受験番号		氏名	

平成21年度　崇城大学一般入学試験問題(前期日程)2日目
数　学(平成21年1月31日)

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$まで出題されていますが，志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※　学科

志望学部	志望学科	問題番号 $\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$
工学部	**機械工学科**	○	○	○	／	／
	ナノサイエンス学科	○	○	／	／	○
	エコデザイン学科	○	○	／	／	○
	建築学科	○	○	○	／	／
	宇宙航空システム工学科	○	○	○	／	／
情報学部	**情報学科**	○	○	／	／	○
生物生命学部	**応用微生物工学科**	○	○	／	○	／
	応用生命科学科	○	○	／	○	／

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

平成21年度　崇城大学一般入学試験問題(前期日程)2日目
数学I・II・A・B

1 次の各問に答えよ。

(1) 2次関数 $y=f(x)$ のグラフが2点 $(-3,\ 4)$，$(1,-4)$ を通り，このグラフの頂点が直線 $y=5$ 上にあるとき，$f(x)$ を求めよ。

(2) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} y-4x+3 \geqq 0 \\ x^2+y^2-6x+8y \leqq 0 \end{cases}$$

(3) 関数 $y=-3(\log_3 x)^2+3\log_3 x^k+8$ が $x=a\ (0<a<1)$ において最大値20をとるとき，定数 k と a の値を求めよ。

2 放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ を C とし，直線 $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$ を l_1 とする。次の各問に答えよ。

(1) 直線 l_1 に垂直で，放物線 C に接する直線 l_2 を求めよ。

(2) 放物線 C，直線 l_1，直線 l_2 および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

3 SOJODAIGAKU の11文字がある。次の各問に答えよ。

(1) 11文字から4文字取ってくる組合せは何通りあるか。

(2) 11文字から4文字取って1列に並べる方法は何通りあるか。

4 たて棒により区画に分けられた次の数列について，各問に答えよ。

$$\frac{1}{1}\ \Big|\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4}\ \Big|\ \frac{1}{5},\ \cdots$$

(1) 第10番目の区画に入る数の総和を求めよ。

(2) 第100項を求めよ。

5 関数 $f(x)=x^2-ax+a\ (-1 \leqq x \leqq 3)$ の最大値と最小値の差が16であるとき，定数 a の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=ax^2+bx+c$ とする.

点 $(-3,\ 4)$ を通るから　$9a-3b+c=4$

点 $(1,-4)$ を通るから　$a+b+c=-4$

上の 2 式から　$b=2a-2,\ \ c=-3a-2$　$\cdots$ ①

ゆえに　$f(x)=ax^2+2(a-1)x-3a-2$

放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が 5 であるから，2 次方程式

$$ax^2+2(a-1)x-3a-2=5$$

すなわち　$ax^2+2(a-1)x-3a-7=0$

は重解をもつので，$D/4=0$ から

$$(a-1)^2-a\cdot(-3a-7)=0$$

整理して　$4a^2+5a+1=0$

ゆえに　$(a+1)(4a+1)=0$

よって　$a=-1,-\dfrac{1}{4}$

これを ① に代入して

$a=-1$ のとき　$b=-4,\ \ c=1$

$a=-\dfrac{1}{4}$ のとき　$b=-\dfrac{5}{2},\ \ c=-\dfrac{5}{4}$

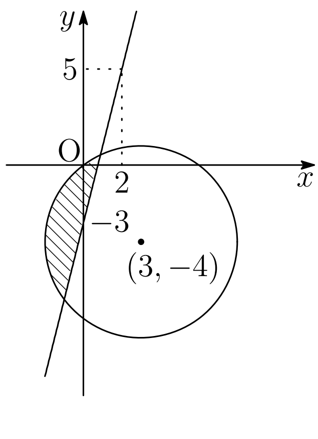
したがって

$$\boldsymbol{f(x)=-x^2-4x+1}\quad \text{または}\quad \boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x-\frac{5}{4}}$$

(2) 第 1 式から　$y \geqq 4x-3$

第 2 式から　$(x-3)^2+(y+4)^2 \leqq 5^2$

この表す領域は，直線 $y=4x-3$ の上側と円 $(x-3)^2+(y+4)^2=5^2$ の内部の共通する部分である．すなわち，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む.



