\quad}{1-}}$

16.33　(1) $n=$　$(0\leqq r<10)$ をみたす整数 q,　

$$\sum_{k=1}^{\quad}\left[\frac{k}{\quad}\right]\quad 2i+q(r+1)=5q(q-\quad)+q(r+1)=q(5q+r-4)$$

ここで，$q($　238，$q<5q+r-4$ であるから

$$238=\quad 8=2\times\quad\times 34=14\times 17$$

したがって　　よって　**73**

$\sqrt{n}$　$=m$ と　$1=m-\dfrac{1}{2}$ より

$=\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2$　すなわち　$n=m(m-1)-\dfrac{3}{4}$

$\left[\sqrt{n+}\quad\right]=k$ を満たす最小の自然数 n は　$n=k(k-1)$

ゆえに，$\left[\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{2}\right]=k$ を満たす自然数 n は

$$k(k-1)\leqq n<k(k+1)$$

印刷本

(ii) $\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}=m$ とすると，$\sqrt{n}=m-\dfrac{1}{2}$ より

$$n=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{すなわち} \quad n=m(m-1)+\frac{1}{4}$$

$\left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]=k$ を満たす最小の自然数 n は　$n=k(k-1)+1$

ゆえに，$\left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]=k$ を満たす自然数 n は

$$k(k-1)+1 \leqq n \leqq k(k-1)+1$$

(i)，(ii) より k を自然数として

$$\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=1$$

16.34　(1)　$k(k+1)-(k-1)k=2k$ から

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)-(k-1)k\}=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)=\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=(n+1)^3-1^3$$

これに (1) の結果および $\sum_{k=1}^{n}1=n$ を代入すると

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\times\frac{1}{2}n(n+1)+n=n^3+3n^2+3n$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

補足　証明法に制約がなければ，次式を利用するとよい．

$$k(k+1)(2k+1)-k(k-1)(2k-1)=6k^2$$

印刷本

(3) $k^2(k+1)^2-k^2(k-1)^2=4k^3$ であるから

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{k=1}^{n}\{k^2(k+1)^2-k^2(k-1)^2\}\quad\text{ゆえに}\quad\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

補足 S_n は分かっているので，$S_k-S_{k-1}=a_k$ を利用する．

(4)
$$\begin{aligned}
f_1(k)&=k &&= &&k\\
f_2(k)&=k(k+1) &&= &&+k\\
f_3(k)&=k(k+1)(k+2) &&= &&2k\\
f_4(k)&=k(k+1)(k+2)(k+3) &&= k^4+ &&+6k
\end{aligned}$$

とおくと，$k^4=f_4(k)-6f_3(k)$ [illegible] る．ここで

$$\sum_{k=1}^{n}f_1(k)=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}f_2(k)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k[illegible]=\frac{1}{3}n(n+[illegible](n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n}f_3(k)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+[illegible]2)(k+3)[illegible]-1)k([illegible])\}$$

$$=\frac{1}{[illegible]}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\sum_{k=1}^{[illegible]}f_4(k)[illegible](k+1)(k+2)(k+3)([illegible]-(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\}$$

$$=\frac{1}{5}n([illegible]2)(n+3)(n+4)$$

[illegible]がって

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\sum_{k=1}^{n}\{f_4([illegible](k)+7f_2(k)+[illegible])\}$$

$$=\frac{1}{[illegible]}([illegible]1)(n[illegible]$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)([illegible])(n+3)$$

$$\times\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{[illegible]}([illegible]1)\{6(n+2)(n+3)(n+4)-45(n+2)(n+3)+70(n+2)-15\}$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}$$

見本

解説 $(k+1)^5-k^5$ の展開式を利用するのが一般的であるが，別解を紹介した．

補足 連続する自然数のべき乗和 (分大 [医]2014) 8

16.35 (1) $k \geqq 1$ のとき $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ すなわち $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < S_n$

よって $\log(n+1) < S_n \quad \cdots ①$

$k \geqq 2$ のとき $\displaystyle\frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$

ゆえに $\displaystyle 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}$

よって $S_n < 1+\log$ ②

①，② より $\log(n+1)$ $1+\log n$

(2) $a_k b_{k+1} + b_{k+1}\Delta a_k = a_k(b_{k+1}-b_k) + b_{k+1}(a_{k+1}-a_k)$

$= a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k$

に $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_k b_k + b_{k+1}\Delta a_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k)$

$= a_n b_n$

て $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1}\Delta a_k \quad \cdots (*)$

$(*)$ に S_k, を適用すると

$\dfrac{1}{k+1}$ 2 $1)$ であ

$k=$ $= S_n\cdot\dfrac{1}{2}n($ $- S_1\cdot 0 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}k(k+1)\cdot\frac{1}{k+1}$

$\dfrac{1}{2}n(n-1)S_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}k$

$= \dfrac{1}{2}n(n-1)S_n - \dfrac{1}{4}n(n-1)$

$= \left(S_n - \dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}n(n-1)$

よって $\boldsymbol{P(n) = \dfrac{1}{2}n(n-1)}$

見本

(3) (2) の結果から　$\dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = S_n - \frac{1}{2}$

ゆえに　$\dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n = S_n - \log n - \frac{1}{2}$　$\cdots$③

(1) の結果から　$\log(n+1) - \log n - \dfrac{1}{2} < S_n - \log n$ [illegible] $< \dfrac{1}{2}$

ゆえに　$-\dfrac{1}{2} < \log\left(1 + \dfrac{1}{}\right) - \dfrac{1}{2} < S_n -$ [illegible] $< \dfrac{1}{2}$　$\cdots$④

③，④ より　$-\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{n(n-1)}$ [illegible] $< \dfrac{1}{2}$

よって　$\left|\dfrac{2}{n(n}$ [illegible] $< \dfrac{1}{2}$

16.36　(1) 正の奇数 b を，3 以上の [illegible] 自然数 [illegible] 用い

$$b = p_1{}^{i_1} p_2{}^{i_2} \cdots p_n{}^{i_n} \quad [illegible] = 1, 2$$

[illegible]

$$f(b) = (1 + p_1 + p_1{}^2 + \cdots + p_1{}^{i_1})(1 + p_2 + p_2{}^2 + \cdots + p_2{}^{i_2})$$
$$\times (1 + p_n + p_n{}^2 + \cdots + p_n{}^{i_n})$$
$$= \frac{p_1{}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2{}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{p_n{}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1}$$

$a = 2$ [illegible]，$a = p_1{}^{i_1} p_2{}^{i_2} \cdots p_n{}^{i_n}$ [illegible] から，上の結果を利用して

$$f(a) = \frac{2^{i+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{p_1{}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2{}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{p_n{}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1}$$
$$= (2^{i+1} - 1) f(b)$$

(2) $p \geqq 2$ より，[illegible] なくとも pq，q の 2 個の約数にもつから

$$f(a) \geqq pq + q = (p+1)q$$

等号が成り [illegible] は，a の約数が pq，q の 2 個，すなわち，pq は素数，$q = 1$ のときで [illegible] よって，等号は p が素数，$q = 1$ のときに限り成り立つ．

(3) $a = 2^m r$，$b = 2^n s$ を (1) の結果に適用すると

$$f(a) = (2^{m+1} - 1) f(r), \quad f(b) = (2^{n+1} - 1) f(s)$$

印刷

$f(a)=2b$，$f(b)=2a$ をみたすとき

$$(2^{m+1}-1)f(r)=2\cdot 2^n s,\quad (2^{n+1}-1)f(s)=2\cdot 2^m r$$

ゆえに　$(2^{m+1}-1)f(r)=2^{n+1}s,\quad (2^{n+1}-1)f(s)=2^{m+1}r$　$\cdots$①

① において $2^{m+1}-1$ および $2^{n+1}-1$ は 2 と互いに素であるから，

$$s=(2^{m+1}-1)s',\quad r=(2^{n+1}-1)r'\quad (s',r'\text{は自然数})\quad \cdots②$$

とおける．② を ① に代入すると

$$f(r)=2^{n+1}s'\quad ③\qquad f(s)=2^{m+1}r'\cdots④$$

② を (2) の結果に適用すると

$$f(s)\geqq\{(2^{m+1}-$$
$$f(r)\geqq\{(2^{n+1}$$

③，⑥ より $s'\geqq r'$ となり　より　ら

このとき，⑤，⑥ にお　が成り立

ゆえに (2) の結論から，$2^{}-1$，2^{n+1}　素数．　1 である．

よ　り，r，s は素数であり，$r=$　1　なる．

16.37　(1)　5，　$+4(2n+3)\quad (n\geqq 1)$　か

$n\geqq 2$　$+\sum_{k=1}^{n-1}4(2k+3)$

$=1$　$(n-1)$　$12(n-1)$

$+8n+3=($　$)(2n+3)$

　$n=$　立つの

$$(2n+1)\qquad a_n=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

(2)　(1)

$$S_n=\frac{1}{2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{n}{3(2n+3)}$$

16.38　(1)　$a_{n+1}+b=2(a_n+b)$ より　$a_{n+1}=2a_n+b$

これが $a_{n+1}=2a_n+2$ に一致するから　$\boldsymbol{b=2}$

見本

(2) (1) の結果から　$a_{n+1}+2=2(a_n+2)$

ゆえに　$a_n+2=(a_1+2)\cdot 2^{n-1}=(2+2)\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$

よって　　$\boldsymbol{a_n=2^{n+1}-2}$

(3) (2) の結果から

$$\frac{a_{2n}}{a_n}=\frac{2^{2n+1}-2}{2^{n+1}-2}=\frac{2(2^{2n}-1)}{2(2^n-1)}=\frac{(2^n+1)(2^n-1)}{2^n-1}=2^n+1$$

$\dfrac{a_{2n}}{a_n}\geqq 10^{25}+1$ より　$2^n+1\geqq$　ゆえに　$2^n\geqq 10^{25}$

両辺の常用対数をとると　$n\log_{10}2\geqq 25$

$\dfrac{25}{\log_{10}2}=\dfrac{25}{0.3010}=83.05\cdots$ よ　の n は　$\boldsymbol{n=84}$

16.39　(1)　$a_2=\dfrac{1}{3}a_1+1=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{5}{4}\right)$　$=\dfrac{7}{12}$

$b_1=$　$=\dfrac{7}{12}-\left(-\dfrac{5}{4}\right)=\boldsymbol{\dfrac{11}{6}}$

(2)　から

a_n+n,　a_{n+2}　$a_{n+1}+n+1$

第 2 式　1 式　を引くと

$-a_n$　$a_{n+1}-a_n)+1$　すわち　$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+1$

がっ　$b_{n+1}-\dfrac{3}{2}=$　$\left(b_1-\dfrac{3}{2}\right)$

$b_n-\dfrac{3}{2}=\left(\dfrac{1}{3}\right)$　$\left(b_1-\dfrac{3}{2}\right)$

よって　$=\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{3}{2}}$

印刷不可

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= -\frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2} \right\} \\ &= -\frac{5}{4} + \frac{\frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad 1) \\ &= \mathbf{\frac{3}{2}n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

16.40 (1) $a_n = 3a_{n-1} - 2^n$

上の第 1 式を第 2 式に代

$a_{n+1} = 3(3a_{n-1} - 2^{n-1}) - 2^n$ **−1** −

(2) ($a_{n+1} + a_{n-1} = 5(2a_$

$_{+1} + a$ 数であるから，a_{n-1} 倍数のとき，a_{n+1} は 5 の
倍数 a_1 るから，n が奇 き，a_n は 5 で割り切れる．

(3) れた

a_n $(3a_{n-1} - 2^{n-1}) - 2^n$ $a_n - 2^n = 3(a_{n-1} - 2^{n-1})$

って

$_1 - 2^1 =$

公比 3 の等 列であるから $b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = \mathbf{3^n}$

(4) (3) の結果か $= 2^k + 3^k$ であるから

$$\begin{aligned} = \sum_{k=1}^{n} (2^k + 3^k) &= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} + \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} \\ &= \mathbf{\frac{1}{2}(3^{n+1} + 2^{n+2} - 7)} \end{aligned}$$

16.41 (1) $b_n = a_n - \dfrac{6n-7}{4}$ より $a_n = b_n + \dfrac{6n-7}{4}$, $a_{n+1} = b_{n+1} + \dfrac{6n-1}{4}$

よって　　$a_{n+1}+a_n=\left(b_{n+1}+\dfrac{6n-1}{4}\right)+\left(b_n+\dfrac{6n-7}{4}\right)$

$=b_{n+1}+b_n+3n-2$

$a_{n+1}+a_n=3n-2$ であるから　　$\boldsymbol{b_{n+1}+b_n=0}$

(2) (1) の結果より　$b_{n+1}=-b_n$ $(n \geqq 1)$

よって　　$b_n=b_1\cdot(-1)^{n-1}$

また　　$b_1=a_1-\dfrac{6-7}{4}=-2+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{7}{4}$

ゆえに　　$b_n=-\dfrac{7}{4}\cdot(-1)^{n-1}$

したがって　　$a_n=b_n+\dfrac{6n-7}{4}=$ $\boldsymbol{6n-7}$

(3) (2) の結果より

$\displaystyle\sum_{n=1}^{50}a_n=\sum_{n=1}^{50}\Big($ $(-1)^{n-1}$ $\Big)$

$=-\dfrac{7}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{}(-1)^{n-1}+\dfrac{3}{2}$ $-\sum$

$=-\dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{1-(-1)^{50}}{1-(-1)}+\dfrac{3}{2}$ $-\dfrac{7}{4}\cdot 50$

$+\dfrac{3825}{2}-\dfrac{175}{2}=$

(1)　b_n- るか を数列 の漸化式に代入すると

$b_n=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}+$ $k-k)$

$b_n=n+$ $+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k-\sum_{k=1}^{n-1}k$

$=n+\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k-\dfrac{n(n-1)}{2}$

したがって　　$_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k$　$\cdots$①

(2) ① により　　$b_{n+1}=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$　$\cdots$②

② − ① から　　$b_{n+1}-b_n=b_n$　ゆえに　$b_{n+1}=2b_n$

印刷不可

したがって，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は

$$b_1 = 1 + a_1 = 1 + 0 = 1$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　　$b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

(3) $a_n = b_n - n$ により，(2) の結果から　　$\boldsymbol{a_n = 2^{n-1} - n}$

(4) (3) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2^{k-1} - k)$$

$$= \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \boldsymbol{2^n - \frac{1}{2}n(n+1) - 1}$$

16.43　(1) $\{b_n\}$ は初項 6，公比 3 の等比数列である

$$b_n = 6 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n$$

$b_n = a_{n+1} - 3a_n$ に上の結果を代入すると

$2 \cdot 3^n = a_{n+1} - 3a_n$　ゆえに　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \dfrac{a_n}{3^n} = \dfrac{2}{3}$

$c_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ であるから　$c_{n+1} - c_n = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

また　$c_1 = \dfrac{a_1}{3} = -1$，よって (1) の結果から $\{c_n\}$ は初項 1，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列

c_n から

$$c_n = 1 + \frac{2}{3}(n-1) = \frac{1}{3}(2n+1)$$

$\dfrac{a_n}{3^n} = c_n$ から　$a_n = 3^n c_n$

$$a_n = 3^n \cdot \frac{1}{3}(2n+1) = \boldsymbol{(2n+1) \cdot 3^{n-1}}$$

(3) $b_n = 6 \cdot 3^{n-1}$ と $b_n = a_{n+1} - 3a_n$ より

$$\sum_{k=1}^{n} 6 \cdot 3^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - 3a_k)$$

$$3(3^n - 1) = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - 3\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \cdots (*)$$

見本

このとき，条件および (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = S_n + a_{n+1} - a_1$$

$$= S_n + (2n+3)\cdot 3^n - 3$$

上の 2 式を $(*)$ に代入すると

$$3(3^n - 1) = \{S_n \quad 3)\cdot \quad - 3S_n$$

これを S_n について解くと　　$\boldsymbol{S_n =}$

16.44　(1)　$a_1 = 0$，$a_{n+1} - a_n = \dfrac{n\{1 + (-1)^{n+1}$

$(*)$ に $n = 1, 2, 3, 4$ を代入す

$$a_2 - a_1 = 1, \qquad = 0, \quad a_4 \quad = 3,$$

$a_1 = 0$ あるから　　$\boldsymbol{a_2 = 1,\ a_3 = 1,\ \quad 4,\ a}$

(2) $(*)$ ぞれ，$2n$，$2n+1$ に置き換

$$a_{2n} = \frac{2n\{1 + (-1)^2}{2} \quad = 0$$

$$a_2 \quad = \frac{(2n+1)\{1 + \quad ^{n+2}\}}{2} = 2n + 1$$

たが $\begin{cases} b \quad = 0 & \cdots ① \\ b_{n+1} = 2n + & \cdots ② \end{cases}$

から　　ると　　$c_n = 2n + 1$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(c_{k+1} \quad \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$$

したがって　　$c_1 = 2\cdot\dfrac{1}{2}n(n-1) + n - 1 = n^2 - 1$

$c_1 = a_2 = 1$ から　　$c_n = n^2$

上式は，$n =$ ときも成り立つ．

① から，　のとき　　$b_n = c_{n-1} = (n-1)^2$

$b_1 = a_1 = 0$ であるから，上式は，$n = 1$ のときも成り立つ．

よって，求める一般項は　　$\boldsymbol{b_n = (n-1)^2,\ c_n = n^2}$

印刷本

(3) (2) の結果から

$$\sum_{n=1}^{50}(-1)^n a_n = \sum_{k=1}^{25}\{(-1)^{2k-1}a_{2k-1} + (-1)^{2k}a_{2k}\}$$
$$= \sum_{k=1}^{25}(-b_k + c_k) = \sum_{k=1}^{25}\{-(k-1)^2 + k^2\}$$
$$= \sum_{k=1}^{25}(2k-1) = 25^2 = \mathbf{625}$$

16.45 (1) $a_{n+1} = 1.05 \times a_n - 10$ より　a_{n+1} [illegible] $n - 200)$

したがって，数列 $\{a_n - 200\}$ は，初[illegible] [illegible]

等比数列であるから

$$a_n - 200 = -100 \cdot 1.05^{n-1}$$ [illegible] **100·1** [illegible]

(2) $a_n \leqq 0$ より　$200 \leqq 100$ [illegible] したが[illegible] 1.05

両辺の[illegible]用対数をとると　$(n-1)\log_{10} 1.$ [illegible] $\log_{10} 2$

こ[illegible] $_0 1.05 = \log_{10}\dfrac{21}{20}$

$= \log_{10} 3 + \log_{10} 7 -$ [illegible] $2 +$ [illegible]

$= 0.4771 + 0.8451 -$ [illegible] $0) - 1$

0212

[illegible]がっ[illegible] $n \geqq -$ [illegible] $+ 1$ [illegible]

05

よ[illegible]める[illegible] **16**

16.46 [illegible]られた[illegible]に[illegible]代入

[illegible] $= 3 - a_1$ [illegible]れを解いて　$\boldsymbol{a_1 = -1}$

(2) 与え[illegible]れた関[illegible]ら

$$2[illegible] = 3^n - a_n - 6, \quad 2\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 3^{n+1} - a_{n+1} - 6$$

上の第 2 式[illegible]第 1 式の辺々を引くと $(n \geqq 1)$

$$2a_{n+1} = 2\cdot 3^n - a_{n+1} + a_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2\cdot 3^{n-1}$$

見本

(3) (2) の結果の式の両辺に 3^{n+1} を掛けると

$$3^{n+1}a_{n+1} = 3^n a_n + 2\cdot 3^{2n} \quad \text{ゆえに} \quad 3^{n+1}a_{n+1} - 3^n a_n = 18\cdot 9^{n-1}$$

$n \geqq 2$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(3^{k+1}a_{k+1} - 3^k a_k) = 18\sum_{k=1}^{n-1} 9^{n-1}$

$$3^n a_n - 3a_1 = 18 \times \frac{9^{n-1}-1}{9-1}$$

$a_1 = -1$ を代入して $3^n a_n = \dfrac{9^n}{4} - \dfrac{21}{4}$ ゆえに $\dfrac{}{4} - \dfrac{7}{4\cdot 3^{n-1}}$

上式は，$n = 1$ のときも成立する $\dfrac{}{} - \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{4\cdot 3^{n-1}}}$

16.47 (1) 与えられた漸化式から

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = a_1 + \frac{3}{} \qquad = a_3 + \frac{}{16}$$

上式から $a_4 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{} \qquad 16 = \mathbf{\dfrac{37}{16}}$

(2) $a_{n+1} \quad \dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$ より

$$2^{n+1}a_{n+1} - 2\cdot 2^n a_n = 2n$$

で，す定数 a，b を求める

$f(n)$ $f(n+1) - 2$ $2n+1$ $\cdots$②

ち $a($ $b - 2(an+b) = 2n+1$

理すると $a - b =$

係数 する $a = 2$，$a - b$

解いて $= -3$ $f(n) = -2n - 3$

② か $2^{n+1}a_n$ $2\{2^n a_n - f(n)\}$

初項 $2a_1$ $= 6$，公比 2 の等比数列であるから

$a_n - $ $6\cdot 2^{n-1}$ よって $a_n = 3 + \dfrac{f(n)}{2^n} = \mathbf{3 - \dfrac{2n+3}{2^n}}$

16.48 (1) $a_1 > 0$，$a_1{}^3 =$ を解いて $\boldsymbol{a_1 = 1}$

$a_2 > 0$，$1^3 + $ $= (1+a_2)^2$ より

$a_2(a_2+1)(a_2-2) = 0$ よって $\boldsymbol{a_2 = 2}$

$a_3 > 0$，$1^3 + 2^3 + a_3{}^3 = (1+2+a_3)^2$ より

$$a_3(a_3+2)(a_3-3) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_3 = 3}$$

印刷本

(2) (イ) より

$$\sum_{k=1}^{n+1} {a_k}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2, \quad \sum_{k=1}^{n} {a_k}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$${a_{n+1}}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

$$= a_{n+1}\left(a_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

$a_{n+1} \neq 0$ であるから　　$a_{n+1}^2 = a_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} a_k$

(3) (2) の結果から，$n \geqq 2$ のとき

$${a_{n+1}}^2 = a_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad a_n^2 = a_n + 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$${a_{n+1}}^2 - {a_n}^2 = a_{n+1} - a_n + 2a_n$$

すると　　$a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 1) = 0$

$a_{n+1} + a_n > 0$ であるから　　$a_{n+1} - a_n = 1$

数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 1 の等差数列であるから

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot 1 = \boldsymbol{n}$$

16.49 (1) 与えられた漸化式より

$$a_2 = \frac{2a_1}{1 - {a_1}^2} = \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{1 - {a_2}^2} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = -\sqrt{3}$$

$$a_4 = \frac{2a_3}{1 - {a_3}^2} = \frac{2\cdot(-\sqrt{3})}{1 - \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3}$$

見本

したがって，a_2 以降は，交互に $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ の繰り返しであるから

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad a_n = (-1)^n\sqrt{3}\quad (n \geqq 2)}$$

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12} = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \boldsymbol{2 - \sqrt{3}}$

(3) $a_n = \tan\theta_n$ とおくと　$a_{n+1} = \dfrac{2\tan\theta_n}{1 - \tan^2\theta_n} = \tan 2\theta$

$a_1 = \tan\dfrac{\pi}{20}$ より

$a_2 = \tan\dfrac{\pi}{10}$，$a_3 = \tan\dfrac{\pi}{5}$，$a_4$ [illegible] $\tan\dfrac{4}{5}\pi$，

$a_6 = \tan\dfrac{8}{5}\pi = \tan\dfrac{3}{5}\pi$，$a_7$ [illegible]

ゆえに，a_3 以降は，$\tan\dfrac{\pi}{5}$ [illegible]，tan [illegible] 繰り返しになる．

よって，$a_{n+k} = a_n$ $(n =$ [illegible] $\cdots)$ をみたす最小の自 [illegible] $\boldsymbol{4}$

16.50 (1) $n-1$ [illegible] 線で分割された領域に n 本目 [illegible] を引くことで，新たな [illegible] 個でき，分割される領域の [illegible] える．って

$$L_1 = 2,\quad \boldsymbol{L_n = [illegible] + n\ (n \geqq 2)}$$

n [illegible] とき

$$[illegible] - L_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$

えに　$L_n - [illegible] = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n -$ [illegible]

す [illegible] $n+2)$

$= 2$ で [illegible] つ，上 [illegible] も成り立つ．

$$\boldsymbol{[illegible]_n = \frac{1}{2}(n^2 + [illegible] + 2)}$$

(2) $H_1 = 2$ で，2 [illegible] の 1 回折れ線を引くことで，4 個の交点ができ，分割される領域が 5 [illegible] るから　$H_2 = H_1 + 5 = 7$

さらに，3 本 [illegible] 1 回折れ線を引くことで，4·2 個の交点ができ，分割される領域が [illegible] 1 個増えるから　$H_3 = H_2 + 4\cdot 2 + 1 = \boldsymbol{16}$

(3) n 本の 1 回折れ線で分割された領域に $n+1$ 本目の 1 回折れ線を引くことで，$4n$ 個の交点ができ，分割される領域が $4n+1$ 個増えるから

$$H_1 = 2,\quad H_{n+1} = H_n + 4n + 1$$

印刷本

が成り立つ.

