

平成 18 年度 熊本総合医療福祉学院 一般後期入学試験問題  
 数学 I・数学 A(平成 18 年 2 月 18 日)60 分

第 1 問 (1) 次の〔問 1〕～〔問 3〕に適するものを ①～⑩ から選べ。

$$A = \frac{1}{3 + \sqrt{3}}, B = \frac{1}{3 - \sqrt{3}} \text{ のとき, } A + B = \text{〔問 1〕}, A \times B = \text{〔問 2〕},$$

$$A^3 + B^3 = \text{〔問 3〕} \text{ である。}$$

① $\frac{1}{6}$	② $\frac{2}{9}$	③ $\frac{\sqrt{3}}{6}$	④ $\frac{1}{3}$	⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
⑥ $\frac{1}{2}$	⑦ $\frac{2 + 2\sqrt{3}}{9}$	⑧ $\frac{2}{3}$	⑨ $\frac{5}{6}$	⑩ 1

(2) 次の〔問 4〕～〔問 6〕に適するものを ①～⑩ から選べ。

自然数  $n, r$  に対して,  ${}_nC_r$  および  ${}_nP_r$  は異なる  $n$  個のものから異なる  $r$  個のものを取り出す順列の総数および組合せの総数を表すとする。

$${}_nC_2 = 15 \text{ のとき } n = \text{〔問 4〕}, {}_7C_r = {}_7C_{r-1} \text{ のとき } n = \text{〔問 5〕},$$

$${}_nP_3 = 3 \times {}nP_2 \text{ のとき } n = \text{〔問 6〕} \text{ である。}$$

① 2	② 3	③ 4	④ 5	⑤ 6
⑥ 8	⑦ 9	⑧ 10	⑨ 11	⑩ 12

第 2 問 1000 より大きくて 2000 以下の整数を 1 つ選ぶとき, 次の〔問 7〕～〔問 10〕に適するものを ①～⑩ から選べ。

〔問 7〕 4 の倍数を選ぶ確率を求めよ。

〔問 8〕 6 の倍数を選ぶ確率を求めよ。

〔問 9〕 4 の倍数かつ 6 の倍数であるものを選ぶ確率を求めよ。。

〔問 10〕 4 の倍数または 6 の倍数を選ぶ確率を求めよ。

① $\frac{167}{1000}$	② $\frac{417}{1000}$	③ $\frac{1}{2}$	④ $\frac{333}{2000}$	⑤ $\frac{83}{1000}$
⑥ $\frac{167}{500}$	⑦ $\frac{9}{125}$	⑧ $\frac{83}{2000}$	⑨ $\frac{1}{4}$	⑩ $\frac{167}{200}$

第3問 次の〔問11〕,〔問12〕に適するものを〔1〕～〔0〕から選べ。

方程式  $x^2 - 5 = x + \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$  の解を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha > \beta$ ) とすると,

$\alpha =$ 〔問11〕,  $\beta =$ 〔問12〕である。

〔1〕 $-3$	〔2〕 $\frac{1 - \sqrt{21}}{2}$	〔3〕 $-1$	〔4〕 $-\frac{1}{2}$	〔5〕 $\frac{1}{2}$
〔6〕 $1$	〔7〕 $\frac{1 + \sqrt{21}}{\sqrt{2}}$	〔8〕 $2$	〔9〕 $3$	〔0〕 $4$

第4問  $k$  を正の定数とし,  $\triangle ABC$  の辺  $AB, AC$  の長さを  $x, y$  とする。

次の〔問13〕～〔問15〕に適するものを〔1〕～〔0〕から選べ。

- (1)  $x + y = k$  のとき,  $\triangle ABC$  の面積の最大値が  $\frac{\sqrt{3}k^2}{16}$  となるような  $\angle A$  の値を求めると  $\angle A =$ 〔問13〕 $^\circ$  である。ただし,  $0^\circ < \angle A \leq 90^\circ$  とする。
- (2)  $\angle A$  が(1)で求めた値のとき,  $\angle A$  の2等分線と辺  $BC$  の交点を  $D$  とし, 線分  $AD$  の長さを  $k$  で表すと  $AD =$ 〔問14〕 $k$  である。
- (3)  $\triangle ABC$  に外接する円の半径  $R$  を  $k$  で表すと,  $R =$ 〔問15〕 $k$  である。

〔1〕 $30$	〔2〕 $45$	〔3〕 $60$	〔4〕 $75$	〔5〕 $90$
〔6〕 $\frac{\sqrt{3}}{4}$	〔7〕 $\frac{\sqrt{3}}{8}$	〔8〕 $\frac{\sqrt{3}}{6}$	〔9〕 $\frac{\sqrt{3}}{2}$	〔0〕 $\sqrt{3}$

## 解答例

第1問 (1)  $A + B = \frac{1}{3 + \sqrt{3}} + \frac{1}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{6}{9 - 3} = 1$

$$A \times B = \frac{1}{3 + \sqrt{3}} \times \frac{1}{3 - \sqrt{3}} = \frac{1 \times 1}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{1}{9 - 3} = \frac{1}{6}$$

