オイラー数による $\zeta(2n)$ の表記について

熊本県立湧心館高等学校　西村　信一

平成 16 年 8 月 5 日

1　はじめに

リーマン (Riemann) の $\overset{\text{ゼータ}}{\zeta}$ 関数

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

について，2 つの観点から研究報告を行う．

ひとつは，教育活動の観点から，$\zeta(2)$，$\zeta(4)$ 等の紹介において，数学 III まで学んだ生徒が理解できるように配慮したことである．

いまひとつは，研究活動の観点から，$\zeta(2n)$ について，以下の報告を行うものである．

ベルヌイ (Bernoulli) 数 B_n を用いて[1]

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_n$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が成り立つことが知られているが，今回の研究では，オイラー (Euler) 数 E_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を用いて[2]

$$\zeta(2n) = \frac{\pi^{2n}}{2(2^{2n}-1)(2n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix} 2n-1 \\ 2k-2 \end{pmatrix}E_{k-1}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ であることを独自に証明した．

$\zeta(2n)$ を介して，B_n と E_n の関係式

$$B_n = \frac{n}{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix} 2n-1 \\ 2k-2 \end{pmatrix}E_{k-1}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が成り立つことも興味深い．

---

[1] $B_1 = \frac{1}{6}$，$B_2 = \frac{1}{30}$，$B_3 = \frac{1}{42}$，$B_4 = \frac{1}{30}$，$B_5 = \frac{5}{66}$，$B_6 = \frac{691}{2730}$，$B_7 = \frac{7}{6}$，$\cdots$

[2] $E_0 = 1$，$E_1 = 1$，$E_2 = 5$，$E_3 = 61$，$E_4 = 1385$，$E_5 = 50521$，$E_6 = 2702765$，$\cdots$

2　$\zeta(2)$，$\zeta(4)$ の初等的な求め方

次式を示す．

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$
$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

[証明] x に関する恒等式

$$1+\sum_{k=1}^{2m-1}(-x^2)^k=\frac{1-x^{4m}}{1+x^2}$$

より

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{x^{4m}}{1+x^2}\,dx\\ =&\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx-\int_0^1\left\{1+\sum_{k=1}^{2m-1}(-x^2)^k\right\}dx\\ =&\frac{\pi}{4}-\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\end{aligned}$$

また，
$$\int_0^1\frac{x^{4m}}{2}\,dx<\int_0^1\frac{x^{4m}}{1+x^2}\,dx<\int_0^1 x^{4m}\,dx$$
であるので，上の２式より

$$\frac{1}{2(4m+1)}<\frac{\pi}{4}-\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}<\frac{1}{4m+1}\tag{1}$$

$I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とし，$f_1:I\to R$ を

$$f_1(t)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (t=0)\\ \frac{t}{2\sin t} & (0<t\leqq\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

とおくと，f_1 は単調増加である．また，

$$t\sum_{k=0}^{2m-1}\cos(2k+1)t=f_1(t)\sin 4mt\tag{2}$$

が成り立つ．

$\frac{2j-2}{4m}\pi < t < \frac{2j-1}{4m}\pi$ $(j = 1, \ldots, m)$ のとき,

$$f_1\left(\frac{2j-2}{4m}\pi\right)\sin 4mt < f_1(t)\sin 4mt < f_1\left(\frac{2j-1}{4m}\pi\right)\sin 4mt$$

であるので,

$$\frac{1}{2m}f_1\left(\frac{2j-2}{4m}\pi\right) < \int_{\frac{2j-2}{4m}\pi}^{\frac{2j-1}{4m}\pi} f_1(t)\sin 4mt\,dt < \frac{1}{2m}f_1\left(\frac{2j-1}{4m}\pi\right) \tag{3}$$

同様に, $\frac{2j-1}{4m}\pi < t < \frac{2j}{4m}\pi$ $(j = 1, \ldots, m)$ のとき,

$$f_1\left(\frac{2j}{4m}\pi\right)\sin 4mt < f_1(t)\sin 4mt < f_1\left(\frac{2j-1}{4m}\pi\right)\sin 4mt$$

であるので,

$$-\frac{1}{2m}f_1\left(\frac{2j}{4m}\pi\right) < \int_{\frac{2j-1}{4m}\pi}^{\frac{2j}{4m}\pi} f_1(t)\sin 4mt\,dt < -\frac{1}{2m}f_1\left(\frac{2j-1}{4m}\pi\right) \tag{4}$$

(3) と (4) を辺々加えて,

$$\frac{1}{2m}\left\{f_1\left(\frac{j-1}{2m}\pi\right) - f_1\left(\frac{j}{2m}\pi\right)\right\} < \int_{\frac{j-1}{2m}\pi}^{\frac{j}{2m}\pi} f_1(t)\sin 4mt\,dt < 0 \tag{5}$$

$(j = 1, \ldots, m)$ となり, さらに j について加えることにより

$$\frac{1}{2m}\left\{f_1(0) - f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(t)\sin 4mt\,dt < 0 \tag{6}$$

を得る.