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(H_{k+1}-H_k)=\sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)$

ゆえに　$H_n - H_1 = 2n^2 - n - 1$

すなわち　$H_n = 2n^2 - n + 1$

$H_1 = 2$ であるから，上式は $n=1$ のときも成り立つ

したがって　$\boldsymbol{H_n = 2n^2 - n}$

16.51　(1) $a_{k+1} \neq a_k$ のとき，m_k は直線 P_k [illegible] から

$$m_k = \frac{a_{k+1}}{a}$$

$a_{k+1} = a_k$ のとき，m_k は上式 [illegible] 限値であるから

$$m_k = a_k$$

上の 2 [illegible] ら　$m_k = a_{k+1} + a_k$　よって　$= -$

(2) m [illegible] であるから　$a_{k+1} + a_k = m$

[illegible] に　$(-1)^{k+1}a_{k+1} - (-1)$ [illegible] $= m_1(-r)^{k-1}$

$k \geqq$ [illegible] き　$)^{j+1}a_{j+1} - (-1)^{j}a_j = m_1\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}(-r)^{j-1}$

$$(-1)^{k}a_k - a_1 = m_1\sum_{j=1}^{k-1}(-r)^{j-1}$$

[illegible] って　$(-1)^{k}a_k - (-1)^{k}m_1\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}(-r)^{j-1} \quad \cdots (*)$

[illegible] なわち　$r \neq$ [illegible] とき，$(*)$ より

$$a_k = (-1)^{k+1}a_1 + (-1)^k m_1 \times \frac{1-(-r)^{k-1}}{1+r}$$
$$= (-1)^{k+1}a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1+r}m_1$$

ii) $-r =$ [illegible] なわち　$r = -1$ のとき，$(*)$ より

$$a_k = (-1)^{k+1}a_1 + (-1)^k m_1(k-1)$$
$$= (-1)^k\{-a_1 + (k-1)m_1\}$$

見本

i)，ii) で得られた結果は，ともに $k=1$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{r \neq -1}\ \text{のとき}\quad \boldsymbol{a_k = (-1)^{k+1}a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1+r}m_1}$$

$$\boldsymbol{r = -1}\ \text{のとき}\quad \boldsymbol{a_k = (-1)^k\{-a_1 + (k-1)m_1\}}$$

(3) $m_1 \neq 0$ より $a_1 = \dfrac{m_1}{1+r} \neq 0$．$r \neq -1$ より (2) の結果か

$$a_k = (-1)^{k+1}a_1 + \frac{(-1)^k +$$
$$= (-1)^{k+1}\{(-$$
$$= r^{k-1}a_1$$

$m_k = a_{k+1} + a_k$ および上式から a_k

$$m_k$$

よって ℓ_k の方程式は

$$y - a_k{}^2 = (1+r)a_k(x - a_k) \quad \text{すなわ} \quad = (1+$$

直線 $(1+r)a_kx - ra_k{}^2$ について，$(1+$ ，これが

$\neq$ のとき，$b \neq 0$ である．2 式 $=$ より整理 と

$$bx^2 - (1+r)a_k$$

こ

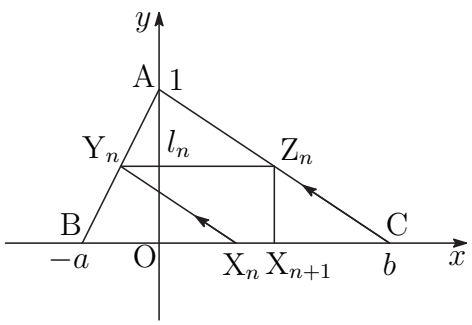
$$D = (1+r)^2a_k{}^2 - 4bra_k{}^2$$
$$= \{(1+r)^2 - 4br\}a_k{}^2$$

$\boldsymbol{\neq -1}$ で ら $\boldsymbol{(1+r)^2 - 4br = 0}$ ると，$D=0$ となる．

k に対して ℓ_k は放物線 $y = \dfrac{(1+r)^2}{4r}x^2$ に接する．

16.52 (1) 座標 面上 (0, 1)，B$(-a,\ 0)$，C$(b,\ 0)$，X_n($(n=1,2,3,\cdots)$ を とる．直線 A 程式は

$$y + 1 \quad \cdots ①$$



直線 AC の方程式は

$$y = -\frac{1}{b}x + 1 \quad \cdots ②$$

見本

直線 $\mathrm{X}_n\mathrm{Y}_n$ は点 $(x_n,\ 0)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{b}$ の直線であるから

$$y=-\frac{1}{b}(x-x_n) \quad \cdots ③$$

点 Y_n の y 座標 l_n は，①，③ を解いて　　$l_n=\dfrac{a+x_n}{a+b}$ $\cdots ④$

このとき，$x_1=0$ であるから　　$\boldsymbol{l_1=\dfrac{a}{a+b}}$

(2) 点 Z_n の y 座標が l_n であるから，その x 座標は，

$$l_n=-\frac{x}{b}+1 \quad こ\cdots て \quad -l_n)$$

これが点 X_{n+1} の x 座標であるから

したがって，上式および ④ から

$$l_{n+1}=\frac{a+x_{n+1}}{a+b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{l_n+1}$$

(3) $b=8a$ のとき，(1)，(2) の結果から　$l_{n+1}=-\dfrac{8}{9}l_n+1$

こ…ら　　$l_n=\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n$

$\cdots>\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$

…数で…っ　$\left(\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$　ゆえに　$\left(\dfrac{8}{9}\right)^n<\dfrac{1}{16}$

したが…　n …$\sqrt{9}-3$

…き，3…1…2.17 よ…

$$=\frac{4}{3.17-3}\ \cdots\ 9-3}<\frac{4}{3.169-3}=23.6\cdots$$

よ…求め…小の奇数 n は　　$\boldsymbol{n=25}$

16.53 (1) $a_{n+2}=-a_{n+1}$ …より

a_n …$_{+1}=-2(a_{n+1}-a_n)$　よって　$\boldsymbol{b_{n+1}=-2b_n}$

(2) $b_1=a_2-$ …$-1=1$

$\{b_n\}$ は初項が 1，公比が -2 の等比数列であるから

$$b_n=1\cdot(-2)^{n-1}=\boldsymbol{(-2)^{n-1}}$$

見本

(3) (2) の結果から，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^{k-1}$$
$$= 1 + \frac{1-(-2)^{n-1}}{1-(-2)} = \frac{4-(-2)^{n-1}}{3}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するので　　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{4-(-2)^{n-1}}{3}}$

解説 (宮崎大学 2007) 7

16.54　(1) 与えられた漸化式から

$$a_3 = 5a_2 - 6a_1 =$$
$$a_4 = 5a_3 - 6$$
$$a_5 = 5a_4$$

(2) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1}$　　a_{n+　　$+\beta)$

これと $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ の係数を比較

$\alpha\beta = 6$　これを解いて　　$\boldsymbol{3)}$，

の結

a_n　　$_{n+1} =$　　$2a_n)$　ゆえに　$a_{n+1} - 2a_n = 3^{n-1}(a_2 - 2a_1) = 3^n$

$- 3a_n$　　a_{n+}　　ゆえに　$a_{n+1} - 3a_n = 2^{n-1}(a_2 - 3a_1) = 2^{n+1}$

の 2　々を

$\boldsymbol{a_n = 3}$　　$\boldsymbol{^{n+1}}$

16.　r　　とき　　より

n が奇　　き，　　と　$a_{2m+1} = -4a_{2m-1}$

は，初項　　公比 -4 の等比数列であるから

$$a_{2m-1} = (-4)^{m-1}$$

$m = \dfrac{n+}{2}$　るから　　$\boldsymbol{a_n = (-4)^{\frac{n-1}{2}}}$

(ii) n が偶数　き，$n = 2m$ とおくと　$a_{2m+2} = -4a_{2m}$

数列　は，初項 $a_2 = 3$，公比 -4 の等比数列であるから

$$a_{2m} = 3\cdot(-4)^{m-1}$$

$m = \dfrac{n}{2}$ であるから　　$\boldsymbol{a_n = 3\cdot(-4)^{\frac{n-2}{2}}}$

見本

(2) (a) $r=5$ のとき，$a_{n+2}=5a_{n+1}-4a_n$ より

$$a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n),\quad a_{n+2}-4a_{n+2}=a_{n+1}-4a_n$$

ゆえに　　$b_{n+1}=4b_n$，$c_{n+1}=c_n$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $a_2-a_1=3-1=2$，公比 4 の等比数列であるから

$$b_n=2\cdot4^{n-1}=\mathbf{2^{2n-1}}$$

数列 $\{c_n\}$ は初項 $a_2-4a_1=$ [illegible] $4\cdot1=-1$ [illegible] 式から

$$\mathbf{1}$$

(b) (a) の結果から　$a_{n+1}-a_n=2^{2n}$ [illegible]

上の 2 式から，a_{n+1} を消去 [illegible]

(3) (c) $r=4$ のとき，$a_{n+2}=4$ [illegible] a_n [illegible]

$$\frac{a_{n+2}}{2^{n+2}}-\frac{a}{2^{}}=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}$$ に

[illegible] は初項 $\frac{a_2}{2^2}-\frac{a_1}{2^1}=\frac{1}{4}$ および [illegible] か

数列 [illegible] 初項 $\frac{a_1}{2^1}=\frac{1}{2}$，公差 $\frac{1}{4}$ の [illegible] 列であるから

$$\frac{a_n}{} = \frac{1}{}(n-1)\quad \text{よって}\quad \mathbf{a_n=(n+1)\cdot2^{n-2}}$$

6 ($a_{n+2}-5b$ [illegible] $_2-5b$ [illegible] $_n=$ [illegible] と a_{n+2} [illegible] $_{n+1}+6_n=1$ の辺々の差をとると

$$(b_{n+} \text{ [illegible] } -5(a_{n+1}-b \text{ [illegible] } 6(b_n-a_n)=-1$$

$a_n=$ [illegible] か

[illegible] $-5c+6c$ [illegible] これを解いて　$\boldsymbol{c=-\frac{1}{2}}$

(2) (1) の結果よ [illegible] $=a_n-\frac{1}{2}$ であるから

$$b_1 \text{ [illegible] } -\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad b_2=a_2-\frac{1}{2}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

① より

$$b_{n+2}-2b_{n+1}=3(b_{n+1}-2b_n)$$
$$b_{n+2}-3b_{n+1}=2(b_{n+1}-3b_n)$$

見本

数列 $\{b_{n+1}-2b_n\}$ は初項 b_2-2b_1，公比 3 の等比数列であり，同様に，
数列 $\{b_{n+1}-3b_n\}$ は初項 b_2-3b_1，公比 2 の等比数列であるから

$$b_{n+1}-2b_n = 3^{n-1}(b_2-2b_1) = \frac{1}{2}\cdot 3^n$$
$$b_{n+1}-3b_n = 2^{n-1}(b_2-3b_1) = 2^{n-1}$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$b_n = \frac{1}{2}\cdot 3^n -$$

$a_n = b_n + \dfrac{1}{2}$ であるから

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot 3^n - 2^{\cdot}$$

16.57 (1) 漸化式から

$$a_{n+4} = c\cdot a_{n+2}$$
$$a_{n+3} = ca_{n+2} - a_{n+1}$$
$$a_{n+2} = ca_{n+1} - a_n$$

3 式から a_{n+1} を消去する)

$$a_{\cdot} = a_{\cdot+3} - a_{n+2} \quad \cdots ①$$
$$- ca_{n+1} \quad \cdots ② \times c$$
$$a_{n+2} = \cdot - a_n \quad \cdots ③$$

これ 式の辺 えて整理する

$$a_{\cdot} = \cdot - a_{\cdot} - \quad a_{n+4} = a_2a_{n+2} - a_n$$

(2) $a_2 = 0$ で (1) の結果から

$= -a_n$ ゆえに $a_{4(n+1)} = -a_{4n}$ $\cdots(*)$

また，$a_1 = \sqrt{\ } = 0$，$a_{n+2} = \sqrt{2}a_{n+1} - a_n$ より

$$a_3 = \sqrt{2}a_2 - a_1 = -\sqrt{2}$$
$$a_4 = \sqrt{2}a_3 - a_2 = -2$$

$100 - 4 = 4 \times 24$ であるから，$(*)$ より

$$a_{100} = (-1)^{24}a_4 = \mathbf{-2}$$

見本

16.58 (1) $(\alpha+\beta)(\alpha^n+\beta^n)=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$

$\alpha=5+\sqrt{26}$，$\beta=5-\sqrt{26}$ とおくと　$\alpha+\beta=10$，$\alpha\beta=-1$

ゆえに　$10(\alpha^n+\beta^n)=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}-(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$

したがって　$10a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$　よって　$a_{n+2}=10a_{n+1}+a_n$

(2) $a_1=2$，$a_2=\alpha+\beta=10$ であるから，(1) の結果から，すべての自然数 n に対して，a_n は自然数である．

(3) $-0.1<5-\sqrt{26}<0$ より，$0<$ [illegible] <0.1 で

$0<(-\beta)^{99}<0.1^{99}$　すなわ [illegible] $<0.1^{99}$　$\cdots$①

$a_{100}=\alpha^{99}+\beta^{99}$ であるから　[illegible]

①，② より　$0<\alpha^{99}-a_{1}$ [illegible]

(2) の結果から a_{100} は自然 [illegible] るから，す [illegible] $)^{99}$ の小数第 1 位から小数第 99 [illegible] での数字が [illegible] 0 で

16.59 (1) a_{n+} [illegible] $+a_n$，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ より

$$\frac{a_{n+2}}{\quad+1}=\frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}}=\frac{\quad}{\quad+1}=\boldsymbol{1+\frac{1}{b_n}}$$

(2) $a_{\quad}=1$，$b_{\quad}$ [illegible] で求め [illegible] の漸 [illegible]

$b_{n+1}=1+\dfrac{1}{\quad}$ $(*)$

ると [illegible] 1 およ [illegible] 0

[illegible]，$n=2,$ [illegible] 対して　$b_n>1$

よ [illegible] n [illegible] $,\cdots$ に対して　$b_n\geqq 1$

(3) $(*)$ および $\alpha=$ [illegible] $\dfrac{1}{\alpha}\cdots$① に注意して

$$b_{n+1}-\alpha=1-\alpha+\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_n}-\frac{1}{\alpha}$$

したがって，(2) の結果により

$$|b_{n+1}-\alpha|=\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{\alpha b_n}|b_n-\alpha|\leqq\frac{1}{\alpha}|b_n-\alpha|$$

見本

(4) (3) の結果および ① に注意して ($\alpha > 0$)

$$|b_n - \alpha| \leqq \frac{1}{\alpha^{n-1}}|b_1 - \alpha| = \frac{1}{\alpha^{n-1}}|1 - \alpha| = \frac{1}{\alpha^{n-1}}\left|-\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{\alpha^n}$$

16.60 (1) n 分後における赤玉 a_n 個は，$n+1$ 分後に白玉 $2a_n$ 個に変化し，n 分後における白玉 b_n 個は，$n+1$ 分後に赤玉 b_n 個と白玉 b_n 個に変化する．これに赤玉 1 個が追加されるから，$n+1$ 分後には赤玉 $b_n +$ [illegible] と白玉 $2a_n + b_n$ 個になる．よって　$\boldsymbol{a_{n+1} = b_n + 1} \cdots ①$，$\boldsymbol{b_{n+1} =}$ [illegible] $\boldsymbol{b_n} \cdots ②$

(2) ① より　$b_n = a_{n+1} - 1$，$b_{n+1} =$ [illegible] $- 1$

これらを ② に代入すると

$$a_{n+2} - 1 = 2a_n + (a_{n+1} - 1)$$ [illegible]

(3) (2) の結果から　$a_{n+2} - 2a_{n+1}$ [illegible]

$c_n = a_{n+1} - a_n$ より　c_{n+ [illegible]

$c_1 = a_2 - 2a_1 = 1 - 2\cdot 1$ [illegible] あるから

$$c_n = c_1\cdot(-1)^{n-1} = -1\cdot(-$$ [illegible] $= (-$

(4) [illegible] $a_{n+1} - 2a_n = (-1)^n$ [illegible] $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{a_n}{2^n} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

$d_n =$ [illegible] $d_n = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

$\dfrac{1}{2} =$ [illegible] るか [illegible] $= 2$ のとき

$d_n =$ [illegible] $\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^k$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}$ [illegible] $= \dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

上式 [illegible]，$n =$ [illegible] きも成立するので　$\boldsymbol{d_n = \dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}$

(5) (4) の結果か [illegible]

$$a_n = 2^n \times \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\{2^n - (-1)^n\}}$$

① より

$$b_n = a_{n+1} - 1 = \frac{1}{3}\{2^n - (-1)^n\} - 1 = \boldsymbol{\frac{1}{3}\{2^{n+1} - (-1)^{n+1} - 3\}}$$

見本

解説 (九工大 [情]2006) 3

16.61 (1) $p=\dfrac{9}{10}$ とおくと，与えられた漸化式は

$$a_1=\frac{1}{p},\ a_2=2,\ a_{n+2}-2pa_{n+1}+p^2a_n=0 \quad \cdots ①$$

したがって　　$a_{n+2}-pa_{n+1}=p(a_{n+1}-pa_n)$

$b_n=a_{n+1}-pa_n$ であるから

$$b_1=a_2-$$　　b_n

数列 $\{b_n\}$ は，初項が 1，公比が p の　　から

$$b_n=1\cdot p^{n-1}$$　すな　　

(2) $b_n=p^{n-1}$ を $a_n=pb_nc_n$ に　　と　c　　c_n

また，a　$=\dfrac{1}{p}$，$a_2=2$ より　$c_1=\dfrac{1}{p^2}$，c_2

②　　すると　$p^{n+2}c_{n+2}-2p\cdot p^{n+$　　$=$

　がって　　$c_{n+1}=c_{n+1}-c_n$，c_2　　$\dfrac{2}{p^2}-\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{1}{p^2}$

数　　は，　　公差が $\dfrac{1}{p^2}$ の等比数列であるから

$$c_n=\frac{1}{}+(n-1)\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{}{p^2}$$　えに　$\boldsymbol{c_n=\dfrac{100}{81}n}$

　と ② に　　て　　$=\dfrac{n}{}$　^{2}　　よって　$\boldsymbol{a_n=n\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-2}}$

(3)

$$=\frac{(n+1)p^{n-1}}{np^{n-2}}=\frac{(n+1)p}{n}=\frac{9(n+1)}{10n}$$

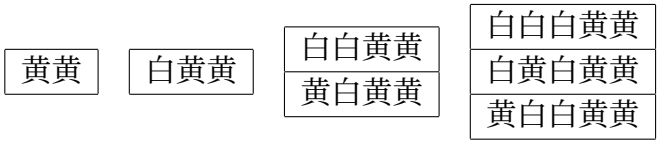
したがって　　$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1=\dfrac{9-n}{10n}$

ゆえに　　$a_2<\cdots<a_9=a_{10}>a_{11}>\cdots$

よって，a_n は $\boldsymbol{n=9,\ 10}$ のとき最大

16.62 (1) 次の場合により　$\boldsymbol{f(2)=1,\ f(3)=1,\ f(4)=2,\ f(5)=3}$

見本



(2) $n \geqq 4$ のとき，$f(n)$ の総数は，次の 2 つの場合に分けられる．

i) 1 枚目のカードが白色である場合，その総数は，2 回目以降，すなわちその後の $n-1$ 回の総数 $f(n-1)$ に等しい．

ii) 1 枚目のカードが黄色であるとき，2 枚目のカ[illegible]白色であり，その総数は，3 回目以降，すな[illegible]その後の[illegible]の総数 $f(n-2)$ に等しい．

したがって，$f(n) = f(n-1) + f($[illegible]

(ア) $\boldsymbol{f(n-1)}$ (イ) $\boldsymbol{f(n-2)}$ (ウ)[illegible]

(3) $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解が[illegible]数の関係[illegible]り

$= 1, \quad \alpha\beta$[illegible]

(2) の[illegible]から　　$f(n) = (\alpha+\beta)f(n-1)$[illegible]$\beta f(n$

$f(n) - \alpha f(n-1) = \beta\{f($[illegible]$- 2)\}$

$- \beta f(n-1) = \alpha\{f($[illegible]$- \beta f(n-2)\}$

すな[illegible]$= \beta a_{n-1}$，b_n[illegible]αb_{n-1}

[illegible]と，$\{a$[illegible]比 β[illegible]数列であり，$\{b_n\}$ は公比 α の等比数列である．

(3) の結[illegible]

$t+1)$[illegible]$^{n-2}\{f(3)$[illegible]$\} = \beta^{n-2}(1-\alpha) = \beta^{n-1}$

$f(n$[illegible]$\beta f(n)$[illegible]$f(2)\} = \alpha^{n-2}(1-\beta) = \alpha^{n-1}$

[illegible]$^2 - \alpha)f(n) =$[illegible]$^{n-1} - \alpha^{n-1}$

α，β は，2 次[illegible]式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解であるから，

