平成20年度　東海大学　一般入試B方式(複数学科選択方式)
数学I・数学II・数学A・数学B(70分)　平成20年2月28日
教養学部(人間環境学科自然環境課程)・理学部・情報理工学部 情報通信学部・工学部(航空宇宙学科航空操縦学専攻を除く) 産業工学部・開発工学部(感性デザイン学科を除く) 海洋学部(海洋文明学科・航空学科・国際物流専攻を除く) 生物理工学部・農学部

次の空欄を埋めなさい．問題文中の各空欄にはそれぞれ0〜9の数字の一つが入ります．各空欄の番号は解答番号を表します．解答は，解答用紙の解答番号に対応した解答欄にマークしなさい．
問い **1**，**2**，**3** を通して，解答は，分数の場合には既約分数の形で，また根号を含む場合には根号の中が最小の自然数になるように表しなさい．

1 (1) x，y を実数とするとき，$x^2+5y^2+2x-3y+4xy+10$ を x についての2次式と考え，平方完成すると，$\{x+(\boxed{1}y+\boxed{2})\}^2+y^2-\boxed{3}y+\boxed{4}$ となるので，この式は $x=-\boxed{5}$，$y=\dfrac{\boxed{6}}{\boxed{7}}$ のとき最小値 $-\dfrac{\boxed{8}\boxed{9}}{\boxed{10}}$ をとる．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が $a_n=\dfrac{1}{4n^2-1}$ $(n=1,2,\cdots)$ であるとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{\boxed{11}\boxed{12}}{\boxed{13}\boxed{14}}$ であり，数列 $\{b_n\}$ が $b_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ $(n=1,2,\cdots)$ であるとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{n(n+\boxed{15})}{\boxed{16}\boxed{17}(n+\boxed{18})(n+\boxed{19})}$ である．ただし，$\boxed{18}<\boxed{19}$ とする．

(3) A，B2チームが1回試合をしたとき，それぞれが勝つ確率はともに $\dfrac{1}{4}$ であり，引き分ける確率は $\dfrac{1}{2}$ であるとする．この2チームが何回か試合をして先に2勝した方を優勝チームとするとき
3試合目でAが優勝チームとなる確率は $\dfrac{\boxed{20}}{\boxed{21}\boxed{22}}$ であり，
4試合目でAが優勝チームとなる確率は $\dfrac{\boxed{23}}{\boxed{24}\boxed{25}}$ である．

(4) △ABCにおいて3辺の長さが $\mathrm{AB}=3\sqrt{2}$，$\mathrm{BC}=3+\sqrt{3}$，$\mathrm{CA}=2\sqrt{3}$ とするとき，$\angle\mathrm{B}=\boxed{26}\boxed{27}^\circ$ であり，この三角形の面積は $\dfrac{\boxed{28}+\boxed{29}\sqrt{\boxed{30}}}{\boxed{31}}$ である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ △ABC の内部に $4\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ を満たす点 P がある．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\boxed{32}}{\boxed{33}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{34}}{\boxed{35}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となるから，AP を延長した直線と BC との交点を D とすると，$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=\boxed{36}:\boxed{37}$ である．

(2) △ABC と △APB の面積をそれぞれ $S_1:S_2$ とすると，$S_1:S_2=\boxed{38}:\boxed{39}$ である．

(3) △ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とするとき EG と AB が平行になるのは $k=\dfrac{\boxed{40}}{\boxed{41}}$ のときで，このとき △ABC の面積は △AEG の面積の $\boxed{42}\boxed{43}$ 倍になる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $y=|x^2-4x|+2x$ のグラフを C とする．

(1) $y=|x^2-4x|+2x$ の絶対値をはずして整理すると，
$x \leqq \boxed{44}$ または $\boxed{45} \leqq x$ のとき $y=x^2-\boxed{46}x$
$\boxed{44}<x<\boxed{45}$ のとき $y=-x^2+\boxed{47}x$
となる．

