平成 20 年度　東海大学　一般入試 A 方式 (受験日自由選択方式)
数学 I・数学 II・数学 A(70 分)　平成 20 年 2 月 9 日
政治経済学部・総合経営学部・法学部・教養学部・国際文化学部 芸術工学部・開発工学部・海洋学部・健康科学部

次の空欄を埋めなさい．
解答は，分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

1 (1) $y = 4 - \sin^2 x - 4\cos x \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の最大値は $\boxed{\text{ア}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) 次の式を展開すると，
$(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x-\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ の分母を有理化して整理すると $a = \boxed{\text{エ}}$ である．この a を用いて $(a-6)(a-3)$ を計算すると $\boxed{\text{オ}}$ となる．また，$a^2 - 6a = \boxed{\text{カ}}$ となる．

(4) $(x-2)(x^2-x+2)+x^2-2x+3$ を実数の範囲で因数分解すると $\boxed{\text{キ}}$ となる．

2 大小 2 個のサイコロを投げ，出た目の数をそれぞれ x，y とし，分数 $\dfrac{y}{x}$ を作る．

(1) $\dfrac{y}{x} = 2$，$\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{5}$ となる確率はそれぞれ $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) $\dfrac{y}{x} = 1$ となる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，$\dfrac{y}{x} < 1$ となる確率は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) $\dfrac{y}{x}$ が整数になる確率は $\boxed{\text{オ}}$ であり，$\dfrac{y}{x}$ が 1 以上の分数であって整数にならない確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(4) $\dfrac{y}{x}$ の値のとり方は全部で $\boxed{\text{キ}}$ 通りある．

3 (1) 鋭角三角形 ABC において，$\mathrm{AC} = 6$，$\mathrm{BC} = 5$ とし，その面積を $6\sqrt{6}$ とする．このとき，$\sin C = \boxed{\text{ア}}$ であり，$\cos C = \boxed{\text{イ}}$ である．また，辺 AB の長さは $\boxed{\text{ウ}}$ であり，外接円の半径は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(2) 長さが 20 の線分 AB 上に点 P をとり，AP を 1 辺とする正三角形と BP を 1 辺とする正三角形を作る．これら 2 つの正三角形の面積の和が最小となるのは $\mathrm{AP} = \boxed{\text{オ}}$ のときであり，そのときの面積の和は $\boxed{\text{カ}}$ である．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $4-\sin^2 x-4\cos x=\cos^2 x-4\cos x+3$ であるから
$\cos x=t$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より

$$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1 \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

この関数のグラフは，下に凸の放物線で，軸は $t=2$ である．
$t=-1$ のとき**最大値 8** をとり，$t=1$ のとき**最小値 0** をとる．

(2)
$$\begin{aligned}
&\quad (x+\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})\\
&=\{(x+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2\}\{(x-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2\}\\
&=(x^2+2\sqrt{2}x-1)(x^2-2\sqrt{2}x-1)\\
&=\{(x^2-1)+2\sqrt{2}x\}\{(x^2-1)-2\sqrt{2}x\}\\
&=(x^2-1)^2-(2\sqrt{2}x)^2\\
&=x^4-2x^2+1-8x^2\\
&=\boldsymbol{x^4-10x^2+1}
\end{aligned}$$

(3) $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\boldsymbol{6+2\sqrt{6}}$

$$\begin{aligned}
(a-6)(a-3)&=\{(6+2\sqrt{6})-6\}\{(6+2\sqrt{6})-3\}\\
&=2\sqrt{6}(3+2\sqrt{6})\\
&=\boldsymbol{6\sqrt{6}+24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^2-6a&=a(a-6)\\
&=(6+2\sqrt{6})\{(6+2\sqrt{6})-6\}\\
&=(6+2\sqrt{6})\cdot 2\sqrt{6}\\
&=\boldsymbol{12\sqrt{6}+24}
\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}
&\quad (x-2)(x^2-x+2)+x^2-2x+3\\
&=x^3-2x^2+2x-1\\
&=x^3-1-2x(x-1)\\
&=(x-1)(x^2+x+1)-2x(x-1)\\
&=(x-1)\{(x^2+x+1)-2x\}\\
&=\boldsymbol{(x-1)(x^2-x+1)}
\end{aligned}$$

