受験番号		氏名	

平成21年度　崇城大学一般入学試験問題(前期日程)1日目
数　　学(平成21年1月30日)

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$まで出題されていますが, 志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※　学科

志望学部	志望学科	問題番号 $\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$
工学部	**機械工学科**	○	○	○		
	ナノサイエンス学科	○	○			○
	エコデザイン学科	○	○			○
	建築学科	○	○	○		
	宇宙航空システム工学科	○	○	○		
情報学部	**情報学科**	○	○			○
生物生命学部	**応用微生物工学科**	○	○		○	
	応用生命科学科	○	○		○	

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

(航空整備士養成コース前期日程) および (パイロット養成コース前期日程) の試験問題は, (宇宙航空システム工学科前期日程1日目) の問題と同一である.

平成 21 年度　崇城大学一般入学試験問題 (前期日程)1 日目
数学 I・II・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 円 $x^2+y^2=10$ が直線 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ から切り取る線分の長さを求めよ。

(2) 関数 $f(\theta)=\cos 2\theta-2\sin\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の最大値と最小値を求めよ。

(3) 方程式 $x^3+ax+b=0$ が $\frac{-3+\sqrt{7}i}{2}$ (i は虚数単位) を解にもつとき，実数 a，b と他の 2 つの解を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 放物線 $y=x^2+ax+b$ について，次の各問に答えよ。

(1) この放物線が 2 つの直線 $y=-x+4$，$y=3x-4$ に接するとき，定数 a，b の値を求めよ。

(2) この放物線と (1) の 2 本の直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1$，$a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n=a_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を満たしている。n を 2 以上の自然数とするとき，次の各問に答えよ。

(1) $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を n で表せ。

(2) a_n を n で表せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 円 O の円周上に 3 点 A，B，C があり，点 A における円 O の接線と BC の延長との交点を D とする。$\angle\mathrm{ABD}=25^\circ$，$\angle\mathrm{ADB}=40^\circ$ であるとき，次の各問に答えよ。

(1) $\angle\mathrm{ACB}$ の大きさを求めよ。

(2) 円 O の半径を 2，AD の長さを a として，CD の長さを a で表せ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 関数 $y=\frac{1}{2}|x-2|(x+2)-2$ のグラフを描け。

(2) 方程式 $\frac{1}{2}|x-2|(x+2)-kx-2=0$ (k は定数) の実数解の個数を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 円の中心 $(0,\ 0)$ から直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$ $(x-2y-5=0)$ までの距離 d は

$$d=\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

円の半径 r は $\sqrt{10}$ であるから，円が直線から切り取る線分の長さは

$$2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{10-5}=\mathbf{2\sqrt{5}}$$

(2)
$$\begin{aligned}\cos 2\theta-2\sin\theta&=(1-2\sin^2\theta)-2\sin\theta\\&=-2\sin^2\theta-2\sin\theta+1\end{aligned}$$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ のとき，$-1\leqq t\leqq 1$ であり

$$f(\theta)=-2t^2-2t+1\quad すなわち\quad f(\theta)=-2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

よって　$t=-\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

$t=1$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $\mathbf{-3}$

(3) 実数を係数とする 3 次方程式 $x^3+ax+b=0$ が $\dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2}$ を解にもつとき，共役な複素数 $\dfrac{-3-\sqrt{7}i}{2}$ もこの方程式の解である．この 3 次方程式の 3 つの解を

$$\alpha=\frac{-3+\sqrt{7}i}{2},\ \beta=\frac{-3-\sqrt{7}i}{2},\ \gamma$$

とおくと　$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=4$

これを 3 次方程式の解と係数の関係

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{0}{1},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{a}{1},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{b}{1}$$

すなわち

$$(\alpha+\beta)+\gamma=0,\ \alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma=a,\ \alpha\beta\cdot\gamma=-b$$

に代入すると

$$-3+\gamma=0,\ 4-3\gamma=a,\ 4\gamma=-b$$

したがって　$\gamma=3,\ a=-5,\ b=-12$

よって　$\boldsymbol{a=-5,\ b=12}$，他の 2 つの解は $\boldsymbol{\dfrac{-3-\sqrt{7}i}{2}}$，$\mathbf{3}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 放物線と 2 つの直線が接するので，2 つの 2 次方程式

