平成 20 年度　東海大学　一般入試 B 方式 (複数学科選択方式)
数学 I・数学 II・数学 A(70 分)　平成 20 年 2 月 28 日
文学部・政治経済学部・総合経営学部・法学部
教養学部 (人間環境学科社会環境課程・国際学科)
国際文化学部・芸術工学部・開発工学部 (感性デザイン学科)
海洋学部 (海洋文明学科・航海学科国際物流専攻)

次の空欄を埋めなさい．問題文中の各空欄にはそれぞれ 0〜9 の数字の一つが入ります．各空欄の番号は解答番号を表します．解答は，解答用紙の解答番号に対応した解答欄にマークしなさい．
問い $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$ を通して，解答は，分数の場合には既約分数の形で，また根号を含む場合には根号の中が最小の自然数になるように表しなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 4$ ならば $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$，

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{4}}$ である．

(2) 袋の中に赤玉が 3 個，白玉が 2 個，黒玉が 4 個入っている．この中から同時に 2 個の玉を取り出すとき，2 つの玉の色が同じになる確率は $\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{6}\boxed{7}}$ である．また同時に 3 個の玉を取り出したとき，その中に含まれる色の種類が 2 種類以下になる確率は $\dfrac{\boxed{8}}{\boxed{9}}$ である．

(3) k を実数の定数とする．放物線 $y = x^2 - x + 6$ が直線 $y = x + k$ と異なる 2 点で交わるような k の値の範囲は $k > \boxed{10}$ であり，このとき，2 つの交点間の距離が 4 ならば $k = \boxed{11}$ である．

(4) x を実数とするとき，方程式 $16^{x+\frac{1}{2}} - 33 \times 2^{2x} + 2^3 = 0$ を解くと，

$x = \dfrac{\boxed{12}}{\boxed{13}}$，$-\boxed{14}$ である．

2 (1) a を正の定数とする．2 つの放物線 $C_1 : y = x^2 - 2x + 5$ と $C_2 : y = -3x^2 + ax - 4$ は共有点をもち，その点で共通の接線をもつとする．このとき，$a = \boxed{15}\boxed{16}$ であり，共通の接線の方程式は $y = \boxed{17}x + \dfrac{\boxed{18}\boxed{19}}{\boxed{20}}$ となる．

(2) b を定数とする．2 つの放物線 $C_3 : y = 2x^2$ と $C_4 : y = -x^2 + b$ が共有点をもち，その点においてそれぞれの接線が直交するとき，$b = \dfrac{\boxed{21}}{\boxed{22}}$ であり，このとき，C_3，C_4 の囲む面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{23}}}{\boxed{24}}$ となる．

3 (1) 方程式 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ は，中心の座標が $(\boxed{25},\ \boxed{26})$，半径が $\boxed{27}$ の円を表す.

(2) k を定数とする．円 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ が直線 $y = kx$ から切り取る線分の長さが最大となるときの k の値は $k = \dfrac{\boxed{28}}{\boxed{29}}$ である．このとき，この 2 つの図形の交点は x 座標が小さい順に $\left(\dfrac{\boxed{30}\boxed{31}}{\boxed{32}},\ \dfrac{\boxed{33}}{\boxed{34}}\right)$，$\left(\dfrac{\boxed{35}\boxed{36}}{\boxed{37}},\ \dfrac{\boxed{38}\boxed{39}}{\boxed{40}}\right)$ となる．

(3) (2) で求めた k の値に対して不等式 $y \geqq kx$，$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 \leqq 0$ で表される領域を D とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が D 上を動くとき，$x + y$ の最大値は $\boxed{41} + \boxed{42}\sqrt{\boxed{43}}$ である．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 4$ から $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = 4$

$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 4$$

ゆえに $\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} = 4$

よって $\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{4}}$ $\cdots$①

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ であるから ① より $\sin\theta > 0$ $\cdots$②

①，② から $\cos\theta > 0$ $\cdots$③

したがって $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta + \cos^2\theta$

$$= 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

① から $= 1 + 2\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{2}$

②，③ より，$\sin\theta + \cos\theta > 0$ であるから

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

(2) 2 個の玉を取り出すとき，2 個の玉の色が同じであるのは

A：2 個とも赤，B：2 個とも白，C：2 個とも黒

の場合であり，事象 A，B，C は互いに排反である．
よって，求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &= \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} + \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} + \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} \\ &= \frac{3}{36} + \frac{1}{36} + \frac{6}{36} = \boldsymbol{\frac{5}{18}} \end{aligned}$$

3 個の玉を取り出すとき，3 個の玉の色が異なる事象を D とすると，
その確率は

$$P(D) = \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3} = \frac{3 \times 2 \times 4}{84} = \frac{2}{7}$$

よって，3 個の玉の色が 2 種類以下であるのは，D の余事象であるから，
求める確率は

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{2}{7} = \boldsymbol{\frac{5}{7}}$$

(3) $y=x^2-x+6 \cdots$ ①，$y=x+k \cdots$ ② から y を消去して整理すると

$$x^2-2x+6-k=0 \quad \cdots ③$$

① と ② が異なる 2 点で交わるとき，③ について $D>0$ であるから

$$D/4=(-1)^2-1\cdot(6-k)>0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{k>5}$$

このとき，③ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=6-k \quad \cdots ④$$

② から 2 つの交点を $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha+k)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta+k)$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= (\beta-\alpha)^2+\{(\beta+k)-(\alpha+k)\}^2\\ &= 2(\beta-\alpha)^2\\ &= 2(\alpha+\beta)^2-8\alpha\beta\end{aligned}$$

