受験番号		氏名	

平成20年度　崇城大学一般入学試験問題(前期日程)2日目
数　　学(平成20年2月1日)

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$まで出題されていますが，志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※　学科

志望学部	志望学科	問題番号 1	2	3	4	5
工学部	**機械工学科**	○	○	○		
	ナノサイエンス学科	○	○			○
	エコデザイン学科	○	○			○
	建築学科	○	○	○		
	宇宙航空システム工学科	○	○	○		
情報学部	**電子情報ネットワーク学科**	○	○			○
	ソフトウェアサイエンス学科	○	○			○
	コンピュータシステムテクノロジー学科	○	○			○
生物生命学部	**応用微生物工学科**	○	○		○	
	応用生命科学科	○	○		○	

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

平成20年度　崇城大学一般入学試験問題(前期日程)2日目
数学I・II・A・B

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

(1) 放物線$y=2x^2+ax+b$とこの放物線に原点に関して対称な曲線が点$(2,-8)$を共有しているとき，定数a，bの値を求めよ。

(2) $xy+3x-15y-3=0$を満たす自然数の組$(x,\ y)$をすべて求めよ。

(3) 関数$y=3^{4x+2}-2\cdot3^{2x}+1$の最小値とそのときの$x$の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 曲線$y=-|\,x\,|(x-2)$と直線$y=-x+2$とで囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ 平行四辺形ABCDにおいて，辺ABを$2:1$に内分する点をE，辺BCを$3:2$に内分する点をFとする。また，AFとEDの交点をGとし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$とする。次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(2) $\triangle$AEGと$\triangle$DGFの面積比を求めよ。

$\boxed{4}$ 数列$\{a_n\}$が$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$を満たしている。次の各問に答えよ。

(1) a_nを求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$を求めよ。

$\boxed{5}$ 放物線$y=x^2$上の3点A，B$(-1,\ 1)$，C$(2,\ 4)$を頂点とする$\triangle$ABCがある。その面積が6のとき，点Aの座標と$\tan B$の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 放物線 $y=2x^2+ax+b\cdots$① と原点に関して対称な曲線は

$$-y=2(-x)^2+a\cdot(-x)+b \quad \text{すなわち} \quad y=-2x^2+ax-b\cdots②$$

①，② はともに点 $(2,-8)$ を通るので

$$-8=2\cdot2^2+a\cdot2+b,\ \ -8=-2\cdot2^2+a\cdot2-b$$

ゆえに　$2a+b=-16,\ 2a-b=0$

これを解いて　$\boldsymbol{a=-4,\ b=-8}$

(2) $xy+3x-15y-3=0$ から

$$\begin{aligned} xy+3x-15y&=3 \\ xy+3x-15y+3\cdot(-15)&=3+3\cdot(-15) \\ (x-15)(y+3)&=-42 \end{aligned}$$

y は自然数であるから，$y+3\geqq4$ に注意して

$$(x-15,\ y+3)=(-7,\ 6),\ (-6,\ 7),\ (-3,\ 14),\ (-2,\ 21),\ (-1,\ 42)$$

よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(8,\ 3),\ (9,\ 4),\ (12,\ 11),\ (13,\ 18),\ (14,\ 39)}$

(3) $3^{2x}=t$ とおくと　$t>0$

また　$y=9(3^{2x})^2-2\cdot3^{2x}+1$

ゆえに　$y=9t^2-2t+1=9\left(t-\dfrac{1}{9}\right)^2+\dfrac{8}{9}$

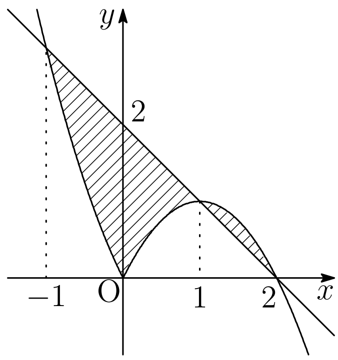
よって　$t=\dfrac{1}{9}$　すなわち　$\boldsymbol{x=-1}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{\dfrac{8}{9}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 曲線 $y=-|\,x\,|(x-2)$ は

