平成21年度　東海大学　一般入試B方式(複数学科選択方式)
数学I・数学II・数学A・数学B(ベクトル・数列)70分
平成21年2月28日
文学部・政治経済学部・総合経営学部・法学部・教養学部(芸術学科を除く)・国際文化学部・理学部・情報理工学部・情報通信学部・工学部(航空宇宙学科航空操縦学専攻を除く)芸術工学部・産業工学部・開発工学部・海洋学部・生物理工学部・農学部

次の空欄を埋めなさい．問題文中の各空欄にはそれぞれ0〜9の数字の一つが入ります．各空欄の番号は解答番号を表します．解答は，解答用紙の解答番号に対応した解答欄にマークしなさい．
問い $\boxed{\mathbf{1}}$，$\boxed{\mathbf{2}}$，$\boxed{\mathbf{3}}$ を通して，解答は，分数の場合には既約分数の形で，また根号を含む場合には根号の中が最小の自然数になるように表しなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x > 2$ である実数が $x^2 - 4x + 1 = 0$ を満たしているとき，

$$x^3 = \boxed{1}\boxed{2} + \boxed{3}\boxed{4}\sqrt{\boxed{5}},\quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \boxed{6}\boxed{7},\quad \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \boxed{8}$$

である．

(2) $\mathrm{AB} = 4$，$\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{CA} = 6$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ について，
a のとりうる範囲は $\boxed{9} < a < \boxed{10}\boxed{11}$ であり，$\angle\mathrm{BAC} = \theta$ とおくと，

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{(a^2 - \boxed{12})(\boxed{13}\boxed{14}\boxed{15} - a^2)}}{\boxed{16}\boxed{17}}$$ と表され，

$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が $3\sqrt{15}$ となるのは $a = \boxed{18}$，$\boxed{19}\sqrt{\boxed{20}\boxed{21}}$ のときである．

(3) $\vec{a} = (3^{\frac{x}{2}},\ 9)$，$\vec{b} = (1,\ 3^{-\frac{x}{2}+2} - 2)$ とするとき，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3^{\frac{x}{2}} + \boxed{22}\boxed{23}\cdot 3^{-\frac{x}{2}} - \boxed{24}\boxed{25}$ であるから，$\vec{a}\perp\vec{b}$ となるのは $x = \boxed{26}$ のときである．ただし，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す．

(4) $y = \cos 2\theta + 7\cos\theta + 4\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ において $t = \cos\theta$ とおくと，
$y = \boxed{27}t^2 + \boxed{28}t + 3$ となるので，y の最大値は $\boxed{29}\boxed{30}$，最小値は $-\boxed{31}$ である．

また，$0 \leqq y \leqq 3$ となる θ の範囲は，$\dfrac{1}{\boxed{32}}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{\boxed{33}}{\boxed{34}}\pi$ である．

2 6枚のカードに1から6までの数が1つずつ書かれている．これらの6枚のカードから3枚のカードを元に戻さずに取り出し，最初のカードに書かれている数を a，2番目のカードに書かれている数を b，3番目のカードに書かれている数を c とする．

(1) $abc = 8$ となる確率は $\dfrac{\boxed{35}}{\boxed{36}\boxed{37}}$ である．

(2) $a + b + c = 8$ となる確率は $\dfrac{\boxed{38}}{\boxed{39}\boxed{40}}$ である．

(3) $a + b = c$ となる確率は $\dfrac{\boxed{41}}{\boxed{42}\boxed{43}}$ である．

(4) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ が整数となる確率は $\dfrac{\boxed{44}}{\boxed{45}\boxed{46}}$ である．

3 n を自然数として，等式 $f(x) = 2nx + \displaystyle\int_n^{n+2} f(t)\,dt \cdots$ ① が成り立つような x の1次関数 $f(x)$ を考える．$a_n = \displaystyle\int_n^{n+2} f(t)\,dt$ とおいて，以下の問いに答えなさい．

(1) 等式 ① より $a_n = -\boxed{47}n^2 - \boxed{48}n$ である．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{-\boxed{49}n^3 - \boxed{50}\boxed{51}n^2 - \boxed{53}n}{3}$ である．

(3) 方程式 $f(x) = \dfrac{1}{2n}xf(x)$ の解は $x = \boxed{53}n$，$\boxed{54}n + \boxed{55}$ であるから，

