平成20年度　東海大学　一般入試A方式(受験日自由選択方式)
数学I・数学II・数学A・数学B(ベクトル・数列)70分
情報理工学部・情報通信学部・工学部・産業工学部・開発工学部
海洋学部・生物理工学部・農学部・健康科学部
平成20年2月9日

次の空欄を埋めなさい．
解答は，分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 多項式 $f(x)$ を $x-3$ で割ると余りは7，$x-4$ で割ると余りは3である．このとき，$f(x)$ を $(x-3)(x-4)$ で割ると余りは $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $5^x = 7^y = 10$ のとき，$10^{\frac{x+y}{xy}} = \boxed{\text{イ}}$ である．

(3) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ を解くと，$x = \boxed{\text{ウ}}$ である．ただし，$0 < x < \pi$ とする．

(4) (i) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = S_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

が成り立つとき，a_n を n を用いて表すと，$a_n = \boxed{\text{エ}}$ である．

(ii) 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とする．

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = 2T_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

が成り立つとき，b_n を n を用いて表すと，$b_n = \boxed{\text{オ}}$ である．

(5) 関数 $f(x)$ が，$f(x) = x^2 + 2x + 4\int_0^1 f(t)\,dt$ を満たすとき，$f(x) = \boxed{\text{カ}}$ である．

2 (1) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=5$ のとき $\alpha^2-2\alpha-\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}=\boxed{\text{ア}}$ である．

したがって，$x=\alpha$ は方程式 $x^4-2x^3-\boxed{\text{ア}}x^2-2x+1=0$ の解である．

逆に，方程式 $x^4-2x^3-\boxed{\text{ア}}x^2-2x+1=0$ の解の 1 つを $x=\alpha$ とすると $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=5$ または $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\boxed{\text{イ}}$ であり，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=5$ のとき $\alpha=\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ である．

(2) 4 次方程式

$$x^4-2x^3+bx^2-2x+1=0 \quad \cdots ①$$

の実数解の個数を調べたい．

$X=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと，方程式 ① から X についての方程式

$$X^2-\boxed{\text{オ}}X+\boxed{\text{カ}}=0 \quad \cdots ②$$

が得られる．

(i) 方程式 ② が実数解をもつような b の範囲は $\boxed{\text{キ}}$ である．

(ii) 方程式 ① が実数解をもつような b の範囲は $\boxed{\text{ク}}$ である．

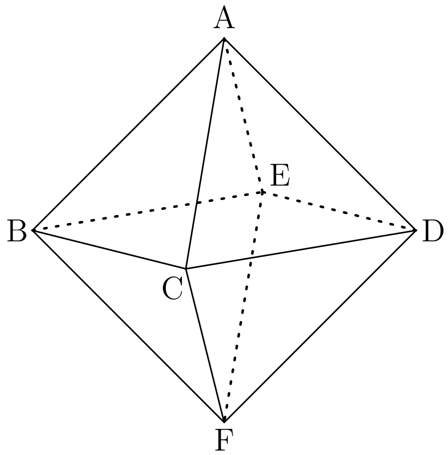
$b=\boxed{\text{ケ}}$ のとき，方程式 ① はちょうど 3 つの実数解をもち，それらは小さい順に $\boxed{\text{コ}}$, $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 右の図のような一辺の長さが 2 の正八面体 ABCDEF がある．

(1) $\mathrm{BD} = \boxed{\text{ア}}$ である．$\angle\mathrm{ACF}$ を θ_1 とおくと，$\sin\theta_1 = \boxed{\text{イ}}$ である．

(2) 辺 BC と辺 DE の中点をそれぞれ M，N とし，$\angle\mathrm{AMN}$ を θ_2 とおくと，$\cos\theta_2 = \boxed{\text{ウ}}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MF}}$ の内積は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) この正八面体 ABCDEF に内接する球の半径は $\boxed{\text{オ}}$ であり，その球の体積は $\boxed{\text{カ}}$ である．



解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)$ を 2 次式 $(x-3)(x-4)$ で割った余りを $ax+b$ とし，商を $Q(x)$ とすると，次の式が成り立つ．

$$f(x)=(x-3)(x-4)Q(x)+ax+b$$

この等式より　$f(3)=3a+b$，$f(4)=4a+b$

また，$x-3$ で割った余りが 7 であるから　$f(3)=7$

$x-4$ で割った余りが 3 であるから　$f(4)=3$

よって　$3a+b=7$，$4a+b=3$

これを解くと　$a=-4$，$b=19$

したがって，求める余りは　$\boldsymbol{-4x+19}$

(2) $10^{\frac{x+y}{xy}}=10^{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}=10^{\frac{1}{y}}\times 10^{\frac{1}{x}}$

