平成21年度　東海大学　一般入試A方式(受験日自由選択方式)
数学I・数学II・数学A(70分)　平成21年2月7日
政治経済学部・総合経営学部・法学部・教養学部・国際文化学部 芸術工学部・開発工学部・海洋学部・健康科学部

次の空欄を埋めなさい．

解答は，分数の場合には既約分数の形で，根号を含む場合には根号の中が最小の自然数となるような形で書きなさい．

1 (1) $a+b=2\sqrt{3}$ かつ $a-b=2\sqrt{2}$ のとき，$a^2-b^2=$ ア，$a^2+b^2=$ イ である．

(2) $f(x)=-x^2+5x-2$ の $-1 \leqq x \leqq 4$ における最大値は ウ，最小値は エ である．

(3) 5つの数字1，2，3，4，5を1つずつ使ってできる5桁の数を小さいものから順に，12345，12354，$\cdots$，54321と並べると，31245は オ 番目になる．

(4) 2次関数 $f(x)=ax^2-4x+a-3$ を考える．

(i) すべての x について $f(x) \geqq 0$ となるための必要十分条件は $a \geqq$ カ である．

(ii) すべての x について $f(x) \leqq 0$ となるための必要十分条件は $a \leqq$ キ である．

2 (1) $x=\cos\theta$ とおく．次の値を x を用いて表しなさい．

$\sin 2\theta \sin\theta =$ ア

$\cos 2\theta \cos\theta =$ イ

$\cos 3\theta =$ ウ

(2) $y=2\cos 3\theta - 5\cos 2\theta - 10\cos\theta$ とおく．

y が最大になるのは，$\cos\theta=$ エ のときで，その値は $y=$ オ である．

y が最小になるのは，$\cos\theta=$ カ のときで，その値は $y=$ キ である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $r>0$ とする．不等式 $x^2+y^2 \leqq r^2$ で表される領域を A,

連立不等式 $\begin{cases} -3 \leqq y-\sqrt{3}x \leqq 3 \\ -3 \leqq y+\sqrt{3}x \leqq 3 \end{cases}$ で表される領域を B,

不等式 $x^2+y^2-2y \leqq 3$ で表される領域を C とする．

(1) $B \subset A$ となる r の範囲は $r \geqq$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $A \subset B$ となる r の範囲は $0<r \leqq$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3) 領域 C の面積は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(4) 領域 B の面積は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(5) 共通部分 $B \cap C$ の面積は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(6) 和集合 $B \cup C$ の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}=\mathbf{4\sqrt{6}}$

$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ であるから

$$2(a^2+b^2)=(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2})^2=12+8=20$$

よって　$a^2+b^2=\mathbf{10}$

(2) $-x^2+5x-2=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{17}{4}$ より

$-1\leqq x\leqq 4$ において，$f(x)=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{17}{4}$ は

$x=\dfrac{5}{2}$ で最大値 $\mathbf{\dfrac{17}{4}}$ をとり，$x=-1$ で最小値 $\mathbf{-8}$ をとる．

(3) 1□□□□ 型の数は　$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ (個)

2□□□□ 型の数は　$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ (個)

これに続く数が 31245 である．

したがって，31245 は　$24\times2+1=\mathbf{49}$ (番目)

(4) 2 次関数 $f(x)=ax^2-4x+a-3$ の判別式は

$$\begin{aligned} D/4&=(-2)^2-a(a-3)\\ &=-a^2+3a+4\\ &=-(a+1)(a-4) \end{aligned}$$

(i) x^2 の係数および判別式の符号について

$$a>0\cdots①\quad \text{かつ}\quad -(a+1)(a-4)\leqq 0$$

第 2 式から　$a\leqq -1,\ 4\leqq a\quad\cdots②$

① と ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{a}\mathbf{\geqq 4}$

(ii) x^2 の係数および判別式の符号について

$$a<0\cdots③\quad \text{かつ}\quad -(a+1)(a-4)\leqq 0$$

第 2 式から　$a\leqq -1,\ 4\leqq a\quad\cdots④$

③ と ④ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{a}\mathbf{\leqq -1}$

答 ア．$4\sqrt{6}$　イ．10　ウ．$\dfrac{17}{4}$　エ．-8　オ．49　カ．4　キ．-1

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)

$$\begin{aligned}\sin 2\theta \sin\theta &= 2\sin\theta\cos\theta\cdot\sin\theta \\ &= 2\cos\theta\sin^2\theta \\ &= 2\cos\theta(1-\cos^2\theta) \\ &= 2x(1-x^2) = \boldsymbol{-2x^3+2x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta\cos\theta &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta \\ &= (2x^2-1)x = \boldsymbol{2x^3-x}\end{aligned}$$

