平成20年度　崇城大学　薬学部　一般入学試験問題(前期日程)2日目
数学I・数学II・数学A・数学B(平成20年2月1日)80分

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

(1) 次の確率を求めよ。

(a) 1から6までの数字を書いたカードがそれぞれ1枚ずつある。6枚のカードから同時に3枚取り出すとき，1枚のカードの数字が他の2枚のカードの数字の和に等しくなる確率

(b) 大中小3個のさいころを同時に1回投げるとき，1個のさいころの目の数が他の2個のさいころの目の数の和に等しくなる確率

(2) 関数 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値，最小値とそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 放物線 $y = -x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t, -t^2)$ における接線と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ P，Q とする。次の各問に答えよ。

(1) t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を変化するとき，線分 PQ の中点 R の軌跡の方程式を求めよ。ただし，$t = 0$ のときは R は原点とする。

(2) (1) で求めた軌跡と放物線 $y = -x^2$ および点 $\mathrm{T}(2, -4)$ における接線とで囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ $\triangle$OAB において，$\mathrm{OA} = 2$，$\mathrm{OB} = 3$，$\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ$ であり，辺 AB を $2:1$ に内分する点を C，線分 OC を $1:3$ に内分する点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ として，次の各問に答えよ。

(1) 点 D から辺 AB へ下ろした垂線を DE とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) AD の延長が辺 OB と交わる点を F とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (a) 6枚のカードから3枚取り出す組合せは，${}_6\mathrm{C}_3 = \dfrac{6{\cdot}5{\cdot}4}{3{\cdot}2{\cdot}1} = 20$ (通り)

1枚のカードの数字が他の2枚のカードの数字の和に等しくなるのは

$$\{1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 3,\ 4\},\ \{1,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 5\},\ \{1,\ 5,\ 6\},\ \{2,\ 4,\ 6\}$$

の6通りであるから，求める確率は $\dfrac{6}{20} = \boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

(b) 大中小3個のさいころの同時に1回投げたときの目の出方は

$$6^3 = 216\ (\text{通り})$$

3個のさいころ目が

$$\{1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 3,\ 4\},\ \{1,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 5\},\ \{1,\ 5,\ 6\},\ \{2,\ 4,\ 6\}$$

であるのは $6 \times 3! = 36$ 通りある．また，3個のさいころの目が

$$\{1,\ 1,\ 2\},\ \{2,\ 2,\ 4\},\ \{3,\ 3,\ 6\}$$

であるのは $3 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 9$ 通りある．

よって，求める確率は $\dfrac{36+9}{216} = \boldsymbol{\dfrac{5}{24}}$

(2)
$$\begin{aligned}\sin 2x + \sqrt{3}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin 2x + \sqrt{3}\left(\cos 2x \cos\frac{\pi}{3} - \sin 2x \sin\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \sin 2x + \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)\\ &= -\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\\ &= \sin\left(2x + \frac{2}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

ゆえに　$f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{2}{3}\pi\right)$　$\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

このとき，$\dfrac{2}{3}\pi \leqq 2x + \dfrac{2}{3}\pi \leqq \dfrac{5}{3}\pi$ であるから

$2x + \dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{2}{3}\pi$　すなわち　$\boldsymbol{x = 0}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ をとり，

$2x + \dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{3}{2}\pi$　すなわち　$\boldsymbol{x = \dfrac{5}{12}\pi}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-1}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=-x^2$ を微分して　$y'=-2x$

T$(t, -t^2)$ における接線の傾きは　$-2t$

ゆえに T における接線の方程式は，$t \neq 0$ のとき

$$y-(-t^2)=-2t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=-2tx+t^2 \quad \cdots ①$$

P の座標は，① に $y=0$ を代入して　$x=\dfrac{t}{2}$　ゆえに　$\mathrm{P}\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$

Q の座標は，① に $x=0$ を代入して　$y=t^2$　ゆえに　Q$(0,\ t^2)$

線分 PQ の中点 R の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}+0\right)=\frac{t}{4}, \qquad y=\frac{1}{2}(0+t^2)=\frac{t^2}{2}$$

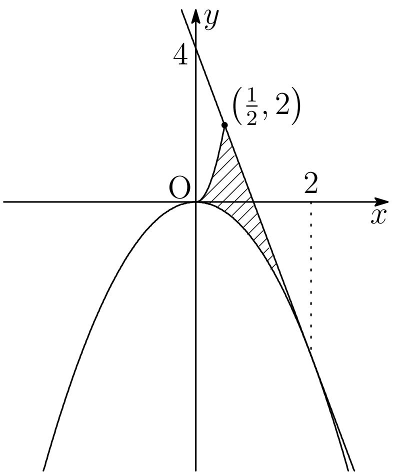
上式は $t=0$ のときも成り立つので，これらの式から t を消去して

$$\boldsymbol{y=8x^2} \quad \left(\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}}\right)$$

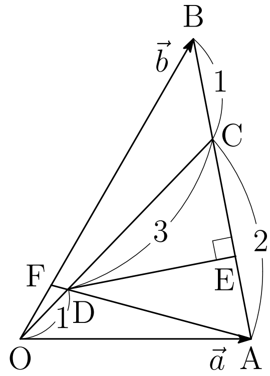
(2) T$(2, -4)$ における接線は，① に $t=2$ を代入して　$y=-4x+4$

求める図形は，図の斜線部分であり，その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}} \{8x^2-(-x^2)\}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left\{(-4x+4)-(-x^2)\right\}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 9x^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (x-2)^2\,dx \\ &= \Big[\ 3x^3\ \Big]_0^{\frac{1}{2}} + \Big[\ \frac{1}{3}(x-2)^3\ \Big]_{\frac{1}{2}}^{2} \\ &= \frac{3}{8}+\frac{9}{8}=\boldsymbol{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) C は線分 AB を 2 : 1 に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$$

D は OC を 1 : 3 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{1}{4}\times\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3} = \frac{\vec{a}+2\vec{b}}{12}$$

E は直線 AB 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = (1-s)\vec{a}+s\vec{b}$$

とおくと (s は実数)

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \left(\frac{11}{12}-s\right)\vec{a}+\left(s-\frac{1}{6}\right)\vec{b} \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}-\vec{a}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}} = 0$ であるから

$$\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left\{\left(\frac{11}{12}-s\right)\vec{a}+\left(s-\frac{1}{6}\right)\vec{b}\right\} = 0$$

$$\left(s-\frac{11}{12}\right)|\vec{a}|^2+\left(\frac{13}{12}-2s\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(s-\frac{1}{6}\right)|\vec{b}|^2 = 0$$

$|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 2\cdot3\cdot\frac{1}{2} = 3$ を上式に代入すると

$$\left(s-\frac{11}{12}\right)\cdot2^2+\left(\frac{13}{12}-2s\right)\cdot3+\left(s-\frac{1}{6}\right)\cdot3^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{23}{84}$$

これを ① に代入して　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \frac{9}{14}\vec{a}+\frac{3}{28}\vec{b}}$

(2) F は，直線 AD 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

とおける．これに (1) の結果を代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = (1-t)\vec{a}+t\cdot\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{12} = \left(1-\frac{11}{12}t\right)\vec{a}+\frac{1}{6}t\vec{b} \quad \cdots ②$$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}/\!/\vec{b}$ であるから

$$1-\frac{11}{12}t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{12}{11}$$

これを ② に代入して　　$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{2}{11}\vec{b}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{2}{11}\vec{b}-\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{12} = \boldsymbol{-\frac{1}{12}\vec{a}+\frac{1}{66}\vec{b}}$