平成21年度　東海大学　一般入試A方式(受験日自由選択方式)
数学I・数学II・数学A・数学B(ベクトル・数列)70分
情報理工学部・情報通信学部・産業工学部・開発工学部
海洋学部・生物理工学部・農学部・健康科学部
平成21年2月9日

次の空欄を埋めなさい．

解答は，分数の場合には既約分数の形で，根号を含む場合には根号の中が最小の自然数となるような形で書きなさい．

1 (1) a，bは定数で$a<0$とする．2次関数$y=ax^2-6ax+3b$が$-1 \leqq x \leqq 6$において，最大値3，最小値-4をとるものとする．このとき，$a=$ $\boxed{\text{ア}}$，$b=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．また，yは$x=$ $\boxed{\text{ウ}}$ のとき最小値をとる．

(2) 2次方程式$x^2-3x+5=0$の2つの解をα，βとするとき，

$$\alpha^2+\beta^2=\boxed{\text{エ}},\quad \alpha^3+\beta^3=\boxed{\text{オ}}$$

である．

(3) 5個の文字a，b，c，d，eを1列に並べるとき全部で $\boxed{\text{カ}}$ 通りの並べ方があり，a，bが両端にくる並べ方は $\boxed{\text{キ}}$ 通りある．また，これらの5つの文字をつないで輪をつくるとき並べ方は $\boxed{\text{ク}}$ 通りある．2つの文字のグループと他の3つの文字のグループに分ける方法は $\boxed{\text{ケ}}$ 通りある．

2 (1) $\vec{a}=(2,-2)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$のなす角をθ $(0<\theta<\pi)$とすると$\sin 2\theta=$ $\boxed{\text{ア}}$ で，$|\vec{a}+t\vec{b}|$は，$t=$ $\boxed{\text{イ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとる．

(2) 初項2，公差-3の等差数列の第n項までの和は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) 初項1，公比4の等比数列の第n項までの和は $\boxed{\text{オ}}$ で，この和がはじめて33333をこえるのはnが $\boxed{\text{カ}}$ のときである．ただし，$\log_{10}2=0.3010$を用いてよい．

3 (1) nを自然数とする．$(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$と展開するとき，$\dfrac{a_{r+1}}{a_r}=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．また，$3a_3=5a_{n-5}$が成立するとき$n=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) a，bを実数とする．3次方程式$x^3-4x^2+ax+b=0$が$1-i$を解にもつとき，$a=$ $\boxed{\text{ウ}}$，$b=$ $\boxed{\text{エ}}$ である．また，他の解は $\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ である．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a<0$，$y=a(x-3)^2-9a+3b\ (-1 \leqq x \leqq 6)$ であるから，
$x=3$ で最大，$\boldsymbol{x=-1}$ で最小となる．最大値 3，最小値 -4 より

$$-9a+3b=3, \qquad 7a+3b=-4$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=-\frac{7}{16}}$，$\boldsymbol{b=-\frac{5}{16}}$

(2) 解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-\frac{-3}{1}=3,\ \ \alpha\beta=\frac{5}{1}=5$$

したがって

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=3^2-2\cdot5=\mathbf{-1}\\\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=3^3-3\cdot5\cdot3=\mathbf{-18}\end{aligned}$$

(3) 5 個の文字 a，b，c，d，e を 1 列に並べるとき，並べ方の総数は

$$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=\mathbf{120}\ (\text{通り})$$

a，b が両端にくる並べ方は，2 通りある．
間に並ぶ残り 3 つの文字の並び方は，$3!$ 通りある．
よって，並び方の総数は，積の法則により

$$2\times3!=2\times3\cdot2\cdot1=\mathbf{12}\ (\text{通り})$$

5 つの文字をつないで輪をつくる並べ方の総数は

$$(5-1)!=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=\mathbf{24}\ (\text{通り})$$

2 つの文字のグループを決めると他の 3 つの文字のグループは決まる．
よって，分け方の総数は

$${}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=\mathbf{10}\ (\text{通り})$$

答 ア．$-\frac{7}{16}$　イ．$-\frac{5}{16}$　ウ．-1　エ．-1　オ．-18
カ．120　キ．12　ク．24　ケ．10

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|} = \dfrac{2\times 1 + (-2)\times 2}{\sqrt{2^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

また　$\sin\theta = \sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

よって　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\times\dfrac{3}{\sqrt{10}}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{3}{5}}$

$\vec{a}+t\vec{b} = (2,-2)+t(1,\ 2) = (t+2,\ 2t-2)$ より

$$\begin{aligned}|\,\vec{a}+t\vec{b}\,|^2 &= (t+2)^2+(2t-2)^2\\ &= 5t^2-5t+8\\ &= 5\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{4}\end{aligned}$$

よって，$|\,\vec{a}+t\vec{b}\,|$ は，$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2}}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{27}{4}} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{3}}$ をとる．

(2) 初項 2，公差 -3 の等差数列の第 n 項までの和は

$$\frac{1}{2}n\{2\cdot 2+(n-1)\cdot(-3)\} = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(-3n+7)}$$

(3) 初項 1，公比 4 の等比数列の第 n 項までの和は

$$\frac{1(4^n-1)}{4-1} = \boldsymbol{\frac{4^n-1}{3}}$$

これが 33333 をこえるとき

$$\frac{4^n-1}{3} > 33333$$

ゆえに

$$4^n > 100000$$
$$2^{2n} > 10^5$$

常用対数をとると　$2n\log_{10}2 > 5$

$\log_{10}2 = 0.3010 > 0$ であるから

$$n > \frac{5}{2\log_{10}2} \quad \cdots ①$$

$\dfrac{5}{2\log_{10}2} = \dfrac{5}{2\times 0.3010} = 8.3\cdots$ であるから

① を満たす最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n=9}$

答 ア．$-\dfrac{3}{5}$　イ．$\dfrac{1}{2}$　ウ．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　エ．$\dfrac{1}{2}n(-3n+7)$　オ．$\dfrac{4^n-1}{3}$　カ．9

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 二項定理により，$a_k = {}_n\mathrm{C}_k$ $(k = 0, 1, 2, \cdots n)$ であるから

$$\frac{a_{r+1}}{a_r} = \frac{{}_n\mathrm{C}_{r+1}}{{}_n\mathrm{C}_r}$$
$$= \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} \div \frac{n!}{r!(n-r)!} = \boldsymbol{\frac{n-r}{r+1}}$$

$3a_3 = 5a_{n-5}$ より，$3\,{}_n\mathrm{C}_3 = 5\,{}_n\mathrm{C}_{n-5}$ $(= 5\,{}_n\mathrm{C}_5)$ であるから

$$3 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

整理すると　　$n^2 - 7n = 0$

n は自然数より　　$\boldsymbol{n = 7}$

(2) $1 - i$ がこの方程式の解であるから

$$(1-i)^3 - 4(1-i)^2 + a(1-i) + b = 0$$

整理して　　$(a + b - 2) + (-a + 6) = 0$

a，b は実数であるから

$$a + b - 2 = 0,\ \ -a + 6 = 0$$

これを解くと　　$\boldsymbol{a = 6,\ b = -4}$

このとき，方程式は　　$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$

左辺を因数分解すると　　$(x-2)(x^2 - 2x + 2) = 0$

したがって　　$x = 2,\ 1 \pm i$

よって，他の解は　$\boldsymbol{2,\ 1 + i}$

答 ア. $\dfrac{n-r}{r+1}$　イ. 7　ウ. 6　エ. -4　オ. カ. $2,\ 1 + i$