平成 21 年度　東海大学　一般入試 A 方式 (受験日自由選択方式)
数学 I・数学 II・数学 A(70 分)　平成 21 年 2 月 9 日
政治経済学部・総合経営学部・法学部・教養学部・国際文化学部 芸術工学部・開発工学部・海洋学部・健康科学部

次の空欄を埋めなさい．

解答は，分数の場合には既約分数の形で，根号を含む場合には根号の中が最小の自然数となるような形で書きなさい．

1 (1) $2x^2 - 6x - 9 \leqq 0$ の解は $\boxed{\text{ア}}$ で，これを満たす整数は $\boxed{\text{イ}}$ 個ある．

(2) $x = \sqrt{3} - 1$ とおくと，$x + \dfrac{2}{x} = \boxed{\text{ウ}}$，$x^2 + \dfrac{4}{x^2} = \boxed{\text{エ}}$ である．

(3) $2x + 1 - \dfrac{x-3}{x^2 - x + 1} = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{x^2 - x + 1}$

(4) 三角形 ABC で，$\angle A = 60^\circ$，$AB = 8$，$BC = 7$ を満たすものは 2 つある．1 つは鋭角三角形で $AC = \boxed{\text{カ}}$ であり，もう 1 つは鈍角三角形で $AC = \boxed{\text{キ}}$ である．

2 3 つのさいころ A，B，C を振って出た目を a，b，c とする．

(1) a，b，c の和が 6 になる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) a，b，c の積が 36 に確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3) a，b，c がすべて異なる数になる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(4) $a < b < c$ となる確率は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(5) $a = b$ かつ $b < c$ となる確率は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(6) $a \leqq b \leqq c$ となる確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．

3 定点 O(0, 0)，A(6, 0)，B(0, −8) と，放物線 $y = \dfrac{1}{9}x^2$ の $x > 0$ の部分を動く点 P(p, q) がある．三角形 ABP の面積を S とおく．

(1) 直線 AB の傾きは $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) 直線 OP が AB と平行になるのは，$p = \boxed{\text{イ}}$ のときで，そのとき $S = \boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) S が最小になるのは，$p = \boxed{\text{エ}}$ のときで，その値は $S = \boxed{\text{オ}}$ である．

(4) $\angle$BAP が最大になるのは，$p = \boxed{\text{カ}}$ のときである．

(5) 直線 AP と BP が垂直になるのは，$p = \boxed{\text{キ}}$ のときである．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$2x^2-6x-9 \leqq 0$$

ゆえに $$(x-3)(2x+3) \leqq 0$$

よって $$\boldsymbol{-\frac{3}{2} \leqq x \leqq 3}$$

これを満たす整数は，$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ の**5**個

(2) $x=\sqrt{3}-1$ より

$$\begin{aligned} x+\frac{2}{x} &= \sqrt{3}-1+\frac{2}{\sqrt{3}-1} \\ &= \sqrt{3}-1+\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\ &= \sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1) \\ &= \boldsymbol{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$x+\dfrac{2}{x}=2\sqrt{3}$ の両辺を 2 乗すると

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^2=(2\sqrt{3})^2$$

ゆえに $$x^2+4+\frac{4}{x^2}=12$$

よって $$\boldsymbol{x^2+\frac{4}{x^2}=8}$$

(3) $$\begin{aligned} 2x+1-\frac{x-3}{x^2-x+1} &= \frac{(2x+1)(x^2-x+1)-(x-3)}{x^2-x+1} \\ &= \boldsymbol{\frac{2x^3-x^2+4}{x^2-x+1}} \end{aligned}$$

(4) 余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ に $a=7$，$c=8$，$A=60^\circ$ を代入すると

$$7^2=b^2+8^2-2b{\cdot}8\cos 60^\circ$$

整理すると $$b^2-8b+15=0$$

ゆえに $$(b-3)(b-5)=0$$

よって $$b=3,\ 5$$

$b=\mathbf{5}$ のとき　$5^2+7^2>8^2$ より鋭角三角形

$b=\mathbf{3}$ のとき　$3^2+7^2<8^2$ より鈍角三角形

答 ア．$-\dfrac{3}{2} \leqq x \leqq 3$　イ．5　ウ．$2\sqrt{3}$　エ．8　オ．$2x^3-x^2+4$

カ．5　キ．3

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 目の和が6となるのは，$\{1,2,3\}$，$\{1,1,4\}$，$\{2,2,2\}$ のときで

$\{1,2,3\}$ のとき　$3!=6$ (通り)

$\{1,1,4\}$ のとき　$\dfrac{3!}{2!1!}=3$ (通り)

$\{2,2,2\}$ のとき　1 (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{6+3+1}{6^3}=\dfrac{10}{216}=\mathbf{\dfrac{5}{108}}$

(2) 目の積が36となるのは，$\{1,6,6\}$，$\{2,2,9\}$，$\{2,3,6\}$，$\{3,3,4\}$ のときで

$\{1,6,6\}$ のとき　3 (通り)　　$\{2,2,9\}$ のとき　3 (通り)

$\{2,3,6\}$ のとき　6 (通り)　　$\{3,3,4\}$ のとき　3 (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{3+3+6+3}{6^3}=\dfrac{15}{216}=\mathbf{\dfrac{5}{72}}$

