平成21年度　東海大学　一般入試A方式(受験日自由選択方式)
数学I・数学II・数学A・数学B(ベクトル・数列)70分
情報理工学部・情報通信学部・産業工学部・開発工学部
海洋学部・生物理工学部・農学部・健康科学部
平成21年2月11日

次の空欄を埋めなさい．

解答は，分数の場合には既約分数の形で，根号を含む場合には根号の中が最小の自然数となるような形で書きなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) m，n は自然数で，$(m-3\sqrt{2})^3 = 5n - 63\sqrt{2}$ をみたすとき，$m=$ $\boxed{\text{ア}}$，$n=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) 5^{50} が何桁の数であるかを調べる．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．このとき $\log_{10} 5 =$ $\boxed{\text{ウ}}$ である．$y = 5^{50}$ の両辺の常用対数をとれば，$\log_{10} y =$ $\boxed{\text{エ}}$ $\times \log_{10} 5 =$ $\boxed{\text{オ}}$ であるから，10 を底として y を表すと $y=$ $\boxed{\text{カ}}$ である．したがって，$10^{\boxed{\text{キ}}} < y < 10^{\boxed{\text{キ}}+1}$ を得る．ただし，$\boxed{\text{キ}}$ は整数とする．これより，5^{50} は $\boxed{\text{ク}}$ 桁の数である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 当たりくじが2本入っている10本のくじがある．このくじから2本のくじを同時に引くとき，

(1) 2本とも当たる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) 1本だけ当たる確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3) 少なくとも1本当たる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(4) 1本も当たらない確率は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(5) 2本とも当たると100円もらえ，1本も当たらなければ50円支払い，その他の場合はお金のやりとりはないものとする．このとき，もらえる金額の期待値は $\boxed{\text{オ}}$ である．また，1本も当たらない場合に，50円の代わりに k 円支払うとすれば，もらえる金額の期待値が正となるような k の最大値は $\boxed{\text{カ}}$ である．

3 △ABC の内部に点 P があり，$3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ をみたすとする．$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{c}$ とおく．

(1) $2\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ となる点 D をとる．$\overrightarrow{\mathrm{PD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\boxed{\text{ア}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) △PAB の面積を S とする．$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\boxed{\text{ウ}}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから △PDC の面積を S を用いて表すと $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) $\vec{a}\cdot\vec{a}=I_1$，$\vec{b}\cdot\vec{b}=I_2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=I_3$ とおく．I_1，I_2，I_3 を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\boxed{\text{オ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\boxed{\text{カ}}$ である．

解答例

1 (1) $(m-3\sqrt{2})^3=5n-63\sqrt{2}$ の左辺を展開して

$$(m^3+54m)-(9m^2+54)\sqrt{2}=5n-63\sqrt{2}$$

m^3+54m，$9m^2+54$，$5n$ は自然数であるから

$$m^3+54m=5n,\ 9m^2+54=63$$

$m>0$ であることに注意して　$\boldsymbol{m=1}$，$\boldsymbol{n=11}$

(2)
$$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0.3010=\mathbf{0.6990}$$

$y=5^{50}$ の両辺の常用対数をとると

$$\begin{aligned}\log_{10}y=\log_{10}5^{50}&=\mathbf{50\log_{10}5}\\&=50\times0.6990=\mathbf{34.95}\end{aligned}$$

10 を底として y を表すと　　$\boldsymbol{y=10^{34.95}}$

したがって，$\boldsymbol{10^{34}<y<10^{34+1}}$ を得る．

これより，5^{50} は **35** 桁の数である．

答 ア．1　イ．11

ウ．0.6990　エ．50　オ．34.95　カ．$10^{34.95}$　キ．34　ク．35

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 10 本から 2 本引く組合せは　${}_{10}\mathrm{C}_2 = \dfrac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$ (通り)

当たりくじ 2 本から 2 本引く組合せは　1 (通り)

よって，求める確率は　$\mathbf{\dfrac{1}{45}}$

(2) 当たり 2 本から 1 本，はずれ 8 本から 1 本を引く組合せは

$${}_2\mathrm{C}_1 \times {}_8\mathrm{C}_1 = 2 \times 8 = 16$$

よって，1 本だけ当たる確率は　$\mathbf{\dfrac{16}{45}}$

(3) 「少なくとも 1 本とも当たる」という事象は,「2 本とも当たる」という事象と「1 本だけ当たる」という事象の和事象であり，これらの事象は互いに排反であるから，(1)，(2) の結果から

$$\frac{1}{45} + \frac{16}{45} = \mathbf{\frac{17}{45}}$$

(4) はずれくじ 8 本から 2 本引く組合せは　${}_8\mathrm{C}_2 = \dfrac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ (通り)

