受験番号		氏名	

平成21年度　崇城大学一般入学試験問題(後期日程)
数　　学(平成21年3月15日)

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$まで出題されていますが, 志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※ 学科

志望学部	志望学科	問題番号				
		1	2	3	4	5
工学部	**機械工学科**	○	○	○		
	ナノサイエンス学科	○	○			○
	エコデザイン学科	○	○			○
	建築学科	○	○	○		
	宇宙航空システム工学科	○	○	○		
情報学部	**情報学科**	○	○			○
生物生命学部	**応用微生物工学科**	○	○		○	
	応用生命科学科	○	○		○	

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

(航空整備士養成コース後期日程) および (パイロット養成コース後期日程) の試験問題は, (宇宙航空システム工学科後期日程) の問題と同一である.

平成 21 年度　崇城大学一般入学試験問題 (後期日程)
数学 I・II・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフは関数 $y=2x^2-8x+1$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものであり，2 点 $(-1,\ 3)$，$(-4,-3)$ を通る。p，q の値と $f(x)$ を求めよ。

(2) 数 $6\times\left(\dfrac{1}{12}\right)^{10}$ は，小数第何位においてはじめて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(3) 整式 $P(x)=2x^3-7x^2+3x+8$ を整式 $Q(x)$ で割ると，商が $2x-5$，余りが $4x-7$ である。方程式 $Q(x)=0$ の解 α を求め，さらに，$P(\alpha)$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 曲線 $y=x^3-x+1$ について，次の各問に答えよ。

(1) この曲線上の点 $\mathrm{P}(-1,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ。また，この接線と曲線との交点を P，Q とするとき，点 Q の座標を求めよ。

(2) 点 R がこの曲線上を点 P から点 Q までの間を動くとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積の最大値とそのときの点 R の座標を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1 辺の長さが 2 の正四面体 OABC において，OA の中点を M，BC の中点を N とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表し，$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とのなす角を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 第 10 項が 28，初項から第 10 項までの和が 145 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。次の各問に答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $b_1=1$，$b_{n+1}=a_n+b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ によって定められる数列 $\{b_n\}$ について，一般項 b_n を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 関数 $f(x)=\sin x-\cos x-2\sin x\cos x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ について，次の各問に答えよ。

(1) $\sin x-\cos x=X$ とし，$f(x)$ を X で表せ。

(2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=f(x)$ は，$y=2x^2-8x+1$ のグラフを平行移動したものであるから，
$f(x)=2x^2+bx+c$ とおける．グラフが

点 $(-1,\ 3)$ を通るから　　$2\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=3$

点 $(-4,-3)$ を通るから　　$2\cdot(-4)^2+b\cdot(-4)+c=-3$

よって　　$-b+c=1$，$-4b+c=-35$

これを解くと　　$b=12$，$c=13$

ゆえに　　$\boldsymbol{f(x)=2x^2+12x+13}$

$y=2x^2-8x+1$ を変形すると　　$y=2(x-2)^2-7$

$y=2x^2+12x+13$ を変形すると　$y=2(x+3)^2-5$

よって，頂点は $(2,-7)$ から $(-3,-5)$ に移動する．

したがって　$p=-3-2=\mathbf{-5}$，$q=-5-(-7)=\mathbf{2}$

(2) $\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.3010+0.4771=0.7781$

$\log_{10}12=2\log_{10}2+\log_{10}3=2\times0.3010+0.4771=1.0791$

ゆえに
$$\log_{10}\left\{6\times\left(\frac{1}{12}\right)^{10}\right\}=\log_{10}6-10\log_{10}12$$
$$=0.7781-10\times1.0791$$
$$=-10.0129$$

$-11<\log_{10}\left\{6\times\left(\frac{1}{12}\right)^{10}\right\}<-10$ であるから

$$10^{-11}<6\times\left(\frac{1}{12}\right)^{10}<10^{-10}$$

よって，$6\times\left(\frac{1}{12}\right)^{10}$ は**小数第 11 位**に初めて 0 でない数字が現れる．

(3) この割り算について，次の等式が成り立つ．

$$2x^3-7x^2+3x+8=Q(x)\times(2x-5)+4x-7 \quad \cdots ①$$

整理すると

$$2x^3-7x^2-x+15=Q(x)\times(2x-5)$$

よって，$2x^3-7x^2-x+15$ は $2x-5$ で割り切れて，その商が $Q(x)$ である．

ゆえに　　$Q(x)=x^2-x-3$

したがって，方程式 $Q(x)=0$ の解 α は

$$\alpha=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\boldsymbol{\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}}$$

