平成21年度　東海大学　理系学部統一試験
数学I・数学II・数学A・数学B(ベクトル・数列)70分
理学部・産業工学部・情報理工学部・開発工学部・情報通信学部・海洋学部・工学部・生物理工学部・芸術工学部・農学部
平成21年2月2日

次の空欄を埋めなさい．空欄には0〜9の数字の1つが入る．空欄に書いてある番号が解答番号を表している．解答用紙の対応する解答番号の解答欄にマークしなさい．分数のときは既約分数の形で，根号を含むときは根号の中が最小の自然数になるような形で表しなさい．

(1) $\sqrt{180}-\sqrt{125}+\sqrt{20}=\boxed{1}\sqrt{\boxed{2}}$

(2) $5+6\sqrt{5}-\dfrac{12}{1+\sqrt{5}}=\boxed{3}+\boxed{4}\sqrt{5}$

(3) $8x^2+10x-3=(\boxed{5}x-\boxed{6})(\boxed{7}x+\boxed{8})$

(4) $3x^2+4x+5=3\left(x+\dfrac{\boxed{9}}{\boxed{10}}\right)^2+\dfrac{\boxed{11}\boxed{12}}{\boxed{13}}$

(5) 1，2，3，4，5を1つずつ使って5桁の整数を作ると，偶数は$\boxed{14}\boxed{15}$個できる．

(6) 1，2，3，4，5を1つずつ使って5桁の整数を作ると，4の倍数は$\boxed{16}\boxed{17}$個できる．

(7) $\dfrac{2x^3+3x^2+1}{x^2+3x+2}=\boxed{18}x-\boxed{19}+\dfrac{\boxed{20}x+\boxed{21}}{x^2+3x+2}$

(8) $x^3+x^2-6x-18=(x-\boxed{22})(x^2+\boxed{23}x+\boxed{24})$

(9) 円$x^2+y^2-6x+12y-80=0$の半径は$\boxed{25}\sqrt{\boxed{26}}$である．

(10) 中心が原点で，直線$3x+4y=10$に接する円は$x^2+y^2=\boxed{27}$である．

(11) $-\dfrac{1}{6}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{1}{3}\pi$のとき$4\cos^2\theta$のとり得る値の範囲は
$\boxed{28}\leqq 4\cos^2\theta\leqq\boxed{29}$である．

(12) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\boxed{30}\sin\left(x+\dfrac{\boxed{31}}{\boxed{32}}\pi\right)$

(13) $9^{\log_3 8}=\boxed{33}\boxed{34}$

(14) $16^x - 6{\cdot}4^x - 16 = 0$ の解は $x = \dfrac{\boxed{35}}{\boxed{36}}$ である．

(15) $y = x^3 + 6x^2 + 3x + 8$ の接線で原点を通るものは，$y = \boxed{37}\boxed{38}x$ と $y = -\boxed{39}x$ である．

(16) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 4x - 4$ と x 軸とで囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{40}}{\boxed{41}}$ である．

(17) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(3k+7) = \boxed{42}\boxed{43}\boxed{44}$

(18) $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{12} 3^k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{6} 3^k} = \boxed{45}\boxed{46}\boxed{47}$

(19) $\vec{a} = (6,\ 3)$，$\vec{b} = (3, -1)$ の内積は $\vec{a}{\cdot}\vec{b} = \boxed{48}\boxed{49}$ である．

(20) $\vec{a} = (6,\ 3)$，$\vec{b} = (3, -1)$ のなす角は $\theta = \boxed{50}\boxed{51}^\circ$ である．

解答例

(1) $$\begin{aligned}\sqrt{180} - \sqrt{125} + \sqrt{20} &= 6\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 2\sqrt{5} \\ &= \mathbf{3\sqrt{5}}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}5 + 6\sqrt{5} - \frac{12}{1+\sqrt{5}} &= 5 + 6\sqrt{5} - \frac{12(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} \\ &= 5 + 6\sqrt{5} - \frac{12(\sqrt{5}-1)}{5-1} \\ &= 5 + 6\sqrt{5} - 3(\sqrt{5}-1) \\ &= \mathbf{8 + 3\sqrt{5}}\end{aligned}$$

