平成20年度　東海大学　一般入試A方式(受験日自由選択方式)
数学I・数学II・数学A・数学B(ベクトル・数列)70分
情報理工学部・情報通信学部・工学部・産業工学部・開発工学部
海洋学部・生物理工学部・農学部・健康科学部
平成20年2月10日

次の空欄を埋めなさい．
解答は，分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

1 (1) $\left(ax+\dfrac{1}{x}\right)^4$ の展開式において，x^2 の係数が $-\dfrac{1}{2}$ であるならば，$a=$ $\boxed{\text{ア}}$ で，定数項は $\boxed{\text{イ}}$ である．ただし，a は実数の定数である．

(2) 不等式 $x^3-5x^2+2x+8\geqq 0$ を解くと $\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) 三角形ABCにおいて $\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{CA}=4$ とする．

(i) $\cos B=$ $\boxed{\text{オ}}$ である．

(ii) 三角形ABCの面積は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(4) 座標平面上の2つのベクトルを $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ 1)$ とする．
$s\vec{a}+t\vec{b}=(5,\ 4)$ のとき，$s=$ $\boxed{\text{キ}}$，$t=$ $\boxed{\text{ク}}$ である．

(5) $\tan\theta=\dfrac{12}{5}$ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3\pi}{2}\right)$ であるとき，$\sin\theta=$ $\boxed{\text{ケ}}$ である．

(6) n を自然数とする．次の和を求め，因数分解した形で書くと，

$$2\cdot(2n-1)+4\cdot(2n-3)+6\cdot(2n-5)+\cdots+2n\cdot 1=\boxed{\text{コ}}$$

である．

2 a を実数とし，$f(x)=x^3+ax^2-(2a+3)x-(3a+2)$ とおく．

(1) a の値にかかわらず，$x=$ $\boxed{\text{ア}}$ は方程式 $f(x)=0$ の解の1つである．

(2) $f(x)$ の極小値について考える．

(i) $f'(x)=0$ の解は，$x=$ $\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ である．

(ii) $-3<a$ のとき，$y=f(x)$ が正の極小値をもつような a の範囲は，$\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) $f(x)=0$ が2重解をもつような a の値は3つあり，それらは $\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2 つの容器 A と B がある．容器 A には濃度 10%の食塩水が 400g 入っていて，容器 B には濃度 15%の食塩水が 400g 入っている．次の操作を考える．

> **操作:** 容器 A と容器 B からそれぞれ 100g の食塩水をとる．次に容器 A からとった食塩水 100g を容器 B に，容器 B からとった食塩水 100g を容器 A にそれぞれ入れ，濃度が均一になるようによくかきまぜる．

(1) 上記の操作を 1 回行ったとき，容器 A の食塩水の濃度は $\boxed{\text{ア}}$ %であり，容器 B の食塩水の濃度は $\boxed{\text{イ}}$ %である．
上記の操作を n 回行ったときの容器 A の食塩水の濃度を a_n% とする．したがって $a_1 = \boxed{\text{ア}}$ である．

(2) 上記の操作を n 回行ったとき，容器 B の食塩水の濃度を a_n を用いて表すと $\boxed{\text{ウ}}$ %である．

(3) a_{n+1} と a_n の間には $a_{n+1} = pa_n + q$ という関係が成り立つ．
ただし，$p = \boxed{\text{エ}}$，$q = \boxed{\text{オ}}$ である．

(4) (i) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(ii) 容器 A の食塩水の濃度がはじめて 12.25% より大きくなるのは，$\boxed{\text{キ}}$ 回操作を行ったときである．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\left(ax+\dfrac{1}{x}\right)^4$ の一般項は

$$ {}_4\mathrm{C}_r(ax)^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_4\mathrm{C}_r a^{4-r}x^{4-2r} $$

x^2 の係数が $-\dfrac{1}{2}$ であるから

$$ 4-2r=2,\ {}_4\mathrm{C}_r a^{4-r} = -\frac{1}{2} $$

第 1 式から，$r=1$．これを第 2 式に代入して

$$ {}_4\mathrm{C}_1 a^3 = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=-\frac{1}{2}} $$

