オイラー数による$\zeta(2n)$の表記について

熊本県立球磨工業高等学校　西村　信一

1　はじめに

リーマン (Riemann) の $\overset{\text{ゼータ}}{\zeta}$ 関数

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

について，2つの観点から研究報告を行う．

ひとつは，教育活動の観点から，$\zeta(2)$，$\zeta(4)$ 等の紹介において，数学 III まで学んだ生徒が理解できるように配慮したことである．

いまひとつは，研究活動の観点から，$\zeta(2n)$ について，以下の報告を行うものである．

ベルヌイ (Bernoulli) 数 B_n を用いて[1]

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_n$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が成り立つことが知られているが，今回の研究では，オイラー (Euler) 数 E_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を用いて[2]

$$\zeta(2n) = \frac{\pi^{2n}}{2(2^{2n}-1)(2n-1)!} \times \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} 2n-1 \\ 2k-2 \end{pmatrix} E_{k-1}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ であることを証明した．

$\zeta(2n)$ を介して，B_n と E_n の関係式

$$B_n = \frac{n}{2^{2n-1}(2^{2n}-1)} \times \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} 2n-1 \\ 2k-2 \end{pmatrix} E_{k-1}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が成り立つことがわかる．

上に述べた結果は，すべて知られているものばかりであるが，初等的な方法による独自の計算法を与えた．

[1] $B_1 = \frac{1}{6}$，$B_2 = \frac{1}{30}$，$B_3 = \frac{1}{42}$，$B_4 = \frac{1}{30}$，$B_5 = \frac{5}{66}$，$\cdots$

[2] $E_0 = 1$，$E_1 = 1$，$E_2 = 5$，$E_3 = 61$，$E_4 = 1385$，$\cdots$

2　研究の概要

$I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ とし，$f_n : I \to R$ を

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (t = 0) \\ \frac{t}{2\sin t} & (0 < t \leqq \frac{\pi}{2}) \end{cases},$$

$$f_n(t) = t f_{n-1}(t) \quad (n > 1)$$

とおくと

$$t^n \sum_{k=0}^{2m-1} \cos(2k+1)t = f_n(t) \sin 4mt$$

および

$$\frac{1}{2m}\left\{f_n(0) - f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) \sin 4mt \, dt < 0$$

が成り立つ．ここで，

$$\varepsilon(i) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^i}$$

とおいて，$n = 1, 2, 3$ の場合を計算すると

$$\frac{\pi}{2}\varepsilon(1) - \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\zeta(2) = 0,$$

$$\frac{\pi^2}{4}\varepsilon(1) - 2\varepsilon(3) = 0,$$

$$\frac{\pi^3}{8}\varepsilon(1) - 3\pi\varepsilon(3) + 6\left(1 - \frac{1}{2^4}\right)\zeta(4) = 0$$

であるから，$\varepsilon(1) = \frac{\pi}{4}$ を利用することにより $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ を得る．

3　終りに

計算の詳細については，以下に掲載している．

http://www1.ocn.ne.jp/~oboetene/zeta.pdf

4 成果報告

4.1 主な研究活動について

高校数学教師として新規採用された頃,「代数・幾何」[3]で扱われている2次曲線の分野で頂点,中心について明確な定義がなされていないことに疑問を感じ,個人的な研究テーマとした.

4.1.1 頂点について

$\boldsymbol{R}^2$ の曲線の頂点は,曲率が極値をとる点である.とくに2次曲線 $f(x,y)=0$ においては,$|\mathrm{grad} f|$ が極値をとる点であることがわかった.これをさらに研究したものを,平成3年度数学教育研究沖縄大会にて,「2次曲線と2次曲面の微分幾何学的考察」というテーマで研究報告を行った.そこでは,$\boldsymbol{R}^2$ の曲線 $f(x,y)=0$ の曲率 κ や $\boldsymbol{R}^3$ の曲面 $f(x,y,z)=0$ のガウスの全曲率 K は,$f_\alpha = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$,$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\alpha}$ $(\alpha,\beta = x,\,y,\,z)$ とし,

$$M = -\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} & f_y \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} & f_z \\ f_x & f_y & f_z & 0 \end{vmatrix}$$

とおくと

$$K = \frac{M}{({f_x}^2+{f_y}^2+{f_z}^2)^2}$$

と表され,特に2次曲面 $f(x,y,z)=0$ については,M が定数になることを報告した.

さらに研究を進め,$\boldsymbol{R}^n$ の超曲面のガウス曲率 (Gaussian curvature) について,1991年に鹿児島大学教授の橋口正夫先生[4]と共著の論文 *"On the Gaussian curvature of the indicatrix of a Lagrange space"* を完成させた.

4.1.2 中心について

2次曲線 $f(x,y)=0$ の中心と関数 f の特異点 $p \in \boldsymbol{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$$

が同値 (equivalent) であることがわかった.一般に,$\boldsymbol{R}^n$ の2次超曲面 $f^{-1}(0) \neq \phi$ についても,その中心と定義関数の特異点が同値であることを証明した.

このことについては,1999年に京都大学数理解析研究所で開催された特異点論の研究集会で研究代表者を務められた小池敏司先生[5]や出席された研究者からも,この研究結果が新たな研究結果であることを認めて頂いた.

[3]「代数幾何」ではない.

[4]フィンスラー (Finsler) 幾何学では多くの定理を発見されたことで知られている.

4.2 今回の研究について

$\zeta(2)$ が,フーリエ (Fourier) 級数

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)$$

$(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ から得られることに注目した.そこに至る積分学の第1,第2平均値定理,ディリクレ (Dirichlet) の積分定理の証明法と上の等式との関連性を検証し,$\zeta(2)$,$\zeta(4)$ の初等的な計算方法を与えた[6].

さらに,$\zeta(2n)$ をオイラー数を用いて表記できること,ベルヌイ数がオイラー数を用いて表記できることを独自に導いた.

4.3 教育活動について

平成12年以降,学校間で利用する専用のサイトを設け,数学に関するコンテンツの作成を担当する.主なコンテンツは,次のとおりである.

(1) 過去の入試問題 (数学,英語,専門)
(2) 進学用 (数学,英語)・就職用 (数学) 問題集
(3) 入試情報 (高専編入学情報)
(4) 連合模試 (数学,英語)

昨年度から同事業への取り組みとして,教科書のデジタル化を行っている.数学 I,数学 II,数学 III,数学 A,数学 B,数学 C の教科書を電子文書化し,プロジェクタを用いて,授業で毎回実践している.

なお,デジタルコンテンツについては,以下に掲載している.

http://www1.ocn.ne.jp/~oboetene/plan/

[5]大学院時代の私の指導教官

[6]初等数学の会から執筆を依頼され,快諾した.