答 ア．8　イ．0　ウ．x^4-10x^2+1　エ．$6+2\sqrt{6}$　オ．$6\sqrt{6}+24$
カ．$12\sqrt{6}+24$　キ．$(x-1)(x^2-x+1)$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 大小 2 個のサイコロの目の出方は　6×6 の 36 通り

(1) $\dfrac{y}{x} = 2$ となるのは　$(x,\ y) = (1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (3,\ 6)$ の 3 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{36} = \mathbf{\dfrac{1}{12}}$

$\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{5}$ となるのは　$(x,\ y) = (5,\ 1)$ の 1 通り

よって，求める確率は　$\mathbf{\dfrac{1}{36}}$

(2) $\dfrac{y}{x} = 1$ となるのは

$(x,\ y) = (1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$ の 6 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{36} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

$\dfrac{y}{x} < 1$ となるのは

$x = 2$ のとき　$y = 1$
$x = 3$ のとき　$y = 1,\ 2$
$x = 4$ のとき　$y = 1,\ 2,\ 3$
$x = 5$ のとき　$y = 1,\ 2,\ 3,\ 4$
$x = 6$ のとき　$y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

の $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ の 15 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{15}{36} = \mathbf{\dfrac{5}{12}}$

(3) $\dfrac{y}{x}$ が整数となるのは

$x = 1$ のとき　$y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$x = 2$ のとき　$y = 2,\ 4,\ 6$
$x = 3$ のとき　$y = 3,\ 6$
$x = 4$ のとき　$y = 4$
$x = 5$ のとき　$y = 5$
$x = 6$ のとき　$y = 6$

の $6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1$ の 14 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{14}{36} = \mathbf{\dfrac{7}{18}}$

$\dfrac{y}{x}$ が 1 以上の分数であって整数にならないのは

$x=2$ のとき　$y=3,\ 5$

$x=3$ のとき　$y=4,\ 5$

$x=4$ のとき　$y=5,\ 6$

$x=5$ のとき　$y=6$

の $2+2+2+1$ の 7 通り

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{7}{36}}$

(4) $\dfrac{y}{x}<1$ となる値の取り方を調べると

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6},\ \frac{1}{3}=\frac{2}{6},\ \frac{2}{3}=\frac{4}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6}$$

の 11 通りある．同様に $\dfrac{y}{x}>1$ となる値も 11 通りある．これらの値の取り方と $\dfrac{y}{x}=1$ となる値の取り方を含めて，$11+11+1$ の **23 通り**.

答 ア. $\dfrac{1}{12}$　イ. $\dfrac{1}{36}$　ウ. $\dfrac{1}{6}$　エ. $\dfrac{5}{12}$　オ. $\dfrac{7}{18}$　カ. $\dfrac{7}{36}$　キ. 23

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathrm{AC}=6$，$\mathrm{BC}=5$，$S=6\sqrt{6}$ を $S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}\sin C$ に代入すると

$$6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\sin C\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{\sin C=\frac{2\sqrt{6}}{5}}$$

$\sin^2 C+\cos^2 C=1$ から

$$\cos^2 C=1-\sin^2 C=1-\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$$

C は鋭角より，$\cos C>0$ であるから　$\cos C=\sqrt{\dfrac{1}{25}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\cos C\\ &= 5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cdot\frac{1}{5}\\ &= 49\end{aligned}$$

$\mathrm{AB}>0$ であるから　$\mathbf{AB=7}$

外接円の半径を R とすると，正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}=2R$

したがって　$R=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}=\dfrac{1}{2}\times 7\div\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=\dfrac{35}{4\sqrt{6}}=\boldsymbol{\dfrac{35\sqrt{6}}{24}}$

(2) $\mathrm{AP}=x$ とすると，$\mathrm{BP}=20-x$

AP，BP を 1 辺とする 2 つの正三角形の面積の和を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}x^2\sin60^\circ+\frac{1}{2}(20-x)^2\sin60^\circ\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\{x^2+(20-x)^2\}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2-20x+200)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x-10)^2+50\sqrt{3}\end{aligned}$$

したがって，$x=\mathrm{AP}=\mathbf{10}$ のとき，S は**最小値** $\mathbf{50\sqrt{3}}$ をとる．

答　ア．$\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$　イ．$\dfrac{1}{5}$　ウ．7　エ．$\dfrac{35\sqrt{6}}{24}$　オ．10　カ．$50\sqrt{3}$