(3) $\log_3 x = t$ とすると，与えられた関数は

$$y = -3t^2 + 3kt + 8$$

すなわち　$y = -3\left(t - \dfrac{k}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}k^2 + 8$

この関数は

$$t = \frac{k}{2} \quad \text{すなわち} \quad x = 3^{\frac{k}{2}} \quad \cdots ①$$

で最大値 $\dfrac{3}{4}k^2 + 8$ をとる．

最大値が 20 であるから　$\dfrac{3}{4}k^2 + 8 = 20$　これを解いて　$k = \pm 4$

$x = a\ (0 < a < 1)$ で最大となるので，① より

$$\boldsymbol{k = -4,\ \ a = \frac{1}{9}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = \dfrac{1}{4}x^2$ を微分すると　$y' = \dfrac{1}{2}x$　$\cdots ①$

l_2 の傾きを m とすると，l_2 は l_1 と垂直であるから

$$-\frac{1}{2}m = -1 \quad \text{これを解いて} \quad m = 2$$

したがって，C と l_2 の接点の座標は，① より

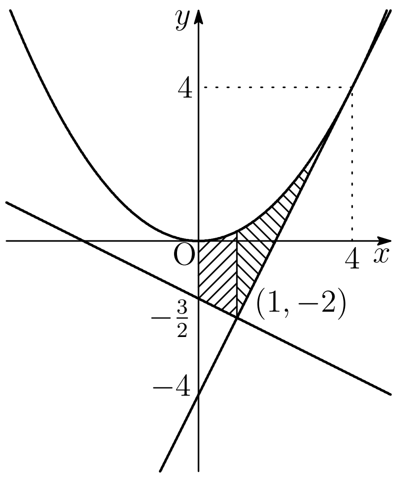
$$\frac{1}{2}x = 2 \quad \text{ゆえに} \quad x = 4,\ y = \frac{1}{4}\cdot 4^2 = 4$$

よって，l_2 は点 $(4,\ 4)$ を通り，傾き 2 の直線であるから

$$y - 4 = 2(x - 4) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2x - 4}$$

(2) l_1 と l_2 の交点の x 座標は，方程式 $-\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} = 2x - 4$ を解いて　$x = 1$

よって，求める面積 S は



$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \left\{\frac{1}{4}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)\right\} dx \\
&\qquad + \int_1^4 \left\{\frac{1}{4}x^2 - (2x - 4)\right\} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) dx \\
&\qquad + \frac{1}{4}\int_1^4 (x - 4)^2 dx \\
&= \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{4}\left[\frac{(x - 4)^3}{3}\right]_1^4 \\
&= \boldsymbol{\frac{49}{12}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 異なる 7 文字と O，A をそれぞれ 2 文字を含む計 11 文字から 4 文字取る組合せを，次の 4 つに場合分けをする．

［1］O，A を 2 文字ずつ含む場合　1 (通り)

［2］O を 2 文字と異なる 2 文字を含む場合　${}_8\mathrm{C}_2 = 28$ (通り)

［3］A を 2 文字と異なる 2 文字を含む場合　${}_8\mathrm{C}_2 = 28$ (通り)

［4］異なる 4 文字を含む場合　${}_9\mathrm{C}_4 = 126$ (通り)

よって，求める組合せの総数は

$$1 + 28 + 28 + 126 = \mathbf{183} \text{ (通り)}$$

(2) (1) の結果をもとに (1) の［1］〜［4］の順列の総数は

［1］$\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ (通り)

［2］$28 \times \dfrac{4!}{2!} = 336$ (通り)

［3］$28 \times \dfrac{4!}{2!} = 336$ (通り)

［4］$126 \times 4! = 3024$ (通り)

よって，求める順列の総数は

$$6 + 336 + 336 + 3024 = \mathbf{3702} \text{ (通り)}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 10 番目の区間の数は

$$\frac{1}{10},\ \frac{2}{10},\ \frac{3}{10},\ \cdots,\ \frac{10}{10}$$

これらの数の和は

$$\frac{1}{10}(1+2+3+\cdots 10) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11 = \mathbf{\frac{11}{2}}$$

(2) k 番目の区画の最後の数 $\dfrac{k}{k}$ は，第 $\dfrac{1}{2}k(k+1)$ 項であるから

13 番目の区画の最後の数 $\dfrac{13}{13}$ は第 91 項である．

したがって，これに続く

$$\frac{1}{14},\ \frac{2}{14},\ \frac{3}{14},\ \cdots$$

が第 92 項，第 93 項，第 94 項，$\cdots$ である．

よって，第 100 項は　$\mathbf{\dfrac{9}{14}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x) = x^2 - ax + a = \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4} + a$

ゆえに，関数 $y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，

軸は $x = \dfrac{a}{2}$ である．$-1 \leqq x \leqq 3$ の中央は　$x = 1$

2 次関数 (下に凸の放物線) の閉区間における最大値

定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり，
定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる．