よって，1 本も当たらない確率は　$\mathbf{\dfrac{28}{45}}$

別解 (4) は (3) の余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{17}{45} = \dfrac{28}{45}$

(5) (前半)

受け取る金額を X 円とすると，右のような表ができる．したがって，求める期待値は

X	100	0	-50	計
確率	$\dfrac{1}{45}$	$\dfrac{16}{45}$	$\dfrac{28}{45}$	1

$$100 \times \frac{1}{45} + 0 \times \frac{16}{45} + (-50) \times \frac{28}{45} = \mathbf{-\frac{260}{9}} \text{ (円)}$$

(後半)

受け取る金額を X 円とすると，右のような表ができる．したがって，期待値は

X	100	0	$-k$	計
確率	$\dfrac{1}{45}$	$\dfrac{16}{45}$	$\dfrac{28}{45}$	1

$$100 \times \frac{1}{45} + 0 \times \frac{16}{45} + (-k) \times \frac{28}{45} = \frac{100 - 28k}{45} \text{ (円)}$$

期待値が正となるとき

$$\frac{100 - 28k}{45} > 0 \text{ を解いて}\quad k < \frac{100}{28}$$

k は整数であるから，k の最大値は　**3**

答 ア．$\dfrac{1}{45}$　イ．$\dfrac{16}{45}$　ウ．$\dfrac{17}{45}$　エ．$\dfrac{28}{45}$　オ．$-\dfrac{260}{45}$　カ．3

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{c}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{BP}}=-\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{CP}}=-\vec{c}$$

これを $3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}\cdots(*)$ に代入して

$$3(-\vec{a})+2(-\vec{b})+(-\vec{c})=\vec{0}$$

ゆえに $\quad \vec{a}=-\dfrac{2}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}\quad\cdots①$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より $\quad \overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$$=\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\overrightarrow{\mathrm{PA}}=-\vec{a}$$

① より $\quad =-\left(-\dfrac{2}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}}\quad\cdots②$

② より $\quad \overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{PD}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)-\vec{b}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}}$

(2) (1) の結果から $\quad \overrightarrow{\mathrm{BD}}=\dfrac{1}{3}(\vec{c}-\vec{b})=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}})=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

点 D は線分 BC を 1 : 2 に内分するので

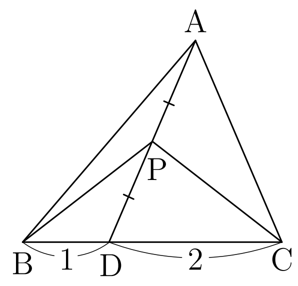
$$\triangle\mathrm{PDC}=2\triangle\mathrm{PDB}\quad\cdots③$$

$2\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より，点 P は線分 AD の中点であるから

$$\triangle\mathrm{PDB}=\triangle\mathrm{PAB}\quad\cdots④$$

$\triangle\mathrm{PAB}=S$ および ③，④ から

$$\boldsymbol{\triangle\mathrm{PDC}=2S}$$



(3) (∗) より　$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = 3\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PB}} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} - \overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{a} - (-3\vec{a} - 2\vec{b}) = 4\vec{a} + 2\vec{b}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} - \overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{a} - \vec{b}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{PC}} - \overrightarrow{\mathrm{PB}} = (-3\vec{a} - 2\vec{b}) - \vec{b} = -3\vec{a} - 3\vec{b}$$

よって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} &= (3\vec{a} + 2\vec{b})\cdot(4\vec{a} + 2\vec{b}) \\
&= 12\vec{a}\cdot\vec{a} + 4\vec{b}\cdot\vec{b} + 14\vec{a}\cdot\vec{b} \\
&= \boldsymbol{12I_1 + 4I_2 + 14I_3} \\
\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= (\vec{a} - \vec{b})\cdot(-3\vec{a} - 3\vec{b}) \\
&= -3\vec{a}\cdot\vec{a} + 3\vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= \boldsymbol{-3I_1 + 3I_2}
\end{aligned}$$

答 ア. $\dfrac{2}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$　イ. $-\dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$　ウ. $\dfrac{1}{3}$　エ. $2S$

オ. $12I_1 + 4I_2 + 14I_3$　カ. $-3I_1 + 3I_2$