平成21年度　崇城大学　薬学部　一般入学試験問題(前期日程)2日目 数学I・数学II・数学A・数学B(平成21年1月31日)80分

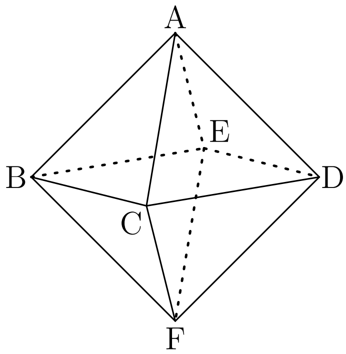
1 次の各問に答えよ。

(1) $-3 \leqq x \leqq 3$ を満たすすべての x に対して，不等式 $x^2 - 2kx + 4k + 5 > 0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) 正八面体ABCDEFがある。

(a) 12個ある辺から3辺を選ぶとき，どの2辺も交わらず，平行でもないような選び方は何通りあるか。

(b) 6つの頂点から3点を選ぶとき，その3点が正8面体の1つの面上にない確率を求めよ。



2 数列 $\{a_n\}$ を 1，2，5，10，17，26，$\cdots$ とする。次の各問に答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $500 < a_n < 1500$ を満たす a_n の総和を求めよ。

3 関数 $f(x) = |\,x^2 - x\,| + |\,x\,|$ に対して，関数 $g(x)$ を $g(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt$ で定める。次の各問に答えよ。

(1) 曲線 $y = f(x)$ を描け。

(2) 関数 $g(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=x^2-2kx+4k+5$ とすると，$-3 \leqq x \leqq 3$ における最小値が 0 より大きくなるような k の値の範囲を求めればよい．$f(x)=(x-k)^2-k^2+4k+5$ であるから，次の 3 つの場合に分けて最小値を求める．

［1］$3<k$ のとき

最小値は　$f(3)=3^2-2k{\cdot}3+4k+5=-2k+14$

k の範囲に注意して，$-2k+14>0$ を解くと　$3<k<7$

［2］$-3 \leqq k \leqq 3$ のとき

最小値は　$f(k)=-k^2+4k+5$

ゆえに　$-k^2+4k+5>0$　すなわち　$(k+1)(k-5)<0$

k の範囲に注意してこれを解くと　$-1<k \leqq 3$

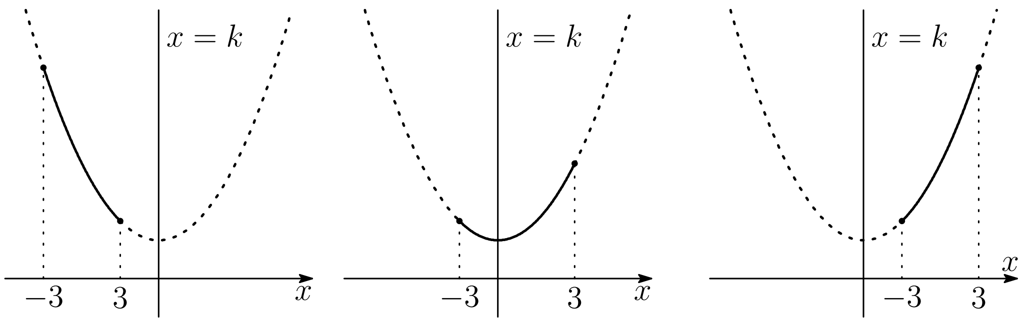
［3］$k<-3$ のとき

最小値は　$f(-3)=(-3)^2-2k(-3)+4k+5=10k+14$

このとき，$10k+14>0$ を満たす k はない．

よって，求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{-1<k<7}$

［1］$3<k$ のとき　　［2］$-3 \leqq k \leqq 3$ のとき　　［3］$k<-3$ のとき



(2) (a) 求める場合の数は，

{AB,CD,EF}, {AB,DE,CF}, {AC,BE,DF}, {AC,DE,BF},
{AD,BC,EF}, {AD,BE,CF}, {AE,BC,DF}, {AE,CD,BF}

の **8 通り**．

(b) 6 つの頂点から 3 点を選ぶ方法は　${}_6\mathrm{C}_3=\dfrac{6{\cdot}5{\cdot}4}{3{\cdot}2{\cdot}1}=20$ (通り)

