平成21年度　崇城大学　薬学部　一般入学試験問題(前期日程)1日目
数学I・数学II・数学A・数学B(平成21年1月30日)80分

1 次の各問に答えよ。

(1) 方程式 $2^{x+5}+|16-4^{x+2}|=23$ を解け。

(2) 相異なる5つの玉を相異なる4つの箱に入れる。

(a) 空の箱がないような玉の入れ方は何通りあるか。

(b) 空の箱が1つであるような玉の入れ方は何通りあるか。

2 a は定数とする。曲線 $y=x^2-4|x-a|$ について，次の各問に答えよ。

(1) この曲線と2点で接する直線の方程式を求めよ。

(2) この曲線と(1)で求めた直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

3 四角形ABCDの辺AB上に $\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=2:1$ となる点Pをとり，辺CD上に $\mathrm{CQ}:\mathrm{QD}=1:2$ となる点Qをとる。次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ で表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ で表せ。

(2) PQとACの交点Rが $\mathrm{AR}=\mathrm{RC}$，$\mathrm{PR}=2\mathrm{RQ}$ を満たすとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ で表せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $16-4^{x+2}=2^4-2^{2x+4}$ であるから，次に2つの場合分けを行う．

［1］ $4 \geqq 2x+4$ すなわち $x \leqq 0$ のとき $2^x \leqq 1$
このとき，与えられた方程式は

$$2^{x+5}+(16-2^{2x+4})=23$$

整理すると $16{\cdot}2^{2x}-32{\cdot}2^x+7=0$
したがって $(4{\cdot}2^x-1)(4{\cdot}2^x-7)=0$
$2^x \leqq 1$ であるから $2^x=\dfrac{1}{4}$ ゆえに $x=-2$

［2］ $4<2x+4$ すなわち $x>0$ のとき $2^x>1$
このとき，与えられた方程式は

$$2^{x+5}-(16-2^{2x+4})=23$$

整理すると $16{\cdot}2^{2x}+32{\cdot}2^x-39=0$
したがって $16(2^x+1)^2=55$
$2^x>1$ より $16(2^x+1)^2>64$ であるから，上式を満たす x はない．

よって，求める方程式の解は $\boldsymbol{x=-2}$

(2) (a) 空の箱がないように玉を入れるので，1つの箱には2個の玉を入れることになる．この2個の玉の選び方は ${}_5\mathrm{C}_2$ 通りある．この2個の玉ひとまとめと残り3個の玉の4組を4つの箱に入れる方法は $4!$ 通りあるから，求める場合の数は ${}_5\mathrm{C}_2\times 4!=10\times 24=$ **240 (通り)**

(b) 空の箱が1つであるとき，5個の玉が，3個，1個，1個に分けられる場合と2個，2個，1個に分けられる場合がある．

［1］ <u>5個の玉が，3個，1個，1個の3組に分かれる場合</u>
5個の玉を3個，1個，1個の3組に分ける場合の数は

$${}_5\mathrm{C}_3=10 \text{ (通り)}$$

この3組の玉を4つの箱に入れる方法は ${}_4\mathrm{P}_3$ 通りあるから，このときの場合の数は $10\times{}_4\mathrm{P}_3=10\times 24=240$ (通り)

［2］ <u>5個の玉が，2個，2個，1個の3組に分かれる場合</u>
5個の玉を2個，2個，1個の3組に分ける場合の数は

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2}{2!}=15 \text{ (通り)}$$

この3組の玉を4つの箱に入れる方法は ${}_4\mathrm{P}_3$ 通りあるから，このときの場合の数は $15\times{}_4\mathrm{P}_3=15\times 24=360$ (通り)

よって，求める場合の数は $240+360=$ **600 (通り)**

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 与えられた曲線は

$x \geqq a$ のとき　$y = x^2 - 4x + 4a$　$\cdots$①

$x < a$ のとき　$y = x^2 + 4x - 4a$　$\cdots$②

この曲線と 2 点で接する直線の方程式を $y = px + q \cdots$③ とする.

