平成21年度　東海大学　一般入試A方式(受験日自由選択方式)
数学I・数学II・数学A・数学B(ベクトル・数列)70分
情報理工学部・情報通信学部・産業工学部・開発工学部
海洋学部・生物理工学部・農学部・健康科学部
平成21年2月10日

次の空欄を埋めなさい．

解答は，分数の場合には既約分数の形で，根号を含む場合には根号の中が最小の自然数となるような形で書きなさい．

$\boxed{1}$ (1) 20から100までの自然数について，4の倍数の和は $\boxed{\text{ア}}$ であり，4の倍数でない数の和は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) $|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=3$ で，$\vec{a}-\vec{b}$，$6\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であるとする．内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ウ}}$ であり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ は $\boxed{\text{エ}}^\circ$ である．

(3) $0^\circ \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 180^\circ$ のとき，

$$\begin{cases} \sin\alpha+\sqrt{3}\sin\beta=\sqrt{3} & \cdots ① \\ \cos\alpha+\sqrt{3}\cos\beta=-1 & \cdots ② \end{cases}$$

を満たす α，β を求める．

①，② の両辺を2乗し，辺々加えると $\cos(\beta-\alpha)=\boxed{\text{オ}}$ を得る．したがって，①，② より $\cos\alpha=\boxed{\text{カ}}$ であるから，$\alpha=\boxed{\text{キ}}^\circ$，$\beta=\boxed{\text{ク}}^\circ$ である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ さいころを投げて偶数の目が出たら，親は子にその目の数だけお菓子を渡し，逆に奇数の目が出たら，子が親に目の数だけお菓子を渡すという約束のもとに，4 回さいころを投げるとする．

親子の間でお菓子の数がさいころを投げる前と変わらない確率を求める．4 回さいころを投げて，お菓子の増減がないのであるから，偶数の目，奇数の目おのおの 2 回ずつ出ることになる．しかも偶数の目の和と奇数の目の和が一致しなければならない．このような目の組み合わせをすべて書き出すと，$\{1,\ 3,\ 2,\ 2\}$，$\{1,\ 5,\ 2,\ 4\}$，$\{3,\ 3,\ 2,\ 4\}$，$\{3,\ 5,\ 2,\ 6\}$，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$となる．さいころを 4 回投げるときのさいころの目の出方は全部で$\boxed{\text{ウ}}$通りである．$\{1,\ 5,\ 2,\ 4\}$ のように異なる 4 つの数をすべて並べる順列の総数は $4!$ であり，$\{1,\ 3,\ 2,\ 2\}$ のように 4 つの数のうち 2 つの数が等しい場合，それら 4 つの数をすべて並べる順列の総数は$\boxed{\text{エ}}$であるから，この親子の間でお菓子の数がさいころを投げる前と変わらない確率は$\boxed{\text{オ}}$である．

また，この親子の間でお菓子の数がさいころを投げる前と異なる確率は$\boxed{\text{カ}}$である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 円 $x^2+y^2=1$ を C とする．点 A$(3,\ 0)$ から円 C に引いた 2 本の接線と円 C との接点を P，Q(P，Q はそれぞれ第 1 象限，第 4 象限にある) とする．直線 AP の方程式は $y=\boxed{\text{ア}}$ で，P の座標は $(\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}})$ である．

2 直線 AP，AQ と円 C に接する円 C_1 の方程式を $(x-a)^2+y^2=r^2$ (ただし，$a>0$ とする) の形で求めたい．直線 AP と円 C_1 の接点を R，点 $(a,\ 0)$ を S，原点を O とする．$a-r=\boxed{\text{エ}}$，また，△AOP と △ASR は相似であるから，a と r を用いて表すと $\boxed{\text{オ}} : r = 3 : 1$ である．これより，$a=\boxed{\text{カ}}$，$r=\boxed{\text{キ}}$ である．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 20から100までの自然数の和は

$$\frac{1}{2}\cdot 81(20+100)=4860$$

20から100までの自然数のうちで4の倍数の和は

$$\begin{aligned}20+24+28+\cdots+100 &= 4(5+6+7+\cdots+25)\\ &= 4\times\frac{1}{2}\cdot 21(5+25)\\ &= \mathbf{1260}\end{aligned}$$

よって，20から100までの自然数のうちで4の倍数でない数の和は

$$4860-1260=\mathbf{3600}$$

(2) $(\vec{a}-\vec{b})\perp(6\vec{a}-\vec{b})$ より

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(6\vec{a}-\vec{b})=0$$

よって　$6|\vec{a}|^2-7\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$ を代入して

$$6(\sqrt{2})^2-7\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2=0$$

これを解いて　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=3}$

ゆえに　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\cdot 3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　$\boldsymbol{\theta=45^\circ}$

