受験番号		氏名	

平成20年度　崇城大学一般入学試験問題(前期日程)1日目
数　　学(平成20年1月31日)

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$～$\boxed{5}$まで出題されていますが, 志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※ 学科

志望学部	志望学科	問題番号				
		1	2	3	4	5
工学部	**機械工学科**	○	○	○	／	／
	ナノサイエンス学科	○	○	／	／	○
	エコデザイン学科	○	○	／	／	○
	建築学科	○	○	○	／	／
	宇宙航空システム工学科	○	○	○	／	／
情報学部	**電子情報ネットワーク学科**	○	○	／	／	○
	ソフトウェアサイエンス学科	○	○	／	／	○
	コンピュータシステムテクノロジー学科	○	○	／	／	○
生物生命学部	**応用微生物工学科**	○	○	／	○	／
	応用生命科学科	○	○	／	○	／

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

平成 20 年度　崇城大学一般入学試験問題 (前期日程)1 日目
数学 I・II・A・B

1 次の各問に答えよ。

(1) $x = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ とするとき，$x - \dfrac{1}{x}$ の整数部分と小数部分を求めよ。

(2) 関数 $y = (x-2)|\,x+3\,| \quad (-4 \leqq x \leqq 3)$ の最大値，最小値とそのときの x の値を求めよ。

(3) a は 1 でない正の数である。$\log_2 a^2 + \log_a 2^3 = 5$ を満たす a の値を求めよ。

2 $f(x) = ax^2 + bx + c$ とする。放物線 $y = f(x)$ は点 $(2,\ 2)$ において放物線 $y = -x^2 + 5x - 4$ と接線を共有し，さらに，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{17}{6}$ を満たしている。次の各問に答えよ。

(1) 定数 a，b，c の値を求めよ。

(2) 原点を通り，放物線 $y = f(x)$ に接する直線の方程式を求めよ。

3 等差数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 5 項までの和が -85 で，第 16 項から第 20 項までの和が 65 である。次の各問に答えよ。

(1) 初項と公差を求めよ。

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n の最小値とそのときの n の値を求めよ。

4 直径 4 の円に内接する $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB} = 1$ で，直径 AD は辺 BC と点 E で交わる。次の各問に答えよ。

(1) $\cos\angle\mathrm{BAD}$ の値を求めよ。また，$\mathrm{AE} = a$ として，BE の長さを a で表せ。

(2) $a = \dfrac{1}{2}$ のとき，EC，AC の長さを求めよ。

5 x についての 2 次方程式 $(x-1)(x-2) + (k+a)x + a = 0$ は $k \geqq 1$ であるすべての実数 k に対して実数解をもっている。このとき，実数 a の値の範囲を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=2\sqrt{15}$

$2\sqrt{15}$ の整数部分を a，小数部分を b とすると

$$2\sqrt{15}=a+b \quad \cdots ①$$

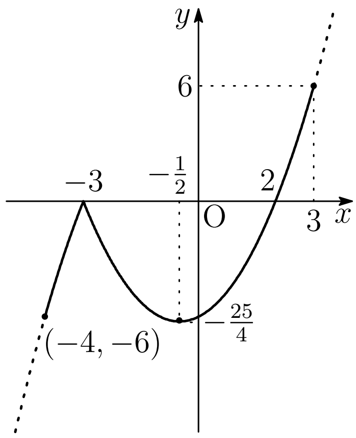
$2\sqrt{15}=\sqrt{60}$ であるから，$\sqrt{49}<\sqrt{60}<\sqrt{64}$ より

$a=7$　これを ① に代入して　$b=2\sqrt{15}-7$

よって，$\boldsymbol{x-\dfrac{1}{x}}$ **の整数部分は 7，小数部分は** $\boldsymbol{2\sqrt{15}-7}$

(2) (i) $-4 \leqq x < -3$ のとき

$$\begin{aligned} y &= (x-2)\{-(x+3)\} \\ &= -(x-2)(x+3) \\ &= -x^2-x+6 \\ &= -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4} \end{aligned}$$



(ii) $-3 \leqq x \leqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} y &= (x-2)(x+3) \\ &= x^2+x-6 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4} \end{aligned}$$

(i)，(ii) から，$\boldsymbol{x=3}$ **で最大値 6，**$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{2}}$ **で最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{25}{4}}$

(3) $\log_2 a^2+\log_a 2^3=5$ から

$$\begin{aligned} 2\log_2 a+\frac{\log_2 2^3}{\log_2 a} &= 5 \\ 2\log_2 a+\frac{3}{\log_2 a} &= 5 \\ 2(\log_2 a)^2-5\log_2 a+3 &= 0 \\ (\log_2 a-1)(2\log_2 a-3) &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに　$\log_2 a=1,\ \dfrac{3}{2}$　よって　$\boldsymbol{a=2,\ 2\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=-x^2+5x-4$ を微分して　$y'=-2x+5$

この放物線上の点 $(2,\ 2)$ における接線の傾きは　$y'=-2\cdot2+5=1$

$f(x)=ax^2+bx+c$ を微分して　$f'(x)=2ax+b$

2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=-x^2+5x+4$ は点 $(2,\ 2)$ において共通の接線をもつので