(2) より

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(t)\sin 4mt\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sum_{k=0}^{2m-1}\cos(2k+1)t\,dt \\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2m-1}\frac{1}{(2k+1)^2}\end{aligned} \tag{7}$$

(1) より

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} \tag{8}$$

であるので, (6), (7), (8) から

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{1}{(2k+1)^2} = \lim_{m\to\infty}\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8} \tag{9}$$

を得る．

$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$ とおくと，$\frac{S}{4} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots$
なので，上式および (9) から

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}$$

なので,

$$S = \frac{\pi^2}{6}$$

[証終]

次式を示す．

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots=\frac{\pi^3}{32}$$
$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

[証明] $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とし，$f_2:I\to R$ を

$$f_2(t)=t\,f_1(t) \tag{10}$$

とおくと，$f_2{}'(t)=f_1(t)+t\,f_1{}'(t)$ なので f_2 は単調増加となり，同じ議論から

$$\frac{1}{2m}\left\{f_2(0)-f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_2(t)\sin 4mt\,dt<0 \tag{11}$$

を得る．また，(2)，(10) から

$$t^2\sum_{k=0}^{2m-1}\cos(2k+1)t=f_2(t)\sin 4mt \tag{12}$$

が成り立つ．これから

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_2(t)\sin 4mt\,dt&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\sum_{k=0}^{2m-1}\cos(2k+1)t\,dt\\&=\frac{\pi^2}{4}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}-2\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\end{aligned} \tag{13}$$

を得る．よって，(8)，(11)，(13) から

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=\lim_{m\to\infty}\frac{\pi^2}{8}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi^2}{8}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^3}{32}. \tag{14}$$

全く同様に $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とし，$f_3:I\to R$ を

$$f_3(t)=t\,f_2(t) \tag{15}$$

とおくと，$f_3{}'(t)=f_2(t)+t\,f_2{}'(t)$ なので f_3 は単調増加となり，

$$\frac{1}{2m}\left\{f_3(0)-f_3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_3(t)\sin 4mt\,dt<0 \tag{16}$$

を得る．また，(12)，(15) から

$$t^3\sum_{k=0}^{2m-1}\cos(2k+1)t=f_3(t)\sin 4mt \tag{17}$$

が成り立つ．これから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_3(t)\sin 4mt\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 \sum_{k=0}^{2m-1} \cos(2k+1)t\,dt$$
$$= \frac{\pi^3}{8}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} - 3\pi\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} + 6\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{1}{(2k+1)^4} \tag{18}$$

となる．よって，(8)，(14)，(16)，(18) から

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{1}{(2k+1)^4} = -\lim_{m\to\infty}\frac{\pi^3}{48}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} + \lim_{m\to\infty}\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$
$$= -\frac{\pi^3}{48}\times\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi^3}{32} = \frac{\pi^4}{96} \tag{19}$$

を得る．

$T = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots$ とおくと，$\frac{T}{16} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \cdots$ なので，上式および (19) から

$$T = \frac{\pi^4}{96} + \frac{T}{16}$$

なので，

$$T = \frac{\pi^4}{90}$$

[証終]

3　オイラー数と $\zeta(2n)$

定理 1

E_n $(n \geqq 0)$ をオイラー数とする．$\varepsilon(i) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^i}$ とおくと

$$\varepsilon(2n+1) = \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}\cdot(2n)!}E_n$$

が成り立つ．

[証明] $n \geqq 2$，$I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ とし，$f_n : I \to R$ を

$$f_n(t) = t^{n-1} f_1(t) \tag{20}$$

とおくと，f_n は単調増加であり，前節と同じ議論から

$$t^n \sum_{k=0}^{2m-1} \cos(2k+1)t = f_n(t) \sin 4mt \tag{21}$$

および

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) \sin 4mt \, dt = 0 \tag{22}$$

を得る．n を $2n$ に置き換えて，(22) の定積分を求めると，(21) から

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \varepsilon(1) - 2n(2n-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2} \varepsilon(3) \\ + 2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-4} \varepsilon(5) \\ - \cdots + (-1)^n (2n)! \varepsilon(2n+1) = 0\end{aligned} \tag{23}$$

が成り立つ．ここで，数列 E_n $(n \geqq 0)$ を

$$\varepsilon(2n+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \cdot \frac{E_n}{(2n)!} \tag{24}$$

とおいて，これらを (23) に代入すると

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \left\{ E_0 - \binom{2n}{2} E_1 + \binom{2n}{4} E_2 - \cdots + (-1)^n E_n \right\} = 0$$

となる．前節で求めたとおり，$\varepsilon(1) = \frac{\pi}{4}$ であるから，(24) より $E_0 = 1$ である．したがって，上式から E_n はオイラー数に他ならない．　**[証終]**

定理 2

E_n $(n \geqq 0)$ をオイラー数とすると

$$\zeta(2n) = \frac{\pi^{2n}}{2(2^{2n}-1)(2n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\left(\begin{array}{c}2n-1\\2k-2\end{array}\right)E_{k-1}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が成り立つ.