(3) ① の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta + 3\sin^2\beta = 3 \qquad \cdots ③$$

② の両辺を 2 乗すると

$$\cos^2\alpha + 2\sqrt{3}\cos\alpha\cos\beta + 3\cos^2\beta = 1 \qquad \cdots ④$$

③，④ の辺々を加えると

$$4 + 2\sqrt{3}(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 4$$

$$\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = 0$$

したがって　$\boldsymbol{\cos(\beta - \alpha) = 0}$

$0° \leqq \beta - \alpha \leqq 180°$ であるから　$\beta - \alpha = 90°$

これから，$\beta = \alpha + 90° \cdots ⑤$ を ①，② に代入すると

$$\begin{cases} \sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = \sqrt{3} \\ \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha = -1 \end{cases}$$

上の 2 式から $\sin\alpha$ を消去すると　$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{1}{2}}$

$0 \leqq \alpha \leqq 180°$ であるから　$\boldsymbol{\alpha = 60°}$

これを ⑤ に代入して　$\boldsymbol{\beta = 150°}$

答 ア．1260　イ．3600　ウ．3　エ．45　オ．0　カ．$\frac{1}{2}$　キ．60　ク．150

$\boxed{\textbf{2}}$ 増減が変わらない目の組み合わせは

$$\{1,\ 3,\ 2,\ 2\},\ \{1,\ 5,\ 2,\ 4\},\ \{3,\ 3,\ 2,\ 4\},$$
$$\{3,\ 5,\ 2,\ 6\},\ \boldsymbol{\{3,\ 5,\ 4,\ 4\}},\ \boldsymbol{\{5,\ 5,\ 4,\ 6\}}$$

さいころを 4 回投げるときの目の出方は　$6^4 = \mathbf{1296}$ (通り)

このうち異なる 4 つの数の組み合わせが 2 つと 4 つの数のうち 2 つの数が等しい組み合わせが 4 つあり，それぞれの順列の総数は

$$4! = 24 \text{ (通り)} \quad \text{および} \quad \frac{4!}{2!} = \mathbf{12} \text{ (通り)}$$

この親子の間でお菓子の数がさいころを投げる前と変わらない確率は

$$\frac{24 \times 2 + 12 \times 4}{6^4} = \boldsymbol{\frac{2}{27}}$$

ゆえに，この親子の間でお菓子の数がさいころを投げる前と異なる確率は

$$1 - \frac{2}{27} = \boldsymbol{\frac{25}{27}}$$

答 ア. イ. $\{3,\ 5,\ 4,\ 4\}$, $\{5,\ 5,\ 4,\ 6\}$　ウ．1296　エ．12　オ．$\frac{2}{27}$　カ．$\frac{25}{27}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ A を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する接線の方程式を $y=m(x-3)$ とおいて，y を消去すると

$$(m^2+1)x^2-6m^2x+9m^2-1=0 \quad \cdots ①$$

判別式は　$D/4=(-3m^2)^2-(m^2+1)(9m^2-1)=-8m^2+1$

このとき，$D=0$ であるから

$$-8m^2+1=0 \quad \text{これを解いて} \quad m=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

AP の傾きは負であるから　$m=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

これを ① に代入して整理すると

$$9x^2-6x+1=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{1}{3} \quad \cdots ②$$

また，直線 AP の方程式は

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-3)} \quad \cdots ③$$

②，③ から接点 P の座標は　$\boldsymbol{\left(\frac{1}{3},\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}$

右の図から

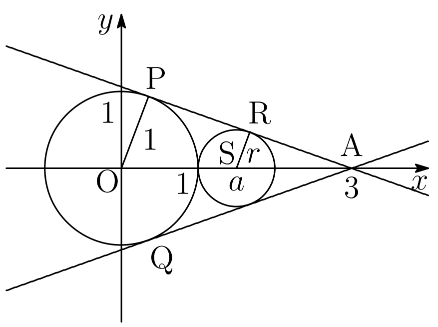
$$\boldsymbol{a-r=1} \quad \cdots ④$$

$\triangle$AOP $\backsim$ $\triangle$ASR であるから，
SA : SR = OA : OP より

$$\boldsymbol{(3-a):r=3:1} \quad \cdots ⑤$$

④，⑤ より

$$\boldsymbol{a=\frac{3}{2},\ r=\frac{1}{2}}$$



答　ア．$-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x-3)$　イ．$\dfrac{1}{3}$　ウ．$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　エ．1　オ．$(3-a)$　カ．$\dfrac{3}{2}$　キ．$\dfrac{1}{2}$