$\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$[illegible]$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とすると

$$\boldsymbol{f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$

見本

16.63 初項 a_1 は　$a_1 = S_1 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = \boldsymbol{a+b+c}$

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= an^2 + bn + c - \{a(n-1)^2 + b(n-1) + c\}$

$= \boldsymbol{2an - a + b}$

16.64 (1) $a_1 = S_1 = 1^2 - 25\cdot 1 = \boldsymbol{-24}$

(2) $n \geqq 2$ のとき

$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2$ [illegible] $- \{(n -$ [illegible] $(n-1)\}$

$= 2n - 26 = -24 +$ [illegible]

上式は，(1) の結果から，$n = 1$ のと[illegible]

よって，$\{a_n\}$ は初項 -24，公差 [illegible]

(3) (1) より，$a_n = 2(n-13)$ [illegible]っ，n [illegible] は[illegible]

$S_n = n(n-25)$ であるか[illegible] $_{36} = 36(36$ [illegible] $= 39$

よって[illegible] > 396 となる最小の n は [illegible] $\boldsymbol{37}$

16.65 (1) [illegible] $= a_1 = 1$，$a_n = S_{n-1} + 4$ [illegible]，[illegible] S_{n-1} [illegible]

[illegible] 2 式[illegible] 2, 3, 4, 5 を代入する[illegible]

[illegible] $S_1 +$ [illegible] $= 5$,　　S_2 [illegible] $- a_2 = 1 + 5 = 6$,

$a_3 = S$ [illegible] $= $ [illegible] 10,　　$S_3 = S_2 + a_3 = 6 + 10 = 16$,

a_4 [illegible] $4 =$ [illegible] $= 20$,　　[illegible] $S_3 + a_4 = 16 + 20 = 36$,

[illegible] $S_4 +$ [illegible] $4 = 40$

[illegible] $\boldsymbol{a}$ [illegible] $\boldsymbol{a_3}$ [illegible] $_4$ [illegible] $_5 = \boldsymbol{40}$

(2) [illegible] $= S_{n-1} +$ [illegible] $= S_n + 4$

上[illegible] 式[illegible] 1 式の辺々を引くと　$a_{n+1} - a_n = S_n - S_{n-1}$

また，$S_n - S$ [illegible] a_n であるから　$a_{n+1} - a_n = a_n$

したがって [illegible] $= 2a_n$　ゆえに　$a_n = a_2\cdot 2^{n-2} = 5\cdot 2^{n-2}$

よって [illegible] $\begin{cases} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{(n=1)} \\ \boldsymbol{5\cdot 2^{n-2}} & \boldsymbol{(n=2,3,\cdots)} \end{cases}$

印刷本

16.66 (1) $n \geqq 2$ のとき

$$S_n = 2a_n + n$$
$$S_{n-1} = 2a_{n-1} + n - 1$$

上の 2 式の辺々を引くと　　$S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1} + 1$

$S_n - S_{n-1} = a_n$ であるから

$$a_n = 2a_n - 2a_{n-1} + 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n =} \quad \boldsymbol{- 1}$$

(2) (1) の結果から，$n \geqq 1$ のとき

$$a_{n+2} =$$
$$a_{n+1} =$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \quad a_n) \quad \text{ち} \quad$$

ここで，$S_1 = 2a_1 + 1$，$S_1 \quad a_1$，$a_2 = 2a_1$ である

$$a_1 = -1,\ a_2 =$$

は，$\quad = a_2 - a_1 = -2$，公比 $\quad$ 等差数列であるから

$$b_n = -2 \cdot 2^{n-1} =$$

(3) ( ) の結

$$2a_n - 1, \quad a_{n+1} - a_n$$

上の から a すると

$$a_n = \quad \text{と} \quad \boldsymbol{a_n = -2^n + 1}$$

16.67 (1) $= 1, 2, 3, \cdots$ $\cdots (*)$

$(*)$ より，$n =$ とき　$S_1 = \dfrac{3}{2}a_1 - 1$

$S_1 = a_1$ であ　　$a_1 = \dfrac{3}{2}a_1 - 1$　　これを解いて　$\boldsymbol{a_1 = 2}$

(2) $(*)$ より，$\quad$ のとき　$S_2 = \dfrac{3}{2}a_2 - 2$

$S_2 = a_1 + a_2$ であるから，上式および (1) の結果から

$$2 + a_2 = \frac{3}{2}a_2 - 2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a_2 = 8}$$

見本

(3) $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ であるから，$(*)$ より

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=S_{n+1}-S_n\\&=\left\{\frac{3}{2}a_{n+1}-(n+1)\right\}-\left(\frac{3}{2}a_n-n\right)\\&=\frac{3}{2}a_{n+1}-\frac{3}{2}a_n-1\end{aligned}$$

整理すると　$a_{n+1}=3a_n+2$　ゆえに　$a_{n+1}+1=$　$1)$

したがって　$a_n+1=(a_1+1)\cdot$　よって　$\boldsymbol{-1}$

16.68 (1) 与えられた漸化式から　$a_{n+2}-$

$a_{n+1}=4a$

上の 2 式の辺々を引くと　$a_{n+2}-$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ を代入して　を

$$\boldsymbol{a_{n+2}=\quad -4a_n}\qquad ,2,3$$

(2) $a_1=$　$=4a_1-S_1$，$S_1=a_1$ より，a_2　あ

$b_1=a_2-2a_1=6-$

) の結　$-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-$　すなわち　$b_{n+1}=2b_n$

よ　b_n　$2\cdot2^{n-1}=\boldsymbol{2^n}$

(　の結果　a_{n+}　$=2^n$　で　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}$

数列　は初　公差が $\dfrac{1}{2}$ の等　列であるから

$\dfrac{}{2}+(n$　-1　と　$\boldsymbol{a_n=(n+1)2^{n-1}}$

16.69 (1) a_n　$_{n+}$　より

$a_{}$　$\{2a_{n+1}+(n+1)^2\}-(2a_n+n^2)$

ゆえに　$\boldsymbol{a}$　$\boldsymbol{2a_n-2n-1}$　$\cdots$①

(2) 初項 a_1 は　$S_1=2a_1+1^2$

$S_1=a_1$　$a_1=-1$

① に対して，次の等式をみたす n の 1 次式 $f(n)$ を考える．

$$f(n+1)=2f(n)-2n-1\quad\cdots②$$

見本

$f(n)=pn+q$ とおくと　　$p(n+1)+q=2(pn+q)-2n-1$

n に関する恒等式であるから　　$p=2,\ q=3$

ゆえに　　$f(n)=2n+3$　$\cdots$③

① − ② から　　$a_{n+1}-f(n+1)=2\{a_n-f(n)\}$

したがって　　$a_n-f(n)=2^{n-1}\{a_1-f(1)\}$

$a_1=-1$，③ より　　$a_n-(2n+3)=2^{n-1}(-1-5)$

よって　　$\boldsymbol{a_n=2n}$ $\boldsymbol{-3\cdot 2^n}$

16.70　(1) $a_1=s_1$ であるから　$a_1=\dfrac{3\cdot 1^2}{2}$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=s_n-s_{n-1}=\frac{3n^2+}{}=3n-$$

これは，$n=1$ のときも から　　$=3$

(2) $\log_2(t_n+1)=2n$ より　$t_n=2^{2n}-1$

$b_1=$ るから　$b_1=2^2-1=3$

$$=(2^{2n}-1)-\{2^{}-1\}=3\cdot 2^{2n-2}$$

こ $n=1$ 立するから　　$\boldsymbol{b_n=3\cdot 2^{2n-2}}$

$=\sum^{n}$ とおく ,(2) の ら，$n\geqq 2$ のとき

$$=3\sum_{k=}^{}(k-1)\cdot 2^{2k}\qquad\cdots①$$

$$=3\sum_{k=0}^{n-1}(3k+)2^{2k}\qquad\cdots②$$

印刷本

① × 4 − ② から

$$4S_n - S_n = 3\sum_{k=1}^{n}(3k-1)\cdot 2^{2k} - 3\sum_{k=0}^{n-1}(3k+2)\cdot 2^{2k}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(3k-1)\cdot 2^{2k} - \sum_{k=0}^{n-1}(3k+2)\cdot 2^{2k}$$

$$= (3n-1)\cdot 2^{2n} - 2 - 3\sum_{k=}^{n-1} 2^{2}$$

$$= (3n-$$

$$= (3n-2)\cdot 2^{2}$$

$S_1 = a_1 b_1 = 2\cdot 3 = 6$ であるから,

よって　　$\boldsymbol{S_n = (3n-2)\cdot 2^{2}}$

16.71　(1) 与えらえた漸化式から

$$nS_n = (n-1)(2a_n + 2$$

$$(n+1)S_{n+1} = n(2a_{n+1} + 1 - n$$

$$n($$ $$^2(2a_{n+1} + 1 - n)$$ $\cdots$ ② × n

$$(n+1)$$ $$1)(n-1)(2a_n + 2 - n)$$ $\cdots$ ① × $(n+1)$

2 式の を引く

$$n($$ $$S_{n+1}$$ $$2n^2 a_{n+1} - 2($$ $$(n-1)a_n - (n-1)(n+2)$$

$$n(n$$ $$^2 a_{n+1} -$$ $$)(n-1)a_n - (n-1)(n+2)$$

すると $n(n-1)$ $1)(n-1)a_n = (n-1)(n+2)$

n $na_{n+1} - 2(n+1)a_n = n+2$ $\cdots (*)$

$n = 1$ のとき り，$a_1 = S_1$ であるから　$a_1 = 0$

$a_1 = 0$，$a_2 =$ ，$n = 1$ のとき，$(*)$ は成立する．

よって，すべ 自然数 n に対して，$(*)$ は成立する．

(2) $(*)$ より $_{n+1} + 1) = 2(n+1)(a_n + 1)$

上式の両辺を $n(n+1)$ で割ると

$$\frac{1}{n+1}(a_{n+1}+1) = \frac{2}{n}(a_n+1) \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} = 2b_n$$

見本

$b_1 = a_1 + 1 = 1$ より，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{2^{n-1}}$$

(3) $b_n = \dfrac{1}{n}(a_n + 1)$ より　$a_n = nb_n - 1 = n \cdot 2^{n-1} - 1$

ここで，$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1}$ とおくと

$$2T_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot 2^k + n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k -$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-}$$

$$= T$$ 1)

$$T_n$$ $\cdot 2^n + 1$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2a_k + 1) = \sum_{k=1}^{n}\{2(k \cdot 2^{k-1} -$ 1$\}$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} -$$

$$= 2T_n - n$$

$$= \{(n-1) \cdot 2^n + 1\} - n$$

$$= \boldsymbol{(n-1)}$$ $\boldsymbol{2 - n}$

10 (1) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3a_n +$ $\dfrac{a_n}{1}$ より

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{2}{5} + 1 = \frac{2a_n}{5(a_n + 1)} = \frac{2}{5} b_n$$

数列 $\{b_n\}$ は $b_1 = \dfrac{a_1}{a_1 + 1} = \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}$，公比 $\dfrac{2}{5}$ の等比数列であるから

$$\boldsymbol{b_n = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}$$

(2) $b_n = \dfrac{a_n}{a_n +$ 1$}$，$a_n = \dfrac{b_n}{1 - b_n}$ であるから

$$a_n = \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}} = \frac{\boldsymbol{3 \cdot 2^{n-1}}}{\boldsymbol{4 \cdot 5^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}}}$$

印刷本

補足 与えらえた漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{3}{2}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{a_{n+1}}+1=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$$

したがって，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}+1\right\}$ は初項が $\dfrac{4}{3}$，公比が $\dfrac{5}{2}$ の等比数列であるから

$$\frac{1}{a_n}+1=\frac{4}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}\qquad\text{よって}\quad a_n=\frac{}{}-1$$

解説 p，q，$r\neq0$，s を定数とする漸

$$a_{n+1}=\frac{pa_n}{ra}$$

の一般項について，以下に述べ

$ps-qr=0$ のとき，右辺は　るα　β　0 とす

$(*)$ の特性方程式

$$=\frac{px+q}{rx+s}\quad\text{すなわち}\quad rx^2+(s\quad-q$$

α　ると

$$\frac{}{}+q}{}-\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}=\frac{(ps\quad}{(r\quad}\cdot\frac{a_n-\alpha)}{ra_n+s)}\qquad\cdots(***)$$

$$_{n+1}-\quad=\frac{(r\beta-}{}\cdot\frac{_n-\beta)}{_n+s)}$$

i) α　のとき　2 式から

$$\frac{}{}=\frac{_1-\beta}{}\cdot\frac{s}{+s}\cdot\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$$

$$\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=\frac{\beta}{a_1-\alpha}\left(\frac{r\alpha+s}{r\beta+s}\right)^{n-1}$$

上式から　が求まる．

ii) $\alpha=\beta$ の　$(*)$ の係数について

$$(\quad+4rq=0\quad\text{ゆえに}\quad(p+s)^2=4(ps-qr)\qquad\cdots①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha=\frac{p-s}{2r}\quad\text{ゆえに}\quad r\alpha+s=\frac{1}{2}(p+s)\qquad\cdots②$$

見本

①，② により，$(***)$ は

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{(ps-qr)(a_n-\alpha)}{(r\alpha+s)\{r(a_n-\alpha)+r\alpha+s\}}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}(p+s)^2(a_n-\alpha)}{\frac{1}{2}(p+s)\{r(a_n-\alpha)+\frac{1}{2}(p+s)\}}$$

逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\dfrac{1}{a_n-\alpha}+\dfrac{2r}{p+s}$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項が $\dfrac{1}{a_1}$，公差が $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{a_1}$$

これから，a_n が求まる．

16.73　(1)　$a_1=1>0$ および $a_n=$ $\dfrac{}{)a_{n-1}+5}$ $2,3,$ すべての自然数 n について，$a_n>$ である．した

$\dfrac{5}{}+4n+3$　ゆえに　$\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{n}$

の結 $\dfrac{1}{}=1$，$b_2=5b_1+$ $3=16$，

ゆ $c_1=b$ $-1=15$

b $_{n-1}+$ ，　b_n $_n+4n+7$

上の から等 辺々を引くと

b_n $b_{n-1})$ えに　$c_n=5c_{n-1}+4$

$+1)$ であ

c $(c_1+1)\cdot5^{n-1}$　よって　$\boldsymbol{c_n=16\cdot5^{n-1}-1}$

(3)　(2) の結果か $_{-1}-b_n=16\cdot5^{n-1}-1$ であるから

$n\geqq$ き　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\sum_{k=1}^{n-1}(16\cdot5^{k-1}-1)$

$$b_n-1=16\cdot\frac{5^{n-1}-1}{5-1}-(n-1)$$
$$b_n=4\cdot5^{n-1}-n-2$$

見本

$b_1 = 1$ であるから，上の b_n は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって　　$b_n = 4 \cdot 5^{n-1} - n - 2$

よって　　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{4 \cdot 5^{n-1} - n - 2}}$

16.74　(1) $a_2 = 2a_1 + b_1 + 2 = 5, \quad b_2 = a_1 + 2b_1 = 3,$
$a_3 = 2a_2 + b_2 + 2 = \mathbf{15}, \quad b_3 = a_2 + 2b_2 = \mathbf{11}$

(2)　　$a_{n+1} = 2a_n + b_n + 2, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n$

$(*)$ の辺々を加えると

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n) + \square = 3c_n + 2$$

したがって　　$c_{n+1} + 1 = 3(c_n + \square$

数列 $\{c_n + 1\}$ は，初項 3，公$\square$比$\square$ら

$$c_n + 1 = \square \quad \text{よって} \quad \square = \mathbf{3}$$

(3) $(*)$ の$\square$を引くと　$a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - \square$

d_n $\square$おくと　$d_{n+1} = d_n + 2, \quad \square = 0$

$\square\{d_n\}$ $\square$，公差 2 の等差数列$\square$から

$\square 2(n-1)$　よって $\square = 2n - 2$

$\square$結果$\square$正式

$\square = 3^n - 1, \quad \square = 2n - 2$

$\square \dfrac{\square - \mathbf{3}}{\square}, \quad \dfrac{\square - \mathbf{2n + 1}}{\mathbf{2}}$

(4) $\square$

$$\begin{aligned} \square &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(3^k + 2k - 3) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - 3n\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3^{n+1} - 3}{2} + n^2 - 2n\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}(3^{n+1} + 2n^2 - 4n - 3)} \end{aligned}$$

見本

16.75 (1) $x_{n+1}=2x_n+y_n+3n-8$, $y_{n+1}=2y_n+x_n-3n+8$
の辺々の和と差をとると

$$x_{n+1}+y_{n+1}=3(x_n+y_n)$$
$$x_{n+1}-y_{n+1}=x_n-y_n+6n-16$$

$z_n=x_n+y_n$, $w_n=x_n-y_n$ であるから

$$z_{n+1}=3z_n, \qquad z_1=x_1+y_1=8+(-$$
$$w_{n+1}=w_n+6n-16, \quad w_1=x_1-y_1=8$$

数列 $\{z_n\}$ は初項 3，公比 3 の等

$$\boldsymbol{z_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n}$$

数列 $\{w_n\}$ は $n\geqq 2$ のとき

$$w_n=w_1+\sum$$
$$=$$
$$=3n^2-19n+29$$

上の w_n は $n=1$ のとき

$$\boldsymbol{=3n^2-19n+29}$$

点 $(x$ の距離を d とす

$$=\frac{|x_n-y_n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|w_n|}{\sqrt{2}}$$

w_n の 数列 b $=6n-16$ で ら

>0

$=1$ で ら >1

を最小にする n の値は $n\leqq 4$ について調べればよい.

実際，$w_1=$ $=3$, $w_3=-1$, $w_4=1$ であるから

求める n の値 $\boldsymbol{n=3,\ 4}$

16.76 (1)
$$\begin{cases} 2 & -3a_{2k}+a_{2k-1}=0 \\ & -3a_{2k+1}+a_{2k}=1 \end{cases} \qquad (k=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ の第 1 式に $k=1$, 2，漸化式の第 2 式に $k=1$ を代入すると

$$2a_3-3a_2+a_1=0, \quad 2a_4-3a_3+a_2=1, \quad 2a_5-3a_4+a_3=0$$

$a_1 = 1$，$a_2 = 2$ より，これを解いて　$\boldsymbol{a_3 = \frac{5}{2}}$，$\boldsymbol{a_4 = \frac{13}{4}}$，$\boldsymbol{a_5 = \frac{29}{8}}$

(2) (∗) より

$$2(a_{2k+1} - a_{2k}) - (a_{2k} - a_{2k-1}) = 0$$
$$2(a_{2k+2} - a_{2k+1}) - (a_{2k+1} - a_{2k}) = 1$$

したがって　$\begin{cases} 2b_{2k} - b_{2k-1} = 0 \\ 2b_{2k+1} - b_{2k} = \end{cases}$ $(k = 1, 2, 3$ $\cdots (**)$

(∗∗) から b_{2k} を消去すると

$4b_{2k+1} - b_{2k-1} = 2$　ゆえに　1　①

(∗∗) の第 1 式から　$2b_{2k+2} - b_{2}$

これと (∗∗) の第 2 式から，　消去

$4b_{2k+2} - b_{2k} =$　えに　b_{2k+}　$b_{2k} +$

①　**n が奇数のとき**　$\boldsymbol{b_{n+2} =}$

**　が偶数のとき**　$\boldsymbol{b_{n+2} =}$　$+ \frac{1}{4}$

) ①　b_{2}　$\frac{1}{}\left(b_{2k-1} - \frac{2}{3}\right)$

えに　$_{k-1} - \frac{2}{}\left(_{1} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

$b_{}$　$- a_1 =$　り

$_{1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)$　$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} + \frac{2}{3}$　$\cdots ①'$

② か　$\frac{1}{3} = \frac{1}{4}\left(b_{2k} - \frac{1}{3}\right)$

ゆえに　$= \left(b_2 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

$b_2 = a_3 -$　$\frac{}{2} - 2 = \frac{1}{2}$ より

$$b_{2k} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + \frac{1}{3} \quad \cdots ②'$$

印刷

①′，②′ から　　**n が奇数のとき**　$\boldsymbol{b_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}}$

n が偶数のとき　$\boldsymbol{b_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}}$

別解　(**) より　　$2b_{n+1} - b_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$　　$(n = 1, 2, 3\cdots)$

また　　$2\left\{\frac{1}{2} - \frac{(-1)^{n+1}}{6}\right\} - \left\{\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{6}\right\} = \frac{(-1)^n}{2}$

上の 2 式から　$2\left\{b_{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{6}\right\} = \left\{b_n - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6}\right\}$

したがって，$\left\{b_n - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6}\right\}$ は

よって　　$b_n - \frac{1}{2} + \frac{(-1$

すなわち　　$\boldsymbol{b_n} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)$

(4) ①′

a　　$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} + \frac{2}{3}$，　a_2　　$a_{2k} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + \frac{1}{3}$

上　　式から

a_{2k+1}　　$= \left(\frac{1}{2}\right)$　　$\cdots$③

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$　　$\cdots$④

$(n \geqq 3)$，③

$a_{2k+1} - a_{2k-1}) = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} + 1\right\}$

$a_n - 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{n-1}{2}$

$a_n = \frac{7}{6} + \frac{n}{2} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$　　$\cdots$③′

印刷

n が偶数のとき ($n \geqq 4$)，④ より

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}(a_{2k+2}-a_{2k}) = \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+1\right\}$$

$$a_n - 2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{n-2}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{3} + \frac{n}{2} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

③′，④′ は，それぞれ $n=1$，[illegible] ときも成り立つ．

よって　**n が奇数のとき**　$\boldsymbol{a_n = \frac{7}{6} + \frac{n}{2} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$

n が偶数のとき　$\boldsymbol{a_n =}$ [illegible]

別解　$\begin{cases} 2a_{2k+1} - 3a_{2k} + [illegible] = 0 & ([illegible]2,3,\\ 2a_{2k+2} - 3a_{2k+[illegible]_k = 1 \end{cases}$

上式 $\quad 2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = \frac{1+(-[illegible]}{2}$

[illegible]，[illegible]$n + \beta(-1)^n$ が

[illegible]$) - 3f(n+1) + [illegible] = \frac{1+(-1)^n}{2}$

[illegible]す定[illegible]β を[illegible]と　$\alpha = \frac{1}{[illegible]}$，$\beta = \frac{1}{12}$

した[illegible] $+ \frac{(-1)^n}{12}$

[illegible]$a_n - ($[illegible]お[illegible]$_{n+2}$[illegible]$+ x_n = 0$

[illegible]式 $2x^2 - 3$[illegible]の解が 1，$\frac{1}{2}$ であるから

$x_n = p + q\left(\frac{1}{2}\right)^n$　(p，q は定数)

とおける．$x_1 = 2$，$x_2 = \frac{11}{12}$ であるから　$p = \frac{5}{4}$，$q = -\frac{4}{3}$

すなわち [illegible]$= \frac{5}{4} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

よって　$a_n = x_n + f(n) = \boldsymbol{\frac{5}{4} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{2} + \frac{(-1)^n}{12}}$