上式に $\mathrm{AB}=4$ および ④ を代入すると

$$4^2=2\cdot 2^2-8(6-k) \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=7}$$

(4) $16^{x+\frac{1}{2}}=4\cdot(4^x)^2$，$2^{2x}=4^x$ であるから

$$4\cdot(4^x)^2-33\cdot 4^x+8=0$$

$4^x=t \cdots$ ① とおくと　$t>0$

ゆえに　$4t^2-33t+8=0$

$(t-8)(4t-1)=0$

$t>0$ に注意して　$t=8,\ \dfrac{1}{4}$

① より　$4^x=8$　を解いて　$x=\dfrac{3}{2}$

$4^x=\dfrac{1}{4}$　を解いて　$x=-1$

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2},-1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = x^2 - 2x + 5 \cdots$①，$y = -3x^2 + ax - 4 \cdots$② から y を消去すると

$$4x^2 - (a+2)x + 9 = 0 \quad \cdots③$$

この方程式は，重解をもつので，$D = 0$ より

$$\{-(a+2)\}^2 - 4{\cdot}4{\cdot}9 = 0$$

ゆえに　$(a+2)^2 = 12^2$

$$a + 2 = \pm 12$$

$$a = -2 \pm 12$$

$a > 0$ より　$\boldsymbol{a = 10}$

$a = 10$ を ③ に代入して

$4x^2 - 12x + 9 = 0$　これを解いて　$x = \dfrac{3}{2}$

① から，接点の座標は　$\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{17}{4}\right)$

① を微分して　$y' = 2x - 2$

この点における接線の傾きは　$y' = 2{\cdot}\dfrac{3}{2} - 2 = 1$

したがって，この点における接線の方程式は

$y - \dfrac{17}{4} = 1\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$　よって　$\boldsymbol{y = x + \dfrac{11}{4}}$

(2) $C_3 : y = 2x^2 \cdots$①，$C_4 : y = -x^2 + b \cdots$② の共有点の x 座標は

$2x^2 = -x^2 + b$　これを解いて　$x = \pm\sqrt{\dfrac{b}{3}}$

① を微分して　$y' = 4x$，　② を微分して　$y' = -2x$

①，② の共有点における接線の傾きは，それぞれ

$$\pm 4\sqrt{\frac{b}{3}},\ \mp 2\sqrt{\frac{b}{3}} \quad (\text{複号同順})$$

であり，その接線が直交するので

$$\pm 4\sqrt{\frac{b}{3}} \times \left(\mp 2\sqrt{\frac{b}{3}}\right) = -1$$

ゆえに　$-\dfrac{8b}{3} = -1$

よって　$\boldsymbol{b = \dfrac{3}{8}}$

したがって，共有点の x 座標は　$x=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

このとき，C_3，C_4 で囲む面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\left\{\left(-x^2+\frac{3}{8}\right)-2x^2\right\}dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\left(-3x^2+\frac{3}{8}\right)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\left(-3x^2+\frac{3}{8}\right)dx \\ &= 2\left[-x^3+\frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{8}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ を変形すると　$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$

よって，**中心が (4，3)，半径 2 の円**である．

(2) 直線 $y=kx$ が円の中心 $(4,\ 3)$ を通るとき，円が直線から切り取る線分の長さが最大になるから

$$3=k\cdot 4 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=\frac{3}{4}}$$

このとき，円と直線の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x & \cdots① \\ (x-4)^2+(y-3)^2=2^2 & \cdots② \end{cases}$$

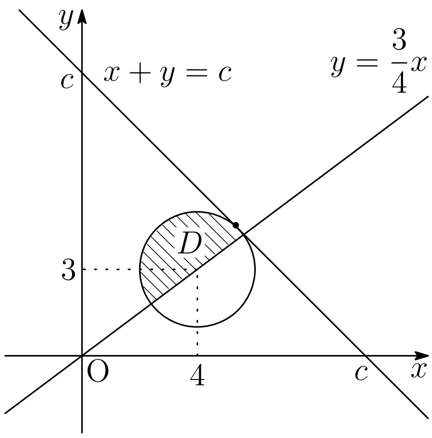
の解であるから，① を ② に代入して

$$\begin{aligned} (x-4)^2+\left(\frac{3}{4}x-3\right)^2 &= 2^2 \\ (x-4)^2+\left\{\frac{3}{4}(x-4)\right\}^2 &= 4 \\ \frac{25}{16}(x-4)^2 &= 4 \\ (x-4)^2 &= \frac{64}{25} \\ x &= 4\pm\frac{8}{5} \end{aligned}$$

よって　$x=\dfrac{28}{5},\ \dfrac{12}{5}$

これらを ① に代入することにより共有点の座標は　$\boldsymbol{\left(\frac{28}{5},\ \frac{21}{5}\right),\ \left(\frac{12}{5},\ \frac{9}{5}\right)}$

(3) D の表す領域は，右図のとおりである．
$\mathrm{P}(x,\ y)$ が D 上を動くとき，$x+y=c$ とおくと，これは傾きが -1，切片が c である直線を表す．
右図のように，この直線が円に接するとき c は最大となる．このとき，点 $(4,\ 3)$ から直線 $x+y-c=0$ までの距離が 2 であるから



$$\frac{|4+3-c|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2$$

ゆえに　　$c=7\pm2\sqrt{2}$

右図から　　$\boldsymbol{c=7+2\sqrt{2}}$

答

問	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答	1	4	6	2	5	1	8	5	7	5
問	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答	7	3	2	1	1	0	1	1	1	4
問	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
答	3	8	2	8	4	3	2	3	4	1
問	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
答	2	5	9	5	2	8	5	2	1	5
問	41	42	43							
答	7	2	2							