平成20年度　東海大学　一般入試S方式(キャンパス限定方式)
数学I・数学II・数学A・数学B(ベクトル・数列)70分
産業工学部・生物理工学部　平成20年2月1日

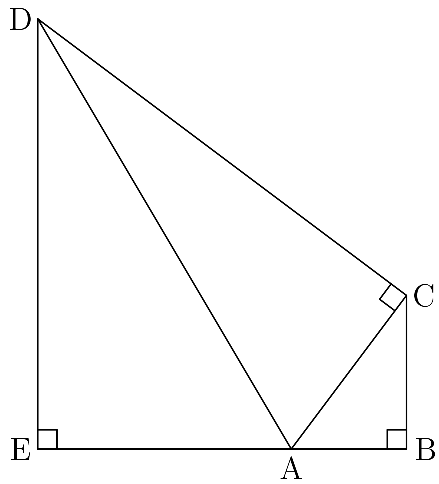
次の空欄を埋めなさい．
解答は，分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $1+ax=b(2x+1)$ が x についての恒等式であるような定数 a，b の値は，$a=$ ア，$b=$ イ である．

(2) 不等式 $\log_2 x+\log_2(x+3)<2$ の解は，ウ $<x<$ エ である．

(3) 複素数 z が $z^2=i$ を満たすとき，$z=$ オ，カ である．ただし i は虚数単位とする．

(4) 下の図で，E，A，B は一直線上にあり，$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{AED}=90^\circ$，$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=4$，$\mathrm{CD}=12$ とする．このとき，$\mathrm{DE}=$ キ，$\mathrm{AE}=$ ク である．



(5) 下の表を用いて，次の値をそれぞれ小数点以下 4 桁まで求めなさい．

(i) $\cos 160^\circ = \boxed{\text{ケ}}$

(ii) $\sin \dfrac{13\pi}{9} = \boxed{\text{コ}}$

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
1°	0.0175	0.9998	16°	0.2756	0.9613	31°	0.5150	0.8572
2°	0.0349	0.9994	17°	0.2924	0.9563	32°	0.5299	0.8480
3°	0.0523	0.9986	18°	0.3090	0.9511	33°	0.5446	0.8387
4°	0.0698	0.9976	19°	0.3256	0.9455	34°	0.5592	0.8290
5°	0.0872	0.9962	20°	0.3420	0.9397	35°	0.5736	0.8192
6°	0.1045	0.9945	21°	0.3584	0.9336	36°	0.5878	0.8090
7°	0.1219	0.9925	22°	0.3746	0.9272	37°	0.6018	0.7986
8°	0.1392	0.9903	23°	0.3907	0.9205	38°	0.6157	0.7880
9°	0.1564	0.9877	24°	0.4067	0.9135	39°	0.6293	0.7771
10°	0.1736	0.9848	25°	0.4226	0.9063	40°	0.6428	0.7660
11°	0.1908	0.9816	26°	0.4384	0.8988	41°	0.6561	0.7947
12°	0.2079	0.9781	27°	0.4540	0.8910	42°	0.6691	0.7431
13°	0.2250	0.9744	28°	0.4695	0.8829	43°	0.6820	0.7314
14°	0.2419	0.9703	29°	0.4848	0.8746	44°	0.6947	0.7193
15°	0.2588	0.9659	30°	0.5000	0.8660	45°	0.7071	0.7071

(6) n を自然数とする．次の和を求め，因数分解した形で書くと，

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (2n)^2 = \boxed{\text{サ}}$$

である．

$\boxed{\textbf{2}}$ 放物線 $C_1 : y = -x^2 + ax + b$ に，直線 $l : y = 2x$ が接しているとする．

(1) b を a を用いて表すと，$b = \boxed{\text{ア}}$ である．

(2) 放物線 C_1 と直線 l の接点の x 座標が -2 であるとき，$a = \boxed{\text{イ}}$，$b = \boxed{\text{ウ}}$ である．
以後，$a = \boxed{\text{イ}}$，$b = \boxed{\text{ウ}}$ とする．

(3) 放物線 $C_2 : y = x^2 - c$ と (2) で定めた放物線 C_1 との 1 つの交点の x 座標が 1 のとき，$c = \boxed{\text{エ}}$ であり，もう 1 つの交点の x 座標は $\boxed{\text{オ}}$ である．
以後，$c = \boxed{\text{エ}}$ とする．

(4) (2) と (3) で定めた 2 つの放物線 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である．

$\boxed{\textbf{3}}$ (1) 7 枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ がある．これら 7 枚のカードから相異なる 3 枚のカードを抜き出す場合，取り出し方は全部で $\boxed{\text{ア}}$ 通りある．