$4-2r=0$ のとき　$r=2$

よって，定数項は　$ {}_4\mathrm{C}_2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{4-2} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

(2) $f(x)=x^3-5x^2+2x+8$ とすると

$$ f(-1)=(-1)^3-5\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)+8=0 $$

よって，$f(x)$ は $x+1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$ f(x)=(x+1)(x^2-6x+8) $$

$$ \begin{array}{r|rrrr} & x^2 & -6x & +8 & \\ \hline x+1 & x^3 & -5x^2 & +2x & +8 \\ & x^3 & +x^2 & & \\ \hline & & -6x^2 & +2x & \\ & & -6x^2 & -6x & \\ \hline & & & 8x & +8 \\ & & & 8x & +8 \\ \hline & & & & 0 \end{array} $$

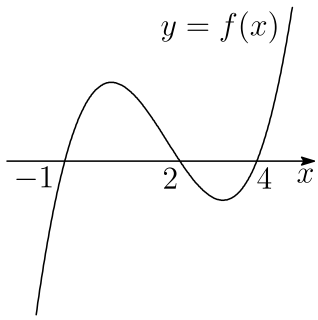
したがって

$$ f(x)=(x+1)(x-2)(x-4) $$

$y=f(x)$ のグラフは，x 軸と -1，2，4 で交わるので，右のグラフから

$$ x^3-5x^2+2x+8 \geqq 0 $$

の解は　$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 2,\ 4 \leqq x}$



(3) (i) 余弦定理により

$$\cos B = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}} = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2\cdot2\cdot3} = \boldsymbol{-\frac{1}{4}}$$

(ii) $\sin B > 0$ であるから

$$\sin B = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

よって　　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B = \dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{15}}{4}}$

(4) $s\vec{a} + t\vec{b} = s(1,\ 3) + t(-1,\ 1) = (s - t,\ 3s + t)$ であるから,
$s\vec{a} + t\vec{b} = (5,\ 4)$ より

$$(s - t,\ 3s + t) = (5,\ 4)$$

よって　　$s - t = 5,\ 3s + t = 4$

これを解いて　$\boldsymbol{s = \dfrac{9}{4},\ t = -\dfrac{11}{4}}$

(5) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{169}{25}\qquad \text{ゆえに}\quad \cos^2\theta = \frac{25}{169}$$

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ であるから　$\cos\theta < 0$

したがって　　$\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{25}{169}} = -\dfrac{5}{13}$

よって　　$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \dfrac{12}{5} \times \left(-\dfrac{5}{13}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{12}{13}}$

(6) $2\cdot(2n-1)+4\cdot(2n-3)+6\cdot(2n-5)+\cdots+2n\cdot1$

$$=\sum_{k=1}^{n}2k\{2n-(2k-1)\}$$
$$=2(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k-4\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=2(2n+1)\times\frac{1}{2}n(n+1)-4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=n(n+1)(2n+1)-\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)}$$

答 ア. $-\frac{1}{2}$　イ. $\frac{3}{2}$　ウ. エ. $-1\leqq x\leqq 2,\ 4\leqq x$　オ. $-\frac{1}{4}$　カ. $\frac{3\sqrt{15}}{4}$
キ. $\frac{9}{4}$　ク. $-\frac{11}{4}$　ケ. $-\frac{12}{13}$　コ. $\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$

2 (1) $f(x)$ を a について整理し，因数分解すると

$$\begin{aligned}f(x)&=a(x^2-2x-3)+(x^3-3x-2)\\&=a(x+1)(x-3)+(x+1)(x^2-x-2)\\&=a(x+1)(x-3)+(x+1)^2(x-2)\\&=(x+1)\{a(x-3)+(x+1)(x-2)\}\end{aligned}$$

a の値にかかわらず，$\boldsymbol{x=-1}$ は方程式 $f(x)=0$ の解の 1 つである．

(2) (i) $f(x)=x^3+ax^2-(2a+3)x-(3a+2)$ を微分して

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2+2ax-(2a+3)\\&=(x-1)(3x+2a+3)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=-\frac{2a+3}{3},\ 1}$