(3) $8x^2 + 10x - 3 = \boldsymbol{(4x-1)(2x+3)}$

(4) $$\begin{aligned}3x^2 + 4x + 5 &= 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) + 5 \\ &= 3\left\{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} + 5 \\ &= 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 5 \\ &= \boldsymbol{3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}}\end{aligned}$$

(5) 偶数となるのは，1 の位が 2，4 のときで，選び方は 2 通り．

残りの位には，1 の位の数字以外の 4 個の数字を並べる．

よって，求める個数は　$2 \times 4! = 2 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{48}$ (個)

(6) 4 の倍数となるのは，下 2 桁が 12，24，32，52 のときで，選び方は 4 通り．

残りの位には，これ以外の 3 個の数字を並べる．

よって，求める個数は　$4 \times 3! = 4 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{24}$ (個)

(7) 多項式 $2x^3 + 3x^2 + 1$ を多項式 $x^2 + 3x + 2$ で割ると

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x & -3 & & \\
\hline
x^2+3x+2 & 2x^3 & +3x^2 & & +1 \\
 & 2x^3 & +6x^2 & +4x & \\
\hline
 & & -3x^2 & -4x & +1 \\
 & & -3x^2 & -9x & -6 \\
\hline
 & & & 5x & +7
\end{array}
$$

したがって

$$2x^3 + 3x^2 + 1 = (x^2 + 3x + 2)(2x - 3) + 5x + 7$$

よって

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x^2 + 3x + 2)(2x - 3) + 5x + 7}{x^2 + 3x + 2}$$

$$= \boldsymbol{2x - 3 + \frac{5x + 7}{x^2 + 3x + 2}}$$

(8) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x - 18$ とすると

$$P(3) = 3^3 + 3^2 - 6 \cdot 3 - 18 = 0$$

よって，$P(x)$ は $x - 3$ を因数にもつ．

右の割り算から

$$x^3 + x^2 - 6x - 18 = \boldsymbol{(x - 3)(x^2 + 4x + 6)}$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & +4x & +6 & \\
\hline
x-3 & x^3 & +x^2 & -6x & -18 \\
 & x^3 & -3x^2 & & \\
\hline
 & & 4x^2 & -6x & \\
 & & 4x^2 & -12x & \\
\hline
 & & & 6x & -18 \\
 & & & 6x & -18 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

(9) 方程式 $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 80 = 0$ を変形すると

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 12y + 36) = 9 + 36 + 80$$

すなわち　$(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 125$

これは，中心が点 $(3, -6)$，半径が $\mathbf{5\sqrt{5}}$ の円である．

(10) 求める円の方程式を $x^2+y^2=r^2$ とする．

この円の中心は原点であり，原点と直線 $3x+4y-10=0$ の距離 d は

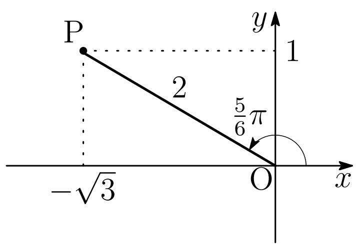
$$d=\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{\sqrt{25}}=2$$

円と直線が接するのは $d=r$ のときであるから　　$r^2=4$

よって　　$\boldsymbol{x^2+y^2=4}$

(11) $-\frac{1}{6}\pi \leqq \theta \leqq \frac{1}{3}\pi$ のとき　$\frac{1}{2}\leqq \cos\theta \leqq 1$　よって　$\boldsymbol{1 \leqq 4\cos^2\theta \leqq 4}$

(12) (与式) $=-\sqrt{3}\sin x+\cos x$ から，座標平面上に点 $\mathrm{P}(-\sqrt{3},\ 1)$ をとると



$$\mathrm{OP}=2$$

x 軸の正の部分から線分 OP まで測った角は

$$\frac{5}{6}\pi$$

よって　(与式) $=\boldsymbol{2\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)}$