①，③ から y を消去して整理すると

$$x^2 - (p+4)x - (q-4a) = 0 \quad \cdots ④$$

②，③ から y を消去して整理すると

$$x^2 - (p-4)x - (q+4a) = 0 \quad \cdots ⑤$$

④，⑤ は重解をもつので，係数について次が成り立つ.

$$(p+4)^2 + 4(q-4a) = 0,\ (p-4)^2 + 4(q+4a) = 0$$

展開して整理すると

$$(p^2 + 4q + 16) + 8(p-2a) = 0,\ (p^2 + 4q + 16) - 8(p-2a) = 0$$

上の 2 式から $p = 2a$，$q = -a^2 - 4$ を得る．このとき

④ の重解は　$x = -\dfrac{-(p+4)}{2\cdot 1} = a + 2$

⑤ の重解は　$x = -\dfrac{-(p-4)}{2\cdot 1} = a - 2$

したがって，① と ③ の接点が区間 $x \geqq a$ にあり，② と ③ の接点が区間 $x < a$ にあるので，条件を満たす.

よって，求める直線の方程式は　$\boldsymbol{y = 2ax - a^2 - 4}$

(2) (1) の結果より，求める図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{a-2}^{a} \{(x^2 + 4x - 4a) - (2ax - a^2 - 4)\}dx \\ &\qquad + \int_{a}^{a+2} \{(x^2 - 4x + 4a) - (2ax - a^2 - 4)\}dx \\ &= \int_{a-2}^{a} \{x - (a-2)\}^2 dx + \int_{a}^{a+2} \{x - (a+2)\}^2 dx \\ &= \left[\ \frac{\{x - (a-2)\}^3}{3}\ \right]_{a-2}^{a} + \left[\ \frac{\{x - (a+2)\}^3}{3}\ \right]_{a}^{a+2} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \boldsymbol{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 点 Q は線分 CD を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{2\overrightarrow{\mathrm{PC}} + \overrightarrow{\mathrm{PD}}}{1+2} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{PC}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{PD}}}$$

このとき，次式が成り立つ．

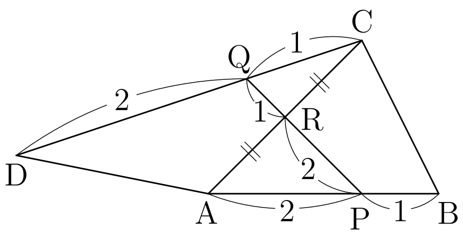
$$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PD}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

これらを上の結果に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}}\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \vec{x}$，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \vec{y}$ とすると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \overrightarrow{\mathrm{AR}} + \overrightarrow{\mathrm{RP}}\\ &= \vec{x} + (-2\vec{y}) = \vec{x} - 2\vec{y}\\ \overrightarrow{\mathrm{CQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{CR}} + \overrightarrow{\mathrm{RQ}}\\ &= (-\vec{x}) + \vec{y} = -\vec{x} + \vec{y}\end{aligned}$$

ゆえに $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3}{2}(\vec{x} - 2\vec{y}) = \frac{3}{2}\vec{x} - 3\vec{y} \quad \cdots ①$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \overrightarrow{\mathrm{CD}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}} = 3\overrightarrow{\mathrm{CQ}} - (-2\vec{x})\\ &= 3(-\vec{x} + \vec{y}) + 2\vec{x} = -\vec{x} + 3\vec{y} \qquad \cdots ②\\ \overrightarrow{\mathrm{BC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= 2\vec{x} - \left(\frac{3}{2}\vec{x} - 3\vec{y}\right) = \frac{1}{2}\vec{x} + 3\vec{y} \qquad \cdots ③\end{aligned}$$

②，③ から $\quad \vec{x} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\vec{y} = \frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

これらを ① に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right) - 3\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)\\ &= \boldsymbol{-\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}}\end{aligned}$$