(2) x の方程式 $|x^2-4x|+2x=k$ が 4 つの異なる実数解をもつような定数 k の値の範囲を $a<k<b$ とすると，$a=\boxed{48}$，$b=\boxed{49}$ である．

(3) (2) の a の値に対して直線 $y=a$ とグラフ C の囲む図形の面積は $\dfrac{\boxed{50}\boxed{51}}{\boxed{52}}$ となる．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) xについて整理し，平方完成をすると

$$\begin{aligned}&x^2+5y^2+2x-3y+4xy+10\\=&x^2+2(2y+1)x+5y^2-3y+10\\=&\{x+(2y+1)\}^2-(2y+1)^2+5y^2-3y+10\\=&\{x+(\mathbf{2}y+\mathbf{1})\}^2+y^2-\mathbf{7}y+\mathbf{9}\end{aligned}$$

さらに，y^2-7y+9を平方完成すると

$$\begin{aligned}&x^2+5y^2+2x-3y+4xy+10\\=&(x+2y+1)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{13}{4}\end{aligned}$$

上式は$x+2y+1=0$，$y-\dfrac{7}{2}=0$のとき最小となる．

したがって，$\boldsymbol{x=-8}$，$\boldsymbol{y=\dfrac{7}{2}}$のとき，最小値$\boldsymbol{-\dfrac{13}{4}}$をとる．

(2) $a_n=\dfrac{1}{4n^2-1}$の右辺を変形すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{4n^2-1}&=\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

よって　$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\mathbf{\frac{10}{21}}$$

$b_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} &= \frac{1}{2} \times \frac{(n+3)-(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(n+2)(n+3)-6}{6(n+2)(n+3)} \\ &= \boldsymbol{\frac{n(n+5)}{12(n+2)(n+3)}}\end{aligned}$$

(3) 3 試合目で A が優勝するのは，次の 2 つの場合に分けられる．

	1 回	2 回	3 回
①	A	$\overline{A}$	A
②	$\overline{A}$	A	A

(A : A が勝つ，$\overline{A}$: B が勝つか引き分け)

① の確率は $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{64}$

② の確率は $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{64}$

① と ② は互いに排反であるから，求める確率は $\dfrac{3}{64} + \dfrac{3}{64} = \boldsymbol{\dfrac{3}{32}}$

4 試合目で A が優勝するのは，次の 2 つの場合に分けられる．

［1］ 2 勝 1 敗 1 分で A が勝つ場合

	1 回	2 回	3 回	4 回
①	A	B	△	A
②	A	△	B	A
③	B	A	△	A
④	B	△	A	A
⑤	△	A	B	A
⑥	△	B	A	A

(△：引き分け)

①〜⑥ の確率は等しく，このときの確率は

$$3! \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{64}$$

［2］ 2 勝 0 敗 2 分で A が勝つ場合

	1 回	2 回	3 回	4 回
①	A	△	△	A
②	△	A	△	A
③	△	△	A	A

(△：引き分け)

①〜③ の確率は等しく，このときの確率は

$$_3\mathrm{C}_2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{64}$$

よって，［1］，［2］から $\dfrac{3}{64} + \dfrac{3}{64} = \boldsymbol{\dfrac{3}{32}}$

(4) △ABC に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}} \\ &= \frac{(3\sqrt{2})^2 + (3+\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2\cdot 3\sqrt{2}(3+\sqrt{3})} \\ &= \frac{6(3+\sqrt{3})}{6\sqrt{2}(3+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

よって $\angle\mathbf{B} = \mathbf{45^\circ}$

また，この三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}(3+\sqrt{3})\sin 45^\circ = \boldsymbol{\frac{9+3\sqrt{3}}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $4\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ から

ゆえに　$4\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+2(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{0}$

整理して　$9\overrightarrow{\mathrm{AP}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$　$\cdots$①

上式から　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{5}{9}\times\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$　$\cdots$②

AP を延長した直線と BC との交点が D であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　$\cdots$③