見本

16.77 (1) 漸化式から

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 5, \quad a_6 = 8$$

したがって

$$b_1 = \cos\pi = \mathbf{-1}, \qquad b_2 = \cos\pi = \mathbf{-1}, \qquad b_3 = \cos 2\pi = \mathbf{1},$$
$$b_4 = \cos 3\pi = \mathbf{-1}, \qquad b_5 = \cos 5\pi = \mathbf{-1}, \qquad b_6 = \cos 8\pi = \mathbf{1}$$

(2) 漸化式から

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} = (a_{n+1} + a_n) + a_{n+1} = 2a_{n+1} + a_n$$

上式および $\{a_n\}$ が整数であることから

$$b_{n+3} = \cos(a_{n+3}\pi) = \cos(2a_{n+1}\pi + a_n\pi) = \cos(a_n\pi) = b_n$$

したがって $\boldsymbol{b_{n+3} = b_n}$

(3) (2) の結果により $b_{100} = b_1 = \mathbf{-1}$

(4) (1) の結果から

$$c_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad c_2 = \cos\frac{\pi}{2} = \mathbf{0}, \qquad c_3 = \cos\frac{2}{2}\pi = \mathbf{-1},$$
$$c_4 = \cos\frac{3}{2}\pi = 0, \qquad c_5 = \cos\frac{5}{2}\pi = \mathbf{0}, \qquad c_6 = \cos\frac{8}{2}\pi = \mathbf{1}$$

(2) の漸化式から

$$a_{n+4} = a_{n+3} + a_{n+2} = (a_{n+2} + a_{n+1}) + a_{n+2} = 2a_{n+2} + a_{n+1}$$
$$= 2a_{n+2} + (a_{n+3} - a_{n+2}) = a_{n+2} + a_{n+3} = a_{n+2} + (a_{n+4} + a_{n+3}) = a_{n+4} + 2a_{n+2}$$
$$= a_{n+4} + (a_{n+2} + a_{n+1}) = a_{n+4} + (a_{n+3} - a_{n+2}) = a_{n+3} + a_{n+2} = (a_{n+4} + a_{n+3}) + a_{n+2}$$
$$= a_{n+4} + 2a_{n+2} = a_{n+4} + 2(a_{n+3} - a_{n+2}) = a_{n+4} + 2(a_{n+2} + a_{n+1}) = 4(a_{n+2} + a_{n+1}) + (a_{n+2} - a_{n+1})$$
$$= 4(a_{n+2} + a_{n+1}) + a_n$$

上式および $\{a_n\}$ が整数であることから

$$c_{n+6} = \cos\left(\frac{a_{n+6}}{2}\pi\right)$$
$$= \cos\left\{\frac{4(a_{n+2} + a_{n+1}) + a_n}{2}\pi\right\} = \cos\left(\frac{a_n}{2}\pi\right) = c_n$$

したがって $c_{n+6} = c_n$

上式および (4) の結果から $c_{2007} = c_3 = \mathbf{-1}$

見本

16.78 (1) $\{x_n\}$ は，初項が 2，公比が 2 の等比数列であるから

$$x_n = 2\cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{2^n}$$

したがって，$y_{n+1} = 3x_n + y_n$ より　$y_{n+1} - y_n = 3\cdot 2^n$

$n > 1$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(y_{k+1} - y_k) = \sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^k$

$$y_n - y_1 = \frac{6(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$$

$$y_n = 6(2^{n-1} - 1) + 3$$

$n = 1$ のときも成り立つので　$y_n = \boldsymbol{3}$

(2) $a_{n+1} = ra_n + cs^n + d$ より

$$a_{n+1} - \boldsymbol{s}a_n = ra_n - \boldsymbol{s}a_n + cs^n + d$$

$a_{n+1} + f_{n+1} = r(a_n + f_n) + ps^n + q$ とおくと

$$a_{n+1} - ra_n = -f_{n+1} + rf_n$$
$$= -(ps^{n+1} + q) + r(ps^n + q)$$
$$= p(r - s)s^n + q(r - 1) \quad \cdots ②$$

①，② より　$cs^n + d = p(r - s)s^n + q(r - 1)$

この式が n についての恒等式であるから

$$c = p(r - s), \quad d = q(r - 1)$$

ここで，$r \neq \boldsymbol{s}$ より　$\boldsymbol{p = \dfrac{c}{r - s}}$，$\boldsymbol{q = \dfrac{d}{r - 1}}$

$z_n = x_n + 3y_n$ に x_n，y_n を代入すると

$$z_n = 2^n + 3(3\cdot 2^n - 6) + 3z_n \quad \text{ゆえに} \quad z_{n+1} = 3z_n - 5\cdot 2^n + 12$$

(2) の a_n に z_n を適用すると　$r = 3$，$c = -5$，$s = 2$，$d = 12$

また　$p = \dfrac{-5}{3 - 2} = -5$，$q = \dfrac{12}{3 - 1} = 6$　ゆえに　$f_n = -5\cdot 2^n + 6 \quad \cdots ③$

このとき，$z_{n+1} + f_{n+1} = 3(z_n + f_n)$ より

$$z_n + f_n = (z_1 + f_1)\cdot 3^{n-1} = (0 - 4)\cdot 3^{n-1} = -4\cdot 3^{n-1} \quad \cdots ④$$

③，④ より　$\boldsymbol{z_n = 5\cdot 2^n - 4\cdot 3^{n-1} - 6}$

見本

別解 $z_{n+1}=3z_n-5\cdot 2^n+12$ より　　$\dfrac{z_{n+1}}{3^{n+1}}-\dfrac{z_n}{3^n}=-\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

したがって，$n>1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{z_{k+1}}{3^{k+1}}-\frac{z_k}{3^k}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k+4\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}$$

$$\frac{z_n}{3^n}-\frac{z_1}{3}=5\left(\frac{2}{3}\right)^n-6\left(\frac{1}{3}\right)^n-4$$

$$z_n=5\cdot 2^n-4\cdot 3^{n-1}-$$

$n=1$ のときも，上式は成り立つ　　$2^n-4\cdot 3^{n-1}-6$

16.79　(1) 最初に平面に接していた面を A とす

i) $n=1$ のとき，A 以外の面が底

ii) $n=2$ のとき，1 回目の操作で A が側面にあり，2 回目の操作で A が底面になるから　$\boldsymbol{p_2}=$

iii) $n=3$ のとき，2 回目の操作で A が側面にあり，3 回目の操作で A が底面になるから

$$p_3=(1-p_2)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

(n 回目の操作で A が側面にあり，$n+1$ 回目の操作で A が底面になるから

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}$$　ゆえに　$p_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$

数列 $\left\{p_n-\frac{1}{4}\right\}$ は，$p_1-\frac{1}{4}=-$　公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{4}=\left(\quad\right)^{n-1}$$　より　$\boldsymbol{p_n=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}$

16.80　(1) 1 個体が生存し，2 日目にも生存している確率が p であるから，2 日目に生存していない確率は $1-p$．よって，$X_2=0$ となるのは，2 日目に n 個の個体すべてが生存していない確率であるから

$$\boldsymbol{(1-p)^n}$$

(2) 1 個体が 1 日目に生存し，3 日目にも生存している確率が p^2 であるから，2 日目に生存していない確率は $1-p^2$．よって，$X_3=0$ となるのは，3 日目に n 個の個体すべてが生存していない確率であるから

$$\boldsymbol{(1-p^2)^n}$$

(3) k 日目に n 個の個体すべてが生存していない確率を $P(X_k=0)$ とすると

$$P(X_k=0)=(1-p^{k-1})^n$$

求める確率は，k 日目に少なくとも 1 個の個体が生存し，$k+1$ 日目には n 個の個体すべてが生存していない確率であるから

$$P(X_{k+1}=0)-P(X_k=0)=\boldsymbol{(1-p^k)^n-(}\quad\boldsymbol{^{k-1})^n}$$

16.81 (1) サイコロを n 回投げたとき点 X [illegible] 頂点 A，P [illegible] る確率を，それぞれ P_n，Q_n，R_n とすると

$$P_1=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\ Q_1=\frac{1}{6},\ R_1=$$

$$P_{n+1}=\frac{2}{3}P_n+\frac{1}{6}Q \qquad \cdots ①$$

$$Q_{n+1}=\frac{1}{6}P_{\quad}+\frac{1}{6}R_n \qquad ②$$

$$R_{n+1}=\frac{1}{6}P_n+\frac{1}{6}Q_n+\frac{2}{3}R_n$$

し

$$\frac{1}{6}Q_1+\frac{1}{6}R_1=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$_2=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{6}R_1=\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$$

$$P_{\quad}=\frac{1}{\quad}P_1+\frac{1}{\quad}R_1=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$$

$$_3=\frac{2}{\quad}+\frac{1}{6}R_2=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$$

②，[illegible] 々を加 [illegible] 1 式から

$$+Q_{n+1}+R_{n+1}=P_n+Q_n+R_n=1 \qquad \cdots ④$$

②，③ の辺 [illegible] えると

$$Q_{n+1}+R_{n+1}=\frac{1}{3}P_n+\frac{5}{6}(Q_n+R_n)$$

④ より，$R_{n+1}=1-P_{n+1}$，$Q_n+R_n=1-P_n$ を上式に代入すると

$$1-P_{n+1}=\frac{1}{3}P_n+\frac{5}{6}(1-P_n)\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{6}}$$

見本

(3) (2) の結果から　$P_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}\left(P_n-\dfrac{1}{3}\right)$

したがって　　$P_n-\dfrac{1}{3}=\left(P_1-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

これに $P_1=\dfrac{2}{3}$ を代入すると　　$\boldsymbol{P_n=\dfrac{1}{3}\left\{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$

16.82　(1) p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1} をそれぞれ p_n，q_n，r_n を用いて

$$p_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}q_n+\cdots\cdots①$$
$$q_{n+1}=\frac{4}{6}p_n+\frac{1}{6}q_n+\frac{1}{6}\cdots\cdots②$$
$$r_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{4}{6}q_n+\cdots\cdots③$$

となる．また

$$p_1=\frac{1}{6},\quad q_1=\frac{4}{6},\quad r_1=\frac{1}{6}$$

であ

$$\frac{1}{6}p_1+\frac{1}{6}q_1+\frac{4}{6}r_1=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}$$

(1) と

$$\frac{1}{6}p_1+\frac{1}{6}r_1=\frac{4}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}$$
$$=\frac{1}{6}p_1+\frac{1}{6}r_1=\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}$$

上の

$$+\frac{1}{6}q_2+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{12}}$$

(3) ①，②，③ の を加えると

$$p_{n+1}+q_{n+1}+r_{n+1}=p_n+q_n+r_n$$

p_1+q_1+ であるから　　$p_n+q_n+r_n=1\quad\cdots\cdots④$

①，④ により　　$\boldsymbol{p_{n+1}=\dfrac{1}{2}r_n+\dfrac{1}{6}}$

印刷本

(4) (3) と同様に，④ から ②，③ は

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}, \qquad r_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{6}$$

となる．したがって，(3) の結果と上の 2 式から

$$\begin{aligned} p_{n+3} &= \frac{1}{2}r_{n+2} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}q_{n+1} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}p_n + \frac{7}{24} \end{aligned}$$

(5) (4) の結果から $p_{3n+3} = \frac{1}{8}p_{3n} + \frac{7}{24}$

ゆえに $p_{3(n+1)} - \frac{1}{3} = \frac{1}{8}\left(p_{3n} - \frac{1}{3}\right)$

したがって $p_{3n} - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\left(p_3 - \frac{1}{3}\right)$

$$\boldsymbol{p_{3n} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}}$$

16.83 p_2 は，2 回とも表が出る確率であるから

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

p_3 は「3 回目が表」の確率であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$$

(2) (1) より

$$p_2 \times p_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}$$

$$p_3 \times p_2 + p_2 \times p_3 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}$$

見本

(3) (2) の結果から

$$p_6 = p_4 \times p_2 + p_3 \times p_3 = \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$
$$p_7 = p_5 \times p_2 + p_4 \times p_3 = \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{128}$$
$$p_8 = p_6 \times p_2 + p_5 \times p_3 = \frac{1}{32} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{}$$
$$p_9 = p_7 \times p_2 + p_6 \times p_3 = \frac{3}{128} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{} = \frac{}{512}$$
$$p_{10} = p_8 \times p_2 + p_7 \times \frac{1}{} \times \frac{1}{4} + \frac{}{} \times \frac{}{8} = \frac{7}{1024}$$

よって

$$p_{12} = p_{10} \times p_2 + p_9 \times p_3 = \frac{}{} \times \frac{}{8} = \frac{}{}$$

別解 $p_{12} = (p_2)^6 + {}_5\mathrm{C}_2(p_2)^3(p_{} \times p_3)^4$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^6 + 10\left(\frac{1}{4}\right)^{} \left(\frac{}{8}\right)^{} + \left(\frac{1}{8}\right)^{} = \frac{3}{24}$$

16.84 (1) 試行 り返したとき，点 Q が，頂点 に をそ

$P_n(\mathrm{B})$，$P_n(\mathrm{C})$，$P_n(\mathrm{D})$ と と

$(\mathrm{A}) = P_1(\mathrm{C}) = 0$, $= P_1(\mathrm{D}) = \frac{1}{2}$

次式が $= 1, 2, 3, \cdots)$.

$$(\mathrm{A}) = P_{n+1}(\frac{1}{} P_n(\mathrm{B}) + \frac{1}{2} P_n(\mathrm{D})$$
$$= P_{n+1}(\frac{1}{2} P_n(\mathrm{A}) + \frac{1}{2} P_n(\mathrm{C})$$

$$P_2(\mathrm{A}) = P_{} \frac{1}{2} P_1(\mathrm{B}) + \frac{1}{2} P_1(\mathrm{D}) = \mathbf{\frac{1}{2}}$$
$$(\mathrm{B}) = P_2(\mathrm{D}) = \frac{1}{2} P_1(\mathrm{A}) + \frac{1}{2} P_1(\mathrm{C}) = \mathbf{0}$$
$$(\mathrm{A}) = P_3(\mathrm{C}) = \frac{1}{2} P_2(\mathrm{B}) + \frac{1}{2} P_2(\mathrm{D}) = \mathbf{0}$$
$$(\mathrm{B}) = P_3(\mathrm{D}) = \frac{1}{2} P_2(\mathrm{A}) + \frac{1}{2} P_2(\mathrm{C}) = \mathbf{\frac{1}{2}}$$
$$P_4(\mathrm{A}) = P_4(\mathrm{C}) = \frac{1}{2} P_3(\mathrm{B}) + \frac{1}{2} P_3(\mathrm{D}) = \mathbf{\frac{1}{2}}$$
$$P_4(\mathrm{B}) = P_4(\mathrm{D}) = \frac{1}{2} P_3(\mathrm{A}) + \frac{1}{2} P_3(\mathrm{C}) = \mathbf{0}$$

印刷

(2) 試行を n 回繰り返したときの確率を (1) と同様に定めると

$$P_1(\mathrm{A}) = P_1(\mathrm{C}) = 0,\ P_1(\mathrm{B}) = p,\ P_1(\mathrm{D}) = 1-p$$

また，次式が成り立つ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

$$P_{n+1}(\mathrm{A}) = (1-p)P_n(\mathrm{B}) + pP_n(\mathrm{D})$$
$$P_{n+1}(\mathrm{B}) = pP_n(\mathrm{A}) + (1-p)P_n($$
$$P_{n+1}(\mathrm{C}) = pP_n(\mathrm{B}) + (1-p)$$
$$P_{n+1}(\mathrm{D}) = (1-p)P_n(\mathrm{A}) + ($$

したがって　$P_2(\mathrm{A}) = (1-p)P_1$　$= -2p^2 + 2p$

$P_2(\mathrm{B}) = pP_1(\mathrm{A}) + (1$

$P_2(\mathrm{C}) = pP_1(\mathrm{B}) +$

$P_2(\mathrm{D}) = (1-$

$p > \dfrac{1}{2}$ であるから　$P_2(\mathrm{C})$　$= (2p$　$>$

よって，試行を 2 回繰り返すとき，点 Q が　にあ　大となる.

さらに

$(\mathrm{A}) = (1-p)P_2(\mathrm{B}) + pP_2$

$= 0$

$P_2(\mathrm{A}) + (1-p)P$

$2p^2 + 2p) + (1-p)(2p^2 - 2p + 1)$

$= 6p^2 - 1$

$P_3(\mathrm{C})$　$_2(\mathrm{B}) + (1-$　$0)$

$) =$　$P_2($　$_2(\mathrm{C})$

$= (1$　$2p) + p(2p^2 - 2p + 1)$

$= 4p^3 - 6p$　$+ 3p$

$p > \dfrac{1}{2}$ である　$P_3(\mathrm{D}) - P_3(\mathrm{B}) = (2p-1)^3 > 0$

よって，試行　繰り返すとき，点 Q が頂点 D にある確率が最大となる.

16.85　(1) A，B が赤　一致する確率は　$\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$

A，B が白球で一致する確率は　$\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$

これらの事象は互いに排反であるから　$\dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9} = \boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$

印刷本

(2) A，Bが取り出す球の色が一致する確率を p，一致しない確率を q とすると

$$p=\frac{5}{9},\quad q=1-p=\frac{4}{9}$$

よって　$P_2=pq+qp=2pq$

$$=2\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{81}}$$

$P_3=pqp+pqq+qpq+qqp=pq(p+3$

$=\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}\left(\frac{5}{9}+3\right.$　$\frac{\mathbf{340}}{\mathbf{72}}$

(3) AとBが n 回の試行の中で取り出す[illegible]ることが少なくとも1回起こるが続けては起こらない事象[illegible]のとき，i)，ii)，iii) は互いに排[illegible]

i) AとBが1回目に取り出[illegible]が[illegible]目から[illegible]回にかけて，一致することな[illegible]とも1[illegible]る[illegible]ない．

ii) AとBが1回目に取[illegible]球の色が[illegible]，2回[illegible]ず，3回目[illegible] n 回目にかけて，一致すること[illegible]なくと[illegible]るが続けて[illegible]らない．

と[illegible]回目に取り出す球の色が一[illegible]2[illegible]から n 回[illegible]にかけて一[illegible]

よ[illegible]　$P_n=\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}P_{n-2}+\frac{5}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

$=\frac{4}{9}P_{n-2}+\frac{5}{81}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}$

1回[illegible]で，[illegible]数が出る確率[illegible]れぞれ

[illegible]$+N}$，$\frac{N}{M+N}$

で[illegible]して　$p_1=\dfrac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{M+N}}$

2回の操作で[illegible]れた2個の数の和が偶数となるのは，2回とも偶数のカードまたは[illegible]とも奇数のカードを取り出す場合であるから

$$p_2=\left(\frac{M}{M+N}\right)^2+\left(\frac{N}{M+n}\right)^2=\frac{\boldsymbol{M^2+N^2}}{\boldsymbol{(M+N)^2}}$$

(2) $n+1$ 回の操作で $n+1$ 個の数の和が偶数となるのは，n 回までのカードの和が偶数で $n+1$ 回目で偶数のカードを取り出すか，n 回までのカード

印刷本

の和が奇数で $n+1$ 回目で奇数のカードを取り出す場合であるから

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \times \frac{M}{M+N} + (1-p_n) \times \frac{N}{M+N} \\ &= \frac{\boldsymbol{M-N}}{\boldsymbol{M+N}}\boldsymbol{p_n} + \frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{M+N}} \end{aligned}$$

(3) $M+N$ は，1 から k までの自然数の和であるから

$$M+N = 1+2+\cdots+k = \frac{1}{2}k(k+1)$$

i) k が偶数のとき，M，N の項数はそれぞれ $\frac{k}{2}$ 個であるから

$$M = 2+4+6+\cdots+k = \frac{k}{2}\left\{2+(k-2)\right\} = \frac{k^2}{4}$$

$$N = 1+3+5+\cdots+(k-1) = \frac{k}{2}\left\{1+(k-1)\right\} = \frac{k^2}{2}$$

よって $\quad \dfrac{M-N}{M+N} = \dfrac{\frac{k^2}{4}-\frac{k^2}{2}}{\frac{1}{2}k(k+1)} = -\dfrac{1}{k+1}$

ii) k が奇数のとき，M，N の項数はそれぞれ $\dfrac{k+1}{2}$，$\dfrac{k+1}{2}$ であるから

$$M = 2+4+6+\cdots+(k-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{k+1}{2}\cdot\{2+(k-1)\} = \frac{k^2}{4}-\frac{1}{4}$$

$$N = 1+3+5+\cdots+k = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4}+\frac{k}{2}+\frac{1}{4}$$

したがって $\quad \dfrac{M-N}{M+N} = \dfrac{\frac{k^2}{4}-\frac{1}{4}-\left(\frac{k^2}{4}+\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}k(k+1)} = -\dfrac{1}{k}$

i), ii) より $\quad \dfrac{\boldsymbol{M-N}}{\boldsymbol{M+N}} = \begin{cases} \boldsymbol{-\dfrac{1}{k+1}} & \textbf{(}\boldsymbol{k}\textbf{ が偶数のとき)} \\ \boldsymbol{-\dfrac{1}{k}} & \textbf{(}\boldsymbol{k}\textbf{ が奇数のとき)} \end{cases}$

(4) (2) の結果から

$$p_{n+1}-\frac{1}{2} = \frac{M-N}{M+N}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は，公比 $\dfrac{M-N}{M+N}$ の等比数列であるから，これに

見本

(1) の結果を代入すると

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}$$

$$p_n = \left(\frac{M}{M+N} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n} + \frac{1}{2}$$

したがって，(3) の結果により

$$\boldsymbol{p_n} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k+1}}\right) & \text{(}\boldsymbol{n}\text{が偶数のとき)} \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k+1}}\right) & \text{(}\boldsymbol{n}\text{が奇数のとき)} \end{cases}$$

16.87 (1) p_1 は，A，B それぞれの袋から「白，白」の順に取り出す確率であるから

$$p_1 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$$

それぞれの袋から「白，赤」の順に取り出す確率であるから

$$q_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} =$$

A，B それぞれの袋から「赤，白」の順に取り出す確率であるから

$$r_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

n 回の確率と

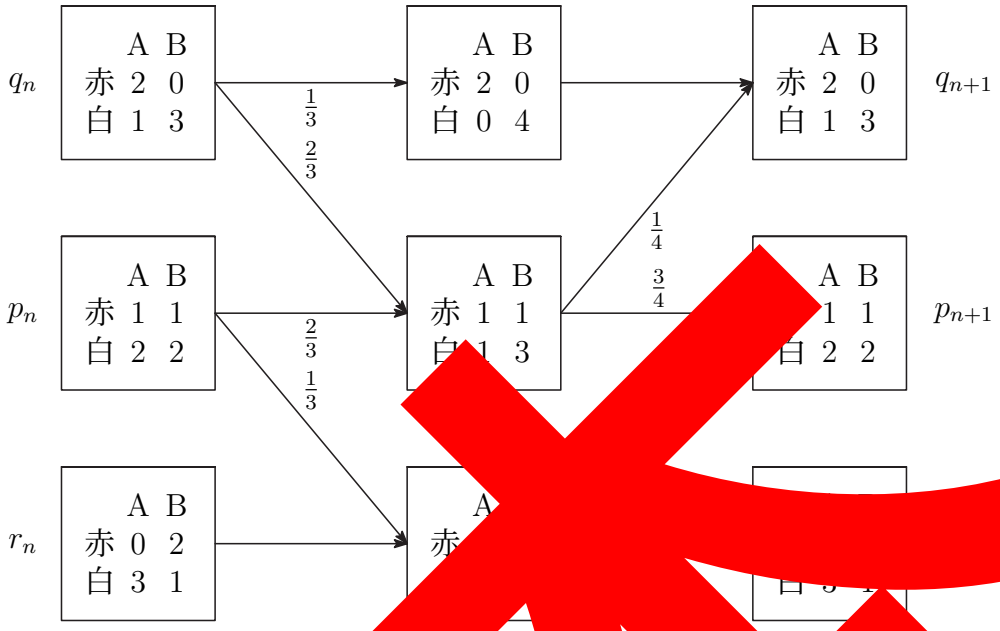
$$\left(\frac{2}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n\right) \quad \left(\frac{1}{3}p_n + r_n\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{p_n} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{q_n} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{r_n} \qquad \cdots ①$$

$$q_{n+1} = \left(\frac{2}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n\right) \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3}q_n = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{p_n} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{q_n} \qquad \cdots ②$$

$$r_{n+1} = \left(\frac{1}{3}p_n + r_n\right) \times \frac{1}{2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{p_n} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{r_n} \qquad \cdots ③$$