(3) 1〜6の目から異なる3つをとる順列の総数は　${}_6\mathrm{P}_3=6\cdot5\cdot4=120$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{120}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{9}}$

(4) 1〜6の目から異なる3つの選び方のの総数は　${}_6\mathrm{C}_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ (通り)

それぞれについて，小さい順に a，b，c とすればよい．

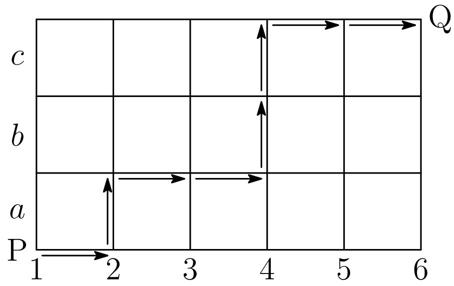
よって，求める確率は　$\dfrac{20}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{54}}$

(5) 1〜6の目から異なる2つの選び方のの総数は　${}_6\mathrm{C}_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ (通り)

それぞれについて，小さい順に $b(=a)$，c とすればよい．

よって，求める確率は　$\dfrac{15}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{72}}$

(6) 右の図のような a，b，c の3区画からなる縦6本の経路において地点Pから地点Qに致る最短順路を考え，上 (↑) に進む3つの区画を順に a，b，c として，それらに対して1〜6の縦の番号を対応させることで，$a \leqq b \leqq c$ を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組が決まる．(右の図の順路では，$(a,\ b,\ c)=(2,\ 4,\ 4)$．)



$a \leqq b \leqq c$ を満たす組の総数は　$\dfrac{8!}{5!3!}=56$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{56}{6^3}=\mathbf{\dfrac{7}{27}}$

答 ア. $\dfrac{5}{108}$　イ. $\dfrac{5}{72}$　ウ. $\dfrac{5}{9}$　エ. $\dfrac{5}{54}$　オ. $\dfrac{5}{72}$　カ. $\dfrac{7}{27}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) ABの傾きは $\dfrac{-8-0}{0-6}=\mathbf{\dfrac{4}{3}}$

(2) Pは放物線 $y=\dfrac{1}{9}x^2$ 上にあるので，$\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{9}p^2\right)$ とおける．

OPの傾きは $\dfrac{\frac{1}{9}p^2-0}{p-0}=\dfrac{1}{9}p$

直線OPとABが平行であるから

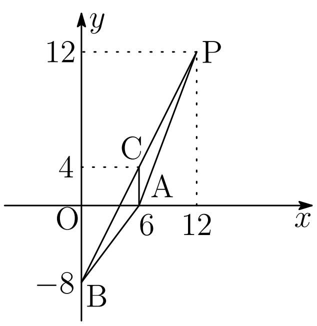
$\dfrac{1}{9}p=\dfrac{4}{3}$ 　これを解いて　$\boldsymbol{p=12}$

ゆえに，P(12, 16)

2点B，Pを通る直線 $y=2x-8$ 上に x 座標が6である点Cをとると，C(6, 4)

したがって，AC=4および2点B，Pの x 座標の差12より

$S=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot12=\mathbf{24}$



(3) Pにおける接線がABと平行であるとき，Sは最小となる．

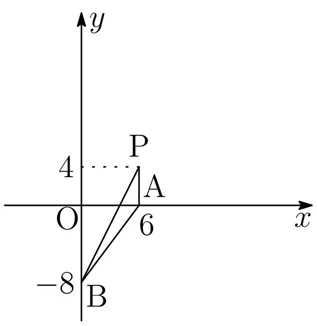
$y=\dfrac{1}{9}x^2$ を微分すると　$y'=\dfrac{2}{9}x$

Pにおける接線の傾きは $\dfrac{2}{9}p$ となるから

$\dfrac{2}{9}p=\dfrac{4}{3}$ 　これを解いて　$\boldsymbol{p=6}$

ゆえに，P(6, 4)

よって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot6=\mathbf{12}$



(4) $\angle$BAP が最大となるのは，P における接線が A を通るときである．
P における接線の方程式は

$$y - \frac{1}{9}p^2 = \frac{2}{9}p(x-p)$$

すなわち　$y = \frac{2}{9}px - \frac{1}{9}p^2$

この直線が A(6, 0) を通るから

$$0 = \frac{2}{9}p\cdot 6 - \frac{1}{9}p^2$$

よって　$p^2 - 12p = 0$

$p > 0$ に注意して　$\boldsymbol{p = 12}$

(5) $p > 0$ は，AB$\perp$BP であるとき，$p \neq 6$ である．

AP の傾きは　$\dfrac{\frac{1}{9}p^2 - 0}{p-6} = \dfrac{p^2}{9(p-6)}$

BP の傾きは　$\dfrac{\frac{1}{9}p^2 - (-8)}{p-0} = \dfrac{p^2+72}{9p}$

このとき　$\dfrac{p^2}{9(p-6)} \times \dfrac{p^2+72}{9p} = -1$

ゆえに　$p^3 + 153p - 486 = 0$

すなわち　$(p-3)(p^2+3p+162) = 0$

よって　$\boldsymbol{p = 3}$

答 ア．$\frac{4}{3}$　イ．12　ウ．24　エ．6　オ．12　カ．12　キ．3