(i) 取り出した 3 枚のカードに書かれた数の和が 10 である確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(ii) 取り出した 3 枚のカードに書かれた数の積が偶数である確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2) 6 枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{\sqrt{2}}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ がある．1 枚引いて数を確認してから元へ戻す操作を 3 回繰り返す場合，取り出し方は全部で $\boxed{\text{エ}}$ 通りある．

(i) 取り出した 3 枚のカードに書かれた数が，直角三角形の各辺の長さとなるような取り出し方は全部で $\boxed{\text{オ}}$ 通りある．

(ii) 取り出した 3 枚のカードに書かれた数が，二等辺三角形の各辺の長さとなるような取り出し方は全部で $\boxed{\text{カ}}$ 通りある．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 右辺を展開して　　$ax+1=2bx+b$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから　$a=2b$，$1=b$

したがって　　$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=1}$

(2) 真数は正であるから　　$x>0$　かつ　$x+3>0$

すなわち　　$x>0$　　$\cdots$①

不等式を変形すると　　$\log_2 x(x+3)<\log_2 2^2$

底 2 は 1 より大きいから　　$x(x+3)<4$

$x^2+3x-4<0$

すなわち　　$(x+4)(x-1)<0$

ゆえに　　$-4<x<1$　　$\cdots$②

① と ② の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{0<x<1}$

(3) $z=a+bi$ $(a, b$ は実数$)$ とおくと　$z^2=a^2-b^2+2abi$

$z^2=i$ より　$a^2-b^2+2abi=i$

a^2-b^2，$2ab$ は実数であるから

$$\begin{cases} a^2-b^2=0 & \cdots① \\ 2ab=1 & \cdots② \end{cases}$$

① から　　$b=\pm a$

[1] $\underline{b=a\text{ のとき}}$，これを ② に代入して　$2a^2=1$

ゆえに　　$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(複号同順)

[2] $\underline{b=-a\text{ のとき}}$，これを ② に代入して　$-2a^2=1$

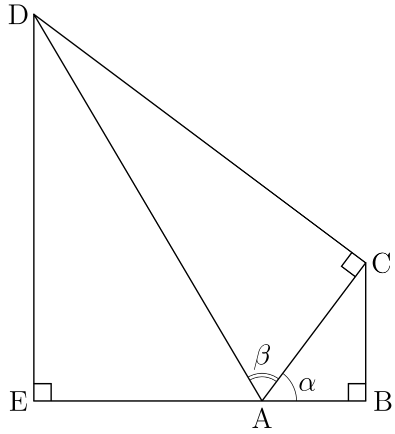
この式を満たす実数 a は存在しない.

したがって　　$\boldsymbol{z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}}$

(4) $\mathrm{CA} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\mathrm{DA} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{CD}^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$\angle\mathrm{CAB} = \alpha$，$\angle\mathrm{DAC} = \beta$ とおくと



$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{DAE} &= \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) \\ &= \sin(\alpha + \beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{56}{65}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{DAE} &= \cos(180^\circ - (\alpha + \beta)) \\ &= -\cos(\alpha + \beta) \\ &= -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= -\frac{3}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{33}{65}\end{aligned}$$

したがって　$\mathrm{DE} = \mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{DAE} = 13 \times \frac{56}{65} = \boldsymbol{\frac{56}{5}}$

$\mathrm{AE} = \mathrm{AD}\cos\angle\mathrm{DAE} = 13 \times \frac{33}{65} = \boldsymbol{\frac{33}{5}}$

(5) (i) $\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ = \mathbf{-0.9397}$

(ii) $\sin\frac{13\pi}{9} = \sin(180^\circ + 80^\circ) = -\sin 80^\circ = -\cos 10^\circ = \mathbf{-0.9848}$

(6) $(n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (2n)^2$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^{n}(n+k)^2 \\ &= n^2\sum_{k=1}^{n} + 2n\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}k^2 \\ &= n^2 \times n + 2n \times \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6}n\{6n^2 + 6n(n+1) + (n+1)(2n+1)\} \\ &= \frac{1}{6}n(14n^2 + 9n + 1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)}\end{aligned}$$

別解 $(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(2n)^2$

$$=\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 2n(2n+1)(2\cdot 2n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(2n+1)\{2(4n+1)-(n+1)\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)}$$

答 ア．2　イ．1　ウ．0　エ．1　オ. カ．$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$　キ．$\dfrac{56}{5}$　ク．$\dfrac{33}{5}$

ケ．-0.9397　コ．-0.9848　サ．$\dfrac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)$

