平成21年度　崇城大学推薦入学試験問題 (普通高校)
数学I・数学II (2日目：平成20年11月8日) 60分
兼
専願推薦入学試験問題 (航空整備士養成コース)
推薦入学試験問題 (パイロット養成コース)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 次の等式が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

$$\frac{5x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 \geqq 0$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(3) 方程式 $\log_3(x-1) + \log_3 x = 3\log_3 2$ を解け。

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\triangle$ABC において，AB $= a$ とおくとき，BC $= a+1$，CA $= \sqrt{a^2+a+1}$ である。次の各問いに答えよ。

(1) $\angle$B の大きさを求めよ。

(2) $\triangle$ABC の面積および $\sin A$ の値を a で表せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ のグラフ上の点 $(3,\ f(3))$ における接線が $y = 12x - 27$ である。次の各問いに答えよ。

(1) 定数 a，b の値を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の区間 $1 \leqq x \leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 等式の両辺に $(x+1)(x^2+1)$ をかけると，次の等式が得られる．

$$5x+1=a(x^2+1)+(bx+c)(x+1)$$

右辺を整理すると

$$5x+1=(a+b)x^2+(b+c)x+a+c$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$0=a+b,\ 5=b+c,\ 1=a+c$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=-2,\ b=2,\ c=3}$

(2) 不等式の左辺を因数分解すると

$$(\cos\theta-2)(2\cos\theta+1)\geqq 0$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より $-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ であるから

$\cos\theta\leqq -\dfrac{1}{2}$　これを解いて　$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{4}{3}\pi}$

(3) 真数は正であるから　$x-1>0$　かつ　$x>0$

すなわち　$x>1$　$\cdots$①

方程式を変形すると　$\log_3(x-1)x=\log_3 2^3$

よって　$(x-1)x=2^3$

式を整理すると　$x^2-x-8=0$

① に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{x=\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}\\ &= \frac{a^2+(a+1)^2-(a^2+a+1)}{2a(a+1)}\\ &= \frac{a(a+1)}{2a(a+1)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\angle \mathrm{B} = 60^\circ}$

(2) $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B = \dfrac{1}{2}a(a+1)\sin 60^\circ$

$$= \frac{1}{2}a(a+1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}a(a+1)}$$

また，$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin A$ であるから，上式により

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a(a+1) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+a+1}\,a\sin A$$

ゆえに　$\boldsymbol{\sin A = \dfrac{\sqrt{3}(a+1)}{2\sqrt{a^2+a+1}}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=2x^3+ax^2+bx$ より　$f'(x)=6x^2+2ax+b$

点 $(3,\ f(3))$ は直線 $y=12x-27$ 上にあるから　$f(3)=12{\cdot}3-27=9$

$y=f(x)$ のこの点における接線の傾きが 12 であるから　$f'(3)=12$

$f(3)=9$ より　　$2{\cdot}3^3+a{\cdot}3^2+b{\cdot}3=9$

$f'(3)=12$ より　　$6{\cdot}3^2+2a{\cdot}3+b=12$

整理すると　　$3a+b=-15,\ 6a+b=-42$

これを解くと　$\boldsymbol{a=-9,\ b=12}$

(2) (1) の結果から　$f(x)=2x^3-9x^2+12x$

これを微分すると　$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

ゆえに，区間 $1 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\searrow$	極小 4	$\nearrow$	9

よって，この関数は

$x=3$ で**最大値 9** をとり，

$x=2$ で**最小値 4** をとる．