$5^x=7^y=10$ から　$10^{\frac{1}{y}}=7$，$10^{\frac{1}{x}}=5$

したがって　$10^{\frac{x+y}{xy}}=10^{\frac{1}{y}}\times 10^{\frac{1}{x}}=7\times 5=\mathbf{35}$

(3) 左辺を変形すると　$2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$

よって　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\cdots$①

$0<x<\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{3}<x+\frac{\pi}{3}<\frac{4}{3}\pi$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x=\frac{5}{12}\pi}$$

(4) (i)

$$a_1=1$$

$$a_{n+1}=S_n+1 \quad \cdots①$$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_{n-1}+1$　$\cdots$②

$$a_2=S_1+1=a_1+1=1+1=2 \quad \cdots③$$

① $-$ ② から　$a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}$

ここで，$S_n-S_{n-1}=a_n$ であるから

$$a_{n+1}-a_n=a_n \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1}=2a_n \quad \cdots④$$

③，④ から　$a_n=2\cdot 2^{n-2}=2^{n-1}$

初項は $a_1=1$ なので，上の a_n は $n=1$ のときも成り立つ．

したがって，一般項は　$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}}$

(ii) $$b_1 = 1$$

$$b_{n+1} = 2T_n + 1 \quad \cdots ①$$

$n \geqq 2$ のとき $$b_n = 2T_{n-1} + 1 \quad \cdots ②$$

$$b_2 = 2T_1 + 1 = 2b_1 + 1 = 2\cdot 1 + 1 = 3 \quad \cdots ③$$

① − ② から $\quad b_{n+1} - b_n = 2(T_n - T_{n-1})$

ここで，$T_n - T_{n-1} = b_n$ であるから

$$b_{n+1} - b_n = 2b_n \quad \text{すなわち} \quad b_{n+1} = 3b_n \quad \cdots ④$$

③，④ から $\quad b_n = 3\cdot 3^{n-2} = 3^{n-1}$

初項は $b_1 = 1$ なので，上の b_n は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって，一般項は $\quad \boldsymbol{b_n = 3^{n-1}}$

(5) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数であるから，$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = k$ とおくと

$$f(x) = x^2 + 2x + 4k$$

よって $$k = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 (t^2 + 2t + 4k)\,dt = \left[\,\frac{t^3}{3} + t^2 + 4kt\,\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} + 4k$$

すなわち $\quad k = \dfrac{4}{3} + 4k \quad$ これを解いて $\quad k = -\dfrac{4}{9}$

したがって $\quad \boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x - \dfrac{16}{9}}$

答 ア．$-4x + 19$　イ．35　ウ．$\dfrac{5}{12}\pi$　エ．2^{n-1}　オ．3^{n-1}　カ．$x^2 + 2x - \dfrac{16}{9}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-2=5^2-2=23$ より

$$\alpha^2-2\alpha-\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}-2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$=23-2\cdot 5=\mathbf{13}$$

ゆえに　　$\alpha^4-2\alpha^3-13\alpha^2-2\alpha+1=0$

したがって，$x=\alpha$ は方程式 $x^4-2x^3-\mathbf{13}x^2-2x+1=0$ の解である．

逆に，方程式 $x^4-2x^3-\mathbf{13}x^2-2x+1=0$ の解の 1 つを α とすると，$\alpha\neq 0$ であるから

$$\alpha^2-2\alpha-13-\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=0$$

ゆえに　$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-2\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)-15=0$

したがって　$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}-5\right)\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}+3\right)=0$

よって　$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=5$　または　$\boldsymbol{\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=-3}$

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=5$ のとき，$\alpha^2-5\alpha+1=0$ を解いて　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}}$

(2) (i) $x^4-2x^3+bx^2-2x+1=0$　$\cdots$①

$x=0$ は ① の解でないから

$$x^2-2x+b-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+b-2=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=X$ とおくと　$X^2-\mathbf{2}X+\boldsymbol{b}-\mathbf{2}=0$　$\cdots$②

② が実数解をもつとき，$D\geqq 0$ であるから

$$D/4=(-1)^2-1\cdot(b-2)\geqq 0\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{b\leqq 3}$$