$$x^2+ax+b=-x+4,\ \ x^2+ax+b=3x-4$$

すなわち

$$x^2+(a+1)x+b-4=0,\ \ x^2+(a-3)x+b+4=0 \quad \cdots ①$$

は，ともに重解をもつので，$D=0$ より

$$(a+1)^2-4{\cdot}1(b-4)=0,\ \ (a-3)^2-4{\cdot}1{\cdot}(b+4)=0$$

整理して

$$4b=a^2+2a+17,\ \ 4b=a^2-6a-7$$

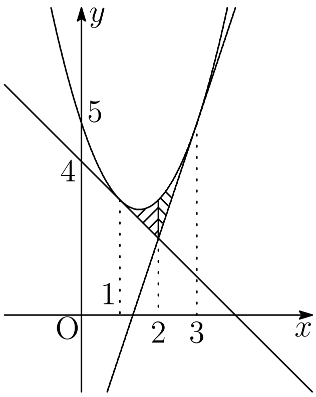
これを解いて　　$\boldsymbol{a=-3,\ b=5}$

(2) 放物線と 2 直線 $y=-x+4$，$y=3x-4$ の接点の x 座標は，それぞれ

$$x=-\frac{a+1}{2{\cdot}1},\ \ x=-\frac{a-3}{2{\cdot}1}$$

であり，これに $a=-3$ を代入して

$$x=1,\ \ x=3$$



また，2 直線 $y=-x+4$，$y=3x-4$ の交点の x 座標は，方程式

$-x+4=3x-4$　これを解いて　$x=2$

よって，求める図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{(x^2-3x+5)-(-x+4)\}dx \\ &\qquad\qquad + \int_2^3 \{(x^2-3x+5)-(3x-4)\}dx \\ &= \int_1^2 (x-1)^2dx + \int_2^3 (x-3)^2dx \\ &= \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^2 + \left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_2^3 \\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{3}}$ (1) $a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n=a_{n+1} \quad \cdots ①$

①から $a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-3)a_{n-1}=a_n \quad \cdots ②$

$n=1$ のとき①より $a_1=a_2$ ゆえに $a_2=1$

$n \geqq 2$ のとき

①−②から $(2n-1)a_n=a_{n+1}-a_n$

ゆえに $2n\,a_n=a_{n+1}$

よって $\boldsymbol{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2n \quad (n \geqq 2)}$

(2) (1) の結果から

$$\frac{a_3}{a_2}=2\cdot2,\quad \frac{a_4}{a_3}=2\cdot3,\quad \frac{a_5}{a_4}=2\cdot4\ \cdots,\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=2n$$

これらの辺々をかけると $\dfrac{a_{n+1}}{a_2}=2^{n-1}n!$

$a_2=1$ より $a_{n+1}=2^{n-1}n! \quad (n \geqq 2)$

上式は $n=1$ のときも成り立つので $a_{n+1}=2^{n-1}n! \quad (n \geqq 1)$

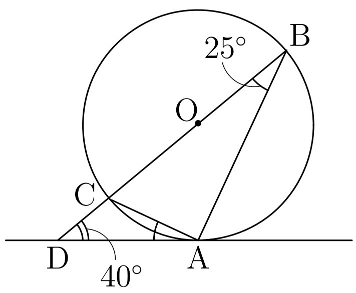
よって $\boldsymbol{a_n=\begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2^{n-2}(n-1)! & (n \geqq 2) \end{cases}}$

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) 接弦定理により $\angle\mathrm{DAC}=\angle\mathrm{ABC}$

ゆえに $\angle\mathrm{DAC}=25^\circ$

$\angle\mathrm{ACB}$ は $\triangle\mathrm{ACD}$ の $\angle\mathrm{C}$ の外角であるから

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{ACB}&=\angle\mathrm{CDA}+\angle\mathrm{DAC}\\&=40^\circ+25^\circ\\&=\boldsymbol{65^\circ}\end{aligned}$$



(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ について，(1) の結果から

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BAC}&=180^\circ-(\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ACB})\\&=180^\circ-(25^\circ+65^\circ)=90^\circ\end{aligned}$$

ゆえに，BC は円の直径である．

$\triangle\mathrm{ODA}$ は直角三角形であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{OD}=\sqrt{\mathrm{AD}^2+\mathrm{OA}^2}=\sqrt{a^2+4}$$

このとき，OC は円の半径であるから

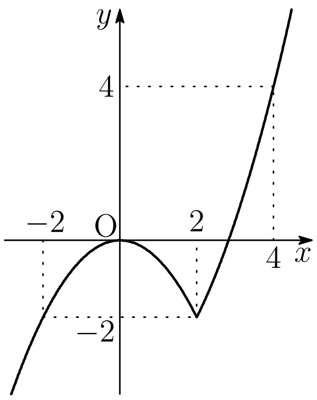
$$\mathrm{CD}=\mathrm{OD}-\mathrm{OC}=\boldsymbol{\sqrt{a^2+4}-2}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $x \geqq 2$ のとき

$$y = \frac{1}{2}(x-2)(x+2) - 2$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - 4$$

$x < 2$ のとき

$$y = \frac{1}{2}(-x+2)(x+2) - 2$$
$$= -\frac{1}{2}x^2$$



(2) 方程式 $\frac{1}{2}|x-2|(x+2) - kx - 2 = 0$ は

$$\frac{1}{2}|x-2|(x+2) - 2 = kx$$

とかけるから，この方程式の実数解の個数は，$y = \frac{1}{2}|x-2|(x+2) - 2$ のグラフと $y = kx$ のグラフの共有点の個数である．

よって　**$k < -1$ のとき　1 個**

$k = -1,\ 0$ のとき　2 個

$-1 < k < 0,\ 0 < k$ のとき　3 個