

平成20年度 崇城大学 薬学部 一般入学試験問題(前期日程)1日目  
 数学I・数学II・数学A・数学B(平成20年1月31日)80分

1 次の各問に答えよ。

(1) 1, 2, 3, 4, 5の数字を記入したカードがそれぞれ1, 2, 3, 4, 5枚ある。  
 これら15枚から同時に3枚のカードを取り出す。

(a) 3枚のカードに記入された数字の和が6以下になる確率を求めよ。

(b) 3枚のカードに記入された数字の積が偶数になる確率を求めよ。

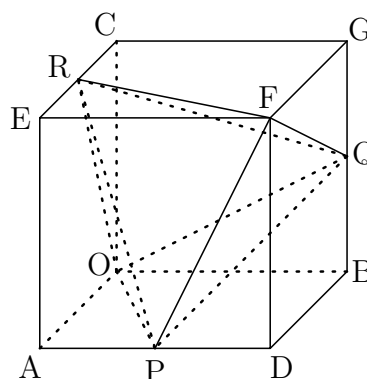
(2)  $\triangle ABC$ において、 $BC = 2AB$ ,  $AC = 1$ のとき、その面積の最大値とそのときのABの長さを求めよ。

2  $t \leq x \leq t+1$ における関数  $f(x) = x^2$ の最大値、最小値をそれぞれ  $g(t)$ ,  $h(t)$  とするとき、 $\int_{-2}^2 \{g(t) - h(t)\} dt$ の値を求めよ。

3 右図の1辺の長さが1の立方体OADB-CEFGにおいて、辺AD, BG, CEのそれぞれの中点をP, Q, Rとする。 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$ として、次の各問に答えよ。

(1)  $\vec{OF}$ と $\vec{PQ}$ を $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ で表せ。また、内積 $\vec{OF} \cdot \vec{PQ}$ を求めよ。

(2) 六面体OPQRFの体積を求めよ。



## 解答例

- 1 (1) (a) 3枚のカードの数字の和が6以下であるのは、5と6の場合である。  
3枚のカードの数字の和が5になるのは  $\{1, 2, 2\}$  の確率は

$$\frac{1 \times {}_2C_2}{{}_{15}C_3} = \frac{1}{455}$$

3枚のカードの数字の和が6になるのは  $\{1, 2, 3\}$  の確率は

$$\frac{1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_{15}C_3} = \frac{6}{455}$$

これらの事象は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{1}{455} + \frac{6}{455} = \frac{1}{65}$$

- (b) 3枚のカードの数字の積が奇数になるのは、1, 3, 5の9枚のカードから3枚取り出す確率であるから

$$\frac{{}_9C_3}{{}_{15}C_3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \div \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12}{65}$$

求める確率は、この余事象の確率であるから  $1 - \frac{12}{65} = \frac{53}{65}$

- (2)  $BC > AB$  であるから、 $AB = x$  とおくと  $BC = 2x$ 、このとき  $\triangle ABC$  が存在するためには、

$$AB + AC > BC, AB + BC > AC$$

ゆえに  $x + 1 > 2x, x + 2x > 1$

したがって  $\frac{1}{3} < x < 1$  ……①

$$2s = AB + BC + AC = x + 2x + 1 = 3x + 1 \text{ とすると, } s = \frac{3x + 1}{2}$$

$\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると、ヘロンの公式により

$$\begin{aligned} S^2 &= s(s-x)(s-2x)(s-1) \\ &= \frac{3x+1}{2} \left( \frac{3x+1}{2} - x \right) \left( \frac{3x+1}{2} - 2x \right) \left( \frac{3x+1}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{16} (3x+1)(x+1)(1-x)(3x-1) \\ &= \frac{1}{16} (-9x^4 + 10x^2 - 1) = -\frac{9}{16} \left( x^2 - \frac{5}{9} \right)^2 + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

① に注意して、 $x^2 = \frac{5}{9}$  のとき  $S^2$  は最大値  $\frac{1}{9}$  をとる。

よって、 $\triangle ABC$  の面積は  $AB = \frac{\sqrt{5}}{3}$  のとき最大値  $\frac{1}{3}$  をとる。

2  $y = f(x)$  のグラフは、下に凸の放物線で、軸は  $y$  軸である。

$$t \leq x \leq t+1 \text{ の中央は } x = t + \frac{1}{2}$$

最大値  $g(t)$  は、次の3つの場合に分けて求める。

$$[1] t + \frac{1}{2} < 0 \text{ すなわち } t < -\frac{1}{2} \text{ のとき}$$

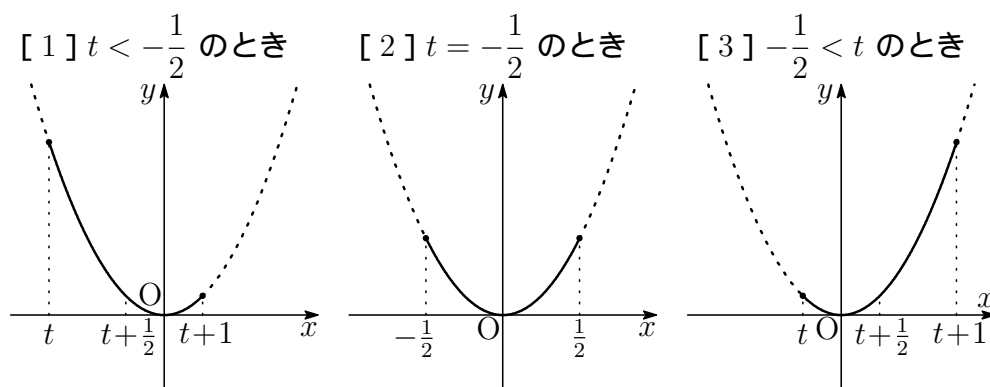
$$x = t \text{ で最大値をとるから } g(t) = f(t) = t^2$$