[証明] n を $2n-1$ に置き換えて，(22) の定積分を求めると，(21) から

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}\varepsilon(1) - (2n-1)(2n-2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-3}\varepsilon(3)\\&\qquad + (2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-5}\varepsilon(5)\\&\qquad\qquad - \cdots + (-1)^{n-1}(2n-1)!\left(\frac{\pi}{2}\right)\varepsilon(2n-1)\\&\qquad\qquad\qquad + (-1)^{n}(2n-1)!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2n}} = 0\end{aligned}$$

となり，(24) をこれに代入することにより

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2n}} = \frac{\pi^{2n}}{2^{2n+1}(2n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\left(\begin{array}{c}2n-1\\2k-2\end{array}\right)E_{k-1}$$

上式の左辺が，$\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\zeta(2n)$ であることから，明らか． **[証終]**

4 おわりに

$\zeta(2n+1)$ については，DJURDJE CVIJOVIĆ と JACEK KLINOWSKI の共著の論文[3] がある．

ζ 関数については，古くから多くの数学者によって研究されており，未解決の問題は，難問ばかりである．その中でも Riemann 予想はあまりにも有名である．アメリカのクレイ研究所[4] では未解決問題 7 問にそれぞれ 100 万 $ の賞金がかけてあり，７問の難問中，最も難しいのが Riemann 予想 といわれている．

Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

[3] http://www.ams.org/proc/1997-125-05/S0002-9939-97-03795-7/S0002-9939-97-03795-7.pdf
[4] http://www.claymath.org/

5　付録

$\zeta(2)$ を最初に求めたオイラーは，彼の著書 “*INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM*” で中で[5]

$$\sin z = z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\left(1-\frac{z}{3\pi}\right)\left(1+\frac{z}{3\pi}\right)\cdots$$

であることを示している．また,

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

と z^3 の係数を比較することで (整級数展開の一意性)，$\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ が導かれる．

$\zeta(2n)$ については，$z\cot z$ の有理分数表示とテーラー (Taylor) 展開とを比較して (複素解析),

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_n, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が得られる．

今回の報告の目的は，数学 III まで学んだ生徒に $\zeta(2)$ へ関心を持たせることである．そのための手法としてフーリエ (Fourier) 級数

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right), \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$$

などに着目し，そこで必要となる積分学の第 1(第 2) 平均値定理およびディリクレ (Dirichlet) の積分定理からその糸口を探った．中でも第 2 平均値定理の証明法で用いられる手法において，区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ で関数

$$f(\theta) = \frac{\theta}{\sin\theta}$$

が単調増加であることを利用した．

第 1 平均値定理

$f(x)$ が区間 $[a, b]$ における連続関数で $\varphi(x)$ が $[a, b]$ における定符号の積分可能な関数ならば,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a+\theta(b-a))\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

となる θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する．特に $\varphi(x) = 1$ とすれば,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(a+\theta(b-a))(b-a)$$

[5] レオンハルト・オイラー：『オイラーの無限解析』，高瀬正仁訳，海鳴社，2001

第 1 平均値定理から，次の定理が導かれる．

第 2 平均値定理

$f(x)$ が区間 $[a,b]$ における正の単調減少関数で $\varphi(x)$ が $[a,b]$ における積分可能な関数ならば,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a+0)\int_a^\eta \varphi(x)\,dx$$

となる η $(a<\eta\leqq b)$ が存在する．一般に $f(x)$ が必ずしも正でない単調関数のときには,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a+0)\int_a^\eta \varphi(x)\,dx + f(b-0)\int_\eta^b \varphi(x)\,dx$$

となる η $(a<\eta<b)$ が存在する．

第 2 平均定理から，次の定理が導かれる．

ディリクレの積分定理

$f(x)$ が区間 (a,b) で単調であるとき,

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx &= 0, \qquad (a,b\ \text{は同符号}),\\ &= \frac{\pi}{2}\{f(+0)+f(-0)\}, \qquad (a<0,\ b>0),\\ &= \frac{\pi}{2}f(+0), \qquad (a=0,\ b>0),\\ &= \frac{\pi}{2}f(-0), \qquad (a<0,\ b=0).\end{aligned}$$

ディリクレの積分定理から，次が導かれる．

フーリエ級数

区間 $[-\pi,\pi]$ で定義された関数 $f(x)$ について,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

を $f(x)$ のフーリエ係数といい，これからつくった級数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

を $f(x)$ のフーリエ級数という．