印刷不可



(3) ② − ③ より　　$q_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{2}(q_n - r_n)$

ゆえに　　$q_n - r_n = (q_1 - r_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(1) より　　$q_1 - r_1 = 0$ であるから

① + ② + ③ より　　$p_{n+1} + q_{n+1} + r_{n+1} = 1$

ゆえに　　$p_n + q_n + r_n = p_1 + q_1 + r_1 = 1$

(2) の結果と合わせて　　$p_n = 1 - 2q_n$　$\cdots$④

上式と ① より　　$q_{n+1} = \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{6}$　ゆえに　$q_{n+1} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6}\left(q_n - \frac{1}{5}\right)$

よって　　$q_n - \frac{1}{5} = \left(q_1 - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

ゆえに　　$\boldsymbol{r_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

上式を ④ に代入すると　　$\boldsymbol{p_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

16.88　(1) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れると，箱 B には黒玉 2 個と白玉 2 個が入っている．

箱 A に黒玉が 1 個入っている (箱 B から白玉 2 個を取り出す) 確率 p_1 は

$$p_1 = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

見本

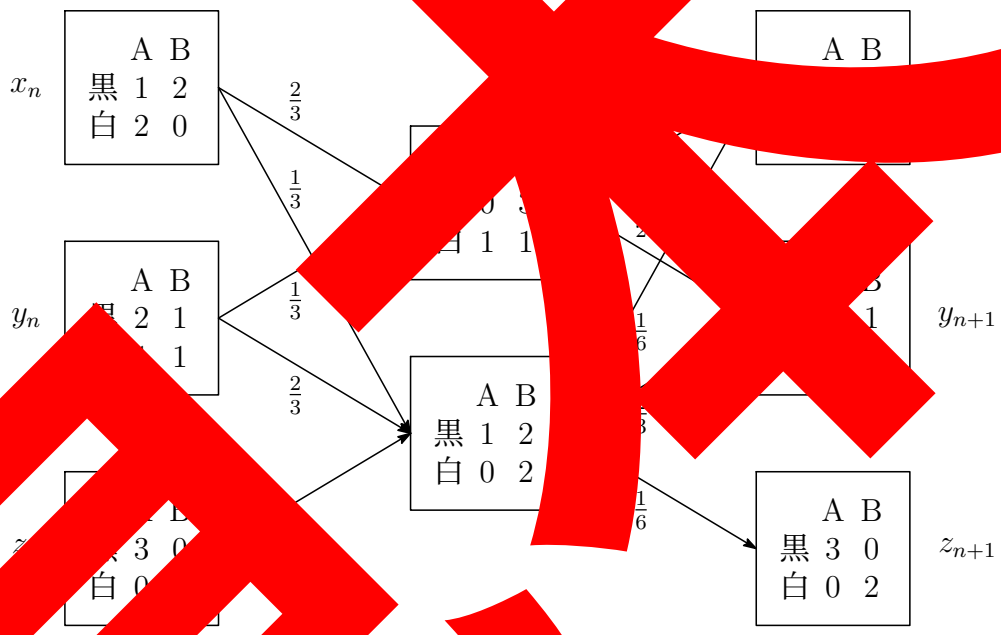
箱 A に黒玉が 2 個入っている (箱 B から黒玉 1 個と白玉 1 個を取り出す) 確率 p_2 は

$$p_2 = \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

箱 A に黒玉が 3 個入っている (箱 B から黒玉 2 個を取り出す) 確率 p_3 は

$$p_3 = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) 試行 T を n 回行ったとき，箱 A に黒玉が 1 個，2 [illegible] ある確率をそれぞれ x_n，y_n，z_n とすると



$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}\right) x_n + \left(+ \frac{2}{3} \times \frac{1}{6}\right) y_n + 1 \times \frac{1}{6} z_n$$

$$y_{n+1} \quad \times \frac{1}{2} + \quad x_n \quad \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\Big) y_n + 1 \times \frac{2}{3} z_n$$

$$\frac{1}{6} x_n + \frac{2}{3} \times \quad 1 \times \frac{1}{6} z_n$$

$x_1 = p_1$，$y_1 =$ [illegible] $z_1 = p_3$ であるから　$x_1 = \dfrac{1}{6}$，　$y_1 = \dfrac{2}{3}$，　$z_1 = \dfrac{1}{6}$

$$x_{n+1} = \frac{7}{18} x_n + \frac{5}{18} y_n + \frac{1}{6} z_n$$

$$y_{n+1} = \frac{5}{9} x_n + \frac{11}{18} y_n + \frac{2}{3} z_n$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{18} x_n + \frac{1}{9} y_n + \frac{1}{6} z_n$$

白本

したがって

$$x_2 = \frac{7}{18}x_1 + \frac{5}{18}y_1 + \frac{1}{6}z_1 = \frac{7}{18}\times\frac{1}{6} + \frac{5}{18}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$

$$y_2 = \frac{5}{9}x_1 + \frac{11}{18}y_1 + \frac{2}{3}z_1 = \frac{5}{9}\times\frac{1}{6} + \frac{11}{18}\times\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{6} = \frac{11}{18}$$

$$z_2 = \frac{1}{18}x_1 + \frac{1}{9}y_1 + \frac{1}{6}z_1 = \frac{1}{18}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{9}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

$q_1 = x_2$，$q_2 = y_2$，$q_3 = z_2$ である

$$\boldsymbol{q_1 = \frac{5}{18}} \qquad \boldsymbol{q_3 = \frac{1}{9}}$$

(3) 求める確率は z_3 であるから，(2) の

$$z_3 = \frac{1}{18}x_2 + \frac{1}{9}y_2 + \frac{1}{6}z_2 = \frac{5}{18}\times\frac{1}{6} + \frac{11}{18}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

補足 x_{n+1}，y_{n+1}，z_{n+1} が x_n，y_n，z_n によって定まり，1 つ前の状態のみを考慮する）．このような確率過程をマルコフ連鎖（Markov chain）という．

16.89 (1) 時刻と位置の変化は次のようになる．

時刻	0	1	2	3
位置	0	1	0	0

求める確率は $p\cdot(1-p)^2\cdot 1 = \boldsymbol{(1-p)^2}$

(2) 時刻と位置の変化は次のようになる．

時刻	0	1	2	3
位置	0	1	0	1

または

時刻	0	1	2	3
位置	1	2	1	0

よって，求める確率は

$$p\cdot(1-p)\cdot 1^2 + p\cdot(1-p)^2 = \boldsymbol{(1-p)(1+p-p^2)}$$

(3) $q_i = pq_{i+1} + (1-p)q_{i-1}$ より

$$pq_{i+1} - q_i + (1-p)q_{i-1} = 0$$

この確率漸化式の特性方程式は

$$pt^2 - t + 1 - p = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 1,\ \frac{1-p}{p}$$

白本

したがって，次の 2 式が成り立つ．

$$q_{i+1} - \frac{1-p}{p} q_i = q_i - \frac{1-p}{p} q_{i-1} \qquad \cdots ①$$

$$q_{i+1} - q_i = \frac{1-p}{p}(q_i - q_{i-1}) \qquad \cdots ②$$

よって，求める空欄 (a) は $\boldsymbol{\dfrac{1-p}{p}}$

補足 確率漸化式 $q_{i+1} - (\alpha+\beta)q_i + \alpha\beta q_{i-1} = 0$ から 2 式が成り立つ．

$$q_{i+1} - \beta q_i = \alpha(q_i - \beta q_{i-1}), \qquad q_{i+1} - \alpha q_i = \beta(q_i - \alpha q_i)$$

(4) $\alpha = \dfrac{1-p}{p}$ とおくと，①，② より

$$q_{i+1} - \alpha q_i = q_1 - q_0, \qquad q_{i+1} - q_i = \alpha^i(q_1 - q_0)$$

$q_0 = 1$ をこれに代入すると

$$q_{i+1} - \alpha q_i = q_1 - \alpha, \qquad q_{i+1} - q_i = \alpha^i(q_1 - 1)$$

を引いて

$$(\alpha - 1)q_i = q_1(\alpha^i - 1) - (\alpha^i - 1) + (\alpha - 1)$$

$$= q_1(\alpha^i - 1) - (\alpha^i - \alpha)$$

$0 < p < \dfrac{1}{2}$ のとき $\alpha - 1 = \dfrac{1-p}{p} - 1 = \dfrac{1-2p}{p} > 0$

したがって $q_i = \dfrac{q_1(\alpha^i - 1) - (\alpha^i - \alpha)}{\alpha - 1}$

$$= \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{1-2p}} \left[\boldsymbol{q_1} \left\{ \left(\frac{\boldsymbol{1-p}}{\boldsymbol{p}} \right)^{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{1} \right\} - \left\{ \left(\frac{\boldsymbol{1-p}}{\boldsymbol{p}} \right)^{\boldsymbol{i}} - \frac{\boldsymbol{1-p}}{\boldsymbol{p}} \right\} \right]$$

(5) $q_{10} = 0$ を (4) の結果に代入すると

$$q_1 \left\{ \left(\frac{1-p}{p} \right)^{10} - 1 \right\} - \left\{ \left(\frac{1-p}{p} \right)^{10} - \frac{1-p}{p} \right\} = 0$$

ゆえに $\boldsymbol{q_1 = \dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - \frac{1-p}{p}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - 1}}$

印刷本

上式および (4) の結果から

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{(q_1-1)\alpha^i - q_1 + \alpha}{\alpha - 1} \\ &= \frac{1}{\alpha-1}\left\{\left(\frac{\alpha^{10}-\alpha}{\alpha^{10}-1} - 1\right)\alpha^i - \frac{\alpha^{10}-\alpha}{\alpha^{10}-1} + \alpha\right\} \\ &= \frac{1}{\alpha-1}\left\{\frac{(1-\alpha)\alpha^i}{\alpha^{10}-1} + \frac{\alpha^{10}(\alpha-1)}{\alpha^{10}-1}\right\} \\ &= \frac{\alpha^{10}-\alpha^i}{\alpha^{10}-1} = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{i}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10}-} \end{aligned}$$

補足 (九工大 [情]2014) 4

16.90 $a_n > 0$ であるから，$\sqrt[3]{3}{a_{n+2}}^3 = {a_n}^4$ の

$$\frac{1}{3} + 3\log_3 a_{n+2} = 4\log_3 a_n \cdots ①$$

$n = 2k-1$ (k は自然数) とおくと

$$\frac{1}{3} + 3\log_3 a_{2k+1} = 4\log_3 a_{2k-1}$$

さらに $b_k = \log_3 a_{2k-1} \cdots ②$ とおくと (k は自然数)

$$a_1 = 0, \quad \frac{1}{3} + 3b_{k+1} = 4b_k$$

$$\text{すなわち} \quad b_{k+1} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\left(b_k - \frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{b_k - \frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $b_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$，公比 $\frac{4}{3}$ の等比数列であるから

$$b_k - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} \quad \text{すなわち} \quad b_k = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}\right\}$$

① から $\log_3 a_{2k-1} = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}\right\}$ よって $\boldsymbol{a_{2k-1} = 3^{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}\right\}}}$

16.91 (1) ${a_{n+1}} = {a_n}^2 - a_n + 1 \cdots ①$ より

$$a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} \geqq a_n$$

$a_1 = 2$ であるから，すべての自然数 n に対して $a_n \geqq 2 \cdots ②$

よって，すべての自然数 n に対して $a_n > 0$

印刷用

(2) ① から　　$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$　　$\cdots$③

②，③ から，$\dfrac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=a_n$ が成り立つから

$$\frac{a_2-1}{a_1-1}=a_1,\ \frac{a_3-1}{a_2-1}=a_2,\ \cdots,\ \frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=a_n$$

これらの式の辺々を掛けて

$$\frac{a_2-1}{a_1-1}\times\frac{a_3-1}{a_2-1}\times\cdots\times\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=$$

$a_1=2$ であるから，$a_{n+1}=P_n+1$ か

(3) $a_1=2$，$a_2={a_1}^2-a_1+1=2^2-$

$a_3={a_2}^2-a_2+1=3^2-3+1$

$a_4={a_3}^2-a_3+1=7^2-7$

$$S_1=\frac{1}{a_1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$S_2=S_1+\frac{1}{a_2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$S_3=S_2+\frac{1}{a_3}=\frac{5}{6}+\frac{1}{7}$$

$$S_4+\frac{1}{a_4}=\frac{41}{42}+\frac{1}{43}=\boldsymbol{\frac{1805}{1806}}$$

②，③

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$$

(5) 結果から

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{P_{n-1}}-\frac{1}{P_n}$$

$$+\frac{1}{a_3}+\cdots=\frac{1}{P_1}-\frac{1}{P_n}$$

上式の両辺に $\frac{1}{a_1}$ を加えると

$$\frac{1}{P_1}-\frac{1}{P_n}+\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{P_n}+\frac{1}{2}=\boldsymbol{1-\frac{1}{P_n}}$$

16.92　(1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

C 上の点 $(a_1,\ {a_1}^2-1)$ における接線の方程式は

$$y-({a_1}^2-1)=2a_1(x-a_1)\quad\text{すなわち}\quad y=2a_1x-{a_1}^2-1$$

見本

この直線上に $(a_2,\ 0)$ があるから

$$0 = 2a_1a_2 - {a_1}^2 - 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2a_1a_2 = {a_1}^2 + 1 \quad \cdots ①$$

$a_1 \neq 0$ より　　$\boldsymbol{a_2 = \dfrac{{a_1}^2 + 1}{2a_1}}$

(2) (1) と同様にして　$2a_na_{n+1} = {a_n}^2 + 1 \quad \cdots ②$

上式において，$a_n > 0$ のとき　$a_{n+1} > 0$

$a_1 > 0$ であるから，すべての自然数 n について

② から，$a_{n+1} = \dfrac{{a_n}^2 + 1}{2a_n}$ が成り

$$a_{n+1} - 1 = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} - 1 \quad \text{ゆえに}$$

③ から $a_n > 1$ のとき，$a_{n+1} >$

$a_1 > 1$ であるから，すべて

(3) ③ および (2) の結果から

$$a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n - 1)$$

$$- 1) < \left\{\frac{1}{2}(a_n - 1\right.$$

よ　すべ　について　$b_{n+1} < {b_n}^2$

の結果　$b_n > 0$　から，$c_n = \log_{10} b_n$ とおくと，$a_1 = 2$ より

$$= \log \quad \frac{1}{2}(a_1 - 1) \quad \log_{10} \frac{1}{2}(2 - 1) = -\log_{10} 2$$

の結果　$c_{n+1} <$　　$c_n < 2^{n-1}c_1 = -2^{n-1}\log_{10} 2$

き　$c_n <$　るから

$$\log_{10} 2 < -12 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n-1} > \frac{12}{\log_{10} 2}$$

$\dfrac{12}{\log_{10} 2} = 39$　　$2^5 = 32$，$2^6 = 64$ であるから，

求める n の　つは，$n - 1 = 6$，すなわち　$\boldsymbol{n = 7}$

見本

16.93 (1) $a_k=\prod_{j=1}^{k}(2j-1)$ であるから

$$\begin{aligned}(2k)!&=\prod_{j=1}^{k}2j(2j-1)\\&=\left(\prod_{j=1}^{k}2\right)\left(\prod_{j=1}^{k}j\right)\left\{\prod_{j=1}^{k}(2j-\right.\\&=2^k k!a_k\end{aligned}$$

(2) 「自然数 n に対して，$2^n!$ は $2^{(2^n-$ [illegible] を $(*)$ とする．

[1] $n=1$ のとき，$2^1!=2$ は $2^{(2^1-1)}$ [illegible]

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が

[2] $n=k$ のとき，$(*)$ が成り [illegible] l を用いて

$$= l\cdot 2^{(}$$

とおける．(1) の結果を利用して

$$\begin{aligned}&^{k+1}!=(2\cdot 2^k)!\\&=2^{2^k}(2^k!)a_{2^k}\\&^{2^k}l2^{(2^k-1)}a_{2^k}\\&^{2^k-1)}la_{2^k}=2^{(2\cdot 2^k-1)}la_{2^k}=2^{(2^{k+1}-1)}la_{2^k}\end{aligned}$$

よっ [illegible] $=k+$ [illegible] きも，[illegible] り立つ．

[1] [illegible] より，[illegible] の自然数 n に [illegible]，$(*)$ が成り立つ．

16.9 [illegible] $\sin^2\theta$，[illegible] より

$$\begin{aligned}&=4\sin^2\\&4\sin^2\theta\cos^2\theta=(2\sin\theta\cos\theta)^2=\boldsymbol{\sin^2 2\theta}\end{aligned}$$

$a_2=\sin^2 2\theta$，[illegible] $4a_2(1-a_2)$ より

$$\begin{aligned}a&=\sin^2 2\theta(1-\sin^2 2\theta)\\&\sin^2 2\theta\cos^2 2\theta=(2\sin 2\theta\cos 2\theta)^2=\boldsymbol{\sin^2 4\theta}\end{aligned}$$

(2) 自然数 n について，$a_n=\sin^2(2^{n-1}\theta)\cdots(*)$ とする．

[1] $n=1$ のとき，$a_1=\sin^2(2^0\theta)=\sin^2\theta$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

見本

［2］$n=k$ のとき，$a_k=\sin^2(2^{k-1}\theta)$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=4a_k(1-a_k)=4\sin^2(2^{k-1}\theta)\{1-\sin^2(2^{k-1}\theta)\}\\&=4\sin^2(2^{k-1}\theta)\cos^2(2^{k-1}\theta)\\&=\{2\sin(2^{k-1}\theta)\sin(2^{k-1}\theta)\}^2=\sin^2 2^k\theta\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ が成り立つ．

16.95　$2^n>\dfrac{1}{2}n^2+n\quad\cdots(\mathrm{A})$ とする．

［1］$n=3$ のとき

$$(\text{左辺})=2^3=8,$$

よって，$n=3$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］$k\geqq 3$ として，$n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$2^k>\frac{1}{2}k^2+k$$

が成り立つと仮定する．

$n=k+1$ のときの (A) の差を考えると

$$2^{k+1}-\left\{\frac{1}{2}(k+1)^2+(k+1)\right\}=2\cdot 2^k-\left(\frac{1}{2}k^2+2k+\frac{3}{2}\right)$$

$$>2\left(\frac{1}{2}k^2+k\right)-\left(\frac{1}{2}k^2+2k+\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(k^2-2k-3)>0$$

すなわち $2^{k+1}>\dfrac{1}{2}(k+1)^2+(k+1)$

$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ．

16.96　$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2\cdots(*)$ とする．

［1］$n=1$ のとき

$$(*)\text{ の左辺}=1^3=1,\quad (*)\text{ の右辺}=\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\right)^2=1$$

よって，$n=1$ のとき $(*)$ が成り立つ．

見本

［2］$n=k$ のとき

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2$$

が成り立つと仮定すると

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left\{\frac{1}{2}k(k+1\right.$$
$$=\frac{1}{4}(k$$
$$\left.1)(k+2)\right\}^2$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が

［1］，［2］より，すべての自然数 て つ．

16.97 (1) $a_{k+1}-a_k=16k+8$ で ，$n\geqq 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}(16k$$
$$a_n-a_1=16\cdot\frac{1}{2}n(n$$ $$8(n-1)$$
$$a_n-6=8n^2-8$$

$$=\frac{n^2(n+1)$$ $$=1,2,3,\cdots)$$

等式を する

き

左辺 $=1^3=1$，　右辺 $=\dfrac{1^2(1+1)^2}{4}=1$

［2］$n=k$ の) が成り立つ，すなわち

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

見本

であると仮定すると，$n=k+1$ のときの $(*)$ の左辺は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}k^3&=\sum_{k=1}^{n}k^3+(n+1)^3\\&=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3\\&=\frac{1}{4}(n+1)^2\{n^2+4(n+\\&=\frac{(n\ \ 1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも（

［1］，［2］から，すべての自然数 n に

(3) 求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(8k^2-\ \ \sum_{k=1}^{}(8k^3-\\&=8\times\frac{n^2(n+\ \ }{4}\ \ 2\times n\\&=\boldsymbol{n(n+1)(2\ \ 2\ \ 1)}\end{aligned}$$

16.98 証明す

［1］ $=\frac{5}{2}$ よ

$n=$ き，（ り立つと

$$1=2\ \ \frac{(a_k-1)}{a_k}>0$$

$$2-\ \ 1=\frac{2-a_k}{a_k}>0$$

って，$+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］よ べての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

(2) $a_{n+1}=3-$ $2-a_{n+1}=\dfrac{2-a_n}{a_n}$

ゆえに $\dfrac{1}{2-a_{n+1}}=\dfrac{a_n}{2-a_n}=\dfrac{2}{2-a_n}-1$ よって $\boldsymbol{x_{n+1}=2x_n-1}$

見本

(3) $x_1 = \dfrac{1}{2-a_1} = \dfrac{1}{2-\frac{3}{2}} = 2$

(2) の結果から　　$x_{n+1} - 1 = 2(x_n - 1)$

$\{x_n - 1\}$ は，初項が $x_2 - 1 = 1$，公比が 2 の等比数列であるから

$$x_n - 1 = 1 \cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x_n = 2^{n-1} + 1}$$

(4) $x_n = \dfrac{1}{2-a_n}$ より　$a_n = \dfrac{2x_n - 1}{x_n}$　これに (3) [illegible] 代入すると

$$a_n = \frac{2(2^{n-1}+1) - 1}{2^{n-1}+1}$$

16.99　(1) 漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{1}{2-a_n}$ より

$$a_2 = \frac{1}{2-a_1} = \frac{1}{2-\frac{q}{p}} = \boldsymbol{\frac{p}{2p-q}},$$

$$a_3 = \frac{1}{2-a_2} = \frac{1}{2-\frac{p}{2p-q}} = \boldsymbol{\frac{2p-q}{3p-2q}}$$

$$\frac{1}{2-a_3} = \frac{1}{2-\frac{2p-q}{3p-2q}} = \boldsymbol{\frac{3p-2q}{4p-3q}}$$

