平成21年度　崇城大学推薦入学試験問題 (専門高校)
数学I (2日目：平成20年11月8日) 60分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} + a\sqrt{2} + b\sqrt{6}$ を満たす有理数 a，b を求めよ。

(2) 2次方程式 $2x^2 + 8x + k(k+2) = 0$ が2つの異なる実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

(3) $\triangle$ABC において，AB $= 14$，CA $= 10$，$\angle$A $= 60^\circ$ であるとき，BC の長さと $\triangle$ABC の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 放物線 $y = 2x^2 - 4ax + a^2 + a + 2$ の頂点が第1象限にあるような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 円に内接する四角形 ABCD において，AB $= 2$，BC $= \sqrt{3}$，$\cos B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。次の各問に答えよ。

(1) $\sin B$，$\cos D$ の値を求めよ。

(2) 円の半径を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$\frac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\{(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}\}\{(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}\}}$$
$$=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{6}$$

よって，求める有理数 a，b は　$\boldsymbol{a=-\frac{1}{4}}$**,** $\boldsymbol{b=-\frac{1}{4}}$

(2) 2 次方程式 $2x^2+8x+k(k+2)=0$ の係数について

$$D/4=4^2-2{\cdot}k(k+2)=-2(k+4)(k-2)$$

異なる 2 つの実数解をもつための条件は，$D>0$ であるから

$$-2(k+4)(k-2)>0$$

ゆえに　$(k+4)(k-2)<0$

よって　$\boldsymbol{-4<k<2}$

(3) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{CA}{\cdot}\mathrm{AB}\cos A\\&=10^2+14^2-2{\cdot}10{\cdot}14\cos 60^\circ\\&=100+196-2{\cdot}10{\cdot}14{\cdot}\frac{1}{2}\\&=156\end{aligned}$$

$\mathrm{BC}>0$ より　$\mathrm{BC}=\sqrt{156}=\boldsymbol{2\sqrt{39}}$

また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\mathrm{CA}{\cdot}\mathrm{AB}\sin A\\&=\frac{1}{2}{\cdot}10{\cdot}14\sin 60^\circ\\&=\frac{1}{2}{\cdot}10{\cdot}14{\cdot}\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{35\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $y = 2x^2 - 4ax + a^2 + a + 2$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 - 2ax) + a^2 + a + 2 \\ &= 2\{(x-a)^2 - a^2\} + a^2 + a + 2 \\ &= 2(x-a)^2 - 2a^2 + a^2 + a + 2 \\ &= 2(x-a)^2 - a^2 + a + 2 \end{aligned}$$

この放物線の頂点 $(a, -a^2 + a + 2)$ が第 1 象限にあるので

$$\begin{cases} a > 0 & \cdots ① \\ -a^2 + a + 2 > 0 \end{cases}$$

第 2 式から　　$a^2 - a - 2 < 0$

ゆえに　　$(a+1)(a-2) < 0$

よって　　$-1 < a < 2 \quad \cdots ②$

①，② の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{0 < a < 2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\cos B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より　　$\sin B = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$

四角形 ABCD は円に内接するので　　$D = 180^\circ - B$

ゆえに　　$\cos D = \cos(180^\circ - B) = -\cos B = \boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(2) △ABC に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} \mathrm{CA}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B \\ &= 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= 4 + 3 - 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$\mathrm{CA} > 0$ より　　$\mathrm{CA} = \sqrt{3}$

正弦定理により　　$\dfrac{\mathrm{CA}}{\sin B} = 2R$

よって　　$R = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{3} \div \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}}{4}}$