平成21年度　東海大学　一般入試A方式(受験日自由選択方式)
数学I・数学II・数学A(70分)　平成21年2月8日
政治経済学部・総合経営学部・法学部・教養学部・国際文化学部 芸術工学部・開発工学部・海洋学部・健康科学部

次の空欄を埋めなさい．
解答は，分数の場合には既約分数の形で，根号を含む場合には根号の中が最小の自然数となるような形で書きなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) 放物線 $C: y = 3x^2 - 6x$ の頂点は $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ で，C と x 軸で囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2) $\log_3 45 - \log_3 60 + \log_3 12 = \boxed{\text{エ}}$

(3) $\mathrm{AB} = 10$，$\mathrm{BC} = 6$，$\angle\mathrm{C} = 90^\circ$ の直角三角形ABCにおいて，角Bの二等分線と辺ACとの交点をDとすると，$\mathrm{AC} = \boxed{\text{オ}}$，$\mathrm{CD} = \boxed{\text{カ}}$ である．

(4) $\sqrt{24n}$ が整数になるような最小の自然数 n は $\boxed{\text{キ}}$ である．また，$\sqrt{24n}$ が100より大きい整数になるような最小の自然数 n は $\boxed{\text{ク}}$ である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ m を正の定数とする．点A(3, 2)を通り，傾きが $-m$ の直線 l と x 軸，y 軸との交点をそれぞれP，Qとし，原点をOとする．

(1) OPの長さを m を用いて表すと，$\mathrm{OP} = \boxed{\text{ア}}$ である．

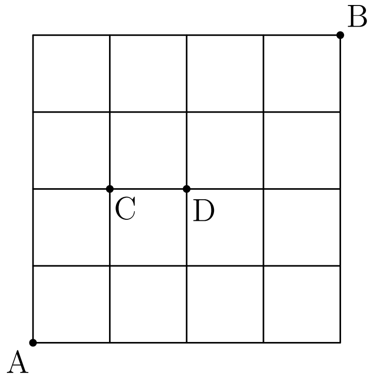
(2) OQの長さを m を用いて表すと，$\mathrm{OQ} = \boxed{\text{イ}}$ である．

(3) 三角形OPQの面積を S とおくと，$S = \boxed{\text{ウ}}m + \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{m} + \boxed{\text{オ}}$ と表される．

(4) l がOAと垂直のとき，$S = \boxed{\text{カ}}$ である．

(5) S が最小になるのは，$m = \boxed{\text{キ}}$ のときで，その値は $S = \boxed{\text{ク}}$ である．

$\boxed{\textbf{3}}$ (1) 右図のような街路がある．右 (→)，上 (↑) の方向に進んで，A 地点から B 地点に至る経路を考える．

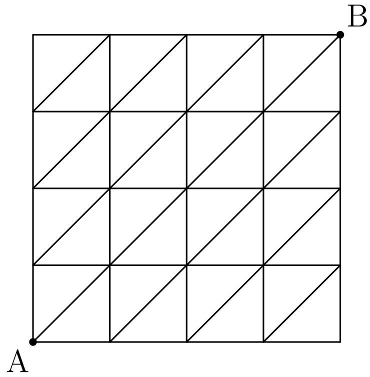


(i) A から B に至る経路は全部で $\boxed{\text{ア}}$ 通りある．

(ii) C を経由して，A から B に至る経路は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある．

(iii) 道 CD を通らないで，A から B に至る経路は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある．

(2) 右図のような街路がある．右 (→)，上 (↑)，または右上 (↗) の方向に進んで，A 地点から B 地点に至る経路を考える．



(i) 斜めの道を 1 回通る場合，右方向と上方向の道を 3 回ずつ通るので，A から B に至る経路は $\boxed{\text{エ}}$ 通りある．

(ii) 斜めの道を 2 回通る場合，右方向と上方向の道を 2 回ずつ通るので，A から B に至る経路は $\boxed{\text{オ}}$ 通りある．

(iii) 斜めの道を 3 回通る場合，右方向と上方向の道を 2 回ずつ通るので，A から B に至る経路は $\boxed{\text{カ}}$ 通りある．

(iv) その他の場合も含めて，A から B に至る経路は全部で $\boxed{\text{キ}}$ 通りある．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=3x^2-6x=3(x-1)^2-3$ より　C の頂点の座標は　$\mathbf{(1,-3)}$

C と x 軸との交点の x 座標は,

$3x^2-6x=0$ を解いて　$x=0,\ 2$

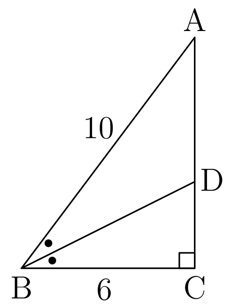
$0 \leqq x \leqq 2$ では $y \leqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_0^2\{-(3x^2-6x)\}dx=\Big[-x^3+3x^2\Big]_0^2=\mathbf{4}$$

(2) $\log_3 45-\log_3 60+\log_3 12=\log_3\dfrac{45\cdot12}{60}=\log_3 3^2=\mathbf{2}$