上の 2 式を加法定理に適用して

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta) \\ &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\ &= (2x^3-x)-(-2x^3+2x) \\ &= \boldsymbol{4x^3-3x}\end{aligned}$$

(2) $\cos\theta = x$ より $\quad -1 \leqq x \leqq 1$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2-1$ および (1) の結果から

$$\begin{aligned}y &= 2\cos 3\theta - 5\cos 2\theta - 10\cos\theta \\ &= 2(4x^3-3x) - 5(2x^2-1) - 10x \\ &= 8x^3 - 10x^2 - 16x\end{aligned}$$

$y' = 24x^2 - 20x - 16 = 4(6x^2-5x-4) = 4(2x+1)(3x-4)$

y の増減表は，次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	$\nearrow$	極大 $\frac{9}{2}$	$\searrow$	-18

よって，この関数は

$\cos\theta = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$ のとき**最大値** $\boldsymbol{\frac{9}{2}}$ をとり，

$\cos\theta = \mathbf{1}$ のとき**最小値** $\mathbf{-18}$ をとる．

答 ア．$-2x^3+2x$ 　イ．$2x^3-x$ 　ウ．$4x^3-3x$

エ．$-\dfrac{1}{2}$ 　オ．$\dfrac{9}{2}$ 　カ．1 　キ．-18

$\boxed{\mathbf{3}}$ A の表す領域は，中心が原点で半径が r の円の周およびその内部.

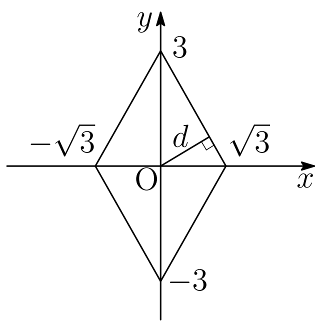
B の表す領域は，4 点 $(\sqrt{3},\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$，$(0, -3)$ を頂点とする四角形の周およびその内部.

C の表す領域は，$x^2+(y-1)^2 \leqq 4$ より，中心が $(0,\ 1)$ で半径 2 の円の周およびその内部.

(1) $B \subset A$ となるのは，B の点 $(0, \pm 3)$ が A に含まれるときであるから

$$0^2+(\pm 3)^2 \leqq r^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r \geqq 3}$$

(2) B の表す領域は x 軸および y 軸に関して対称であるので，原点から B の周までの距離 d は，第 1 象限の周である直線 $\sqrt{3}x+y-3=0$ と原点との距離を求めて



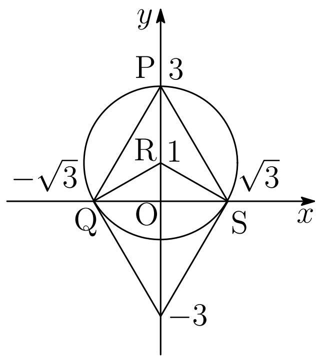
$$d=\frac{|-3|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{3}{2}$$

$A \subset B$ となるのは，$r \leqq d$ のときであるから　$\boldsymbol{0 < r \leqq \frac{3}{2}}$

(3) C の面積は，半径 2 の円の面積であるから　$\pi \cdot 2^2 = \boldsymbol{4\pi}$

(4) B の面積は　$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 = \boldsymbol{6\sqrt{3}}$

(5) $B \cap C$ の面積は，右の図のように四角形 PQRS の面積 S_1 と RQ，RS および円弧 QS で囲まれた扇形の面積 S_2 の和である.



$$S_1 = 2 \times \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$\angle \mathrm{QRS} = 120^\circ$ であるから

$$S_2 = \pi \cdot 2^2 \times \frac{120}{360} = \frac{4}{3}\pi$$

よって，求める面積は　$S_1 + S_2 = \boldsymbol{2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi}$

(6) (3),(4),(5) の面積をそれぞれ $S(C)$，$S(B)$，$S(B \cap C)$ とし，求める面積を $S(B \cup C)$ とすると

$$\begin{aligned} S(B \cup C) &= S(B) + S(C) - S(B \cap C) \\ &= 6\sqrt{3} + 4\pi - \left(2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi\right) \\ &= \boldsymbol{4\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi} \end{aligned}$$

答 ア. 3　イ. $\dfrac{3}{2}$　ウ. 4π　エ. $6\sqrt{3}$　オ. $2\sqrt{3} + \dfrac{4}{3}\pi$　カ. $4\sqrt{3} + \dfrac{8}{3}\pi$