① の左辺は $P(x)$ であり，$x=\alpha$ を代入すると，$Q(\alpha)=0$ であるから

$$P(\alpha)=4\alpha-7$$

よって　$P\left(\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right)=4\times\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}-7=\boldsymbol{-5\pm2\sqrt{13}}$ **(複号同順)**

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=x^3-x+1$ を微分すると　$y'=3x^2-1$

$x=-1$ のとき　$y'=3\cdot(-1)^2-1=2$

$\mathrm{P}(-1,\ 1)$ における接線の傾きは 2 であるから，求める接線の方程式は

$$y-1=2\{x-(-1)\}\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=2x+3}$$

点 Q の座標は，連立方程式

$$y=x^3-x+1,\ y=2x+3\quad \cdots ①$$

の解であるから，y を消去すると

$$x^3-x+1=2x+3$$

すなわち　$x^3-3x-2=0$

整理すると　$(x+1)^2(x-2)=0$

$x\neq-1$ に注意して　$x=2$

これを ① に代入して　$y=7$

よって　$\mathbf{Q(2,\ 7)}$

(2) 区間 $-1<x<2$ における曲線上の点で，その接線が PQ と平行となる点を R とするとき，△PQR の面積は最大となる．したがって

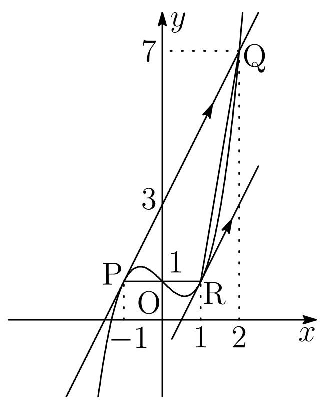
$$y'=2\quad \text{すなわち}\quad 3x^2-1=2$$

$-1<x<2$ に注意して　$x=1$

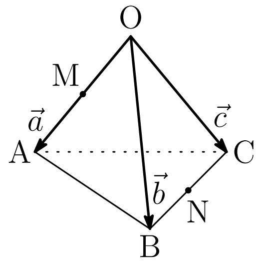
これを ① に代入して　$\mathrm{R}(1,\ 1)$

右図より PR を底辺とする △PQR の底辺および高さは，それぞれ 2，6 であるから

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot6=\mathbf{6}$$



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) M は OA の中点であるから $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\vec{a}}{2}$



N は BC の中点であるから $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}}&=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}}{2}=\boldsymbol{\frac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}}\end{aligned}$$

正四面体 OABC の $\vec{a}$ と $\vec{b}$, $\vec{b}$ と $\vec{c}$, $\vec{c}$ と $\vec{a}$ のなす角は，ともに 60° であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot2\cos60^\circ=2$$

ゆえに

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2&=\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}\\&=\left(\frac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot\left(\frac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a})\\&=\frac{1}{4}(2^2+2^2+2^2-2\cdot2+2\cdot2-2\cdot2)=2\end{aligned}$$

よって $\qquad \boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|=\sqrt{2}}$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left(\frac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\&=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a})\\&=\frac{1}{2}(2^2+2^2-2\cdot2+2-2)=2\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MN}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから $\qquad \theta=\mathbf{45^\circ}$

$\boxed{4}$ (1) 等差数列 $\{a_n\}$ 初項を a，公差を d とする．

第 10 項が 28 であるから

$$a+9d=28 \quad \cdots ①$$

初項から第 10 項までの和が 145 であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 10(2a+9d)=145 \quad \text{ゆえに} \quad 2a+9d=29 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$a=1$，$d=3$

よって，一般項 a_n は　　$a_n=1+(n-1)\cdot 3=\boldsymbol{3n-2}$

(2) 数列 $\{b_n\}$ の階差数列が $\{a_n\}$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1+\sum_{k=1}^{n-1} a_k = 1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2) \\ &= 1+3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1) \\ &= \frac{1}{2}(3n^2-7n+6) \end{aligned}$$

$b_1=1$ なので，上の b_n は $n=1$ のときにも成り立つ．

したがって，一般項 b_n は

$$\boldsymbol{b_n=\frac{1}{2}(3n^2-7n+6)}$$

$\boxed{5}$ (1) $\sin x-\cos x=X$ の両辺を平方すると

$$\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=X^2$$

ゆえに　　$-2\sin x\cos x=X^2-1$

よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x-\cos x+(-2\sin x\cos x) \\ &= X+(X^2-1) \\ &= \boldsymbol{X^2+X-1} \end{aligned}$$

(2) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき　　$-1 \leqq X \leqq \sqrt{2}$

(1) の結果から　$f(x)=\left(X+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

よって　$X=\sqrt{2}$ のとき　**最大値** $\boldsymbol{1+\sqrt{2}}$

$X=-\dfrac{1}{2}$ のとき　**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{5}{4}}$