(2) の結果から

$$a_n = \frac{(n-1)p - (n-2)q}{np - (n-1)q} \quad \cdots (*)$$

と推定され

き，$a_1 = \dfrac{1}{p}$ [illegible] $(*)$ は成り立つ．

[2] $n = k$ [illegible]

$$a_k = \frac{(k-1)p - (k-2)q}{kp - (k-1)q}$$

が成り立つ [illegible] 仮定すると

$$\frac{1}{2-a_k} = \frac{1}{2 - \dfrac{(k-1)p-(k-2)q}{kp-(k-1)q}} = \frac{kp-(k-1)q}{(k+1)p-kq}$$

よって，$n = k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

見本

［1］，［2］より，すべての自然数 n について $(*)$ は成り立つ．

補足 与えられた漸化式の特性方程式 $x=\dfrac{1}{2-x}$ を解くと　$x=1$

$$a_{n+1}-1=\frac{1}{2-a_n}-1=\frac{a_n-1}{2-a_n}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$$

したがって，$\left\{\dfrac{1}{a_n-1}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1-1}$，公差 -1 の等[illegible]であるから

$$\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{a_1-1}-(n-[\text{illegible}])=\frac{p-(n-1)q}{q-p}$$

ゆえに　$a_n-1=\dfrac{q-p}{np-(n-1)q}$　[illegible]

16.100　(1) $a_2=\dfrac{1}{3-2a_1}=\dfrac{1}{3-2\cdot\frac{1}{3}}=\dfrac{\mathbf{3}}{\text{[illegible]}}$

$a_3=\dfrac{1}{3-2a_2}=\dfrac{1}{3-2\cdot\frac{3}{7}}=\dfrac{\mathbf{7}}{\text{[illegible]}}$

$a_4=\dfrac{1}{3-2\cdot\frac{7}{15}}=\dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{31}}$

([illegible]の結果[illegible]$=\dfrac{2^n-1}{2^{n+1}-1}\cdots(*)$ と予[illegible]る．

［1］[illegible]$=1$ のとき，$\dfrac{2^1-1}{2^2-1}=\dfrac{1}{3}$

よって，$n=1$ の[illegible]$(*)$ が成り立つ．

［2］[illegible]のとき[illegible]が成り立つと仮[illegible]ると

$$a_{k+1}=\frac{1}{3-2\cdot\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}}$$

$$=\frac{2^{k+1}-1}{3(2^{k+1}-1)-2(2^k-1)}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+2}-1}$$

よって，$n=k+1$ のときも，$(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ．

解説 $a_{n+1}=\dfrac{1}{3-2a_n}$ より，$c=\dfrac{1}{3-2c}$ を解くと　$c=1,\ \dfrac{1}{2}$

したがって　$a_{n+1}-1=\dfrac{2(a_n-1)}{3-2a_n}$，　$a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{a_n-\frac{1}{2}}{3-2a_n}$

見本

上の 2 式から　$\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}-\frac{1}{2}} = 2\cdot\dfrac{a_n-1}{a_n-\frac{1}{2}}$

ゆえに　$\dfrac{a_n-1}{a_n-\frac{1}{2}} = 2^{n-1}\times\dfrac{a_1-1}{a_1-\frac{1}{2}} = 2^{n-1}\cdot 4 = 2^{n+1}$

よって　$a_n = \dfrac{2^n-1}{2^{n+1}-1}$

16.101　(1) $a_1=0$, $a_{n+1}=(1-r)r^{n-1}+r^2a_n$　$(n=1,2,3,\cdots)$

上の漸化式に順次，$n=1,\ 2,\ 3$ を代入すると

$$a_2=(1-r)1+r^2a_1=$$
$$a_3=(1-r)r+r^2a_2=r-$$
$$a_4=(1-r)r^2+r^2a_3=r^2$$

(2) (1) の結果から，第 n 項 a_n を

$$a_n=$$ $$-r^{2n-}$$ $$(*)$$

と推測する．

[1] $n=1$ のとき，$a_1=r^{-1}-r^{-1}=0$ で

$=$ $(*)$ が成り立つ，すなわち

$$a_k=r^{k-2}-$$

ると

$$_{+1}=($$ $$^{k-1}+r$$ $$-r^{2k-3})=r^{k-1}-r^{2k-1}$$

り，n $=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

[2] すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{r^{k-1}-(r^2)^{k-1}\}$

i) $r\neq -1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\{r^{k-1}-(r^2)^{k-1}\}$$

$$=\frac{1}{r}\left(\frac{r^n-1}{r-1}-\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right)=\frac{1}{r}\left\{\frac{r^n-1}{r-1}-\frac{(r^n+1)(r^n-1)}{(r+1)(r-1)}\right\}$$

$$=\frac{r^n-1}{r(r+1)(r-1)}\{(r+1)-(r^n+1)\}=-\frac{\boldsymbol{(r^n-1)(r^{n-1}-1)}}{\boldsymbol{(r+1)(r-1)}}$$

見本

ii) $r=-1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{n}\{(-1)^{k-1}-1\}$$
$$= -\left\{\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} - n\right\} = \frac{\boldsymbol{(-1)^n-1}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{n}$$

補足 与えられた漸化式から

$$a_{n+1} - r^2 a_{n} = (1-r)r^{n-1}$$
$$\frac{a_{n+1}}{r^{2n+2}} - \frac{a_n}{r^{2n}} = \frac{r}{r^4}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{r^{2k+2}} - \frac{a_k}{r^{2k}}\right) = \frac{1}{r^4}\sum_{k=1}^{n-1}(r^{n-2}-r^{2n-3})$$
$$\frac{a_n}{r^{2n}} - \frac{a_1}{r^2} = \frac{r}{r^4}\times\frac{1-(r^{n-2}-r^{2n-3})}{1-r^{n-1}}$$

よって $a_n = r^{n-2} - r^{2n-3}$

ここから，上式は $n=1$ のときも成立

したがって $a_n = r^{n-2} - r^{2n-3}$

16 (1) 条件から

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + 1, \quad b_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n^2}b_n + n + 1 \quad \cdots(*)$$

上式より $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 4,\ a_4 = 9$

$b_1 = 1,\ b_2 = 4,\ b_3 = 9,\ b_4 = 16$

$a_n = 2n-2,\ b_n = n^2$ と推定する．

[1] $n=1$ のとき $a_1 = 2\cdot 1 - 2 = 0,\ b_1 = 1^2 = 1$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

[2] $n=k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定すると

$$a_{k+1} = \frac{k+1}{k}(2k-2) + \frac{2}{k} = 2(k+1) - 2$$
$$b_{k+1} = \frac{k+1}{k}\cdot k^2 + k + 1 = (k+1)^2$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

印刷本

［1］，［2］から，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

(2) $\{a_n\}$ は 0 以上の偶数列であり，$\{b_n\}$ は平方数の列であるから，
$\{c_n\}$ は偶数の平方数の列である．

よって　　$c_n = (2n)^2 = \boldsymbol{4n^2}$

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} 4k^2 = 4 \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \boldsymbol{\frac{2}{3} n(n+1)(2n+1)}$$

補足 漸化式から　$\dfrac{a_{n+1}+2}{n+1} = \dfrac{a_n+2}{n}$,

第 1 式から　$\dfrac{a_n+2}{n} = \dfrac{a_1+2}{1}$

第 2 式から，$\left\{\dfrac{b_n}{n}\right\}$ は，

$$\frac{b_n}{n} = 1 + (n-1)\cdot 1$$

16.103 (1)　　$2^m > m^2 \quad \cdots (*)$

$m =$

$5! = 120, \quad 2^5 =$ $= 25$

$m =$ $5)$ の $(*)$ が

と仮定すると

$$(k+1)\cdot k! > 2$$

$$> k^2 - 2k - 1$$

$$> (k$$ $$- 3k = (k+1)^2 + k(k-3)$$

$$> (k+1)^2$$

よって，　$+1$ のときも，$(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］よ　以上の自然数 m について，$(*)$ が成り立つ．

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ $2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \boldsymbol{\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}}$$

印刷本

(3) (2) の結果から

$$S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} < \frac{3}{4}$$

(4) (2) の結果から

$$\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} > \frac{2}{3} \quad \text{整理すると} \quad n(n-9) > 11 \quad \cdots (*)$$

自然数 n について，$n(n-9)$ が正となるのは　$n >$

$n = 10$ のとき　$($　$) = 10 \cdot$

$n = 11$ のとき　$n($　　2

よって，$(*)$ を満たす最小の自然数 n

16.104 (1)　$\dfrac{a_n + 3}{2} = \sqrt{3S_n}$　$\cdots$

$(*)$ に $n = 1$ を代入すると　$\dfrac{}{2} =$

$S_1 = a$　あるから　$\dfrac{a_1 + 3}{2} = \sqrt{}$

a　の両辺を平方すると　$a_1{}^2$　$2a_1$

に　$= 0$　　よって

(2) $(*)$　$\dfrac{a_{n+}}{}$　$\sqrt{3S_{n+1}}$

$_1 = S$　$_{+1}$ で

a_{n+}　$2\sqrt{3(S_n + a_{n+1})}$

両辺　する

$_{+1}{}^2 + 6a_{n+1} +$　$2(S_n + a_{n+1})$

って　　$- 3)^2$　$\cdots$①

は　らなる数

$S_n \geqq S_1 = 3$

$(*)$　$= \sqrt{3S_n} \geqq \sqrt{3S_1} = 3$　ゆえに　$a_n \geqq 3$

上式および①　$a_{n+1} - 3 = 2\sqrt{3S_n}$　よって　$\boldsymbol{a_{n+1} = 3 + 2\sqrt{3S_n}}$

(3)　$3n^2$　$\cdots$(A)

(i) $n = 1$　　$S_1 = 3 \cdot 1^2 = 3$

よって，$= 1$ のとき，(A) が成り立つ．

印刷本

(ii) $n=k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると，(2) の結果を用いて

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} = S_k + (3 + 2\sqrt{3S_k}) \\ &= 3k^2 + 3 + 2\sqrt{3\cdot 3k^2} \\ &= 3k^2 + 3 + 6k = 3(k+1)^2 \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも，(A) が成り立つ．

(i)，(ii) により，すべての自然数について，(A) が[illegible]．

補足 (∗) により，$(a_{n+1}+3)^2 = 12S_n + (a_n+3)^2$ [illegible] の辺々を引くと

$$a_{n+1}{}^2 - a_n{}^2 + 6a_{n+1} - 6[illegible] S_n) = 12a_{n+1}$$

ゆえに　$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-6)$[illegible]

$\{a_n\}$ は初項 3，公差 6 の等差数[illegible] $6n$[illegible]

16.105　(1)　$a_n < \frac{1}{2}$[illegible]

[1] $n=1$ のとき，$a_1 = \beta[illegible] = \frac{1}{2}$ であるか[illegible] が成[illegible]

[2] [illegible]のとき，(∗) が成り立つと仮定[illegible] 満[illegible]

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k(1-a_k)[illegible] \\ &= -2\left(a_k - [illegible]\right) \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[illegible]って [illegible]きも，(∗) が成り立つ．

[illegible]」，[illegible]，(∗) [illegible]立つ．

[illegible]与[illegible]に漸化[illegible] $\frac{1}{2} - a_{n+1}$[illegible] $- a_n\Big)^2$

[illegible]の結果[illegible] $\frac{1}{2} - a_n$[illegible]

[illegible] $\log_2\left(\frac{1}{2} - a_{n+1}\right) = 2\log_2\left(\frac{1}{2} - a_n\right) + 1$

$b_n = \log_2\left(\frac{1}{2}\right.$[illegible] であるから　$b_{n+1} = 2b_n + 1$

(3) (2) の結果[illegible] $b_{n+1} + 1 = 2(b_n+1)$

ゆえに　$b_n + 1 = 2^{n-1}(b_1+1) = 2^{n-1}\left\{\log_2\left(\frac{1}{2} - \beta\right) + 1\right\}$

$$= \log_2(1-2\beta)^{2^{n-1}} \quad \cdots ①$$

見本

また　　$b_n+1=\log_2\left(\dfrac{1}{2}-a_n\right)+1=\log_2(1-2a_n)$　　$\cdots$②

①，② から　　$1-2a_n=(1-2\beta)^{2^{n-1}}$

よって　　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{2}\left\{1-(1-2\beta)^{2^{n-1}}\right\}}$

16.106　(1)　$f_n(x)=a_nx+b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ より

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\int_1^x 6tf_n(t)\,dt=\int_1^x 6t(a_nt+b_n)\,dt\\&=\int_1^x(6a_nt^2+6b_nt)\,dt=\left[2a_nt^3+3b_nt^2\right]_1^x\\&=2a_nx^3+3b_nx^2-2a_n-3b_n\end{aligned}$$

$P_n(x)$ を x^2+x で割ることに

$$P_n(x)=(x^2+x)\{2a_nx-(2a_n-3b_n)\}+a_n-3b_n$$

$P_n(x)$ を x^2+x で割った余り $(2a_n-3b_n)x+a_n-3b_n$ と b_{n+1} に等し　同じ次数の係数を比較して

$$\boldsymbol{a_{n+1}=2a_n-3b_n},\qquad \boldsymbol{b_{n+1}=-2a_n-3b_n}$$

(2)　$f_1($　$)$ より　　$=0$

と (1)　によ　と b_n は整数である．

［1］ n　　とき　　$a_1-3b_1=$　$=-2a_1-3b_1=-2$

　，$a_$　数である．

　$=k$ の　　$a_$　が偶数　と仮定すると

$$a_{k+1}=2a_k-3b_k \qquad b_{k+1}=-2a_k-3b_k$$
$$=2(a_k-b_k)-b_k \qquad =-2(a_k+b_k)-b_k$$

したがっ　$_{+1}$ と b_{k+1} も偶数である．

［1］，［2］か　　$\geqq 2$ のとき，a_n と b_n は偶数である．

ゆえに，n　とき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数である．

(3)［1］ $a_2=2$，$b_2=-2$ より，a_2 と b_2 は 3 の倍数でない．

印刷本

［2］$n=k$ のとき，a_k と b_k が 3 の倍数でないと仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k - 3b_k, & b_{k+1} &= -2a_k - 3b_k \\ &= 3(a_k - b_k) - a_k & &= -3(a_k + b_k) + a_k \end{aligned}$$

したがって，a_{k+1} と b_{k+1} も 3 の倍数でない．

［1］，［2］から，$n \geqq 2$ のとき，a_n と b_n は 3 の倍数で[illegible]い．

ゆえに，$n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は 3 の倍数でな[illegible]

16.107 (1) $P_4 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2$

$= {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2 + 2(a_1$ [illegible] $+ a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4)$

$= \boldsymbol{Q_4 + 2R_4}$

(2) $S_n = (n-1)Q_n - 2R_n \cdots (*)$ とす[illegible]

［1］$n=2$ のとき

$S_2 = [illegible])^2 = a[illegible]^2 -$

$= (2[illegible]Q_2 - 2[illegible]$

$n=2$ のとき，$(*)$ が成り立[illegible]

[illegible]

$S_k = (k-1)Q[illegible] - 2R_k$

[illegible]り立つ

両辺に $\sum_{j=1}^{k}(a_j - a_{k+1})^2$ を加えると

[illegible] $\sum_{j=1}^{k}(a_j$ [illegible] $= (k-1)Q_k$ [illegible] $+ \sum_{j=1}^{k}(a_j - a_{k+1})^2$

S_{k+1} [illegible] $- 2R_k + \sum_{j=1}^{k}({a_j}^2 + {a_{k+1}}^2 - 2a_ja_{k+1})$

$= (k-1)Q_k - 2R_k + Q_k + k{a_{k+1}}^2 - 2\sum_{j=1}^{k} a_ja_{k+1}$

$= k(Q_k + {a_{k+1}}^2) - 2\left(R_k + \sum_{j=1}^{k} a_ja_{k+1}\right)$

$= kQ_{k+1} - 2R_{k+1}$

よって，$n=k+1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］より，$n \geqq 2$ に対して，$(*)$ が成り立つ．

見本

(3) (2) の結果から　$S_4 = 3Q_4 - 2R_4$

上式と (1) の結果から R_4 を消去すると　$\boldsymbol{Q_4 = \dfrac{1}{4}(P_4 + S_4)}$

(4) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ より　$P_4 = 1$

これを (3) の結果に代入すると　$Q_4 = \dfrac{1}{4}(1 + S_4)$

S_4 が最小となるとき，Q_4 は最小となる．

$$S_4 = (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_1 -$$
$$+ (a_2 - (a_2 - a_3 - a_4)^2$$

したがって，$a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ のと　　をとる．

よって，$\boldsymbol{a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dfrac{1}{4}}$

補足 2 次方程式

$$\sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad nx^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k x + \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 = 0$$

の判別式 $D \leqq 0$ であるから

$$D/4 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 - n\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 \geqq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

等号が成立するのは $D = 0$，すなわち

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$$

のときである．

16.108 (数学的帰納法により示す

a_n は切れるが，b_n は で割り切れない」を (A) とする．

[1] $n = 3$ の

$$a_2 = 2\cdot 1\cdot 1 = 2, \qquad b_2 = 2\cdot 1^2 + 1^2 = 3$$
$$a_3 = 2\cdot 2\cdot 3 = 12, \qquad b_3 = 2\cdot 2^2 + 3^2 = 17$$

よって，$n = 3$ のとき，(A) は成り立つ．

[2] $n = k$ のとき $(k \geqq 3)$，(A) が成り立つと仮定すると，

印刷本

$a_k = 3M$，$b_k = 3N \pm 1$ とおけるから (M, N は整数)

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k b_k = 2{\cdot}3M{\cdot}(3N \pm 1) \\ &= 3{\cdot}2M(3N \pm 1) \\ b_{k+1} &= 2{a_k}^2 + {b_k}^2 \\ &= 2(3M)^2 + (3N \pm 1)^2 \\ &= 18M^2 + (9N^2 \pm 6N + \\ &= 3(6 \quad ^2 + 3N^2 \pm 2 \end{aligned}$$

［1］，［2］から，$n \geqq 3$ について

(2) $b_1 = 1$，$b_{n+1} = 2{a_n}^2 + {b_n}^2$ より，b_n は

$a_2 = 2$，$b_2 = 3$ より，$2 \leqq n \leqq m$

a_{m+1} と b_{m+1} は素数 p を約数に

$a_{m+1} = 2a_m b_m$ より，次の

i) a_m が p で割り切れ $b_{m+1} - 2$ $b_m{}^2$

b_m p で割り切れる．

ii) 割り切れるとき，$b_{m+1} - b_m$

り切れる．

ii) よ がともに p で割り切 仮定に反する．

よっ $\geqq 2$ a_n，b_n は互いに る．

(1) $a_1 =$ cos

倍角の より $= 2\sin 2$ $2{\cdot}2\sin 1\cos 1{\cdot}\cos 2$

し て $\cos 2\cos 1$

て $\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$

(2) $a_{n+1} = a_n \cos 2^{n+1}$ $\cdots$①

自然数 n に対 $_n = \dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1} \cdots$(A) が成り立つことを数学的帰納法により証明す

［1］ $n = 1$ の (1) の結果より成り立つ．

［2］ $n = k$

$$a_k = \frac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1}\sin 1}$$

印刷不可

が成り立つと仮定すると，① から

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k \cos 2^{k+1} \\ &= \frac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1} \sin 1} \times \cos 2^{k+1} \\ &= \frac{2 \sin 2^{k+1} \cos 2^{k+1}}{2^{k+2} \sin 1} = \frac{\sin 2^{k+2}}{2^{k+2} \sin 1} \end{aligned}$$

よって，$n = k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 に対して，( ) 立つ．

(3) $\sin 2^{n+1} \leqq 1$

$\sin 1 > \sin \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ゆえに

上の 2 式を (A) に適用すると

$a_n = \dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1} \sin 1} = \sin 2^{n}$ $\times$ 1 $\sqrt{2}$ 2^{n+1}

よって $a_n < \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$

16.110 (1) $2 \cos \dfrac{A+B}{2} \cos \dfrac{A-B}{2}$ で

に，$= (n-2)\theta$ を代入す

$\cos n$ $-2)\theta = 2\cos($ $\cos\theta$

$\cos$ $\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta \quad \cdots (*)$

$n\theta$ が 次式 表せる 数学的帰納法により示す．

［1］ 2 の

$\theta = x$ $2\theta = 2$ あるから

$p_2(x) = 2x^2 - 1$

$p_1(x)$ は 1 $p_2(x)$ は 2 次式である．

［2］ k, のとき

$\cos k\theta =$ $\theta)$，$\cos(k+1)\theta = p_{k+1}(\cos\theta)$ をみたす k 次式 $p_k(x)$，$k+1$ 次 (x) が存在すると仮定すると，$(*)$ により

$$\cos(k+2)\theta = 2\cos\theta \cos(k+1)\theta - \cos k\theta$$

した ，$p_{k+2}(x) = 2x\,p_{k+1}(x) - p_k(x)$ と定めると，$p_{k+2}(x)$ は，$k+2$ 次式で，次式が成り立つ．

$$\cos(k+2)\theta = p_{k+2}(\cos\theta)$$

印刷本

［1］，［2］より，すべての自然数 n に対して

$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

をみたす n 次式 $p_n(x)$ が存在する．

(2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数であることを数学的帰納法により示す．

［1］ $n = 1,\ 2$ のとき

$p_1(x) = x$ は奇関数，$p_2(x) = 2x^2 - 1$ は偶関数である．

［2］ $n = 2k-1,\ 2k$ のとき

$p_{2k-1}(x)$ は奇関数，$p_{2k}(x)$ は偶関数と仮定すると，(1) の結果から $p_{2k+1}(x) = 2x\,p_{2k}(x) - p_{2k-1}(x)$

$$p_{2k+1}(-x) = 2(-x)\,p_{2k}(-x) - p_{2k-1}(-x)$$
$$= -2x\,p_{2k}(x) + p_{2k-1}(x) = -p_{2k+1}(x)$$

よって，p_{2k+1} は奇関数である．

同様に，$p_{2k+2}(x) = 2x\,p_{2k+1}(x) - p_{2k}(x)$ であるから

$$p_{2k+2}(-x) = 2(-x)\,p_{2k+1}(-x) - p_{2k}(-x)$$
$$= 2x\,p_{2k+1}(x) - p_{2k}(x) = p_{2k+2}(x)$$

よって，p_{2k+2} は偶関数である．

［1］，［2］より，n が奇数ならば，$p_n(x)$ は奇関数．n が偶数ならば，$p_n(x)$ は偶関数である．

n が奇数ならば，$p_n(x)$ は奇関数であるから　定数項は　0

n が偶数ならば，$p_n(x)$ は偶関数であるから，1 次の係数は　0

$p_n(x)$ の x^n の係数を a_m，1 次の係数を b_m とすると

$p_2(x) = 2x^2 - 1$ これから　$a_1 = -1,\ \ b_1 = 1$

$p_{n+2}(x) = 2x\,p_{n+1}(x) - p_n(x)$ に $n = 2m-1,\ 2m$ を代入すると

$$p_{2m+1}(x) = 2x\,p_{2m}(x) - p_{2m-1}(x)$$
$$p_{2m+2}(x) = 2x\,p_{2m+1}(x) - p_{2m}(x)$$