(13) $9^{\log_3 8}=3^{2\log_3 8}=3^{\log_3 64}=\boldsymbol{64}$

$M=a^p \iff \log_a M=p$　したがって　$\boldsymbol{a^{\log_a M}=M}$

(14) $4^x=t$ とおくと　　$t>0$　$\cdots$①

$16^x=(4^x)^2=t^2$ であるから，方程式は

$$t^2-6t-16=0$$

ゆえに　　$(t+2)(t-8)=0$

① に注意して　　$t=8$

よって，$4^x=8$ を解いて　$\boldsymbol{x=\frac{3}{2}}$

(15) $y = x^3 + 6x^2 + 3x + 8$ を微分すると　　　$y' = 3x^2 + 12x + 3$

接点の座標を $(a,\ a^3 + 6a^2 + 3a + 8)$ とすると，接線の傾きは $3a^2 + 12a + 3$ となるから，その方程式は

$$y - (a^3 + 6a^2 + 3a + 8) = (3a^2 + 12a + 3)(x - a)$$

すなわち　　$y = (3a^2 + 12a + 3)x - 2a^3 - 6a^2 + 8$　　$\cdots$①

この直線が原点を通るから

$$0 = -2a^3 - 6a^2 + 8$$

よって　　$a^3 + 3a^2 - 4 = 0$

すなわち　　$(a - 1)(a + 2)^2 = 0$

$$a = 1, -2$$

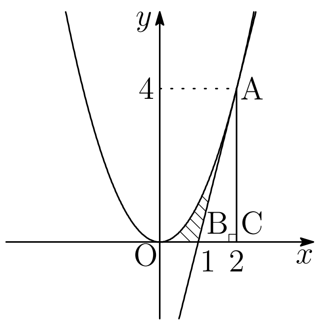
したがって，接線の方程式は，① より

$a = 1$ のとき　　$\boldsymbol{y = 18x}$

$a = -2$ のとき　　$\boldsymbol{y = -9x}$

(16) 直線 $y = 4x - 4$ と放物線 $y = x^2$ は，点 $(2,\ 4)$ で接する．この直線と x 軸との交点の座標は $(1,\ 0)$．

この 2 点を結ぶ線分を斜辺とし，x 軸を底辺とする直角三角形 ABC を右の図のようにとる．



求める部分の面積は，右の図の斜線部分の面積であるから，放物線 $y = x^2$ が x 軸と直線 $x = 0$，$x = 2$ で囲まれた部分の面積から直角三角形 ABC の面積を引けばよい．

したがって，求める面積 S は

$$S = \int_0^2 x^2\,dx - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4 = \left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^2 - 2 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(17)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}(3k + 7) &= 3\sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 7 \\ &= 3 \times \frac{1}{2}\cdot 20(20 + 1) + 7 \times 20 \\ &= 630 + 140 \\ &= \boldsymbol{770}\end{aligned}$$

(18) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} 3^k = \frac{3(3^{12}-1)}{3-1},\ \sum_{k=1}^{6} 3^k = \frac{3(3^6-1)}{3-1}$ であるから

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{12} 3^k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{6} 3^k} = \frac{3(3^{12}-1)}{3-1} \div \frac{3(3^6-1)}{3-1} = \frac{3^{12}-1}{3^6-1}$$

$$= \frac{(3^6+1)(3^6-1)}{3^6-1} = 3^6+1 = \mathbf{730}$$

(19) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 6\times 3 + 3\times(-1) = \mathbf{15}$

(20) $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|} = \dfrac{15}{\sqrt{6^2+3^2}\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \dfrac{15}{3\sqrt{5}\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　　$\boldsymbol{\theta = 45^\circ}$

答

問	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答	3	5	8	3	4	1	2	3	2	3
問	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答	1	1	3	4	8	2	4	2	3	5
問	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
答	7	3	4	6	5	5	4	1	4	2
問	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
答	5	6	6	4	3	2	1	8	9	2
問	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
答	3	7	7	0	7	3	0	1	5	4
問	51									
答	5									