(ii) x の方程式 $x+\dfrac{1}{x}=X$　すなわち　$x^2-Xx+1=0$

この方程式の係数について

$$D=(-X)^2-4\cdot 1\cdot 1=(X+2)(X-2)\quad\cdots③$$

方程式が実数解をもつとき，$D\geqq 0$ より　$X\leqq -2,\ 2\leqq X$　$\cdots$④

$f(X)=X^2-2X+b-2$ とおくと

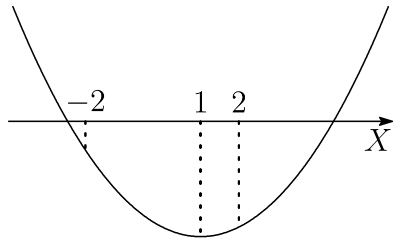
$$f(X)=(X-1)^2+b-3$$

$f(X)=0$ の解が ④ を満たすとき

$$f(-2) \leqq 0$$

ゆえに　$(-2)^2-2\cdot(-2)+b-2 \leqq 0$

よって　$\boldsymbol{b \leqq -6}$

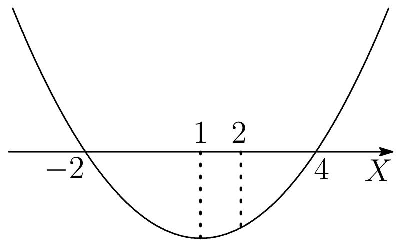


③ から $x+\dfrac{1}{x}=\pm 2$ のとき，この方程式は重解をもつ．右のグラフより，方程式 ① が3つの実数解をもつための条件は，④ に注意して

$$f(-2)=0$$

ゆえに　$(-2)^2-2\cdot(-2)+b-2=0$

よって　$\boldsymbol{b=-6}$



右の図から，このとき方程式 ① の解は

$x+\dfrac{1}{x}=-2$　すなわち　$x^2+2x+1=0$ を解いて　$\boldsymbol{x=-1}$

$x+\dfrac{1}{x}=4$　すなわち　$x^2-4x+1=0$ を解いて　$\boldsymbol{x=2\pm\sqrt{3}}$

答 ア．13　イ．-3　ウ．エ．$\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$　オ．2　カ．$b-2$　キ．$b \leqq 3$
ク．$b \leqq -6$　ケ．-6　コ．-1　サ．$2-\sqrt{3}$　シ．$2+\sqrt{3}$

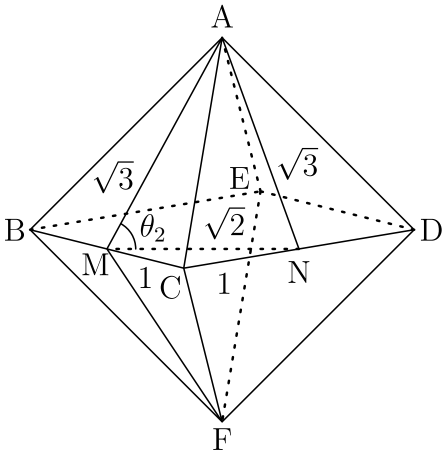
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) BD は正方形 BCDE の対角線であるから　$\mathrm{BD}=\sqrt{2^2+2^2}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

EA $=$ AC $=2$，CE $=2\sqrt{2}$ であるから

$$\mathrm{CE}^2=\mathrm{EA}^2+\mathrm{AC}^2 \quad \text{ゆえに} \quad \angle\mathrm{EAC}=90^\circ$$

EA $=$ AC $=$ CF $=$ FE，$\angle$EAC $=90^\circ$ であるから，四角形 EACF は正方形である．よって，$\sin\theta_1=\sin\angle\mathrm{ACF}=\sin 90^\circ=\mathbf{1}$

(2) $\mathrm{MN}=\sqrt{\mathrm{CM}^2+\mathrm{CN}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
$\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{CA}^2-\mathrm{CM}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$
$\mathrm{NA}=\sqrt{\mathrm{CA}^2-\mathrm{CN}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$
$\triangle\mathrm{AMN}$ に余弦定理を適用して



$$\begin{aligned}\cos\theta_2&=\frac{\mathrm{AM}^2+\mathrm{MN}^2-\mathrm{NA}^2}{2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{MN}}\\&=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 1}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}\end{aligned}$$

ゆえに　$\cos\angle\mathrm{AMF}=\cos 2\theta_2=2\cos^2\theta_2-1=2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-1=-\frac{1}{3}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MF}}=|\overrightarrow{\mathrm{MA}}||\overrightarrow{\mathrm{MF}}|\cos\angle\mathrm{AMF}=\sqrt{3}\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{-1}$

(3) AF は正方形 EACF の対角線であるから　$\mathrm{AF}=2\sqrt{2}$
正八面体 ABCDEF の体積を V，表面積を S，および内接する球の半径を r とする．

$$V=\frac{1}{3}\times(\text{四角形 BCDE})\times\mathrm{AF}=\frac{1}{3}\times 2^2\times 2\sqrt{2}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$
$$S=8\times\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin 60^\circ=8\sqrt{3}$$

これらを $V=\frac{1}{3}Sr$ に代入して

$$\frac{8}{3}\sqrt{2}=\frac{1}{3}\cdot 8\sqrt{3}r\quad\text{ゆえに}\quad r=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

よって，内接する球の体積は　$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{6}}{27}\pi}$

答 ア．$2\sqrt{2}$　イ．1　ウ．$\frac{1}{\sqrt{3}}$　エ．-1　オ．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　カ．$\frac{8\sqrt{6}}{27}\pi$