$x \geqq 0$ のとき　$y=-x(x-2)=-x^2+2x$

$x<0$ のとき　$y=-(-x)(x-2)=x^2-2x$

この曲線と直線 $y=-x+2$ の共有点の x 座標は



(i) $x \geqq 0$ のとき

$-x^2+2x=-x+2$ を解いて　$x=1,\ 2$

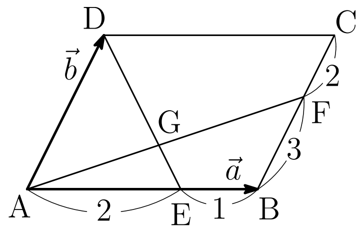
(ii) $x<0$ のとき

$x^2-2x=-x+2$ を解いて　$x=-1$

求める図形の面積 S は，図の斜線部分の面積であるから

$$S=\int_{-1}^{0}\{(-x+2)-(x^2-2x)\}\,dx$$
$$+\int_{0}^{1}\{(-x+2)-(-x^2+2x)\}\,dx$$
$$+\int_{1}^{2}\{(-x^2+2x)-(-x+2)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+x+2)\,dx+\int_{0}^{1}(x^2-3x+2)\,dx+\int_{1}^{2}(-x^2+3x-2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{0}^{1}-\int_{1}^{2}(x-1)(x-2)\,dx$$
$$=\frac{7}{6}+\frac{5}{6}-\left(-\frac{1}{6}\right)(2-1)^3$$
$$=\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{6}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) F は BC を 3 : 2 に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\frac{3}{5}\vec{b}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}$

$$=\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}\quad\cdots①$$

3 点 A，G，F は同一直線上にあるから，
定数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=k\overrightarrow{\mathrm{AF}}\qquad\cdots②$$

① より　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=k\vec{a}+\frac{3}{5}k\vec{b}\quad\cdots③$

③ に $\vec{a}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{3}{2}k\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\frac{3}{5}k\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad\cdots④$$

このとき，E，G，D は同一直線上にあるから

$$\frac{3}{2}k+\frac{3}{5}k=1\quad\text{これを解いて}\quad k=\frac{10}{21}\quad\cdots⑤$$

よって，⑤ を ③ に代入して　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{10}{21}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}}$

(2) ②，⑤ から　AG : GF = 10 : 11　$\cdots⑥$

⑤ を ④ に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{AE}}+2\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{7}\quad\text{ゆえに}\quad \mathrm{EG}:\mathrm{GD}=2:5\quad\cdots⑦$$

よって，⑥，⑦ から

$$\triangle\mathrm{AEG}:\triangle\mathrm{DGF}=10\cdot2:11\cdot5=\mathbf{4:11}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$ において

(i) $n=1$ のとき

$$\frac{1}{a_1}=\frac{1(4{\cdot}1^2+6{\cdot}1-1)}{d} \quad \text{すなわち} \quad a_1=\frac{1}{3}$$

(ii) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n}&=\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}-\frac{(n-1)\{4(n-1)^2+6(n-1)-1\}}{3}\\&=4n^2-1\\&=(2n-1)(2n+1)\end{aligned}$$

ゆえに $\quad a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad \cdots ①$

① は $n=1$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\boldsymbol{\frac{n}{2n+1}}\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ 点 A は放物線 $y=x^2$ 上の点であるから，その座標を $(a,\ a^2)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(2,\ 4)-(-1,\ 1)=(3,\ 3)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(a,\ a^2)-(-1,\ 1)=(a+1,\ a^2-1)$$

$\triangle$ABC の面積が 6 であるから

$$\frac{1}{2}|\,3(a^2-1)-3(a+1)\,|=6$$

ゆえに　$|\,a^2-a-2\,|=4$ $\cdots$①

$a^2-a-2=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}\geqq-\dfrac{9}{4}$ であるから

① から　$a^2-a-2=4$

これを解いて　$a=-2,\ 3$

(i) $a=-2$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-1,\ 3)$ であるから

$$\cos B=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}=\frac{3\cdot(-1)+3\cdot3}{\sqrt{3^2+3^2}\sqrt{(-1)^2+3^2}}=\frac{6}{3\sqrt{2}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$1+\tan^2 B=\dfrac{1}{\cos^2 B}$ であるから

$1+\tan^2 B=(\sqrt{5})^2$　ゆえに　$\tan^2 B=4$

$\cos B>0$ であるから，B は鋭角で，$\tan B>0$

よって　$\tan B=2$

(ii) $a=3$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(4,\ 8)$ であるから

$$\cos B=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}=\frac{3\cdot4+3\cdot8}{\sqrt{3^2+3^2}\sqrt{4^2+8^2}}=\frac{36}{3\sqrt{2}\cdot4\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$1+\tan^2 B=\dfrac{1}{\cos^2 B}$ であるから

$1+\tan^2 B=\left(\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)^2$　ゆえに　$\tan^2 B=\dfrac{1}{9}$

$\cos B>0$ であるから，B は鋭角で，$\tan B>0$

よって　$\tan B=\dfrac{1}{3}$

(i)，(ii) から　**$\mathbf{A(-2,\ 4)}$ のとき $\boldsymbol{\tan B=2}$，$\mathbf{A(3,\ 9)}$ のとき $\boldsymbol{\tan B=\dfrac{1}{3}}$**