$$[2] t + \frac{1}{2} = 0 \text{ すなわち } t = -\frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \text{ で最大値をとるから } g(t) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$[3] 0 < t + \frac{1}{2} \text{ すなわち } -\frac{1}{2} < t \text{ のとき}$$

$$x = t+1 \text{ で最大値をとるから } g(t) = f(t+1) = (t+1)^2$$



$$\text{ゆえに } g(t) = \begin{cases} t^2 & \left(t < -\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{4} & \left(t = -\frac{1}{2}\right) \\ (t+1)^2 & \left(-\frac{1}{2} < t\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \int_{-2}^2 g(t) dt &= \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} t^2 dt + \int_{-\frac{1}{2}}^2 (t+1)^2 dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{(t+1)^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^2 = \frac{139}{12} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

最小値  $h(t)$  は、次の3つの場合に分けて求める。

[1]  $t+1 < 0$  すなわち  $t < -1$  のとき

$$x = t+1 \text{ で最小値をとるから } h(t) = f(t+1) = (t+1)^2$$

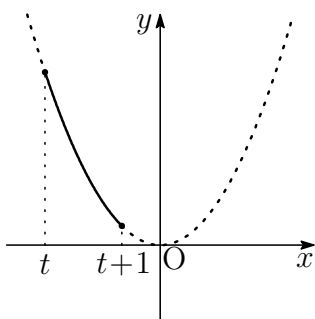
[2]  $t \leq 0 \leq t+1$  すなわち  $-1 \leq t \leq 0$  のとき

$$x = 0 \text{ で最小値をとるから } h(t) = f(0) = 0$$

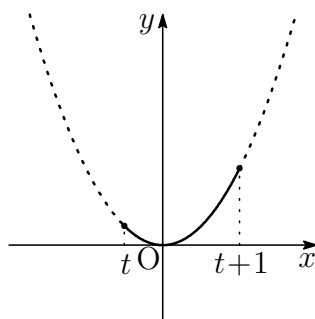
[3]  $0 < t$  のとき

$$x = t \text{ で最小値をとるから } h(t) = f(t) = t^2$$

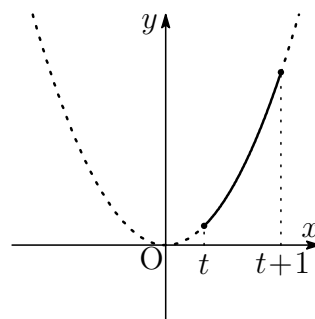
[1]  $t < -1$  のとき



[2]  $-1 \leq t \leq 0$  のとき



[3]  $0 < t$  のとき



$$\text{ゆえに } h(t) = \begin{cases} (t+1)^2 & (t < -1) \\ 0 & (-1 \leq t \leq 0) \\ t^2 & (0 < t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \int_{-2}^2 h(t) dt &= \int_{-2}^{-1} (t+1)^2 dt + \int_0^2 t^2 dt \\ &= \left[ \frac{(t+1)^3}{3} \right]_{-2}^{-1} + \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^2 = 3 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \int_{-2}^2 \{g(t) - h(t)\} dt = \int_{-2}^2 g(t) dt - \int_{-2}^2 h(t) dt = \frac{139}{12} - 3 = \frac{103}{12}$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BQ} \\ &= \frac{1}{2}\vec{b} + (-\vec{a}) + \frac{1}{2}\vec{c} \\ &= -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{b} \perp \vec{c}, \vec{c} \perp \vec{a} \text{ より } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

また,  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$  であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{PQ} &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \\ &= -|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{c}|^2 \\ &= -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ER} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} + \left(-\frac{1}{2}\vec{a}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

(1) と同様にして

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{PR} &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\right) \\ &= -\frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \text{ より } \triangle PQR \perp OF$$

よって, 六面体 OPQRF の体積  $V$  は  $V = \frac{1}{3} \triangle PQR \times OF \quad \dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OF}|^2 &= \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OF} \\ &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

ゆえに  $OF = |\overrightarrow{OF}| = \sqrt{3} \quad \dots \textcircled{2}$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{PQ}|^2 &= \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} \\
&= \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \\
&= |\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{c}|^2 \\
&= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{PR}|^2 &= \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PR} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\right) \\
&= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\right) \\
&= \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{c}|^2 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ゆえに } \Delta PQR &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \dots \textcircled{3}
\end{aligned}$$

②, ③を①に代入して

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{8} \times \sqrt{3} = \frac{3}{8}$$