2 (1) 2 式から y を消去して　$-x^2+ax+b=2x$

整理すると　$x^2+(2-a)x-b=0$　$\cdots$①

① は重解をもつので，$D=0$ から

$$(2-a)^2-4\cdot 1(-b)=0 \qquad \text{すなわち} \qquad \boldsymbol{b=-\frac{1}{4}(2-a)^2}$$

(2) ① は -2 を重解をもつので，解と係数の関係により

$$(-2)+(-2)=-\frac{2-a}{1}, \qquad (-2)\times(-2)=\frac{-b}{1}$$

よって　$\boldsymbol{a=-2,\ b=-4}$

(3) $C_1: y=-x^2-2x-4$ と $C_2: y=x^2-c$ から y を消去して整理すると

$$2x^2+2x+4-c=0$$

この方程式の解の 1 つが 1 であるから

$$2\cdot 1^2+2\cdot 1+4-c=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{c=8}$$

ゆえに，方程式は　$2x^2+2x+4-8=0$

すなわち　$x^2+x-2=0$

これを解いて　$x=1,-2$

よって，もう 1 つの交点の x 座標は　$\boldsymbol{x=-2}$

(4) $C_1 : y = -x^2 - 2x - 4$ は上に凸，$C_2 : y = x^2 - 8$ は下に凸の放物線であるから，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1} \{(-x^2 - 2x - 4) - (x^2 - 8)\}\,dx \\ &= -2\int_{-2}^{1} (x+2)(x-1)\,dx \\ &= -2 \times \left(-\frac{1}{6}\right)\{1-(-2)\}^3 \\ &= \mathbf{9} \end{aligned}$$

答 ア．$-\dfrac{1}{4}(2-a)^2$　イ．-2　ウ．-4　エ．8　オ．-2　カ．9

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 7 枚のカードから相異なる 3 枚のカードの抜き出し方は

$$_7\mathrm{C}_3 = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = \mathbf{35} \quad (\text{通り})$$

(i) 3 枚のカードに書かれた数の和が 10 になるのは

$$\{1,2,7\},\ \{1,3,6\},\ \{1,4,5\},\ \{2,3,5\}$$

の 4 通りであるから，求める確率は　$\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{35}}$

(ii) 3 枚のカードに書かれた数の積が奇数となるのは，1，3，5，7 の 4 枚から 3 枚抜き出す組合せであるから，その確率は

$$\frac{_4\mathrm{C}_3}{_7\mathrm{C}_3} = \frac{4}{35}$$

求める確率はこの余事象の確率であるから

$$1 - \frac{4}{35} = \frac{\mathbf{31}}{\mathbf{35}}$$

(2) 6 枚から 3 枚取り出す重複順列の総数であるから　$6^3 = \mathbf{216}$　(通り)

(i) 取り出した 3 枚のカードに書かれた数が，直角三角形の各辺の長さとなる組合せは

$$\{1,1,\sqrt{2}\},\ \{\sqrt{2},\sqrt{2},\ 2\},\ \{3,4,5\}$$

であるから，それぞれの取り出し方の総数を求めて

$$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 3! = \mathbf{12} \quad (\text{通り})$$

(ii) 取り出した3枚のカードに書かれた数が，二等辺三角形の各辺の長さとなる取り出し方を，次の2つの場合に分けて求める．

［1］正三角形のとき　3辺の長さがすべて等しい場合で　6通り

［2］［1］以外の二等辺三角形のとき

$\{1,1,\sqrt{2}\}$，$\{\sqrt{2},\sqrt{2},1\}$，$\{\sqrt{2},\sqrt{2},2\}$，$\{2,2,1\}$，$\{2,2,\sqrt{2}\}$，
$\{2,2,3\}$，$\{3,3,1\}$，$\{3,3,\sqrt{2}\}$，$\{3,3,2\}$，$\{3,3,4\}$，$\{3,3,5\}$，
$\{4,4,1\}$，$\{4,4,\sqrt{2}\}$，$\{4,4,2\}$，$\{4,4,3\}$，$\{4,4,5\}$，$\{5,5,1\}$，
$\{5,5,\sqrt{2}\}$，$\{5,5,2\}$，$\{5,5,3\}$，$\{5,5,4\}$

であるから，これらの取り出し方の総数は　$21\times\dfrac{3!}{2!}=63$　(通り)

したがって，求める総数は　$6+63=\mathbf{69}$　(通り)

答　ア．35　イ．$\dfrac{4}{35}$　ウ．$\dfrac{31}{35}$　エ．216　オ．12　カ．69