$y = f(x)$ と $y = \dfrac{1}{2n}xf(x)$ の2つのグラフで囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{56}}{\boxed{57}}$ である．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x^2-4x+1=0\cdots$① を $x>2$ に注意して解くと　$x=2+\sqrt{3}$　$\cdots$②

② から　　$x^3=(2+\sqrt{3})^3=\mathbf{26+15\sqrt{3}}$

$x\neq 0$ であるから ① の両辺を x で割ると　$x+\dfrac{1}{x}=4\cdots$③

③ の両辺を 2 乗すると

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=16 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{x^2+\frac{1}{x^2}=14}$$

③ から　　$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2=4+2=\mathbf{6}$

(2) $\triangle$ABC が存在するための必要十分条件は　$|\,\mathrm{CA}-\mathrm{AB}\,|<\mathrm{BC}<\mathrm{CA}+\mathrm{AB}$

ゆえに　　$|\,6-4\,|<a<6+4$　よって　$\boldsymbol{2<a<10}$　$\cdots$①

余弦定理により　　$\cos\theta=\dfrac{6^2+4^2-a^2}{2\cdot6\cdot4}=\dfrac{52-a^2}{48}$

したがって　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$

$$=\left(1-\frac{52-a^2}{24}\right)\left(1+\frac{52-a^2}{24}\right)$$

$$=\frac{a^2-4}{48}\times\frac{100-a^2}{48}$$

$\sin\theta>0$ であるから　　$\boldsymbol{\sin\theta=\dfrac{\sqrt{(a^2-4)(100-a^2)}}{48}}$

ゆえに，$\triangle$ABC の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\cdot\frac{\sqrt{(a^2-4)(100-a^2)}}{48}=\frac{\sqrt{(a^2-4)(100-a^2)}}{4}$$

$\triangle\mathrm{ABC}=3\sqrt{15}$ となるとき

$$\frac{\sqrt{(a^2-4)(100-a^2)}}{4}=3\sqrt{15}$$

したがって　　$\sqrt{(a^2-4)(100-a^2)}=\sqrt{2160}$

整理すると　　$a^4-104a^2+2560=0$

ゆえに　　$(a^2-64)(a^2-40)=0$

① に注意して　　$\boldsymbol{a=8,\ 2\sqrt{10}}$

(3) $\vec{a}=(3^{\frac{x}{2}},\ 9)$，$\vec{b}=(1,\ 9\cdot3^{-\frac{x}{2}}-2)$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3^{\frac{x}{2}}\times1+9(9\cdot3^{-\frac{x}{2}}-2)$$
$$=\mathbf{3^{\frac{x}{2}}+81\cdot3^{-\frac{x}{2}}-18}$$

$\vec{a}\perp\vec{b}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ であるから

$$3^{\frac{x}{2}}+81\cdot3^{-\frac{x}{2}}-18=0$$

$3^{\frac{x}{2}}=t$ とおくと　　$t>0$　$\cdots$①

したがって　　$t+81t^{-1}-18=0$

$$t^2-18t+81=0$$

ゆえに　　$(t-9)^2=0$

① に注意して　　$t=9$

よって，$3^{\frac{x}{2}}=9$ を解いて　　$\boldsymbol{x=4}$

(4)
$$\cos2\theta+7\cos\theta+4=(2\cos^2\theta-1)+7\cos\theta+4$$
$$=2\cos^2\theta+7\cos\theta+3$$

$y=\cos2\theta+7\cos\theta+4\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ において $t=\cos\theta$ とおくと，
$-1\leqq t\leqq1\cdots$① であり

$$\boldsymbol{y=2t^2+7t+3}$$

すなわち　　$y=2\left(t+\dfrac{7}{4}\right)^2-\dfrac{25}{8}$

よって　　$t=1$ で**最大値 12** をとり，
　　　　　$t=-1$ で**最小値 -2** をとる．

$0\leqq y\leqq3$ のとき　$0\leqq2t^2+7t+3\leqq3$

すなわち　　$\begin{cases}2t^2+7t+3\geqq0\\2t^2+7t+3\leqq3\end{cases}$

第 1 式から　$(t+3)(2t+1)\geqq0$

$$t\leqq-3,\ -\frac{1}{2}\leqq t\quad\cdots②$$

第 2 式から　　$2t^2+7t\leqq0$

$$t(2t+7)\leqq0$$
$$-\frac{7}{2}\leqq t\leqq0\quad\cdots③$$

①，②，③ の共通範囲を求めて

$$-\frac{1}{2}\leqq t\leqq0\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{\frac{1}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 6枚から3枚取るの順列の総数は　${}_6\mathrm{P}_3 = 6\cdot5\cdot4 = 120$ (通り)

