平成 21 年度　崇城大学推薦入学試験問題 (専門高校)
数学 I (1 日目：平成 20 年 11 月 7 日) 60 分

$\boxed{\textbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 2 次関数 $y = \dfrac{1}{4}x^2 - x + 1$ $(1 \leqq x \leqq 4)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) 連立不等式 $\begin{cases} x^2 + 2x - 2 \leqq 0 \\ 2x^2 + x - 1 > 0 \end{cases}$ を解け。

(3) $\triangle$ABC において，AB $= 2$，BC $= 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$，CA $= 2\sqrt{3} - 2$ であるとき，$\angle$A の大きさを求めよ。

$\boxed{\textbf{2}}$ x についての 2 次方程式 $2x^2 + 2(m+1)x + m + \dfrac{1}{2} = 0$ について，次の各問に答えよ。

(1) この方程式を解け。

(2) 2 つの解の間に整数がちょうど 3 つあるような整数 m を求めよ。

$\boxed{\textbf{3}}$ $\triangle$ABC において，$\angle$A $= 45^\circ$，$\angle$B $= 60^\circ$，BC $= a$ である。次の各問に答えよ。

(1) $\triangle$ABC の外接円の半径を a で表せ。

(2) CA，AB の長さを a で表せ。

解答例

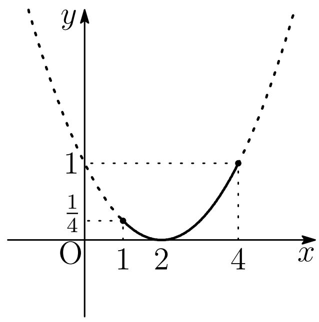
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=\dfrac{1}{4}x^2-x+1$ を変形すると

$$y=\frac{1}{4}(x-2)^2$$

$1\leqq x\leqq 4$ でのグラフは，右の図の実線部分である．よって，y は

$x=4$ で**最大値 1** をとり，

$x=2$ で**最小値 0** をとる．



(2) 第 1 式から $\quad (x+1)^2-3\leqq 0$

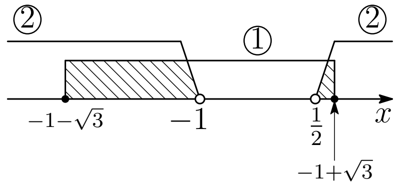
$\quad (x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})\leqq 0$

よって $\quad -1-\sqrt{3}\leqq x\leqq -1+\sqrt{3} \quad \cdots ①$

第 2 式から $\quad (x+1)(2x-1)>0$

よって $\quad x<-1,\ \dfrac{1}{2}<x \quad \cdots ②$

①，② の共通範囲を求めて



$$\boldsymbol{-1-\sqrt{3}\leqq x<-1,\ \frac{1}{2}<x\leqq -1+\sqrt{3}}$$

(3) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos A&=\frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}}\\&=\frac{(2\sqrt{3}-2)^2+2^2-(3\sqrt{2}-\sqrt{6})^2}{2(2\sqrt{3}-2)\cdot 2}\\&=\frac{4(\sqrt{3}-1)}{8(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{\angle\mathrm{A}=60^\circ}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 与えられた方程式から　$x^2+(m+1)x+\dfrac{1}{2}\left(m+\dfrac{1}{2}\right)=0$

左辺を因数分解すると　$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x+m+\dfrac{1}{2}\right)=0$

これを解いて　$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{2},\ -m-\dfrac{1}{2}}$

(2) 2 つの解の間に整数がちょうど 3 つあるのは，m が整数であるから

3 つの整数が $-3, -2, -1$ のとき　$-m-\dfrac{1}{2}=-3-\dfrac{1}{2}$

3 つの整数が 0，1，2 のとき　$-m-\dfrac{1}{2}=3-\dfrac{1}{2}$

よって　$\boldsymbol{m=\pm 3}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 正弦定理により　$2R=\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}$

よって　$R=\dfrac{a}{2\sin 45^\circ}=\boldsymbol{\dfrac{a}{\sqrt{2}}}$

(2) 正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\dfrac{\mathrm{CA}}{\sin B}$

ゆえに　$\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\mathrm{CA}}{\sin 60^\circ}$　よって　$\mathrm{CA}=\dfrac{a\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}a}$

第 1 余弦定理により　$\mathrm{AB}=\mathrm{CA}\cos A+\mathrm{BC}\cos B$

よって　$\mathrm{AB}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\cos 45^\circ+a\cos 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+\dfrac{1}{2}a=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}a}$