上式の第 2 式から　$a_{m+1} = -a_m$　　$\cdots$①

上式の第 1 式から　$b_{m+1} = 2a_m - b_m$　$\cdots$②

① から　$a_m = a_1(-1)^{m-1} = -1\cdot(-1)^{m-1} = (-1)^m$

見本

これを ② に代入すると

$$b_{m+1} = 2(-1)^m - b_m \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b_{m+1}}{(-1)^{m+1}} - \frac{b_m}{(-1)^m} = -2$$

したがって $\dfrac{b_m}{(-1)^m} = \dfrac{b_1}{(-1)^1} - 2(m-1)$ ゆえに $b_m = -(2m-1)\cdot(-1)^m$

よって $p_{2m}(x)$ の定数項は $(-1)^m$,

$p_{2m-1}(x)$ の 1 次の係数は $(2m-1)\cdot($

以上のことから，$p_n(x)$ の定数項および 1 次の係数 b_n は

$$a_n = \begin{cases} \mathbf{0} & (\boldsymbol{n}:\textbf{奇数}) \\ \mathbf{(-1)^{\frac{n}{2}}} & (\boldsymbol{n}:\textbf{偶数}) \end{cases}$$

17.1 (1) 1 個のさいころをなげて 1 の目が出る確率は $\dfrac{2}{} = \dfrac{1}{}$

確率変数 X は，二項分布 $B\left(10,\ \dfrac{1}{3}\right)$ に従うから

$$E(X) = 10\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{10}{3}}, \quad \sigma(X) = \sqrt{\ } \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \mathbf{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

$$E(X) = \int_0^5 xf(x)\,dx = \int_0^5 \frac{2}{25}x^2\,dx = \left[\ \right]_0^5 = \mathbf{\frac{10}{3}}$$

$$V(X) = \int f(x)\{x - E(X)\}^2\,dx = \int \frac{2}{25}x^3\,dx - \left(\frac{10}{3}\right)^2$$

$$= \left[\frac{1}{5}\right]_0^{\ } = \mathbf{\frac{25}{18}}$$

(A と B が独立であるとき

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成立するか

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$= P(B) - P(A)P(B)$$
$$= \{1 - P(A)\}P(B) = P(\overline{A})P(B)$$

よって，$\overline{A}$ と B は独立である．

見本

補足 条件付き確率

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\quad P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

について，A と B が独立であるとは

$$P_A(B)=P(B)\quad \text{および}\quad P_B(A)=P(A)$$

が成り立つことである．また，A と B が独立であると

$$P_B(\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap$$
$$=\frac{P(B)-P}{P(B)}$$
$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{P}{}$$
$$=\frac{P(B)-}{1}$$

したがって，A と B が独立のとき，$\overline{A}$ と 独立で
同様に A と B が独立のとき，A と 独立で
A と B が独立のとき，$\overline{A}$ と 立

定 次のように示してもよい．

$$\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$$
$$1-P(A\cup B)$$
$$\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$$
$$1-P(A) B)+P(A)P(B)$$
$$=\{1-P(A)\} P(B)\}$$
$$P(\overline{A})P(\overline{}$$

17.2 (変数 均 $E(X)$ は

$$X)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$$
$$)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}(n+1)^2$$
$$=\frac{1}{12}(n^2-1)$$

印刷本

よって，標準偏差は　　$\sqrt{V(X)} = \dfrac{\sqrt{\boldsymbol{n^2-1}}}{\boldsymbol{2\sqrt{3}}}$

(2) (1) の結果により

$$m = E(Y) = E(2X-1) = 2E(X) - 1 = 2\cdot\frac{n+1}{2} - 1 = \boldsymbol{n}$$

$$V(Y) = V(2X-1) = 2^2 V(X)$$

よって　　$\sigma = \sqrt{V(Y)} = 2\sqrt{V($ $- 2\cdot\dfrac{\sqrt{n^2-$ $\boldsymbol{-1}}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}$

(3) Y は $1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2n-1$ をとるので，$\quad n,\ 3-n,\ 5-n,\cdots,\ n-1$ をとる．ゆえに，$|Y-m|$ の最大値は

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$(\sqrt{3}\sigma)^2 - (n - \quad)^2 = \left(\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{\quad}}{\quad}\right)^2 \quad -1)^2$$

$$= 2(n-1)$$

よ　　$|Y-m| < \sqrt{3}\sigma$

17.3　(1)　ドの　　方の総数は　${}_n\mathrm{C}_2$ (通り

(a)　X　　Y　　るのは 1 通りであ

$$P(X=s, Y=s) = \frac{1}{{}_n\mathrm{C}_2} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{n(n-1)}}$$

(b)　　となる　　$Y = 1, 2, \cdots,$　　の $t-1$ 通りであるから

$$t) \quad {}_2 = \frac{\boldsymbol{2(t-1)}}{\boldsymbol{n(n-1)}}$$

(　　のは，$X =$　$1,\ s+2, \cdots,\ n$ の $n-s$ 通りであるから

$$P(Y=s) = \frac{n-s}{{}_n\mathrm{C}_2} = \frac{\boldsymbol{2(n-s)}}{\boldsymbol{n(n-1)}}$$

(d)　$[x]$ を x　　ない最大の整数とする．

$X =$　　たす場合の数は $\left[\dfrac{n}{3}\right]$ であるから

$$P(X=3Y) = \frac{\left[\frac{n}{3}\right]}{{}_n\mathrm{C}_2} = \frac{2\left[\frac{n}{3}\right]}{n(n-1)}$$

印刷本

$n \equiv 0 \pmod 3$ のとき，$\left[\dfrac{n}{3}\right] = \dfrac{n}{3}$ であるから

$$P(X = 3Y) = \frac{2\left[\dfrac{n}{3}\right]}{n(n-1)} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3(n-1)}}$$

$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，$\left[\dfrac{n}{3}\right] = \dfrac{n-1}{3}$ であるから

$$P(X = \quad) = \frac{2\left[\dfrac{n}{3}\right]}{(n \quad)} = \boldsymbol{n}$$

$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき，$\left[\dfrac{n}{3}\right] =$

$$P(X = \quad) = \frac{}{n(n-} = \frac{\boldsymbol{2)}}{\boldsymbol{3}}$$

(2) (1) の結果から

$$) = \sum_{t=2}^{n} t\,P(X=t) = \sum_{t=2}^{n} t \cdot \frac{}{})$$

$$\frac{2}{1)} \sum_{t=2}^{n} t(t-1) = \frac{}{1)} \sum_{k=1}^{n} k(k-1)$$

$$E \quad \sum_{s=} \quad s) = \sum^{n-1} \cdot \frac{n-s}{n(n-1)}$$

$$\sum_{=1}^{n-1} s(n- \quad \frac{2}{(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k(n-k)$$

が

$$E \quad E(Y) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} \{k(k-1) + k(n-k)\}$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \boldsymbol{n+1}$$

17.4 (1) $P(X=1) =$ $\boldsymbol{5}$

下の表により $P(X=2) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{5} \cdot 1 = \boldsymbol{\dfrac{12}{25}}$

印刷見本

1回目	2回目
1	3，4，5
2	2，3，4，5
3	1，2，3，4，5

(2) 3回目で試行が終了するのは，次の場合である．

1回目	2回目	3回目
1	1	2，3，4，5
1	2	2，3，4
2	1	3

よって　$P(X=3)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot 1$

4回目で試行が終了するのは，

1回目	2	3回目	4
1		1	2，3，

よって　$P(X=4)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot 1=\dfrac{1}{125}$

確率分布表は次のよう

X	1	2	3	
	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{14}{125}$	

$\cdot\dfrac{12}{25}+3\cdot\dfrac{14}{\ }+4\cdot\dfrac{1}{125}=\mathbf{\dfrac{216}{125}}$

カードの番号の和が8となるのは，次の場合である．

1回目	2回目	3回目	4回目
3			*
1		5	*
2	1	5	*
1	1	1	5

カードの番号の和が8である確率は　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{5}\right)^3+\left(\dfrac{1}{5}\right)^4=\mathbf{\dfrac{36}{625}}$

カードの番号の和が8であるときに，カードを取り出した回数が2回である条件つき確率は　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\div\dfrac{36}{625}=\mathbf{\dfrac{25}{36}}$

印刷本

17.5 (1) A チームが B，C，D，E の 4 チームすべてに負ける確率は

$$\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{40}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1-\dfrac{3}{40}=\boldsymbol{\dfrac{37}{40}}$

(2) A チームが B チームだけに勝つ確率は　$\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}$

A チームが C チームだけに勝つ確率は　$\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{120}$

A チームが D チームだけに勝つ確率は　$\dfrac{18}{120}$

A チームが E チームだけに勝つ確率は　$\dfrac{3}{120}$

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{120}+\dfrac{3}{120}$

(3) (1)，(2) の結果から，$P(X=0)=\dfrac{9}{120}$，$P(X=1)$

$P(X=$　$\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{120}$

$P($　$)=$　$\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\dfrac{1}{2}$

$+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\dfrac{1}{\ }\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{24}{120}$

$P($　$)=1-\{P(X=0)+P($　$)+P(X=3)+P(X=4)\}$

$\left(1-\dfrac{36}{120}+\dfrac{4}{120}\right)=\dfrac{47}{120}$

確率分布表は　になる．

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{9}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{47}{120}$	$\frac{24}{120}$	$\frac{4}{120}$	1

よって　$E($　$)=0\times\dfrac{9}{120}+1\times\dfrac{36}{120}+2\times\dfrac{47}{120}$

$+3\times\dfrac{24}{120}+4\times\dfrac{4}{120}=\dfrac{218}{120}=\boldsymbol{\dfrac{109}{60}}$

印刷本

17.6 (1) $P(X_j=1)$ は，番号 j の玉まですべて 1 つの箱に入る確率であるから

$$P(X_2=1)=1-\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$P(X_3=1)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

$$P(X_4=1)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(2) $P(X_j=j)$ は，番号 j の玉まで順次空箱に入る確率であるから

$$P(X_2=2)$$

$$P(X_3=3)=\frac{1}{2}$$

$$P(X_4=4)$$

(3) $X_j=i$ は，$X_{j-1}=i$ および $X_{j-1}=i-1$ この確率である．

(i) $X_{j-1}=i$ から $X_j=$ となるのは，番 の玉が の入った箱に入る場合．

(ii) $X_{j-1}=i-1$ から $X_j=i$ となるのは， 場合．

よって，求める関係式は次のようになる．

$$\boldsymbol{P(X_j=i)=P(X_{j-1}=i)\times\left(1-\frac{1}{j}\right)+P(X_{j-1}=i-1)\times\frac{1}{j}}$$

(4) (3) の結果より

$$P(X_3=2)=P(X_2=2)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+P(X_2=1)\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$$

$$P(X_4=2)=P(X_3=2)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+P(X_3=1)\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{24}$$

$$P(X_4=3)=P(X_3=3)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+P(X_3=2)\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

よって，X_4 の確率分表は，次のようになる．

X_4	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	1

印刷本

17.7 (1) $A \cap B$ となるのは，$(1,\ 5),\ (5,\ 1)$ の 2 通りであるから

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

事象 B は，次の 9 通り

$$(1,\ 5),\ (2,\ 5),\ (3,\ 5),\ (4,\ 5),\ (5,\ 5)$$
$$(5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4)$$

したがって　　$P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

よって　　$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{18} \div \frac{1}{4} = \frac{2}{9}$

補足 $P(B) = P(2$ 個とも 5 以下$) - P(2$ 個とも 4 以下$) = \frac{5^2}{6^2} - \frac{4^2}{6^2} = \frac{9}{36}$

(2) $P(X = k) = P(2$ 個とも k 以下$) - P(2$ 個とも $k-1$ 以下$)$

$$= \frac{(6-k+1)^2}{6^2} - \frac{(6-(k+1)+1)^2}{6^2}$$

$$= \frac{(7-k)^2 - (6-k)^2}{36} = \frac{\mathbf{13-2k}}{\mathbf{36}}$$

$(Y = k) = P(2$ 個とも k 以下$) - P(2$ 個とも $k-1$ 以下$)$

$$= \frac{k^2}{6^2} - \frac{(k-1)^2}{6^2} = \frac{\mathbf{2k-1}}{\mathbf{36}}$$

(1) の結果より

$$E(3X^2) = 3E(X^2) = 3\sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot \frac{2k}{36} + 3\sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot \frac{2k-1}{36}$$

$$= \sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{1}{6} \cdot 6(6+1)(2 \cdot 6 + 1) = \mathbf{91}$$

17.8 (1) $X = 1$ となるのは，最初に取り出したカードが 3 のときであるから

$$\boldsymbol{P(X=1) = \frac{1}{4}}$$

$X = 2$ となるのは，1 回目，2 回目のカードがそれぞれ

$$(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)$$

見本

のときであり，それぞれの確率は $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$ であるから，求める確率は

$$P(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times 4=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(2) $X=3$ となるのは，1回目，2回目，3回目のカードがそれぞれ

$$(1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 3,\ 1),\ (2,\ 3,\ 4),\ (4,\ 3,\ 2)$$

のときであり，それぞれの確率は $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ であ

$$P(X=3)\quad\ \times\frac{1}{\ }\quad 6$$

よって，この試行が成功する確率は

$$P(X=1)+P(X=2)+\quad\ 3$$

また　　$E(X)=1\times\frac{1}{4}\quad\ +3\times\quad=\boldsymbol{\frac{\ }{12}}$

(3) 番号の和が 6 となるのは (　) で示した　　), (4,　　で示した
(1, 3,　　(2, 3, 1) のときであるから，　　率は

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times$$

　　とがっ　　和が 6 であるとき，X　　である条件つき確率は

$$\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2}{\frac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

　) X_1　　分布　　のようにな

	1		5	計
		0	$\frac{2}{10}$	1

$$E(X_1)=1\cdot\frac{5}{10}+2\cdot\frac{3}{10}+5\cdot\frac{2}{10}=\boldsymbol{\frac{21}{10}}$$

分散 $V(X_1)$ は

$$E({X_1}^2)=1^2\cdot\frac{5}{10}+2^2\cdot\frac{3}{10}+5^2\cdot\frac{2}{10}=\frac{67}{10}$$

$$V(X_1)=E({X_1}^2)-\{E(X_1)\}^2$$

$$=\frac{67}{10}-\left(\frac{21}{10}\right)^2=\frac{670}{100}-\frac{441}{100}=\boldsymbol{\frac{229}{100}}$$

見本

(2) $Z = X_1 + X_2$ より

$$P(Z=2) = \left(\frac{5}{10}\right)^2 = \frac{25}{100}$$

$$P(Z=3) = {}_2\mathrm{C}_1 \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{30}{100}$$

$$P(Z=4) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100}$$

$$P(Z=6) = {}_2\mathrm{C}_1 \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{10} =$$

$$P(Z=7) =$$

$$P(Z=10) = \left($$

$Z = X_1 + X_2$ の確率分布の表

Z	2		4	6	
P	$\frac{25}{100}$		$\frac{9}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{4}{100}$

よ $Z \leqq 4) = \frac{25}{100} + \frac{30}{100} + \frac{9}{100} =$

(3) X_1

$$P(= \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{10}{100}$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{6}{100}$$

$$(W = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} =$$

$$\left(\frac{5}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{38}{100}$$

$$W = 1) = \frac{25}{100}$$

$$= 3) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{100}$$

$$= 4) = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{10}{100}$$

$W = X_1 -$ 確率分布の表は，次のようになる．

W	-4	-3	-1	0	1	3	4	計
P	$\frac{10}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{38}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{10}{100}$	1

印刷本

$$P(W \leqq -1) = \frac{10}{100} + \frac{6}{100} + \frac{15}{100} = \frac{31}{100}$$
$$P(W \leqq 0) = \frac{10}{100} + \frac{6}{100} + \frac{15}{100} + \frac{38}{100} = \frac{69}{100}$$

(2) の結果から，$P(Z \leqq 4) = \dfrac{64}{100}$ であるから，$P(W \leqq a) \leqq P(Z \leqq 4)$ を満たす整数 a の最大値は　$\boldsymbol{a = -1}$

(4) $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ が $n+1$ となるのは，数字 [illegible] -1 回，数字 2 を 1 回取り出すときであるから [illegible] の確率は

$${}_n\mathrm{C}_1 \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^{n-1} \cdot \frac{}{10} \qquad \boldsymbol{\frac{3n}{}}$$

17.10 (1) $T = 6$ となるのは，次の 3 通り

$$(X,\ Y) = (4,\ 2),\ (6,\ \ (6,$$

したがって　$P(T = 6) = \dfrac{3}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

また，[illegible] となるは，次の 6 通り

$$(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ \ ),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6)$$

した[illegible] $= \dfrac{6}{6^2} = \dfrac{1}{6}$

[illegible]て　$\leqq 0)$　$P(T <$ [illegible] $- \dfrac{1}{6} = \boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$

[illegible] $E(X)$ [illegible] $2 + 4 + 5$ [illegible] $\dfrac{21}{6} = \dfrac{7}{2}$

[illegible] $= \dfrac{1}{6}(1^2 + 2$ [illegible] $+ 5^2 + 6^2) = \dfrac{91}{6}$

よっ[illegible] $V($[illegible]$(X^2) - \{E(X)\}^2 = \dfrac{91}{6} - \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\dfrac{35}{12}}$

また，$E(Y)$ [illegible]$)$ であるから

[illegible] $= E(2X - Y) = 2E(X) - E(Y) = E(X) = \boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$

(3)　$E(T^2) = E((2X - Y)^2) = E(4X^2 - 4XY + Y^2)$
$= 4E(X^2) - 4E(XY) + E(Y^2)$

見本

X と Y は独立であるから　$E(XY) = E(X)E(Y)$

また，$E(Y^2) = E(X^2)$ であるから

$$E(T^2) = 5E(X^2) - 4\{E(X)\}^2 = 5 \times \frac{91}{6} - 4\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{161}{6}$$

ゆえに　$V(T) = E(T^2) - \{E(T)\}^2 = \frac{161}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 =$

したがって　$V(aT) = a^2V(T) =$ a^2

よって　$\frac{175}{12}a^2 = 25$　これを解い

補足　独立な確率変数 X，Y について，

$$V(X+Y) = E((X+Y)^2$$
$$= E(X^2 +$$ $$Y^2)$$ $$)^2$$
$$= E(X$$ $$(XY) +$$ $$- (\mu$$
$$= E(X^2) + 2E(X)E(Y)$$ $$^2) -$$ $$\nu^2$$
$$= E(X^2) + 2\mu\nu + E(Y^2)$$
$$= E(X^2) - \mu^2 + E(Y^2) -$$
$$(X) + V(Y)$$

変数 に 次の線形性が成り立つ．

$(X+$ $(X) + E(Y)$　　$E(aX) = aE(X)$

に，X Y あると

$Y) = V($ $)$　　$V(aX) = a^2V(X)$

別解　分散の線形性 かると

$$V(T) = V(2X - Y) = V(2X + (-Y))$$
$$= V(2X) + V(-Y)$$
$$= 2^2V(X) + (-1)^2V(Y)$$
$$= 4V(X) + V(X) \qquad (\text{本題では, } V(Y) = V(X))$$
$$= 5V(X) = 5 \times \frac{35}{12} = \frac{175}{12}$$

見本

したがって　　$V(aT) = a^2V(T) = \dfrac{175}{12}a^2$

17.11　(1)　$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ に対する確率 $P(X \geqq k)$ は，3 回とも k 以上のカードである確率であるから

$$P(X \geqq k) = \left(\frac{4-k+1}{5}\right)^3 = \left(\frac{\boldsymbol{5-k}}{\boldsymbol{5}}\right)^{\boldsymbol{3}}$$

(2)　(1) の結果から

i)　$k = 0, 1, 2, 3$ のとき

$$P(X = k) = P(X$$
$$= \left(5$$

ii)　$k = 4$ のとき

$$P(X = 4) = P(X \geqq 4) = \left($$

i)　の確率分布は次のようにな

	1	2	3	4	計
	12	$\frac{19}{125}$	$\frac{7}{125}$	$\frac{1}{125}$	

(3)　(　果か

$$E(X) = \frac{61}{125} + 2 \times \frac{}{125} + 2 \times \frac{}{12} \times \frac{7}{125} + 4 \times \frac{1}{125} = \frac{100}{125} = \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{5}}$$

$$) = 0 \cdot \frac{}{25} + 1 \cdot \frac{7}{} + \frac{}{25} + 3^2 \times \frac{7}{125} + 4^2 \times \frac{1}{125} = \frac{192}{125}$$

$$= E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{192}{125} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{\boldsymbol{112}}{\boldsymbol{125}}$$

17.12　(1)　X，Y は，互　立であるから

X \ Y	2	4	計
1	ab	$a(1-b)$	a
2	$(1-$	$(1-a)(1-b)$	$1-a$
計	b	$1-b$	1

見本

(2) $W = X - Y$ より

$$\begin{aligned} E(W) &= E(X) - E(Y) \\ &= \{1\cdot a + 2(1-a)\} - \{2\cdot b + 4(1-b)\} \\ &= \boldsymbol{-a + 2b - 2} \end{aligned}$$

(3) $Z = \dfrac{2}{2} = 1$, $Z = \dfrac{2}{1} = \dfrac{4}{2} = 2$, $Z = \dfrac{4}{1} = 4$ より

Z	1	2	4
$P(Z)$	$(1-a)b$	$(1-a)(1-$ b	$a(1-$

$$\begin{aligned} E(Z) &= 1\cdot(1-a)b + 2\{(\qquad \qquad)\} + 4\cdot a(1-b) \\ &= \boldsymbol{2 + 2a - b - ab} \end{aligned}$$

(4) $E(Z) = \dfrac{9}{4}$, $E(W) = -\dfrac{3}{2}$ を (2), [illegible] るこ

$$2 + 2a - b \qquad 4, \quad -$$

ゆえに $a(2-b) - b = \qquad a = 2b - \dfrac{1}{2}$

$0 <$ [illegible] $< b < 1$ に注意してこれを解 [illegible]

[illegible] き, [illegible] 表は

Z	1	2	
$P(Z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} [illegible] &= E [illegible] \{E(Z)\}^2 \\ &= [illegible] \cdot 2^2\cdot\frac{1}{2} + 4^2\cdot [illegible] \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{19}{16}} \end{aligned}$$

17.1 [illegible] -1 の [illegible]

$X_n = k$ は k 回目 [illegible] 表が出る確率であるから

$$P(X_n = k) = \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)\right\}^{k-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}$$

また, $P(X_n$ [illegible] は, 上式により

$$\begin{aligned} P(\qquad 3) &= 1 - P(X_n \leqq 3) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{3} P(X_n = k) = 1 - \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3}{1 - \frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{27}{64}} \end{aligned}$$

印刷

(2) (1) の結果から

$$P(X_n = n) = 1 - P(X_n \leqq n-1)$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$
$$= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

(3) (1), (2) の結果から

$$E_n = \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{4}\left($$

上式の n を $n+1$ に置き

$$E_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} +$$

の 2 式

$$E_{n+$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n} - n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{4}(n+1) - n\right\} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n}$$

