平成21年度　崇城大学　薬学部　一般入学試験問題(後期日程)
数学I・数学II・数学A・数学B(平成21年3月15日)80分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) $a+b+c=0$ であるとき，$\dfrac{a^2+b^2}{(a+c)(b+c)}+\dfrac{b^2+c^2}{(b+a)(c+a)}+\dfrac{c^2+a^2}{(c+b)(a+b)}$ の値を求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2$ を C とし，点 $(a,\ a^2)$ $(a>0)$ を通り，傾きが $-a$ の直線を l とする。直線 l と放物線 C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，直線 l と放物線 C および x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，比 $S_1:S_2$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 連立不等式 $y-2x+6\geqq 0,\ x^2+y^2-6x\leqq 0$ の表す領域を D とする。次の各問に答えよ。

(1) D を図示せよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$(x-10)^2+y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 四面体OABCの辺OA，OB，OCの中点をそれぞれL，M，Nとする。点Cと△LMNの重心Gを通る直線が平面OABと交わる点をHとするとき，次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

解答例

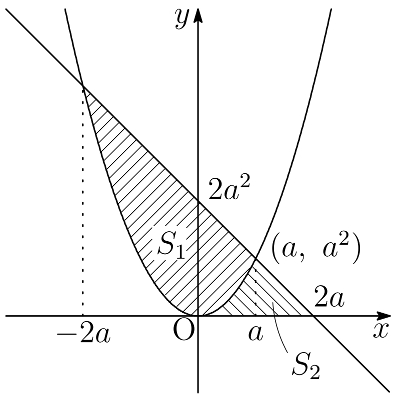
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a+b+c=0$ より

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{a^2+b^2}{(-b)(-a)}+\frac{b^2+c^2}{(-c)(-b)}+\frac{c^2+a^2}{(-a)(-c)}\\
&= \frac{c(a^2+b^2)+a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)}{abc}\\
&= \frac{(b+c)a^2+(c+a)b^2+(a+b)c^2}{abc}\\
&= \frac{(-a)a^2+(-b)b^2+(-c)c^2}{abc} = -\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\\
&= -\frac{a^3+b^3+c^3-3abc+3abc}{abc}\\
&= -\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}\\
&= -\frac{3abc}{abc} = \mathbf{-3}
\end{aligned}
$$

(2) l は点 $(a,\ a^2)$ を通り，傾き $-a$ の直線であるから

$$y-a^2=-a(x-a)$$

ゆえに　$y=-ax+2a^2$



C と l の共有点の x 座標は，方程式

$$x^2=-ax+2a^2$$

の解 $x=-2a,\ a$ であるから

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_{-2a}^{a}\{(-ax+2a^2)-x^2\}\,dx\\
&= -\int_{-2a}^{a}(x+2a)(x-a)\,dx\\
&= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{a-(-2a)\}^3 = \frac{9}{2}a^3
\end{aligned}
$$

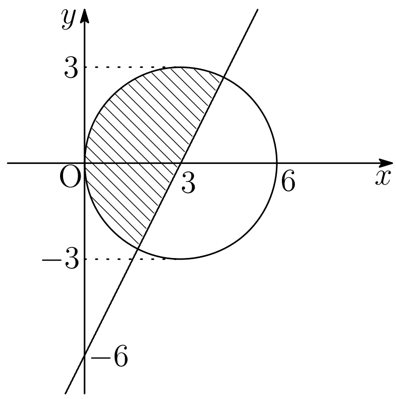
l と x 軸の交点の x 座標は $x=2a$ であるから

$$S_2=\int_0^a x^2\,dx+\frac{1}{2}(2a-a)a^2=\frac{5}{6}a^3$$

よって　$S_1:S_2=\frac{9}{2}a^3:\frac{5}{6}a^3=\mathbf{27:5}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 連立不等式を変形すると

$$\begin{cases} y \geqq 2x-6 \\ (x-3)^2+y^2 \leqq 3^2 \end{cases}$$



したがって，D の表す領域は，

直線 $y=2x-6$ の上側と

円 $(x-3)^2+y^2=3^2$ の内部

に共通する部分である．すなわち，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．

(2) $(x-10)^2+y^2$ は，点 $(10,\ 0)$ から D 内の点 $(x,\ y)$ までの距離の平方である，

ゆえに，最大値となる点は $(0,\ 0)$ であるから，求める最大値は

$$(0-10)^2+0^2=100$$

点 $(10,\ 0)$ を通り直線 $y=2x-6$ に垂直な直線の方程式は，

$$y-0=-\frac{1}{2}(x-10) \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{1}{2}x+5$$

この 2 直線の交点の座標は $\left(\dfrac{22}{5},\ \dfrac{14}{5}\right)$

点 $(3,\ 0)$ からこの点までの距離は

$$\sqrt{\left(\frac{22}{5}-3\right)^2+\left(\frac{14}{5}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{5}}>3$$

ゆえに，この点は，領域 D に含まれない．

直線 $y=2x-6$ と円 $(x-3)^2+y^2=3^2$ の共有点は，連立方程式を解いて

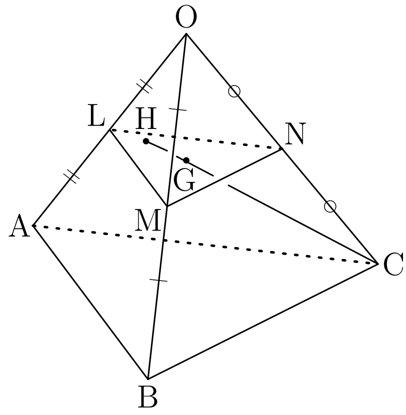
$$\left(3\pm\frac{3}{\sqrt{5}},\ \pm\frac{6}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{(複号同順)}$$

ゆえに，D 内の点で点 $(10,\ 0)$ から最短となる点は，$\left(3+\dfrac{3}{\sqrt{5}},\ \dfrac{6}{\sqrt{5}}\right)$ であるから，求める最小値は

$$\left(3+\frac{3}{\sqrt{5}}-10\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2=58-\frac{42}{\sqrt{5}}$$

よって　**最大値 100，最小値 $58-\dfrac{42}{\sqrt{5}}$**

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) G は △LMN の重心であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OL}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{ON}})$$

これに

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}(\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}} - 5\overrightarrow{\mathbf{OC}})}$$

(2) 上の結果を C を始点とするベクトルに書き換えると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CG}} &= \frac{1}{6}\{(\overrightarrow{\mathrm{CA}} - \overrightarrow{\mathrm{CO}}) + (\overrightarrow{\mathrm{CB}} - \overrightarrow{\mathrm{CO}}) + 5\overrightarrow{\mathrm{CO}}\}\\ &= \frac{1}{6}(3\overrightarrow{\mathrm{CO}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}})\end{aligned}$$

H は直線 CG 上にあるので，定数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = k\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ $\cdots$ ①

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{CO}} + \frac{k}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \frac{k}{6}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

このとき，H は平面 OAB 上の点であるから

$$\frac{k}{2} + \frac{k}{6} + \frac{k}{6} = 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{6}{5}$$

これと (1) の結果を ① に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{6}{5} \times \frac{1}{6}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} - 5\overrightarrow{\mathrm{OC}}) = \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

上式から $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathbf{OB}}}$$