$f(2)=2$ より　　$4a+2b+c=2$　$\cdots$①

$f'(2)=1$ より　　$4a+b=1$　　　$\cdots$②

$\displaystyle\int_0^1 f(x)=\frac{17}{6}$ から

$$\int_0^1 (ax^2+bx+c)\,dx=\frac{17}{6}$$

ゆえに　$$\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_0^1=\frac{17}{6}$$

すなわち　$$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=\frac{17}{6}$$

整理して　$2a+3b+6c=17$　$\cdots$③

①，②，③ を解いて　　$\boldsymbol{a=1,\ b=-3,\ c=4}$

(2) 原点を通り，放物線 $y=x^2-3x+4$ に接する直線を $y=mx$ とすると，2 次方程式

$$x^2-3x+4=mx \quad \text{すなわち} \quad x^2-(m+3)x+4=0$$

は重解をもつので，$D=0$ より

$\{-(m+3)\}^2-4\cdot1\cdot4=0$

整理して　$m^2+6m-7=0$

すなわち　$(m+7)(m-1)=0$

ゆえに　$m=-7,\ 1$

よって，求める直線の方程式は　$\boldsymbol{y=-7x,\ y=x}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 初項を a，公差を d とする．

初項から第 5 項までの和が -85 であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 5\{2a+(5-1)d\}=-85$$

すなわち　$a+2d=-17 \quad \cdots ①$

第 16 項は $a+15d$，第 20 項は $a+19d$ であるから，
第 16 項から第 20 項までの和は (項数 $20-16+1=5$)

$$\frac{1}{2}\cdot 5\{(a+15d)+(a+19d)\}=65$$

すなわち　$a+17d=13 \quad \cdots ②$

①，② を解いて　$a=-21,\ d=2$

よって　**初項 $\boldsymbol{-21}$，公差 $\mathbf{2}$**

(2) (1) の結果から，一般項は　$a_n=-21+(n-1)\cdot 2=2n-23$

ゆえに，$n \leqq 11$ のとき $a_n<0$，$n \geqqq 12$ のとき $a_n>0$

したがって，S_n は $\boldsymbol{n=11}$ のとき最小となり，最小値は

$$S_{11}=\frac{1}{2}\cdot 11\{2\cdot(-21)+(11-1)\cdot 2\}=\mathbf{-121}$$

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) AD は円の直径であるから　$\angle\mathrm{ABD} = 90^\circ$

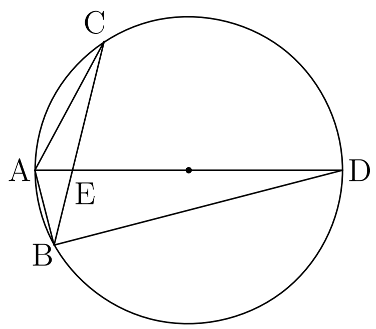
したがって　$\cos\angle\mathrm{BAD} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

$\triangle\mathrm{ABE}$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{BE}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AE}^2 - 2\mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{AE}\cos\angle\mathrm{BAD}\\ &= 1^2 + a^2 - 2{\cdot}1{\cdot}a{\cdot}\frac{1}{4}\\ &= a^2 - \frac{1}{2}a + 1\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{BE} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}a + 1}}$

(2) $\triangle\mathrm{ABD}$ は，$\angle\mathrm{B} = 90^\circ$ の直角三角形であるから



$$\begin{aligned}\mathrm{BD} &= \sqrt{\mathrm{AD}^2 - \mathrm{AB}^2}\\ &= \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}\end{aligned}$$

$a = \dfrac{1}{2}$ のとき　$\mathrm{ED} = 4 - a = \dfrac{7}{2}$

$a = \dfrac{1}{2}$ を (1) の結果に代入して　$\mathrm{BE} = 1$

$\triangle\mathrm{EBD} \backsim \triangle\mathrm{EAC}$ で $\mathrm{BE} : \mathrm{AE} = 1 : \dfrac{1}{2}$ より

$$\mathrm{EC} = \frac{1}{2}\mathrm{ED} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = \boldsymbol{\frac{7}{4}}$$

$$\mathrm{AC} = \frac{1}{2}\mathrm{BD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{15} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $(x-1)(x-2)+(k+a)x+a=0$ を整理すると

$$x^2+(k+a-3)x+a+2=0$$

この方程式の判別式 D は

$$D=(k+a-3)^2-4(a+2)$$

ゆえに，D は k の 2 次関数であり，$k \geqq 1$ における D の最小値が 0 以上であればよいので，次の 2 つの場合分けをする．

(i) $3-a<1$　すなわち　$a>2$ のとき

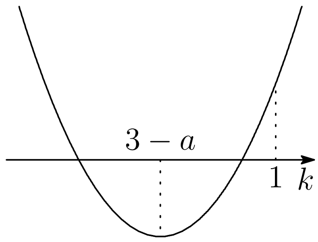
D は $k=1$ で最小値

$$(1+a-3)^2-4(a+2)=a^2-8a-4$$

をとるので，$a^2-8a-4 \geqq 0$ を解いて

$$a \leqq 4-2\sqrt{5},\ 4+2\sqrt{5} \leqq a$$

このとき，$a>2$ に注意して　　$4+2\sqrt{5} \leqq a$



(ii) $1 \leqq 3-a$　すなわち　$a \leqq 2$ のとき

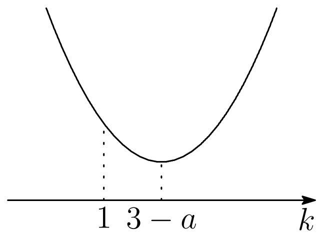
D は $k=3-a$ で最小値

$$-4(a+2)$$

をとるので，$a \leqq 2$ に注意しながら，

$$-4(a+2) \geqq 0$$

を解いて　　$a \leqq -2$



よって，(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{a \leqq -2,\ 4+2\sqrt{5} \leqq a}$