上の2式から  $A^3 + B^3 = (A + B)^3 - 3AB(A + B)$

$$= 1^3 - 3 \times \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{2}$$

(2)  ${}_n C_2 = 15$

左辺を変形して  $\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} = 15$

整理して  $n^2 - n - 30 = 0$

すなわち  $(n+5)(n-6) = 0$

$n \geq 2$  であるから  $n = 6$

${}_7 C_r = {}_7 C_{r-1}$  を満たすとき

$$r = r - 1 \quad \text{または} \quad r + (r - 1) = 7$$

$r \neq r - 1$  であるから  $r + (r - 1) = 7$  を解いて  $r = 4$

$${}_n P_3 = 3 \times {}_n P_2$$

$$n(n-1)(n-2) = 3 \times n(n-1)$$

$$n^3 - 3n^2 + 2n = 3n^2 - 3n$$

整理して  $n^3 - 6n^2 + 5n = 0$

したがって  $n(n-1)(n-5) = 0$

$n \geq 3$  であるから  $n = 5$

	問1	問2	問3	問4	問5	問6
正解	0	1	6	5	3	4
配点	6点	7点	7点	7点	6点	7点

第2問 4の倍数は

$$4 \cdot 251, 4 \cdot 252, 4 \cdot 253, \dots, 4 \cdot 500$$

の250個であるから  $(500 - 251 + 1 = 250)$  , 4の倍数を選ぶ確率は

$$\frac{250}{1000} = \frac{1}{4} \quad \dots \quad \boxed{\text{問7}}$$

6の倍数は

$$6 \cdot 167, 6 \cdot 168, 6 \cdot 169, \dots, 6 \cdot 333$$

の167個であるから  $(333 - 167 + 1 = 167)$  , 6の倍数を選ぶ確率は

$$\frac{167}{1000} \quad \dots \quad \boxed{\text{問8}}$$

4の倍数かつ6の倍数は

$$12 \cdot 84, 12 \cdot 85, 12 \cdot 86, \dots, 12 \cdot 166$$

の83個であるから  $(166 - 84 + 1 = 83)$  , 4の倍数かつ6の倍数を選ぶ確率は

$$\frac{83}{1000} \quad \dots \quad \boxed{\text{問9}}$$

したがって、4の倍数または6の倍数を選ぶ確率は

$$\frac{250}{1000} + \frac{167}{1000} - \frac{83}{1000} = \frac{334}{1000} = \frac{167}{500} \quad \dots \quad \boxed{\text{問10}}$$

	問7	問8	問9	問10
正解	$\widehat{9}$	$\widehat{1}$	$\widehat{5}$	$\widehat{6}$
配点	6点	7点	6点	7点

和事象の確率

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

第3問  $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(2x - 1)^2} = |2x - 1|$  であるから，方程式

$$x^2 - 5 = x + |2x - 1|$$

を解けばよい．

$$\underline{x \geq \frac{1}{2} \text{ のとき}} \quad |2x - 1| = 2x - 1 \text{ であるから}$$

$$x^2 - 5 = x + (2x - 1)$$

$$\text{整理して} \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (x + 1)(x - 4) = 0$$

$$\underline{x \geq \frac{1}{2} \text{ に注意して}} \quad x = 4$$

$$\underline{x < \frac{1}{2} \text{ のとき}} \quad |2x - 1| = -(2x - 1) = -2x + 1 \text{ であるから}$$

$$x^2 - 5 = x + (-2x + 1)$$

$$\text{整理して} \quad x^2 + x - 6 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (x - 2)(x + 3) = 0$$

$$\underline{x < \frac{1}{2} \text{ に注意して}} \quad x = -3$$

したがって，求める解  $\alpha, \beta$  は ( $\alpha > \beta$ )，

$$\alpha = 4, \beta = -3$$

	問 11	問 12
正解	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
配点	6点	7点

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

第4問 (1)  $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると  $S = \frac{1}{2}xy \sin A \dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} y = k - x \text{ であるから } \quad xy &= x(k - x) \\ &= -(x^2 - kx) \\ &= -\left\{ \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 \right\} \\ &= -\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{4} \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  より  $S$  は  $x = y = \frac{k}{2}$  のとき最大値  $\frac{k^2}{8} \sin A$  をとる.

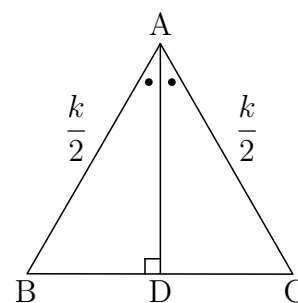
$$\text{したがって, } \frac{k^2}{8} \sin A = \frac{\sqrt{3}k^2}{16} \text{ より } \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ < \angle A \leq 90^\circ$  であるから  $\angle A = 60^\circ$

(2) (1) の結果から,  $AB = AC$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$  であるから,  $\triangle ABC$  は正三角形である.

$\angle A$  の2等分線  $AD$  は, 辺  $BC$  に下ろした垂線である. 右の図から

$$AD = AB \cos 30^\circ = \frac{k}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}k$$



(3) 正弦定理により

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2R$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \times \frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{2} \times \frac{k}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{k}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{k}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}k \end{aligned}$$

	問 13	問 14	問 15
正解	$\widehat{3}$	$\widehat{6}$	$\widehat{8}$
配点	7点	7点	7点