したがって　$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=\frac{5}{9}:\left(1-\frac{5}{9}\right)=\mathbf{5:4}$

(2) ②および (1) の結果から，D は線分 AB を $2:3$ に内分する点であり，P は線分 AD を $5:4$ に内分する点である．

ゆえに　$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{ADB}=(2+3):2=5:2$

$\triangle\mathrm{ADB}:\triangle\mathrm{APD}=(5+4):5=9:5$

上の 2 式から　$\frac{\triangle\mathrm{ABC}}{\triangle\mathrm{ADB}}\times\frac{\triangle\mathrm{ADB}}{\triangle\mathrm{APD}}=\frac{5}{2}\times\frac{9}{5}$

したがって　$\frac{\triangle\mathrm{ABC}}{\triangle\mathrm{APB}}=\frac{9}{2}$

よって　$S_1:S_2=\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{APB}=\mathbf{9:2}$

(3) BC の中点を M とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}$

G は AM を $2:1$ に内分する点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$　$\cdots$④

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{2}{3}\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}-k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}-k\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\&=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}k\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{9}k\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

上式から，$\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が平行であるとき

$$\frac{1}{3}-\frac{2}{9}k=0\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{k=\frac{3}{2}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ に $k=\dfrac{3}{2}$ および ③ を代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{2}\times\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad\cdots⑤$$

D は線分 AB を 2 : 3 に内分する点で，M は AB の中点であるから

$$\mathrm{AB}:\mathrm{DM}=1:\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{2+3}\right)=1:\frac{1}{10}$$

上式から，△ADM の面積は △ABC の $\dfrac{1}{10}$ である．さらに，④，⑤ から

$$\frac{\triangle\mathrm{AEG}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\frac{1}{10}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{18}$$

よって，△ABC の面積は △AEG の面積の **18** 倍である．

3 (1) $x\leqq 0,\ 4\leqq x$ のとき　$x^2-4x\geqq 0$

$0<x<4$ のとき　$x^2-4x<0$

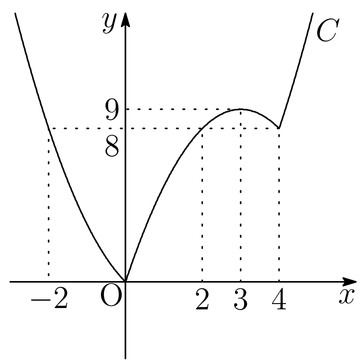
よって　$\boldsymbol{x\leqq 0,\ 4\leqq x}$　のとき　$y=(x^2-4x)+2x=\boldsymbol{x^2-2x}$

$\boldsymbol{0<x<4}$　のとき　$y=-(x^2-4x)+2x=\boldsymbol{-x^2+6x}$

(2) (1) の結果から $y=|x^2-4x|+2x$ のグラフは，右の図のようになる．

したがって，$y=|x^2-4x|+2x$ と $y=k$ が異なる 4 点で交わるとき，x の方程式 $|x^2-4x|+2x=k$ が 4 つの異なる実数解をもつ．そのときの k の値の範囲は

$$\boldsymbol{8<k<9}$$



(3) (2) より，$y=8$ と C と囲む図形の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^{0}\{8-(x^2-2x)\}dx+\int_{0}^{2}\{8-(-x^2+6x)\}dx\\&\qquad+\int_{2}^{4}\{(-x^2+6x)-8\}dx\\&=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right]_{0}^{2}-\int_{2}^{4}(x-2)(x-4)\,dx\\&=\frac{28}{3}+\frac{20}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)(4-2)^3\\&=\boldsymbol{\frac{52}{3}}\end{aligned}$$

答

問	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答	2	1	7	9	8	7	2	1	3	4
問	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答	1	0	2	1	5	1	2	2	3	3
問	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
答	3	2	3	3	2	4	5	9	3	3
問	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
答	2	1	3	2	9	5	4	9	2	3
問	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
答	2	1	8	0	4	2	6	8	9	5
問	51	52								
答	2	3								