最大値 $M(a)$ は，次の 2 つの場合に分けて求める．

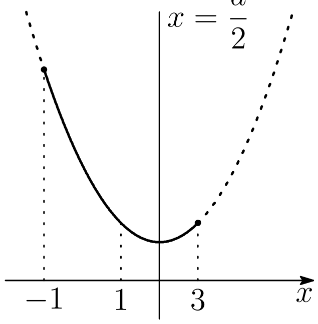
［1］ $1 \leqq \dfrac{a}{2}$　すなわち　$a \geqq 2$ のとき

最大値 $M(a) = f(-1) = (-1)^2 - a(-1) + a = 2a + 1$

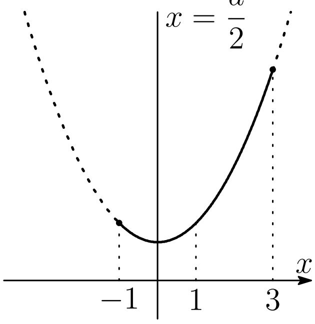
［2］ $\dfrac{a}{2} < 1$　すなわち　$a < 2$ のとき

最大値 $M(a) = f(3) = 3^2 - a\cdot 3 + a = -2a + 9$

［1］ $1 \leqq \dfrac{a}{2}$ のとき $(a \geqq 2)$



［2］ $\dfrac{a}{2} < 1$ のとき $(a < 2)$



最小値 $m(a)$ は，次の 3 つの場合に分けて求める．

［1］ $3 < \dfrac{a}{2}$　すなわち　$6 < a$ のとき

最小値 $m(a) = f(3) = 3^2 - a{\cdot}3 + a = -2a + 9$

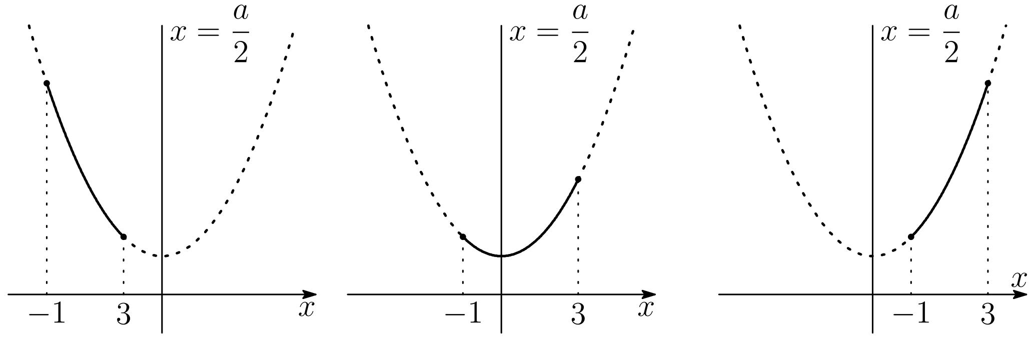
［2］ $-1 \leqq \dfrac{a}{2} \leqq 3$　すなわち　$-2 \leqq a \leqq 6$ のとき

最小値 $m(a) = f\left(\dfrac{a}{2}\right) = -\dfrac{a^2}{4} + a$

［3］ $\dfrac{a}{2} < -1$　すなわち　$a < -2$ のとき

最小値 $m(a) = f(-1) = (-1)^2 - a{\cdot}(-1) + a = 2a + 1$

［1］ $3 < \dfrac{a}{2}$ のとき $(6 < a)$　［2］ $-1 \leqq \dfrac{a}{2} \leqq 3$ のとき $(-2 \leqq a \leqq 6)$　［3］ $\dfrac{a}{2} < -1$ のとき $(a < -2)$



したがって

$a < -2$ のとき　$M(a) - m(a) = (-2a + 9) - (2a + 1)$
$= -4a + 8$

$-2 \leqq a < 2$ のとき　$M(a) - m(a) = (-2a + 9) - \left(-\dfrac{a^2}{4} + a\right)$
$= \dfrac{a^2}{4} - 3a + 9$

$2 \leqq a \leqq 6$ のとき　$M(a) - m(a) = (2a + 1) - \left(-\dfrac{a^2}{4} + a\right)$
$= \dfrac{a^2}{4} + a + 1$

$6 < a$ のとき　$M(a) - m(a) = (2a + 1) - (-2a + 9)$
$= 4a - 8$

上の結果をから，$M(a) - (a) = 16$ を解くと　$\boldsymbol{a = -2,\ 6}$