3 点が正八面体の 1 つの面上にある確率は　$\dfrac{8}{20}=\dfrac{2}{5}$

よって，求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1-\frac{2}{5}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) この数列の階差数列は　$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$

その一般項を b_n とすると，$b_n = 2n-1$ である．

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) = 1 + (n-1)^2$$

初項は $a_1 = 1$ なので，上の a_n は $n=1$ のときにも成り立つ．

したがって，一般項 a_n は　$\boldsymbol{a_n = 1 + (n-1)^2}$

(2) (1) の結果から

$$a_{23} = 1 + (23-1)^2 = 485,\ \ a_{24} = 1 + (24-1)^2 = 530,$$
$$a_{39} = 1 + (39-1)^2 = 1445,\ \ a_{40} = 1 + (40-1)^2 = 1522$$

ゆえに，求める a_n の総和は

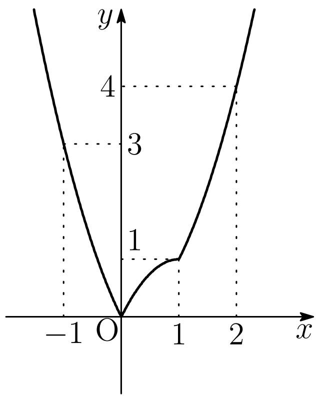
$$\begin{aligned}
\sum_{k=24}^{39}\{1+(k-1)^2\} &= \sum_{k=23}^{38}(1+k^2) \\
&= \sum_{k=1}^{38}(1+k^2) - \sum_{k=1}^{22}(1+k^2) \\
&= 38 + \frac{1}{6}\cdot 38(38+1)(2\cdot 38+1) \\
&\qquad - \left\{22 + \frac{1}{6}\cdot 22(22+1)(2\cdot 22+1)\right\} \\
&= 38 + 19019 - (22 + 3795) \\
&= \mathbf{15240}
\end{aligned}$$

3 (1) $f(x) = |\,x(x-1)\,| + |\,x\,|$ であるから

$x < 0$ のとき　$f(x) = x(x-1) + (-x) = x^2 - 2x$

$0 \leqq x < 1$ のとき　$f(x) = -x(x-1) + x = -x^2 + 2x$

$1 \leqq x$ のとき　$f(x) = x(x-1) + x = x^2$



したがって，$y = f(x)$ のグラフは右の図のようになる．

(2) (1) の結果から，次のように 4 つの場合に分けて求める．

［1］ $x \leqq 0$ のとき

$$g(x) = \int_{x-1}^{x} (t^2 - 2t)\,dx$$
$$= x^2 - 3x + \frac{4}{3} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{12}$$

このときの最小値は　$g(0) = \dfrac{4}{3}$

［2］ $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$g(x) = \int_{x-1}^{0} (t^2 - 2t)\,dt + \int_{0}^{x} (-t^2 + 2t)\,dt$$
$$= -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x + \frac{4}{3}$$

$g(x)$ を微分すると　$g'(x) = -2x^2 + 6x - 3$

x の範囲に注意して，$g'(x) = 0$ を満たす解を α とすると　$\alpha = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

$g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\dfrac{4}{3}$	↘	極小 $g(\alpha)$	↗	$\dfrac{2}{3}$

ここで，$g(x) = g'(x)\left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}\right) + x - \dfrac{1}{6}$ であるから

このときの最小値は　$g(\alpha) = \alpha - \dfrac{1}{6} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{8-3\sqrt{3}}{6}$

［3］ $1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{x-1}^{1} (-t^2 + 2t)\,dt + \int_{1}^{x} t^2\,dt \\ &= \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \end{aligned}$$

$g(x)$ を微分すると　$g'(x) = 2x^2 - 4x + 3 = 2(x-1)^2 + 1 > 0$
したがって，$g(x)$ は単調増加である．
このときの最小値は　$g(1) = \dfrac{2}{3}$

［4］ $2 \leqq x$ のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{x-1}^{x} t^2\,dt \\ &= x^2 - x + \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \end{aligned}$$

このときの最小値は　$g(2) = \dfrac{7}{3}$

以上のことから，$g(x)$ は $\boldsymbol{x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}}$ で**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{8-3\sqrt{3}}{6}}$ をとる．