(ii) $-3<a$ のとき　$-\frac{2a+3}{3}<1$

したがって，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{2a+3}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

このとき，$f(1)>0$ であればよいから

$$1^3+a\cdot1^2-(2a+3)\cdot1-(3a+2)>0\quad ゆえに\quad a<-1$$

よって，$-3<a$ に注意して　$\boldsymbol{-3<a<-1}$

(3) (1) の結果から　$f(x)=(x+1)\{x^2+(a-1)x-(3a+2)\}$

$f(x)=0$ が 2 重解をもつとき，次の 2 つの場合に分けられる．

［1］2 次方程式 $x^2+(a-1)x-(3a+2)=0$ が重解でない解 -1 をもつとき，

$$(-1)^2+(a-1)\cdot(-1)-(3a+2)=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=0$$

実際，$a=0$ のとき，この方程式 $x^2-x-2=0$ は条件を満たす．

［2］2 次方程式 $x^2+(a-1)x-(3a+2)=0$ が -1 でない重解をもつとき，係数について

$$\begin{aligned}(a-1)^2-4\cdot1\cdot\{-(3a+2)\}&=0\\ a^2+10a+9&=0\\ (a+1)(a+9)&=0\\ a&=-1,-9\end{aligned}$$

実際，　$a=-1$ のとき，方程式は　$x^2-2x+1=0$ (重解 1)

$a=-9$ のとき，方程式は　$x^2-10x+25=0$ (重解 5)

ゆえに，これらは条件を満たす．

よって，求める a の値は　　$\boldsymbol{a=0,-1,-9}$

答 ア．-1　イ．ウ．$-\dfrac{2a+3}{3}$，1　エ．$-3<a<-1$　オ．カ．キ．$0,-1,-9$

$\boxed{\textbf{3}}$ (1) 容器 A の濃度は　$\dfrac{300\times0.1+100\times0.15}{300+100}\times100=\boldsymbol{11.25}$ (%)

容器 B の濃度は　$\dfrac{300\times0.15+100\times0.1}{300+100}\times100=\boldsymbol{13.75}$ (%)

(2) 容器 A と容器 B に入っている食塩の質量の和は

$$400\times0.1+400\times0.15=100 \text{ (g)}$$

容器 A の濃度が a_n のとき，容器 A に入っている食塩の質量は

$$400\times\frac{a_n}{100}=4a_n \text{ (g)}$$

このとき，容器 B に入っている食塩の質量は　$100-4a_n$ (g)

よって，容器 B の濃度は

$$\frac{100-4a_n}{400}\times100=\boldsymbol{25-a_n} \text{ (\%)}$$

(3) (2) の結果から

$$a_{n+1} = \frac{300 \times \dfrac{a_n}{100} + 100 \times \dfrac{25 - a_n}{100}}{400} \times 100 = \boldsymbol{\frac{1}{2}a_n + \frac{25}{4}}$$

(4) (i) (3) の結果から

$$a_{n+1} - \frac{25}{2} = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{25}{2}\right), \qquad a_1 - \frac{25}{2} = -\frac{5}{4}$$

したがって　$a_n - \dfrac{25}{2} = -\dfrac{5}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　ゆえに　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{25}{2} - \dfrac{5}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(ii) (i) の結果を利用して

$$\frac{25}{2} - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 12.25$$

ゆえに　$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{5}$$

よって，**4** 回操作を行ったときである．

答 ア．11.25　イ．13.75　ウ．$25 - a_n$　エ．$\dfrac{1}{2}$　オ．$\dfrac{25}{4}$

カ．$\dfrac{25}{2} - \dfrac{5}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　キ．4