17.14 $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - 2\overline{x}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k + \overline{x}^2$

$= E(x^2) - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = E(x^2) - \overline{x}^2$

よって $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{E(x^2) - \overline{x}^2}}$

(2) $\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k y_k - \overline{y}x_k - \overline{x}y_k + \overline{x}\,\overline{y})$$
$$= E(xy) - \overline{y}\,\overline{x} - \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y} = \boldsymbol{E(xy) - \overline{x}\,\overline{y}}$$

見本

(3) 相関係数の定義により　　$\boldsymbol{r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}}$

補足 相関係数 r は，2 つの変量 x，y 間の相関すなわち類似性を示す指標であり，$-1 \leqq r \leqq 1$ の値をとる．シュワルツ (Schwartz) の不等式により

$$\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})\right\}^2 \leqq \left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})^2\right\}\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k-\overline{y})^2\right\}$$

すなわち　　${\sigma_{xy}}^2 \leqq {\sigma_x}^2{\sigma_y}^2$　　よって　　$-1 \leqq$　　$\leqq 1$

$r > 0$ のとき「正の相関」，$r < 0$　　「負の相関」があるという．相関係数が 0 に近いときは 2 つの変量間

(4) 与えらえた等式を t について整理

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - tx_k - 1)^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k^2t^2 \quad + (y$$

$$= E(x^2)t^2 - 2\{E(\quad - \overline{x}\}t + \quad - 1)^2$$

数で，$E(x^2) > 0$ であるから最小にする t の値は

$$\boldsymbol{t = \frac{E(xy) -}{E(x^2}}$$

解説 $\sum_{k=1}^{N}(y_k - ax_k - b)^2$ を最小にする a，b の値を求める．

$$F = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - ax_k - b)^2$$

a，b について偏微分すると

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{k=1}^{N}(y_k - ax_k - b)x_k = -2\{E(xy) - aE(x^2) - b\overline{x}\}$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{k=1}^{N}(y_k - ax_k - b) = -2(\overline{y} - a\overline{x} - b)$$

F が最小となるとき，$\dfrac{\partial F}{\partial a} = \dfrac{\partial F}{\partial b} = 0$ であるから

$$aE(x^2) + b\overline{x} = E(xy), \quad a\overline{x} + b = \overline{y}$$

見本

したがって　$a = \dfrac{E(xy) - \overline{x}\,\overline{y}}{E(x^2) - \overline{x}^2} = \dfrac{\sigma_{xy}}{{\sigma_x}^2}$,　$b = -a\overline{x} + \overline{y}$

このとき，直線 $y = ax + b$，すなわち

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{{\sigma_x}^2}(x - \overline{x})$$

を回帰直線といい，ある値 x_i に対する y の予測値を計[illegible]できる．
また，相関係数 r と回帰直線の傾き a の符号が一致[illegible]

17.15　(1) 確率変数 X が $N(40,\ 20^2)$ に従[illegible]　$Z = \dfrac{X}{}$[illegible]とおくと，
確率変数 Z は $N(0,\ 1)$ に従う．

$$P(X \leqq 10) = P(Z \leqq$$
$$= 0.5$$
$$= 43$$

(2) n が十分大きいとき，$\overline{X}$[illegible]的に**正規分**[illegible]$\left(\mathbf{40},\right.$[illegible]$\left.\right)$ とうから，

$Z = \dfrac{\overline{X} - 40}{}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従[illegible]

$\sqrt{n}$[illegible]

$$P(\quad < 41) = P\left(-\frac{\sqrt{n}}{20}\right.$$[illegible]$$\left. \leqq \frac{\sqrt{n}}{20}\right)$$

$$= 2P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{\sqrt{n}}{20}\right) \geqq 0.8664$$

[illegible]$P\left(\quad \leqq \dfrac{\sqrt{n}}{20}\right) \geqq 0.$[illegible]

$\leqq Z$[illegible]$= 0.43$[illegible]正式をみたすとき

$\dfrac{\sqrt{n}}{20} \geqq 1.5$[illegible]これを解いて　$\boldsymbol{n \geqq 900}$

17.16　(1) $Z = \dfrac{\overline{X} - a}{b}$ [illegible]て

$$E(Z) = \frac{1}{b}(E(\overline{X}) - a) = \frac{1}{b}(m - a), \quad V(Z) = \frac{1}{b^2}V(\overline{X}) = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n}$$

$E(Z) = 0$，$V(Z) = 1$ のとき

$$\frac{1}{b}(m - a) = 0, \quad \frac{1}{b^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n} = 1$$

印刷本

よって　　$\boldsymbol{a = m,\ b = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(2) $P(|Z| \leqq 1.96) = 1 - 2P(Z > 1.96)$

$= 1 - 2 \times 0.025 = 0.95$

したがって，信頼度 95% の信頼区間は　　$|Z| \leqq 1.96$

(1) の結果から，$Z = \dfrac{\overline{X} - m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ であるから　　$\left|\dfrac{\overline{X} - m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leqq 1.96$

よって　　$\boldsymbol{\overline{X} - 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq}$

(3) (2) の結果から，$\sigma = 5$ のとき，信

$1.96 \times 2 \leqq$

これが 2 以下であるから

$\dfrac{19.6}{\sqrt{n}} \leqq 2$　ゆえに　　$9.8 \leqq \sqrt{n}$

がっ　　96.04　よって，n の最　　$\boldsymbol{9}$

17.1 X は**分布 B**　　に従う．

n　　いと　　**分布 $\boldsymbol{N(np,\ np(1-p))}$** に従う．

(　本の大　　の場　　頼度 95%　　区間の幅は

$2 \times 1.96\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$

　区間　　半分にな　　さを n' とすると

$2 \times 1.96\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n'}} = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 1.96\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$

ゆえに　　$\sqrt{\dfrac{1}{n'}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{n}}$　すなわち　$n' = 4n$

よって，標　　きさを **4 倍**にすればよい．

補足 信頼区間は

$$p_0 - 1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < p < p_0 + 1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

印刷本

(3) $p = 0.05$，$n = 1900$ より

$$np = 1900 \times 0.05 = 95, \quad np(1-p) = 1900 \times 0.05 \times (1 - 0.05) = 9.5^2$$

X は，正規分布 $N(95,\ 9.5^2)$ に従うので，$Z = \dfrac{X - 95}{9.5}$ は正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．よって

$$P(76 \leqq X \leqq 114) = P\left(\frac{76 - 95}{9.5} \leqq Z \leqq \frac{1}{}\right)$$
$$= \leqq Z \leqq 2$$
$$= 2$$
$$= 2 \times 0.$$

17.18 (1) (i) **2 項分布 $B\left(100,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に**

$$P(X = k) = {}_{100}\mathrm{C}_k \left(\right)^{100-k} = \boldsymbol{k} \left(\boldsymbol{2} \right)$$

(ii) $\times \dfrac{1}{2} = \mathbf{50}$，$\sigma = \sqrt{100 \times \dfrac{1}{2} \times \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)}$

X は $\quad$) に従うので，$Z = \dfrac{X}{}$ $\quad$ $N(0,\ 1)$ に従う．

$$P(\quad 60) = P\left(\frac{50 - }{5} \leqq Z \leqq \frac{60 - 50}{5}\right)$$
$$= P(\leqq 2) = 0.5 - P(Z > 2)$$
$$= 0.5 - \quad = \mathbf{0.4772}$$

$$P(\quad 0| < a) \quad \left| X \right| < \frac{a}{5}\right)$$
$$= P\left(|Z| < \frac{a}{5}\right) = 2\left\{0.5 - P\left(Z \geqq \frac{a}{5}\right)\right\} = 0.95$$

したがっ $\quad P\left(Z \geqq \dfrac{a}{5}\right) = 0.025$

$P\,(Z > \quad = 0.025$ であるから $\dfrac{a}{5} = 1.96$ よって $\boldsymbol{a = 9.8}$

(2) $P(|Z| < 2 \quad 1 - 2 \times 0.0049 = 0.09902 \fallingdotseq 0.99$

標本比率 $\overline{P}$ は $\overline{P} = \dfrac{100}{400} = \dfrac{1}{4}$

見本

母比率 P に対する信頼度 99%の信頼区間の幅は

$$2\times 2.58\times\sqrt{\frac{\overline{P}\left(1-\overline{P}\right)}{n}}=2\times 2.58\times\sqrt{\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)}{400}}$$
$$=2\times 2.58\times\frac{1}{20}\times\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$\fallingdotseq \mathbf{0.112}$$

17.19 (1) $\boldsymbol{a=m,\ b=\sigma,\ c=np,\ d=\sqrt{np(1-p)}}$

(2) (a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2(k-|x-1|)\,dx$

$$=2k+\int_0^1(x-1)\,dx$$

$$=2k+\left[\ \frac{1}{\ }\ \right]_0^{\ 2}-\ \ =2k$$

$f(x)$ は確率密度関数であるから，$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=1$

$2k-1=1$　これを解

(b) (a)　$f(x)=\begin{cases}x & (0\ \ 1)\\ 2-x & (1\ \ 2)\end{cases}$

より $E(X)$，$V(X)$ は

$$E(X)=\int_0^2 xf(x)\,dx=\int\ \ dx+\int_1^2 x(2-x)\,dx$$

$$=\left[\ \ \right]_0^1+\left[\ \ \right]_1^2=1,$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=\int_0^2 x^2f(x)\,dx-1^2$$

$$=\int_0^1 x^2\cdot x\,dx-\int_1^2 x^2(2-x)\,dx-1^2$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1-\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right]_1^2-1=\frac{1}{6}$$

よって　平均 $E(X)=\mathbf{1}$，標準偏差 $\sqrt{V(X)}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{6}}$

見本

(3) 製品の重さ X(g) は，正規分布 $(1000,\ 50)$ に従うので，$Z = \dfrac{X - 1000}{50}$ は，正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$$P(X \leqq 902) = P\left(Z \leqq \frac{902 - 1000}{50}\right)$$
$$= P(Z \leqq -1.96) = P(Z \geqq 1.96) = 0.025$$

よって，902g 以下の製品の個数は

$$1000 \times 0.025 = \mathbf{25}\ (\text{個})$$

17.20 (1) X が正規分布 $N(65,\ 20^2)$ に従うとき，$\dfrac{X - 65}{20}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$$P(X > c) = P\left(Z > \frac{c - 65}{20}\right) = 0.05$$

であるとき，$P(Z > 1.65) = 0.05$ により

$$\frac{c - 65}{20} = 1.65 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{c = 98}$$

(2) 標本の大きさ 100 を十分大きいとみなして，$\overline{X}$ は

$$\textbf{正規分布 } \boldsymbol{N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{100}\right)}$$

に従う．$\dfrac{\overline{X} - m}{2}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから $P(Z > 1.96) = 0.025$ より

$$P\left(-1.96 \leqq \frac{\overline{X} - m}{2} \leqq 1.96\right) = 1 - 0.025 \times 2 = 0.95$$

が成り立つ．

$$-1.96 \leqq \frac{\overline{X} - m}{2} \leqq 1.96$$

よって，母平均 m の信頼度 95%の信頼区間は

$$\boldsymbol{\overline{X} - 3.92 \leqq m \leqq \overline{X} + 3.92}$$

17.21 (1) (a) 与えられた確率密度関数から

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x + k)\,dx + \int_{0}^{1} (-x + k)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} + kx\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^2}{2} + kx\right]_{0}^{1} = 2k - 1$$

見本

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ より　$2k - 1 = 1$　これを解いて　$\boldsymbol{k = 1}$

したがって　$E(X) = \int_{-1}^{1} xf(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{0} x(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} x(-x+1)\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3} + \right.$ $= \mathbf{0}$

(b) $P(-0.5 \leqq X \leqq 0.5) = \int_{-0.5}^{0.5}$

$= \int_{-0.5}^{0} (x +$

$= \left[\frac{x^2}{} \right.$ $\left. x \right]_{0}$ $= -$

(2) (a) $\boldsymbol{x = m,\ y = \frac{\sigma^2}{n}}$

(b) 標本の大きさ 100 は十分大きいとみなせるので，$N\left(50,\ \frac{20^2}{100}\right) =$ $(50$ 従うので，$Z = \frac{\overline{X} - 50}{2}$ と，Z は $N(0,$ に従う．

P $\leqq 52) = P(-2 \leqq$ $)$

$= 1 - \{P(Z \leqq -2) + P(Z \geqq 1)\}$

$= 1$ $Z \geqq 2) + P(Z \geqq 1)\}$

$= 1 -$ $3 + 0.1587)$

$= \mathbf{0.8}$

17.22　(均 偏差 σ は

$m = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{2}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \mathbf{2}$

$\sigma^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{2}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} - 2^2 = \frac{2}{4}$

$\sigma = \sqrt{\frac{2}{4}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

見本

別解 標本の数が少ないので，次のように計算してもよい．

$$m = \frac{1+2+2+3}{4} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-2)^2+(2-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^3}{4} = \frac{2}{4}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) $\overline{Y} = \dfrac{Y_1+Y_2}{2}$ より

$$P\left(\overline{Y}=\frac{3}{2}\right) = \frac{1\cdot2+2\cdot1}{4\cdot3} = \frac{1}{3}$$

$$P\left(\overline{Y}=2\right) = \frac{1\cdot1+2\cdot1+1\cdot1}{4\cdot3} = \frac{1}{3}$$

$$P\left(\overline{Y}=\frac{5}{2}\right) = \frac{2\cdot1+1\cdot2}{4\cdot3} = \frac{1}{3}$$

$\overline{Y} = \dfrac{Y_1+Y_2}{2}$ の確率分布の表は

$\overline{Y}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

平均 $E(\overline{Y})$ は

$$E(\overline{Y}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{3} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{2}$$

標準偏差 $\sigma(\overline{Y})$ は

$$V(\overline{Y}) = \left(\frac{3}{2}-2\right)^2\cdot\frac{1}{3} + (2-2)^2\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{2}-2\right)^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\sigma(\overline{Y}) = \sqrt{V(\overline{Y})} = \mathbf{\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

(3) (1) で求めた母平均 2，母分散 $\dfrac{1}{2}$ の母集団から抽出された大きさ 200 の標本平均 $\overline{X}$ の分布は正規分布

$$N\left(2,\ \frac{\frac{1}{2}}{200}\right) = N\left(2,\ \frac{1}{400}\right)$$

に従う．ゆえに

$$Z = \frac{\overline{X}-2}{\frac{1}{20}} = 20(\overline{X}-2)$$

見本

は，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$P(Z > 1.65) = 0.05$ より，$P(Z < -1.65) = 0.05$ であるから

$$P(20(\overline{X} - 2) < -1.65) = 0.05 \quad \text{ゆえに} \quad P\left(\overline{X} < 2 - \frac{1.65}{20}\right) = 0.05$$

よって $\quad a = 2 - \dfrac{1.65}{20} = 2 - \dfrac{33}{400} = \boldsymbol{\dfrac{767}{400}}$

17.23 (1) $f(x)$ は確率密度関数であるから $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx =$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{}\right.$$

$$2k$$

ゆえに $\dfrac{1}{2} + 2k = 1$ これを解いて $\boldsymbol{k}$

$$\text{っ} \quad (X) = \int_0^3 xf(x)\,dx$$

$$\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}\,dx + \int_1^3 \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right)dx$$

$$\left.\right]_0^1 + \left[\frac{1}{}x^3 + \frac{3}{8}x^2\right]_1^3$$

$$\boldsymbol{\frac{13}{}}$$

(i) $0 <$ き

$$P(a \leqq Z \leqq b) = P(0 \leqq Z \leqq b) - P(0 \leqq Z \leqq a)$$
$$= \boldsymbol{g(b) - g(a)}$$

(ii) $a \leqq 0$ のとき

$$P(a \leqq Z \leqq b) = P(a \leqq Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq b)$$
$$= P(0 \leqq Z \leqq -a) + P(0 \leqq Z \leqq b)$$
$$= \boldsymbol{g(-a) + g(b)}$$

印刷本

(iii) $b \leqq 0$ のとき

$$\begin{aligned} P(a \leqq Z \leqq b) &= P(-b \leqq Z \leqq -a) \\ &= P(0 \leqq Z \leqq -a) - P(0 \leqq Z \leqq -b) \\ &= \boldsymbol{g(-a) - g(-b)} \end{aligned}$$

(b) 標本平均は，正規分布 $N\left(50,\ \dfrac{(3\sqrt{10})^2}{10}\right) = N($ に従う．

よって，求める確率は

$$P\left(\frac{41.0-50}{3} \leqq Z \leqq -\right.$$

$$-3 \leqq Z \leqq -0.5)$$

$$= \boldsymbol{g(}$$

(c) 標本平均 $\overline{X}$ を標準化

$$Z = \frac{\overline{X} -}{\frac{5}{\sqrt{2}}}$$

$N(0,\ 1)$ に従うので

$$\begin{aligned} P(|Z| \leqq l_p) &= P(- \leqq l_p) \\ &= 2P(\leqq l_p) \\ &= 2( ) = 2 \times \frac{p}{2} = p \end{aligned}$$

よって，m に対する信 $100p\%$ の信頼区間は

$$-l_ \quad \frac{}{\frac{5}{\sqrt{20}}} \quad \text{な} \quad \overline{X} - \frac{5}{\sqrt{20}} l_p \leqq m \leqq \overline{X} + \frac{5}{\sqrt{20}} l_p$$

る信頼区間の区間幅は $\quad 2 \times \dfrac{5}{\sqrt{20}} l_p = \boldsymbol{\sqrt{5}\, l_p}$

17.24 (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx =$ $\quad$ $= 1$

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx = 2k\left[\, x - \frac{x^3}{3} \,\right]_0^1 = \frac{4}{3}k = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k = \frac{3}{4}}$$

また $\quad E(X) = \displaystyle\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} (x - x^3)\,dx = \boldsymbol{0}$

見本

(2) (a) 標本平均 $\overline{X}$ は，100 を大きい数とみなせるので，近似的に次の標準正規分布に従う．

$$N\left(m,\ \frac{10^2}{100}\right) \quad \text{すなわち} \quad N(m,\ 1)$$

ゆえに，$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{1}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$P(Z>1.96)=0.025$ から

$$P(|Z| \leqq 1.9 \quad 1-2\times 0 \quad .95$$

したがって　$P(|\overline{X}-m| \leqq$

ゆえに　$P(\overline{X}-1.96 \leqq m$

よって，求める信頼区間は

(b) 標本平均 $\overline{X}$ は，正規分布 $\quad$

$P(Z>2.58)=0.005$

$$P(|Z| \leqq 2.58)=1-2 \quad 05=$$

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right| \leqq 2.58\right)$$

ゆ $\left(\overline{X}-2.58\dfrac{10}{\sqrt{n}} \leqq m \quad +2.58\dfrac{10}{\sqrt{n}}\right)=0.99$

頼区間 $\quad \leqq m \leqq \overline{X}+2.58\dfrac{10}{\sqrt{n}}\right]$ が，(a) で求めた信頼区間よ $\quad$ くす

$.58\dfrac{10}{}$ ゆえに $\sqrt{n}$ $\quad \times 10 \fallingdotseq 1.32\times 10=13.2$

した $\quad n>1$

175 以上 $\quad$ よい．

17.25 (1)

$$\int_0^2 f \quad =\int_0^a \frac{k}{a}x\,dx+\int_a^2 \frac{k}{2-a}(2-x)\,dx$$

$$=k\left[\frac{x^2}{2a}\right]_0^a+k\left[-\frac{(2-x)^2}{2(2-a)}\right]_a^2=\frac{a}{2}k+\frac{2-a}{2}k=k$$

$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=$ $\quad$ であるから　$\boldsymbol{k=1}$

解説 $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ は，3 点 $(0,\ 0)$，$(a,\ k)$，$(2,\ 0)$ を頂点する三角形の面積．

見本

(2) $k=1$ より

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^2 xf(x)\,dx \\
&= \int_0^a \frac{x^2}{a}\,dx + \int_a^2 \frac{x(2-x)}{2-a}\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3a}\right]_0^a + \int_a^2 \left\{\frac{2(2-x)}{2-a} - \frac{(2-x)^2}{2-}\right\} dx \\
&= \frac{a^2}{3} + \left[-\frac{(2-)^2}{} + \frac{(2-x)^3}{3(2-}\right. \\
&= \frac{a^2}{3} + (2-a) \\
&= \boldsymbol{\frac{a+2}{3}}
\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_0^a \frac{x}{a}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} \right.$ $< \frac{}{2}$

上式および $P(X \leqq u) =$ $\quad u > a$

$$\begin{aligned}
P(X \leqq u) &= \int_0^ \frac{x}{a}\,dx + \int_a^u \frac{2}{2} \\
&= \frac{a}{2} + \left[-\frac{(2-x)^2}{2(2-a)}\right. \\
&= \frac{a}{2} - \frac{(2-u)^2}{2(2-a)} + \frac{}{2} = 1 - \frac{(2-u)^2}{2(2-a)}
\end{aligned}$$

がっ $- \frac{(2-}{2(}$ 0.5 $(2-u)^2 = 2-a$

$a <$ であ $- u > 0,\ 2 -$ より

$a =$ よ $\boldsymbol{a = 2 - \sqrt{2-a}}$

17.26 (1) た玉 a 個 (数字 2 が書かれた玉 1 個の計 $a+1$ 個

の 出した玉の数字を X とすると

X	1	2	計
$P(X)$	$\frac{a}{a+1}$	$\frac{1}{a+1}$	1

$$E(\times \frac{a}{a+1} + 2 \times \frac{1}{a+1} = \frac{a+2}{a+1}$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\
&= 1^2 \times \frac{a}{a+1} + 2^2 \times \frac{1}{a+1} - \left(\frac{a+2}{a+1}\right)^2 = \frac{a}{(a+1)^2}
\end{aligned}$$

印刷

$E(\overline{X}) = E(X)$ であるから

$$\frac{a+2}{a+1} = \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて} \quad a = 1 \quad \text{ゆえに} \quad V(X) = \frac{1}{4}$$

$V(\overline{X}) = \frac{1}{3}V(X)$ であるから　　$V(\overline{X}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{12}}$

復元抽出による大きさ 3 の無作為標本のうち，数字 2 [illegible] れた玉が出た回数を k とすると $(0 \leqq k \leqq 3)$

$$\overline{X} = \frac{1\cdot(3-k)+2\cdot k}{3} = \frac{3+}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{{}_3\mathrm{C}_k}{8}$$

したがって，$\overline{X}$ の確率分布表は，次

$\overline{X}$				
$P(\overline{X})$				

補足 $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X}{n}$ [illegible] き，$V(\overline{X})$ [illegible] (X)

(2) $\dfrac{300}{500}$ [illegible] $P(Z > 0.25) = 0.4$ より

[illegible] $-0.25) = 0.4$　ゆえに [illegible] $\geqq -$ [illegible] $25) = 0.6$

得点 [illegible] $Z =$ [illegible] $245}$ とおくと，Z は [illegible] $1)$ に従うので，合格最低点 [illegible] とする

x [illegible] $=$ [illegible] ゆえに　x [illegible] $+ (-0.25) \times 50 = 232.5$

[illegible] は，小 [illegible] り上げる [illegible] **233** (点)

見本