平成21年度　崇城大学推薦入学試験問題 (普通高校)
数学I・数学II (1日目：平成20年11月7日) 60分

1 次の各問に答えよ。

(1) すべての実数 x に対して，不等式 $x^2+2ax+a+1>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) △ABC において，AB $=4$，BC $=3$，$\cos B=\dfrac{7}{8}$ である。CA の長さと $\sin C$ の値を求めよ。

(3) 方程式 $x^3+ax^2+bx+15=0$ が $2+i$ (i は虚数単位) を解にもつとき，実数 a，b の値を求めよ。

2 xy 平面上の3点 A(2, 3)，B(1, 1)，C(5, 2) を頂点とする △ABC について，次の各問に答えよ。

(1) △ABC の内部 (境界は含まない) を表す連立不等式を求めよ。

(2) △ABC の外接円の中心の座標を求めよ。

3 関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ は条件 $f'(-1)=-6$，$f'(1)=-2$，$f(-1)=6$ を満たしている。次の各問に答えよ。

(1) 定数 a，b，c の値を求めよ。

(2) 放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=-2x+1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 与えられた 2 次不等式の係数について

$$D/4 = a^2 - 1 \cdot (a+1) = a^2 - a - 1$$

とする．

2 次不等式の x^2 の係数が正であるから，$D < 0$ が成り立てばよい．

$a^2 - a - 1 < 0$ を解いて　$\boldsymbol{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < a < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} \mathrm{CA}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cos B \\ &= 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{7}{8} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$\mathrm{CA} > 0$ であるから　$\mathrm{CA} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$

また　$\cos C = \dfrac{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 - \mathrm{AB}^2}{2 \cdot \mathrm{BC} \cdot \mathrm{CA}} = \dfrac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = -\dfrac{1}{4}$

$\sin C > 0$ であるから　$\sin C = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{15}}{4}}$

(3) $2+i$ がこの方程式の解であるから

$$(2+i)^3 + a(2+i)^2 + b(2+i) + 15 = 0$$

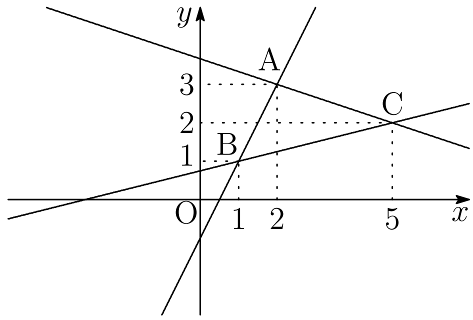
整理して　$(3a + 2b + 17) + (4a + b + 11)i = 0$

a，b は実数であるから

$$3a + 2b + 17 = 0,\ 4a + b + 11 = 0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a = -1,\ b = -7}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 直線 AB の方程式は



$$y-1=\frac{3-1}{2-1}(x-1)$$

すなわち　$y=2x-1$

直線 BC の方程式は

$$y-1=\frac{2-1}{5-1}(x-1)$$

すなわち　$y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$

直線 CA の方程式は

$$y-3=\frac{2-3}{5-2}(x-2)$$

すなわち　$y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$

三角形の内部 (境界は含まない) は，直線 AB の下側，直線 BC の上側，直線 CA の下側であるから，求める連立不等式は

$$\boldsymbol{\begin{cases} y<2x-1 \\ y>\frac{1}{4}x+\frac{3}{4} \\ y<-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3} \end{cases}}$$

(2) △ABC の外接円の中心を $\mathrm{D}(p,\ q)$ とする．

$\mathrm{AD}=\mathrm{BD}$ すなわち $\mathrm{AD}^2=\mathrm{BD}^2$ より

$$(p-2)^2+(q-3)^2=(p-1)^2+(q-1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2p+4q=11 \quad \cdots ①$$

$\mathrm{BD}=\mathrm{CD}$ すなわち $\mathrm{BD}^2=\mathrm{CD}^2$ より

$$(p-1)^2+(q-1)^2=(p-5)^2+(q-2)^2 \quad \text{ゆえに} \quad 8p+2q=27 \quad \cdots ②$$

①,② を解いて　$p=\frac{43}{14}$，$q=\frac{17}{14}$

よって，△ABC の外接円の中心は　$\boldsymbol{\left(\frac{43}{14},\ \frac{17}{14}\right)}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ より　$f'(x) = 2ax + b$

$f(-1) = 6$ より　　　$a - b + c = 6$

$f'(-1) = -6$ より　　$-2a + b = -6$

$f'(1) = -2$ より　　　$2a + b = -2$

よって　　$\boldsymbol{a = 1,\ b = -4,\ c = 1}$

(2) $y = f(x)$ と直線 $y = -2x + 1$ の共有点の x 座標は，方程式

$x^2 - 4x + 1 = -2x + 1$　　これを解いて　$x = 0,\ 2$

区間 $0 \leqq x \leqq 2$ において $-2x + 1 \geqq f(x)$ であるから，

求める図形の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^2 \{(-2x + 1) - (x^2 - 4x + 1)\}dx \\
&= -\int_0^2 x(x - 2)dx \\
&= -\left(-\frac{1}{6}\right)(2 - 0)^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}}
\end{aligned}
$$