(3) $\angle\mathrm{C}=90^\circ$ であるから

$\mathrm{AC}=\sqrt{10^2-6^2}=\mathbf{8}$



BD は角 B の二等分線であるから

$\mathrm{CD}:\mathrm{DA}=\mathrm{BC}:\mathrm{BA}$

ゆえに　$\mathrm{CD}:\mathrm{DA}=6:10=3:5$

よって　$\mathrm{CD}=\mathrm{CA}\times\dfrac{3}{3+5}=8\times\dfrac{3}{8}=\mathbf{3}$

(4) $\sqrt{24n}=2\sqrt{6n}$ であるから，これが整数となる最小の自然数 n は

$\boldsymbol{n=6}$

$\sqrt{24n}$ が整数となる自然数 n は，$n=6k^2$ (k は自然数) とおけるので

$\sqrt{24n}=2\sqrt{6n}=2\sqrt{6\cdot6k^2}=12k$

$\sqrt{24n}$ が 100 より大きい整数となるとき　$12k\geqq100$

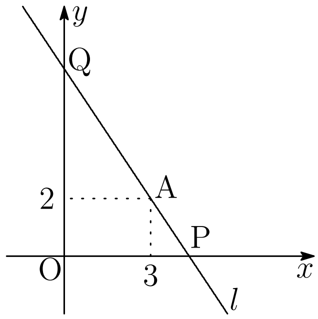
上式を満たす最小の自然数 k は　$k=9$

よって　$n=6\cdot9^2=\mathbf{486}$

答 ア. 1　イ. -3　ウ. 4　エ. 2　オ. 8　カ. 3　キ. 6　ク. 486

$\boxed{\mathbf{2}}$ 直線 l の方程式は　$y-2=-m(x-3)\quad\cdots(*)$

(1) P は x 軸上の点であるから，$y=0$ を $(*)$ に代入すると



$$x=\frac{2}{m}+3$$

よって　$\mathbf{OP}=\boldsymbol{\frac{2}{m}+3}$

(2) Q は y 軸上の点であるから，$x=0$ を $(*)$ に代入すると

$$y=3m+2$$

よって　$\mathbf{OQ}=\boldsymbol{3m+2}$

(3) $S=\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{m}+3\right)(3m+2)=\boldsymbol{\frac{9}{2}m+\frac{2}{m}+6}$$

(4) OA の傾きは $\frac{2}{3}$，l と OA が垂直のとき

$$\frac{2}{3}\cdot(-m)=-1\quad ゆえに\quad m=\frac{3}{2}$$

これを (3) の結果に代入して

$$S=\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{2}+2\cdot\frac{2}{3}+6=\boldsymbol{\frac{169}{12}}$$

(5) $\frac{9}{2}m>0$，$\frac{2}{m}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$S=\frac{9}{2}m+\frac{2}{m}+6\geqq 2\sqrt{\frac{9}{2}m\times\frac{2}{m}}+6=12$$

等号が成り立つのは，$\frac{9}{2}m=\frac{2}{m}$，すなわち $m=\frac{2}{3}$ のときである．

よって，S は $\boldsymbol{m=\frac{2}{3}}$ のとき，最小値 **12** をとる．

答 ア. $\frac{2}{m}+3$　イ. $3m+2$　ウ. $\frac{9}{2}$　エ. 2　オ. 6　カ. $\frac{169}{12}$　キ. $\frac{2}{3}$　ク. 12

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) (i) A から B に至る経路は，$\rightarrow$4 個と $\uparrow$4 個の順列で表される．

よって，その経路の総数は $\dfrac{8!}{4!4!} = \mathbf{70}$ (通り)

(ii) A から C に至る経路は，$\rightarrow$1 個と $\uparrow$2 個の順列で表され，

C から B に至る経路は，$\rightarrow$3 個と $\uparrow$2 個の順列で表される．

よって，その経路の総数は $\dfrac{3!}{1!2!} \times \dfrac{5!}{3!2!} = \mathbf{30}$ (通り)

(iii) A から C に至る経路は，3 通りで，D から B に至る経路は $\rightarrow$2 個と $\uparrow$2 個の順列で表される．ゆえに，CD を通る経路の総数は

$$3 \times \frac{4!}{2!2!} = 18 \text{ (通り)}$$

よって，CD を通らないで，A から B に至る経路は

$$70 - 18 = \mathbf{52} \text{ (通り)}$$

(2) (i) A 地点から B 地点に至る経路は $\nearrow$1 個と $\rightarrow$3 個と $\uparrow$3 個の順列で表される．よって，その経路の総数は $\dfrac{7!}{1!3!3!} = \mathbf{140}$ (通り)

(ii) A 地点から B 地点に至る経路は $\nearrow$2 個と $\rightarrow$2 個と $\uparrow$2 個の順列で表される．よって，その経路の総数は $\dfrac{6!}{2!2!2!} = \mathbf{90}$ (通り)

(iii) A 地点から B 地点に至る経路は $\nearrow$3 個と $\rightarrow$1 個と $\uparrow$1 個の順列で表される．よって，その経路の総数は $\dfrac{5!}{3!1!1!} = \mathbf{20}$ (通り)

(iv) (i)〜(iii) 以外に，斜めの道を通らない場合の 70 通りと，斜めの道を 4 回通る場合の 1 通りがあるので，求める経路は全部で

$$140 + 90 + 20 + 70 + 1 = \mathbf{323} \text{ (通り)}$$

答 ア．70　イ．30　ウ．52　エ．140　オ．90　カ．20　キ．323