$abc = 8$ となる組合せは　$\{1,\ 2,\ 4\}$

この順列の総数は　$3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{120} = \mathbf{\dfrac{1}{20}}$

(2) $a + b + c = 8$ となる組み合わせは

$$\{1,\ 2,\ 5\},\ \{1,\ 3,\ 4\}$$

それぞれの順列の総数は $3!$ 通りであるから，求める確率は

よって，求める確率は　$\dfrac{3!\cdot2}{120} = \mathbf{\dfrac{1}{10}}$

(3) $a + b = c$ となるのは

$c = 3$ のとき　$(a,\ b) = (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

$c = 4$ のとき　$(a,\ b) = (1,\ 3),\ (3,\ 1)$

$c = 5$ のとき　$(a,\ b) = (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$

$c = 6$ のとき　$(a,\ b) = (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)$

以上の12通りであるから，求める確率は　$\dfrac{12}{120} = \mathbf{\dfrac{1}{10}}$

(4) $a,\ b,\ c$ の最小値を p とすると

$p = 1$ のとき　$\dfrac{41}{30} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} \leqq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \leqq \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$

$p = 2$ のとき　$\dfrac{26}{30} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} \leqq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{13}{12}$

$p = 3$ のとき　$\dfrac{21}{30} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} \leqq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \leqq \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{47}{60}$

$p = 4$ のとき　$\dfrac{37}{60} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

以上のことから，$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ が整数となるのは，$p = 2$ のときで，その整数値は1である．ここで，$\{a,\ b,\ c\}$ の組合せを $\{2,\ x,\ y\}$ とおくと $(2 < x < y)$,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

整理して　$xy - 2x - 2y = 0$

ゆえに　$(x - 2)(y - 2) = 4$

$x,\ y$ は整数より　$x - 2 = 1,\ y - 2 = 4$　ゆえに　$x = 3,\ y = 6$

よって，$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ が整数となる組合せは $\{2,\ 3,\ 6\}$ であり，その順列の総数は $3!$ 通りであるから，求める確率は

$$\frac{3!}{120} = \mathbf{\frac{1}{20}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 条件から，$f(x) = 2nx + a_n$ であるから

$$a_n = \int_n^{n+2} (2nt + a_n)dt = \left[\ nt^2 + a_n t\ \right]_n^{n+2}$$
$$= 4n^2 + 4n + 2a_n$$

これを解いて　$\boldsymbol{a_n = -4n^2 - 4n}$

(2) (1) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (-4k^2 - 4k)$$
$$= -4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 4 \cdot \frac{1}{2} n(n+1)$$
$$= \boldsymbol{\frac{-4n^3 - 12n^2 - 8n}{3}}$$

(3) (1) の結果から

$$f(x) = 2nx - 4n^2 - 4n, \qquad \frac{1}{2n} x f(x) = x^2 - (2n+2)x$$

方程式 $f(x) = \dfrac{1}{2n} x f(x)$ の解は

$$2nx - 4n^2 - 4n = x^2 - (2n+2)x$$

整理して　$x^2 - (4n+2)x + 2n(2n+2) = 0$

ゆえに　$(x - 2n)\{x - (2n+2)\} = 0$

よって　$\boldsymbol{x = 2n,\ 2n+2}$

$2n \leqq x \leqq 2n+2$ において $f(x) \geqq \dfrac{1}{2n} x f(x)$ であるから，

$y = f(x)$ と $y = \dfrac{1}{2n} f(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_{2n}^{2n+2} \{f(x) - x f(x)\}\, dx$$
$$= -\int_{2n}^{2n+2} (x - 2n)\{x - (2n+2)\}\, dx$$
$$= -\left(-\frac{1}{6}\right) \{(2n+2) - 2n\}^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

答

問	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答	2	6	1	5	3	1	4	6	2	1
問	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答	0	4	1	0	0	4	8	8	2	1
問	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
答	0	8	1	1	8	4	2	7	1	2
問	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
答	2	2	2	3	1	2	0	1	1	0
問	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
答	1	1	0	1	2	0	4	4	4	1
問	51	52	53	54	55	56	57			
答	2	8	2	2	2	4	3			